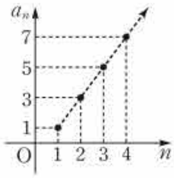
# 정답 및 풀이

I. 수열의 극한

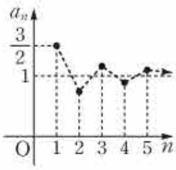
# 01 수열의 극한

**유제** 본책 11~28쪽

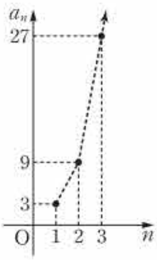
**001-❶** (1) $n$의 값이 커짐에 따라 $a_n$의 값의 변화를 그래프로 나타내면 오른쪽과 같다.
따라서 수열 $\{a_n\}$은 양의 무한대로 발산한다.



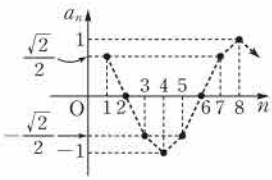
(2) $n$의 값이 커짐에 따라 $a_n$의 값의 변화를 그래프로 나타내면 오른쪽과 같다.
따라서 수열 $\{a_n\}$은 수렴하고, 그 극한값은 1이다.



(3) $n$의 값이 커짐에 따라 $a_n$의 값의 변화를 그래프로 나타내면 오른쪽과 같다.
따라서 수열 $\{a_n\}$은 양의 무한대로 발산한다.



(4) $n$의 값이 커짐에 따라 $a_n$의 값의 변화를 그래프로 나타내면 오른쪽과 같다.
따라서 수열 $\{a_n\}$은 발산(진동)한다.



답 (1) 발산 (2) 수렴, 1 (3) 발산 (4) 발산

**002-❶** (1) $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-2n+1}{2n^3-2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}-\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^3}}{2-\frac{2}{n^2}}$

$=\frac{0-0+0}{2-0}=0$

(2) $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+3n+1}{7n-5}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+3+\frac{1}{n}}{7-\frac{5}{n}}=\infty$

(3) $\lim_{n\to\infty}\frac{n-2}{\sqrt{n+1}+3n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{2}{n}}{\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+3}$

$=\frac{1-0}{0+3}=\frac{1}{3}$

(4) $\lim_{n\to\infty}\frac{(1-n)(3n+5)}{(n+3)(2n-1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{-3n^2-2n+5}{2n^2+5n-3}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{-3-\frac{2}{n}+\frac{5}{n^2}}{2+\frac{5}{n}-\frac{3}{n^2}}$

$=\frac{-3-0+0}{2+0-0}=-\frac{3}{2}$

답 (1) 수렴, 0 (2) 발산
(3) 수렴, $\frac{1}{3}$ (4) 수렴, $-\frac{3}{2}$

**Remark▶**

$\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 수열의 극한에서
① (분자의 차수)=(분모의 차수)
: 극한값은 최고차항의 계수의 비이다.
② (분자의 차수)<(분모의 차수)
: 극한값은 0이다.
③ (분자의 차수)>(분모의 차수)
: 극한값은 없다. 즉 양의 무한대($\infty$) 또는 음의 무한대($-\infty$)로 발산한다.

**002-❷** (1) $1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\cdots+n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2n^2}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n}{2n^2}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{2}$

$=\frac{1+0}{2}=\frac{1}{2}$

(2) $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)$

$\cdots\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\ \cdots\ \cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n+1}{n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{2}=\frac{1+0}{2}=\frac{1}{2}$

답 (1) $\frac{1}{2}$ (2) $\frac{1}{2}$

**003-❶** (1) $\lim_{n\to\infty}(3n^3+2n^2-n+1)$

$=\lim_{n\to\infty}n^3\left(3+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}\right)=\infty$

(2) $\lim_{n\to\infty} n(\sqrt{n^2+1}-n)$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{n(\sqrt{n^2+1}-n)(\sqrt{n^2+1}+n)}{\sqrt{n^2+1}+n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}+n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1}$

$=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$

(3) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+6n}-n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+6n}+n}{(\sqrt{n^2+6n}-n)(\sqrt{n^2+6n}+n)}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+6n}+n}{6n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{6}{n}}+1}{6}$

$=\frac{1+1}{6}=\frac{1}{3}$

답 (1) 발산 (2) 수렴, $\frac{1}{2}$ (3) 수렴, $\frac{1}{3}$

**004-❶** (1) $\lim_{n\to\infty}\frac{an^2-3n+4}{3n^2-n+2}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{a-\frac{3}{n}+\frac{4}{n^2}}{3-\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}$

$=\frac{a}{3}$

따라서 $\frac{a}{3}=\frac{2}{3}$이므로 $a=2$

(2) $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{2n^2+an}-\sqrt{2n^2-n})$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{2n^2+an}-\sqrt{2n^2-n})(\sqrt{2n^2+an}+\sqrt{2n^2-n})}{\sqrt{2n^2+an}+\sqrt{2n^2-n}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{(a+1)n}{\sqrt{2n^2+an}+\sqrt{2n^2-n}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{a+1}{\sqrt{2+\frac{a}{n}}+\sqrt{2-\frac{1}{n}}}$

$=\frac{a+1}{2\sqrt{2}}$

따라서 $\frac{a+1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$이므로

$a+1=2 \qquad \therefore a=1$

답 (1) 2 (2) 1

**004-❷** 극한값이 0이 아니므로

$a=0$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{bn+1}{an^2-2n+4}=\lim_{n\to\infty}\frac{bn+1}{-2n+4}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{b+\frac{1}{n}}{-2+\frac{4}{n}}=-\frac{b}{2}$

따라서 $-\frac{b}{2}=3$이므로 $b=-6$

$\therefore a-b=6$

답 6

**005-❶** (1) $\frac{3a_n+5}{7-2a_n}=b_n$으로 놓으면

$3a_n+5=b_n(7-2a_n)$

$(3+2b_n)a_n=7b_n-5$

$\therefore a_n=\frac{7b_n-5}{3+2b_n}$

이때 $\lim_{n\to\infty}b_n=1$이므로

$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{7b_n-5}{3+2b_n}=\frac{7\cdot1-5}{3+2\cdot1}=\frac{2}{5}$

(2) $(2n+3)a_n=b_n$으로 놓으면

$a_n=\frac{b_n}{2n+3}$

이때 $\lim_{n\to\infty}b_n=2$이므로

$\lim_{n\to\infty}(n+5)a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+5)b_n}{2n+3}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+5}{2n+3}\cdot\lim_{n\to\infty}b_n$

$=\frac{1}{2}\cdot2=1$

답 (1) $\frac{2}{5}$ (2) 1

다른 풀이 (1) $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$ ($\alpha$는 실수)로 놓으면 주어진 등식에서

$\frac{3\alpha+5}{7-2\alpha}=1, \qquad 3\alpha+5=7-2\alpha$

$5\alpha=2 \qquad \therefore \alpha=\frac{2}{5}$

$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n=\frac{2}{5}$

**006-❶** (1) $-1\le\cos n\theta\le1$이므로

$\frac{-(1+n)}{n^2}\le\frac{(1+n)\cos n\theta}{n^2}\le\frac{1+n}{n^2}$

이때

$\lim_{n\to\infty}\frac{-(1+n)}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\left\{-\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n}\right)\right\}=0,$

$\lim_{n\to\infty}\frac{1+n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n}\right)=0$

이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim_{n\to\infty}\frac{(1+n)\cos n\theta}{n^2}=0$

(2) $\frac{1}{\sqrt{n^2+2n}}<a_n<\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$에서

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+2n}}<na_n<\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}$$

이때

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+2n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}}=1,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}=1$$

이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}na_n=1$$

답 (1) 0 (2) 1

**007-①** (1) $\lim_{n\to\infty}\frac{3^n+1}{2^{2n+1}+2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^n+1}{2\cdot4^n+2^n}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n+\left(\frac{1}{4}\right)^n}{2+\left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

$$=\frac{0+0}{2+0}$$

$$=0$$

(2) $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{8^n}-3^{n-1}}{3^n-2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{\sqrt{8}}{3}\right)^n-\frac{1}{3}}{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}$

$$=\frac{0-\frac{1}{3}}{1-0}=-\frac{1}{3}$$

(3) $\lim_{n\to\infty}\frac{3^n-5^n}{2^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^n-5^n}{2\cdot2^n}$

$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{3}{2}\right)^n-\left(\frac{5}{2}\right)^n\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5}{2}\right)^n\left\{\left(\frac{3}{5}\right)^n-1\right\}$$

$$=-\infty$$

(4) $\lim_{n\to\infty}\frac{4\cdot9^n-5^{n+1}}{5^n+3^{2n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{4\cdot9^n-5\cdot5^n}{5^n+9^n}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4-5\cdot\left(\frac{5}{9}\right)^n}{\left(\frac{5}{9}\right)^n+1}$$

$$=\frac{4-0}{0+1}$$

$$=4$$

답 (1) 수렴, 0 (2) 수렴, $-\frac{1}{3}$
(3) 발산 (4) 수렴, 4

**007-②** $\lim_{n\to\infty}(5^n-3^n)^{\frac{1}{n}}$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[5^n\left\{1-\left(\frac{3}{5}\right)^n\right\}\right]^{\frac{1}{n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}(5^n)^{\frac{1}{n}}\cdot\left\{1-\left(\frac{3}{5}\right)^n\right\}^{\frac{1}{n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}5\cdot\left\{1-\left(\frac{3}{5}\right)^n\right\}^{\frac{1}{n}}=5\cdot1=5$$

답 5

**008-①** (1) 등비수열 $\left\{\left(\frac{x^2-x}{2}\right)^n\right\}$은 첫째항과 공비가 모두 $\frac{x^2-x}{2}$이므로 이 수열이 수렴하려면

$$-1<\frac{x^2-x}{2}\le1 \qquad \therefore -2<x^2-x\le2$$

(i) $-2<x^2-x$에서 $x^2-x+2>0$이고

$$x^2-x+2=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}>0$$

따라서 모든 실수 $x$에 대하여 성립한다.

(ii) $x^2-x\le2$에서 $x^2-x-2\le0$이므로

$$(x+1)(x-2)\le0$$

$$\therefore -1\le x\le2$$

(i), (ii)에서 구하는 $x$의 값의 범위는

$$-1\le x\le2$$

(2) 등비수열 $\{x(x-1)^n\}$은 첫째항이 $x(x-1)$, 공비가 $x-1$이므로 이 수열이 수렴하려면

$$x(x-1)=0 \text{ 또는 } -1<x-1\le1$$

따라서 $x=0$ 또는 $x=1$ 또는 $0<x\le2$이므로 구하는 $x$의 값의 범위는

$$0\le x\le2$$

답 (1) $-1\le x\le2$ (2) $0\le x\le2$

**008-②** 등비수열 $\{(\log_3 k-1)^n\}$은 첫째항과 공비가 모두 $\log_3 k-1$이므로 이 수열이 수렴하려면

$$-1<\log_3 k-1\le1, \qquad 0<\log_3 k\le2$$

$$\log_3 3^0<\log_3 k\le\log_3 3^2 \qquad \therefore 1<k\le9$$

따라서 정수 $k$는 2, 3, 4, …, 9이므로 그 합은

$$2+3+4+\cdots+9=\frac{8(2+9)}{2}=44$$

답 44

**009-①** (i) $|r|<1$일 때, $\lim_{n\to\infty}r^n=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-r^n}{1+r^n}=\frac{1-0}{1+0}=1$$

(ii) $r=1$일 때, $\lim_{n\to\infty}r^n=1$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-r^n}{1+r^n}=\frac{1-1}{1+1}=0$$

(iii) $|r|>1$일 때, $\lim_{n\to\infty}|r^n|=\infty$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-r^n}{1+r^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{r^n}-1}{\frac{1}{r^n}+1}=\frac{0-1}{0+1}=-1$$

답 $\begin{cases} |r|<1\text{일 때,} & 1 \\ r=1\text{일 때,} & 0 \\ |r|>1\text{일 때,} & -1 \end{cases}$

**009-❷** (i) $|x|<1$일 때, $\lim_{n\to\infty}x^{2n}=\lim_{n\to\infty}x^{2n-1}=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-x^{2n-1}}{1+x^{2n}}=\frac{1-0}{1+0}=1$$

(ii) $x=1$일 때, $\lim_{n\to\infty}x^{2n}=\lim_{n\to\infty}x^{2n-1}=1$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-x^{2n-1}}{1+x^{2n}}=\frac{1-1}{1+1}=0$$

(iii) $|x|>1$일 때, $\lim_{n\to\infty}x^{2n}=\infty$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-x^{2n-1}}{1+x^{2n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{x^{2n}}-\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^{2n}}+1}$$

$$=\frac{0-\frac{1}{x}}{0+1}=-\frac{1}{x}$$

(iv) $x=-1$일 때, $\lim_{n\to\infty}x^{2n}=1$, $\lim_{n\to\infty}x^{2n-1}=-1$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-x^{2n-1}}{1+x^{2n}}=\frac{1-(-1)}{1+1}=1$$

이상에서 극한값이 1이 되도록 하는 $x$의 값의 범위는

$-1\le x<1$ 답 $-1\le x<1$

**010-❶** $a_{n+1}=2a_n+1$을 $a_{n+1}-\alpha=2(a_n-\alpha)$로 놓으면

$a_{n+1}=2a_n-\alpha$

$-\alpha=1$이므로 $\alpha=-1$

$\therefore a_{n+1}+1=2(a_n+1)$

따라서 수열 $\{a_n+1\}$은 첫째항이 $a_1+1=1+1=2$, 공비가 2인 등비수열이므로

$a_n+1=2\cdot 2^{n-1}$

$\therefore a_n=2^n-1$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{4^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n-1}{4^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right\}=0$$

답 0

## 중단원 연습 문제

본책 29~33쪽

**01** ② **02** (1) $\frac{1}{3}$ (2) $-\frac{2019}{2018}$

**03** $\log_2\frac{3}{4}$ **04** $\frac{2}{3}$ **05** $\frac{1}{2}$ **06** 12

**07** 2 **08** ① **09** $-3$ **10** $-26$ **11** ③

**12** $0<x<\frac{\pi}{2}$ **13** ③ **14** ② **15** 2

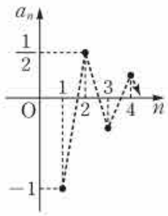
**16** $-2$ **17** $\frac{2}{3}$ **18** 2 **19** ④ **20** 4

**21** ① **22** ⑤ **23** 33 **24** 16

**01** 전략 $n$의 값에 따른 $a_n$의 값의 변화를 그래프로 나타낸다.

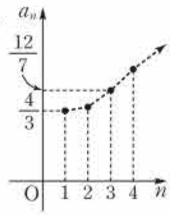
풀이 주어진 수열의 일반항에 $n=1, 2, 3, \cdots$을 대입하여 $a_n$의 값의 변화를 그래프로 나타내면 다음과 같다.

ㄱ.



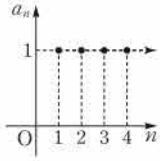

➡ 0으로 수렴

ㄴ.



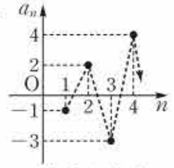

➡ 양의 무한대로 발산

ㄷ.




➡ 1로 수렴

ㄹ.




➡ 발산 (진동)

이상에서 수열 $\{a_n\}$이 수렴하는 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ②

**02** 전략 수열의 합 또는 분모의 유리화를 이용하여 식을 간단히 한다.

풀이 (1) $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$

$$=\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n^3}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+3n+1}{6n^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}{6}=\frac{1}{3}$$

(2) $\lim_{n\to\infty}\frac{n-\sqrt{n^2-2019}}{\sqrt{n^2-2018}-n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n-\sqrt{n^2-2019})(n+\sqrt{n^2-2019})(\sqrt{n^2-2018}+n)}{(\sqrt{n^2-2018}-n)(\sqrt{n^2-2018}+n)(n+\sqrt{n^2-2019})}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{2019(\sqrt{n^2-2018}+n)}{-2018(n+\sqrt{n^2-2019})}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{2019\left(\sqrt{1-\frac{2018}{n^2}}+1\right)}{-2018\left(1+\sqrt{1-\frac{2019}{n^2}}\right)}$

$=\frac{2019(1+1)}{-2018(1+1)}=-\frac{2019}{2018}$

답 (1) $\frac{1}{3}$ (2) $-\frac{2019}{2018}$

## 03

전략 로그의 성질을 이용하여 먼저 로그를 포함한 식을 간단히 한다.

풀이 $\log_2(3n-1)+\log_{\sqrt{2}}(n+2)-\log_2(4n^3+1)$

$=\log_2(3n-1)+\log_2(n+2)^2-\log_2(4n^3+1)$

$=\log_2\frac{(3n-1)(n+2)^2}{4n^3+1}$ ··· ❶

따라서 구하는 값은

$\lim_{n\to\infty}\log_2\frac{(3n-1)(n^2+4n+4)}{4n^3+1}$

$=\lim_{n\to\infty}\log_2\frac{\left(3-\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{4}{n}+\frac{4}{n^2}\right)}{4+\frac{1}{n^3}}$

$=\log_2\frac{3}{4}$ ··· ❷

답 $\log_2\frac{3}{4}$

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ❶ 로그를 포함한 식을 간단히 할 수 있다. | 40 % |
| ❷ 극한값을 구할 수 있다. | 60 % |

**Remark▶**

일반적으로 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha\ (a_n>0,\ \alpha>0)$일 때

$\lim_{n\to\infty}\log a_n=\log(\lim_{n\to\infty}a_n)=\log\alpha$

## 04

전략 먼저 수열 $\{a_n\}$의 첫째항과 공차를 이용하여 수열 $\{b_n\}$의 일반항을 구한다.

풀이 수열 $\{a_n\}$이 첫째항이 2, 공차가 3인 등차수열이므로

$a_n=2+(n-1)\cdot3=3n-1$

$b_n=\frac{a_n+a_{n+1}}{3}$이므로

$b_n=\frac{3n-1+3(n+1)-1}{3}=\frac{6n+1}{3}$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{6n+1}{3}}{3n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{6n+1}{9n-3}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{6+\frac{1}{n}}{9-\frac{3}{n}}=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$

답 $\frac{2}{3}$

## 05

전략 $\sqrt{4n^2+2n+1}$의 값의 범위를 구하여 정수 부분을 찾는다.

풀이 $(2n)^2<4n^2+2n+1<(2n+1)^2$이므로

$2n<\sqrt{4n^2+2n+1}<2n+1$ ··· ❶

따라서 $\sqrt{4n^2+2n+1}$의 정수 부분이 $2n$이므로

$a_n=\sqrt{4n^2+2n+1}-2n$ ··· ❷

$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{4n^2+2n+1}-2n)(\sqrt{4n^2+2n+1}+2n)}{\sqrt{4n^2+2n+1}+2n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{\sqrt{4n^2+2n+1}+2n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n}}{\sqrt{4+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}+2}$

$=\frac{2}{2+2}=\frac{1}{2}$ ··· ❸

답 $\frac{1}{2}$

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ❶ $\sqrt{4n^2+2n+1}$의 값의 범위를 구할 수 있다. | 30 % |
| ❷ $a_n$을 구할 수 있다. | 30 % |
| ❸ $\lim_{n\to\infty}a_n$의 값을 구할 수 있다. | 40 % |

## 06

전략 좌변의 분모를 1로 보고 유리화하여 구한 극한값을 우변의 값과 비교한다.

풀이 $\lim_{n\to\infty}an(\sqrt{4n^2+1}-2n)$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{an(\sqrt{4n^2+1}-2n)(\sqrt{4n^2+1}+2n)}{\sqrt{4n^2+1}+2n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{an}{\sqrt{4n^2+1}+2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a}{\sqrt{4+\frac{1}{n^2}}+2}$

$=\frac{a}{2+2}=\frac{a}{4}$

따라서 $\frac{a}{4}=3$이므로 $a=12$

답 12

**07** 전략 $(3n+1)a_n=b_n$으로 놓고 $a_n$을 $b_n$에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 $(3n+1)a_n=b_n$으로 놓으면

$$a_n=\frac{b_n}{3n+1}$$

이때 $\lim_{n\to\infty}b_n=4$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^3a_n}{2n^2+5}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^3\cdot\frac{b_n}{3n+1}}{2n^2+5}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^3b_n}{(2n^2+5)(3n+1)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^3b_n}{6n^3+2n^2+15n+5}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3b_n}{6+\frac{2}{n}+\frac{15}{n^2}+\frac{5}{n^3}}$$
$$=\frac{3\cdot4}{6}=2$$

답 2

**08** 전략 $a_n-b_n=c_n$으로 놓고 $\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$, $\lim_{n\to\infty}c_n=5$임을 이용한다.

풀이 $a_n-b_n=c_n$으로 놓으면 $b_n=a_n-c_n$

이때 $\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$, $\lim_{n\to\infty}c_n=5$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{c_n}{a_n}=0$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_n-3b_n}{2a_n+b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-3(a_n-c_n)}{2a_n+a_n-c_n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-2a_n+3c_n}{3a_n-c_n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-2+\frac{3c_n}{a_n}}{3-\frac{c_n}{a_n}}=-\frac{2}{3}$$

답 ①

**09** 전략 $-1\le\sin n\theta\le1$임을 이용한다.

풀이 $-1\le\sin n\theta\le1$이므로

$$-\frac{1}{n^2}\le\frac{\sin n\theta}{n^2}\le\frac{1}{n^2}$$ ··· ❶

이때 $\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n^2}\right)=0$, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin n\theta}{n^2}=0$$ ··· ❷

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{\sin n\theta-9n^2}{n+3n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\sin n\theta}{n^2}-9}{\frac{1}{n}+3}$$
$$=-3$$ ··· ❸

답 $-3$

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ❶ $\frac{\sin n\theta}{n^2}$의 값의 범위를 구할 수 있다. | 30 % |
| ❷ $\lim_{n\to\infty}\frac{\sin n\theta}{n^2}$의 값을 구할 수 있다. | 30 % |
| ❸ $\lim_{n\to\infty}\frac{\sin n\theta-9n^2}{n+3n^2}$의 값을 구할 수 있다. | 40 % |

**10** 전략 함수 $f(x)$에 $x=\frac{1}{3}$, $x=3$을 각각 대입한 후 등비수열의 극한을 이용한다.

풀이 $$f\left(\frac{1}{3}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{2n+3}+3\cdot\frac{1}{3}}{\left(\frac{1}{3}\right)^{2n}+1}=\frac{0+1}{0+1}=1$$

$$f(3)=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{2n+3}+3\cdot3}{3^{2n}+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^3+\left(\frac{1}{3}\right)^{2n-2}}{1+\left(\frac{1}{3}\right)^{2n}}$$
$$=\frac{27+0}{1+0}=27$$

$$\therefore f\left(\frac{1}{3}\right)-f(3)=-26$$

답 $-26$

다른 풀이 (i) $|x|<1$일 때, $\lim_{n\to\infty}x^{2n+3}=\lim_{n\to\infty}x^{2n}=0$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+3}+3x}{x^{2n}+1}=3x$$

(ii) $x=1$일 때, $\lim_{n\to\infty}x^{2n+3}=\lim_{n\to\infty}x^{2n}=1$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+3}+3x}{x^{2n}+1}=\frac{1+3}{1+1}=2$$

(iii) $|x|>1$일 때, $\lim_{n\to\infty}|x^{2n+3}|=\lim_{n\to\infty}x^{2n}=\infty$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+3}+3x}{x^{2n}+1}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{x^3+\frac{3}{x^{2n-1}}}{1+\frac{1}{x^{2n}}}=x^3$$

(iv) $x=-1$일 때, $\lim_{n\to\infty}x^{2n+3}=-1$, $\lim_{n\to\infty}x^{2n}=1$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+3}+3x}{x^{2n}+1}$$
$$=\frac{-1-3}{1+1}=-2$$

이상에서

$$f(x)=\begin{cases}3x & (|x|<1)\\ 2 & (x=1)\\ -2 & (x=-1)\\ x^3 & (|x|>1)\end{cases}$$

$$\therefore f\left(\frac{1}{3}\right)-f(3)=3\cdot\frac{1}{3}-3^3=-26$$

**11** 전략 $x\neq-1$이므로 $x$의 값의 범위를 $|x|<1$, $x=1$, $|x|>1$로 나누어 극한을 조사한다.

풀이 ①, ⑤ $|x|>1$일 때, $\lim_{n\to\infty}|x^n|=\lim_{n\to\infty}x^{2n}=\infty$ 이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+x^{2n}}{1-2x^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{x^n}+x^n}{\frac{1}{x^n}-2}$$

따라서 $x<-1$ 또는 $x>1$이면 주어진 수열은 발산한다.

②, ③ $|x|<1$일 때, $\lim_{n\to\infty}x^n=\lim_{n\to\infty}x^{2n}=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+x^{2n}}{1-2x^n}=\frac{1+0}{1-0}=1$$

따라서 $-1<x<0$ 또는 $0<x<1$이면 주어진 수열은 1에 수렴한다.

④ $x=1$일 때, $\lim_{n\to\infty}x^n=\lim_{n\to\infty}x^{2n}=1$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+x^{2n}}{1-2x^n}=\frac{1+1}{1-2}=-2$$

답 ③

**12** 전략 등비수열 $\{r^n\}$이 수렴하려면 $-1<r\leq1$이어야 함을 이용한다.

풀이 등비수열 $\{(2\cos x-1)^n\}$은 첫째항과 공비가 모두 $2\cos x-1$이므로 이 수열이 수렴하려면

$-1<2\cos x-1\leq1$

$0<2\cos x\leq2 \quad \therefore 0<\cos x\leq1$ ⋯ ❶

$0<x<\pi$에서 위의 부등식을 만족시키는 $x$의 값의 범위는 $\quad 0<x<\frac{\pi}{2}$ ⋯ ❷

답 $0<x<\frac{\pi}{2}$

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ❶ $\cos x$의 값의 범위를 구할 수 있다. | 60 % |
| ❷ $x$의 값의 범위를 구할 수 있다. | 40 % |

**13** 전략 각 수열의 일반항을 구하거나 항을 나열하여 수렴하는지 알아본다.

풀이 ㄱ. $a_{2n}=\frac{(-1)^{2n+1}}{2n}=-\frac{1}{2n}$이므로

$$\lim_{n\to\infty}a_{2n}=\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{2n}\right)=0$$

ㄴ. $|a_n|=\left|\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right|=\frac{1}{n}$이므로

$$\lim_{n\to\infty}|a_n|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$$

ㄷ. $[a_n]=\left[\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right]$이므로 수열 $\{[a_n]\}$을 첫째항부터 차례대로 나열하면

$$[1]=1,\ \left[-\frac{1}{2}\right]=-1,\ \left[\frac{1}{3}\right]=0,$$
$$\left[-\frac{1}{4}\right]=-1,\ \left[\frac{1}{5}\right]=0,\ \cdots$$

따라서 수열 $\{[a_n]\}$은 발산 (진동)한다.

이상에서 수렴하는 수열은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ③

**14** 전략 수열의 극한에 대한 기본 성질을 이용하여 옳은 것은 증명하고, 옳지 않은 것은 반례를 찾는다.

풀이 ㄱ. [반례] $a_n=n+1$, $b_n=n$이면

$\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$, $\lim_{n\to\infty}b_n=\infty$이지만

$$\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\lim_{n\to\infty}(n+1-n)=1$$

ㄴ. [반례] $a_n=n$, $b_n=\frac{1}{n}$이면

$\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$, $\lim_{n\to\infty}b_n=0$이지만

$$\lim_{n\to\infty}a_nb_n=\lim_{n\to\infty}\left(n\cdot\frac{1}{n}\right)=1$$

ㄷ. $a_n-b_n=c_n$으로 놓으면 $\quad b_n=a_n-c_n$

이때 $\lim_{n\to\infty}c_n=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}(a_n-c_n)=\lim_{n\to\infty}a_n-\lim_{n\to\infty}c_n$$
$$=\alpha-0=\alpha$$

이상에서 옳은 것은 ㄷ뿐이다. 답 ②

**15** 전략 $a_1$, $a_2$, $a_3$, $\cdots$, $a_n$의 값의 범위를 이용하여 $S_n$의 값의 범위를 구한다.

풀이 수열 $\{a_n\}$에서

$2<a_1<3$, $\quad 3<a_2<4$, $\quad 4<a_3<5$,

$\cdots$, $n+1<a_n<n+2$

이므로 변끼리 더하면

$$2+3+\cdots+(n+1)<a_1+a_2+\cdots+a_n<3+4+\cdots+(n+2)$$

$$\frac{n\{2+(n+1)\}}{2}<\sum_{k=1}^{n}a_k<\frac{n\{3+(n+2)\}}{2}$$

$$\frac{n^2+3n}{2}<S_n<\frac{n^2+5n}{2}$$

$$\therefore \frac{2n^2+2n}{n^2+5n}<\frac{n^2+n}{S_n}<\frac{2n^2+2n}{n^2+3n}$$

이때

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+2n}{n^2+5n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{2}{n}}{1+\frac{5}{n}}=2,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+2n}{n^2+3n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{2}{n}}{1+\frac{3}{n}}=2$$

이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n}{S_n}=2$$

답 2

**16** 전략 다항식 $f(x)$를 일차식 $x-\alpha$로 나누었을 때의 나머지를 $R$라 하면 $R=f(\alpha)$이다.

풀이 $f(x)=2^nx^2+3^{n-1}x-1$로 놓으면 나머지정리에 의하여

$$a_n=f(-1)=2^n-3^{n-1}-1,$$
$$b_n=f(2)=2^{n+2}+2\cdot3^{n-1}-1 \quad \cdots❶$$
$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+2}+2\cdot3^{n-1}-1}{2^n-3^{n-1}-1}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2^3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}+2-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}}{2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}-1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}}$$
$$=-2 \quad \cdots❷$$

답 $-2$

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ❶ $a_n$, $b_n$을 구할 수 있다. | 40 % |
| ❷ $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}$의 값을 구할 수 있다. | 60 % |

**17** 전략 원 $C_n$의 중심에서 직선 $3x-4y=0$까지의 거리가 원 $C_n$의 반지름의 길이와 같음을 이용한다.

풀이 원 $C_n$의 반지름의 길이를 $r_n$이라 하면 원 $C_n$의 중심 $(3^n,\ r_n)$과 직선 $3x-4y=0$ 사이의 거리는 원 $C_n$의 반지름의 길이와 같으므로

$$\frac{|3\cdot3^n-4r_n|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=r_n, \qquad |3^{n+1}-4r_n|=5r_n$$

이때 $3^{n+1}-4r_n=-5r_n$이면 $r_n=-3^{n+1}<0$이 되어 모순이므로 $\quad 3^{n+1}-4r_n=5r_n, \quad 9r_n=3^{n+1}$

$$\therefore r_n=\frac{3^{n+1}}{9}=3^{n-1} \quad \cdots❶$$

따라서 $l_n=2\pi\cdot3^{n-1}$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{l_n}{\pi(3^n+2^n)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2\pi\cdot3^{n-1}}{\pi(3^n+2^n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot3^{n-1}}{3^n+2^n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{3}}{1+\left(\frac{2}{3}\right)^n}=\frac{2}{3} \quad \cdots❷$$

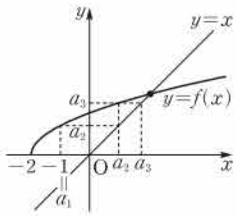
답 $\frac{2}{3}$

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ❶ 원의 반지름의 길이를 구할 수 있다. | 50 % |
| ❷ $\lim_{n\to\infty}\frac{l_n}{\pi(3^n+2^n)}$의 값을 구할 수 있다. | 50 % |

**18** 전략 $a_{n+1}=y$, $a_n=x$로 놓고 주어진 그래프에서 $n$의 값이 한없이 커질 때의 $a_n$의 값을 추정한다.

풀이 $a_{n+1}=\sqrt{a_n+2}$에서 $a_{n+1}=y$, $a_n=x$로 놓으면

$$y=\sqrt{x+2} \quad \cdots\cdots ㉠$$




$a_1=-1$이므로 $a_1$, $a_2$, $a_3$, …의 위치를 $x$축 위에 추정해 보면 오른쪽 그림과 같다.

즉 $n$의 값이 한없이 커질 때 $a_n$은 곡선 $y=\sqrt{x+2}$와 직선 $y=x$의 교점의 $x$좌표에 한없이 가까워짐을 알 수 있다.

$\sqrt{x+2}=x$의 양변을 제곱하면

$$x+2=x^2, \qquad x^2-x-2=0$$
$$(x+1)(x-2)=0$$
$$\therefore x=-1 \text{ 또는 } x=2$$

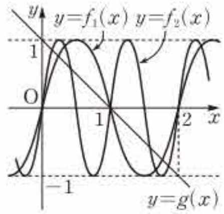
그런데 $\sqrt{x+2}=x$에서 $x\ge0$이므로 $\qquad x=2$

따라서 두 그래프의 교점의 $x$좌표가 2이므로

$$\lim_{n\to\infty}a_n=2$$

답 2

**19** 전략 $y=f_n(x)$의 그래프와 $y=g(x)$의 그래프를 그린 후 교점의 개수를 구한다.




풀이 $f_n(x)=\sin n\pi x$의 주기는 $\frac{2\pi}{n\pi}=\frac{2}{n}$이고, 모든 자연수 $n$에 대하여 $f_n(1)=\sin n\pi=0$이므로 함수 $y=f_n(x)$의 그래프는 점 $(1,\ 0)$을 지난다.

함수 $y=g(x)$의 그래프도 점 $(1,\ 0)$을 지나고, 위의 그림과 같이 두 함수 $y=f_n(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 점 $(1,\ 0)$에 대하여 각각 대칭이므로

$$a_1=1+1+1=3$$
$$a_2=2+1+2=5$$
$$a_3=3+1+3=7$$
$$a_4=4+1+4=9$$
$$\vdots$$
$$\therefore a_n=n+1+n=2n+1$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_{2n+1}}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2(2n+1)+1}{n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4n+3}{n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4+\frac{3}{n}}{1}$$
$$=4$$

답 ④

**20** (전략) 중심이 $(a,\ b)$이고 $y$축에 접하는 원의 방정식은 $(x-a)^2+(y-b)^2=a^2$임을 이용한다.

**풀이** 점 $(3n,\ 4n)$을 중심으로 하고 $y$축에 접하는 원 $O_n$의 방정식은

$$(x-3n)^2+(y-4n)^2=(3n)^2$$

점 $(3n,\ 4n)$과 점 $(0,\ -1)$ 사이의 거리는

$$\sqrt{(-3n)^2+(-1-4n)^2}=\sqrt{25n^2+8n+1}$$

이므로

$$a_n=\sqrt{25n^2+8n+1}+3n$$
$$b_n=\sqrt{25n^2+8n+1}-3n$$
$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{25n^2+8n+1}+3n}{\sqrt{25n^2+8n+1}-3n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{25+\frac{8}{n}+\frac{1}{n^2}}+3}{\sqrt{25+\frac{8}{n}+\frac{1}{n^2}}-3}$$
$$=\frac{5+3}{5-3}$$
$$=4$$

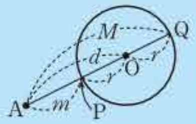
답 4

**Remark▶ 원 밖의 점과 원 위의 점 사이의 거리**

원 밖의 한 점 A와 원 위의 점 사이의 거리의 최댓값을 $M$, 최솟값을 $m$이라 하면

① $M=\overline{\mathrm{AO}}+\overline{\mathrm{OQ}}=d+r$

② $m=\overline{\mathrm{AO}}-\overline{\mathrm{OP}}=d-r$




**21** (전략) 수열의 합과 일반항 사이의 관계를 이용하여 수열 $\{a_n+b_n\}$의 일반항을 구한다.

**풀이** 조건 (가)에서 $\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=S_n$이라 하면

$$a_n+b_n=S_n-S_{n-1}$$
$$=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}$$
$$=-\frac{1}{n(n+1)}\ (n\geq 2)$$

이므로

$$\lim_{n\to\infty}n^2(a_n+b_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{-n^2}{n(n+1)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-n^2}{n^2+n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-1}{1+\frac{1}{n}}$$
$$=-1$$

조건 (나)에서 $\lim_{n\to\infty}n^2b_n=2$이므로

$$\lim_{n\to\infty}n^2a_n=\lim_{n\to\infty}(n^2a_n+n^2b_n-n^2b_n)$$
$$=\lim_{n\to\infty}n^2(a_n+b_n)-\lim_{n\to\infty}n^2b_n$$
$$=-1-2$$
$$=-3$$

답 ①

**Remark▶ 수열의 합 $S_n$과 일반항 $a_n$ 사이의 관계**

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 $n$ 항까지의 합을 $S_n$이라 하면

$a_1=S_1,\ a_n=S_n-S_{n-1}\ (n\geq 2)$

**22** (전략) 판별식을 이용하여 이차함수의 그래프가 $x$축과 만나거나 만나지 않을 조건을 구한다.

**풀이** 곡선 $y=x^2-(n+1)x+a_n$이 $x$축과 만나므로 이차방정식 $x^2-(n+1)x+a_n=0$의 판별식을 $D_1$이라 하면

$$D_1=\{-(n+1)\}^2-4a_n\geq 0,\qquad a_n\leq\frac{(n+1)^2}{4}$$
$$\therefore \frac{a_n}{n^2}\leq\frac{(n+1)^2}{4n^2}\qquad \cdots\cdots ㉠$$

곡선 $y=x^2-nx+a_n$이 $x$축과 만나지 않으므로 이차방정식 $x^2-nx+a_n=0$의 판별식을 $D_2$라 하면

$$D_2=(-n)^2-4a_n<0,\qquad a_n>\frac{n^2}{4}$$
$$\therefore \frac{a_n}{n^2}>\frac{1}{4}\qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서 $\quad \frac{1}{4}<\frac{a_n}{n^2}\leq\frac{(n+1)^2}{4n^2}$

이때

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}=\frac{1}{4},$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{4n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n+1}{4n^2}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{4}$$
$$=\frac{1}{4}$$

이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2}=\frac{1}{4}$$

답 ⑤

**23** 전략 $\frac{6}{k}$의 값의 범위를 나누어 극한값을 구한다.

풀이 (i) $k<6$, 즉 $\frac{6}{k}>1$일 때,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{6}{k}\right)^{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{6}{k}\right)^{n}=\infty$$

$$\therefore a_k=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{6}{k}}{1+\frac{1}{\left(\frac{6}{k}\right)^n}}=\frac{6}{k}$$

(ii) $k=6$, 즉 $\frac{6}{k}=1$일 때,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{6}{k}\right)^{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{6}{k}\right)^{n}=1$$

$$\therefore a_k=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

(iii) $k>6$, 즉 $0<\frac{6}{k}<1$일 때,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{6}{k}\right)^{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{6}{k}\right)^{n}=0$$

$$\therefore a_k=\frac{0}{0+1}=0$$

이상에서

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{10}ka_k&=\sum_{k=1}^{5}\left(k\cdot\frac{6}{k}\right)+\sum_{k=6}^{6}\left(k\cdot\frac{1}{2}\right)+\sum_{k=7}^{10}(k\cdot 0)\\&=\sum_{k=1}^{5}6+\sum_{k=6}^{6}\frac{1}{2}k+\sum_{k=7}^{10}0\\&=5\cdot 6+\frac{1}{2}\cdot 6+0\\&=33\end{aligned}$$

답 33

**24** 전략 두 점 사이의 거리를 구하는 공식을 이용하여 $L_n$을 구한다.

풀이 $\mathrm{P}_n(4^n,\ 2^n)$, $\mathrm{P}_{n+1}(4^{n+1},\ 2^{n+1})$이므로

$$\begin{aligned}L_n&=\sqrt{(4^{n+1}-4^n)^2+(2^{n+1}-2^n)^2}\\&=\sqrt{(3\cdot 4^n)^2+(2^n)^2}\\&=\sqrt{9\cdot 16^n+4^n}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{n\to\infty}\left(\frac{L_{n+1}}{L_n}\right)^2&=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{9\cdot 16^{n+1}+4^{n+1}}}{\sqrt{9\cdot 16^n+4^n}}\right)^2\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{9\cdot 16^{n+1}+4^{n+1}}{9\cdot 16^n+4^n}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{9\cdot 16+4\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^n}{9+\left(\frac{1}{4}\right)^n}\\&=16\end{aligned}$$

답 16

I. 수열의 극한

# 02 급수

## 유제

본책 39~56쪽

**011-❶** 주어진 급수의 제$n$항을 $a_n$, 제$n$항까지의 부분합을 $S_n$이라 하자.

(1) $$\begin{aligned}a_n&=\frac{1}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}\\&=\frac{\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}}{(\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1})(\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1})}\\&=\frac{\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}}{2}\end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned}S_n&=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}(\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k-1})\\&=\frac{1}{2}\{(\sqrt{3}-1)+(\sqrt{5}-\sqrt{3})+(\sqrt{7}-\sqrt{5})\\&\quad+\cdots+(\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1})\}\\&=\frac{1}{2}(\sqrt{2n+1}-1)\end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}(\sqrt{2n+1}-1)=\infty$$

(2) $$\begin{aligned}a_n&=\log\frac{n^2}{n^2-1}\\&=\log\frac{n^2}{(n-1)(n+1)}\\&=\log\left(\frac{n}{n-1}\cdot\frac{n}{n+1}\right)\end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned}S_n&=\sum_{k=2}^{n}\log\left(\frac{k}{k-1}\cdot\frac{k}{k+1}\right)\\&=\log\left(\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\right)+\log\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{4}\right)+\log\left(\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\right)\\&\quad+\cdots+\log\left(\frac{n}{n-1}\cdot\frac{n}{n+1}\right)\\&=\log\left\{\left(\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\right)\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{4}\right)\left(\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\right)\cdots\left(\frac{n}{n-1}\cdot\frac{n}{n+1}\right)\right\}\\&=\log\frac{2n}{n+1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{n\to\infty}S_n&=\lim_{n\to\infty}\log\frac{2n}{n+1}\\&=\log 2\end{aligned}$$

(3) $a_n=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$이므로

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$
$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)$$
$$+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}$$
$$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$$

답 (1) 발산 (2) 수렴, $\log 2$ (3) 수렴, 1

**012-❶** $S_n=\dfrac{3\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{2}}=6\left\{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right\}$이므로

$$\sum_{k=1}^{n}(6-S_k)=\sum_{k=1}^{n}6\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^k=6\cdot\frac{\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{2}}$$
$$=6\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$$
$$\therefore \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(6-S_k)=\lim_{n\to\infty}6\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}=6$$

답 6

**012-❷** 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제$n$항까지의 합을 $S_n$이라 하면 $S_n=n^2$이므로

$n=1$일 때, $a_1=S_1=1$

$n\geq 2$일 때, $a_n=S_n-S_{n-1}=n^2-(n-1)^2$
$=2n-1$ …… ㉠

이때 $a_1=1$은 ㉠에 $n=1$을 대입하여 얻은 값과 같으므로 $a_n=2n-1$

따라서

$$\frac{1}{a_na_{n+1}}=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$$

이므로

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_ka_{k+1}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)$$
$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_na_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_ka_{k+1}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)$$
$$=\frac{1}{2}$$

답 $\frac{1}{2}$

**013-❶** (1) 주어진 급수의 제$n$항을 $b_n$이라 하면

$b_n=a_n-4$ $\quad\therefore a_n=b_n+4$

이때 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$이 수렴하므로

$\lim_{n\to\infty}b_n=0$

$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}(b_n+4)=0+4=4$

(2) 주어진 급수의 제$n$항을 $b_n$이라 하면

$b_n=a_n-\left(\frac{2}{3}\right)^n$ $\quad\therefore a_n=b_n+\left(\frac{2}{3}\right)^n$

이때 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}b_n=0$

$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left\{b_n+\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}=0+0=0$

$\therefore \lim_{n\to\infty}(a_n+3)=0+3=3$

답 (1) 4 (2) 3

**013-❷** 주어진 급수가 수렴하므로

$\lim_{n\to\infty}(na_n-2)=0$ $\quad\therefore \lim_{n\to\infty}na_n=2$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{n^2a_n}{5n-2}=\lim_{n\to\infty}na_n\cdot\frac{n}{5n-2}$$
$$=\lim_{n\to\infty}na_n\lim_{n\to\infty}\frac{n}{5n-2}$$
$$=2\cdot\frac{1}{5}=\frac{2}{5}$$

답 $\frac{2}{5}$

**014-❶** 두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$이 수렴하므로

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\alpha$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\beta$로 놓으면

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=-4$에서 $\quad\sum_{n=1}^{\infty}a_n+\sum_{n=1}^{\infty}b_n=-4$

$\therefore \alpha+\beta=-4$ …… ㉠

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)=8$에서 $\quad\sum_{n=1}^{\infty}a_n-\sum_{n=1}^{\infty}b_n=8$

$\therefore \alpha-\beta=8$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad\alpha=2,\ \beta=-6$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}(2a_n-3b_n)=2\sum_{n=1}^{\infty}a_n-3\sum_{n=1}^{\infty}b_n$$
$$=2\cdot2-3\cdot(-6)$$
$$=22$$

답 22

**014-❷** $2a_n+b_n=c_n$이라 하면

$$a_n=\frac{c_n-b_n}{2}$$

이때 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n=-2$, $\sum_{n=1}^{\infty}c_n=10$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n-b_n}{2}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}c_n-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}b_n$$
$$=\frac{1}{2}\cdot10-\frac{1}{2}\cdot(-2)=6$$

답 6

**015-❶** (1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+1}}{4^{n-1}}=\sum_{n=1}^{\infty}4\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$=\frac{4}{1-\frac{1}{2}}=8$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}\sin^{n}\frac{\pi}{4}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{4}\right)^{n}$

$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^{n}$

$=\frac{-\frac{\sqrt{2}}{4}}{1-\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)}=\frac{-\sqrt{2}}{4+\sqrt{2}}$

$=\frac{2-4\sqrt{2}}{14}=\frac{1-2\sqrt{2}}{7}$

답 (1) 8 (2) $\frac{1-2\sqrt{2}}{7}$

**015-❷** (1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+(-1)^{n}}{3^{n}}=\frac{0}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{0}{3^3}+\frac{2}{3^4}+\cdots$

$=\frac{2}{3^2}+\frac{2}{3^4}+\cdots$

$=\frac{\frac{2}{9}}{1-\frac{1}{9}}=\frac{1}{4}$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{n}\sin\frac{n\pi}{2}$

$=\frac{1}{3}\sin\frac{\pi}{2}+\left(\frac{1}{3}\right)^2\sin\pi+\left(\frac{1}{3}\right)^3\sin\frac{3}{2}\pi$

$+\left(\frac{1}{3}\right)^4\sin2\pi+\left(\frac{1}{3}\right)^5\sin\frac{5}{2}\pi+\cdots$

$=\frac{1}{3}+0-\left(\frac{1}{3}\right)^3+0+\left(\frac{1}{3}\right)^5+\cdots$

$=\frac{1}{3}-\left(\frac{1}{3}\right)^3+\left(\frac{1}{3}\right)^5-\cdots$

$=\frac{\frac{1}{3}}{1-\left(-\frac{1}{9}\right)}=\frac{3}{10}$

답 (1) $\frac{1}{4}$ (2) $\frac{3}{10}$

**016-❶** (1) $\sum_{n=1}^{\infty}(11\cdot10^{-2n}+8\cdot10^{-n})$

$=11\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{100}\right)^{n}+8\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{10}\right)^{n}$

$=11\cdot\frac{\frac{1}{100}}{1-\frac{1}{100}}+8\cdot\frac{\frac{1}{10}}{1-\frac{1}{10}}$

$=11\cdot\frac{1}{99}+8\cdot\frac{1}{9}$

$=\frac{1}{9}+\frac{8}{9}=1$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\{2^n+(-2)^n\}\left(\frac{1}{3}\right)^{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{2}{3}\right)^{n}$

$=\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}}+\frac{-\frac{2}{3}}{1-\left(-\frac{2}{3}\right)}$

$=2-\frac{2}{5}=\frac{8}{5}$

답 (1) 1 (2) $\frac{8}{5}$

**016-❷** 수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 $a$, 공비를 $r(-1<r<1)$라 하면 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=2$에서

$\frac{a}{1-r}=2$ …… ㉠

수열 $\{a_n{}^2\}$의 첫째항은 $a^2$, 공비는 $r^2$이므로

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n{}^2=3$에서 $\frac{a^2}{1-r^2}=3$

$\therefore \frac{a^2}{(1+r)(1-r)}=3$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $2\cdot\frac{a}{1+r}=3$

$\therefore \frac{a}{1+r}=\frac{3}{2}$ …… ㉢

㉠÷㉢을 하면

$\frac{1+r}{1-r}=\frac{4}{3}$, $3(1+r)=4(1-r)$

$7r=1$ $\therefore r=\frac{1}{7}$

따라서 수열 $\{a_n\}$의 공비는 $\frac{1}{7}$이다. 답 $\frac{1}{7}$

**017-❶** 주어진 등비급수의 첫째항과 공비가 모두 $2\sin\theta$이므로 이 등비급수가 수렴하려면

$-1<2\sin\theta<1$ $\therefore -\frac{1}{2}<\sin\theta<\frac{1}{2}$

그런데 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$이므로

$0<\theta<\frac{\pi}{6}$ 답 $0<\theta<\frac{\pi}{6}$

**017-❷** 주어진 등비급수의 첫째항과 공비가 모두 $1-x^2$이므로 이 등비급수가 수렴하려면

$-1<1-x^2<1$, $-2<-x^2<0$

$\therefore 0<x^2<2$

(i) $x^2>0$에서 $x$는 $x\neq0$인 모든 실수이다.

(ii) $x^2<2$에서 $x^2-2<0$

$(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})<0$

$\therefore -\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$

(i), (ii)에서 $-\sqrt{2}<x<0$ 또는 $0<x<\sqrt{2}$

답 $-\sqrt{2}<x<0$ 또는 $0<x<\sqrt{2}$

**017-③** 주어진 등비급수의 첫째항이 $(x-1)(x-4)$, 공비가 $x-4$이므로 이 등비급수가 수렴하려면

$(x-1)(x-4)=0$ 또는 $-1<x-4<1$

$\therefore x=1$ 또는 $3<x<5$

(i) $x=1$이면 주어진 등비급수의 합이 0이므로

$x\neq1$

(ii) $3<x<5$일 때, 주어진 등비급수의 합이 3이므로

$$\frac{(x-1)(x-4)}{1-(x-4)}=3$$

$$x^2-5x+4=3(-x+5)$$

$$x^2-2x-11=0$$

$$\therefore x=1+2\sqrt{3}\ (\because 3<x<5)$$

(i), (ii)에서 $x=1+2\sqrt{3}$

답 $1+2\sqrt{3}$

**018-①** 점 $P_n$이 한없이 가까워지는 점의 좌표를 $(a, b)$라 하면

$$a=\overline{OP_1}-\overline{P_2P_3}+\overline{P_4P_5}-\overline{P_6P_7}+\cdots$$

$$=1-\left(\frac{3}{4}\right)^2+\left(\frac{3}{4}\right)^4-\left(\frac{3}{4}\right)^6+\cdots$$

$$=\frac{1}{1-\left(-\frac{9}{16}\right)}=\frac{16}{25}$$

$$b=\overline{P_1P_2}-\overline{P_3P_4}+\overline{P_5P_6}-\overline{P_7P_8}+\cdots$$

$$=\frac{3}{4}-\left(\frac{3}{4}\right)^3+\left(\frac{3}{4}\right)^5-\left(\frac{3}{4}\right)^7+\cdots$$

$$=\frac{\frac{3}{4}}{1-\left(-\frac{9}{16}\right)}=\frac{12}{25}$$

따라서 점 $P_n$이 한없이 가까워지는 점의 좌표는 $\left(\frac{16}{25}, \frac{12}{25}\right)$이다.

답 $\left(\frac{16}{25}, \frac{12}{25}\right)$

**019-①** $\angle P_1OP=60°$이므로

$$\overline{PP_1}=\overline{OP}\sin 60°=4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$$

$\angle P_1PP_2=60°$이므로

$$\overline{P_1P_2}=\overline{PP_1}\sin60°=2\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=3$$

$\angle P_2P_1P_3=60°$이므로

$$\overline{P_2P_3}=\overline{P_1P_2}\sin 60°=3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\angle P_3P_2P_4=60°$이므로

$$\overline{P_3P_4}=\overline{P_2P_3}\sin 60°=3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=3\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

$\vdots$

$$\therefore \overline{P_1P_2}+\overline{P_2P_3}+\overline{P_3P_4}+\cdots$$

$$=3+3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+3\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\cdots$$

$$=\frac{3}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{6}{2-\sqrt{3}}$$

$$=6(2+\sqrt{3})$$

답 $6(2+\sqrt{3})$

**020-①** $\triangle A_nB_nC_n \backsim \triangle A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$ (SSS 닮음)이고 닮음비가 2 : 1이므로

$\triangle A_nB_nC_n : \triangle A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}=4:1$

즉 $\triangle A_nB_nC_n$의 넓이를 $S_n\,(n=1, 2, 3, \cdots)$이라 하면

$$S_1=2\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{2},\quad S_{n+1}=\frac{1}{4}S_n$$

따라서 수열 $\{S_n\}$은 첫째항이 $\frac{1}{2}$, 공비가 $\frac{1}{4}$인 등비수열이므로 $S_n=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

$$\therefore \triangle A_1B_1C_1+\triangle A_2B_2C_2+\triangle A_3B_3C_3+\cdots$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{2}{3}$$

답 $\frac{2}{3}$

**021-①** (1) $2.\dot{0}2\dot{7}=2+0.027+0.000027+0.000000027+\cdots$

$$=2+\frac{27}{1000}+\frac{27}{1000}\cdot\frac{1}{1000}+\frac{27}{1000}\cdot\left(\frac{1}{1000}\right)^2+\cdots$$

$$=2+\frac{\frac{27}{1000}}{1-\frac{1}{1000}}=2+\frac{27}{999}$$

$$=2+\frac{1}{37}=\frac{75}{37}$$

(2) $0.2\dot{3}\dot{9}=0.2+0.039+0.00039+0.0000039+\cdots$

$$=\frac{2}{10}+\frac{39}{1000}+\frac{39}{1000}\cdot\frac{1}{100}+\frac{39}{1000}\cdot\left(\frac{1}{100}\right)^2+\cdots$$

$$=\frac{1}{5}+\frac{\frac{39}{1000}}{1-\frac{1}{100}}=\frac{1}{5}+\frac{39}{990}$$

$$=\frac{1}{5}+\frac{13}{330}=\frac{79}{330}$$

답 (1) $\frac{75}{37}$ (2) $\frac{79}{330}$

**021-②** $\frac{23}{99}=0.\dot{2}\dot{3}=0.232323\cdots$이므로

$$a_1=2,\ a_2=3,\ a_3=2,\ a_4=3,\ a_5=2,\ a_6=3,\ \cdots$$

$$\begin{aligned}\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{2^n}&=\frac{2}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{2}{2^3}+\frac{3}{2^4}+\frac{2}{2^5}+\frac{3}{2^6}+\cdots\\&=\left(\frac{2}{2}+\frac{2}{2^3}+\frac{2}{2^5}+\cdots\right)\\&\quad+\left(\frac{3}{2^2}+\frac{3}{2^4}+\frac{3}{2^6}+\cdots\right)\\&=\frac{1}{1-\frac{1}{4}}+\frac{\frac{3}{4}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{4}{3}+1=\frac{7}{3}\end{aligned}$$

답 $\frac{7}{3}$

## 중단원 연습 문제

본책 57~61쪽

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **01** ④ | **02** $-\frac{3}{4}$ | **03** $-\frac{7}{5}$ | **04** 3 | **05** $\frac{1}{8}$ |
| **06** 4 | **07** $\frac{13}{6}$ | **08** 4 | **09** 7 | **10** 32 |
| **11** 60 m | **12** 12 | **13** ③ | **14** ② | **15** $\frac{3}{4}$ |
| **16** 4 | **17** ⑤ | **18** $\frac{9}{8}\pi$ | **19** $\frac{361}{909}$ | **20** ① |
| **21** ① | **22** ① | **23** ① | | |

**01** 전략 주어진 급수의 부분합 $S_n$을 구하고, $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$을 조사한다.

풀이 주어진 급수의 제$n$항까지의 부분합을 $S_n$이라 하자.

ㄱ. $$\begin{aligned}S_n&=\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+4}-\sqrt{k+3})\\&=(\sqrt{5}-2)+(\sqrt{6}-\sqrt{5})+(\sqrt{7}-\sqrt{6})\\&\quad+\cdots+(\sqrt{n+4}-\sqrt{n+3})\\&=\sqrt{n+4}-2\end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+4}-2)=\infty$$

ㄴ. $$\begin{aligned}S_n&=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}\\&=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{k(k+1)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right\}\\&=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{2\cdot 3}\right)+\left(\frac{1}{2\cdot 3}-\frac{1}{3\cdot 4}\right)\right.\\&\quad\left.+\cdots+\left\{\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right\}\right]\\&=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{n\to\infty}S_n&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right\}\\&=\frac{1}{4}\end{aligned}$$

ㄷ. $$\begin{aligned}S_n&=\sum_{k=1}^{n}\log\frac{k+1}{k}\\&=\log\frac{2}{1}+\log\frac{3}{2}+\log\frac{4}{3}+\cdots+\log\frac{n+1}{n}\\&=\log\left(\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\cdots\cdot\frac{n+1}{n}\right)=\log(n+1)\end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\log(n+1)=\infty$$

ㄹ. $$\begin{aligned}S_n&=\left(2-\frac{3}{2}\right)+\left(\frac{3}{2}-\frac{4}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{n+1}{n}-\frac{n+2}{n+1}\right)\\&=2-\frac{n+2}{n+1}\end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{n+2}{n+1}\right)=2-1=1$$

이상에서 수렴하는 급수는 ㄴ, ㄹ이다.

답 ④

**02** 전략 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 $\alpha_n\beta_n$을 $n$에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 $x^2+2x-(n^2+2n)=0$의 두 근이 $\alpha_n$, $\beta_n$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha_n\beta_n=-n^2-2n \quad \cdots ❶$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n\beta_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{-n^2-2n}$$

$S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{-k^2-2k}$이라 하면

$$\begin{aligned}S_n&=-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+2)}\\&=-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)\\&=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+2}-\frac{1}{k}\right)\\&=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{3}-1\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3}\right)\right.\\&\quad+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n-2}\right)+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n-1}\right)\\&\quad\left.+\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n}\right)\right\}\\&=\frac{1}{2}\left(-1-\frac{1}{2}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right) \quad \cdots ❷\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n\beta_n}&=\lim_{n\to\infty}S_n\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(-1-\frac{1}{2}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)\\&=\frac{1}{2}\left(-1-\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{4} \quad \cdots ❸\end{aligned}$$

답 $-\frac{3}{4}$

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ❶ $\alpha_n\beta_n$을 구할 수 있다. | 30 % |
| ❷ $S_n$을 구할 수 있다. | 50 % |
| ❸ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n\beta_n}$의 값을 구할 수 있다. | 20 % |

**03** (전략) 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$이 수렴하면 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$임을 이용한다.

(풀이) 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$이 3으로 수렴하므로

$$\lim_{n\to\infty}a_n=0,\ \sum_{n=1}^{\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}S_n=3$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_n+7S_n}{3a_n-5S_n}=\frac{\lim_{n\to\infty}a_n+7\lim_{n\to\infty}S_n}{3\lim_{n\to\infty}a_n-5\lim_{n\to\infty}S_n}$$

$$=\frac{0+7\cdot3}{3\cdot0-5\cdot3}$$

$$=-\frac{7}{5}$$

답 $-\frac{7}{5}$

**04** (전략) $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\pm b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\pm\sum_{n=1}^{\infty}b_n$(복호동순)임을 이용한다.

(풀이) 두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$이 수렴하므로 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\alpha$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\beta$로 놓으면

$\sum_{n=1}^{\infty}(2a_n+b_n)=3$에서

$$2\sum_{n=1}^{\infty}a_n+\sum_{n=1}^{\infty}b_n=3$$

$\therefore\ 2\alpha+\beta=3$ …… ㉠ ⋯ ❶

$\sum_{n=1}^{\infty}(-a_n+2b_n)=-4$에서

$$-\sum_{n=1}^{\infty}a_n+2\sum_{n=1}^{\infty}b_n=-4$$

$\therefore\ -\alpha+2\beta=-4$ …… ㉡ ⋯ ❷

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$\alpha=2,\ \beta=-1$ ⋯ ❸

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n-\sum_{n=1}^{\infty}b_n$$

$$=\alpha-\beta$$

$=3$ ⋯ ❹

답 3

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ❶ $\sum_{n=1}^{\infty}(2a_n+b_n)=3$에서 $\alpha$, $\beta$ 사이의 관계식을 구할 수 있다. | 30 % |
| ❷ $\sum_{n=1}^{\infty}(-a_n+2b_n)=-4$에서 $\alpha$, $\beta$ 사이의 관계식을 구할 수 있다. | 30 % |
| ❸ $\alpha$, $\beta$의 값을 구할 수 있다. | 20 % |
| ❹ $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)$의 값을 구할 수 있다. | 20 % |

**05** (전략) 주어진 등비급수에 $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$을 대입하여 합의 꼴로 나타낸다.

(풀이)
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{5}\right)^n\cos\left(n\pi+\frac{\pi}{3}\right)$$

$$=\left(-\frac{1}{5}\right)\cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)+\left(-\frac{1}{5}\right)^2\cos\left(2\pi+\frac{\pi}{3}\right)$$

$$+\left(-\frac{1}{5}\right)^3\cos\left(3\pi+\frac{\pi}{3}\right)+\cdots$$

$$=\left(-\frac{1}{5}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{5}\right)^2\cdot\frac{1}{2}$$

$$+\left(-\frac{1}{5}\right)^3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+\cdots$$

$$=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{5}\right)^2\cdot\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{5}\right)^3\cdot\frac{1}{2}+\cdots$$

$$=\frac{\frac{1}{10}}{1-\frac{1}{5}}=\frac{1}{8}$$

답 $\frac{1}{8}$

**06** (전략) $S$와 $S_n$을 각각 구하여 $S-S_n=\frac{1}{192}$을 만족시키는 자연수 $n$의 값을 구한다.

(풀이)
$$S=\sum_{n=1}^{\infty}1\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}=\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=\frac{4}{3}$$

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}1\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}=\frac{1\cdot\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{4}}$$

$$=\frac{4}{3}\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right\}$$

이때 $S>S_n$이므로

$$S-S_n=\frac{4}{3}-\frac{4}{3}\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right\}$$

$$=\frac{4}{3}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

따라서 $\frac{4}{3}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^n=\frac{1}{192}$이므로

$$\left(\frac{1}{4}\right)^n=\frac{1}{256},\qquad \left(\frac{1}{4}\right)^n=\left(\frac{1}{4}\right)^4$$

$\therefore\ n=4$

답 4

**Remark▶**

첫째항이 1, 공비가 $\frac{1}{4}$인 등비급수에 대하여 제$n$항까지의 부분합을 $S_n$, 등비급수의 합을 $S$라 하면

$$S_n=1+\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1},$$

$$S=1+\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}+\left(\frac{1}{4}\right)^n+\cdots$$

이므로 $S>S_n$

**07** (전략) 주어진 급수를 수렴하는 두 등비급수로 나누어 각각의 합을 구한다.

(풀이) $\frac{2+3}{5}+\frac{2^2+3^2}{5^2}+\frac{2^3+3^3}{5^3}+\cdots$

$=\left\{\frac{2}{5}+\left(\frac{2}{5}\right)^2+\left(\frac{2}{5}\right)^3+\cdots\right\}$

$+\left\{\frac{3}{5}+\left(\frac{3}{5}\right)^2+\left(\frac{3}{5}\right)^3+\cdots\right\}$

$=\frac{\frac{2}{5}}{1-\frac{2}{5}}+\frac{\frac{3}{5}}{1-\frac{3}{5}}=\frac{2}{3}+\frac{3}{2}=\frac{13}{6}$ 답 $\frac{13}{6}$

**08** (전략) 등비급수가 수렴하려면 $-1<(공비)<1$이어야 함을 이용한다.

(풀이) 주어진 등비급수의 첫째항과 공비가 모두 $\frac{1-\log_2 x^2}{2}$이므로 이 등비급수가 수렴하려면

$-1<\frac{1-\log_2 x^2}{2}<1$ ⋯ ❶

$-2<1-\log_2 x^2<2$, $\quad -1<\log_2 x^2<3$

$\log_2 2^{-1}<\log_2 x^2<\log_2 2^3$

$\therefore \frac{1}{2}<x^2<8$ ⋯ ❷

따라서 정수 $x$는 $-2$, $-1$, $1$, $2$의 4개이다. ⋯ ❸

답 4

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ❶ 주어진 등비급수가 수렴할 조건을 구할 수 있다. | 40 % |
| ❷ $x^2$의 값의 범위를 구할 수 있다. | 30 % |
| ❸ 정수 $x$의 개수를 구할 수 있다. | 30 % |

**09** (전략) $a$, $b$의 값을 각각 등비급수로 나타낸다.

(풀이) $a=\overline{P_1P_2}+\overline{P_3P_4}+\overline{P_5P_6}+\cdots$

$=\frac{6}{7}+\left(\frac{6}{7}\right)^3+\left(\frac{6}{7}\right)^5+\cdots$

$=\frac{\frac{6}{7}}{1-\frac{36}{49}}=\frac{42}{13}$

$b=\overline{OP_1}+\overline{P_2P_3}+\overline{P_4P_5}+\cdots$

$=1+\left(\frac{6}{7}\right)^2+\left(\frac{6}{7}\right)^4+\cdots$

$=\frac{1}{1-\frac{36}{49}}=\frac{49}{13}$

$\therefore a+b=\frac{42}{13}+\frac{49}{13}=7$ 답 7

**10** (전략) 넓이가 각각 $S_n$, $S_{n+1}$인 두 정사각형의 한 변의 길이 사이의 관계식을 구한다.

(풀이) 넓이가 각각 $S_n$, $S_{n+1}$인 정사각형의 한 변의 길이를 $a_n$, $a_{n+1}$이라 하면

$a_n : a_{n+1}=\sqrt{2}:1 \qquad \therefore a_{n+1}=\frac{\sqrt{2}}{2}a_n$ ⋯ ❶

따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 4, 공비가 $\frac{\sqrt{2}}{2}$인 등비수열이므로 $\quad a_n=4\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}$ ⋯ ❷

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}S_n=\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{4\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}\right\}^2$

$=16\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=16\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}}$

$=32$ ⋯ ❸

답 32

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ❶ $a_n$과 $a_{n+1}$ 사이의 관계식을 구할 수 있다. | 30 % |
| ❷ $a_n$을 구할 수 있다. | 20 % |
| ❸ $\sum_{n=1}^{\infty}S_n$의 값을 구할 수 있다. | 50 % |

**11** (전략) 공이 정지할 때까지 움직인 거리를 등비급수로 나타낸다.

(풀이) 공이 정지할 때까지 움직인 거리는

$20+\frac{1}{2}\cdot20\cdot2+\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot20\cdot2+\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot20\cdot2+\cdots$

$=20+40\left\{\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots\right\}$

$=20+40\cdot\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=60\,(\mathrm{m})$ 답 60 m

**12** (전략) $3a_{n+1}-2a_n=\alpha$를 $a_{n+1}-\alpha=\frac{2}{3}(a_n-\alpha)$로 변형하여 수열 $\{a_n\}$의 일반항을 구한다.

(풀이) $3a_{n+1}-2a_n=\alpha$에서 $\qquad a_{n+1}-\frac{2}{3}a_n=\frac{1}{3}\alpha$

$\therefore a_{n+1}-\alpha=\frac{2}{3}(a_n-\alpha)$

수열 $\{a_n-\alpha\}$는 첫째항이 $4-\alpha$, 공비가 $\frac{2}{3}$인 등비수열이므로 $\quad a_n-\alpha=(4-\alpha)\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

$\therefore a_n=(4-\alpha)\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}+\alpha$

이때 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$이 수렴하므로 $\qquad \lim_{n\to\infty}a_n=0$

즉 $\lim_{n\to\infty}\left\{(4-\alpha)\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}+\alpha\right\}=0$에서 $\alpha=0$

$\therefore a_n=4\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}4\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}=\frac{4}{1-\frac{2}{3}}=12$

따라서 $\beta=12$이므로 $\alpha+\beta=12$

답 12

**13** 전략 $\sum_{n=1}^{\infty}n^2(a_n-a_{n+1})$에 $n=1, 2, 3, \cdots$을 대입하여 합의 꼴로 나타낸다.

풀이 $\sum_{n=1}^{\infty}n^2(a_n-a_{n+1})$

$=1^2(a_1-a_2)+2^2(a_2-a_3)+3^2(a_3-a_4)+\cdots$

$=(1^2-0^2)a_1+(2^2-1^2)a_2+(3^2-2^2)a_3+\cdots$

$=\sum_{n=1}^{\infty}\{n^2-(n-1)^2\}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)a_n$

$=\sum_{n=1}^{\infty}2na_n-\sum_{n=1}^{\infty}a_n=2\sum_{n=1}^{\infty}na_n-\sum_{n=1}^{\infty}a_n$

$=2\beta-\alpha$

답 ③

**14** 전략 급수의 성질은 수렴하는 급수에 대하여 성립하고, 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$이 수렴하면 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$임을 이용한다.

풀이 ㄱ. $\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\alpha$, $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)=\beta$라 하면

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\{(a_n-b_n)+b_n\}$

$=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)+\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\beta+\alpha$

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$도 수렴한다.

ㄴ. $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$

$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}b_n=0$

$\therefore \lim_{n\to\infty}a_nb_n=\lim_{n\to\infty}a_n\lim_{n\to\infty}b_n=0$

ㄷ. [반례] $a_n=3^n$, $b_n=-3^n$이면 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$은 각각 발산하지만

$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim_{n\to\infty}(3^n-3^n)=0$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ②

**15** 전략 $a_1=S_1$이고, $a_n=S_n-S_{n-1}\ (n\geq2)$임을 이용하여 수열 $\{a_n\}$의 일반항을 구한다.

풀이 $3^{n-1}S_n=3^n-1$에서

$S_n=3-\frac{1}{3^{n-1}}=3\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}$ ··· ❶

$n=1$일 때, $a_1=S_1=3\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)=2$

$n\geq2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=3\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}-3\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}$

$=2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ ······ ㉠

$a_1=2$는 ㉠에 $n=1$을 대입하여 얻은 값과 같으므로

$a_n=2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ ··· ❷

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}=\sum_{n=1}^{\infty}2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{2n-1}$

$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^{n-1}$

$=\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{9}}=\frac{3}{4}$ ··· ❸

답 $\frac{3}{4}$

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ❶ $S_n$을 구할 수 있다. | 20 % |
| ❷ $a_n$을 구할 수 있다. | 40 % |
| ❸ $\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}$의 값을 구할 수 있다. | 40 % |

**16** 전략 $2^1$, $2^2$, $2^3$, $\cdots$이 각각 분모인 기약분수 중 0과 1 사이에 있는 분수들의 분자는 2의 배수가 아님을 이용한다.

풀이 $f(1)=\frac{1}{2^1}$

$f(2)=\frac{1}{2^2}+\frac{3}{2^2}$

$f(3)=\frac{1}{2^3}+\frac{3}{2^3}+\frac{5}{2^3}+\frac{7}{2^3}$

⋮ ··· ❶

$\therefore f(n)=\frac{1}{2^n}+\frac{3}{2^n}+\frac{5}{2^n}+\cdots+\frac{2^n-1}{2^n}$

$=\frac{1}{2^n}\{1+3+5+\cdots+(2^n-1)\}$

$=\frac{1}{2^n}\cdot\frac{2^{n-1}\{1+(2^n-1)\}}{2}$

$=\frac{2^{n-1}}{2}=2^{n-2}$ ··· ❷

$\therefore \frac{1}{f(1)}+\frac{1}{f(2)}+\frac{1}{f(3)}+\cdots$

$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-2}}=\frac{2}{1-\frac{1}{2}}=4$ ··· ❸

답 4

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ❶ $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, ⋯을 구할 수 있다. | 30 % |
| ❷ $f(n)$을 구할 수 있다. | 50 % |
| ❸ 급수의 합을 구할 수 있다. | 20 % |

**Remark▶**

수열 $\frac{1}{2^n}, \frac{2}{2^n}, \frac{3}{2^n}, \cdots, \frac{2^n-1}{2^n}, \frac{2^n}{2^n}$의 항의 개수는 $2^n$이므로 $\frac{1}{2^n}, \frac{3}{2^n}, \frac{5}{2^n}, \cdots, \frac{2^n-1}{2^n}$의 항의 개수는 $\frac{2^n}{2}$, 즉 $2^{n-1}$이다.

## 17

전략 각 등비급수의 공비를 구하여 $-1<(\text{공비})<1$인지 확인한다.

풀이 $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$이 수렴하므로 $\quad -1<r<1$

①, ② $0\le r^2<1$이므로 $\sum_{n=1}^{\infty} r^{2n}$은 수렴한다.

따라서 급수의 성질에 의하여

$\sum_{n=1}^{\infty}(r^n+r^{2n})=\sum_{n=1}^{\infty} r^n+\sum_{n=1}^{\infty} r^{2n}$과

$\sum_{n=1}^{\infty}(r^n-2r^{2n})=\sum_{n=1}^{\infty} r^n-2\sum_{n=1}^{\infty} r^{2n}$도 수렴한다.

③ $-1<-r<1$이므로 $\sum_{n=1}^{\infty}(-r)^n$은 수렴한다.

따라서 급수의 성질에 의하여

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n+(-r)^n}{2}=\frac{1}{2}\left\{\sum_{n=1}^{\infty} r^n+\sum_{n=1}^{\infty}(-r)^n\right\}$도 수렴한다.

④ $-1<\frac{r-1}{2}<0$이므로 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r-1}{2}\right)^n$은 수렴한다.

⑤ $-\frac{3}{2}<\frac{r}{2}-1<-\frac{1}{2}$이므로 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{2}-1\right)^n$은 반드시 수렴한다고 할 수 없다.

답 ⑤

## 18

전략 만들어지는 두 반원의 지름의 길이를 차례대로 구해 본다.

풀이 처음 만들어지는 두 반원의 지름의 길이는 각각

$$3\cdot\frac{2}{3}=2,\ 3\cdot\frac{1}{3}=1$$

$$\therefore S_1=\frac{1}{2}\pi\cdot 1^2+\frac{1}{2}\pi\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}\pi\left\{1^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}$$

두 번째 만들어지는 두 반원의 지름의 길이는 각각

$$2\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{3},\ 2\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

$$\therefore S_2=\frac{1}{2}\pi\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2+\frac{1}{2}\pi\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{2}\pi\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2\right\}$$

세 번째 만들어지는 두 반원의 지름의 길이는 각각

$$\frac{4}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{8}{9},\ \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{4}{9}$$

$$\therefore S_3=\frac{1}{2}\pi\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^2+\frac{1}{2}\pi\cdot\left(\frac{2}{9}\right)^2=\frac{1}{2}\pi\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^4+\left(\frac{2}{9}\right)^2\right\}$$

$$\vdots$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} S_n$$

$$=\frac{1}{2}\pi\left[\left\{1^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}+\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2\right\}+\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^4+\left(\frac{2}{9}\right)^2\right\}+\cdots\right]$$

$$=\frac{1}{2}\pi\left[\left\{1^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^4+\cdots\right\}+\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{9}\right)^2+\cdots\right\}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\pi\left(\frac{1}{1-\frac{4}{9}}+\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{4}{9}}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\pi\cdot\frac{9}{4}=\frac{9}{8}\pi$$

답 $\frac{9}{8}\pi$

## 19

전략 $a_1, a_2, a_3, \cdots$을 구하여 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{10^n}$을 순환소수로 나타내어 본다.

풀이 $3^n$을 10으로 나누었을 때의 나머지는 $3^n$의 일의 자리의 숫자와 같으므로

$$a_1=3,\ a_2=9,\ a_3=7,\ a_4=1,$$
$$a_5=3,\ a_6=9,\ a_7=7,\ a_8=1,\ \cdots$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{10^n}$$

$$=\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+\frac{a_3}{10^3}+\frac{a_4}{10^4}+\frac{a_5}{10^5}+\frac{a_6}{10^6}+\cdots$$

$$=0.3+0.09+0.007+0.0001+0.00003+0.000009+\cdots$$

$$=0.\dot{3}97\dot{1}$$

$$=\frac{3971}{9999}=\frac{361}{909}$$

답 $\frac{361}{909}$

**Remark▶**

등비급수를 이용하여 $0.\dot{3}97\dot{1}$을 기약분수로 나타내면

$$0.\dot{3}97\dot{1}=0.3971+0.00003971+0.000000003971+\cdots$$

$$=\frac{3971}{10000}+\frac{3971}{10000}\cdot\frac{1}{10000}+\frac{3971}{10000}\cdot\left(\frac{1}{10000}\right)^2+\cdots$$

$$=\frac{\frac{3971}{10000}}{1-\frac{1}{10000}}=\frac{3971}{9999}=\frac{361}{909}$$

**20** (전략) 자연수 $N$이 $N=a^m b^n$($a$, $b$는 서로 다른 소수, $m$, $n$은 자연수)으로 소인수분해될 때, $N$의 양의 약수의 개수는 $(m+1)(n+1)$임을 이용한다.

(풀이) $3^n \cdot 5^{n+1}$의 양의 약수의 개수 $a_n$은

$$a_n=(n+1)(n+2)$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)(k+2)}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)$$
$$=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}$$

답 ①

**21** (전략) 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$이 수렴하면 $\lim_{n\to\infty}b_n=0$임을 이용한다.

(풀이) $b_n=na_n-\frac{n^2+1}{2n+1}$이라 하면

$$a_n=\frac{b_n}{n}+\frac{n^2+1}{2n^2+n}$$

$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}b_n=0$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{b_n}{n}+\frac{n^2+1}{2n^2+n}\right)$$
$$=0+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}(a_n{}^2+2a_n+2)=\left(\frac{1}{2}\right)^2+2\cdot\frac{1}{2}+2$$
$$=\frac{13}{4}$$

답 ①

**22** (전략) 주어진 식을 간단히 하여 $a_n$과 $a_{n+1}$ 사이의 관계식을 구한다.

(풀이) $a_na_{n+1}+a_{n+1}=ka_n{}^2+ka_n$에서

$$(a_n+1)a_{n+1}=ka_n(a_n+1)$$

$a_n+1\neq0$이므로 양변을 $a_n+1$로 나누면

$$a_{n+1}=ka_n\ (n\geq1)$$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $k$, 공비가 $k$인 등비수열이므로

$$a_n=k\cdot k^{n-1}=k^n$$

이때 $0<k<1$이므로 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=5$에서

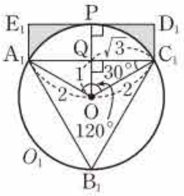
$$\frac{k}{1-k}=5,\qquad k=5-5k$$

$$6k=5\qquad \therefore k=\frac{5}{6}$$

답 ①

**23** (전략) $S_1$의 값을 구하고, 두 원 $O_1$, $O_2$의 닮음비를 이용하여 $S_n$의 공비를 구한다.

(풀이) 오른쪽 그림과 같이 원 $O_1$의 중심을 O라 하고 원 $O_1$과 변 $\mathrm{E_1D_1}$의 접점을 P, $\overline{\mathrm{OP}}$와 $\overline{\mathrm{A_1C_1}}$의 교점을 Q라 하면




$$\overline{\mathrm{OP}}=2,$$
$$\overline{\mathrm{OQ}}=\overline{\mathrm{QP}}=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{OP}}=1$$

직각삼각형 $\mathrm{QOC_1}$에서 $\overline{\mathrm{OC_1}}=2$, $\angle\mathrm{OC_1Q}=30°$이므로

$$\overline{\mathrm{QC_1}}=\overline{\mathrm{OC_1}}\cos30°=2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$$
$$\overline{\mathrm{A_1C_1}}=2\overline{\mathrm{QC_1}}=2\sqrt{3}$$

이때 $\widehat{\mathrm{A_1C_1}}$과 $\overline{\mathrm{A_1C_1}}$로 둘러싸인 활꼴의 넓이는

$$\pi\cdot2^2\cdot\frac{120}{360}-\frac{1}{2}\cdot2\sqrt{3}\cdot1=\frac{4}{3}\pi-\sqrt{3}$$

$$\therefore S_1=2\sqrt{3}\cdot1-\left(\frac{4}{3}\pi-\sqrt{3}\right)$$
$$=3\sqrt{3}-\frac{4}{3}\pi$$

한편 원 $O_2$의 반지름의 길이는 $\overline{\mathrm{OQ}}=1$이므로 원 $O_1$과 원 $O_2$의 닮음비는 $2:1$이고, 원 $O_n$과 원 $O_{n+1}$의 닮음비도 $2:1$이다.

즉 그림 $R_n$에서 새로 색칠한 도형과 그림 $R_{n+1}$에서 새로 색칠한 도형의 닮음비도 $2:1$이므로 넓이의 비는 $4:1$이다.

따라서 $\lim_{n\to\infty}S_n$은 첫째항이 $S_1$, 공비가 $\frac{1}{4}$인 등비급수의 합이므로

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{3\sqrt{3}-\frac{4}{3}\pi}{1-\frac{1}{4}}$$
$$=4\sqrt{3}-\frac{16}{9}\pi$$

답 ①

**Remark ▶**

도형의 길이와 넓이에 대한 문제를 해결할 때에는 도형에 대한 다음 성질이 자주 이용된다.

① 닮은 두 도형에서 대응변의 길이의 비는 일정하다.

② 두 도형의 닮음비가 $m:n$이면 둘레의 길이의 비는 $m:n$이고, 넓이의 비는 $m^2:n^2$이다.

Ⅱ. 미분법

# 03 지수함수와 로그함수의 미분

**유제** 본책 67~79쪽

**022-❶** (1) $\lim_{x\to\infty}\frac{2^x-3^x}{2^x+3^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^x-1}{\left(\frac{2}{3}\right)^x+1}=-1$

(2) $\lim_{x\to\infty}(4^x-3^{x+1})=\lim_{x\to\infty}4^x\left\{1-3\left(\frac{3}{4}\right)^x\right\}=\infty$

(3) $-x=t$로 놓으면 $x\longrightarrow-\infty$일 때 $t\longrightarrow\infty$이므로

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{5^x-5^{-x}}{5^x+5^{-x}}=\lim_{t\to\infty}\frac{5^{-t}-5^t}{5^{-t}+5^t}=\lim_{t\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{5}\right)^t-5^t}{\left(\frac{1}{5}\right)^t+5^t}=\lim_{t\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{25}\right)^t-1}{\left(\frac{1}{25}\right)^t+1}=-1$$

답 (1) $-1$ (2) $\infty$ (3) $-1$

**023-❶** (1) $\lim_{x\to\infty}\{\log_{\frac{1}{3}}(3x+1)-\log_{\frac{1}{3}}x\}$

$=\lim_{x\to\infty}\log_{\frac{1}{3}}\frac{3x+1}{x}$

$=\log_{\frac{1}{3}}\left(\lim_{x\to\infty}\frac{3x+1}{x}\right)$

$=\log_{\frac{1}{3}}3=-1$

(2) $\lim_{x\to3}(\log_2|x-3|-\log_2|\sqrt{x+1}-2|)$

$=\lim_{x\to3}\left(\log_2\left|\frac{x-3}{\sqrt{x+1}-2}\right|\right)$

$=\lim_{x\to3}\left\{\log_2\left|\frac{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}{(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2)}\right|\right\}$

$=\lim_{x\to3}\left\{\log_2\left|\frac{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}{x-3}\right|\right\}$

$=\lim_{x\to3}(\log_2|\sqrt{x+1}+2|)$

$=\log_2\left(\lim_{x\to3}|\sqrt{x+1}+2|\right)$

$=\log_2(\sqrt{4}+2)$

$=\log_2 4=2$

답 (1) $-1$ (2) 2

**024-❶** (1) $\lim_{x\to0}\left(1+\frac{x}{4}\right)^{\frac{3}{x}}=\lim_{x\to0}\left\{\left(1+\frac{x}{4}\right)^{\frac{4}{x}}\right\}^{\frac{3}{4}}=e^{\frac{3}{4}}$

(2) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x}\right)^{\frac{x}{2}}=\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right\}^{\frac{1}{2}}$

$=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$

(3) $-x=t$로 놓으면 $x\longrightarrow0$일 때 $t\longrightarrow0$이므로

$$\lim_{x\to0}(1-x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{t\to0}(1+t)^{-\frac{1}{t}}=\lim_{t\to0}\{(1+t)^{\frac{1}{t}}\}^{-1}=e^{-1}=\frac{1}{e}$$

(4) $-\frac{1}{3x}=t$로 놓으면 $x\longrightarrow\infty$일 때 $t\longrightarrow0$이므로

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{3x}\right)^{6x}=\lim_{t\to0}(1+t)^{-\frac{2}{t}}=\lim_{t\to0}\{(1+t)^{\frac{1}{t}}\}^{-2}=e^{-2}=\frac{1}{e^2}$$

답 (1) $e^{\frac{3}{4}}$ (2) $\sqrt{e}$ (3) $\frac{1}{e}$ (4) $\frac{1}{e^2}$

**025-❶** (1) $\lim_{x\to0}\frac{e^{3x}-e^{2x}}{x}$

$=\lim_{x\to0}\frac{e^{3x}-1-e^{2x}+1}{x}$

$=\lim_{x\to0}\frac{e^{3x}-1}{x}-\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}-1}{x}$

$=\lim_{x\to0}\frac{e^{3x}-1}{3x}\cdot3-\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}-1}{2x}\cdot2$

$=1\cdot3-1\cdot2=1$

(2) $\lim_{x\to0}\frac{e^x-5^{-x}}{x}$

$=\lim_{x\to0}\frac{e^x-1-5^{-x}+1}{x}$

$=\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}-\lim_{x\to0}\frac{5^{-x}-1}{x}$

$=\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}+\lim_{x\to0}\frac{5^{-x}-1}{-x}$

$=1+\ln5=\ln5e$

(3) $\lim_{x\to0}\frac{\log_2(2+x)-1}{x}$

$=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\{\log_2(2+x)-\log_2 2\}$

$=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\log_2\frac{2+x}{2}=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\log_2\left(1+\frac{x}{2}\right)$

$=\lim_{x\to0}\log_2\left(1+\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0}\log_2\left\{\left(1+\frac{x}{2}\right)^{\frac{2}{x}}\right\}^{\frac{1}{2}}$

$=\log_2 e^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\log_2 e$

$=\frac{1}{2\ln2}$

(4) $\lim_{x\to\infty} x\{\ln(x+1)-\ln x\}$

$=\lim_{x\to\infty} x\ln\frac{x+1}{x}=\lim_{x\to\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$

$=\lim_{x\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$

$=\ln e=1$

답 (1) 1 (2) $\ln 5e$ (3) $\frac{1}{2\ln 2}$ (4) 1

**026-❶** $x \to 0$일 때, (분모) $\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to 0$이다.

즉 $\lim_{x\to 0}\ln(a+4x)=0$이므로

$\ln a=0 \qquad \therefore a=1$

$a=1$을 주어진 식에 대입하면

$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+4x)}{e^{3x}-1}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+4x)}{4x}\cdot\frac{3x}{e^{3x}-1}\cdot\frac{4}{3}$

$=1\cdot 1\cdot\frac{4}{3}=\frac{4}{3}$

$\therefore b=\frac{4}{3}$

답 $a=1$, $b=\frac{4}{3}$

**026-❷** $x \to \frac{1}{3}$일 때, (분모) $\to$ 0이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to$ 0이다.

즉 $\lim_{x\to\frac{1}{3}}(ax-b)=0$이므로

$\frac{1}{3}a-b=0 \qquad \therefore a=3b$ …… ㉠

㉠을 주어진 식에 대입하면

$\lim_{x\to\frac{1}{3}}\frac{3bx-b}{\ln 3x}=\lim_{x\to\frac{1}{3}}\frac{b(3x-1)}{\ln 3x}$ …… ㉡

$3x-1=t$로 놓으면 $x\to\frac{1}{3}$일 때 $t\to 0$이므로 ㉡은

$\lim_{t\to 0}\frac{bt}{\ln(1+t)}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\ln(1+t)}\cdot b$

$=1\cdot b=b$

따라서 $b=4$이므로 이것을 ㉠에 대입하면 $a=12$

$\therefore a+b=16$

답 16

**027-❶** (1) $y=e^{2x}=e^x\cdot e^x$이므로

$y'=(e^x)'e^x+e^x(e^x)'=e^{2x}+e^{2x}=2e^{2x}$

(2) $y'=(3x+1)'5^x+(3x+1)(5^x)'$

$=3\cdot 5^x+(3x+1)\cdot 5^x\ln 5$

$=5^x\{3+(3x+1)\ln 5\}$

(3) $y'=(x^2+3)'\left(\frac{1}{2}\right)^x+(x^2+3)\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^x\right\}'$

$=2x\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^x+(x^2+3)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^x\ln\frac{1}{2}$

$=\left(\frac{1}{2}\right)^x\left\{2x+(x^2+3)\ln\frac{1}{2}\right\}$

$=\left(\frac{1}{2}\right)^x\{2x-(x^2+3)\ln 2\}$

답 풀이 참조

**027-❷** $f(x)=3^{x+1}=3\cdot 3^x$이므로

$f'(x)=3\cdot 3^x\ln 3=3^{x+1}\ln 3$

따라서 $x=0$에서의 미분계수는

$f'(0)=3\ln 3$

답 $3\ln 3$

**028-❶** (1) $y=\frac{\ln x^4}{3}=\frac{4\ln x}{3}$이므로 $\quad y'=\frac{4}{3x}$

(2) $y=(4x^2-1)\ln x^3=3(4x^2-1)\ln x$

$=(12x^2-3)\ln x$

이므로

$y'=(12x^2-3)'\ln x+(12x^2-3)(\ln x)'$

$=24x\ln x+(12x^2-3)\cdot\frac{1}{x}$

$=24x\ln x+12x-\frac{3}{x}$

(3) $y'=(e^x)'\log_5 x+e^x(\log_5 x)'$

$=e^x\log_5 x+e^x\cdot\frac{1}{x\ln 5}$

$=e^x\left(\log_5 x+\frac{1}{x\ln 5}\right)$

(4) $y=(\log_3 x)^2+\frac{1}{3}\ln x=\log_3 x\cdot\log_3 x+\frac{1}{3}\ln x$

이므로

$y'=(\log_3 x)'\log_3 x+\log_3 x(\log_3 x)'+\left(\frac{1}{3}\ln x\right)'$

$=\frac{1}{x\ln 3}\cdot\log_3 x+\log_3 x\cdot\frac{1}{x\ln 3}+\frac{1}{3x}$

$=\frac{2\log_3 x}{x\ln 3}+\frac{1}{3x}$

$=\frac{6\log_3 x+\ln 3}{3x\ln 3}$

답 풀이 참조

**028-❷** $f'(x)=(e^x)'\ln x+e^x(\ln x)'$

$=e^x\ln x+e^x\cdot\frac{1}{x}=e^x\left(\ln x+\frac{1}{x}\right)$

$\therefore f'(1)=e(\ln 1+1)=e$

답 $e$

## 중단원 연습 문제

본책 80~83쪽

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **01** 2 | **02** 3 | **03** 16 | **04** ② | **05** $e$ |
| **06** $a=2$, $b=0$ | | **07** 1 | **08** ② | **09** ④ |
| **10** ② | **11** $\log 6$ | **12** ① | **13** 4 | **14** $-5$ |
| **15** 28 | **16** ③ | **17** ③ | **18** ② | **19** 50 |

**01** 전략 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴이면 분모에서 밑이 가장 큰 항으로 분모, 분자를 각각 나누고 $x \to -\infty$일 때에는 $-x=t$로 치환한다.

풀이 $\lim_{x\to\infty}\frac{3^{x+2}-2^x}{3^x+2^{x+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3^2-\left(\frac{2}{3}\right)^x}{1+2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^x}$

$=\frac{9}{1}=9$ ···➊

$-x=t$로 놓으면 $x \longrightarrow -\infty$일 때 $t \longrightarrow \infty$이므로

$\lim_{x\to-\infty}\frac{7^x-7^{-x+1}}{7^x+7^{-x}}$

$=\lim_{t\to\infty}\frac{7^{-t}-7^{t+1}}{7^{-t}+7^t}=\lim_{t\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{7}\right)^t-7^{t+1}}{\left(\frac{1}{7}\right)^t+7^t}$

$=\lim_{t\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{49}\right)^t-7}{\left(\frac{1}{49}\right)^t+1}=-7$ ···➋

따라서 구하는 값은 $9-7=2$ ···➌

답 2

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ➊ $\lim_{x\to\infty}\frac{3^{x+2}-2^x}{3^x+2^{x+1}}$의 값을 구할 수 있다. | 40 % |
| ➋ $\lim_{x\to-\infty}\frac{7^x-7^{-x+1}}{7^x+7^{-x}}$의 값을 구할 수 있다. | 50 % |
| ➌ 두 극한값의 합을 구할 수 있다. | 10 % |

**02** 전략 로그의 성질을 이용하여 $\lim_{x\to\infty}\{\log_a f(x)\}$ 꼴로 변형한 후 $\lim_{x\to\infty}\{\log_a f(x)\}=\log_a\left\{\lim_{x\to\infty}f(x)\right\}$ $(a>0,\ a\neq1)$임을 이용한다.

풀이 $\lim_{x\to\infty}\{\log_2(2+8x^2)-2\log_2 x\}$

$=\lim_{x\to\infty}\{\log_2(2+8x^2)-\log_2 x^2\}$

$=\lim_{x\to\infty}\left(\log_2\frac{2+8x^2}{x^2}\right)$

$=\log_2\left(\lim_{x\to\infty}\frac{2+8x^2}{x^2}\right)$

$=\log_2 8=3$

답 3

**03** 전략 $\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$임을 이용할 수 있도록 식을 변형한다.

풀이 $\lim_{x\to0}\left\{\left(1+\frac{x}{5}\right)(1+3x)\right\}^{\frac{1}{x}}$

$=\lim_{x\to0}\left(1+\frac{x}{5}\right)^{\frac{1}{x}}\cdot(1+3x)^{\frac{1}{x}}$

$=\lim_{x\to0}\left\{\left(1+\frac{x}{5}\right)^{\frac{5}{x}}\right\}^{\frac{1}{5}}\cdot\{(1+3x)^{\frac{1}{3x}}\}^3$

$=e^{\frac{1}{5}}\cdot e^3=e^{\frac{16}{5}}$

따라서 $e^{\frac{k}{5}}=e^{\frac{16}{5}}$이므로 $k=16$

답 16

**04** 전략 $\lim_{x\to0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\frac{1}{\ln a}$ $(a>0,\ a\neq1)$임을 이용할 수 있도록 식을 변형한다.

풀이 $\lim_{x\to0}\frac{\log_3(1-6x)}{\log_5(1+2x)}$

$=\lim_{x\to0}\frac{\log_3(1-6x)}{-6x}\cdot\frac{2x}{\log_5(1+2x)}\cdot\frac{-6}{2}$

$=\frac{1}{\ln 3}\cdot\ln 5\cdot(-3)=-\frac{3\ln 5}{\ln 3}$

답 ②

**05** 전략 $\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1$임을 이용할 수 있도록 $h-1=t$로 치환한다.

풀이 $h-1=t$로 놓으면 $h \longrightarrow 1$일 때 $t \longrightarrow 0$이므로

$\lim_{h\to1}\frac{e^h-e}{h-1}=\lim_{t\to0}\frac{e^{t+1}-e}{t}=\lim_{t\to0}\frac{e(e^t-1)}{t}$

$=e\cdot1=e$

답 $e$

**06** 전략 $x \to 0$일 때, (분자) $\to 0$이고 0이 아닌 극한값이 존재하면 (분모) $\to 0$임을 이용한다.

풀이 $x \longrightarrow 0$일 때, (분자) $\longrightarrow 0$이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모) $\longrightarrow 0$이다.

즉 $\lim_{x\to0}(ax^2+b)=0$이므로 $b=0$

$b=0$을 주어진 식에 대입하면

$\lim_{x\to0}\frac{(e^{2x}-1)\ln(1+3x)}{ax^2}$

$=\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}-1}{2x}\cdot\frac{\ln(1+3x)}{3x}\cdot\frac{6}{a}$

$=1\cdot1\cdot\frac{6}{a}=\frac{6}{a}$

따라서 $\frac{6}{a}=3$이므로 $a=2$

답 $a=2$, $b=0$

**07** 전략 곱의 미분법을 이용하여 $f(x)$의 도함수를 구한 후 $x=0$을 대입한다.

**풀이** $f(x)=(x^2+1)e^x$에서

$$f'(x)=(x^2+1)'e^x+(x^2+1)(e^x)'$$
$$=2xe^x+(x^2+1)e^x$$
$$=e^x(x^2+2x+1)$$
$$=e^x(x+1)^2 \quad \cdots ❶$$
$$\therefore f'(0)=e^0(0+1)^2=1 \quad \cdots ❷$$

**답** 1

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ❶ $f'(x)$를 구할 수 있다. | 80 % |
| ❷ $f'(0)$의 값을 구할 수 있다. | 20 % |

## 08

**전략** 곱의 미분법과 로그함수의 도함수를 이용한다.

**풀이** $f(x)=x\log_7 2x=x(\log_7 2+\log_7 x)$에서

$$f'(x)=(x)'(\log_7 2+\log_7 x)+x(\log_7 2+\log_7 x)'$$
$$=(\log_7 2+\log_7 x)+x\cdot\frac{1}{x\ln 7}$$
$$=\log_7 2+\log_7 x+\frac{1}{\ln 7}$$
$$=\log_7 2+\log_7 x+\log_7 e$$
$$=\log_7 2ex$$

이므로 $f'(1)=\log_7 2e$

따라서 $\log_7 a=\log_7 2e$이므로

$a=2e$

**답** ②

## 09

**전략** $\lim\limits_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)$임을 이용할 수 있도록 식을 변형한다.

**풀이** $\lim\limits_{h\to0}\frac{f(e+h)-f(e-h)}{h}$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f(e+h)-f(e)-f(e-h)+f(e)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(e+h)-f(e)}{h}+\lim_{h\to0}\frac{f(e-h)-f(e)}{-h}$$
$$=f'(e)+f'(e)$$
$$=2f'(e)$$

이때

$$f'(x)=(x^3)'\ln x+x^3(\ln x)'$$
$$=3x^2\ln x+x^3\cdot\frac{1}{x}$$
$$=3x^2\ln x+x^2$$

이므로 구하는 값은

$$2f'(e)=2(3e^2\ln e+e^2)=2(3e^2+e^2)=8e^2$$

**답** ④

## 10

**전략** 지수함수와 로그함수의 극한을 이용하여 극한을 조사한다.

**풀이** ㄱ. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x}=0$이므로 $\lim\limits_{x\to\infty}3^{\frac{2}{x}}=1$

$x>0$일 때, $3^{\frac{2}{x}}>1$이므로 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{1-3^{\frac{2}{x}}}=-\infty$

ㄴ. $\lim\limits_{x\to0+}\frac{1}{x}=\infty$이므로 $\lim\limits_{x\to0+}2^{\frac{1}{x}}=\infty$

$\lim\limits_{x\to0-}\frac{1}{x}=-\infty$이므로 $\lim\limits_{x\to0-}2^{\frac{1}{x}}=0$

이때 $\lim\limits_{x\to0+}\frac{x}{1+2^{\frac{1}{x}}}=0$, $\lim\limits_{x\to0-}\frac{x}{1+2^{\frac{1}{x}}}=0$이므로

$$\lim_{x\to0}\frac{x}{1+2^{\frac{1}{x}}}=0$$

ㄷ. $x\to1+$일 때, $\log_7 x\to0+$이므로

$$\lim_{x\to1+}\frac{x}{\log_7 x}=\infty$$

이상에서 극한값이 존재하는 것은 ㄴ뿐이다. **답** ②

## 11

**전략** 로그의 성질을 이용하여 식을 변형한 후 $f(x)$를 간단히 한다.

**풀이** $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log(x^n+x^{-n})$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log x^n(1+x^{-2n})$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\{\log x^n+\log(1+x^{-2n})\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\log x+\frac{1}{n}\log(1+x^{-2n})\right\}$$
$$=\log x \quad \cdots ❶$$
$$\therefore f(2)+f(3)=\log 2+\log 3$$
$$=\log 6 \quad \cdots ❷$$

**답** $\log 6$

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ❶ $f(x)$를 간단히 할 수 있다. | 70 % |
| ❷ $f(2)+f(3)$의 값을 구할 수 있다. | 30 % |

## 12

**전략** 주어진 식을 간단히 한 후 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$임을 이용한다.

**풀이** $\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n+n}\right)$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n}\cdot\frac{n+2}{n+1}\cdot\frac{n+3}{n+2}\cdot\cdots\cdot\frac{2n+1}{n+n}$$
$$=\frac{2n+1}{2n}=1+\frac{1}{2n}$$

$$\therefore \text{(주어진 식)}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n =\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}\right\}^{\frac{1}{2}} =e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$$

답 ①

**13** (전략) 점 A의 $x$좌표를 $t$라 하고 $S_1$, $S_2$를 각각 $t$에 대한 식으로 나타낸 후 $\lim\limits_{x\to0+}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$임을 이용한다.

(풀이) 점 A의 좌표를 $(t, \ln(4t+1))$ $(t>0)$이라 하면

$$S_1=\frac{1}{2}\cdot\overline{OB}\cdot\ln(4t+1)=\frac{1}{2}\ln(4t+1)$$

$$S_2=\frac{1}{2}\cdot\overline{OC}\cdot t=\frac{t}{2}$$

$a$의 값이 한없이 커지면 점 A는 원점에 한없이 가까워지므로 $t \longrightarrow 0+$이다.

$$\therefore \alpha=\lim_{t\to0+}\frac{S_1}{S_2}=\lim_{t\to0+}\frac{\frac{1}{2}\ln(4t+1)}{\frac{t}{2}} =\lim_{t\to0+}\frac{\ln(4t+1)}{4t}\cdot4 =1\cdot4=4$$

답 4

**14** (전략) $g(1)=6$임을 이용하여 $f(1)$의 값을 구하고, $g'(x)$를 구한 후 $g'(1)=-1$임을 이용한다.

(풀이) $g(1)=(\ln1+2)f(1)=6$이므로

$2f(1)=6$ $\quad\therefore f(1)=3$ ⋯ ❶

$g(x)=(\ln x+2x)f(x)$에서

$$g'(x)=(\ln x+2x)'f(x)+(\ln x+2x)f'(x) =\left(\frac{1}{x}+2\right)f(x)+(\ln x+2x)f'(x)$$ ⋯ ❷

$g'(1)=3f(1)+2f'(1)=-1$이므로

$3\cdot3+2f'(1)=-1$, $\quad 2f'(1)=-10$

$\therefore f'(1)=-5$ ⋯ ❸

답 $-5$

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ❶ $f(1)$의 값을 구할 수 있다. | 30 % |
| ❷ $g'(x)$를 구할 수 있다. | 40 % |
| ❸ $f'(1)$의 값을 구할 수 있다. | 30 % |

**15** (전략) $f(x)$가 $x=0$에서 미분가능하면 $x=0$에서 연속이고 $f'(0)$이 존재한다.

(풀이) 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 미분가능하면 $x=0$에서 연속이다. 즉

$$\lim_{x\to0+}\{a\ln(x+1)+b\}=f(0)$$

$\therefore b=1$ ⋯ ❶

또 $f'(0)$이 존재하므로

$$\lim_{h\to0+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} =\lim_{h\to0+}\frac{a\ln(h+1)+1-1}{h} =\lim_{h\to0+}a\cdot\frac{\ln(h+1)}{h} =a,$$

$$\lim_{h\to0-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0-}\frac{3^{h+1}-2-1}{h} =\lim_{h\to0-}3\cdot\frac{3^h-1}{h} =3\ln3$$

에서 $\quad a=3\ln3=\ln27$ ⋯ ❷

$\therefore e^a+b=e^{\ln27}+1=27+1=28$ ⋯ ❸

답 28

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ❶ $b$의 값을 구할 수 있다. | 30 % |
| ❷ $a$의 값을 구할 수 있다. | 50 % |
| ❸ $e^a+b$의 값을 구할 수 있다. | 20 % |

(다른 풀이) $f_1(x)=a\ln(x+1)+b$, $f_2(x)=3^{x+1}-2$로 놓으면 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이므로

$f_1(0)=f_2(0)$ $\quad\therefore b=1$

또 $f_1'(x)=\frac{a}{x+1}$, $f_2'(x)=3^{x+1}\ln3$이고, $x=0$에서 $f(x)$의 미분계수가 존재하므로

$f_1'(0)=f_2'(0)$ $\quad\therefore a=3\ln3$

**Remark▶**

함수 $F(x)=\begin{cases}f(x) & (x\ge a)\\ g(x) & (x<a)\end{cases}$가 $x=a$에서 미분가능하면

(ⅰ) 함수 $F(x)$가 $x=a$에서 연속이다.

➡ $\lim\limits_{x\to a-}g(x)=f(a)$

(ⅱ) $x=a$에서 함수 $F(x)$의 미분계수가 존재한다.

➡ $\lim\limits_{x\to a+}f'(x)=\lim\limits_{x\to a-}g'(x)$

**16** (전략) $x$의 값의 범위를 $-1<x<0$, $x>0$으로 나눈 후 함수의 극한의 대소 관계를 이용하여 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}$의 값을 구한다.

(풀이) (ⅰ) $-1<x<0$일 때,

주어진 부등식의 각 변을 $x$로 나누면

$$\frac{e^{2x}-1}{2x}\le\frac{f(x)}{x}\le\frac{\ln(1+x)}{x}$$

이때 $\lim\limits_{x\to0-}\frac{e^{2x}-1}{2x}=1$, $\lim\limits_{x\to0-}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$이므로

함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{x\to 0-}\frac{f(x)}{x}=1$$

(ii) $x>0$일 때,

주어진 부등식의 각 변을 $x$로 나누면

$$\frac{\ln(1+x)}{x}\le\frac{f(x)}{x}\le\frac{e^{2x}-1}{2x}$$

이때 $\lim_{x\to 0+}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$, $\lim_{x\to 0+}\frac{e^{2x}-1}{2x}=1$이므로

함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)}{x}=1$$

(i), (ii)에서 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1$

$3x=t$로 놓으면 $x\to 0$일 때 $t\to 0$이므로

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(3x)}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{f(t)}{\frac{t}{3}}=\lim_{t\to 0}\frac{3f(t)}{t}$$

$$=3\cdot 1=3$$

답 ③

**Remark▶** 함수의 극한의 대소 관계

$f(x)\le h(x)\le g(x)$이고 $\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(x)=\alpha$ ($\alpha$는 실수)이면

$\Rightarrow \lim_{x\to a}h(x)=\alpha$

## 17

전략 $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$, $\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$ ($a>0$, $a\ne 1$)임을 이용한다.

풀이 ㄱ. $\lim_{x\to 0}\frac{e^{f(x)}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{x^2}\cdot x$$

$$=1\cdot 0=0$$

ㄴ. $\lim_{x\to 0}\frac{3^x-1}{f(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{f(x)}\cdot\frac{x}{e^x-1}\cdot\frac{3^x-1}{x}$

$$=1\cdot 1\cdot\ln 3$$

$$=\ln 3$$

ㄷ. [반례] $f(x)=|x|$이면 $\lim_{x\to 0}f(x)=0$이지만

$$\lim_{x\to 0+}\frac{e^{f(x)}-1}{x}=\lim_{x\to 0+}\frac{e^x-1}{x}=1,$$

$$\lim_{x\to 0-}\frac{e^{f(x)}-1}{x}=\lim_{x\to 0-}\frac{e^{-x}-1}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0-}\frac{e^{-x}-1}{-x}\cdot(-1)$$

$$=1\cdot(-1)=-1$$

이므로 $\lim_{x\to 0}\frac{e^{f(x)}-1}{x}$이 존재하지 않는다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

## 18

전략 $f(x)=x^2+ax+b$로 놓고 $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$임을 이용한다.

풀이 $f(x)=x^2+ax+b$ ($a$, $b$는 상수)라 하면

$$f(x)g(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+ax+b}{\ln(x+1)} & (x\ne 0,\ x>-1)\\ 8b & (x=0)\end{cases}$$

함수 $f(x)g(x)$가 $x=0$에서 연속이려면

$\lim_{x\to 0}f(x)g(x)=f(0)g(0)$이어야 하므로

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+ax+b}{\ln(x+1)}=8b \qquad\cdots\cdots ㉠$$

$x\to 0$일 때, (분모) $\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to 0$이다.

즉 $\lim_{x\to 0}(x^2+ax+b)=0$이므로 $b=0$

$b=0$을 ㉠에 대입하면 $\lim_{x\to 0}\frac{x^2+ax}{\ln(x+1)}=0$

이때 $\lim_{x\to 0}\frac{x^2+ax}{\ln(x+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{x+a}{\frac{\ln(x+1)}{x}}=\frac{a}{1}$이므로

$a=0$

따라서 $f(x)=x^2$이므로 $f(3)=9$

답 ②

**Remark▶**

$x\ne a$인 모든 실수 $x$에서 연속인 함수 $g(x)$에 대하여 함수

$$f(x)=\begin{cases}g(x) & (x\ne a)\\ k & (x=a)\ (k\text{는 상수})\end{cases}$$

가 모든 실수 $x$에서 연속이면

$\Rightarrow \lim_{x\to a}g(x)=k$

## 19

전략 $g'(x)$를 구한 후 $f'(e)g'(e)=-1$임을 이용한다.

풀이 $g(x)=f(x)\ln x^4=f(x)\cdot 4\ln x$에서

$$g'(x)=f'(x)\cdot 4\ln x+f(x)\cdot\frac{4}{x}$$

이때 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(e,\ -e)$에서의 접선과 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(e,\ -4e)$에서의 접선이 서로 수직이므로

$$f'(e)g'(e)=-1$$

$$f'(e)\cdot\left\{f'(e)\cdot 4+f(e)\cdot\frac{4}{e}\right\}=-1$$

$$f'(e)\cdot\left\{4f'(e)+(-e)\cdot\frac{4}{e}\right\}=-1$$

$$4\{f'(e)\}^2-4f'(e)+1=0$$

$$\{2f'(e)-1\}^2=0 \qquad \therefore f'(e)=\frac{1}{2}$$

$$\therefore 100f'(e)=100\cdot\frac{1}{2}=50$$

답 50

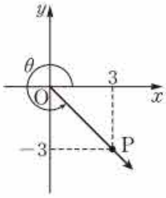
Ⅱ. 미분법

# 04 삼각함수의 미분

## 유제

본책 87~110쪽

**029-❶** 오른쪽 그림에서




$\overline{OP}=\sqrt{3^2+(-3)^2}$

$=3\sqrt{2}$

이므로

$\csc\theta=\dfrac{3\sqrt{2}}{-3}=-\sqrt{2}$

$\sec\theta=\dfrac{3\sqrt{2}}{3}=\sqrt{2}$

$\cot\theta=\dfrac{3}{-3}=-1$

$\therefore \sec\theta\csc\theta-2\cot\theta$

$=\sqrt{2}\cdot(-\sqrt{2})-2\cdot(-1)$

$=0$

답 0

**029-❷** $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{2}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\dfrac{1}{4}$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로

$1+2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{4}$ $\quad\therefore \sin\theta\cos\theta=-\dfrac{3}{8}$

$\therefore \sec\theta+\csc\theta=\dfrac{1}{\cos\theta}+\dfrac{1}{\sin\theta}$

$=\dfrac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta\cos\theta}$

$=\dfrac{\frac{1}{2}}{-\frac{3}{8}}=-\dfrac{4}{3}$

답 $-\dfrac{4}{3}$

**030-❶** (1) $\dfrac{1}{\sec\theta+\tan\theta}+\dfrac{1}{\sec\theta-\tan\theta}$

$=\dfrac{\sec\theta-\tan\theta+\sec\theta+\tan\theta}{\sec^2\theta-\tan^2\theta}$

$=\dfrac{2\sec\theta}{\tan^2\theta+1-\tan^2\theta}=2\sec\theta$

(2) $\dfrac{\cot\theta+\csc\theta}{\cot\theta}-\dfrac{\cot\theta+\csc\theta}{\csc\theta}$

$=1+\dfrac{\csc\theta}{\cot\theta}-\dfrac{\cot\theta}{\csc\theta}-1=\dfrac{\csc^2\theta-\cot^2\theta}{\cot\theta\csc\theta}$

$=\dfrac{1+\cot^2\theta-\cot^2\theta}{\cot\theta\csc\theta}=\dfrac{1}{\cot\theta\csc\theta}$

$=\sin\theta\tan\theta$

답 (1) $2\sec\theta$ (2) $\sin\theta\tan\theta$

**030-❷** $\csc^2\theta=1+\cot^2\theta$

$=1+\left(-\dfrac{5}{12}\right)^2=\dfrac{169}{144}$

이때 $\theta$가 제2사분면의 각이므로

$\csc\theta=\dfrac{13}{12}$

$\therefore \sin\theta=\dfrac{1}{\csc\theta}=\dfrac{12}{13}$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$에서

$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta$

$=1-\left(\dfrac{12}{13}\right)^2=\dfrac{25}{169}$

이때 $\theta$가 제2사분면의 각이므로

$\cos\theta=-\dfrac{5}{13}$

$\therefore \sin\theta+\cos\theta=\dfrac{12}{13}+\left(-\dfrac{5}{13}\right)=\dfrac{7}{13}$

답 $\dfrac{7}{13}$

**031-❶** $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$, $0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$에서 $\cos\alpha>0$, $\cos\beta>0$이므로

$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\dfrac{11}{14}\right)^2}=\dfrac{5\sqrt{3}}{14}$

$\cos\beta=\sqrt{1-\sin^2\beta}=\sqrt{1-\left(\dfrac{13}{14}\right)^2}=\dfrac{3\sqrt{3}}{14}$

$\therefore \cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

$=\dfrac{5\sqrt{3}}{14}\cdot\dfrac{3\sqrt{3}}{14}-\dfrac{11}{14}\cdot\dfrac{13}{14}$

$=-\dfrac{1}{2}$

그런데 $0<\alpha+\beta<\pi$이므로

$\alpha+\beta=\dfrac{2}{3}\pi$

답 $\dfrac{2}{3}\pi$

**Remark ▶**

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

$=\dfrac{11}{14}\cdot\dfrac{3\sqrt{3}}{14}+\dfrac{5\sqrt{3}}{14}\cdot\dfrac{13}{14}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

그런데 $0<\alpha+\beta<\pi$이므로 $\alpha+\beta$의 값이 $\dfrac{\pi}{3}$인지 $\dfrac{2}{3}\pi$인지 확인해야 한다. 따라서 $\cos(\alpha+\beta)$의 값을 이용하여 $\alpha+\beta$의 값을 구하는 것이 편리하다.

**031-❷** 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\tan\alpha+\tan\beta=-4$, $\tan\alpha\tan\beta=-7$

$\therefore \tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

$=\dfrac{-4}{1-(-7)}=-\dfrac{1}{2}$

답 $-\dfrac{1}{2}$

**032-❶** 두 직선 $y=-3x-2$, $y=\frac{1}{2}x+5$가 $x$축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 $\alpha$, $\beta$라 하면

$$\tan\alpha=-3,\ \tan\beta=\frac{1}{2}$$

$$\therefore \tan\theta=|\tan(\alpha-\beta)|=\left|\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\right|=\left|\frac{-3-\frac{1}{2}}{1+(-3)\cdot\frac{1}{2}}\right|=7$$

$\tan^2\theta+1=\sec^2\theta$에서

$$\sec^2\theta=7^2+1=50$$

$$\therefore \cos^2\theta=\frac{1}{\sec^2\theta}=\frac{1}{50}$$

이때 $\theta$는 예각이므로 $\cos\theta>0$

$$\therefore \cos\theta=\frac{1}{\sqrt{50}}=\frac{\sqrt{2}}{10}$$

답 $\frac{\sqrt{2}}{10}$

**032-❷** $x+3y-4=0$에서 $y=-\frac{1}{3}x+\frac{4}{3}$

$ax+y-3=0$에서 $y=-ax+3$

두 직선이 $x$축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 $\alpha$, $\beta$라 하면

$$\tan\alpha=-\frac{1}{3},\ \tan\beta=-a$$

두 직선이 이루는 예각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$이므로

$$|\tan(\alpha-\beta)|=\tan\frac{\pi}{4}$$

$$\left|\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\right|=1,\qquad \frac{-\frac{1}{3}+a}{1+\frac{1}{3}a}=\pm1$$

$$-\frac{1}{3}+a=-1-\frac{1}{3}a \text{ 또는 } -\frac{1}{3}+a=1+\frac{1}{3}a$$

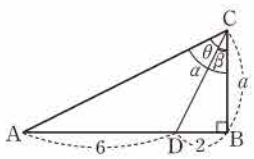
$$\therefore a=-\frac{1}{2} \text{ 또는 } a=2$$

따라서 구하는 모든 $a$의 값의 합은

$$-\frac{1}{2}+2=\frac{3}{2}$$

답 $\frac{3}{2}$

**033-❶** 오른쪽 그림과 같이 $\angle ACB=\alpha$, $\angle DCB=\beta$라 하면




$$\tan\alpha=\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}=\frac{8}{a}$$

$$\tan\beta=\frac{\overline{BD}}{\overline{BC}}=\frac{2}{a}$$

$$\therefore \tan\theta=\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{\frac{8}{a}-\frac{2}{a}}{1+\frac{8}{a}\cdot\frac{2}{a}}=\frac{6a}{a^2+16}$$

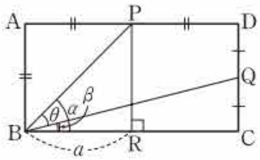
이때 $\tan\theta=\frac{3}{4}$이므로 $\frac{6a}{a^2+16}=\frac{3}{4}$

$$a^2-8a+16=0,\qquad (a-4)^2=0$$

$$\therefore a=4$$

답 4

**033-❷** 오른쪽 그림과 같이 점 P에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 R, $\overline{BR}=a$, $\angle PBR=\alpha$, $\angle QBC=\beta$라 하면




$$\tan\alpha=\frac{\overline{PR}}{\overline{BR}}=\frac{a}{a}=1$$

$$\tan\beta=\frac{\overline{QC}}{\overline{BC}}=\frac{\frac{a}{2}}{2a}=\frac{1}{4}$$

$$\therefore \tan\theta=\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{1-\frac{1}{4}}{1+1\cdot\frac{1}{4}}=\frac{3}{5}$$

답 $\frac{3}{5}$

**034-❶** $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$에서 $\cos\theta<0$이므로

$$\cos\theta=-\sqrt{1-\sin^2\theta}=-\sqrt{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2}=-\frac{\sqrt{7}}{4}$$

$$\therefore \sin2\theta+\cos2\theta$$
$$=2\sin\theta\cos\theta+(1-2\sin^2\theta)$$
$$=2\cdot\frac{3}{4}\cdot\left(-\frac{\sqrt{7}}{4}\right)+\left\{1-2\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2\right\}$$
$$=-\frac{3\sqrt{7}+1}{8}$$

답 $-\frac{3\sqrt{7}+1}{8}$

**034-❷** (1) $\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{2}$의 양변을 제곱하면

$$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{4}$$

$$1+\sin2\theta=\frac{1}{4}\qquad \therefore \sin2\theta=-\frac{3}{4}$$

(2) $\sin2\theta=-\frac{3}{4}$을 $\sin^2 2\theta+\cos^2 2\theta=1$에 대입하면

$$\left(-\frac{3}{4}\right)^2+\cos^2 2\theta=1\qquad \therefore \cos^2 2\theta=\frac{7}{16}$$

$$\therefore \cos2\theta=-\frac{\sqrt{7}}{4}\ \left(\because \pi<2\theta<\frac{3}{2}\pi\right)$$

$$\therefore \tan 2\theta=\frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta}=\frac{-\frac{3}{4}}{-\frac{\sqrt{7}}{4}}=\frac{3\sqrt{7}}{7}$$

답 (1) $-\frac{3}{4}$ (2) $\frac{3\sqrt{7}}{7}$

**035-❶** $5\sin\theta+12\cos\theta$

$$=13\left(\frac{5}{13}\sin\theta+\frac{12}{13}\cos\theta\right)$$
$$=13(\cos\alpha\sin\theta+\sin\alpha\cos\theta)$$
$$=13\sin(\theta+\alpha)$$
$$\left(\text{단, } \cos\alpha=\frac{5}{13},\ \sin\alpha=\frac{12}{13}\right)$$

$\therefore r=13$

$\cot\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\frac{5}{13}}{\frac{12}{13}}=\frac{5}{12}$이므로

$r\cot\alpha=13\cdot\frac{5}{12}=\frac{65}{12}$

답 $\frac{65}{12}$

**036-❶** $\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\cos x\cos\frac{\pi}{3}-\sin x\sin\frac{\pi}{3}$

$$=\frac{1}{2}\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x$$

$$\therefore y=2\sqrt{3}\sin x+3\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$$
$$=2\sqrt{3}\sin x+3\left(\frac{1}{2}\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right)$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{3}{2}\cos x$$
$$=\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right)$$
$$=\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{3}\sin x+\sin\frac{\pi}{3}\cos x\right)$$
$$=\sqrt{3}\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$$

이때 $-1\le\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\le1$이므로

$$-\sqrt{3}\le\sqrt{3}\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\le\sqrt{3}$$

따라서 주어진 함수의 최댓값은 $\sqrt{3}$, 최솟값은 $-\sqrt{3}$이다.

답 최댓값: $\sqrt{3}$, 최솟값: $-\sqrt{3}$

**036-❷** $y=a\sin x+\sqrt{2}a\cos x$

$$=\sqrt{3}a\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\sin x+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\cos x\right)$$
$$=\sqrt{3}a\sin(x+\alpha)$$
$$\left(\text{단, } \cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}},\ \sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)$$

이때 $a>0$이고, $-1\le\sin(x+\alpha)\le1$이므로

$$-\sqrt{3}a\le\sqrt{3}a\sin(x+\alpha)\le\sqrt{3}a$$

주어진 함수의 최댓값이 $3\sqrt{2}$이므로

$\sqrt{3}a=3\sqrt{2}$ $\quad\therefore a=\sqrt{6}$

답 $\sqrt{6}$

**037-❶** (1) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cot x}{\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin x}$

$$=\frac{1}{1}=1$$

(2) $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x-\sin x}{1-\tan x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x-\sin x}{1-\frac{\sin x}{\cos x}}$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x-\sin x}{\frac{\cos x-\sin x}{\cos x}}$$
$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

답 (1) 1 (2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

**038-❶** (1) $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos 2x}{x^2}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1-(1-2\sin^2 x)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{2\sin^2 x}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to0}2\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2=2\cdot1^2=2$$

(2) $\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{\sin x+\sin 3x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\sin 2x}{x}}{\frac{\sin x+\sin 3x}{x}}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\sin 2x}{2x}\cdot2}{\frac{\sin x}{x}+\frac{\sin 3x}{3x}\cdot3}$$
$$=\frac{1\cdot2}{1+1\cdot3}=\frac{1}{2}$$

(3) $180°=\pi$에서 $1°=\frac{\pi}{180}$이므로 $\quad x°=\frac{\pi}{180}x$

$$\therefore \lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x°}=\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{\frac{\pi}{180}x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x}\cdot\frac{180}{\pi}$$
$$=1\cdot\frac{180}{\pi}=\frac{180}{\pi}$$

(4) $\lim_{x\to0}\frac{\sin(\tan 2x)}{3x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin(\tan 2x)}{\tan 2x}\cdot\frac{\tan 2x}{2x}\cdot\frac{2}{3}$

$$=1\cdot1\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$$

답 (1) 2 (2) $\frac{1}{2}$ (3) $\frac{180}{\pi}$ (4) $\frac{2}{3}$

**039-❶** (1) $x-2=t$로 놓으면 $x \longrightarrow 2$일 때 $t \longrightarrow 0$ 이므로

$$\lim_{x\to2}\frac{x-2}{\sin\pi x}=\lim_{t\to0}\frac{t}{\sin\pi(2+t)}$$
$$=\lim_{t\to0}\frac{t}{\sin(2\pi+\pi t)}$$
$$=\lim_{t\to0}\frac{t}{\sin\pi t}=\lim_{t\to0}\frac{\pi t}{\sin\pi t}\cdot\frac{1}{\pi}$$
$$=1\cdot\frac{1}{\pi}=\frac{1}{\pi}$$

(2) $x-\pi=t$로 놓으면 $x \longrightarrow \pi$일 때 $t \longrightarrow 0$이므로

$$\lim_{x\to\pi}\frac{4\cos\frac{x}{2}}{x^2-\pi^2}$$
$$=\lim_{t\to0}\frac{4\cos\frac{\pi+t}{2}}{(\pi+t)^2-\pi^2}=\lim_{t\to0}\frac{4\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{t}{2}\right)}{2\pi t+t^2}$$
$$=\lim_{t\to0}\frac{-4\sin\frac{t}{2}}{t(2\pi+t)}$$
$$=\lim_{t\to0}(-4)\cdot\frac{\sin\frac{t}{2}}{\frac{t}{2}}\cdot\frac{1}{2(2\pi+t)}$$
$$=-4\cdot1\cdot\frac{1}{4\pi}=-\frac{1}{\pi}$$

(3) $\frac{1}{3x}=t$로 놓으면 $x \longrightarrow \infty$일 때 $t \longrightarrow 0$이므로

$$\lim_{x\to\infty}x\tan\frac{1}{3x}=\lim_{t\to0}\frac{\tan t}{t}\cdot\frac{1}{3}$$
$$=1\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$$

답 (1) $\frac{1}{\pi}$ (2) $-\frac{1}{\pi}$ (3) $\frac{1}{3}$

**040-❶** (1) $x \longrightarrow 0$일 때, (분모) $\longrightarrow 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉 $\lim_{x\to0}(a-b\cos x)=0$이므로

$a-b=0 \qquad \therefore b=a$ …… ㉠

㉠을 주어진 식에 대입하면

$$\lim_{x\to0}\frac{a-a\cos x}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{a(1-\cos x)}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{a(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{a(1-\cos^2 x)}{x^2(1+\cos x)}=\lim_{x\to0}\frac{a\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)}$$
$$=\lim_{x\to0}a\cdot\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\cdot\frac{1}{1+\cos x}$$
$$=a\cdot1^2\cdot\frac{1}{2}=\frac{a}{2}$$

즉 $\frac{a}{2}=2$에서 $\quad a=4$

$a=4$를 ㉠에 대입하면 $\quad b=4$

(2) $x \longrightarrow 0$일 때, (분자) $\longrightarrow 0$이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모) $\longrightarrow 0$이다.

즉 $\lim_{x\to0}(\sqrt{ax+b}-1)=0$이므로

$\sqrt{b}-1=0 \qquad \therefore b=1$

$b=1$을 주어진 식에 대입하면

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{\sqrt{ax+1}-1}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin x(\sqrt{ax+1}+1)}{(\sqrt{ax+1}-1)(\sqrt{ax+1}+1)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin x(\sqrt{ax+1}+1)}{ax}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{a}\cdot\frac{\sin x}{x}(\sqrt{ax+1}+1)$$
$$=\frac{1}{a}\cdot1\cdot2=\frac{2}{a}$$

즉 $\frac{2}{a}=1$에서 $\quad a=2$

답 (1) $a=4$, $b=4$ (2) $a=2$, $b=1$

**Remark▶**
$1-\cos kx$ 꼴을 포함한 삼각함수의 극한값을 구할 때에는 분자, 분모에 각각 $1+\cos kx$를 곱하여 $1-\cos^2 kx=\sin^2 kx$임을 이용한다.

**041-❶** △ABC에서 $\quad \overline{AC}=\overline{AB}\tan\theta=\tan\theta$
또 △ABH에서 $\quad \overline{AH}=\overline{AB}\sin\theta=\sin\theta$

$$\therefore \lim_{\theta\to0+}\frac{\overline{AC}-\overline{AH}}{\theta^3}$$
$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\tan\theta-\sin\theta}{\theta^3}$$
$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\tan\theta-\tan\theta\cos\theta}{\theta^3}$$
$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\tan\theta(1-\cos\theta)}{\theta^3}$$
$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\tan\theta}{\theta}\cdot\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}$$
$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\tan\theta}{\theta}\cdot\frac{1-\cos^2\theta}{\theta^2(1+\cos\theta)}$$
$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\tan\theta}{\theta}\cdot\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^2\cdot\frac{1}{1+\cos\theta}$$
$$=1\cdot1^2\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

답 $\frac{1}{2}$

**042-❶** (1) $y=\cos x-\ln x$에서

$$y'=(\cos x)'-(\ln x)'=-\sin x-\frac{1}{x}$$

(2) $y=(x^2-3)\sin x$에서

$$y'=(x^2-3)'\sin x+(x^2-3)(\sin x)'$$
$$=2x\sin x+(x^2-3)\cos x$$

(3) $y=x\cos x-1$에서

$$y'=(x)'\cos x+x(\cos x)'-(1)'$$
$$=\cos x-x\sin x$$

답 풀이 참조

**042-❷** $f(x)=2x\sin x-3\cos x$에서

$$f'(x)=(2x)'\sin x+2x(\sin x)'-3(\cos x)'$$
$$=2\sin x+2x\cos x+3\sin x$$
$$=2x\cos x+5\sin x$$

$$\therefore f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=5\sin\frac{\pi}{2}=5$$

답 5

## 중단원 연습 문제

본책 111~115쪽

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **01** $-\frac{10}{3}$ | | **02** $\frac{1}{5}$ | **03** ④ | |
| **04** $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | | **05** ① | **06** $-16$ | **07** ⑤ |
| **08** $-2\sqrt{7}$ | | **09** $2\sqrt{2}$ | **10** $\frac{7}{6}$ | **11** ② |
| **12** $-2$ | **13** ③ | **14** ⑤ | **15** $\frac{\sqrt{3}}{4}$ | |
| **16** $\sqrt{15}$ m | | **17** 10 | **18** 2 | **19** $-3$ |
| **20** ② | **21** $\frac{\pi}{2}$ | **22** ⑤ | **23** 35 | **24** 8 |
| **25** ① | | | | |

**01** 전략 점 P의 좌표를 문자를 사용하여 나타낸 후 삼각함수의 정의를 이용한다.

풀이 점 P의 좌표를 $(-a, 3a)(a>0)$라 하면

$$\overline{OP}=\sqrt{(-a)^2+(3a)^2}=\sqrt{10}a$$

이므로

$$\sec\theta=\frac{\sqrt{10}a}{-a}=-\sqrt{10}$$
$$\csc\theta=\frac{\sqrt{10}a}{3a}=\frac{\sqrt{10}}{3}$$
$$\therefore \sec\theta\csc\theta=(-\sqrt{10})\cdot\frac{\sqrt{10}}{3}$$
$$=-\frac{10}{3}$$

답 $-\frac{10}{3}$

다른 풀이 점 P의 좌표에 관계없이 동경 OP가 나타내는 각 $\theta$의 삼각함수의 값은 유일하므로 점 P의 좌표를 $(-1, 3)$이라 하면

$$\overline{OP}=\sqrt{(-1)^2+3^2}=\sqrt{10}$$
$$\sec\theta=\frac{\sqrt{10}}{-1}=-\sqrt{10},\ \csc\theta=\frac{\sqrt{10}}{3}$$
$$\therefore \sec\theta\csc\theta=(-\sqrt{10})\cdot\frac{\sqrt{10}}{3}=-\frac{10}{3}$$

**02** 전략 $\tan\theta$, $\cot\theta$를 $\sin\theta$, $\cos\theta$로 나타낸 후 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$임을 이용한다.

풀이 $\tan\theta+\cot\theta=\frac{25}{12}$에서

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{25}{12}$$
$$\therefore \frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}=\frac{25}{12}$$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로 $\quad\sin\theta\cos\theta=\frac{12}{25}$

$$\therefore (\sin\theta-\cos\theta)^2$$
$$=\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$$
$$=1-2\cdot\frac{12}{25}=\frac{1}{25}$$

이때 $\sin\theta>\cos\theta$이므로

$$\sin\theta-\cos\theta=\frac{1}{5}$$

답 $\frac{1}{5}$

**03** 전략 삼각함수의 정의와 삼각함수 사이의 관계를 이용하여 주어진 식을 간단히 한다.

풀이 ㄱ. $\sin\theta\csc\theta-\tan\theta\cot\theta$

$$=\sin\theta\cdot\frac{1}{\sin\theta}-\tan\theta\cdot\frac{1}{\tan\theta}=1-1=0$$

ㄴ. $\frac{1}{1+\tan^2\theta}+\frac{1}{1+\cot^2\theta}=\frac{1}{\sec^2\theta}+\frac{1}{\csc^2\theta}$

$$=\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$$

ㄷ. $\frac{1}{\cot\theta-\csc\theta}+\frac{1}{\cot\theta+\csc\theta}$

$$=\frac{\cot\theta+\csc\theta+\cot\theta-\csc\theta}{\cot^2\theta-\csc^2\theta}$$
$$=\frac{2\cot\theta}{\cot^2\theta-(1+\cot^2\theta)}$$
$$=-2\cot\theta$$

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ④

**04** 전략 주어진 등식의 좌변을 간단히 한 후 $\tan^2\theta+1=\sec^2\theta$임을 이용하여 $\tan\theta$의 값을 구한다.

**풀이** $\dfrac{1}{1+\sin\theta}+\dfrac{1}{1-\sin\theta}=\dfrac{1-\sin\theta+1+\sin\theta}{1-\sin^2\theta}$

$=\dfrac{2}{\cos^2\theta}$

$=2\sec^2\theta$ ⋯ ❶

즉 $2\sec^2\theta=6$이므로 $\sec^2\theta=3$

$\therefore \tan^2\theta=\sec^2\theta-1=2$

이때 $\theta$가 제4사분면의 각이므로

$\tan\theta=-\sqrt{2}$ ⋯ ❷

$\therefore \tan\theta-\cot\theta=\tan\theta-\dfrac{1}{\tan\theta}$

$=-\sqrt{2}-\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ⋯ ❸

답 $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ❶ 주어진 등식의 좌변을 간단히 할 수 있다. | 40 % |
| ❷ $\tan\theta$의 값을 구할 수 있다. | 40 % |
| ❸ $\tan\theta-\cot\theta$의 값을 구할 수 있다. | 20 % |

## 05

**전략** $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$임을 이용하여 $\cos\alpha$, $\sin\beta$의 값을 각각 구한 후 삼각함수의 덧셈정리를 이용한다.

**풀이** $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$, $0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$에서

$\cos\alpha<0$, $\sin\beta>0$

이므로

$\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\sqrt{1-\left(\dfrac{5}{13}\right)^2}=-\dfrac{12}{13}$

$\sin\beta=\sqrt{1-\cos^2\beta}=\sqrt{1-\left(\dfrac{12}{13}\right)^2}=\dfrac{5}{13}$

$\therefore \cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

$=-\dfrac{12}{13}\cdot\dfrac{12}{13}-\dfrac{5}{13}\cdot\dfrac{5}{13}$

$=-1$

답 ①

**다른 풀이** $\sin^2\alpha+\cos^2\beta=1$이므로

$1-\cos^2\alpha+\cos^2\beta=1$ $\therefore \cos^2\alpha=\cos^2\beta$

이때 $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$, $0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$이므로

$\beta=\pi-\alpha$ $\therefore \alpha+\beta=\pi$

$\therefore \cos(\alpha+\beta)=\cos\pi=-1$

## 06

**전략** 두 직선이 $x$축의 양의 방향과 이루는 예각의 크기를 각각 $\alpha$, $\beta$로 놓고 삼각함수의 덧셈정리를 이용한다.

**풀이** $x-2y+1=0$에서 $y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}$

$mx+y+3=0$에서 $y=-mx-3$

두 직선이 $x$축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 $\alpha$, $\beta$라 하면

$\tan\alpha=\dfrac{1}{2}$, $\tan\beta=-m$ ⋯ ❶

두 직선이 이루는 예각의 크기가 $60°$이므로

$|\tan(\alpha-\beta)|=\tan 60°$

$\left|\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\right|=\sqrt{3}$

$\left|\dfrac{\frac{1}{2}-(-m)}{1+\frac{1}{2}\cdot(-m)}\right|=\sqrt{3}$

$\left|\dfrac{1+2m}{2-m}\right|=\sqrt{3}$

위의 식의 양변을 제곱하면

$\dfrac{1+4m+4m^2}{4-4m+m^2}=3$

$\therefore m^2+16m-11=0$ ⋯ ❷

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 모든 실수 $m$의 값의 합은 $-16$이다. ⋯ ❸

답 $-16$

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ❶ 두 직선이 $x$축의 양의 방향과 이루는 각의 크기에 대한 탄젠트함수를 구할 수 있다. | 30 % |
| ❷ $m$에 대한 이차방정식을 세울 수 있다. | 50 % |
| ❸ $m$의 값의 합을 구할 수 있다. | 20 % |

**Remark▶**

$m$에 대한 이차방정식 $m^2+16m-11=0$의 판별식을 $D$라 하면

$\dfrac{D}{4}=8^2+11>0$

이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.

## 07

**전략** 배각의 공식을 이용하여 분자와 분모를 $\theta$의 삼각함수로 나타낸다.

**풀이** $\dfrac{\sin 2\theta}{1-\cos 2\theta}=\dfrac{2\sin\theta\cos\theta}{1-(1-2\sin^2\theta)}$

$=\dfrac{2\sin\theta\cos\theta}{2\sin^2\theta}=\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$

$=\cot\theta$

답 ⑤

## 08

**전략** 삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 식을 변형한 후 삼각함수의 합성을 이용한다.

**풀이** $\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\sin x\cos\frac{\pi}{3}+\cos x\sin\frac{\pi}{3}$

$$=\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x$$

$$\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\cos x\cos\frac{\pi}{6}-\sin x\sin\frac{\pi}{6}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x-\frac{1}{2}\sin x$$

$$\therefore y=2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+4\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$$

$$=2\left(\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right)$$

$$+4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x-\frac{1}{2}\sin x\right)$$

$$=-\sin x+3\sqrt{3}\cos x \quad \cdots ❶$$

$$=2\sqrt{7}\left(-\frac{\sqrt{7}}{14}\sin x+\frac{3\sqrt{21}}{14}\cos x\right)$$

$$=2\sqrt{7}\sin(x+\alpha)$$

$$\left(\text{단, } \cos\alpha=-\frac{\sqrt{7}}{14},\ \sin\alpha=\frac{3\sqrt{21}}{14}\right) \quad \cdots ❷$$

이때 $-1\le\sin(x+\alpha)\le 1$이므로

$$-2\sqrt{7}\le 2\sqrt{7}\sin(x+\alpha)\le 2\sqrt{7}$$

따라서 주어진 함수의 최솟값은 $-2\sqrt{7}$이다. ⋯ ❸

답 $-2\sqrt{7}$

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ❶ 삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 식을 변형할 수 있다. | 40 % |
| ❷ 삼각함수의 합성을 이용하여 식을 변형할 수 있다. | 40 % |
| ❸ 주어진 함수의 최솟값을 구할 수 있다. | 20 % |

**09** **전략** 삼각함수의 정의를 이용하여 주어진 식을 변형한다.

**풀이** $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\tan^2 x-1}{\sin x-\cos x}$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\frac{\sin^2 x-\cos^2 x}{\cos^2 x}}{\sin x-\cos x}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{(\sin x+\cos x)(\sin x-\cos x)}{\cos^2 x(\sin x-\cos x)}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x+\cos x}{\cos^2 x}=\frac{\sqrt{2}}{\frac{1}{2}}=2\sqrt{2}$$

답 $2\sqrt{2}$

**10** **전략** $\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$, $\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x}=1$을 이용할 수 있도록 주어진 식을 변형한다.

**풀이** $\lim_{x\to0}\frac{x\ln(1+7x)}{\tan x\sin 6x}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+7x)}{7x}\cdot\frac{x}{\tan x}\cdot\frac{6x}{\sin 6x}\cdot\frac{7}{6}$$

$$=1\cdot1\cdot1\cdot\frac{7}{6}=\frac{7}{6}$$

답 $\frac{7}{6}$

**11** **전략** 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이므로 $\lim_{x\to0}f(x)=f(0)$임을 이용한다.

**풀이** 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to0}f(x)=f(0)$$

$$\therefore \lim_{x\to0}\frac{2\cos x+a}{x\sin x}=b \quad \cdots\cdots ㉠$$

$x\to0$일 때, (분모) $\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to0$이다.

즉 $\lim_{x\to0}(2\cos x+a)=0$이므로

$$2+a=0 \qquad \therefore a=-2$$

$a=-2$를 ㉠에 대입하면

$$\lim_{x\to0}\frac{2\cos x-2}{x\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{2(\cos x-1)(\cos x+1)}{x\sin x(\cos x+1)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-2\sin^2 x}{x\sin x(\cos x+1)}$$

$$=\lim_{x\to0}(-2)\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x+1}$$

$$=-2\cdot1\cdot\frac{1}{2}=-1$$

즉 $b=-1$이므로 $\quad a+b=-3$

답 ②

**12** **전략** $x-\pi=t$로 치환한 후 $\lim_{t\to0}\frac{\sin t}{t}=1$임을 이용한다.

**풀이** $f(x)=\cos^2 x=\cos x\cos x$이므로

$$f'(x)=(\cos x)'\cos x+\cos x(\cos x)'$$

$$=-\sin x\cos x+\cos x(-\sin x)$$

$$=-2\sin x\cos x$$

$$=-\sin 2x$$

$$\therefore \lim_{x\to\pi}\frac{f'(x)}{x-\pi}=\lim_{x\to\pi}\frac{-\sin 2x}{x-\pi}$$

이때 $x-\pi=t$로 놓으면 $x\to\pi$일 때 $t\to0$이므로

$$\lim_{x\to\pi}\frac{-\sin 2x}{x-\pi}=\lim_{t\to0}\frac{-\sin(2\pi+2t)}{t}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{-\sin 2t}{t}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{\sin 2t}{2t}\cdot(-2)$$

$$=1\cdot(-2)=-2$$

답 $-2$

**13** 전략 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 $\tan\alpha+\tan\beta$, $\tan\alpha\tan\beta$의 값을 구한다.

풀이 이차방정식 $x^2+2x-4=0$의 두 근이 $\tan\alpha$, $\tan\beta$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\tan\alpha+\tan\beta=-2,\ \tan\alpha\tan\beta=-4$$

이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근이 $\sec^2\alpha$, $\sec^2\beta$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\sec^2\alpha+\sec^2\beta=-a,\ \sec^2\alpha\sec^2\beta=b$$

이때 $\sec^2\alpha=\tan^2\alpha+1$, $\sec^2\beta=\tan^2\beta+1$이므로

$$\begin{aligned}&\sec^2\alpha+\sec^2\beta\\&=(\tan^2\alpha+1)+(\tan^2\beta+1)\\&=\tan^2\alpha+\tan^2\beta+2\\&=(\tan\alpha+\tan\beta)^2-2\tan\alpha\tan\beta+2\\&=(-2)^2-2\cdot(-4)+2=14\end{aligned}$$

$$\therefore a=-14$$

$$\begin{aligned}&\sec^2\alpha\sec^2\beta\\&=(\tan^2\alpha+1)(\tan^2\beta+1)\\&=\tan^2\alpha\tan^2\beta+\tan^2\alpha+\tan^2\beta+1\\&=(\tan\alpha\tan\beta)^2+(\tan\alpha+\tan\beta)^2\\&\quad-2\tan\alpha\tan\beta+1\\&=(-4)^2+(-2)^2-2\cdot(-4)+1=29\end{aligned}$$

$$\therefore b=29$$

$$\therefore a+b=15$$

답 ③

다른 풀이 $\tan\alpha$, $\tan\beta$가 이차방정식 $x^2+2x-4=0$의 두 근이면

$$\tan^2\alpha=-2\tan\alpha+4,\ \tan^2\beta=-2\tan\beta+4$$

이므로

$$\begin{aligned}\sec^2\alpha+\sec^2\beta&=(\tan^2\alpha+1)+(\tan^2\beta+1)\\&=-2\tan\alpha+5-2\tan\beta+5\\&=-2(\tan\alpha+\tan\beta)+10\\&=-2\cdot(-2)+10=14\end{aligned}$$

$$\therefore a=-14$$

$$\begin{aligned}&\sec^2\alpha\sec^2\beta\\&=(\tan^2\alpha+1)(\tan^2\beta+1)\\&=(-2\tan\alpha+5)(-2\tan\beta+5)\\&=4\tan\alpha\tan\beta-10(\tan\alpha+\tan\beta)+25\\&=4\cdot(-4)-10\cdot(-2)+25=29\end{aligned}$$

$$\therefore b=29$$

$$\therefore a+b=15$$

**14** 전략 주어진 식의 양변을 각각 제곱한 후 삼각함수의 덧셈정리를 이용한다.

풀이 $\sin\alpha-\sin\beta=\frac{1}{5}$의 양변을 제곱하면

$$\sin^2\alpha-2\sin\alpha\sin\beta+\sin^2\beta=\frac{1}{25}\quad\cdots\cdots ㉠$$

$\cos\alpha-\cos\beta=-\frac{1}{5}$의 양변을 제곱하면

$$\cos^2\alpha-2\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\beta=\frac{1}{25}\quad\cdots\cdots ㉡$$

㉠+㉡을 하면

$$\begin{aligned}&\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+\sin^2\beta+\cos^2\beta\\&-2(\sin\alpha\sin\beta+\cos\alpha\cos\beta)=\frac{2}{25}\\&2-2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)=\frac{2}{25}\\&2-2\cos(\alpha-\beta)=\frac{2}{25}\\&\therefore \cos(\alpha-\beta)=\frac{24}{25}\end{aligned}$$

답 ⑤

**15** 전략 주어진 연산의 정의를 이용하여 $p$, $q$의 식을 구한 후 삼각함수의 덧셈정리를 이용한다.

풀이 $p=\cos20^\circ\cos40^\circ-\sin20^\circ\sin40^\circ$

$$=\cos(20^\circ+40^\circ)=\cos60^\circ$$

$$=\frac{1}{2}\quad\cdots ❶$$

$q=\cos20^\circ\sin40^\circ+\sin20^\circ\cos40^\circ$

$$=\sin(20^\circ+40^\circ)=\sin60^\circ$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\quad\cdots ❷$$

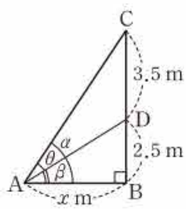
$$\therefore pq=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}\quad\cdots ❸$$

답 $\frac{\sqrt{3}}{4}$

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ❶ $p$의 값을 구할 수 있다. | 40 % |
| ❷ $q$의 값을 구할 수 있다. | 40 % |
| ❸ $pq$의 값을 구할 수 있다. | 20 % |

**16** 전략 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$이므로 $\tan\theta$의 값이 최대일 때, $\theta$가 최대임을 이용한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 $\angle CAB=\alpha$, $\angle DAB=\beta$, $\overline{AB}=x$ m라 하면




$$\tan\alpha=\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}=\frac{6}{x}$$

$$\tan\beta=\frac{\overline{BD}}{\overline{AB}}=\frac{2.5}{x}$$

$$\therefore \tan\theta=\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

$$=\frac{\frac{6}{x}-\frac{2.5}{x}}{1+\frac{6}{x}\cdot\frac{2.5}{x}}=\frac{\frac{3.5}{x}}{\frac{x^2+15}{x^2}}$$

$$=\frac{3.5x}{x^2+15}$$

$$=\frac{3.5}{x+\frac{15}{x}}$$

즉 $x+\frac{15}{x}$가 최소일 때 $\tan\theta$가 최대이고, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ 이므로 $\tan\theta$가 최대일 때 $\theta$도 최대이다.

$x>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$x+\frac{15}{x}\ge 2\sqrt{x\cdot\frac{15}{x}}=2\sqrt{15}$$

이때 등호는 $x=\frac{15}{x}$일 때 성립하므로

$$x^2=15$$

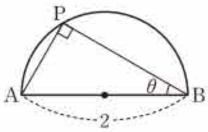
$$\therefore x=\sqrt{15}\ (\because x>0)$$

따라서 두 지점 A, B 사이의 거리는 $\sqrt{15}$ m이다.

답 $\sqrt{15}$ m

**17** 전략 원의 지름에 대한 원주각의 크기는 $90°$임을 이용하여 $4\overline{AP}+3\overline{BP}$를 삼각함수로 나타낸다.

풀이 $\angle APB=90°$이므로




$\angle ABP=\theta$라 하면

$\overline{AP}=2\sin\theta$,

$\overline{BP}=2\cos\theta$ ··· ❶

$$\therefore 4\overline{AP}+3\overline{BP}=8\sin\theta+6\cos\theta$$

$$=10\left(\frac{4}{5}\sin\theta+\frac{3}{5}\cos\theta\right)$$

$$=10\sin(\theta+\alpha)$$

$$\left(\text{단, }\cos\alpha=\frac{4}{5},\ \sin\alpha=\frac{3}{5}\right)$$ ··· ❷

$0\le\theta<\frac{\pi}{2}$, $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$에서 $0<\theta+\alpha<\pi$이므로

$$0<\sin(\theta+\alpha)\le 1$$

$$\therefore 0<10\sin(\theta+\alpha)\le 10$$

따라서 구하는 최댓값은 10이다. ··· ❸

답 10

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ❶ $\overline{AP}$, $\overline{BP}$의 길이를 삼각함수로 나타낼 수 있다. | 30 % |
| ❷ 삼각함수의 합성을 이용하여 $4\overline{AP}+3\overline{BP}$를 변형할 수 있다. | 40 % |
| ❸ $4\overline{AP}+3\overline{BP}$의 최댓값을 구할 수 있다. | 30 % |

**18** 전략 $\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$임을 이용하여 $f(n)$을 구한다.

풀이 $f(n)$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x}{\sin x+\sin 2x+\cdots+\sin nx}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{\frac{\sin x}{x}+\frac{\sin 2x}{x}+\cdots+\frac{\sin nx}{x}}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{\frac{\sin x}{x}+\frac{\sin 2x}{2x}\cdot2+\cdots+\frac{\sin nx}{nx}\cdot n}$$

$$=\frac{1}{1+2+\cdots+n}=\frac{2}{n(n+1)}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}f(n)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{k(k+1)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}2\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}2\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=2$$

답 2

**19** 전략 먼저 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=2$임을 이용하여 $a$의 값을 구한다.

풀이 $$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{ax+\sin bx}{x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}a+\lim_{x\to\infty}\frac{\sin bx}{x}$$

$$=a+0=a$$

이므로 $a=2$ ··· ❶

$$\lim_{x\to0}\frac{x}{f(x)}=\lim_{x\to0}\frac{x}{2x+\sin bx}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{2+\frac{\sin bx}{bx}\cdot b}$$

$$=\frac{1}{2+1\cdot b}=\frac{1}{2+b}$$

즉 $\frac{1}{2+b}=2$이므로 $2+b=\frac{1}{2}$

$$\therefore b=-\frac{3}{2}$$ ··· ❷

$$\therefore ab=-3$$ ··· ❸

답 $-3$

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ❶ $a$의 값을 구할 수 있다. | 40 % |
| ❷ $b$의 값을 구할 수 있다. | 40 % |
| ❸ $ab$의 값을 구할 수 있다. | 20 % |

**Remark▶**
$-1\le\sin x\le1$의 각 변을 $x\ (x>0)$로 나누면
$-\frac{1}{x}\le\frac{\sin x}{x}\le\frac{1}{x}$이고, $\lim_{x\to\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$이므로
$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0$이다.

**20** 전략 $\tan\alpha$와 $\tan(\alpha+\beta)$를 $h$에 대한 식으로 나타낸 후 삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 $\tan\beta$를 $h$에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 △POA에서 $\tan\alpha=\frac{1}{h}$ …… ㉠

또 △POB에서 $\tan(\alpha+\beta)=\frac{3}{h}$ …… ㉡

㉠, ㉡을 $\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$에 대입하면

$$\frac{3}{h}=\frac{\frac{1}{h}+\tan\beta}{1-\frac{1}{h}\cdot\tan\beta}$$
$$\frac{3}{h}=\frac{1+h\tan\beta}{h-\tan\beta}$$
$$3(h-\tan\beta)=h(1+h\tan\beta)$$
$$3h-3\tan\beta=h+h^2\tan\beta$$
$$(h^2+3)\tan\beta=2h$$
$$\therefore \tan\beta=\frac{2h}{h^2+3}$$

$h\to\infty$일 때 $\alpha\to0+$, $\beta\to0+$이므로

$$\lim_{h\to\infty}\frac{\alpha}{\beta}=\lim_{h\to\infty}\frac{\alpha}{\tan\alpha}\cdot\frac{\tan\beta}{\beta}\cdot\frac{\tan\alpha}{\tan\beta}$$
$$=\lim_{\alpha\to0+}\frac{\alpha}{\tan\alpha}\cdot\lim_{\beta\to0+}\frac{\tan\beta}{\beta}\cdot\lim_{h\to\infty}\frac{\frac{1}{h}}{\frac{2h}{h^2+3}}$$
$$=1\cdot1\cdot\lim_{h\to\infty}\frac{h^2+3}{2h^2}=\frac{1}{2}$$

답 ②

**21** 전략 곱의 미분법을 이용하여 $f'(x)$를 구한다.

풀이 $f(x)=\frac{1}{2}\sin^2x+\cos^2x$
$$=\frac{1}{2}\sin x\sin x+\cos x\cos x$$

에서

$$f'(x)=\frac{1}{2}\cos x\sin x+\frac{1}{2}\sin x\cos x+(-\sin x)\cos x+\cos x(-\sin x)$$
$$=\sin x\cos x-2\sin x\cos x$$
$$=-\sin x\cos x$$
$$=-\frac{1}{2}\sin 2x$$ ··· ❶

$f'(x)=0$에서 $\sin 2x=0$

$0\le x<\pi$이면 $0\le 2x<2\pi$이므로 $\sin 2x=0$일 때,
$2x=0$ 또는 $2x=\pi$
$\therefore x=0$ 또는 $x=\frac{\pi}{2}$ ··· ❷

따라서 구하는 모든 $x$의 값의 합은
$0+\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$ ··· ❸

답 $\frac{\pi}{2}$

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ❶ $f'(x)$를 구할 수 있다. | 50 % |
| ❷ $f'(x)=0$을 만족시키는 $x$의 값을 구할 수 있다. | 40 % |
| ❸ $x$의 값의 합을 구할 수 있다. | 10 % |

**22** 전략 피타고라스 정리를 이용하여 $\overline{CD}$의 길이를 구한 후 삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 삼각함수의 값을 구한다.

풀이 $\overline{CD}=a\ (a>0)$라 하면 직각삼각형 CED에서
$\overline{DE}=\sqrt{5-a^2}$
이때 $\overline{AD}=4\overline{DE}$이므로
$\overline{AD}=4\sqrt{5-a^2}$
직각삼각형 CAD에서
$$(2\sqrt{5})^2=a^2+(4\sqrt{5-a^2})^2$$
$$20=a^2+80-16a^2$$
$$15a^2=60,\quad a^2=4$$
$$\therefore a=2\ (\because a>0)$$
따라서 $\overline{DE}=1$, $\overline{AD}=4$이므로 직각삼각형 ABD에서
$\overline{BD}=\sqrt{5^2-4^2}=3$
$\therefore \sin\alpha=\frac{4}{5}$, $\cos\alpha=\frac{3}{5}$
삼각형 CED에서
$\sin\beta=\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\cos\beta=\frac{2}{\sqrt{5}}$
$$\therefore \cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$
$$=\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}+\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}$$
$$=\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

답 ⑤

**23** 전략 배각의 공식을 이용하여 주어진 방정식을 $\cos x$에 대한 방정식으로 나타낸다.

풀이 $\cos 2x=2\cos^2x-1$이므로
$3\cos 2x+17\cos x=0$에서
$3(2\cos^2x-1)+17\cos x=0$

$$6\cos^2 x+17\cos x-3=0$$
$$(6\cos x-1)(\cos x+3)=0$$
$$\therefore \cos x=\frac{1}{6}\ (\because\ -1\le\cos x\le 1)$$

$\tan^2 x+1=\sec^2 x$이므로

$$\tan^2 x=\sec^2 x-1=\frac{1}{\cos^2 x}-1$$
$$=36-1=35$$

답 35

**24** 전략 $x^2f(x)$를 $f(x)\left(1-\cos\frac{x}{2}\right)$가 포함된 식으로 변형한다.

풀이 $\lim_{x\to0}x^2f(x)$

$$=\lim_{x\to0}f(x)\left(1-\cos\frac{x}{2}\right)\cdot\frac{x^2}{1-\cos\frac{x}{2}}$$
$$=\lim_{x\to0}f(x)\left(1-\cos\frac{x}{2}\right)\cdot\frac{x^2\left(1+\cos\frac{x}{2}\right)}{\left(1-\cos\frac{x}{2}\right)\left(1+\cos\frac{x}{2}\right)}$$
$$=\lim_{x\to0}f(x)\left(1-\cos\frac{x}{2}\right)\cdot\frac{x^2}{\sin^2\frac{x}{2}}\cdot\left(1+\cos\frac{x}{2}\right)$$
$$=\lim_{x\to0}f(x)\left(1-\cos\frac{x}{2}\right)\cdot\left(\frac{\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2\cdot4\cdot\left(1+\cos\frac{x}{2}\right)$$
$$=1\cdot1^2\cdot4\cdot2=8$$

답 8

**25** 전략 $\overline{\mathrm{AH}}$, $\overline{\mathrm{QH}}$의 길이를 $\theta$에 대한 식으로 나타내어 $S(\theta)$를 구한다.

풀이 $\overline{\mathrm{OH}}=\cos\theta$, $\overline{\mathrm{OA}}=1$이므로

$$\overline{\mathrm{AH}}=\overline{\mathrm{OA}}-\overline{\mathrm{OH}}=1-\cos\theta$$

$\angle\mathrm{OAB}=\frac{\pi}{4}$이므로 $\triangle\mathrm{QAH}$에서

$$\overline{\mathrm{QH}}=\overline{\mathrm{AH}}=1-\cos\theta$$
$$\therefore S(\theta)=\frac{1}{2}(1-\cos\theta)^2$$
$$\therefore \lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta^4}=\lim_{\theta\to0+}\frac{(1-\cos\theta)^2}{2\theta^4}$$
$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{(1-\cos\theta)^2(1+\cos\theta)^2}{2\theta^4(1+\cos\theta)^2}$$
$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{(1-\cos^2\theta)^2}{2\theta^4(1+\cos\theta)^2}$$
$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin^4\theta}{2\theta^4(1+\cos\theta)^2}$$
$$=\lim_{\theta\to0+}\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^4\cdot\frac{1}{2(1+\cos\theta)^2}$$
$$=1^4\cdot\frac{1}{2\cdot2^2}=\frac{1}{8}$$

답 ①

Ⅱ. 미분법

# 05 여러 가지 미분법

## 유제

본책 120~141쪽

**043-❶** (1) $$y'=\frac{(2x-1)'(3x-1)-(2x-1)(3x-1)'}{(3x-1)^2}$$
$$=\frac{2(3x-1)-(2x-1)\cdot3}{(3x-1)^2}$$
$$=\frac{1}{(3x-1)^2}$$

(2) $$y'=\frac{(x^3+3x^2-1)'x^4-(x^3+3x^2-1)(x^4)'}{(x^4)^2}$$
$$=\frac{(3x^2+6x)\cdot x^4-(x^3+3x^2-1)\cdot4x^3}{x^8}$$
$$=\frac{-x^6-6x^5+4x^3}{x^8}=\frac{-x^3-6x^2+4}{x^5}$$

(3) $$y'=\frac{(x^2+1)'\cdot e^x-(x^2+1)\cdot(e^x)'}{(e^x)^2}$$
$$=\frac{2x\cdot e^x-(x^2+1)\cdot e^x}{e^{2x}}$$
$$=\frac{-e^x(x^2-2x+1)}{e^{2x}}=-\frac{(x-1)^2}{e^x}$$

답 풀이 참조

다른 풀이 (2) $$y=\frac{x^3+3x^2-1}{x^4}=\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}-\frac{1}{x^4}$$
$$=x^{-1}+3x^{-2}-x^{-4}$$

이므로

$$y'=-1\cdot x^{-1-1}+3\cdot(-2)x^{-2-1}-(-4)x^{-4-1}$$
$$=-x^{-2}-6x^{-3}+4x^{-5}$$
$$=-\frac{1}{x^2}-\frac{6}{x^3}+\frac{4}{x^5}=\frac{-x^3-6x^2+4}{x^5}$$

**043-❷** $$y'=\frac{(x^2+x+2)'(x+1)-(x^2+x+2)(x+1)'}{(x+1)^2}$$
$$=\frac{(2x+1)(x+1)-(x^2+x+2)\cdot1}{(x+1)^2}$$
$$=\frac{x^2+2x-1}{(x+1)^2}$$

이므로 $x=-2$에서의 미분계수는

$$\frac{(-2)^2+2\cdot(-2)-1}{(-2+1)^2}=-1$$

답 $-1$

**044-❶** (1) $y=(x^2-1)\sec x$에서

$$y'=(x^2-1)'\sec x+(x^2-1)(\sec x)'$$
$$=2x\sec x+(x^2-1)\sec x\tan x$$
$$=\sec x(x^2\tan x-\tan x+2x)$$

(2) $y=\sec x\tan x$에서

$$\begin{aligned}y'&=(\sec x)'\tan x+\sec x(\tan x)'\\&=\sec x\tan^2 x+\sec^3 x\\&=\sec x(\tan^2 x+\sec^2 x)\end{aligned}$$

(3) $y=\dfrac{1-\sin x}{1+\cos x}$에서

$$\begin{aligned}y'&=\frac{(1-\sin x)'(1+\cos x)-(1-\sin x)(1+\cos x)'}{(1+\cos x)^2}\\&=\frac{-\cos x(1+\cos x)-(1-\sin x)(-\sin x)}{(1+\cos x)^2}\\&=\frac{-\cos x-\cos^2 x+\sin x-\sin^2 x}{(1+\cos x)^2}\\&=\frac{\sin x-\cos x-1}{(1+\cos x)^2}\end{aligned}$$

답 풀이 참조

**Remark▶**

(2) $\sec x(\tan^2 x+\sec^2 x)=\dfrac{1}{\cos x}\left(\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}+\dfrac{1}{\cos^2 x}\right)$
$=\dfrac{\sin^2 x+1}{\cos^3 x}$

**044-❷** $f(x)=\dfrac{1+\sec x}{\tan x}$에서

$$\begin{aligned}f'(x)&=\frac{(1+\sec x)'\tan x-(1+\sec x)(\tan x)'}{\tan^2 x}\\&=\frac{\sec x\tan^2 x-(1+\sec x)\sec^2 x}{\tan^2 x}\\&=\sec x-\csc^2 x(1+\sec x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore f'\left(\frac{\pi}{4}\right)&=\sec\frac{\pi}{4}-\csc^2\frac{\pi}{4}\left(1+\sec\frac{\pi}{4}\right)\\&=\sqrt{2}-2(1+\sqrt{2})\\&=-2-\sqrt{2}\end{aligned}$$

답 $-2-\sqrt{2}$

**045-❶** (1) $y=\left(\dfrac{x^2+x+2}{x^2}\right)^4=\left(1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x^2}\right)^4$
$=(1+x^{-1}+2x^{-2})^4$

이므로

$$\begin{aligned}y'&=4(1+x^{-1}+2x^{-2})^3(1+x^{-1}+2x^{-2})'\\&=4(1+x^{-1}+2x^{-2})^3(-x^{-2}-4x^{-3})\\&=-4x^{-2}(1+x^{-1}+2x^{-2})^3(1+4x^{-1})\\&=-\frac{4}{x^2}\left(1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}\right)^3\left(1+\frac{4}{x}\right)\\&=-\frac{4}{x^2}\left(\frac{x^2+x+2}{x^2}\right)^3\cdot\frac{x+4}{x}\\&=-\frac{4}{x^2}\cdot\frac{(x^2+x+2)^3}{x^6}\cdot\frac{x+4}{x}\\&=-\frac{4(x^2+x+2)^3(x+4)}{x^9}\end{aligned}$$

(2) $$\begin{aligned}y'&=2\cos(\tan x)\{\cos(\tan x)\}'\\&=2\cos(\tan x)\{-\sin(\tan x)\}(\tan x)'\\&=-2\sin(\tan x)\cos(\tan x)\sec^2 x\\&=-\sin(2\tan x)\sec^2 x\end{aligned}$$

답 풀이 참조

**Remark▶**

(2) 배각의 공식 $2\sin x\cos x=\sin 2x$에 의하여
$2\sin(\tan x)\cos(\tan x)=\sin(2\tan x)$

**다른 풀이** (1) $u=\dfrac{x^2+x+2}{x^2}$라 하면 $y=u^4$이므로

$$\frac{dy}{du}=4u^3$$

$$\begin{aligned}\frac{du}{dx}&=\frac{(2x+1)x^2-(x^2+x+2)\cdot 2x}{(x^2)^2}\\&=\frac{-x^2-4x}{x^4}\\&=\frac{-x-4}{x^3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \frac{dy}{dx}&=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}\\&=4u^3\cdot\frac{-x-4}{x^3}\\&=\frac{4(x^2+x+2)^3}{x^6}\cdot\frac{-x-4}{x^3}\\&=-\frac{4(x^2+x+2)^3(x+4)}{x^9}\end{aligned}$$

**045-❷** $h(x)=(g\circ f)(x)=g(f(x))$에서

$h'(x)=g'(f(x))f'(x)$

$f(x)=(x^2-3)^2$에서

$$\begin{aligned}f'(x)&=2(x^2-3)\cdot 2x\\&=4x^3-12x\end{aligned}$$

$g(x)=\dfrac{1}{(x+1)^2}$에서

$$g'(x)=-\frac{2(x+1)}{(x+1)^4}=-\frac{2}{(x+1)^3}$$

$f(2)=(2^2-3)^2=1,\ f'(2)=4\cdot 2^3-12\cdot 2=8$이므로

$$\begin{aligned}h'(2)&=g'(f(2))f'(2)\\&=8g'(1)\\&=8\cdot\left(-\frac{2}{2^3}\right)=-2\end{aligned}$$

답 $-2$

**046-❶** (1) $$\begin{aligned}y'&=2^{x^2+1}\ln 2\cdot(x^2+1)'\\&=2^{x^2+1}\ln 2\cdot 2x\\&=2^{x^2+2}\cdot x\ln 2\end{aligned}$$

(2) $y'=(x)'e^{\cos x}+x(e^{\cos x})'$

$=e^{\cos x}+x\cdot e^{\cos x}(\cos x)'$

$=e^{\cos x}-x\cdot e^{\cos x}\sin x$

$=e^{\cos x}(1-x\sin x)$

(3) $y'=\dfrac{(2^x-2^{-x})'(2^x+2^{-x})-(2^x-2^{-x})(2^x+2^{-x})'}{(2^x+2^{-x})^2}$

$=\dfrac{(2^x+2^{-x})\ln 2\cdot(2^x+2^{-x})-(2^x-2^{-x})(2^x-2^{-x})\ln 2}{(2^x+2^{-x})^2}$

$=\dfrac{\{(2^x+2^{-x})^2-(2^x-2^{-x})^2\}\ln 2}{(2^x+2^{-x})^2}$

$=\dfrac{4\ln 2}{(2^x+2^{-x})^2}$

답 풀이 참조

**046-❷** $f'(x)=(e^{-x})'\sin x+e^{-x}(\sin x)'$

$=-e^{-x}\sin x+e^{-x}\cos x$

$=e^{-x}(\cos x-\sin x)$

이므로 $x=0$에서의 미분계수는

$f'(0)=1\cdot(1-0)=1$

답 1

**047-❶** (1) $y'=\dfrac{(\sin x)'}{\sin x}=\dfrac{\cos x}{\sin x}=\cot x$

(2) $y=(4x^2-1)\ln|2x-1|^3=3(4x^2-1)\ln|2x-1|$

$=(12x^2-3)\ln|2x-1|$

이므로

$y'=(12x^2-3)'\ln|2x-1|$

$+(12x^2-3)(\ln|2x-1|)'$

$=24x\ln|2x-1|+(12x^2-3)\cdot\dfrac{(2x-1)'}{2x-1}$

$=24x\ln|2x-1|+\dfrac{2(12x^2-3)}{2x-1}$

$=24x\ln|2x-1|+6(2x+1)$

(3) $y=\dfrac{\ln|x|^3}{x^4}=\dfrac{3\ln|x|}{x^4}$이므로

$y'=\dfrac{(3\ln|x|)'\cdot x^4-3\ln|x|\cdot(x^4)'}{(x^4)^2}$

$=\dfrac{\dfrac{3}{x}\cdot x^4-3\ln|x|\cdot 4x^3}{x^8}$

$=\dfrac{3x^3-12x^3\ln|x|}{x^8}=\dfrac{3x^3(1-4\ln|x|)}{x^8}$

$=\dfrac{3(1-4\ln|x|)}{x^5}$

(4) $y'=\dfrac{(\ln|x|)'}{\ln|x|\cdot\ln 3}=\dfrac{\dfrac{1}{x}}{\ln|x|\cdot\ln 3}$

$=\dfrac{1}{x\ln|x|\cdot\ln 3}$

답 풀이 참조

**048-❶** (1) 주어진 식의 양변의 절댓값에 자연로그를 취하면

$\ln|y|=\ln\left|\dfrac{(x-1)^4}{(x+1)(x+2)^2}\right|$

$=4\ln|x-1|-\ln|x+1|-2\ln|x+2|$

양변을 $x$에 대하여 미분하면

$\dfrac{y'}{y}=\dfrac{4}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{2}{x+2}$

$=\dfrac{x^2+11x+12}{(x-1)(x+1)(x+2)}$

$\therefore y'=y\cdot\dfrac{x^2+11x+12}{(x-1)(x+1)(x+2)}$

$=\dfrac{(x-1)^4}{(x+1)(x+2)^2}$

$\times\dfrac{x^2+11x+12}{(x-1)(x+1)(x+2)}$

$=\dfrac{(x-1)^3(x^2+11x+12)}{(x+1)^2(x+2)^3}$

(2) 주어진 식의 양변에 자연로그를 취하면

$\ln y=\ln x^x=x\ln x$

양변을 $x$에 대하여 미분하면

$\dfrac{y'}{y}=\ln x+x\cdot\dfrac{1}{x}=\ln x+1$

$\therefore y'=y(\ln x+1)$

$=x^x(\ln x+1)$

답 풀이 참조

**048-❷** 주어진 식의 양변에 자연로그를 취하면

$\ln f(x)=\ln(\ln x)^x$

$=x\ln(\ln x)$

양변을 $x$에 대하여 미분하면

$\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\ln(\ln x)+x\cdot\dfrac{(\ln x)'}{\ln x}$

$=\ln(\ln x)+x\cdot\dfrac{\dfrac{1}{x}}{\ln x}$

$=\ln(\ln x)+\dfrac{1}{\ln x}$

$\therefore f'(x)=f(x)\left\{\ln(\ln x)+\dfrac{1}{\ln x}\right\}$

$=(\ln x)^x\left\{\ln(\ln x)+\dfrac{1}{\ln x}\right\}$

$\therefore f'(e)=1$

답 1

**049-❶** (1) $y=\dfrac{x^2-1}{\sqrt{x+1}}=(x^2-1)(x+1)^{-\frac{1}{2}}$

이므로

$$y'=2x(x+1)^{-\frac{1}{2}}+(x^2-1)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)(x+1)^{-\frac{3}{2}}\cdot 1$$
$$=\frac{1}{2}(x+1)^{-\frac{3}{2}}\{4x(x+1)-(x^2-1)\}$$
$$=\frac{1}{2}(x+1)^{-\frac{3}{2}}(3x^2+4x+1)$$
$$=\frac{3x^2+4x+1}{2(x+1)\sqrt{x+1}}=\frac{(x+1)(3x+1)}{2(x+1)\sqrt{x+1}}$$
$$=\frac{3x+1}{2\sqrt{x+1}}$$

(2) $y'=\cos\sqrt{1-x^2}\cdot(\sqrt{1-x^2})'$
$$=\cos\sqrt{1-x^2}\cdot\frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot(-2x)$$
$$=-\frac{x\cos\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}$$

답 풀이 참조

**다른 풀이** (1) $y'=\dfrac{(x^2-1)'\sqrt{x+1}-(x^2-1)(\sqrt{x+1})'}{(\sqrt{x+1})^2}$
$$=\frac{2x\sqrt{x+1}-(x^2-1)\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}}{x+1}$$
$$=\frac{\dfrac{4x(x+1)-(x^2-1)}{2\sqrt{x+1}}}{x+1}$$
$$=\frac{3x^2+4x+1}{2(x+1)\sqrt{x+1}}=\frac{3x+1}{2\sqrt{x+1}}$$

**049-❷** $f'(x)=\dfrac{(x+\sqrt{x^2+1})'}{x+\sqrt{x^2+1}}=\dfrac{1+\dfrac{(x^2+1)'}{2\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}}$
$$=\frac{1+\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}}=\frac{\dfrac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

이므로 $\quad f'(0)=\dfrac{1}{\sqrt{0^2+1}}=1$

답 1

**050-❶** (1) $x=t^2+1$에서 $\quad\dfrac{dx}{dt}=2t$

$y=2t^3-t+3$에서 $\quad\dfrac{dy}{dt}=6t^2-1$
$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}=\frac{6t^2-1}{2t}\ (t\neq0)$$

(2) $x=2\cos t$에서 $\quad\dfrac{dx}{dt}=-2\sin t$

$y=3\sin t$에서 $\quad\dfrac{dy}{dt}=3\cos t$
$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}=\frac{3\cos t}{-2\sin t}=-\frac{3}{2}\cot t$$

답 (1) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{6t^2-1}{2t}\ (t\neq0)$ (2) $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{3}{2}\cot t$

**051-❶** (1) 주어진 식의 각 항을 $x$에 대하여 미분하면
$$2x+2y\frac{dy}{dx}-2+4\frac{dy}{dx}=0$$
$$(2y+4)\frac{dy}{dx}=2-2x$$
$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{1-x}{y+2}\ (y\neq-2)$$

(2) 주어진 식의 각 항을 $x$에 대하여 미분하면
$$6x^2-y-x\frac{dy}{dx}+3y^2\frac{dy}{dx}=0$$
$$(x-3y^2)\frac{dy}{dx}=6x^2-y$$
$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{6x^2-y}{x-3y^2}\ (x\neq3y^2)$$

답 풀이 참조

**051-❷** 주어진 식의 각 항을 $x$에 대하여 미분하면
$$2x+3y+3x\frac{dy}{dx}=0,\qquad 3x\frac{dy}{dx}=-2x-3y$$
$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{-2x-3y}{3x}\ (x\neq0)$$

$x=2$를 $x^2+3xy=10$에 대입하면

$4+6y=10\qquad\therefore\ y=1$

따라서 $x=2$에서의 $\dfrac{dy}{dx}$의 값은
$$\frac{-2\cdot2-3\cdot1}{3\cdot2}=-\frac{7}{6}$$

답 $-\dfrac{7}{6}$

**052-❶** (1) $y=\sqrt[4]{4x-1}$에서 $y^4=4x-1$이므로
$$x=\frac{1}{4}y^4+\frac{1}{4}$$

양변을 $y$에 대하여 미분하면 $\quad\dfrac{dx}{dy}=y^3$
$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\dfrac{dx}{dy}}=\frac{1}{y^3}\ (y\neq0)$$

(2) $x=\dfrac{1}{y^2+1}$에서
$$\frac{dx}{dy}=-\frac{2y}{(y^2+1)^2}$$
$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\dfrac{dx}{dy}}=-\frac{(y^2+1)^2}{2y}$$

(3) $x=2y\sqrt{1+3y}$에서

$$\frac{dx}{dy}=2\sqrt{1+3y}+2y\cdot\frac{3}{2\sqrt{1+3y}}$$
$$=\frac{2(1+3y)+3y}{\sqrt{1+3y}}=\frac{9y+2}{\sqrt{1+3y}}$$
$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{\sqrt{1+3y}}{9y+2}$$

답 풀이 참조

**053-❶** $g(6)=a$라 하면 $f(a)=6$

즉 $a^3-2=6$이므로

$a^3-8=0$, $(a-2)(a^2+2a+4)=0$

$\therefore a=2$ ($\because a^2+2a+4>0$)

따라서 $g(6)=2$이고, $f'(x)=3x^2$이므로

$$g'(6)=\frac{1}{f'(2)}=\frac{1}{12}$$

답 $\frac{1}{12}$

**053-❷** $g(2)=a$라 하면 $f(a)=2$

즉 $\sqrt[3]{a}+a=2$이므로 $\sqrt[3]{a}+a-2=0$

$\sqrt[3]{a}=t$로 놓으면 $t^3+t-2=0$

$(t-1)(t^2+t+2)=0$

$\therefore t=1$ ($\because t^2+t+2>0$)

즉 $\sqrt[3]{a}=1$에서 $a=1$

따라서 $g(2)=1$이고, $f'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}+1$이므로

$$g'(2)=\frac{1}{f'(1)}=\frac{3}{4}$$

답 $\frac{3}{4}$

**054-❶** (1) $y=\ln(5x-2)$에서

$$y'=\frac{(5x-2)'}{5x-2}=\frac{5}{5x-2}$$
$$\therefore y''=-\frac{5\cdot(5x-2)'}{(5x-2)^2}=-\frac{25}{(5x-2)^2}$$

(2) $y=\sqrt{x^2-2}$에서

$$y'=\frac{(x^2-2)'}{2\sqrt{x^2-2}}=\frac{2x}{2\sqrt{x^2-2}}=\frac{x}{\sqrt{x^2-2}}$$
$$\therefore y''=\frac{(x)'\cdot\sqrt{x^2-2}-x\cdot(\sqrt{x^2-2})'}{(\sqrt{x^2-2})^2}$$
$$=\frac{\sqrt{x^2-2}-x\cdot\frac{2x}{2\sqrt{x^2-2}}}{x^2-2}$$
$$=\frac{\sqrt{x^2-2}-\frac{x^2}{\sqrt{x^2-2}}}{x^2-2}$$
$$=\frac{(x^2-2)-x^2}{(x^2-2)\sqrt{x^2-2}}$$
$$=-\frac{2}{(x^2-2)\sqrt{x^2-2}}$$

(3) $y=xe^x$에서

$$y'=e^x+xe^x=(x+1)e^x$$
$$\therefore y''=(x+1)'e^x+(x+1)(e^x)'$$
$$=e^x+(x+1)e^x=(x+2)e^x$$

답 풀이 참조

**054-❷** $y=(ax+b)e^x$에서

$$y'=(ax+b)'e^x+(ax+b)(e^x)'$$
$$=ae^x+(ax+b)e^x=e^x(ax+a+b)$$
$$y''=(e^x)'(ax+a+b)+e^x(ax+a+b)'$$
$$=e^x(ax+a+b)+e^x\cdot a=e^x(ax+2a+b)$$

$y+y''=ky'$에서

$$(ax+b)e^x+e^x(ax+2a+b)=ke^x(ax+a+b)$$
$$e^x\{a(2-k)x+a(2-k)+b(2-k)\}=0$$

이때 $e^x\neq0$이므로

$$a(2-k)x+a(2-k)+b(2-k)=0$$

이 등식이 모든 실수 $x$에 대하여 성립해야 하므로

$a(2-k)=0$, $b(2-k)=0$

$\therefore k=2$ ($\because a\neq0$)

답 2

## 중단원 연습 문제

본책 142~146쪽

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **01** ③ | **02** 588 | **03** $-\frac{3\sqrt{2}}{2}$ | | **04** 1 |
| **05** 19 | **06** ② | **07** ④ | **08** 0, 3 | **09** $\frac{1}{2}$ |
| **10** ② | **11** ④ | **12** 10 | **13** $-\frac{1}{4}$ | **14** 15 |
| **15** 6 | **16** ⑤ | **17** 2 | **18** 20 | **19** 4 |
| **20** 1 | **21** ② | **22** ④ | **23** ① | **24** ③ |

**01** (전략) 함수의 몫의 미분법을 이용하여 함수 $f(x)$를 미분한다.

(풀이) $f(x)=\frac{x-1}{x^2+1}$이므로

$$f'(x)=\frac{(x^2+1)-(x-1)\cdot2x}{(x^2+1)^2}$$
$$=\frac{-x^2+2x+1}{(x^2+1)^2}$$
$$\therefore f'(-1)=\frac{-1-2+1}{(1+1)^2}=-\frac{1}{2}$$

답 ③

**다른 풀이** $f(x)=(x-1)(x^2+1)^{-1}$이므로

$$f'(x)=(x^2+1)^{-1}+(x-1)\cdot(-1)(x^2+1)^{-2}\cdot 2x$$
$$=(x^2+1)^{-1}-2x(x-1)(x^2+1)^{-2}$$
$$=(x^2+1)^{-2}(-x^2+2x+1)$$
$$\therefore f'(-1)=2^{-2}\cdot(-2)=\frac{1}{4}\cdot(-2)=-\frac{1}{2}$$

**02** **전략** 함수의 곱의 미분법과 합성함수의 미분법을 이용하여 도함수를 구한 후 $x=2$를 대입한다.

**풀이** $g(x)=x^3\{f(2x)\}^2$이므로

$$g'(x)=(x^3)'\{f(2x)\}^2+x^3\cdot 2f(2x)f'(2x)\cdot(2x)'$$
$$=3x^2\{f(2x)\}^2+4x^3f(2x)f'(2x) \quad \cdots ❶$$
$$\therefore g'(2)=12\{f(4)\}^2+32f(4)f'(4)$$
$$=12\cdot 3^2+32\cdot 3\cdot 5=588 \quad \cdots ❷$$

답 588

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ❶ $g'(x)$를 구할 수 있다. | 80 % |
| ❷ $g'(2)$의 값을 구할 수 있다. | 20 % |

**03** **전략** 합성함수 $y=(f\circ g)(x)$의 도함수는 $y'=f'(g(x))g'(x)$임을 이용한다.

**풀이** $(f\circ g)(x)=f(g(x))$에서

$f(g(x))=\cos^3 2x$이므로 $\cdots ❶$

$$(f\circ g)'(x)=3\cos^2 2x\cdot(\cos 2x)'$$
$$=3\cos^2 2x\cdot(-\sin 2x)\cdot(2x)'$$
$$=-3\cos 2x\cdot 2\sin 2x\cos 2x$$
$$=-3\cos 2x\sin 4x \quad \cdots ❷$$
$$\therefore (f\circ g)'\left(\frac{\pi}{8}\right)=-3\cdot\cos\frac{\pi}{4}\cdot\sin\frac{\pi}{2}$$
$$=-3\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 1$$
$$=-\frac{3\sqrt{2}}{2} \quad \cdots ❸$$

답 $-\frac{3\sqrt{2}}{2}$

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ❶ $(f\circ g)(x)$를 구할 수 있다. | 20 % |
| ❷ $(f\circ g)'(x)$를 구할 수 있다. | 60 % |
| ❸ $(f\circ g)'\left(\frac{\pi}{8}\right)$의 값을 구할 수 있다. | 20 % |

**04** **전략** 함수의 곱의 미분법과 합성함수의 미분법을 이용하여 도함수를 구한 후 $x=0$을 대입한다.

**풀이** $f(x)=(x^2+1)e^{\sin x}$에서

$$f'(x)=(x^2+1)'e^{\sin x}+(x^2+1)(e^{\sin x})'$$
$$=2xe^{\sin x}+(x^2+1)e^{\sin x}\cdot\cos x$$
$$=e^{\sin x}(x^2\cos x+2x+\cos x)$$
$$\therefore f'(0)=e^0(0+0+1)=1$$

답 1

**05** **전략** $y=\ln|f(x)|$일 때, $y'=\frac{f'(x)}{f(x)}$ $(f(x)\neq 0)$임을 이용한다.

**풀이** $f(x)=\ln|3x+1|$에서

$$f'(x)=\frac{(3x+1)'}{3x+1}=\frac{3}{3x+1}$$
$$\therefore f'(5)=\frac{3}{16}$$

따라서 $p=16$, $q=3$이므로

$$p+q=19$$

답 19

**06** **전략** $x>0$일 때 $x^{\cos x}>0$이므로 주어진 함수의 양변에 자연로그를 취한 후 양변을 미분한다.

**풀이** $f(x)=x^{\cos x}$의 양변에 자연로그를 취하면

$$\ln f(x)=\ln x^{\cos x}=\cos x\cdot\ln x$$

양변을 $x$에 대하여 미분하면

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=(\cos x)'\ln x+\cos x(\ln x)'$$
$$=-\sin x\cdot\ln x+\cos x\cdot\frac{1}{x}$$
$$\therefore f'(x)=f(x)\left(-\sin x\cdot\ln x+\frac{\cos x}{x}\right)$$
$$=x^{\cos x}\left(-\sin x\cdot\ln x+\frac{\cos x}{x}\right)$$
$$\therefore f'(\pi)=\pi^{\cos\pi}\left(-\sin\pi\cdot\ln\pi+\frac{\cos\pi}{\pi}\right)$$
$$=\pi^{-1}\left(0-\frac{1}{\pi}\right)$$
$$=-\frac{1}{\pi^2}$$

답 ②

**07** **전략** 매개변수로 나타낸 함수의 미분법을 이용한다.

**풀이** $x=t-\frac{1}{t}$에서 $\frac{dx}{dt}=1+\frac{1}{t^2}=\frac{t^2+1}{t^2}$

$y=t+\frac{1}{t}$에서 $\frac{dy}{dt}=1-\frac{1}{t^2}=\frac{t^2-1}{t^2}$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{t^2-1}{t^2}}{\frac{t^2+1}{t^2}}=\frac{t^2-1}{t^2+1}$$

따라서 $t=2$일 때 $\frac{dy}{dx}$의 값은

$$\frac{2^2-1}{2^2+1}=\frac{3}{5}$$

답 ④

**다른 풀이** $x=t-\frac{1}{t}$의 양변을 제곱하면

$$x^2=t^2+\frac{1}{t^2}-2$$

$$\therefore t^2+\frac{1}{t^2}=x^2+2 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

또 $y=t+\frac{1}{t}$의 양변을 제곱하면

$$y^2=t^2+\frac{1}{t^2}+2 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$y^2=(x^2+2)+2 \qquad \therefore y^2=x^2+4$$

위의 식의 각 항을 $x$에 대하여 미분하면

$$2y\frac{dy}{dx}=2x \qquad \therefore \frac{dy}{dx}=\frac{x}{y}\ (y\neq 0)$$

따라서 $t=2$일 때 $x=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$, $y=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$이므로 구하는 값은 $\dfrac{\frac{3}{2}}{\frac{5}{2}}=\frac{3}{5}$

## 08

**전략** 음함수의 미분법을 이용하여 $\frac{dy}{dx}$를 구한다.

**풀이** 주어진 식의 각 항을 $x$에 대하여 미분하면

$$2y\frac{dy}{dx}=3y+3x\frac{dy}{dx}-3x^2$$

$$(3x-2y)\frac{dy}{dx}=3x^2-3y$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{3(x^2-y)}{3x-2y}\ (3x\neq 2y) \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$x=2$를 $y^2=3xy-x^3$에 대입하면

$$y^2=6y-8$$

$$(y-2)(y-4)=0$$

$$\therefore y=2 \text{ 또는 } y=4$$

$x=2$, $y=2$를 ㉠에 대입하면

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3(2^2-2)}{3\cdot 2-2\cdot 2}=3$$

$x=2$, $y=4$를 ㉠에 대입하면

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3(2^2-4)}{3\cdot 2-2\cdot 4}=0$$

**답** 0, 3

## 09

**전략** $\frac{dx}{dy}$를 구한 후 역함수의 미분법을 이용한다.

**풀이** $y=f(x)$라 하면 $y=\tan x$의 역함수 $x=\tan y$에서 양변을 $y$에 대하여 미분하면 $\frac{dx}{dy}=\sec^2 y$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{\sec^2 y}=\frac{1}{\tan^2 y+1}=\frac{1}{x^2+1}$$

따라서 $g'(x)=\frac{1}{x^2+1}$이므로

$$g'(1)=\frac{1}{1^2+1}=\frac{1}{2}$$

**답** $\frac{1}{2}$

**다른 풀이** $f'(x)=\sec^2 x$이고, $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$이므로

$$g(1)=\frac{\pi}{4}$$

$$\therefore g'(1)=\frac{1}{f'\left(\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{1}{\sec^2\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{(\sqrt{2})^2}=\frac{1}{2}$$

## 10

**전략** 미분가능한 함수 $y=f(x)$의 역함수 $y=g(x)$가 존재하고 $g(a)=b$이면 $g'(a)=\frac{1}{f'(b)}$ $(f'(b)\neq 0)$임을 이용한다.

**풀이** $f^{-1}=g$이므로 $f(1)=3$에서

$$f^{-1}(3)=1, \text{ 즉 } g(3)=1$$

$$\therefore g'(3)=\frac{1}{f'(1)}=\frac{1}{2}$$

**답** ②

**다른 풀이** $g=f^{-1}$이므로 $\quad g(f(x))=x$

양변을 $x$에 대하여 미분하면

$$g'(f(x))f'(x)=1$$

$x=1$을 대입하면 $\quad g'(f(1))f'(1)=1$

$$g'(3)\cdot 2=1 \qquad \therefore g'(3)=\frac{1}{2}$$

## 11

**전략** 함수의 곱의 미분법을 이용하여 $f'(x)$, $f''(x)$를 구한다.

**풀이** $f(x)=xe^{ax+b}$에서

$$f'(x)=x'\cdot e^{ax+b}+x(e^{ax+b})'=e^{ax+b}+axe^{ax+b}$$
$$=e^{ax+b}(1+ax)$$
$$f''(x)=(e^{ax+b})'\cdot(1+ax)+e^{ax+b}(1+ax)'$$
$$=ae^{ax+b}(1+ax)+e^{ax+b}\cdot a$$
$$=ae^{ax+b}(2+ax)$$

이때 $f'(0)=3$, $f''(0)=3$이므로

$$e^b=3,\ 2ae^b=3$$

따라서 $a=\frac{1}{2}$, $b=\ln 3$이므로

$$ab=\frac{1}{2}\ln 3=\ln\sqrt{3}$$

**답** ④

## 12

**전략** $f'(x)$와 $f''(x)$를 구한 후 주어진 등식에 $f'(\theta)$, $f''(\theta)$를 대입한다.

**풀이** $f(x)=e^{2x}\sin x$에서

$$f'(x)=(e^{2x})'\sin x+e^{2x}(\sin x)'$$
$$=2e^{2x}\sin x+e^{2x}\cos x$$
$$=e^{2x}(2\sin x+\cos x)$$

$$f''(x)=(e^{2x})'(2\sin x+\cos x)$$
$$+e^{2x}(2\sin x+\cos x)'$$
$$=2e^{2x}(2\sin x+\cos x)$$
$$+e^{2x}(2\cos x-\sin x)$$
$$=e^{2x}(3\sin x+4\cos x) \quad \cdots ❶$$

$f'(\theta)-f''(\theta)=0$이므로

$$e^{2\theta}(2\sin\theta+\cos\theta)-e^{2\theta}(3\sin\theta+4\cos\theta)=0$$
$$-e^{2\theta}(\sin\theta+3\cos\theta)=0$$

이때 $e^{2\theta}>0$이므로

$$\sin\theta+3\cos\theta=0, \quad \frac{\sin\theta}{\cos\theta}=-3$$
$$\therefore \tan\theta=-3 \quad \cdots ❷$$
$$\therefore \sec^2\theta=\tan^2\theta+1$$
$$=(-3)^2+1=10 \quad \cdots ❸$$

답 10

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ❶ $f'(x)$, $f''(x)$를 구할 수 있다. | 40 % |
| ❷ $\tan\theta$의 값을 구할 수 있다. | 40 % |
| ❸ $\sec^2\theta$의 값을 구할 수 있다. | 20 % |

**13** 전략 $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$임을 이용한다.

풀이 $h(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$이므로

$$h'(x)=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

$\lim_{x\to-1}\frac{f(x)-3}{x+1}=2$, $\lim_{x\to-1}\frac{g(x)+2}{x+1}=-1$에서

$x\to-1$일 때, 각각 (분모) $\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to 0$이다.

즉 $\lim_{x\to-1}\{f(x)-3\}=0$, $\lim_{x\to-1}\{g(x)+2\}=0$이므로

$$f(-1)=3, \ g(-1)=-2$$

따라서 $\lim_{x\to-1}\frac{f(x)-3}{x+1}=2$, $\lim_{x\to-1}\frac{g(x)+2}{x+1}=-1$

에서

$$\lim_{x\to-1}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=f'(-1)=2,$$
$$\lim_{x\to-1}\frac{g(x)-g(-1)}{x+1}=g'(-1)=-1$$
$$\therefore h'(-1)=\frac{f'(-1)g(-1)-f(-1)g'(-1)}{\{g(-1)\}^2}$$
$$=\frac{2\cdot(-2)-3\cdot(-1)}{(-2)^2}$$
$$=-\frac{1}{4}$$

답 $-\frac{1}{4}$

**Remark ▶**

$\lim_{x\to a}\frac{(\text{분자})}{(\text{분모})}=\alpha$ ($\alpha$는 실수)일 때

① (분모) $\to 0$이면 (분자) $\to 0$

② (분자) $\to 0$, $\alpha\neq0$이면 (분모) $\to 0$

**14** 전략 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 기울기는 $f'(a)$임을 이용한다.

풀이 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $(2, -3)$에서의 접선의 기울기가 3이므로

$$f(2)=-3, \ f'(2)=3$$

또 함수 $y=g(x)$의 그래프 위의 점 $(1, 2)$에서의 접선의 기울기가 5이므로

$$g(1)=2, \ g'(1)=5 \quad \cdots ❶$$

$h(x)=f(g(x))$로 놓으면

$$h(1)=f(g(1))=f(2)=-3$$

이므로

$$\lim_{x\to1}\frac{f(g(x))+3}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{h(x)-h(1)}{x-1}$$
$$=h'(1) \quad \cdots ❷$$

$h'(x)=f'(g(x))g'(x)$에서

$$h'(1)=f'(g(1))g'(1)=f'(2)\cdot g'(1)$$
$$=3\cdot5=15 \quad \cdots ❸$$

답 15

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ❶ $f(2)$, $f'(2)$, $g(1)$, $g'(1)$의 값을 구할 수 있다. | 30 % |
| ❷ $\lim_{x\to1}\frac{f(g(x))+3}{x-1}=h'(1)$임을 알 수 있다. | 50 % |
| ❸ $h'(1)$의 값을 구할 수 있다. | 20 % |

**Remark ▶** 미분계수의 기하적 의미

함수 $y=f(x)$에 대하여 $x=a$에서의 미분계수 $f'(a)$가 존재할 때, $f'(a)$는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 기울기와 같다.

**15** 전략 분수 꼴의 극한의 성질과 미분계수의 정의를 이용하여 $f(1)$과 $f'(1)$의 값을 구한다.

풀이 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)-4}{x-1}=2$에서 $x\to1$일 때,

(분모) $\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to 0$이다.

즉 $\lim_{x\to1}\{f(x)-4\}=0$이므로 $\quad f(1)=4$

$$\therefore \lim_{x\to1}\frac{f(x)-4}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$
$$=f'(1)=2$$

한편 $g(x)=f(x)\sqrt{f(x)}=\{f(x)\}^{\frac{3}{2}}$이므로

$$g'(x)=\frac{3}{2}\{f(x)\}^{\frac{1}{2}}f'(x)$$

$$\therefore g'(1)=\frac{3}{2}\{f(1)\}^{\frac{1}{2}}f'(1)$$

$$=\frac{3}{2}\cdot 4^{\frac{1}{2}}\cdot 2=6$$

답 6

**다른 풀이** $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-4}{x-1}=2$에서

$$f(1)=4,\ f'(1)=2$$

$g(x)=f(x)\sqrt{f(x)}$에서

$$g'(x)=f'(x)\sqrt{f(x)}+f(x)\cdot\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$$

$$=\frac{2f'(x)f(x)+f(x)f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$$

$$=\frac{3}{2}f'(x)\sqrt{f(x)}$$

$$\therefore g'(1)=\frac{3}{2}f'(1)\sqrt{f(1)}$$

$$=\frac{3}{2}\cdot 2\cdot\sqrt{4}=6$$

**16** **전략** 미분계수의 정의를 이용하여 $\lim_{h\to 0}\frac{f(e+h)-f(e-h)}{h}$를 변형하고, 로그미분법을 이용하여 $f(x)=x^{\ln x}$을 미분한다.

**풀이** $\lim_{h\to 0}\frac{f(e+h)-f(e-h)}{h}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(e+h)-f(e)+f(e)-f(e-h)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(e+h)-f(e)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{f(e-h)-f(e)}{-h}$$

$$=f'(e)+f'(e)=2f'(e)$$

한편 $f(x)=x^{\ln x}$의 양변에 자연로그를 취하면

$$\ln f(x)=\ln x^{\ln x}=(\ln x)^2$$

양변을 $x$에 대하여 미분하면

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=2\ln x(\ln x)'=\frac{2\ln x}{x}$$

$$\therefore f'(x)=f(x)\cdot\frac{2\ln x}{x}=x^{\ln x}\cdot\frac{2\ln x}{x}$$

따라서 구하는 값은

$$2f'(e)=2e^{\ln e}\cdot\frac{2\ln e}{e}=2e\cdot\frac{2}{e}=4$$

답 ⑤

**17** **전략** 매개변수로 나타낸 함수의 미분법을 이용하여 $\lim_{t\to 1}\frac{dy}{dx}$를 $n$에 대한 식으로 나타낸다.

**풀이** $x=t+t^2+t^3+\cdots+t^n$에서

$$\frac{dx}{dt}=1+2t+3t^2+\cdots+nt^{n-1}$$

$$\therefore \lim_{t\to 1}\frac{dx}{dt}=\lim_{t\to 1}(1+2t+3t^2+\cdots+nt^{n-1})$$

$$=1+2+3+\cdots+n=\sum_{k=1}^{n}k$$

$$=\frac{n(n+1)}{2}$$

$y=t+\frac{3}{2}t^2+\frac{5}{3}t^3+\cdots+\frac{2n-1}{n}t^n$에서

$$\frac{dy}{dt}=1+3t+5t^2+\cdots+(2n-1)t^{n-1}$$

$$\therefore \lim_{t\to 1}\frac{dy}{dt}$$

$$=\lim_{t\to 1}\{1+3t+5t^2+\cdots+(2n-1)t^{n-1}\}$$

$$=1+3+5+\cdots+(2n-1)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=2\cdot\frac{n(n+1)}{2}-n$$

$$=n^2$$

$$\therefore \lim_{t\to 1}\frac{dy}{dx}=\lim_{t\to 1}\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{n^2}{\frac{n(n+1)}{2}}$$

$$=\frac{2n}{n+1}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\left(\lim_{t\to 1}\frac{dy}{dx}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{n+1}=2$$

답 2

**18** **전략** 조건 (나)에서 $g(x)$는 $f(x)$의 역함수임을 이용한다.

**풀이** 조건 (나)에서 $f^{-1}=g$이므로 조건 (가)에서

$$g(2)=1$$

조건 (다)에서

$$f'(1)=1+\{f(1)\}^2=1+2^2=5$$

$$\therefore g'(2)=\frac{1}{f'(1)}=\frac{1}{5}$$

$F(x)=h(g(x))$이므로

$$F'(x)=h'(g(x))g'(x)$$

$$\therefore F'(2)=h'(g(2))g'(2)=h'(1)\cdot\frac{1}{5}$$

이때 $F'(2)=4$이므로

$$h'(1)\cdot\frac{1}{5}=4 \qquad \therefore h'(1)=20$$

답 20

**19** **전략** 함수 $y=h(x)$의 그래프에 대하여 $x=k$인 점에서의 접선의 기울기는 $h'(k)$임을 이용한다.

**풀이** $f(x)=\ln\sqrt{\frac{2+x}{2-x}}=\frac{1}{2}\ln\frac{2+x}{2-x}$

$$=\frac{1}{2}\{\ln(2+x)-\ln(2-x)\}$$

이므로

$$f'(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2+x}+\frac{1}{2-x}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{2-x+2+x}{4-x^2}=\frac{2}{4-x^2}$$
$$\therefore a=f'(0)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2} \quad \cdots ❶$$

$g(0)=k$라 하면 $f(k)=0$이므로

$$\ln\sqrt{\frac{2+k}{2-k}}=0, \qquad \sqrt{\frac{2+k}{2-k}}=1$$
$$\frac{2+k}{2-k}=1, \qquad 2+k=2-k \qquad \therefore k=0$$

즉 $g(0)=0$이므로

$$b=g'(0)=\frac{1}{f'(0)}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2 \quad \cdots ❷$$

따라서 $a=\frac{1}{2}$, $b=2$이므로

$$\frac{b}{a}=\frac{2}{\frac{1}{2}}=4 \quad \cdots ❸$$

답 4

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ❶ $a$의 값을 구할 수 있다. | 50 % |
| ❷ $b$의 값을 구할 수 있다. | 40 % |
| ❸ $\frac{b}{a}$의 값을 구할 수 있다. | 10 % |

## 20

전략 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\alpha$ ($\alpha$는 실수)일 때, $\lim_{x\to a}g(x)=0$이면 $\lim_{x\to a}f(x)=0$이다.

풀이 조건 (나)에서 $x \longrightarrow 1$일 때, (분모) $\longrightarrow 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉 $\lim_{x\to 1}\{f'(f(x))-1\}=0$이므로

$$f'(f(1))=1$$
$$\therefore \lim_{x\to 1}\frac{f'(f(x))-1}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{f'(f(x))-f'(f(1))}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{f'(f(x))-f'(f(1))}{f(x)-f(1)}\cdot\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$
$$=f''(f(1))f'(1)=f''(2)\cdot 5$$

따라서 $5f''(2)=5$이므로 $\quad f''(2)=1$

답 1

## 21

전략 먼저 $\overline{\mathrm{OP}}$, $\overline{\mathrm{OQ}}$를 각각 $t$에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 $\overline{\mathrm{OP}}=t+\frac{1}{t}$, $\overline{\mathrm{OQ}}=\frac{1}{\sqrt{2}t}$이므로

$$f(t)=\overline{\mathrm{OP}}\times\overline{\mathrm{OQ}}=\left(t+\frac{1}{t}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}t}=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}t^2}$$

따라서 $f'(t)=-\frac{\sqrt{2}}{t^3}$이므로

$$f'(\sqrt{2})=-\frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^3}=-\frac{1}{2}$$

답 ②

## 22

전략 주어진 식을 $\lim_{x\to a}\frac{h(x)-h(a)}{x-a}$ 꼴로 변형한다.

풀이 $h(x)=g(f(x))$라 하면

$$h\left(\frac{\pi}{4}\right)=g\left(f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)=g\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{e}$$
$$\therefore \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{g(f(x))-\sqrt{e}}{x-\frac{\pi}{4}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{h(x)-h\left(\frac{\pi}{4}\right)}{x-\frac{\pi}{4}}$$
$$=h'\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

이때 $h'(x)=g'(f(x))f'(x)$이고

$$f'(x)=2\sin x\cos x,\ g'(x)=e^x$$

이므로 구하는 극한값은

$$h'\left(\frac{\pi}{4}\right)=g'\left(f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=g'\left(\frac{1}{2}\right)f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$$
$$=e^{\frac{1}{2}}\cdot 2\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}=\sqrt{e}$$

답 ④

## 23

전략 $\frac{dx}{d\theta}$, $\frac{dy}{d\theta}$를 각각 구한 후 $\frac{dy}{dx}$를 구한다.

풀이 $x=2\sin\theta-1$, $y=4\cos\theta+\sqrt{3}$에서

$$\frac{dx}{d\theta}=2\cos\theta,\ \frac{dy}{d\theta}=-4\sin\theta$$
$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\frac{-4\sin\theta}{2\cos\theta}$$
$$=-2\tan\theta\ (\cos\theta\neq 0)$$

따라서 $\theta=\frac{\pi}{3}$일 때, $\frac{dy}{dx}$의 값은

$$-2\tan\frac{\pi}{3}=-2\sqrt{3}$$

답 ①

## 24

전략 역함수의 미분법과 함수의 곱의 미분법을 이용한다.

풀이 $f(x)$가 $g(x)$의 역함수이고 $f(1)=2$, $f'(1)=3$이므로 $\quad g(2)=1$

$$\therefore g'(2)=\frac{1}{f'(1)}=\frac{1}{3}$$

이때 $h(x)=xg(x)$에서 $h'(x)=g(x)+xg'(x)$이므로

$$h'(2)=g(2)+2g'(2)=1+2\cdot\frac{1}{3}=\frac{5}{3}$$

답 ③

Ⅱ. 미분법

# 06 도함수의 활용 (1)

## 유제

본책 152~173쪽

**055-❶** (1) $f(x)=(x-1)e^x$으로 놓으면

$f'(x)=e^x+(x-1)e^x=xe^x$이므로 점 $(2,\ e^2)$에서의 접선의 기울기는

$f'(2)=2e^2$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$y-e^2=2e^2(x-2)$

$\therefore\ y=2e^2x-3e^2$

(2) $f(x)=\log_5(1+x^2)$으로 놓으면

$f'(x)=\dfrac{2x}{(1+x^2)\ln 5}$이므로 점 $(2,\ 1)$에서의 접선의 기울기는

$f'(2)=\dfrac{2\cdot 2}{(1+2^2)\ln 5}=\dfrac{4}{5\ln 5}$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$y-1=\dfrac{4}{5\ln 5}(x-2)$

$\therefore\ y=\dfrac{4}{5\ln 5}x-\dfrac{8}{5\ln 5}+1$

답 풀이 참조

**055-❷** $f(x)=\tan^2 x$로 놓으면

$f'(x)=2\tan x\sec^2 x$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\left(\dfrac{\pi}{4},\ 1\right)$에서의 접선의 기울기는

$f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=2\cdot 1\cdot(\sqrt{2})^2=4$

따라서 이 점에서의 접선에 수직인 직선의 기울기는 $-\dfrac{1}{4}$이므로 구하는 직선의 방정식은

$y-1=-\dfrac{1}{4}\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$

$\therefore\ y=-\dfrac{1}{4}x+\dfrac{\pi}{16}+1$

답 $y=-\dfrac{1}{4}x+\dfrac{\pi}{16}+1$

**056-❶** (1) $f(x)=e^{2x}$으로 놓으면 $f'(x)=2e^{2x}$

접점의 좌표를 $(a,\ e^{2a})$이라 하면 직선 $y=2e(x+1)$에 평행한 직선의 기울기는 $2e$이므로

$f'(a)=2e^{2a}=2e \qquad \therefore\ a=\dfrac{1}{2}$

따라서 접점의 좌표가 $\left(\dfrac{1}{2},\ e\right)$이므로 구하는 접선의 방정식은

$y-e=2e\left(x-\dfrac{1}{2}\right) \qquad \therefore\ y=2ex$

(2) $f(x)=\cos 2x$로 놓으면

$f'(x)=-2\sin 2x$

접점의 좌표를 $(a,\ \cos 2a)$라 하면 직선 $x-2y+3=0$, 즉 $y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{2}$에 수직인 직선의 기울기는 $-2$이므로

$f'(a)=-2\sin 2a=-2, \qquad \sin 2a=1$

그런데 $0\le a\le\pi$이므로

$2a=\dfrac{\pi}{2} \qquad \therefore\ a=\dfrac{\pi}{4}$

따라서 접점의 좌표가 $\left(\dfrac{\pi}{4},\ 0\right)$이므로 구하는 접선의 방정식은

$y-0=-2\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right) \qquad \therefore\ y=-2x+\dfrac{\pi}{2}$

답 (1) $y=2ex$ (2) $y=-2x+\dfrac{\pi}{2}$

**056-❷** $f(x)=\dfrac{x}{2x+1}$로 놓으면

$f'(x)=\dfrac{2x+1-x\cdot 2}{(2x+1)^2}=\dfrac{1}{(2x+1)^2}$

접점의 좌표를 $\left(a,\ \dfrac{a}{2a+1}\right)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기가 1이므로

$f'(a)=\dfrac{1}{(2a+1)^2}=1, \qquad (2a+1)^2=1$

$2a+1=\pm 1 \qquad \therefore\ a=-1$ 또는 $a=0$

따라서 두 접점의 좌표는 $(-1,\ 1)$, $(0,\ 0)$이므로 두 접점 사이의 거리는

$\sqrt{(0+1)^2+(0-1)^2}=\sqrt{2}$

답 $\sqrt{2}$

**057-❶** $f(x)=xe^x$으로 놓으면

$f'(x)=e^x+xe^x=e^x(x+1)$

접점의 좌표를 $(a,\ ae^a)$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(a)=e^a(a+1)$이므로 접선의 방정식은

$y-ae^a=e^a(a+1)(x-a)$

이 직선이 점 $(-4,\ 0)$을 지나므로

$0-ae^a=e^a(a+1)(-4-a)$

$e^a(a^2+4a+4)=0, \qquad e^a(a+2)^2=0$

$\therefore\ a=-2\ (\because\ e^a>0)$

따라서 구하는 접점의 좌표는 $\left(-2,\ -\dfrac{2}{e^2}\right)$

답 $\left(-2,\ -\dfrac{2}{e^2}\right)$

**057-②** $f(x)=\frac{\ln x}{x}$로 놓으면

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}$$

접점의 좌표를 $\left(a,\ \frac{\ln a}{a}\right)(a>0)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(a)=\frac{1-\ln a}{a^2}$이므로 접선의 방정식은

$$y-\frac{\ln a}{a}=\frac{1-\ln a}{a^2}(x-a) \quad \cdots\cdots \text{㉠}$$

이 직선이 원점을 지나므로

$$0-\frac{\ln a}{a}=\frac{1-\ln a}{a^2}(0-a)$$

$$a\ln a=a(1-\ln a)$$

$$a(2\ln a-1)=0$$

$$\therefore a=\sqrt{e}\ (\because a>0)$$

$a=\sqrt{e}$를 ㉠에 대입하면 구하는 접선의 방정식은

$$y-\frac{1}{2\sqrt{e}}=\frac{1}{2e}(x-\sqrt{e}) \qquad \therefore y=\frac{1}{2e}x$$

답 $y=\frac{1}{2e}x$

**058-①** $f(x)=xe^{-x}$으로 놓으면

$$f'(x)=e^{-x}-xe^{-x}=e^{-x}(1-x)$$

접점의 좌표를 $(t,\ te^{-t})$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$$f'(t)=e^{-t}(1-t)$$

이므로 접선의 방정식은

$$y-te^{-t}=e^{-t}(1-t)(x-t)$$

이 직선이 점 $(4,\ 0)$을 지나므로

$$0-te^{-t}=e^{-t}(1-t)(4-t)$$

$$e^{-t}(t^2-4t+4)=0, \qquad e^{-t}(t-2)^2=0$$

$$\therefore t=2\ (\because e^{-t}>0)$$

따라서 접점은 $x=2$에서 1개뿐이므로 점 $(4,\ 0)$에서 곡선 $y=xe^{-x}$에 그을 수 있는 접선은 1개이다.

답 1

**059-①** $f(x)=\cos^2 x,\ g(x)=a+\sin x$에서

$$f'(x)=-2\sin x\cos x,\ g'(x)=\cos x$$

두 곡선 $y=f(x),\ y=g(x)$가 $x=t\left(-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}\right)$인 점에서 접하므로

$f(t)=g(t)$에서 $\quad \cos^2 t=a+\sin t \quad \cdots\cdots$ ㉠

$f'(t)=g'(t)$에서 $\quad -2\sin t\cos t=\cos t$

$$\cos t(1+2\sin t)=0$$

$$\therefore \sin t=-\frac{1}{2}\left(\because -\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\therefore t=-\frac{\pi}{6}\left(\because -\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}\right)$$

$t=-\frac{\pi}{6}$를 ㉠에 대입하면

$$\cos^2\left(-\frac{\pi}{6}\right)=a+\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\frac{3}{4}=a-\frac{1}{2} \qquad \therefore a=\frac{5}{4}$$

답 $\frac{5}{4}$

**059-②** $f(x)=\ln x,\ g(x)=ax+\frac{b}{x}$에서

$$f'(x)=\frac{1}{x},\ g'(x)=a-\frac{b}{x^2}$$

두 곡선 $y=f(x),\ y=g(x)$가 점 $(e^2,\ 2)$에서 접하므로

$f(e^2)=g(e^2)$에서 $\quad 2=ae^2+\frac{b}{e^2} \quad \cdots\cdots$ ㉠

$f'(e^2)=g'(e^2)$에서 $\quad \frac{1}{e^2}=a-\frac{b}{e^4}$

$$\therefore 1=ae^2-\frac{b}{e^2} \quad \cdots\cdots \text{㉡}$$

㉠+㉡을 하면

$$3=2ae^2 \qquad \therefore a=\frac{3}{2e^2}$$

$a=\frac{3}{2e^2}$을 ㉠에 대입하면

$$2=\frac{3}{2e^2}\cdot e^2+\frac{b}{e^2} \qquad \therefore b=\frac{e^2}{2}$$

$$\therefore ab=\frac{3}{4}$$

답 $\frac{3}{4}$

**060-①** $x=3\cos\theta$에서 $\quad \frac{dx}{d\theta}=-3\sin\theta$

$y=2\sin\theta$에서 $\quad \frac{dy}{d\theta}=2\cos\theta$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\frac{2\cos\theta}{-3\sin\theta}$$

$$=-\frac{2}{3}\cot\theta\ (\sin\theta\neq 0)$$

$\theta=\frac{\pi}{4}$일 때,

$$x=3\cos\frac{\pi}{4}=\frac{3\sqrt{2}}{2},\ y=2\sin\frac{\pi}{4}=\sqrt{2},$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{2}{3}\cot\frac{\pi}{4}=-\frac{2}{3}$$

이므로 접선의 방정식은

$$y-\sqrt{2}=-\frac{2}{3}\left(x-\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$$

$\therefore y=-\frac{2}{3}x+2\sqrt{2}$

답 $y=-\frac{2}{3}x+2\sqrt{2}$

**060-❷** $x=\frac{t}{t+2}$에서 $\quad \frac{dx}{dt}=\frac{2}{(t+2)^2}$

$y=\frac{1}{t-1}$에서 $\quad \frac{dy}{dt}=-\frac{1}{(t-1)^2}$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{-\frac{1}{(t-1)^2}}{\frac{2}{(t+2)^2}}=-\frac{(t+2)^2}{2(t-1)^2}$$

$t=4$일 때,

$x=\frac{2}{3},\ y=\frac{1}{3},\ \frac{dy}{dx}=-2$

이므로 접선의 방정식은

$y-\frac{1}{3}=-2\left(x-\frac{2}{3}\right)$

$\therefore y=-2x+\frac{5}{3}$

따라서 구하는 $y$절편은 $\frac{5}{3}$이다.

답 $\frac{5}{3}$

**061-❶** $\sqrt{x}+\sqrt{y}=2$의 각 항을 $x$에 대하여 미분하면

$\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2\sqrt{y}}\cdot\frac{dy}{dx}=0$

$\therefore \frac{dy}{dx}=-\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}\ (x\neq 0)$

점 $(1,\ 1)$에서의 접선의 기울기는

$\frac{dy}{dx}=-1$

이므로 접선의 방정식은

$y-1=-(x-1) \qquad \therefore y=-x+2$

따라서 $a=-1,\ b=2$이므로

$a^2+b^2=5$

답 5

**061-❷** $x^3+x=xy^2$의 각 항을 $x$에 대하여 미분하면

$3x^2+1=y^2+2xy\frac{dy}{dx}$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{3x^2-y^2+1}{2xy}\ (xy\neq 0)$

점 $(2,\ \sqrt{5})$에서의 접선의 기울기는

$\frac{dy}{dx}=\frac{3\cdot 2^2-(\sqrt{5})^2+1}{2\cdot 2\cdot\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$

이므로 접선의 방정식은

$y-\sqrt{5}=\frac{2\sqrt{5}}{5}(x-2)$

$\therefore y=\frac{2\sqrt{5}}{5}x+\frac{\sqrt{5}}{5}$

이 직선의 $x$절편은 $-\frac{1}{2}$, $y$절편은 $\frac{\sqrt{5}}{5}$이므로

$-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{5}}{5}=-\frac{\sqrt{5}}{10}$

답 $-\frac{\sqrt{5}}{10}$

**062-❶** (1) $f(x)=x^2e^{-x}$에서

$f'(x)=2xe^{-x}-x^2e^{-x}=x(2-x)e^{-x}$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=0$ 또는 $x=2$ $(\because e^{-x}>0)$

함수 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | 0 | $\cdots$ | 2 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ |
| $f(x)$ | ↘ | 0 | ↗ | $\frac{4}{e^2}$ | ↘ |

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty,\ 0]$, $[2,\ \infty)$에서 감소하고, 구간 $[0,\ 2]$에서 증가한다.

(2) $f(x)=\cos x+x\sin x$에서

$f'(x)=-\sin x+\sin x+x\cos x$
$=x\cos x$

$f'(x)=0$에서 $\quad \cos x=0\ (\because x\neq 0)$

$\therefore x=\frac{\pi}{2}$ 또는 $x=\frac{3}{2}\pi\ (\because 0<x<2\pi)$

함수 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

| $x$ | 0 | $\cdots$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\cdots$ | $\frac{3}{2}\pi$ | $\cdots$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ | |
| $f(x)$ | | ↗ | $\frac{\pi}{2}$ | ↘ | $-\frac{3}{2}\pi$ | ↗ | |

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right]$, $\left[\frac{3}{2}\pi,\ 2\pi\right)$에서 증가하고,구간 $\left[\frac{\pi}{2},\ \frac{3}{2}\pi\right]$에서 감소한다.

(3) $f(x)=x+\sqrt{9-x^2}$에서

$f'(x)=1+\frac{-2x}{2\sqrt{9-x^2}}=1-\frac{x}{\sqrt{9-x^2}}$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=\sqrt{9-x^2}$

양변을 제곱하여 정리하면 $\quad x^2=\frac{9}{2}$

$\therefore x=\frac{3\sqrt{2}}{2}\ (\because 0<x<3)$

함수 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

| $x$ | 0 | $\cdots$ | $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ | $\cdots$ | 3 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | 0 | $-$ | |
| $f(x)$ | | ↗ | $3\sqrt{2}$ | ↘ | |

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $\left(0,\ \frac{3\sqrt{2}}{2}\right]$에서 증가하고, 구간 $\left[\frac{3\sqrt{2}}{2},\ 3\right)$에서 감소한다.

(4) $f(x)=x+\ln x$에서 $x>0$이고,

$$f'(x)=1+\frac{1}{x}$$

이때 $x>0$이므로

$$f'(x)>0$$

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(0,\ \infty)$에서 증가한다.

답 풀이 참조

**063-❶** (1) $f(x)=ax-\frac{1}{x}+\ln x$에서 $x>0$이고

$$f'(x)=a+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}$$

함수 $f(x)$가 구간 $(0,\ \infty)$에서 증가하려면 $x>0$에서 $f'(x)\geq0$, 즉 $a+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}\geq0$이어야 한다.

이때 $x>0$에서 $\frac{1}{x^2}>0$, $\frac{1}{x}>0$이므로

$$a\geq0$$

(2) $f(x)=2e^x-ex^2+ax$에서

$$f'(x)=2e^x-2ex+a$$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가하려면 모든 실수 $x$에 대하여 $f'(x)\geq0$이어야 하므로

$$2e^x-2ex+a\geq0$$

$$\therefore\ 2e^x\geq2ex-a \qquad \cdots\cdots\ ㉠$$

$g(x)=2e^x$, $h(x)=2ex-a$로 놓으면

$$g'(x)=2e^x$$

직선 $y=h(x)$와 평행하면서 곡선 $y=g(x)$에 접하는 직선의 기울기는 $2e$이므로 $2e^x=2e$에서

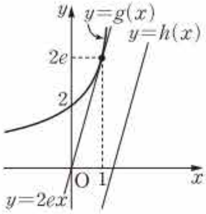
$$x=1$$

즉 접점이 $(1,\ 2e)$이므로 접선의 방정식은

$$y-2e=2e(x-1)$$

$$\therefore\ y=2ex$$

이때 모든 실수 $x$에 대하여 ㉠이 성립하려면 오른쪽 그림과 같이 직선 $y=h(x)$가 직선 $y=2ex$와 일치하거나 직선 $y=2ex$보다 아래쪽에 있어야 하므로




$$-a\leq0$$

$$\therefore\ a\geq0$$

답 (1) $a\geq0$ (2) $a\geq0$

**064-❶** (1) $f(x)=x+\frac{1}{x-1}$에서 $x\neq1$이고,

$$f'(x)=1-\frac{1}{(x-1)^2}=\frac{(x-1)^2-1}{(x-1)^2}$$

$$=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}=\frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=0$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | 0 | $\cdots$ | 1 | $\cdots$ | 2 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | 0 | $-$ | | $-$ | 0 | $+$ |
| $f(x)$ | ↗ | 극대 | ↘ | | ↘ | 극소 | ↗ |

따라서 함수 $f(x)$는

$x=0$에서 극댓값 $f(0)=-1$,

$x=2$에서 극솟값 $f(2)=3$

을 갖는다.

(2) $f(x)=\frac{x+1}{x^2+3}$에서

$$f'(x)=\frac{x^2+3-(x+1)\cdot2x}{(x^2+3)^2}$$

$$=\frac{-x^2-2x+3}{(x^2+3)^2}=\frac{-(x+3)(x-1)}{(x^2+3)^2}$$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-3$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | $-3$ | $\cdots$ | 1 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ |
| $f(x)$ | ↘ | 극소 | ↗ | 극대 | ↘ |

따라서 함수 $f(x)$는

$x=-3$에서 극솟값 $f(-3)=-\frac{1}{6}$,

$x=1$에서 극댓값 $f(1)=\frac{1}{2}$

을 갖는다.

답 (1) 극댓값: $-1$, 극솟값: 3

(2) 극댓값: $\frac{1}{2}$, 극솟값: $-\frac{1}{6}$

**065-❶** (1) $f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{4-x}$에서 $x\geq0$, $4-x\geq0$이므로 $0\leq x\leq4$이고,

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{2\sqrt{4-x}}$$

$$=\frac{\sqrt{4-x}-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\sqrt{4-x}}$$

$f'(x)=0$에서 $\quad \sqrt{4-x}=\sqrt{x}$

양변을 제곱하면

$$4-x=x \qquad \therefore\ x=2$$

함수 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

| $x$ | 0 | $\cdots$ | 2 | $\cdots$ | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | 0 | − | |
| $f(x)$ | 2 | ↗ | 극대 | ↘ | 2 |

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극댓값 $f(2)=2\sqrt{2}$를 갖는다.

(2) $f(x)=\dfrac{x+3}{\sqrt{x+1}}$에서 $x+1>0$이므로 $x>-1$이고,

$$f'(x)=\frac{\sqrt{x+1}-(x+3)\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}}{x+1}$$
$$=\frac{x-1}{2(x+1)\sqrt{x+1}}$$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=1$

함수 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

| $x$ | −1 | $\cdots$ | 1 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | − | 0 | + |
| $f(x)$ | | ↘ | 극소 | ↗ |

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극솟값 $f(1)=2\sqrt{2}$를 갖는다.

답 (1) 극댓값: $2\sqrt{2}$ (2) 극솟값: $2\sqrt{2}$

**066-❶** (1) $f(x)=\dfrac{e^x}{x}$에서 $x\neq 0$이고,

$$f'(x)=\frac{e^x\cdot x-e^x}{x^2}=\frac{(x-1)e^x}{x^2}$$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=1$ ($\because e^x>0$)

함수 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | 0 | $\cdots$ | 1 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | − | | − | 0 | + |
| $f(x)$ | ↘ | | ↘ | 극소 | ↗ |

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극솟값 $f(1)=e$를 갖는다.

(2) $f(x)=x\ln x$에서 $x>0$이고,

$$f'(x)=\ln x+x\cdot\frac{1}{x}=\ln x+1$$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=\dfrac{1}{e}$

함수 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

| $x$ | 0 | $\cdots$ | $\frac{1}{e}$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | − | 0 | + |
| $f(x)$ | | ↘ | 극소 | ↗ |

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\dfrac{1}{e}$에서 극솟값

$f\left(\dfrac{1}{e}\right)=-\dfrac{1}{e}$을 갖는다.

답 (1) 극솟값: $e$ (2) 극솟값: $-\dfrac{1}{e}$

다른 풀이 (2) $f''(x)=\dfrac{1}{x}$에서 $\quad f''\left(\dfrac{1}{e}\right)=e>0$

따라서 $f(x)$의 극솟값은 $f\left(\dfrac{1}{e}\right)=-\dfrac{1}{e}$이다.

**067-❶** (1) $f(x)=\sin^2 x$에서

$$f'(x)=2\sin x\cos x=\sin 2x$$

$f'(x)=0$에서

$2x=\pi$ 또는 $2x=2\pi$ 또는 $2x=3\pi$

($\because 0<2x<4\pi$)

$\therefore x=\dfrac{\pi}{2}$ 또는 $x=\pi$ 또는 $x=\dfrac{3}{2}\pi$

함수 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

| $x$ | 0 | $\cdots$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\cdots$ | $\pi$ | $\cdots$ | $\frac{3}{2}\pi$ | $\cdots$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | 0 | − | 0 | + | 0 | − | |
| $f(x)$ | | ↗ | 극대 | ↘ | 극소 | ↗ | 극대 | ↘ | |

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\dfrac{\pi}{2}$에서 극댓값 $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1$, $x=\pi$에서 극솟값 $f(\pi)=0$, $x=\dfrac{3}{2}\pi$에서 극댓값 $f\left(\dfrac{3}{2}\pi\right)=1$을 갖는다.

(2) $f(x)=\dfrac{2-\cos x}{\sin x}$에서

$$f'(x)=\frac{\sin x\sin x-(2-\cos x)\cos x}{\sin^2 x}$$
$$=\frac{\sin^2 x-2\cos x+\cos^2 x}{\sin^2 x}$$
$$=\frac{1-2\cos x}{\sin^2 x}$$

$f'(x)=0$에서 $\quad \cos x=\dfrac{1}{2}$

$\therefore x=\dfrac{\pi}{3}$ ($\because 0<x<\pi$)

함수 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

| $x$ | 0 | $\cdots$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\cdots$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | − | 0 | + | |
| $f(x)$ | | ↘ | 극소 | ↗ | |

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\dfrac{\pi}{3}$에서 극솟값 $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}$을 갖는다.

답 (1) 극댓값: 1, 극솟값: 0 (2) 극솟값: $\sqrt{3}$

**다른 풀이** (1) $f''(x)=2\cos 2x$에서

$f''\left(\frac{\pi}{2}\right)=2\cos\pi=-2<0$

$f''(\pi)=2\cos 2\pi=2>0$

$f''\left(\frac{3}{2}\pi\right)=2\cos 3\pi=-2<0$

따라서 $f(x)$의 극댓값은 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$, $f\left(\frac{3}{2}\pi\right)=1$,

극솟값은 $f(\pi)=0$이다.

**068-❶** $f(x)=\frac{x^2+ax+b}{x+1}$에서 $x\neq-1$이고,

$$f'(x)=\frac{(2x+a)(x+1)-(x^2+ax+b)\cdot 1}{(x+1)^2}=\frac{x^2+2x+a-b}{(x+1)^2}$$

함수 $f(x)$가 $x=2$에서 극솟값 1을 가지므로

$f(2)=1$, $f'(2)=0$

$f(2)=\frac{4+2a+b}{3}=1$, $f'(2)=\frac{8+a-b}{9}=0$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=-3$, $b=5$

$\therefore f(x)=\frac{x^2-3x+5}{x+1}$

$\therefore f'(x)=\frac{x^2+2x-8}{(x+1)^2}=\frac{(x+4)(x-2)}{(x+1)^2}$

$f'(x)=0$에서 $x=-4$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | $-4$ | $\cdots$ | $-1$ | $\cdots$ | $2$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | ↗ | 극대 | ↘ | | ↘ | 극소 | ↗ |

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-4$에서 극댓값

$f(-4)=-11$을 갖는다.

답 $a=-3$, $b=5$, 극댓값: $-11$

**Remark▶**

$f'(x)=\frac{h(x)}{g(x)}$에서 $h(x)$가 이차식이고 모든 실수 $x$에 대하여 $g(x)>0$이면

① $f(x)$가 극값을 갖는다.

➡ $h(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 갖는다.

② $f(x)$가 극값을 갖지 않는다.

➡ $h(x)=0$이 중근 또는 허근을 갖는다.

**068-❷** $f(x)=(x^2-3a)e^x$에서

$f'(x)=2x\cdot e^x+(x^2-3a)e^x=(x^2+2x-3a)e^x$

함수 $f(x)$가 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 방정식 $x^2+2x-3a=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 $D$라 하면

$\frac{D}{4}=1+3a>0$ $\quad\therefore a>-\frac{1}{3}$

답 $a>-\frac{1}{3}$

## 중단원 연습 문제

본책 174~178쪽

**01** ① **02** $y=-2x+\pi$ **03** 1

**04** $a<-\sqrt{3}$ 또는 $a>\sqrt{3}$ **05** $-1$ **06** $-3$

**07** $-1$ **08** ③ **09** 극솟값: $-4\sqrt{2}$ **10** $\frac{1}{2e}$

**11** ② **12** $-2$ **13** ③ **14** $\frac{6-\pi}{4}$

**15** $-4$ **16** $\frac{4e^4}{e^4+1}$ **17** $y=\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}$

**18** ② **19** ④ **20** 8 **21** 50 **22** ④

**23** ① **24** ③

**01** **전략** 함수의 곱의 미분법을 이용하여 주어진 점에서의 접선의 기울기를 구한다.

**풀이** $f(x)=x^2\ln x$로 놓으면

$f'(x)=2x\ln x+x^2\cdot\frac{1}{x}=2x\ln x+x$

점 $(e, e^2)$에서의 접선의 기울기는

$f'(e)=2e\ln e+e=2e+e=3e$

따라서 접선의 방정식은

$y-e^2=3e(x-e)$, 즉 $y=3ex-2e^2$

이므로 구하는 $y$절편은 $-2e^2$이다. 답 ①

**02** **전략** 평행한 두 직선의 기울기가 서로 같음을 이용한다.

**풀이** $f(x)=\sin 2x$로 놓으면 $f'(x)=2\cos 2x$

직선 $4x+2y-1=0$, 즉 $y=-2x+\frac{1}{2}$에 평행한 직선의 기울기는 $-2$이므로 접점의 좌표를 $(t, \sin 2t)$라 하면

$f'(t)=2\cos 2t=-2$ $\quad\therefore \cos 2t=-1$

$0\le t\le\pi$에서 $0\le 2t\le 2\pi$이므로

$2t=\pi$ $\quad\therefore t=\frac{\pi}{2}$

따라서 접점의 좌표는 $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$이므로 접선의 방정식은

$y=-2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$ $\quad\therefore y=-2x+\pi$

답 $y=-2x+\pi$

**03** (전략) 두 곡선의 접점을 각각 $(s, e^s)$, $(t, \ln t)$로 놓고 두 접선이 모두 원점을 지남을 이용하여 $s$, $t$의 값을 구한다.

(풀이) $f(x)=e^x$, $g(x)=\ln x$로 놓으면

$$f'(x)=e^x,\ g'(x)=\frac{1}{x}$$

곡선 $y=f(x)$ 위의 접점의 좌표를 $(s,\ e^s)$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$$f'(s)=e^s \qquad \cdots\cdots ㉠$$

이므로 접선의 방정식은

$$y-e^s=e^s(x-s)$$

이 직선이 원점을 지나므로

$$0-e^s=e^s(0-s), \qquad e^s(1-s)=0$$

$$\therefore s=1\ (\because e^s>0)$$

㉠에서 $f'(1)=e$이므로 $\quad m=e$

또 곡선 $y=g(x)$ 위의 접점의 좌표를 $(t,\ \ln t)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$$g'(t)=\frac{1}{t} \qquad \cdots\cdots ㉡$$

이므로 접선의 방정식은

$$y-\ln t=\frac{1}{t}(x-t)$$

이 직선이 원점을 지나므로

$$0-\ln t=\frac{1}{t}(0-t), \qquad \ln t=1$$

$$\therefore t=e$$

㉡에서 $g'(e)=\frac{1}{e}$이므로 $\quad n=\frac{1}{e}$

$$\therefore mn=1$$

답 1

**04** (전략) 접점의 좌표를 $\left(t,\ \frac{1}{1+t^2}\right)$로 놓은 후 접선의 방정식을 구한다.

(풀이) $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$로 놓으면

$$f'(x)=\frac{-2x}{(1+x^2)^2}$$

접점의 좌표를 $\left(t,\ \frac{1}{1+t^2}\right)$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$$f'(t)=\frac{-2t}{(1+t^2)^2}$$

이므로 접선의 방정식은

$$y-\frac{1}{1+t^2}=\frac{-2t}{(1+t^2)^2}(x-t) \qquad \cdots ❶$$

이 직선이 점 $(a,\ 0)$을 지나므로

$$0-\frac{1}{1+t^2}=\frac{-2t}{(1+t^2)^2}(a-t)$$

$$\therefore 3t^2-2at+1=0 \qquad \cdots\cdots ㉠ \quad \cdots ❷$$

점 $(a,\ 0)$에서 곡선 $y=\frac{1}{1+x^2}$에 서로 다른 두 개의 접선을 그을 수 있으려면 방정식 ㉠이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 이차방정식 ㉠의 판별식을 $D$라 하면

$$\frac{D}{4}=a^2-3>0, \qquad (a+\sqrt{3})(a-\sqrt{3})>0$$

$$\therefore a<-\sqrt{3} \text{ 또는 } a>\sqrt{3} \qquad \cdots ❸$$

답 $a<-\sqrt{3}$ 또는 $a>\sqrt{3}$

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ❶ 점$\left(t,\ \frac{1}{1+t^2}\right)$에서의 접선의 방정식을 구할 수 있다. | 50 % |
| ❷ $t$에 대한 이차방정식을 세울 수 있다. | 20 % |
| ❸ $a$의 값의 범위를 구할 수 있다. | 30 % |

**05** (전략) 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 $x=a$인 점에서 공통인 접선을 가지면 $f(a)=g(a)$, $f'(a)=g'(a)$이다.

(풀이) $f(x)=\frac{a}{x+1}$, $g(x)=b(x+1)^2+e^x$에서

$$f'(x)=-\frac{a}{(x+1)^2},\ g'(x)=2b(x+1)+e^x$$

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 $x=0$인 점에서 접하므로

$f(0)=g(0)$에서 $\quad a=b+1 \qquad \cdots\cdots ㉠$

$f'(0)=g'(0)$에서 $\quad -a=2b+1 \qquad \cdots\cdots ㉡$

㉠+㉡을 하면

$$3b+2=0 \qquad \therefore b=-\frac{2}{3}$$

$b=-\frac{2}{3}$를 ㉠에 대입하면 $\quad a=\frac{1}{3}$

$$\therefore b-a=-1$$

답 $-1$

**06** (전략) $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$를 구한 후 $\frac{dy}{dx}$를 구한다.

(풀이) $x=t^2-t+2$에서 $\quad \frac{dx}{dt}=2t-1$

$y=2t^3+at$에서 $\quad \frac{dy}{dt}=6t^2+a$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{6t^2+a}{2t-1}\ \left(t\neq\frac{1}{2}\right)$$

$t=1$에 대응하는 점에서의 접선의 기울기는

$$\frac{dy}{dx}=\frac{6+a}{2-1}=6+a$$

즉 $6+a=3$이므로

$$a=-3$$

답 $-3$

**07** 전략 점 (1, 1)에서의 접선의 기울기는 $x=1$일 때의 $\frac{dy}{dx}$의 값임을 이용한다.

풀이 $x^2+axy+by^2=4$의 각 항을 $x$에 대하여 미분하면

$$2x+ay+ax\frac{dy}{dx}+2by\frac{dy}{dx}=0$$

$$(ax+2by)\frac{dy}{dx}=-2x-ay$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=-\frac{2x+ay}{ax+2by}\ (ax+2by\neq0) \quad \cdots ❶$$

점 (1, 1)에서의 접선의 기울기는

$$-\frac{2+a}{a+2b}$$

즉 $-\frac{2+a}{a+2b}=-\frac{3}{5}$이므로

$$10+5a=3a+6b$$

$$\therefore a-3b=-5 \quad \cdots\cdots ㉠$$

또 점 (1, 1)은 주어진 곡선 위의 점이므로

$$1+a+b=4$$

$$\therefore a+b=3 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1,\ b=2$ ··· ❷

$$\therefore a-b=-1 \quad \cdots ❸$$

답 $-1$

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ❶ $\frac{dy}{dx}$를 구할 수 있다. | 50 % |
| ❷ $a$, $b$의 값을 구할 수 있다. | 40 % |
| ❸ $a-b$의 값을 구할 수 있다. | 10 % |

**08** 전략 미분가능한 함수 $f(x)$가 구간 $(0, \infty)$에서 증가하려면 $x>0$에서 $f'(x)\ge0$이어야 한다.

풀이 $f(x)=a\ln x+x^2-4x\ (x>0)$로 놓으면

$$f'(x)=\frac{a}{x}+2x-4=\frac{2x^2-4x+a}{x}$$

함수 $f(x)$가 구간 $(0, \infty)$에서 증가하려면 $x>0$에서 $f'(x)\ge0$, 즉

$$2x^2-4x+a\ge0$$

이어야 한다.

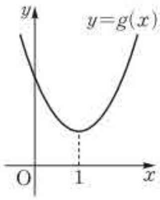
$g(x)=2x^2-4x+a$로 놓으면

$$g(x)=2(x-1)^2+a-2$$

이므로 $x>0$에서 $g(x)\ge0$이려면

$$g(1)\ge0,\ 즉\ a-2\ge0$$

$$\therefore a\ge2$$




답 ③

**09** 전략 무리함수의 도함수를 구하고, $x\ge-3$에서 $f'(x)=0$인 $x$의 값을 찾아 증감표를 만든다.

풀이 $f(x)=(x-3)\sqrt{x+3}$에서 $x+3\ge0$이므로 $x\ge-3$이고,

$$f'(x)=\sqrt{x+3}+(x-3)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x+3}}$$

$$=\frac{2(x+3)+x-3}{2\sqrt{x+3}}=\frac{3x+3}{2\sqrt{x+3}} \quad \cdots ❶$$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ ··· ❷

함수 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

| $x$ | $-3$ | $\cdots$ | $-1$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | 0 | $+$ |
| $f(x)$ | 0 | ↘ | 극소 | ↗ |

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극솟값 $f(-1)=-4\sqrt{2}$를 갖는다. ··· ❸

답 극솟값: $-4\sqrt{2}$

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ❶ $f'(x)$를 구할 수 있다. | 50 % |
| ❷ $f'(x)=0$을 만족시키는 $x$의 값을 구할 수 있다. | 10 % |
| ❸ 극값을 구할 수 있다. | 40 % |

**10** 전략 지수함수의 도함수를 구하고, $f'(x)=0$인 $x$의 값을 찾아 증감표를 만든다.

풀이 $f(x)=e^{-x}-\frac{1}{2}e^{-2x+1}$에서

$$f'(x)=-e^{-x}+e^{-2x+1}=-e^{-x}(1-e^{-x+1})$$

$f'(x)=0$에서 $e^{-x+1}=1\ (\because e^{-x}>0)$

$$\therefore x=1$$

함수 $f(x)$의 증감표는 오른쪽과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | 1 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | 0 | $-$ |
| $f(x)$ | ↗ | 극대 | ↘ |

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극댓값 $f(1)=\frac{1}{2e}$을 갖는다.

즉 $a=1,\ b=\frac{1}{2e}$이므로 $ab=\frac{1}{2e}$

답 $\frac{1}{2e}$

다른 풀이 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극댓값 $b$를 가지므로

$$f(a)=b,\ f'(a)=0$$

$$e^{-a}-\frac{1}{2}e^{-2a+1}=b \quad \cdots\cdots ㉠$$

$$-e^{-a}(1-e^{-a+1})=0 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉡에서 $1-e^{-a+1}=0\ (\because e^{-a}>0)$

$$-a+1=0 \qquad \therefore a=1$$

$a=1$을 ㉠에 대입하면

$$b=e^{-1}-\frac{1}{2}e^{-1}=\frac{1}{e}-\frac{1}{2e}=\frac{1}{2e}$$

$$\therefore ab=\frac{1}{2e}$$

**11** 전략 함수의 몫의 미분법을 이용하여 $f'(x)=0$인 $x$의 값을 찾아 증감표를 만든다. 이때 주어진 $x$의 값의 범위에 주의한다.

풀이 $f(x)=\dfrac{\sin x}{e^x}$에서

$$f'(x)=\frac{\cos x\cdot e^x-\sin x\cdot e^x}{e^{2x}}=\frac{e^x(\cos x-\sin x)}{e^{2x}}=\frac{\cos x-\sin x}{e^x}$$

$f'(x)=0$에서 $\cos x-\sin x=0$

$\therefore x=\dfrac{\pi}{4}$ 또는 $x=\dfrac{5}{4}\pi$ ($\because 0\le x\le 2\pi$)

함수 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

| $x$ | 0 | $\cdots$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\cdots$ | $\frac{5}{4}\pi$ | $\cdots$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | 0 | − | 0 | + | |
| $f(x)$ | 0 | ↗ | 극대 | ↘ | 극소 | ↗ | 0 |

따라서 $f(x)$의 극댓값 $A$와 극솟값 $B$는

$$A=f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sin\frac{\pi}{4}}{e^{\frac{\pi}{4}}}=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}}$$

$$B=f\left(\frac{5}{4}\pi\right)=\frac{\sin\frac{5}{4}\pi}{e^{\frac{5}{4}\pi}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{5}{4}\pi}$$

$$\therefore \frac{A}{B}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{5}{4}\pi}}=-e^{\pi}$$

답 ②

**12** 전략 함수의 몫의 미분법을 이용하여 $f'(x)$를 구하고, $f(1)=5$, $f'(1)=0$을 만족시키는 함수 $f(x)$를 구한다.

풀이 $f(x)=\dfrac{4x^2+ax+b}{x^2+1}$에서

$$f'(x)=\frac{(8x+a)(x^2+1)-(4x^2+ax+b)\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{-ax^2-2(b-4)x+a}{(x^2+1)^2}$$

$f(x)$가 $x=1$에서 극댓값 5를 가지므로

$f(1)=5$, $f'(1)=0$

$$\frac{4+a+b}{2}=5,\ \frac{b-4}{2}=0$$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=4$

$\therefore a-b=-2$

답 $-2$

**13** 전략 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a,\ f(a))$에서의 접선에 수직인 직선의 기울기는 $-\dfrac{1}{f'(a)}$임을 이용한다.

풀이 $f(x)=\cos 2x+1$로 놓으면

$f'(x)=-2\sin 2x$

점 $\mathrm{P}(t,\ \cos 2t+1)$에서의 접선의 기울기는

$f'(t)=-2\sin 2t$

따라서 점 P에서의 접선에 수직인 직선의 기울기는

$\dfrac{1}{2\sin 2t}$이므로 접선에 수직인 직선의 방정식은

$$y-(\cos 2t+1)=\frac{1}{2\sin 2t}(x-t)$$

$y$절편은 $x=0$일 때의 $y$의 값이므로

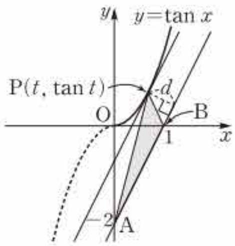
$$g(t)=\cos 2t+1-\frac{t}{2\sin 2t}$$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{t\to 0}g(t)&=\lim_{t\to 0}\left(\cos 2t+1-\frac{t}{2\sin 2t}\right)\\&=\lim_{t\to 0}(\cos 2t+1)-\lim_{t\to 0}\frac{t}{2\sin 2t}\\&=\lim_{t\to 0}(\cos 2t+1)-\frac{1}{4}\lim_{t\to 0}\frac{2t}{\sin 2t}\\&=2-\frac{1}{4}=\frac{7}{4}\end{aligned}$$

답 ③

**14** 전략 직선 AB와 점 P 사이의 거리가 최소일 때 삼각형 PAB의 넓이가 최소가 됨을 이용한다.

풀이 삼각형 PAB의 넓이는 오른쪽 그림과 같이 선분 AB를 밑변으로 하였을 때의 높이, 즉 곡선 $y=\tan x$ 위의 점 P와 직선 AB 사이의 거리가 최소일 때 최소가 되므로 점 P는 직선 AB에 평행한 직선과 곡선 $y=\tan x$의 접점이어야 한다.




이때 직선 AB의 방정식은

$$y-0=\frac{0-(-2)}{1-0}(x-1)\qquad \therefore y=2x-2$$

$f(x)=\tan x$로 놓으면 $f'(x)=\sec^2 x$

점 P의 좌표를 $(t,\ \tan t)$라 하면 점 P에서의 접선의 기울기가 2이어야 하므로

$f'(t)=\sec^2 t=2$

$\frac{1}{\cos^2 t}=2,\quad \cos t=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore t=\frac{\pi}{4}\left(\because 0<t<\frac{\pi}{2}\right)$

점 P의 좌표가 $\left(\frac{\pi}{4},\ 1\right)$일 때 점 P와 직선 $y=2x-2$, 즉 $2x-y-2=0$ 사이의 거리를 $d$라 하면

$$d=\frac{\left|2\cdot\frac{\pi}{4}-1-2\right|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{\left|\frac{\pi}{2}-3\right|}{\sqrt{5}}=\frac{3-\frac{\pi}{2}}{\sqrt{5}}$$

따라서 삼각형 PAB의 넓이의 최솟값은

$$\frac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot d=\frac{1}{2}\sqrt{1^2+2^2}\cdot\frac{3-\frac{\pi}{2}}{\sqrt{5}}=\frac{6-\pi}{4}$$

답 $\frac{6-\pi}{4}$

**15** 전략 접점의 좌표를 $(t,\ (t-k)e^{-t})$으로 놓고 접선의 방정식을 구한 후, 이 접선의 방정식에 $x=0,\ y=0$을 대입하여 얻은 방정식의 해가 1개일 때의 $k$의 값을 구한다.

풀이 $f(x)=(x-k)e^{-x}$으로 놓으면

$f'(x)=e^{-x}-(x-k)e^{-x}=e^{-x}(1-x+k)$

접점의 좌표를 $(t,\ (t-k)e^{-t})$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$f'(t)=e^{-t}(1-t+k)$

따라서 접선의 방정식은

$y-(t-k)e^{-t}=e^{-t}(1-t+k)(x-t)$

이 직선이 원점을 지나므로

$-(t-k)e^{-t}=e^{-t}(1-t+k)(-t)$

$(t^2-kt-k)e^{-t}=0$

$\therefore t^2-kt-k=0\ (\because e^{-t}>0)$ …… ㉠

이때 원점에서 주어진 곡선에 단 하나의 접선을 그을 수 있으려면 방정식 ㉠이 중근을 가져야 하므로 이차방정식 ㉠의 판별식을 $D$라 하면

$D=k^2+4k=0,\quad k(k+4)=0$

그런데 $k\neq0$이므로 $\quad k=-4$

답 $-4$

**16** 전략 음함수의 미분법을 이용하여 $\frac{dy}{dx}$를 구한다.

풀이 $e^x-e^y=e^2-1$의 각 항을 $x$에 대하여 미분하면

$e^x-e^y\frac{dy}{dx}=0\quad \therefore \frac{dy}{dx}=\frac{e^x}{e^y}$

점 $(2,\ 0)$에서의 접선의 기울기는

$\frac{dy}{dx}=e^2$

이므로 접선의 방정식은

$y=e^2(x-2)\quad \therefore e^2x-y-2e^2=0$

따라서 직선 $e^2x-y-2e^2=0$과 원점 사이의 거리 $d$는

$$d=\frac{|-2e^2|}{\sqrt{(e^2)^2+(-1)^2}}=\frac{2e^2}{\sqrt{e^4+1}}$$

$\therefore d^2=\frac{4e^4}{e^4+1}$

답 $\frac{4e^4}{e^4+1}$

**17** 전략 함수 $f(x)$의 역함수 $g(x)$에 대하여 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(a,\ g(a))$에서의 접선의 방정식은 $y-g(a)=\frac{1}{f'(g(a))}(x-a)$이다.

풀이 $g(1)=k$라 하면 $f(k)=1$이므로

$(k+1)^{\frac{3}{2}}=1,\quad k+1=1\quad \therefore k=0$

$\therefore g(1)=0$

$\therefore g'(1)=\frac{1}{f'(0)}$

이때 $f'(x)=\frac{3}{2}\sqrt{x+1}$이므로 $\quad f'(0)=\frac{3}{2}$

$\therefore g'(1)=\frac{2}{3}$

따라서 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(1,\ 0)$에서의 접선의 방정식은

$y-0=\frac{2}{3}(x-1)$, 즉 $y=\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}$

답 $y=\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}$

**18** 전략 $a>1$임을 이용하여 주어진 범위에서 $f'(x)=0$인 $x$의 값을 구한다.

풀이 $f(x)=x+a\cos x$에서

$f'(x)=1-a\sin x$

$=-a\left(\sin x-\frac{1}{a}\right)$

$f'(x)=0$에서 $\quad \sin x=\frac{1}{a}\ (\because a>1)$

또 $a>1$에서 $0<\frac{1}{a}<1$이므로

$\sin\theta=\frac{1}{a}\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$

이라 하면

$\sin(\pi-\theta)=\sin\theta=\frac{1}{a}$

$\therefore f'(\theta)=f'(\pi-\theta)=0$

함수 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

| $x$ | 0 | $\cdots$ | $\theta$ | $\cdots$ | $\pi-\theta$ | $\cdots$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | 0 | − | 0 | + | |
| $f(x)$ | | ↗ | 극대 | ↘ | 극소 | ↗ | |

이때 $f(x)$는 $x=\pi-\theta$에서 극솟값 0을 가지므로

$$f(\pi-\theta)=\pi-\theta+a\cos(\pi-\theta)$$
$$=\pi-\theta-a\cos\theta=0$$
$$\therefore \theta+a\cos\theta=\pi$$

따라서 $f(x)$는 $x=\theta$에서 극댓값

$f(\theta)=\theta+a\cos\theta=\pi$를 갖는다. 답 ②

**19** 전략 $f'(x)=0$인 $x$의 값의 규칙을 찾는다.

풀이 $f(x)=e^x\cos x$에서

$$f'(x)=e^x\cos x+e^x\cdot(-\sin x)$$
$$=e^x(\cos x-\sin x)$$

$f'(x)=0$에서 $\cos x-\sin x=0$ $(\because e^x>0)$

$$\therefore x=\frac{\pi}{4} \text{ 또는 } x=\pi+\frac{\pi}{4} \text{ 또는 } x=2\pi+\frac{\pi}{4} \cdots$$

함수 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

| $x$ | 0 | $\cdots$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\cdots$ | $\pi+\frac{\pi}{4}$ | $\cdots$ | $2\pi+\frac{\pi}{4}$ | $\cdots$ | $3\pi+\frac{\pi}{4}$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | 0 | − | 0 | + | 0 | − | 0 | + |
| $f(x)$ | | ↗ | 극대 | ↘ | 극소 | ↗ | 극대 | ↘ | 극소 | ↗ |

위의 증감표에서 $f(x)$가 극대인 $x$의 값을 작은 것부터 차례대로 나열하면

$$x_1=\frac{\pi}{4},\ x_2=2\pi+\frac{\pi}{4},\ x_3=4\pi+\frac{\pi}{4},\ \cdots$$
$$\therefore x_k=2(k-1)\pi+\frac{\pi}{4} \ (k\text{는 자연수})$$
$$\therefore \frac{x_{10}}{x_9}=\frac{\frac{73}{4}\pi}{\frac{65}{4}\pi}=\frac{73}{65}$$

따라서 $m=65$, $n=73$이므로

$m+n=138$ 답 ④

**20** 전략 $f'(x)$를 구한 후 방정식 $f'(x)=0$이 $x>0$에서 서로 다른 두 실근을 가질 조건을 생각한다.

풀이 $f(x)=8\ln x+\frac{a}{x}-2x$에서 $x>0$이고,

$$f'(x)=\frac{8}{x}-\frac{a}{x^2}-2=\frac{-2x^2+8x-a}{x^2}$$
$$=-\frac{2x^2-8x+a}{x^2}$$

이므로 $f(x)$가 $x>0$에서 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 방정식 $2x^2-8x+a=0$이 서로 다른 두 양의 실근을 가져야 한다. ··· ❶

(i) 이차방정식 $2x^2-8x+a=0$의 판별식을 $D$라 하면

$$\frac{D}{4}=16-2a>0 \qquad \therefore a<8$$

(ii) (두 근의 합)$=4>0$

(iii) (두 근의 곱)$=\frac{a}{2}>0$ $\qquad\therefore a>0$

이상에서 $0<a<8$ ··· ❷

따라서 정수 $a$의 최댓값은 7, 최솟값은 1이므로 구하는 값은

$7+1=8$ ··· ❸

답 8

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ❶ $f(x)$가 $x>0$에서 극댓값과 극솟값을 모두 가질 조건을 알 수 있다. | 40 % |
| ❷ $a$의 값의 범위를 구할 수 있다. | 50 % |
| ❸ 정수 $a$의 최댓값과 최솟값의 합을 구할 수 있다. | 10 % |

**21** 전략 곡선 $y=h(x)$ 위의 점 $(a, h(a))$에서의 접선에 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{h'(a)}$임을 이용한다.

풀이 $g(x)=f(x)\ln x^4$에서

$$g'(x)=f'(x)\ln x^4+f(x)\cdot\frac{4x^3}{x^4}$$
$$=f'(x)\ln x^4+f(x)\cdot\frac{4}{x}$$
$$\therefore g'(e)=4f'(e)+\frac{(-e)\cdot 4}{e}$$
$$=4f'(e)-4$$

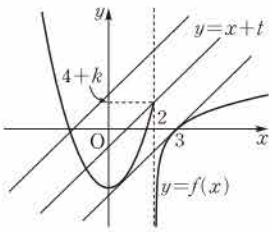
이때 $f'(e)\cdot g'(e)=-1$이므로

$$f'(e)\cdot\{4f'(e)-4\}=-1$$
$$\{2f'(e)-1\}^2=0$$
$$\therefore f'(e)=\frac{1}{2}$$
$$\therefore 100f'(e)=100\cdot\frac{1}{2}=50$$

답 50

**22** 전략 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형을 그린 후 주어진 조건을 만족시키는 함수 $g(t)$를 생각한다.

풀이 오른쪽 그림에서 직선 $y=x+t$가 점 $(2, 4+k)$를 지날 때 $t$의 값은




$$4+k=2+t$$
$$\therefore t=k+2$$

따라서 함수 $g(t)$가 $t=a$에서 불연속인 $a$의 값이 한 개이려면

$$g(t)=\begin{cases} 2 & (t\le k+2) \\ 1 & (t>k+2) \end{cases}$$

이어야 한다. 즉 직선 $y=x+t$가 두 곡선 $y=x^2+k\ (x\le2)$, $y=\ln(x-2)\ (x>2)$에 동시에 접해야 한다.

$y=\ln(x-2)$에서 $y'=\dfrac{1}{x-2}$이므로

$$\frac{1}{x-2}=1 \qquad \therefore x=3$$

따라서 곡선 $y=\ln(x-2)$와 직선 $y=x+t$의 접점의 좌표는 $(3,\ 0)$이므로 $\quad t=-3$

또 곡선 $y=x^2+k\ (x\le2)$와 직선 $y=x-3$이 접해야 하므로 $x^2+k=x-3$에서

$$x^2-x+k+3=0$$

이차방정식 $x^2-x+k+3=0$의 판별식을 $D$라 하면

$$D=(-1)^2-4(k+3)=0$$

$$-4k-11=0 \qquad \therefore k=-\frac{11}{4}$$

답 ④

**23** 전략 음함수의 미분법을 이용하여 $\dfrac{dy}{dx}$를 구한 후 접선의 방정식을 구한다.

풀이 $x^2+5xy-2y^2+11=0$의 각 항을 $x$에 대하여 미분하면

$$2x+5y+5x\frac{dy}{dx}-4y\frac{dy}{dx}=0$$

$$(5x-4y)\frac{dy}{dx}=-2x-5y$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{-2x-5y}{5x-4y}\ (5x-4y\ne0)$$

점 $(1,\ 4)$에서의 접선의 기울기는

$$\frac{(-2)\cdot1-5\cdot4}{5\cdot1-4\cdot4}=2$$

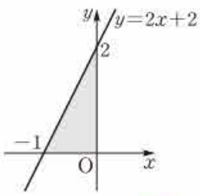
따라서 점 $(1,\ 4)$에서의 접선의 방정식은

$y-4=2(x-1)$,

즉 $y=2x+2$

따라서 오른쪽 그림에서 구하는 넓이는

$$\frac{1}{2}\times2\times|-1|=1$$




답 ①

**24** 전략 먼저 곡선 $y=\ln x$ 위의 두 점 $\mathrm{P}(t,\ \ln t)$, $\mathrm{Q}(2t,\ \ln 2t)$에서의 접선의 방정식을 각각 구한다.

풀이 $y=\ln x$에서 $\qquad y'=\dfrac{1}{x}$

점 $\mathrm{P}(t,\ \ln t)$에서의 접선의 방정식은

$$y-\ln t=\frac{1}{t}(x-t),\ \text{즉 } y=\frac{1}{t}x-1+\ln t$$

이때 $r(t)$는 이 접선의 $x$절편이므로 $\dfrac{1}{t}x-1+\ln t=0$에서

$$\frac{1}{t}x=1-\ln t \qquad \therefore x=t-t\ln t$$

$$\therefore r(t)=t-t\ln t$$

또 점 $\mathrm{Q}(2t,\ \ln 2t)$에서의 접선의 방정식은

$$y-\ln 2t=\frac{1}{2t}(x-2t),\ \text{즉 } y=\frac{1}{2t}x-1+\ln 2t$$

이때 $s(t)$는 이 접선의 $x$절편이므로

$\dfrac{1}{2t}x-1+\ln 2t=0$에서

$$\frac{1}{2t}x=1-\ln 2t \qquad \therefore x=2t-2t\ln 2t$$

$$\therefore s(t)=2t-2t\ln 2t$$

한편

$$\begin{aligned} f(t)&=r(t)-s(t) \\ &=(t-t\ln t)-(2t-2t\ln 2t) \\ &=(2\ln2-1)t+t\ln t \end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned} f'(t)&=2\ln2-1+\ln t+1 \\ &=2\ln2+\ln t \end{aligned}$$

$f'(t)=0$에서 $\qquad t=\dfrac{1}{4}$

함수 $f(t)$의 증감표는 다음과 같다.

| $t$ | 0 | $\cdots$ | $\frac{1}{4}$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(t)$ | | $-$ | 0 | $+$ |
| $f(t)$ | | ↘ | 극소 | ↗ |

따라서 함수 $f(t)$의 극솟값은

$$f\left(\frac{1}{4}\right)=(2\ln2-1)\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\ln\frac{1}{4}=-\frac{1}{4}$$

답 ③

Ⅱ. 미분법

# 07 도함수의 활용 (2)

## 유제

본책 185~206쪽

**069-❶** (1) $f(x)=x^3-3x^2+3x+2$로 놓으면

$$f'(x)=3x^2-6x+3=3(x-1)^2$$

$$f''(x)=6x-6=6(x-1)$$

$f'(x)=0$에서 $x=1$

$f''(x)=0$에서 $x=1$

함수 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $+$ |
| $f''(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | ↗︎(위로 볼록) | $3$ | ↗︎(아래로 볼록) |

따라서 곡선 $y=f(x)$는 구간 $(-\infty,\ 1)$에서 $f''(x)<0$이므로 위로 볼록하고, 구간 $(1,\ \infty)$에서 $f''(x)>0$이므로 아래로 볼록하다.

또 이 곡선의 변곡점의 좌표는 $(1,\ 3)$이다.

(2) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$로 놓으면

$$f'(x)=\frac{-2x}{(x^2+1)^2}$$

$$f''(x)=\frac{-2(x^2+1)^2-(-2x)\cdot2(x^2+1)\cdot2x}{(x^2+1)^4}=\frac{-2(x^2+1)\{(x^2+1)-4x^2\}}{(x^2+1)^4}=\frac{-2(-3x^2+1)}{(x^2+1)^3}=\frac{2(3x^2-1)}{(x^2+1)^3}=\frac{2(\sqrt{3}x+1)(\sqrt{3}x-1)}{(x^2+1)^3}$$

$f'(x)=0$에서 $x=0$

$f''(x)=0$에서 $x=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 또는 $x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

함수 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $+$ | $+$ | $0$ | $-$ | $-$ | $-$ |
| $f''(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | ↗︎(아래로 볼록) | $\frac{3}{4}$ | ↗︎(위로 볼록) | $1$ | ↘︎(위로 볼록) | $\frac{3}{4}$ | ↘︎(아래로 볼록) |

따라서 곡선 $y=f(x)$는 구간 $\left(-\infty,\ -\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$ 또는 구간 $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3},\ \infty\right)$에서 $f''(x)>0$이므로 아래로 볼록하고, 구간 $\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3},\ \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$에서 $f''(x)<0$이므로 위로 볼록하다.

또 이 곡선의 변곡점의 좌표는 $\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3},\ \dfrac{3}{4}\right)$, $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3},\ \dfrac{3}{4}\right)$이다.

(3) $f(x)=xe^x$으로 놓으면

$$f'(x)=e^x+xe^x=(1+x)e^x$$

$$f''(x)=e^x+(1+x)e^x=(2+x)e^x$$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ ($\because e^x>0$)

$f''(x)=0$에서 $x=-2$ ($\because e^x>0$)

함수 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | $-2$ | $\cdots$ | $-1$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f''(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $f(x)$ | ↘︎(위로 볼록) | $-\frac{2}{e^2}$ | ↘︎(아래로 볼록) | $-\frac{1}{e}$ | ↗︎(아래로 볼록) |

따라서 곡선 $y=f(x)$는 구간 $(-\infty,\ -2)$에서 $f''(x)<0$이므로 위로 볼록하고, 구간 $(-2,\ \infty)$에서 $f''(x)>0$이므로 아래로 볼록하다.

또 이 곡선의 변곡점의 좌표는 $\left(-2,\ -\dfrac{2}{e^2}\right)$이다.

(4) $f(x)=x+\cos x$로 놓으면

$$f'(x)=1-\sin x$$

$$f''(x)=-\cos x$$

$f'(x)=0$에서 $x=\dfrac{\pi}{2}$ ($\because 0<x<2\pi$)

$f''(x)=0$에서

$x=\dfrac{\pi}{2}$ 또는 $x=\dfrac{3}{2}\pi$ ($\because 0<x<2\pi$)

함수 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

| $x$ | $0$ | $\cdots$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\cdots$ | $\frac{3}{2}\pi$ | $\cdots$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ | |
| $f''(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | | ↗︎(위로 볼록) | $\frac{\pi}{2}$ | ↗︎(아래로 볼록) | $\frac{3}{2}\pi$ | ↗︎(위로 볼록) | |

따라서 곡선 $y=f(x)$는 구간 $\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$ 또는 구간 $\left(\dfrac{3}{2}\pi,\ 2\pi\right)$에서 $f''(x)<0$이므로 위로 볼록하고,

구간 $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right)$에서 $f''(x)>0$이므로 아래로 볼록하다.

또 이 곡선의 변곡점의 좌표는 $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{3}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi\right)$이다.

답 풀이 참조

**070-❶** $f(x)=1+\frac{a}{x}+\frac{b}{x^2}$에서

$f'(x)=-\frac{a}{x^2}-\frac{2b}{x^3}$

$f''(x)=\frac{2a}{x^3}+\frac{6b}{x^4}$

점 $\left(-\frac{9}{2}, \frac{35}{27}\right)$가 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이므로

$f\left(-\frac{9}{2}\right)=\frac{35}{27}$에서 $\quad 1-\frac{2a}{9}+\frac{4b}{81}=\frac{35}{27}$

$\therefore -9a+2b=12$ …… ㉠

$f''\left(-\frac{9}{2}\right)=0$에서 $\quad 2a\cdot\left(-\frac{2}{9}\right)^3+6b\cdot\left(-\frac{2}{9}\right)^4=0$

$\therefore 3a-2b=0$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-2,\ b=-3$ 답 $a=-2,\ b=-3$

**070-❷** $f(x)=ax^2+bx+\ln x$에서 $x>0$이고

$f'(x)=2ax+b+\frac{1}{x}$

$f''(x)=2a-\frac{1}{x^2}$

$x=1$에서 극소이므로 $f'(1)=0$에서

$2a+b+1=0$ …… ㉠

변곡점의 $x$좌표가 $\frac{1}{2}$이므로 $f''\left(\frac{1}{2}\right)=0$에서

$2a-4=0 \quad \therefore a=2$

$a=2$를 ㉠에 대입하면 $\quad b=-5$

$f(x)=2x^2-5x+\ln x$이므로

$f'(x)=4x-5+\frac{1}{x}=\frac{4x^2-5x+1}{x}$

$=\frac{(4x-1)(x-1)}{x}$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=\frac{1}{4}$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

| $x$ | 0 | $\cdots$ | $\frac{1}{4}$ | $\cdots$ | 1 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | 0 | − | 0 | + |
| $f(x)$ | | ↗ | $-\frac{9}{8}-\ln 4$ | ↘ | $-3$ | ↗ |

따라서 $f(x)$의 극댓값은

$f\left(\frac{1}{4}\right)=-\frac{9}{8}-\ln 4$ 답 $-\frac{9}{8}-\ln 4$

**071-❶** (1) $f(x)=-x^3+3x^2-3x+1$에서

$f'(x)=-3x^2+6x-3=-3(x-1)^2$

$f''(x)=-6x+6=-6(x-1)$

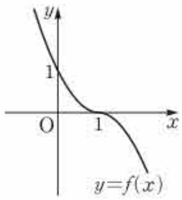
$f'(x)=0$에서 $\quad x=1$

$f''(x)=0$에서 $\quad x=1$

함수 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | 1 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | − | 0 | − |
| $f''(x)$ | + | 0 | − |
| $f(x)$ | ↘ | 0 | ↘ |

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.




(2) $f(x)=x^4-6x^2+6$에서

$f'(x)=4x^3-12x=4x(x^2-3)$

$=4x(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$

$f''(x)=12x^2-12=12(x^2-1)$

$=12(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서

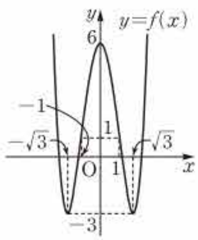
$x=0$ 또는 $x=-\sqrt{3}$ 또는 $x=\sqrt{3}$

$f''(x)=0$에서 $\quad x=-1$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | $-\sqrt{3}$ | $\cdots$ | $-1$ | $\cdots$ | 0 | $\cdots$ | 1 | $\cdots$ | $\sqrt{3}$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | − | 0 | + | + | + | 0 | − | − | − | 0 | + |
| $f''(x)$ | + | + | + | 0 | − | − | − | 0 | + | + | + |
| $f(x)$ | ↘ | $-3$ | ↗ | 1 | ↗ | 6 | ↘ | 1 | ↘ | $-3$ | ↗ |

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.




답 풀이 참조

**072-❶** (1) $f(x)=\frac{x^2+1}{2x}$에서

(i) 정의역은 $x\neq0$인 실수 전체의 집합이다.

(ii) $f(-x)=-f(x)$이므로 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

(iii) $f'(x)=\dfrac{2x\cdot 2x-(x^2+1)\cdot 2}{(2x)^2}=\dfrac{2x^2-2}{4x^2}$

$=\dfrac{x^2-1}{2x^2}=\dfrac{(x+1)(x-1)}{2x^2}$

$f''(x)=\dfrac{2x\cdot 2x^2-(x^2-1)\cdot 4x}{(2x^2)^2}=\dfrac{1}{x^3}$

$f'(x)=0$에서

$x=-1$ 또는 $x=1$

$f''(x)=0$을 만족시키는 $x$의 값이 존재하지 않으므로 변곡점은 없다.

따라서 함수 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | $-1$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f''(x)$ | $-$ | $-$ | $-$ | | $+$ | $+$ | $+$ |
| $f(x)$ | ↗ | $-1$ | ↘ | | ↘ | $1$ | ↗ |

(iv) $f(x)=\dfrac{x^2+1}{2x}=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2x}$에서

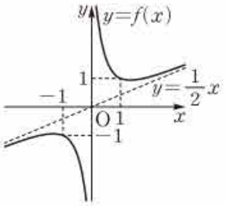
$\lim\limits_{x\to 0+}f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to 0-}f(x)=-\infty$,

$\lim\limits_{x\to\infty}\left\{f(x)-\dfrac{1}{2}x\right\}=0$,

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left\{f(x)-\dfrac{1}{2}x\right\}=0$

이므로 점근선은 $y$축과 직선 $y=\dfrac{1}{2}x$이다.

이상에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



(2) $f(x)=\sqrt{x}-x$에서

(i) 정의역은 $x\geq 0$인 실수 전체의 집합이다.

(ii) $f(0)=0$이므로 그래프는 원점을 지나고, $x$축과의 교점의 $x$좌표는 $\sqrt{x}-x=0$에서

$\sqrt{x}=x$, $\quad x=x^2$

$x-x^2=0$, $\quad x(1-x)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=1$

따라서 그래프는 두 점 $(0, 0)$, $(1, 0)$을 지난다.

(iii) $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}-1$, $f''(x)=-\dfrac{1}{4x\sqrt{x}}$

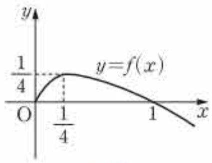
$f'(x)=0$에서 $\quad x=\dfrac{1}{4}$

$f''(x)=0$을 만족시키는 $x$의 값이 존재하지 않으므로 변곡점은 없다.

따라서 함수 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

| $x$ | $0$ | $\cdots$ | $\frac{1}{4}$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ |
| $f''(x)$ | | $-$ | $-$ | $-$ |
| $f(x)$ | $0$ | ↗ | $\frac{1}{4}$ | ↘ |

이상에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



답 풀이 참조

**073-❶** (1) $f(x)=e^{-x^2}$에서

(i) 정의역은 실수 전체의 집합이다.

(ii) $f(0)=1$이므로 점 $(0, 1)$을 지난다.

(iii) $f(-x)=f(x)$이므로 그래프는 $y$축에 대하여 대칭이다.

(iv) $f'(x)=-2xe^{-x^2}$

$f''(x)=-2e^{-x^2}-2xe^{-x^2}\cdot(-2x)$

$=2(2x^2-1)e^{-x^2}$

$=2(\sqrt{2}x+1)(\sqrt{2}x-1)e^{-x^2}$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=0$

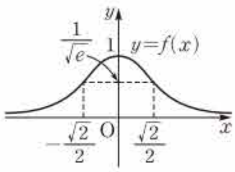
$f''(x)=0$에서 $\quad x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 또는 $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

함수 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $+$ | $+$ | $0$ | $-$ | $-$ | $-$ |
| $f''(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | ↗ | $\frac{1}{\sqrt{e}}$ | ↗ | $1$ | ↘ | $\frac{1}{\sqrt{e}}$ | ↘ |

(v) $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$이므로 점근선은 $x$축이다.

이상에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



(2) $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2-\ln x$에서

(i) 정의역은 $\{x\,|\,x>0\}$이다.

(ii) $f'(x)=x-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x^2-1}{x}$

$=\dfrac{(x+1)(x-1)}{x}$

$f''(x)=1+\dfrac{1}{x^2}>0$

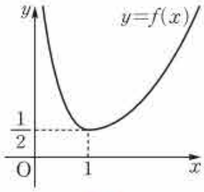
$f'(x)=0$에서　　$x=1$ ($\because x>0$)

함수 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

| $x$ | 0 | $\cdots$ | 1 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | 0 | $+$ |
| $f''(x)$ | | $+$ | $+$ | $+$ |
| $f(x)$ | | ↘ | $\dfrac{1}{2}$ | ↗ |

(iii) $\lim_{x\to0+} f(x)=\infty$이므로 점근선은 $y$축이다.

이상에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.




답 풀이 참조

**074-❶** (1) $f(x)=x+\cos 2x$에서

$f'(x)=1-2\sin 2x$

$f''(x)=-4\cos 2x$

$f'(x)=0$에서　　$\sin 2x=\dfrac{1}{2}$

$\therefore x=\dfrac{\pi}{12}$ 또는 $x=\dfrac{5}{12}\pi$ ($\because 0\le x\le\pi$)

$f''(x)=0$에서　　$\cos 2x=0$

$\therefore x=\dfrac{\pi}{4}$ 또는 $x=\dfrac{3}{4}\pi$ ($\because 0\le x\le\pi$)

함수 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

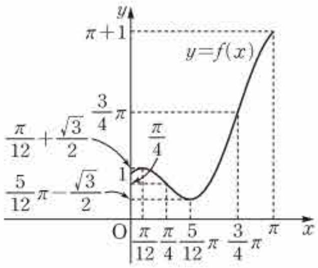
| $x$ | 0 | $\cdots$ | $\dfrac{\pi}{12}$ | $\cdots$ | $\dfrac{\pi}{4}$ | $\cdots$ | $\dfrac{5}{12}\pi$ | $\cdots$ | $\dfrac{3}{4}\pi$ | $\cdots$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | 0 | $-$ | $-$ | $-$ | 0 | $+$ | $+$ | $+$ | |
| $f''(x)$ | | $-$ | $-$ | $-$ | 0 | $+$ | $+$ | $+$ | 0 | $-$ | |
| $f(x)$ | 1 | ↗ | 극대 | ↘ | $\dfrac{\pi}{4}$ | ↘ | 극소 | ↗ | $\dfrac{3}{4}\pi$ | ↗ | $\pi+1$ |

따라서 함수 $f(x)$의 극댓값, 극솟값은 각각

$f\left(\dfrac{\pi}{12}\right)=\dfrac{\pi}{12}+\cos\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,

$f\left(\dfrac{5}{12}\pi\right)=\dfrac{5}{12}\pi+\cos\dfrac{5}{6}\pi=\dfrac{5}{12}\pi-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.




(2) $f(x)=\dfrac{\sin x}{1+\sin x}$에서

$f(0)=0$, $f(\pi)=0$

$f'(x)=\dfrac{\cos x(1+\sin x)-\sin x\cos x}{(1+\sin x)^2}$

$=\dfrac{\cos x}{(1+\sin x)^2}$

$f''(x)$

$=\dfrac{-\sin x(1+\sin x)^2-\cos x\cdot 2(1+\sin x)\cos x}{(1+\sin x)^4}$

$=\dfrac{-\sin x(1+\sin x)^2-2(1+\sin x)(1-\sin^2 x)}{(1+\sin x)^4}$

$=\dfrac{-\sin x(1+\sin x)^2-2(1+\sin x)^2(1-\sin x)}{(1+\sin x)^4}$

$=\dfrac{(1+\sin x)^2\{-\sin x-2(1-\sin x)\}}{(1+\sin x)^4}$

$=\dfrac{\sin x-2}{(1+\sin x)^2}<0$

$f'(x)=0$에서

$\cos x=0$　　$\therefore x=\dfrac{\pi}{2}$ $\left(\because -\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{3}{2}\pi\right)$

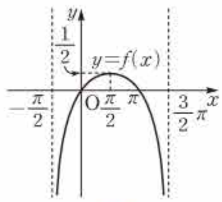
함수 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

| $x$ | $-\dfrac{\pi}{2}$ | $\cdots$ | $\dfrac{\pi}{2}$ | $\cdots$ | $\dfrac{3}{2}\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | 0 | $-$ | |
| $f''(x)$ | | $-$ | $-$ | $-$ | |
| $f(x)$ | | ↗ | $\dfrac{1}{2}$ | ↘ | |

또 $\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}+} f(x)=-\infty$, $\lim_{x\to\frac{3}{2}\pi-} f(x)=-\infty$이므로

점근선은 두 직선 $x=-\dfrac{\pi}{2}$, $x=\dfrac{3}{2}\pi$이다.

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.




답 풀이 참조

**Remark▶**

(2) $\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}+} f(x) = \lim_{x \to -\frac{\pi}{2}+} \frac{1+\sin x-1}{1+\sin x}$

$= \lim_{x \to -\frac{\pi}{2}+} \left(1-\frac{1}{1+\sin x}\right) = -\infty$

**075-❶** (1) $f(x)=\frac{1-x}{x^2+3}$에서

$$f'(x)=\frac{-(x^2+3)-(1-x)\cdot 2x}{(x^2+3)^2}$$
$$=\frac{x^2-2x-3}{(x^2+3)^2}=\frac{(x+1)(x-3)}{(x^2+3)^2}$$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=3\ (\because 0\le x\le 4)$

구간 $[0, 4]$에서 함수 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

| $x$ | 0 | $\cdots$ | 3 | $\cdots$ | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | 0 | $+$ | |
| $f(x)$ | $\frac{1}{3}$ | ↘ | $-\frac{1}{6}$ | ↗ | $-\frac{3}{19}$ |

따라서 함수 $f(x)$는

$x=0$일 때 최댓값 $\frac{1}{3}$,

$x=3$일 때 최솟값 $-\frac{1}{6}$

을 갖는다.

(2) $f(x)=x^3\sqrt{4-x^2}$에서

$$f'(x)=3x^2\sqrt{4-x^2}+x^3\cdot\frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}}$$
$$=\frac{3x^2(4-x^2)-x^4}{\sqrt{4-x^2}}=\frac{-4x^4+12x^2}{\sqrt{4-x^2}}$$
$$=\frac{-4x^2(x^2-3)}{\sqrt{4-x^2}}$$
$$=\frac{-4x^2(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})}{\sqrt{4-x^2}}$$

$f'(x)=0$에서

$x=0$ 또는 $x=-\sqrt{3}$ 또는 $x=\sqrt{3}$

구간 $[-2, 2]$에서 함수 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

| $x$ | $-2$ | $\cdots$ | $-\sqrt{3}$ | $\cdots$ | 0 | $\cdots$ | $\sqrt{3}$ | $\cdots$ | 2 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ | |
| $f(x)$ | 0 | ↘ | $-3\sqrt{3}$ | ↗ | 0 | ↗ | $3\sqrt{3}$ | ↘ | 0 |

따라서 함수 $f(x)$는

$x=\sqrt{3}$일 때 최댓값 $3\sqrt{3}$,

$x=-\sqrt{3}$일 때 최솟값 $-3\sqrt{3}$

을 갖는다.

답 풀이 참조

**076-❶** (1) $f(x)=\frac{e^x}{x^2}$에서

$$f'(x)=\frac{e^x\cdot x^2-e^x\cdot 2x}{x^4}=\frac{x(x-2)e^x}{x^4}$$
$$=\frac{(x-2)e^x}{x^3}$$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=2$

구간 $[1, 3]$에서 함수 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

| $x$ | 1 | $\cdots$ | 2 | $\cdots$ | 3 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | 0 | $+$ | |
| $f(x)$ | $e$ | ↘ | $\frac{e^2}{4}$ | ↗ | $\frac{e^3}{9}$ |

따라서 함수 $f(x)$는

$x=1$일 때 최댓값 $e$,

$x=2$일 때 최솟값 $\frac{e^2}{4}$

을 갖는다.

(2) $f(x)=\frac{(\ln x)^2}{x}$에서

$$f'(x)=\frac{2\ln x\cdot\frac{1}{x}\cdot x-(\ln x)^2\cdot 1}{x^2}$$
$$=\frac{2\ln x-(\ln x)^2}{x^2}=\frac{\ln x(2-\ln x)}{x^2}$$

$f'(x)=0$에서 $\quad \ln x=0$ 또는 $\ln x=2$

$\therefore x=1$ 또는 $x=e^2$

구간 $\left[\frac{1}{e}, e^3\right]$에서 함수 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

| $x$ | $\frac{1}{e}$ | $\cdots$ | 1 | $\cdots$ | $e^2$ | $\cdots$ | $e^3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ | |
| $f(x)$ | $e$ | ↘ | 0 | ↗ | $\frac{4}{e^2}$ | ↘ | $\frac{9}{e^3}$ |

따라서 함수 $f(x)$는

$x=\frac{1}{e}$일 때 최댓값 $e$,

$x=1$일 때 최솟값 0

을 갖는다.

답 풀이 참조

**077-❶** (1) $f(x)=\sin 2x+2\cos x$에서

$$f'(x)=2\cos 2x-2\sin x$$
$$=2(1-2\sin^2 x)-2\sin x$$
$$=-4\sin^2 x-2\sin x+2$$
$$=-2(2\sin^2 x+\sin x-1)$$
$$=-2(2\sin x-1)(\sin x+1)$$

$f'(x)=0$에서 $0\le x\le\pi$일 때 $\sin x\ne-1$이므로

$\sin x=\frac{1}{2}$ $\quad\therefore x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{5}{6}\pi$

구간 $[0, \pi]$에서 함수 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

| $x$ | 0 | $\cdots$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\cdots$ | $\frac{5}{6}\pi$ | $\cdots$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | 0 | − | 0 | + | |
| $f(x)$ | 2 | ↗ | $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ | ↘ | $-\frac{3\sqrt{3}}{2}$ | ↗ | $-2$ |

따라서 함수 $f(x)$는

$x=\frac{\pi}{6}$일 때 최댓값 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$,

$x=\frac{5}{6}\pi$일 때 최솟값 $-\frac{3\sqrt{3}}{2}$

을 갖는다.

(2) $f(x)=\frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}$에서

$$f'(x)$$
$$=\frac{(\cos x+\sin x)(\sin x+\cos x)-(\sin x-\cos x)(\cos x-\sin x)}{(\sin x+\cos x)^2}$$
$$=\frac{2}{(\sin x+\cos x)^2}$$

이때 구간 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$에서 $f'(x)>0$이므로 $f(x)$는 이 구간에서 증가한다.

따라서 함수 $f(x)$는

$x=\frac{\pi}{2}$일 때 최댓값 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$,

$x=0$일 때 최솟값 $f(0)=-1$

을 갖는다.

답 풀이 참조

**078-❶** $\ln x=t$로 놓으면 $1\le x\le e^2$에서

$0\le t\le 2$

주어진 함수 $f(x)$를 $t$에 대한 함수 $g(t)$로 나타내면

$g(t)=t^3+3t^2-9t$

$\therefore g'(t)=3t^2+6t-9=3(t+3)(t-1)$

$g'(t)=0$에서

$t=1$ ($\because 0\le t\le 2$)

구간 $[0, 2]$에서 함수 $g(t)$의 증감표는 다음과 같다.

| $t$ | 0 | $\cdots$ | 1 | $\cdots$ | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(t)$ | | − | 0 | + | |
| $g(t)$ | 0 | ↘ | $-5$ | ↗ | 2 |

따라서 주어진 함수의 최댓값은 2, 최솟값은 $-5$이다.

답 최댓값: 2, 최솟값: $-5$

**078-❷** $f(x)=\sin^3 x+3\cos^2 x+2$

$=\sin^3 x+3(1-\sin^2 x)+2$

$=\sin^3 x-3\sin^2 x+5$

$\sin x=t$로 놓으면 $\quad -1\le t\le 1$

주어진 함수 $f(x)$를 $t$에 대한 함수 $g(t)$로 나타내면

$g(t)=t^3-3t^2+5$

$\therefore g'(t)=3t^2-6t=3t(t-2)$

$g'(t)=0$에서 $\quad t=0$ ($\because -1\le t\le 1$)

구간 $[-1, 1]$에서 함수 $g(t)$의 증감표는 다음과 같다.

| $t$ | $-1$ | $\cdots$ | 0 | $\cdots$ | 1 |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(t)$ | | + | 0 | − | |
| $g(t)$ | 1 | ↗ | 5 | ↘ | 3 |

따라서 주어진 함수의 최댓값은 5, 최솟값은 1이다.

답 최댓값: 5, 최솟값: 1

**079-❶** $f(x)=\frac{ax+b}{x^2+2}$에서

$$f'(x)=\frac{a(x^2+2)-(ax+b)\cdot 2x}{(x^2+2)^2}$$
$$=\frac{-ax^2-2bx+2a}{(x^2+2)^2}$$

이므로 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이며 미분가능하다.

한편 $f(x)$가 $x=1$에서 최댓값 2를 가지므로 $f(x)$는 $x=1$에서 극대이다. 즉

$f(1)=2$에서 $\quad \frac{a+b}{3}=2$

$\therefore a+b=6$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$f'(1)=0$에서 $\quad \frac{-a-2b+2a}{9}=0$

$\therefore a-2b=0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=4$, $b=2$

답 $a=4$, $b=2$

**079-❷** $f(x)=2a\sin x-ax$에서

$f'(x)=2a\cos x-a=a(2\cos x-1)$

$f'(x)=0$에서 $\quad \cos x=\frac{1}{2}$ ($\because a>0$)

$\therefore x=\frac{\pi}{3}$ ($\because 0\le x\le\pi$)

구간 $[0, \pi]$에서 함수 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

| $x$ | $0$ | $\cdots$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\cdots$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $0$ | $\nearrow$ | $a\left(\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}\right)$ | $\searrow$ | $-a\pi$ |

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\frac{\pi}{3}$에서 극대이고 최댓값을 가지므로 $\quad f\left(\frac{\pi}{3}\right)=a\left(\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}\right)=3\sqrt{3}-\pi$

$\therefore a=3$

즉 $f(x)$의 최솟값은 $\quad f(\pi)=-3\pi$ 답 $-3\pi$

**080-❶** 점 P의 좌표를 $(a, b)$ $(0<a<2,\ b>0)$라 하면 $\quad a^2+b^2=4$

$\therefore b=\sqrt{4-a^2}$ $(\because b>0)$

이때 □PROQ의 넓이를 $S(a)$라 하면

$S(a)=ab=a\sqrt{4-a^2}$

$$S'(a)=\sqrt{4-a^2}+a\cdot\frac{-2a}{2\sqrt{4-a^2}}$$
$$=\frac{(4-a^2)-a^2}{\sqrt{4-a^2}}=\frac{4-2a^2}{\sqrt{4-a^2}}$$
$$=\frac{-2(a+\sqrt{2})(a-\sqrt{2})}{\sqrt{4-a^2}}$$

$S'(a)=0$에서 $\quad a=\sqrt{2}$ $(\because 0<a<2)$

$0<a<2$에서 $S(a)$의 증감표는 다음과 같다.

| $a$ | $0$ | $\cdots$ | $\sqrt{2}$ | $\cdots$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $S'(a)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $S(a)$ | | $\nearrow$ | $2$ | $\searrow$ | |

따라서 $S(a)$는 $a=\sqrt{2}$일 때 극대이면서 최대이므로 □PROQ의 넓이의 최댓값은 2이다. 답 2

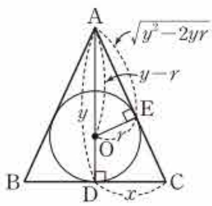
**다른 풀이** 점 P의 좌표를 $(a, b)$라 하면 □PROQ의 넓이는 $ab$이다.

또 $a^2+b^2=4$이고 $a>0$, $b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여 $\quad a^2+b^2\geq 2ab,\quad 2ab\leq 4$

$\therefore ab\leq 2$ (단, 등호는 $a=b$일 때 성립)

따라서 □PROQ의 넓이의 최댓값은 2이다.

**080-❷** 반지름의 길이가 $r$인 구에 외접하는 원뿔의 단면은 오른쪽 그림과 같다.




원뿔의 밑면의 반지름의 길이를 $x$, 높이를 $y$라 하면 $\triangle$ADC$\backsim\triangle$AEO이므로

$\overline{\mathrm{AD}}:\overline{\mathrm{AE}}=\overline{\mathrm{DC}}:\overline{\mathrm{EO}}$에서

$y:\sqrt{y^2-2yr}=x:r$

$\therefore x=\frac{yr}{\sqrt{y^2-2yr}}$

원뿔의 부피를 $V(y)$라 하면

$$V(y)=\frac{1}{3}\pi x^2 y$$
$$=\frac{1}{3}\pi\cdot\frac{y^2r^2}{y^2-2yr}\cdot y$$
$$=\frac{1}{3}\pi r^2\cdot\frac{y^2}{y-2r}$$
$$V'(y)=\frac{1}{3}\pi r^2\cdot\frac{2y(y-2r)-y^2}{(y-2r)^2}$$
$$=\frac{1}{3}\pi r^2\cdot\frac{y(y-4r)}{(y-2r)^2}$$

$V'(y)=0$에서

$y=4r$ $(\because y>2r)$

$y>2r$에서 $V(y)$의 증감표는 다음과 같다.

| $y$ | $2r$ | $\cdots$ | $4r$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|
| $V'(y)$ | | $-$ | $0$ | $+$ |
| $V(y)$ | | $\searrow$ | $\frac{8}{3}\pi r^3$ | $\nearrow$ |

따라서 $V(y)$는 $y=4r$일 때 극소이면서 최소이므로 원뿔의 부피의 최솟값은 $\frac{8}{3}\pi r^3$이다. 답 $\frac{8}{3}\pi r^3$

**081-❶** (1) $f(x)=e^x-4x$로 놓으면

$f'(x)=e^x-4$

$f'(x)=0$에서

$e^x-4=0 \qquad \therefore x=\ln 4$

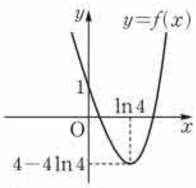
함수 $f(x)$의 증감표는 오른쪽과 같고

| $x$ | $\cdots$ | $\ln 4$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $\searrow$ | $4-4\ln 4$ | $\nearrow$ |

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\infty$

$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$

따라서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.




(2) 방정식 $x-\cos x=1$의 실근의 개수는 곡선 $y=x-\cos x$와 직선 $y=1$의 교점의 개수와 같다.

$f(x)=x-\cos x$로 놓으면

$f'(x)=1+\sin x$

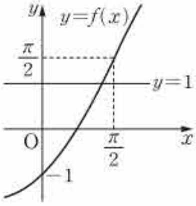
$f'(x)\geq 0$이므로 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가한다.

이때 $f(0)=-1$,

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$이므로 함수

$y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 1이다.




답 (1) 2 (2) 1

**다른 풀이** (1) $e^x-4x=0$에서 $e^x=4x$이므로 방정식 $e^x-4x=0$의 실근의 개수는 곡선 $y=e^x$과 직선 $y=4x$의 교점의 개수와 같다.

$y=e^x$에서 $y'=e^x$이므로 곡선 $y=e^x$ 위의 점 $(t,\ e^t)$에서의 접선의 방정식은

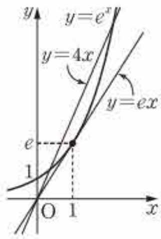
$$y-e^t=e^t(x-t)$$

이 접선이 원점을 지날 때

$$-e^t=e^t(-t) \qquad \therefore\ t=1$$

즉 원점을 지나는 접선의 방정식은 $y=ex$이고 $4>e$이므로 직선 $y=4x$는 곡선 $y=e^x$과 서로 다른 두 점에서 만난다.

따라서 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.




**081-❷** $\ln x-kx=0$에서 $x>0$이므로 $\quad k=\frac{\ln x}{x}$

$f(x)=\frac{\ln x}{x}$로 놓으면

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}$$

$f'(x)=0$에서 $\quad \ln x=1 \quad \therefore\ x=e$

함수 $f(x)$의 증감표는 오른쪽과 같고

$\lim_{x\to\infty} f(x)=0$

$\lim_{x\to 0+} f(x)=-\infty$

| $x$ | 0 | $\cdots$ | $e$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | 0 | $-$ |
| $f(x)$ | | ↗ | $\frac{1}{e}$ | ↘ |

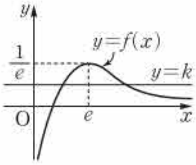
따라서 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같으므로 방정식 $\ln x-kx=0$, 즉 $f(x)=k$의 서로 다른 실근의 개수는

(i) $k>\frac{1}{e}$이면 $\quad$ 0

(ii) $k=\frac{1}{e}$이면 $\quad$ 1

(iii) $0<k<\frac{1}{e}$이면 $\quad$ 2

(iv) $k\le 0$이면 $\quad$ 1




답 풀이 참조

**다른 풀이** 방정식 $\ln x-kx=0$의 실근의 개수는 곡선 $y=\ln x$와 직선 $y=kx$의 교점의 개수와 같다.

$y=\ln x$에서 $y'=\frac{1}{x}$이므로 곡선 $y=\ln x$ 위의 점 $(t,\ \ln t)$에서의 접선의 방정식은

$$y-\ln t=\frac{1}{t}(x-t)$$

이 접선이 원점을 지날 때

$$-\ln t=-1 \qquad \therefore\ t=e$$

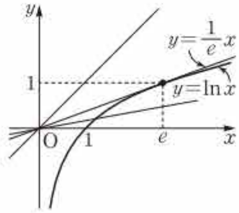
따라서 원점을 지나는 접선의 방정식은 $y=\frac{1}{e}x$이므로 다음 그림에서 방정식 $\ln x-kx=0$의 서로 다른 실근의 개수는

(i) $k>\frac{1}{e}$이면 $\quad$ 0

(ii) $k=\frac{1}{e}$이면 $\quad$ 1

(iii) $0<k<\frac{1}{e}$이면 $\quad$ 2

(iv) $k\le 0$이면 $\quad$ 1




**082-❶** $f(x)=x^2+\cos x-k$로 놓으면

$$f'(x)=2x-\sin x,\ f''(x)=2-\cos x$$

$x>0$일 때 $f''(x)>0$이므로 $x>0$에서 함수 $f'(x)$는 증가하고, $f'(0)=0$이므로 $\quad f'(x)>0$

또 $x>0$일 때 $f'(x)>0$이므로 $x>0$에서 함수 $f(x)$도 증가하고, $f(0)=1-k$이므로 $f(x)>0$이 성립하려면 $\quad 1-k\ge 0 \quad \therefore\ k\le 1$

답 $k\le 1$

**082-❷** $2\sqrt{x}\ge \ln x+k$에서 $\quad 2\sqrt{x}-\ln x\ge k$

$f(x)=2\sqrt{x}-\ln x$로 놓으면

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x}=\frac{\sqrt{x}-1}{x}$$

$f'(x)=0$에서 $\quad \sqrt{x}-1=0 \quad \therefore\ x=1$

함수 $f(x)$의 증감표는 오른쪽과 같고

$\lim_{x\to 0+} f(x)=\infty$

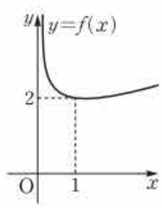
| $x$ | 0 | $\cdots$ | 1 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | 0 | $+$ |
| $f(x)$ | | ↘ | 2 | ↗ |

이므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 $f(x)$의 최솟값은 2이므로

$k\le 2$

즉 $k$의 최댓값은 2이다.




답 2

**083-❶** 점 P의 시각 $t$에서의 속도, 가속도를 각각 $v$, $a$라 하면

$$v=\frac{dx}{dt}=2kt-e^t,\ a=\frac{dv}{dt}=2k-e^t$$

$t=1$에서의 점 P의 속도는

$$v=2k-e$$

즉 $2k-e=e$이므로 $\quad k=e$

따라서 $t=\frac{1}{2}$에서의 점 P의 가속도는

$$a=2e-\sqrt{e}$$

답 $2e-\sqrt{e}$

**083-❷** 점 P의 시각 $t$에서의 속도, 가속도를 각각 $v$, $a$라 하면

$$v=\frac{dx}{dt}=\frac{\pi}{2}\cdot m\cos\frac{\pi}{2}t-\frac{\pi}{2}\cdot n\sin\frac{\pi}{2}t$$

$$a=\frac{dv}{dt}=-\frac{\pi^2}{4}\cdot m\sin\frac{\pi}{2}t-\frac{\pi^2}{4}\cdot n\cos\frac{\pi}{2}t$$

$t=1$에서의 점 P의 속도와 가속도는

$$v=\frac{\pi}{2}\cdot m\cos\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\cdot n\sin\frac{\pi}{2}=-\frac{n}{2}\pi$$

$$a=-\frac{\pi^2}{4}\cdot m\sin\frac{\pi}{2}-\frac{\pi^2}{4}\cdot n\cos\frac{\pi}{2}=-\frac{m}{4}\pi^2$$

따라서 $-\frac{n}{2}\pi=-\pi$, $-\frac{m}{4}\pi^2=\pi^2$이므로

$$m=-4,\ n=2$$

답 $m=-4$, $n=2$

**084-❶** $\frac{dx}{dt}=3$, $\frac{dy}{dt}=-4t+4$이므로 점 P의 속도는 $\quad(3,\ -4t+4)$

따라서 점 P의 속력은

$$\sqrt{3^2+(-4t+4)^2}=\sqrt{16(t-1)^2+9}$$

이므로 $t=1$일 때 속력이 최소이다.

$t=1$일 때 $x=3$, $y=-2+4=2$이므로 점 P의 위치는 $(3,\ 2)$이다.

답 $(3,\ 2)$

**084-❷** $\frac{dx}{dt}=2t$, $\frac{dy}{dt}=\frac{1}{t+1}$이므로 시각 $t$에서의 점 P의 속도는 $\quad\left(2t,\ \frac{1}{t+1}\right)$

따라서 $t=2$에서의 점 P의 속도는 $\quad\left(4,\ \frac{1}{3}\right)$

또 $\frac{d^2x}{dt^2}=2$, $\frac{d^2y}{dt^2}=-\frac{1}{(t+1)^2}$이므로 시각 $t$에서의 점 P의 가속도는 $\quad\left(2,\ -\frac{1}{(t+1)^2}\right)$

따라서 $t=2$에서의 점 P의 가속도는 $\quad\left(2,\ -\frac{1}{9}\right)$

답 속도: $\left(4,\ \frac{1}{3}\right)$, 가속도: $\left(2,\ -\frac{1}{9}\right)$

## 중단원 연습 문제

본책 207~210쪽

**01** 3 **02** $e$ **03** $\frac{27\sqrt{2}}{2}$

**04** $-\frac{27}{16}$ **05** 최댓값: $\frac{121}{27}$, 최솟값: $-2$

**06** $\frac{1}{e^2}$ **07** ① **08** $2-2\ln 2$ **09** ①

**10** 2 **11** ③ **12** 5 **13** ⑤

**14** 48만 원 **15** ③ **16** $\frac{4}{e^2}$ **17** 3

**18** ① **19** ④ **20** ⑤ **21** 40

**01** 전략 $f(x)=xe^{-x^2}$으로 놓고 $f''(x)=0$을 만족시키는 $x$의 값을 구한 후 그 값의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌는 점의 개수를 조사한다.

풀이 $f(x)=xe^{-x^2}$으로 놓으면

$$f'(x)=e^{-x^2}+xe^{-x^2}\cdot(-2x)=(1-2x^2)e^{-x^2}$$

$$\begin{aligned}f''(x)&=-4xe^{-x^2}+(1-2x^2)\cdot(-2x)e^{-x^2}\\&=(4x^3-6x)e^{-x^2}=2x(2x^2-3)e^{-x^2}\\&=2x(\sqrt{2}x+\sqrt{3})(\sqrt{2}x-\sqrt{3})e^{-x^2}\end{aligned}$$

$f''(x)=0$에서

$$x=0\ \text{또는}\ x=-\frac{\sqrt{6}}{2}\ \text{또는}\ x=\frac{\sqrt{6}}{2}$$

구간 $\left(-\infty,\ -\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$에서 $f''(x)<0$, 구간 $\left(-\frac{\sqrt{6}}{2},\ 0\right)$에서 $f''(x)>0$, 구간 $\left(0,\ \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$에서 $f''(x)<0$, 구간 $\left(\frac{\sqrt{6}}{2},\ \infty\right)$에서 $f''(x)>0$이다.

따라서 $x=-\frac{\sqrt{6}}{2}$, $x=0$, $x=\frac{\sqrt{6}}{2}$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 곡선 $y=f(x)$의 변곡점의 개수는 3이다.

답 3

**02** 전략 $f''(x)=0$을 만족시키는 $x$의 값을 구하여 그 값의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌는지 확인한다.

풀이 $f(x)=(\ln kx)^2$에서

$$f'(x)=2\ln kx\cdot\frac{k}{kx}=\frac{2\ln kx}{x}$$

$$f''(x)=\frac{\frac{2}{x}\cdot x-2\ln kx}{x^2}=\frac{2(1-\ln kx)}{x^2}$$

$f''(x)=0$에서 $\quad 1-\ln kx=0 \quad \therefore x=\frac{e}{k}$

구간 $\left(-\infty, \frac{e}{k}\right)$에서 $f''(x)>0$이고, 구간 $\left(\frac{e}{k}, \infty\right)$에서 $f''(x)<0$이다.

$x=\frac{e}{k}$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 변곡점의 좌표는 $\left(\frac{e}{k}, 1\right)$

이때 변곡점이 직선 $y=3x-2$ 위에 있으므로

$$1=\frac{3e}{k}-2 \qquad \therefore k=e$$

답 $e$

## 03

전략 $f(x)$의 정의역을 구한 후 $f'(x)$를 구하여 증감표를 만든다.

풀이 $f(x)=x\sqrt{9-x^2}$에서 $9-x^2\geq 0$이어야 하므로

$$(x+3)(x-3)\leq 0 \qquad \therefore -3\leq x\leq 3$$

즉 함수 $f(x)$의 정의역은 $\{x\,|\,-3\leq x\leq 3\}$이다. ➊

$$f'(x)=\sqrt{9-x^2}+x\cdot\frac{-2x}{2\sqrt{9-x^2}}$$
$$=\frac{(9-x^2)-x^2}{\sqrt{9-x^2}}=\frac{9-2x^2}{\sqrt{9-x^2}}$$
$$=\frac{-(\sqrt{2}x+3)(\sqrt{2}x-3)}{\sqrt{9-x^2}}$$ ➋

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-\frac{3\sqrt{2}}{2}$ 또는 $x=\frac{3\sqrt{2}}{2}$

$-3\leq x\leq 3$에서 함수 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

| $x$ | $-3$ | $\cdots$ | $-\frac{3\sqrt{2}}{2}$ | $\cdots$ | $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ | $\cdots$ | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $0$ | ↘ | $-\frac{9}{2}$ | ↗ | $\frac{9}{2}$ | ↘ | $0$ |

➌

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\frac{3\sqrt{2}}{2}$일 때 최댓값 $\frac{9}{2}$,

$x=-\frac{3\sqrt{2}}{2}$일 때 최솟값 $-\frac{9}{2}$를 가지므로

$$a=\frac{3\sqrt{2}}{2},\ b=\frac{9}{2},\ c=-\frac{3\sqrt{2}}{2},\ d=-\frac{9}{2}$$

$$\therefore ab+cd=\frac{3\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{9}{2}+\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)\left(-\frac{9}{2}\right)$$
$$=\frac{27\sqrt{2}}{2}$$ ➍

답 $\frac{27\sqrt{2}}{2}$

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ➊ $f(x)$의 정의역을 구할 수 있다. | 20 % |
| ➋ $f'(x)$를 구할 수 있다. | 30 % |
| ➌ 증감표를 만들 수 있다. | 30 % |
| ➍ $ab+cd$의 값을 구할 수 있다. | 20 % |

## 04

전략 증감표를 이용하여 함수 $f(x)$의 최댓값과 최솟값을 구한다.

풀이 $f(x)=\sin x(\cos x-1)$에서

$$f'(x)=\cos x(\cos x-1)+\sin x(-\sin x)$$
$$=\cos^2 x-\cos x-\sin^2 x$$
$$=2\cos^2 x-\cos x-1$$
$$=(2\cos x+1)(\cos x-1)$$ ➊

$f'(x)=0$에서 $\quad \cos x=-\frac{1}{2}$ 또는 $\cos x=1$

$\cos x=-\frac{1}{2}$에서

$$x=-\frac{2}{3}\pi \text{ 또는 } x=\frac{2}{3}\pi\ (\because -\pi\leq x\leq \pi)$$

$\cos x=1$에서 $\quad x=0\ (\because -\pi\leq x\leq\pi)$

구간 $[-\pi, \pi]$에서 함수 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

| $x$ | $-\pi$ | $\cdots$ | $-\frac{2}{3}\pi$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ | $\frac{2}{3}\pi$ | $\cdots$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $0$ | ↗ | $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ | ↘ | $0$ | ↘ | $-\frac{3\sqrt{3}}{4}$ | ↗ | $0$ |

➋

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-\frac{2}{3}\pi$일 때 최댓값 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$,

$x=\frac{2}{3}\pi$일 때 최솟값 $-\frac{3\sqrt{3}}{4}$을 가지므로

$$M=\frac{3\sqrt{3}}{4},\ m=-\frac{3\sqrt{3}}{4}$$

$$\therefore Mm=-\frac{27}{16}$$ ➌

답 $-\frac{27}{16}$

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ➊ $f'(x)$를 구할 수 있다. | 40 % |
| ➋ 증감표를 만들 수 있다. | 40 % |
| ➌ $Mm$의 값을 구할 수 있다. | 20 % |

## 05

전략 $f(x)$를 하나의 삼각함수에 대한 식으로 변형한 후 치환을 이용하여 $f(x)$의 최댓값과 최솟값을 구한다.

풀이 $f(x)=\sin^3 x+2\cos^2 x-4\sin x+1$

$$=\sin^3 x+2(1-\sin^2 x)-4\sin x+1$$
$$=\sin^3 x-2\sin^2 x-4\sin x+3$$

$\sin x=t$로 놓으면 $0\leq x\leq 2\pi$에서 $\quad -1\leq t\leq 1$

주어진 함수 $f(x)$를 $t$에 대한 함수 $g(t)$로 나타내면

$$g(t)=t^3-2t^2-4t+3$$

$\therefore g'(t)=3t^2-4t-4=(3t+2)(t-2)$

$g'(t)=0$에서 $\quad t=-\frac{2}{3}$ ($\because -1\le t\le 1$)

구간 $[-1, 1]$에서 함수 $g(t)$의 증감표는 다음과 같다.

| $t$ | $-1$ | $\cdots$ | $-\frac{2}{3}$ | $\cdots$ | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(t)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $g(t)$ | $4$ | $\nearrow$ | $\frac{121}{27}$ | $\searrow$ | $-2$ |

따라서 주어진 함수의 최댓값은 $\frac{121}{27}$, 최솟값은 $-2$ 이다.

답 최댓값: $\frac{121}{27}$, 최솟값: $-2$

**06** 전략 $f'(x)$를 구하여 증감표를 만든 후 함수 $f(x)$가 최솟값을 가질 때를 찾는다.

풀이 $f(x)=x+x\ln x+k$에서

$f'(x)=1+\ln x+x\cdot\frac{1}{x}=2+\ln x$ ···➊

$f'(x)=0$에서 $\quad \ln x=-2$

$\therefore x=\frac{1}{e^2}$

$x>0$에서 함수 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

| $x$ | $0$ | $\cdots$ | $\frac{1}{e^2}$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | | $\searrow$ | $-\frac{1}{e^2}+k$ | $\nearrow$ |

···➋

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\frac{1}{e^2}$에서 극소이고 최솟값을 가지므로

$f\left(\frac{1}{e^2}\right)=-\frac{1}{e^2}+k=0 \qquad \therefore k=\frac{1}{e^2}$ ···➌

답 $\frac{1}{e^2}$

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ➊ $f'(x)$를 구할 수 있다. | 40 % |
| ➋ 증감표를 만들 수 있다. | 40 % |
| ➌ $k$의 값을 구할 수 있다. | 20 % |

**07** 전략 방정식 $f(x)=0$의 실근의 개수는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 $x$축의 교점의 개수와 같다.

풀이 $f(x)=x-a\sin x-1$로 놓으면

$f'(x)=1-a\cos x$

$-1\le\cos x\le 1$, $0<a<1$이므로

$-a\le a\cos x\le a$

$\therefore 1-a\le 1-a\cos x\le 1+a$

이때 $0<a<1$에서 $1-a>0$이므로

$f'(x)=1-a\cos x>0$

따라서 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가하고, $f(0)=-1<0$이므로 방정식 $x-a\sin x-1=0$, 즉 $f(x)=0$의 실근의 개수는 1이다.

답 ①

**08** 전략 $f(x)=e^x-2x$로 놓고 $k$의 값이 $f(x)$의 최솟값보다 작거나 같아야 함을 이용한다.

풀이 $f(x)=e^x-2x$로 놓으면 $\quad f'(x)=e^x-2$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=\ln 2$

함수 $f(x)$의 증감표는 오른쪽과 같고, $f(x)$의 최솟값은 $2-2\ln 2$이므로

| $x$ | $\cdots$ | $\ln 2$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $\searrow$ | $2-2\ln 2$ | $\nearrow$ |

$k\le 2-2\ln 2$

따라서 $k$의 최댓값은 $2-2\ln 2$이다.

답 $2-2\ln 2$

**09** 전략 점 P의 시각 $t$에서의 위치 $x$가 $x=f(t)$이면 속도 $v$는 $v=\frac{dx}{dt}=f'(t)$임을 이용한다.

풀이 시각 $t$에서의 점 P의 속도를 $v$라 하면

$$v=\frac{dx}{dt}=2\cos 2t-2\sin 2t$$
$$=-2(\sin 2t-\cos 2t)$$
$$=-2\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin 2t-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos 2t\right)$$
$$=-2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\sin 2t-\sin\frac{\pi}{4}\cos 2t\right)$$
$$=-2\sqrt{2}\sin\left(2t-\frac{\pi}{4}\right)$$

$t=a$에서의 점 P의 속도가 $2\sqrt{2}$라 하면

$v=-2\sqrt{2}\sin\left(2a-\frac{\pi}{4}\right)=2\sqrt{2}$

$\therefore \sin\left(2a-\frac{\pi}{4}\right)=-1$ ······ ㉠

$0\le a\le\pi$에서 $-\frac{\pi}{4}\le 2a-\frac{\pi}{4}\le\frac{7}{4}\pi$이므로 ㉠에서

$2a-\frac{\pi}{4}=\frac{3}{2}\pi \qquad \therefore a=\frac{7}{8}\pi$

따라서 구하는 점 P의 위치는

$\sin\frac{7}{4}\pi+\cos\frac{7}{4}\pi=-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}=0$

답 ①

07 도함수의 활용 (2)

**다른 풀이** $x=\sin 2t+\cos 2t$

$$=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin 2t+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos 2t\right)$$

$$=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\sin 2t+\sin\frac{\pi}{4}\cos 2t\right)$$

$$=\sqrt{2}\sin\left(2t+\frac{\pi}{4}\right) \qquad \cdots\cdots ㉡$$

이므로 $\quad v=\dfrac{dx}{dt}=2\sqrt{2}\cos\left(2t+\dfrac{\pi}{4}\right)$

$v=2\sqrt{2}$에서 $\quad 2\sqrt{2}\cos\left(2t+\dfrac{\pi}{4}\right)=2\sqrt{2}$

$$\therefore \cos\left(2t+\frac{\pi}{4}\right)=1$$

$0\le t\le\pi$에서 $\dfrac{\pi}{4}\le 2t+\dfrac{\pi}{4}\le\dfrac{9}{4}\pi$이므로

$$2t+\frac{\pi}{4}=2\pi$$

따라서 구하는 점 P의 위치는 ㉡에서

$$\sqrt{2}\sin 2\pi=0$$

**Remark▶** **삼각함수의 합성**

① $a\sin\theta+b\cos\theta=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$

$\left(\text{단, } \cos\alpha=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \sin\alpha=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$

② $a\sin\theta+b\cos\theta=\sqrt{a^2+b^2}\cos(\theta-\beta)$

$\left(\text{단, } \cos\beta=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \sin\beta=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$

## 10

**전략** 점 $P(x, y)$의 시각 $t$에서의 속도는 $\left(\dfrac{dx}{dt}, \dfrac{dy}{dt}\right)$, 속력은 $\sqrt{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2}$임을 이용한다.

**풀이** $\dfrac{dx}{dt}=1-\dfrac{2a}{t^2}$, $\dfrac{dy}{dt}=2+\dfrac{a}{t^2}$이므로 시각 $t$에서의 점 P의 속도는

$$\left(1-\frac{2a}{t^2},\ 2+\frac{a}{t^2}\right)$$

따라서 $t=1$에서의 점 P의 속도는

$$(1-2a,\ 2+a)$$

이때 속력이 5이므로

$$\sqrt{(1-2a)^2+(2+a)^2}=5$$

$$\sqrt{5a^2+5}=5, \qquad 5a^2+5=25$$

$$a^2=4, \qquad a=\pm 2$$

$$\therefore a=2\ (\because a>0)$$

**답** 2

## 11

**전략** $f'(x)$, $f''(x)$를 구하고, 변곡점을 가질 조건을 생각한다.

**풀이** $f(x)=ax^2+\cos 2x-3x$에서

$$f'(x)=2ax-2\sin 2x-3$$

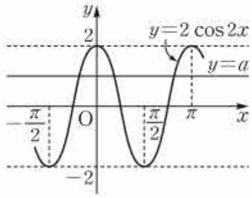
$$f''(x)=2a-4\cos 2x$$

주어진 곡선이 변곡점을 가지려면 방정식 $f''(x)=0$이 실근을 갖고, 실근의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌어야 한다.

$f''(x)=0$에서

$$2a-4\cos 2x=0 \qquad \therefore 2\cos 2x=a$$

이 방정식이 실근을 가지려면 곡선 $y=2\cos 2x$와 직선 $y=a$가 만나야 하므로 오른쪽 그림에서




$$-2\le a\le 2$$

이때 $a=-2$이면

$$f''(x)=-4(1+\cos 2x)\le 0$$

$a=2$이면

$$f''(x)=4(1-\cos 2x)\ge 0$$

즉 $f''(x)=0$을 만족시키는 $x$의 값의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌지 않으므로 변곡점이 존재하지 않는다.

$$\therefore 2<a<2$$

따라서 곡선 $f(x)$가 변곡점을 갖도록 하는 정수 $a$는 $-1$, 0, 1의 3개이다.

**답** ③

## 12

**전략** $2^x=t$로 치환하여 $f(x)$를 $t$에 대한 함수로 나타낸다.

**풀이** $2^x=t$로 놓으면 $-1\le x\le 1$에서

$$\frac{1}{2}\le t\le 2 \qquad \cdots ❶$$

$f(x)=-2^{3x}-3\cdot 2^{2x-1}+6\cdot 2^x$을 $t$에 대한 함수 $g(t)$로 나타내면

$$g(t)=-t^3-\frac{3}{2}t^2+6t$$

$$\therefore g'(t)=-3t^2-3t+6=-3(t+2)(t-1)$$

$g'(t)=0$에서 $\quad t=1\ \left(\because \dfrac{1}{2}\le t\le 2\right)$

구간 $\left[\dfrac{1}{2}, 2\right]$에서 함수 $g(t)$의 증감표는 다음과 같다.

| $t$ | $\frac{1}{2}$ | $\cdots$ | 1 | $\cdots$ | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(t)$ | | + | 0 | − | |
| $g(t)$ | $\frac{5}{2}$ | ↗ | $\frac{7}{2}$ | ↘ | −2 |

$\cdots$ ❷

따라서 주어진 함수의 최댓값은 $\dfrac{7}{2}$, 최솟값은 $-2$이므로 최댓값과 최솟값의 합은

$$\frac{7}{2}+(-2)=\frac{3}{2} \qquad \cdots ❸$$

즉 $p=2$, $q=3$이므로

$p+q=5$ ⋯ ❹

답 5

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ❶ $t$의 값의 범위를 구할 수 있다. | 10 % |
| ❷ 증감표를 만들 수 있다. | 50 % |
| ❸ 함수 $f(x)$의 최댓값과 최솟값의 합을 구할 수 있다. | 30 % |
| ❹ $p+q$의 값을 구할 수 있다. | 10 % |

**13** 전략 $y$축에 평행한 직선을 $x=t$로 놓고 $\overline{PQ}$의 길이를 $t$에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 $y$축에 평행한 직선을 $x=t$라 하면 두 점 P, Q의 좌표는 각각 $(t, e^t)$, $(t, t)$이므로 $\overline{PQ}=l(t)$라 하면

$l(t)=e^t-t \quad \therefore l'(t)=e^t-1$

$l'(t)=0$에서 $\quad e^t=1 \quad \therefore t=0$

따라서 함수 $l(t)$의 증감표는 오른쪽과 같고, 함수 $l(t)$는 $t=0$일 때 극소이면서 최소이다. 즉 $\overline{PQ}$의 길이의 최솟값은 1이다.

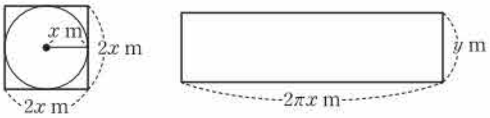
| $t$ | $\cdots$ | 0 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|
| $l'(t)$ | $-$ | 0 | $+$ |
| $l(t)$ | ↘ | 1 | ↗ |

답 ⑤

**14** 전략 물통의 밑면의 반지름의 길이를 $x$ m, 높이를 $y$ m라 하고 물통의 부피를 $x$, $y$를 이용하여 나타낸다.

풀이 원기둥 모양의 물통의 밑면의 반지름의 길이를 $x$ m, 높이를 $y$ m라 하면 물통의 부피는

$\pi x^2 y=32 \quad \therefore y=\dfrac{32}{\pi x^2}$ ⋯⋯ ㉠




[밑면] [옆면]

물통을 만드는 데 필요한 철판의 모양은 위의 그림과 같으므로 철판을 구입하는 데 드는 비용을 $f(x)$만 원이라 하면

$f(x)=(2x)^2+2\pi xy$

㉠을 위의 식에 대입하면

$f(x)=4x^2+2\pi x\cdot\dfrac{32}{\pi x^2}=4x^2+\dfrac{64}{x} \ (x>0)$

$\therefore f'(x)=8x-\dfrac{64}{x^2}=\dfrac{8(x-2)(x^2+2x+4)}{x^2}$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=2 \ (\because x^2+2x+4>0)$

$x>0$에서 함수 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

| $x$ | 0 | $\cdots$ | 2 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | 0 | $+$ |
| $f(x)$ | | ↘ | 48 | ↗ |

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$일 때 극소이면서 최소이고, 최솟값은 48이므로 구하는 최소 비용은 48만 원이다.

답 48만 원

**15** 전략 $y=\dfrac{2x}{x^2+1}$의 그래프가 직선 $y=k$와 만나도록 하는 $k$의 값의 범위를 구한다.

풀이 $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$로 놓으면

$$f'(x)=\frac{2(x^2+1)-2x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2}=\frac{-2(x+1)(x-1)}{(x^2+1)^2}$$

$$f''(x)=\frac{-4x(x^2+1)^2-(-2x^2+2)\cdot 2(x^2+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^4}=\frac{4x(x^2+1)(x^2-3)}{(x^2+1)^4}=\frac{4x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}=\frac{4x(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})}{(x^2+1)^3}$$

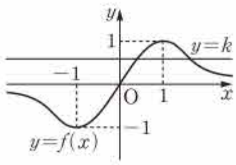
$f'(x)=0$에서 $\quad x=-1$ 또는 $x=1$

$f''(x)=0$에서 $\quad x=0$ 또는 $x=-\sqrt{3}$ 또는 $x=\sqrt{3}$

함수 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | $-\sqrt{3}$ | $\cdots$ | $-1$ | $\cdots$ | 0 | $\cdots$ | 1 | $\cdots$ | $\sqrt{3}$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $-$ | $-$ | 0 | $+$ | $+$ | $+$ | 0 | $-$ | $-$ | $-$ |
| $f''(x)$ | $-$ | 0 | $+$ | $+$ | $+$ | 0 | $-$ | $-$ | $-$ | 0 | $+$ |
| $f(x)$ | ↘ | $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ | ↘ | $-1$ | ↗ | 0 | ↗ | 1 | ↘ | $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ | ↘ |

또 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{x^2+1}=0$, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{x^2+1}=0$이므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.




따라서 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 교점을 갖도록 하는 $k$의 값의 범위는

$-1\le k\le 1$

이므로 정수 $k$는 $-1$, 0, 1의 3개이다.

답 ③

**16** 전략 주어진 방정식을 $k=f(x)$ 꼴로 변형하여 먼저 $y=f(x)$의 그래프를 그린다.

풀이 $x^2=ke^x$에서 $\quad k=x^2e^{-x}$

$f(x)=x^2e^{-x}$으로 놓으면

$$f'(x)=2xe^{-x}-x^2e^{-x}=-x(x-2)e^{-x}$$
$$f''(x)=2e^{-x}-2xe^{-x}-2xe^{-x}+x^2e^{-x}=(x^2-4x+2)e^{-x}$$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=0$ 또는 $x=2$

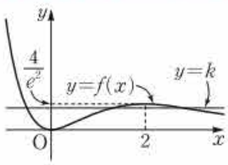
$f''(x)=0$에서 $\quad x^2-4x+2=0$

$\therefore x=2\pm\sqrt{2}$

함수 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | 0 | $\cdots$ | $2-\sqrt{2}$ | $\cdots$ | 2 | $\cdots$ | $2+\sqrt{2}$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | 0 | $+$ | $+$ | $+$ | 0 | $-$ | $-$ | $-$ |
| $f''(x)$ | $+$ | $+$ | $+$ | 0 | $-$ | $-$ | $-$ | 0 | $+$ |
| $f(x)$ | ↘ | 0 | ↗ | 변곡점 | ↗ | $\frac{4}{e^2}$ | ↘ | 변곡점 | ↘ |

또 $\lim_{x\to\infty}x^2e^{-x}=0$, $\lim_{x\to-\infty}x^2e^{-x}=\infty$이므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.




따라서 곡선 $y=x^2e^{-x}$과 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나도록 하는 $k$의 값의 범위는 $0<k<\frac{4}{e^2}$이므로 $\quad \alpha=0,\ \beta=\frac{4}{e^2}$

$\therefore \beta-\alpha=\frac{4}{e^2}$

답 $\frac{4}{e^2}$

## 17

전략 $f(x)=(\ln x)^2-2\ln x-2a+7$로 놓고 $f'(x)$를 구하여 증감표를 만든다.

풀이 $f(x)=(\ln x)^2-2\ln x-2a+7$로 놓으면

$$f'(x)=2\ln x\cdot\frac{1}{x}-\frac{2}{x}=\frac{2\ln x-2}{x}=\frac{2(\ln x-1)}{x}$$ ⋯ ❶

$f'(x)=0$에서

$\ln x=1 \quad \therefore x=e$

$x>0$에서 함수 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

| $x$ | 0 | $\cdots$ | $e$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | 0 | $+$ |
| $f(x)$ | | ↘ | $-2a+6$ | ↗ |

따라서 $x>0$일 때 함수 $f(x)$는 $x=e$에서 극소이면서 최소이고, 최솟값은 $-2a+6$이다. ⋯ ❷

$x>0$일 때 $f(x)\geq0$이어야 하므로

$-2a+6\geq0 \quad \therefore a\leq3$

따라서 $a$의 최댓값은 3이다. ⋯ ❸

답 3

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ❶ $f'(x)$를 구할 수 있다. | 30 % |
| ❷ $f(x)$의 최솟값을 구할 수 있다. | 50 % |
| ❸ $a$의 최댓값을 구할 수 있다. | 20 % |

## 18

전략 함수 $f(x)$가 기함수임을 이용한다.

풀이 ㄱ. 조건 (나)에서 $f(-x)=-f(x)$이므로 함수 $f(x)$는 기함수이다.

이때 조건 (가)에서 $f(x)\neq1$이므로 모든 실수 $x$에 대하여 $f(x)\neq-1$이다.

ㄴ. 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 실수 전체의 집합에서 연속이다.

이때 조건 (나)에서 $f(0)=0$이고, ㄱ에서 $f(x)\neq1$, $f(x)\neq-1$이므로

$-1<f(x)<1$

따라서 조건 (다)에서

$$f'(x)=\{1+f(x)\}\{1+f(-x)\}=\{1+f(x)\}\{1-f(x)\}>0$$

이므로 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가한다.

ㄷ. $f'(x)=\{1+f(x)\}\{1-f(x)\}=1-\{f(x)\}^2$에서

$f''(x)=-2f(x)f'(x)$

$f''(x)=0$에서

$f(x)=0\ (\because f'(x)>0)$

이때 $f(0)=0$이고 $x<0$일 때 $f(x)<0$이므로

$f''(x)>0$

$x>0$일 때 $f(x)>0$이므로

$f''(x)<0$

따라서 곡선 $y=f(x)$의 변곡점은 $(0,\ 0)$의 1개이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ뿐이다.

답 ①

## 19

전략 $f(x)$가 역함수를 가지려면 $f'(x)\geq0$ 또는 $f'(x)\leq0$이어야 함을 이용한다.

풀이 $f(x)$가 역함수를 가지려면 $f(x)$는 일대일대응이어야 하므로 $f'(x)\geq0$ 또는 $f'(x)\leq0$이어야 한다.

$f(x)=e^{x+1}\{x^2+(n-2)x-n+3\}+ax$에서

$$f'(x)=e^{x+1}\{x^2+(n-2)x-n+3\}+e^{x+1}(2x+n-2)+a=e^{x+1}(x^2+nx+1)+a$$

따라서 $e^{x+1}(x^2+nx+1)+a\geq0$, 즉 $e^{x+1}(x^2+nx+1)\geq-a$가 성립해야 한다.

$h(x)=e^{x+1}(x^2+nx+1)$로 놓으면

$$h'(x)=e^{x+1}(x^2+nx+1)+e^{x+1}(2x+n)$$
$$=e^{x+1}\{x^2+(n+2)x+n+1\}$$
$$=e^{x+1}(x+n+1)(x+1)$$

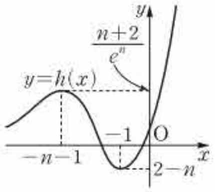
$h'(x)=0$에서

$x=-n-1$ 또는 $x=-1$

함수 $h(x)$의 증감표는 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | $-n-1$ | $\cdots$ | $-1$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $h'(x)$ | + | 0 | − | 0 | + |
| $h(x)$ | ↗ | $\dfrac{n+2}{e^n}$ | ↘ | $2-n$ | ↗ |

이때 $\lim_{x\to\infty} h(x)=\infty$, $\lim_{x\to-\infty} h(x)=0$이므로 함수 $y=h(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.




따라서 $h(x)$의 최솟값은 $h(-1)=2-n$이므로 $h(x)\ge -a$가 성립하려면

$2-n\ge -a \qquad \therefore a\ge n-2$

즉 $a$의 최솟값이 $n-2$이므로 $\quad g(n)=n-2$

$1\le g(n)\le 8$에서 $\quad 1\le n-2\le 8$

$\therefore 3\le n\le 10$

따라서 모든 자연수 $n$의 값의 합은

$$3+4+5+\cdots+10=\frac{8(3+10)}{2}=52$$

답 ④

**Remark▶ 등차수열의 합**

첫째항이 $a$, 제$n$항이 $l$인 등차수열의 첫째항부터 제$n$항까지의 합 $S_n$은

$$S_n=\frac{n(a+l)}{2}$$

## 20

전략 방정식 $f(x)=g(x)$의 실근의 개수는 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점의 개수와 같음을 이용한다.

풀이 $\sin x-x\cos x-k=0$에서

$\sin x-x\cos x=k$

$f(x)=\sin x-x\cos x$로 놓으면

$f'(x)=\cos x-(\cos x-x\sin x)=x\sin x$

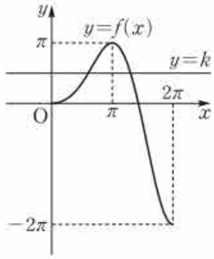
$f'(x)=0$에서

$x=0$ 또는 $x=\pi$ 또는 $x=2\pi$ ($\because 0\le x\le 2\pi$)

구간 $[0, 2\pi]$에서 함수 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

| $x$ | 0 | $\cdots$ | $\pi$ | $\cdots$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | 0 | − | |
| $f(x)$ | 0 | ↗ | $\pi$ | ↘ | $-2\pi$ |

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되려면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 개수가 2이어야 하므로 $k$의 값의 범위는




$0\le k<\pi$

따라서 정수 $k$는 0, 1, 2, 3이므로 구하는 합은

$0+1+2+3=6$

답 ⑤

## 21

전략 위치를 미분하면 속도이고, 속도를 미분하면 가속도임을 이용한다.

풀이 시각 $t$에서의 점 P의 속도를 $v(t)$, 가속도를 $a(t)$라 하면

$$v(t)=\frac{d}{dt}x(t)=1+\frac{20}{\pi^2}\cdot 2\pi\cdot\{-\sin(2\pi t)\}$$
$$=1-\frac{40}{\pi}\sin(2\pi t)$$
$$a(t)=\frac{d}{dt}v(t)=-\frac{40}{\pi}\cdot 2\pi\cdot\cos(2\pi t)$$
$$=-80\cos(2\pi t)$$

따라서 $t=\frac{1}{3}$에서의 가속도의 크기는

$$\left|a\left(\frac{1}{3}\right)\right|=\left|-80\cos\frac{2}{3}\pi\right|$$
$$=\left|(-80)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\right|$$
$$=40$$

답 40

Ⅲ. 적분법

# 08 여러 가지 적분법

## 유제

본책 215~231쪽

**085-❶** (1) $\int\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x-\frac{1}{x}\right)dx$
$=\int\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)dx$
$=\int(x^2-x^{-2})\,dx$
$=\frac{1}{3}x^3+x^{-1}+C$
$=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{x}+C$

(2) $\int\sqrt{x}(x+1)^2dx$
$=\int x^{\frac{1}{2}}(x^2+2x+1)dx$
$=\int(x^{\frac{5}{2}}+2x^{\frac{3}{2}}+x^{\frac{1}{2}})dx$
$=\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}+\frac{4}{5}x^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C$
$=\frac{2}{7}x^3\sqrt{x}+\frac{4}{5}x^2\sqrt{x}+\frac{2}{3}x\sqrt{x}+C$

(3) $\int\sqrt[3]{x}(\sqrt[3]{x}+1)\,dx=\int(x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}})dx$
$=\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}+\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}+C$
$=\frac{3}{5}x\sqrt[3]{x^2}+\frac{3}{4}x\sqrt[3]{x}+C$

(4) $\int\frac{x^3-1}{x^2-x}dx=\int\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x(x-1)}dx$
$=\int\frac{x^2+x+1}{x}dx$
$=\int\left(x+1+\frac{1}{x}\right)dx$
$=\frac{1}{2}x^2+x+\ln|x|+C$

답 풀이 참조

**086-❶** (1) $\int(e^x-5^{2x})\,dx=\int(e^x-25^x)\,dx$
$=e^x-\frac{25^x}{\ln 25}+C$

(2) $\int 3^x(3^x+1)\,dx=\int(3^{2x}+3^x)\,dx$
$=\int(9^x+3^x)\,dx$
$=\frac{9^x}{\ln 9}+\frac{3^x}{\ln 3}+C$

(3) $\int\frac{e^{3x}-1}{e^{2x}+e^x+1}dx=\int\frac{(e^x-1)(e^{2x}+e^x+1)}{e^{2x}+e^x+1}dx$
$=\int(e^x-1)dx$
$=e^x-x+C$

(4) $\int\frac{x\cdot 5^x-1}{x}dx=\int\left(5^x-\frac{1}{x}\right)dx$
$=\frac{5^x}{\ln 5}-\ln|x|+C$

답 풀이 참조

**087-❶** (1) $\int\frac{\sin^2x+4}{\sin^2x}dx=\int\left(1+\frac{4}{\sin^2x}\right)dx$
$=\int(1+4\csc^2x)dx$
$=x-4\cot x+C$

(2) $\int\tan^2x\,dx=\int(\sec^2x-1)dx$
$=\tan x-x+C$

(3) $\int\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\,dx=\int\frac{1}{2}\sin x\,dx$
$=-\frac{1}{2}\cos x+C$

(4) $\int\frac{1}{\sin^2x\cos^2x}dx=\int\frac{\sin^2x+\cos^2x}{\sin^2x\cos^2x}dx$
$=\int\left(\frac{1}{\cos^2x}+\frac{1}{\sin^2x}\right)dx$
$=\int(\sec^2x+\csc^2x)\,dx$
$=\tan x-\cot x+C$

답 풀이 참조

**088-❶** (1) $4x^2+1=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=8x$이므로
$\int 8x(4x^2+1)^6dx=\int t^6dt$
$=\frac{1}{7}t^7+C$
$=\frac{1}{7}(4x^2+1)^7+C$

(2) $4x^3-6x+7=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=12x^2-6$이므로
$\int(2x^2-1)(4x^3-6x+7)dx$
$=\int t\cdot\frac{1}{6}dt$
$=\frac{1}{12}t^2+C$
$=\frac{1}{12}(4x^3-6x+7)^2+C$

답 풀이 참조

다른 풀이 (2) $\int(2x^2-1)(4x^3-6x+7)dx$

$=\int(8x^5-16x^3+14x^2+6x-7)dx$

$=\frac{4}{3}x^6-4x^4+\frac{14}{3}x^3+3x^2-7x+C$

**089-❶** (1) $x^2-2x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=2x-2$이므로

$$\begin{aligned}&\int(x-1)\sqrt{x^2-2x}\,dx\\&=\int\sqrt{t}\cdot\frac{1}{2}dt\\&=\frac{1}{2}\int t^{\frac{1}{2}}dt\\&=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}+C\\&=\frac{1}{3}t\sqrt{t}+C\\&=\frac{1}{3}(x^2-2x)\sqrt{x^2-2x}+C\end{aligned}$$

(2) $x^3+1=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=3x^2$이므로

$$\begin{aligned}\int\frac{x^2}{\sqrt{x^3+1}}dx&=\int\frac{1}{\sqrt{t}}\cdot\frac{1}{3}dt\\&=\frac{1}{3}\int t^{-\frac{1}{2}}dt\\&=\frac{1}{3}\cdot 2t^{\frac{1}{2}}+C\\&=\frac{2}{3}\sqrt{t}+C\\&=\frac{2}{3}\sqrt{x^3+1}+C\end{aligned}$$

답 풀이 참조

다른 풀이 (1) $\sqrt{x^2-2x}=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}}$ 이므로

$$\begin{aligned}&\int(x-1)\sqrt{x^2-2x}\,dx\\&=\int t\cdot t\,dt\\&=\int t^2dt\\&=\frac{1}{3}t^3+C\\&=\frac{1}{3}(x^2-2x)\sqrt{x^2-2x}+C\end{aligned}$$

(2) $\sqrt{x^3+1}=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+1}}$이므로

$$\begin{aligned}\int\frac{x^2}{\sqrt{x^3+1}}dx&=\int\frac{2}{3}dt=\frac{2}{3}t+C\\&=\frac{2}{3}\sqrt{x^3+1}+C\end{aligned}$$

**090-❶** (1) $e^x+1=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=e^x$이므로

$$\begin{aligned}\int e^x\sqrt{e^x+1}\,dx&=\int\sqrt{t}\,dt\\&=\int t^{\frac{1}{2}}dt\\&=\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}+C\\&=\frac{2}{3}t\sqrt{t}+C\\&=\frac{2}{3}(e^x+1)\sqrt{e^x+1}+C\end{aligned}$$

(2) $\ln(x^2+1)=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=\frac{2x}{x^2+1}$이므로

$$\begin{aligned}&\int\frac{2x}{x^2+1}\ln(x^2+1)dx\\&=\int t\,dt\\&=\frac{1}{2}t^2+C\\&=\frac{1}{2}\{\ln(x^2+1)\}^2+C\end{aligned}$$

답 풀이 참조

다른 풀이 (1) $\sqrt{e^x+1}=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=\frac{e^x}{2\sqrt{e^x+1}}$이므로

$$\begin{aligned}\int e^x\sqrt{e^x+1}dx&=\int t\cdot 2t\,dt\\&=\int 2t^2\,dt\\&=\frac{2}{3}t^3+C\\&=\frac{2}{3}(e^x+1)\sqrt{e^x+1}+C\end{aligned}$$

**091-❶** (1) $\sin x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=\cos x$이므로

$$\begin{aligned}&\int(\sin^2x+\sin x+1)\cos x\,dx\\&=\int(t^2+t+1)dt\\&=\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{2}t^2+t+C\\&=\frac{1}{3}\sin^3x+\frac{1}{2}\sin^2x+\sin x+C\end{aligned}$$

(2) $\int\sin^3x\,dx=\int\sin^2x\sin x\,dx$

$=\int(1-\cos^2x)\sin x\,dx$

에서 $\cos x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=-\sin x$이므로

$$\int(1-\cos^2 x)\sin x\,dx$$
$$=\int(1-t^2)\cdot(-1)dt$$
$$=\int(t^2-1)dt$$
$$=\frac{1}{3}t^3-t+C$$
$$=\frac{1}{3}\cos^3 x-\cos x+C$$

답 풀이 참조

**Remark▶** 삼각함수 사이의 관계

① $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

② $\tan^2\theta+1=\sec^2\theta$, $1+\cot^2\theta=\csc^2\theta$

**091-❷** $\int\frac{\cos^3 x}{1+\sin x}dx$

$$=\int\frac{\cos x\cdot\cos^2 x}{1+\sin x}dx$$
$$=\int\frac{\cos x(1-\sin^2 x)}{1+\sin x}dx$$
$$=\int\frac{\cos x(1+\sin x)(1-\sin x)}{1+\sin x}dx$$
$$=\int\cos x(1-\sin x)dx$$

에서 $1-\sin x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=-\cos x$이므로

$$\int\frac{\cos^3 x}{1+\sin x}dx=\int t\cdot(-1)dt$$
$$=-\frac{1}{2}t^2+C$$
$$=-\frac{1}{2}(1-\sin x)^2+C$$

답 $-\frac{1}{2}(1-\sin x)^2+C$

**092-❶** (1) $(2+\cos x)'=-\sin x$이므로

$$\int\frac{\sin x}{2+\cos x}dx=-\int\frac{(2+\cos x)'}{2+\cos x}dx$$
$$=-\ln(2+\cos x)+C$$
$$(\because 2+\cos x>0)$$

(2) $(x+\sin x)'=1+\cos x$이므로

$$\int\frac{1+\cos x}{x+\sin x}dx=\int\frac{(x+\sin x)'}{x+\sin x}dx$$
$$=\ln|x+\sin x|+C$$

(3) $(e^x+e^{-x})'=e^x-e^{-x}$이므로

$$\int\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}dx=\int\frac{(e^x+e^{-x})'}{e^x+e^{-x}}dx$$
$$=\ln(e^x+e^{-x})+C$$
$$(\because e^x+e^{-x}>0)$$

(4) $\{\ln(x+1)\}'=\frac{1}{x+1}$이므로

$$\int\frac{1}{(x+1)\ln(x+1)}dx$$
$$=\int\frac{\{\ln(x+1)\}'}{\ln(x+1)}dx$$
$$=\ln|\ln(x+1)|+C$$

답 풀이 참조

**093-❶** (1) $\frac{x^3-x+2}{x+1}=x^2-x+\frac{2}{x+1}$이므로

$$\int\frac{x^3-x+2}{x+1}dx$$
$$=\int\left(x^2-x+\frac{2}{x+1}\right)dx$$
$$=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+2\ln|x+1|+C$$

(2) $\frac{x-8}{x^2-x-6}=\frac{x-8}{(x+2)(x-3)}=\frac{a}{x+2}+\frac{b}{x-3}$

($a$, $b$는 상수)로 놓으면

$$\frac{x-8}{x^2-x-6}=\frac{(a+b)x-(3a-2b)}{(x+2)(x-3)}$$

이므로

$a+b=1$, $3a-2b=8$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=2$, $b=-1$

$$\therefore \int\frac{x-8}{x^2-x-6}dx$$
$$=\int\left(\frac{2}{x+2}-\frac{1}{x-3}\right)dx$$
$$=2\ln|x+2|-\ln|x-3|+C$$
$$=\ln\left|\frac{(x+2)^2}{x-3}\right|+C$$

(3) $\frac{1-x^2}{x(x^2+1)}=\frac{a}{x}+\frac{bx+c}{x^2+1}$ ($a$, $b$, $c$는 상수)로 놓으면

$$\frac{1-x^2}{x(x^2+1)}=\frac{(a+b)x^2+cx+a}{x(x^2+1)}$$

이므로

$a+b=-1$, $c=0$, $a=1$

$\therefore a=1$, $b=-2$, $c=0$

$$\therefore \int\frac{1-x^2}{x(x^2+1)}dx=\int\left(\frac{1}{x}-\frac{2x}{x^2+1}\right)dx$$
$$=\ln|x|-\ln|x^2+1|+C$$
$$=\ln\left|\frac{x}{x^2+1}\right|+C$$

답 풀이 참조

**094-❶** (1) $f(x)=\ln x$, $g'(x)=1$로 놓으면

$f'(x)=\frac{1}{x}$, $g(x)=x$이므로

$$\int \ln x\, dx = \ln x \cdot x - \int \frac{1}{x} \cdot x\, dx$$
$$= x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C$$

(2) $f(x)=x$, $g'(x)=e^{2x}$으로 놓으면 $f'(x)=1$,
$g(x)=\frac{1}{2}e^{2x}$이므로

$$\int xe^{2x} dx = x \cdot \frac{1}{2}e^{2x} - \int 1 \cdot \frac{1}{2}e^{2x} dx$$
$$= \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + C$$

(3) $f(x)=2x$, $g'(x)=\sin 2x$로 놓으면 $f'(x)=2$,
$g(x)=-\frac{1}{2}\cos 2x$이므로

$$\int 2x \sin 2x\, dx$$
$$= 2x\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right) - \int 2\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right) dx$$
$$= -x\cos 2x + \int \cos 2x\, dx$$
$$= -x\cos 2x + \frac{1}{2}\sin 2x + C$$

답 풀이 참조

**095-❶** (1) $f(x)=x^2+1$, $g'(x)=\sin x$로 놓으면
$f'(x)=2x$, $g(x)=-\cos x$이므로

$$\int (x^2+1)\sin x\, dx$$
$$= (x^2+1)\cdot(-\cos x) - \int 2x \cdot (-\cos x) dx$$
$$= -(x^2+1)\cos x + 2\int x\cos x\, dx \quad \cdots ㉠$$

$\int x\cos x\, dx$에서 $u(x)=x$, $v'(x)=\cos x$로 놓으면 $u'(x)=1$, $v(x)=\sin x$이므로

$$\int x\cos x\, dx = x\sin x - \int 1\cdot \sin x\, dx$$
$$= x\sin x + \cos x + C_1 \quad \cdots ㉡$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$\int (x^2+1)\sin x\, dx$$
$$= -(x^2+1)\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + 2C_1$$
$$= (1-x^2)\cos x + 2x\sin x + C$$

(2) $f(x)=\cos 2x$, $g'(x)=e^x$으로 놓으면
$f'(x)=-2\sin 2x$, $g(x)=e^x$이므로

$$\int e^x \cos 2x\, dx$$
$$= \cos 2x \cdot e^x - \int (-2\sin 2x)\cdot e^x dx$$
$$= e^x\cos 2x + 2\int e^x \sin 2x\, dx \quad \cdots\cdots ㉠$$

$\int e^x \sin 2x\, dx$에서 $u(x)=\sin 2x$, $v'(x)=e^x$으로 놓으면 $u'(x)=2\cos 2x$, $v(x)=e^x$이므로

$$\int e^x \sin 2x\, dx$$
$$= \sin 2x \cdot e^x - \int 2\cos 2x \cdot e^x dx$$
$$= e^x \sin 2x - 2\int e^x \cos 2x\, dx \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$\int e^x \cos 2x\, dx$$
$$= e^x\cos 2x + 2e^x \sin 2x - 4\int e^x \cos 2x\, dx$$
$$5\int e^x \cos 2x\, dx = e^x(2\sin 2x + \cos 2x)$$
$$\therefore \int e^x \cos 2x\, dx$$
$$= \frac{1}{5}e^x(2\sin 2x + \cos 2x) + C$$

답 풀이 참조

## 중단원 연습 문제

본책 232~235쪽

**01** $-4$ **02** $f(x)=\frac{3^{2x-1}}{2\ln 3}$ **03** $\frac{1}{2}\pi^2$ **04** 5
**05** 18 **06** $e$ **07** ⑤ **08** 11 **09** 3
**10** $x(\ln x)^2-2x\ln x+2x+C$ **11** ②
**12** $\pi-1$ **13** 3 **14** $\ln\frac{e+1}{e}$
**15** $x=\frac{\pi}{4}$ **16** ④ **17** ⑤ **18** ②
**19** ④

**01** 전략 피적분함수를 전개하여 변형한 후 부정적분을 구한다.

풀이 $$\int \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{x} dx = \int \frac{x-2\sqrt{x}+1}{x} dx$$
$$= \int \left(1 - 2x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{x}\right) dx$$
$$= x - 4x^{\frac{1}{2}} + \ln|x| + C$$
$$= x - 4\sqrt{x} + \ln|x| + C$$

따라서 $p=1$, $q=-4$, $r=1$이므로
$pqr=-4$

답 $-4$

**02** (전략) 지수함수의 부정적분은 지수법칙을 이용하여 간단하게 변형한 후 구한다.

(풀이) $f'(x)=3^{2x-1}$이므로

$$f(x)=\int 3^{2x-1}dx=\frac{1}{3}\int 9^x dx$$
$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{9^x}{\ln 9}+C=\frac{3^{2x-1}}{2\ln 3}+C$$

$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2\ln 3}$에서 $\frac{1}{2\ln 3}+C=\frac{1}{2\ln 3}$

$\therefore C=0$

$\therefore f(x)=\frac{3^{2x-1}}{2\ln 3}$ 답 $f(x)=\frac{3^{2x-1}}{2\ln 3}$

**03** (전략) 곡선 $y=f(x)$ 위의 임의의 점 $(x, f(x))$에서의 접선의 기울기는 $f'(x)$임을 이용한다.

(풀이) $f'(x)=x+\cos x$이므로

$$f(x)=\int(x+\cos x)dx=\frac{1}{2}x^2+\sin x+C$$

곡선 $y=f(x)$가 원점을 지나므로 $f(0)=0$에서

$C=0$

따라서 $f(x)=\frac{1}{2}x^2+\sin x$이므로

$f(\pi)=\frac{1}{2}\pi^2$ 답 $\frac{1}{2}\pi^2$

**04** (전략) 피적분함수가 전개하기 복잡한 경우에는 치환적분법을 이용하여 부정적분을 구한다.

(풀이) $mx+3=t$로 놓으면 $x=\frac{t-3}{m}$에서 $\frac{dx}{dt}=\frac{1}{m}$이므로

$$f(x)=\int(mx+3)^4dx=\int t^4\cdot\frac{1}{m}dt$$
$$=\frac{1}{5m}t^5+C=\frac{1}{5m}(mx+3)^5+C \quad \cdots ❶$$

함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 125이므로

$\frac{1}{5m}\cdot m^5=125, \quad m^4=5^4$

$\therefore m=5\ (\because m>0)$ ⋯ ❷

답 5

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ❶ 부정적분을 구할 수 있다. | 50 % |
| ❷ $m$의 값을 구할 수 있다. | 50 % |

**05** (전략) 피적분함수가 무리함수를 포함한 경우에는 근호 안의 함수를 $t$로 치환하여 부정적분을 구한다.

(풀이) $f'(x)=2x\sqrt{x^2+1}$이므로

$$f(x)=\int 2x\sqrt{x^2+1}\,dx$$

$x^2+1=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=2x$이므로

$$f(x)=\int 2x\sqrt{x^2+1}\,dx=\int\sqrt{t}\,dt=\int t^{\frac{1}{2}}dt$$
$$=\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}+C=\frac{2}{3}t\sqrt{t}+C$$
$$=\frac{2}{3}(x^2+1)\sqrt{x^2+1}+C$$

$f(0)=\frac{2}{3}$에서 $\frac{2}{3}+C=\frac{2}{3}$ $\quad\therefore C=0$

따라서 $f(x)=\frac{2}{3}(x^2+1)\sqrt{x^2+1}$이므로

$f(2\sqrt{2})=\frac{2}{3}\cdot 9\cdot 3=18$ 답 18

(다른 풀이) $\sqrt{x^2+1}=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$이므로

$$f(x)=\int 2x\sqrt{x^2+1}\,dx=\int 2t\cdot t\,dt$$
$$=\int 2t^2dt=\frac{2}{3}t^3+C$$
$$=\frac{2}{3}(x^2+1)\sqrt{x^2+1}+C$$

**06** (전략) 피적분함수가 $\sin x$와 $\cos x$를 포함한 경우에는 $\sin x=t$ 또는 $\cos x=t$로 치환하여 부정적분을 구한다.

(풀이) $\sin x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=\cos x$이므로

$$f(x)=\int e^{\sin x}\cos x\,dx=\int e^t dt$$
$$=e^t+C=e^{\sin x}+C$$

$f(0)=1$에서 $1+C=1$ $\quad\therefore C=0$

따라서 $f(x)=e^{\sin x}$이므로 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=e$ 답 $e$

**07** (전략) 피적분함수의 분자가 분모의 도함수이면 $\int\frac{g'(x)}{g(x)}dx=\ln|g(x)|+C$임을 이용한다.

(풀이) $(\ln x)'=\frac{1}{x}$이므로

$$f(x)=\int\frac{1}{x\ln x}dx=\int\frac{(\ln x)'}{\ln x}dx$$
$$=\ln|\ln x|+C$$

$f(e)=2$에서 $C=2$

따라서 $f(x)=\ln|\ln x|+2$이므로

$$f(e^3)+f(e^2)=(\ln 3+2)+(\ln 2+2)$$
$$=\ln 6+4$$

답 ⑤

(다른 풀이) $\ln x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}$이므로

$$f(x)=\int\frac{1}{x\ln x}dx=\int\frac{1}{t}dt$$
$$=\ln|t|+C=\ln|\ln x|+C$$

**08** 전략 피적분함수를 부분분수로 변형한 후 부정적분을 구한다.

풀이 $\frac{x}{(x-3)^2}=\frac{a}{x-3}+\frac{b}{(x-3)^2}$ ($a$, $b$는 상수)로 놓으면

$$\frac{x}{(x-3)^2}=\frac{ax-3a+b}{(x-3)^2}$$

이므로 $a=1$, $-3a+b=0$

$\therefore a=1,\ b=3$ ⋯ ❶

$$\therefore f(x)=\int\frac{x}{(x-3)^2}dx$$
$$=\int\left\{\frac{1}{x-3}+\frac{3}{(x-3)^2}\right\}dx$$
$$=\ln|x-3|-\frac{3}{x-3}+C$$

$f(4)=5$에서

$-3+C=5$ $\therefore C=8$

따라서 $f(x)=\ln|x-3|-\frac{3}{x-3}+8$이므로 ⋯ ❷

$f(2)=3+8=11$ ⋯ ❸

답 11

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ❶ $a$, $b$의 값을 구할 수 있다. | 40 % |
| ❷ $f(x)$를 구할 수 있다. | 40 % |
| ❸ $f(2)$의 값을 구할 수 있다. | 20 % |

다른 풀이 $x-3=t$로 놓으면 $x=t+3$에서 $\frac{dx}{dt}=1$이므로

$$f(x)=\int\frac{x}{(x-3)^2}dx=\int\frac{t+3}{t^2}dt$$
$$=\int\left(\frac{1}{t}+\frac{3}{t^2}\right)dt=\ln|t|-\frac{3}{t}+C$$
$$=\ln|x-3|-\frac{3}{x-3}+C$$

**09** 전략 피적분함수가 두 함수의 곱의 꼴일 때에는 부분적분법을 이용하여 부정적분을 구한다.

풀이 $u(x)=x$, $v'(x)=\cos x$로 놓으면 $u'(x)=1$, $v(x)=\sin x$이므로

$$f(x)=\int x\cos x\,dx$$
$$=x\sin x-\int 1\cdot\sin x\,dx$$
$$=x\sin x+\cos x+C$$

$f(\pi)=1$에서 $-1+C=1$ $\therefore C=2$

따라서 $f(x)=x\sin x+\cos x+2$이므로

$f(0)=1+2=3$

답 3

**10** 전략 부분적분법을 반복 적용하여 같은 꼴이 나타나게 한다.

풀이 $f(x)=(\ln x)^2$, $g'(x)=1$로 놓으면

$f'(x)=\frac{2}{x}\ln x$, $g(x)=x$이므로

$$\int(\ln x)^2dx$$
$$=x(\ln x)^2-\int\frac{2}{x}\ln x\cdot x\,dx$$
$$=x(\ln x)^2-2\int\ln x\,dx \quad \cdots\cdots ㉠$$

$\int\ln x\,dx$에서 $u(x)=\ln x$, $v'(x)=1$로 놓으면

$u'(x)=\frac{1}{x}$, $v(x)=x$이므로

$$\int\ln x\,dx=x\ln x-\int\frac{1}{x}\cdot x\,dx$$
$$=x\ln x-x+C_1 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$\int(\ln x)^2dx$$
$$=x(\ln x)^2-2x\ln x+2x-2C_1$$
$$=x(\ln x)^2-2x\ln x+2x+C$$

답 $x(\ln x)^2-2x\ln x+2x+C$

**11** 전략 $\int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+C$ ($a>0$, $a\neq1$)임을 이용한다.

풀이 $f(x)=\int 3^x\ln 3\,dx=\ln 3\int 3^x dx$

$$=\ln 3\cdot\frac{3^x}{\ln 3}+C=3^x+C$$

$f(0)=1$에서 $1+C=1$ $\therefore C=0$

따라서 $f(x)=3^x$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{f(n)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n$$
$$=\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}}=\frac{1}{2}$$

답 ②

**Remark▶ 등비급수의 합**

첫째항이 $a$, 공비가 $r$ $(-1<r<1)$인 등비급수의 합은 $\frac{a}{1-r}$이다.

**12** 전략 먼저 $f(x)+g(x)$, $f(x)-g(x)$를 구한다.

풀이 $\frac{d}{dx}\{f(x)+g(x)\}=2\cos x+1$에서

$$f(x)+g(x)=\int(2\cos x+1)dx$$
$$=2\sin x+x+C_1$$

$f(0)+g(0)=1+(-1)=0$이므로 $\quad C_1=0$

$\therefore f(x)+g(x)=2\sin x+x$ …… ㉠ ⋯→ ❶

$\dfrac{d}{dx}\{f(x)-g(x)\}=-2\sin x+1$에서

$$f(x)-g(x)=\int(-2\sin x+1)dx$$
$$=2\cos x+x+C_2$$

$f(0)-g(0)=1-(-1)=2$이므로 $2+C_2=2$에서

$C_2=0$

$\therefore f(x)-g(x)=2\cos x+x$ …… ㉡ ⋯→ ❷

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $f(x)=\sin x+\cos x+x$,

$g(x)=\sin x-\cos x$이므로

$f(\pi)=\pi-1,\ g(\pi)=1$

$\therefore f(\pi)g(\pi)=\pi-1$ ⋯→ ❸

답 $\pi-1$

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ❶ $f(x)+g(x)$를 구할 수 있다. | 40 % |
| ❷ $f(x)-g(x)$를 구할 수 있다. | 40 % |
| ❸ $f(\pi)g(\pi)$의 값을 구할 수 있다. | 20 % |

**13** 전략 피적분함수의 분자가 분모의 도함수이면 $\displaystyle\int\frac{g'(x)}{g(x)}dx=\ln|g(x)|+C$임을 이용한다.

풀이 $\ln x=t$로 놓으면 $\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{1}{x}$이므로 조건 (가)에서

$$f(x)=\int\frac{\ln x}{x}dx=\int t\,dt$$
$$=\frac{1}{2}t^2+C=\frac{1}{2}(\ln x)^2+C$$ ⋯→ ❶

$f'(x)=\dfrac{\ln x}{x}=0$에서 $\quad x=1$

$\dfrac{1}{e}\le x\le e^2$에서 함수 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

| $x$ | $\frac{1}{e}$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ | $e^2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | | ↘ | 극소 | ↗ | |

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극소이면서 최소이므로 조건 (나)에서 $\quad f(1)=1 \quad \therefore C=1$

즉 $f(x)=\dfrac{1}{2}(\ln x)^2+1$에서 ⋯→ ❷

$$f\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{2}\left(\ln\frac{1}{e}\right)^2+1=\frac{3}{2}$$
$$f(e^2)=\frac{1}{2}(\ln e^2)^2+1=3$$

따라서 $f(x)$는 $x=e^2$에서 최댓값 3을 갖는다. ⋯→ ❸

답 3

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ❶ 부정적분을 구할 수 있다. | 30 % |
| ❷ $f(x)$를 구할 수 있다. | 40 % |
| ❸ $f(x)$의 최댓값을 구할 수 있다. | 30 % |

**14** 전략 치환적분법과 부분분수로의 변형을 이용하여 부정적분을 구한다.

풀이 $e^x=t$로 놓으면 $\dfrac{dt}{dx}=e^x$이므로

$$f(x)=\int\frac{1}{e^x-1}dx=\int\frac{1}{t-1}\cdot\frac{1}{t}dt$$
$$=\int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t}\right)dt$$
$$=\ln|t-1|-\ln|t|+C$$
$$=\ln\left|\frac{t-1}{t}\right|+C=\ln\left|\frac{e^x-1}{e^x}\right|+C$$

$$\therefore f(2)-f(1)=\ln\frac{e^2-1}{e^2}-\ln\frac{e-1}{e}$$
$$=\ln\left(\frac{e^2-1}{e^2}\cdot\frac{e}{e-1}\right)$$
$$=\ln\frac{e+1}{e}$$

답 $\ln\dfrac{e+1}{e}$

다른 풀이 $e^x-1=t$로 놓으면 $\dfrac{dt}{dx}=e^x$이므로

$$f(x)=\int\frac{1}{e^x-1}dx=\int\frac{1}{t}\cdot\frac{1}{t+1}dt$$
$$=\int\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}\right)dt$$
$$=\ln|t|-\ln|t+1|+C$$
$$=\ln\left|\frac{t}{t+1}\right|+C=\ln\left|\frac{e^x-1}{e^x}\right|+C$$

**15** 전략 부분적분법을 두 번 적용하여 $f(x)$를 구한다.

풀이 $u(x)=\cos x,\ v'(x)=e^{-x}$으로 놓으면 $u'(x)=-\sin x,\ v(x)=-e^{-x}$이므로

$$\int e^{-x}\cos x\,dx$$
$$=\cos x\cdot(-e^{-x})-\int(-\sin x)\cdot(-e^{-x})dx$$
$$=-e^{-x}\cos x-\int e^{-x}\sin x\,dx$$ …… ㉠

$\displaystyle\int e^{-x}\sin x\,dx$에서 $p(x)=\sin x,\ q'(x)=e^{-x}$으로 놓으면 $p'(x)=\cos x,\ q(x)=-e^{-x}$이므로

$$\int e^{-x}\sin x\,dx$$
$$=\sin x\cdot(-e^{-x})-\int\cos x\cdot(-e^{-x})dx$$
$$=-e^{-x}\sin x+\int e^{-x}\cos x\,dx$$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$$\int e^{-x}\cos x\,dx=-e^{-x}\cos x+e^{-x}\sin x-\int e^{-x}\cos x\,dx$$

$$2\int e^{-x}\cos x\,dx=e^{-x}(\sin x-\cos x)$$

$$\therefore f(x)=\int e^{-x}\cos x\,dx=\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x-\cos x)+C$$

$f'(x)=e^{-x}\cos x=0$에서 $x=\frac{\pi}{2}$ ($\because 0\le x\le\pi$)

$0\le x\le\pi$에서 함수 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

| $x$ | $0$ | $\cdots$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\cdots$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | | ↗ | 극대 | ↘ | |

함수 $f(x)$는 $x=\frac{\pi}{2}$에서 극댓값 $\frac{1}{2}e^{-\frac{\pi}{2}}$을 가지므로

$$\frac{1}{2}e^{-\frac{\pi}{2}}\left(\sin\frac{\pi}{2}-\cos\frac{\pi}{2}\right)+C=\frac{1}{2}e^{-\frac{\pi}{2}}$$

$\therefore C=0$

따라서 $f(x)=\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x-\cos x)$이므로 방정식 $f(x)=0$의 근은

$$\sin x-\cos x=0,\quad \sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=0$$

$\therefore x=\frac{\pi}{4}$ ($\because 0\le x\le\pi$)　　답 $x=\frac{\pi}{4}$

**16** 전략 치환적분법과 부분적분법을 이용하여 함수 $f(x)$를 구한다.

풀이 $f(x)=\int \sin x\ln(\cos x)dx$에서 $\cos x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=-\sin x$이므로

$$f(x)=\int\sin x\ln(\cos x)dx=-\int\ln t\,dt$$

$u(t)=\ln t$, $v'(t)=1$로 놓으면 $u'(t)=\frac{1}{t}$, $v(t)=t$이므로

$$f(x)=-\int\ln t\,dt=-\left(\ln t\cdot t-\int\frac{1}{t}\cdot t\,dt\right)$$
$$=-t\ln t+\int dt=-t\ln t+t+C$$
$$=-\cos x\ln(\cos x)+\cos x+C$$

$f(0)=1$에서 $1+C=1$　$\therefore C=0$

$$\therefore f(x)=-\cos x\ln(\cos x)+\cos x=\cos x\{1-\ln(\cos x)\}$$

ㄱ. $f(-x)=\cos(-x)[1-\ln\{\cos(-x)\}]=\cos x\{1-\ln(\cos x)\}=f(x)$

$\therefore f(-x)=f(x)$

ㄴ. 구간 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$에서 $0<\cos x\le1$이므로

$\ln(\cos x)\le0$, 즉 $1-\ln(\cos x)\ge1$

$\therefore f(x)=\cos x\{1-\ln(\cos x)\}>0$

따라서 구간 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$에서 $f(x)>0$이므로 방정식 $f(x)=0$은 실근을 갖지 않는다.

ㄷ. $f'(x)=\sin x\ln(\cos x)$이므로 $f'(x)=0$에서

$\sin x=0$ 또는 $\ln(\cos x)=0$, 즉

$\sin x=0$ 또는 $\cos x=1$

$\therefore x=0\left(\because -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\right)$

$-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$에서 함수 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

| $x$ | $-\frac{\pi}{2}$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | | ↗ | 극대 | ↘ | |

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극대이면서 최대이고 $f(0)=1$이므로 $f(x)$의 최댓값은 1이다.

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.　　답 ④

**17** 전략 $f(x)$를 구한 후 함수 $f(x)$가 모든 실수에서 연속임을 이용한다.

풀이 $f'(x)=\begin{cases} e^{x-1} & (x\le1) \\ \frac{1}{x} & (x>1)\end{cases}$에서

$$f(x)=\int f'(x)dx=\begin{cases} e^{x-1}+C_1 & (x\le1) \\ \ln x+C_2 & (x>1)\end{cases}$$

이때 $f(-1)=e+\frac{1}{e^2}$이므로

$$\frac{1}{e^2}+C_1=e+\frac{1}{e^2}\qquad\therefore C_1=e$$

함수 $f(x)$가 모든 실수에서 연속이면 $x=1$에서도 연속이므로

$$\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1-}f(x)=f(1)$$

즉 $\lim_{x\to1+}(\ln x+C_2)=\lim_{x\to1-}(e^{x-1}+e)=f(1)$에서

$C_2=e+1$

따라서 $f(x)=\begin{cases} e^{x-1}+e & (x\le1) \\ \ln x+e+1 & (x>1)\end{cases}$이므로

$f(e)=e+2$　　답 ⑤

**18** 전략 치환적분법을 이용하여 조건 ㈎의 식을 간단히 한다.

풀이 조건 ㈎에서

$$\int \{f(x)\}^2 f'(x)dx = \int \frac{2x}{x^2+1}dx \cdots\cdots ㉠$$

(i) ㉠의 좌변에서 $f(x)=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=f'(x)$이므로

$$\int \{f(x)\}^2 f'(x)dx = \int t^2 dt = \frac{1}{3}t^3 + C_1 = \frac{1}{3}\{f(x)\}^3 + C_1$$

(ii) ㉠의 우변에서 $(x^2+1)'=2x$이므로

$$\int \frac{2x}{x^2+1}dx = \ln(x^2+1)+C_2$$

(i), (ii)에 의하여 ㉠에서

$$\frac{1}{3}\{f(x)\}^3 + C_1 = \ln(x^2+1)+C_2$$

$$\therefore \{f(x)\}^3 = 3\ln(x^2+1)+C$$

조건 ㈏에서 $f(0)=0$이므로

$$\{f(0)\}^3 = 3\ln 1 + C = 0 \qquad \therefore C=0$$

따라서 $\{f(x)\}^3 = 3\ln(x^2+1)$이므로

$$\{f(1)\}^3 = 3\ln 2$$

답 ②

**19** 전략 $F(x)+xf(x)=\{xF(x)\}'$임을 이용한다.

풀이 $f(x)$의 한 부정적분이 $F(x)$이므로 조건 ㈎에서

$$F(x)+xf(x)=F(x)+xF'(x)=\{xF(x)\}'$$

즉 $\{xF(x)\}'=(2x+2)e^x$이므로

$$xF(x)=\int (2x+2)e^x dx$$

$u(x)=2x+2$, $v'(x)=e^x$으로 놓으면 $u'(x)=2$, $v(x)=e^x$이므로

$$xF(x) = (2x+2)e^x - \int 2e^x dx = (2x+2)e^x - 2e^x + C = 2xe^x + C$$

조건 ㈏에서 $F(1)=2e$이므로 위의 식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$$2e = 2e + C \qquad \therefore C=0$$

$$\therefore xF(x)=2xe^x$$

이때 $x>0$이므로 $F(x)=2e^x$

$$\therefore F(3)=2e^3$$

답 ④

Ⅲ. 적분법

# 09 정적분

## 유제

본책 239~259쪽

**096-❶** (1) $\int_2^5 \frac{x+1}{x-1}dx = \int_2^5 \left(1+\frac{2}{x-1}\right)dx$

$$= \Big[x+2\ln|x-1|\Big]_2^5 = (5+2\ln 4)-2 = 3+4\ln 2$$

(2) $\int_1^2 \frac{1}{x^2+3x+2}dx = \int_1^2 \frac{1}{(x+1)(x+2)}dx$

$$= \int_1^2 \left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right)dx = \Big[\ln|x+1|-\ln|x+2|\Big]_1^2$$

$$= (\ln 3 - \ln 4) - (\ln 2 - \ln 3) = 2\ln 3 - 3\ln 2 = \ln\frac{9}{8}$$

(3) $\int_0^1 (x+\sqrt{x})^2 dx = \int_0^1 (x^2+2x\sqrt{x}+x)dx$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3+\frac{4}{5}x^{\frac{5}{2}}+\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 = \frac{1}{3}+\frac{4}{5}+\frac{1}{2} = \frac{49}{30}$$

(4) $\int_1^4 \frac{1+\sqrt{x}}{x^2}dx = \int_1^4 \left(x^{-2}+x^{-\frac{3}{2}}\right)dx$

$$= \left[-\frac{1}{x}-\frac{2}{\sqrt{x}}\right]_1^4 = \left(-\frac{1}{4}-1\right)-(-1-2) = \frac{7}{4}$$

답 (1) $3+4\ln 2$ (2) $\ln\frac{9}{8}$ (3) $\frac{49}{30}$ (4) $\frac{7}{4}$

**097-❶** (1) $\int_0^1 (2^x+2^{-x})^2 dx$

$$= \int_0^1 (4^x+2+4^{-x})dx$$

$$= \left[\frac{4^x}{\ln 4}+2x-\frac{4^{-x}}{\ln 4}\right]_0^1$$

$$= \left(\frac{4}{\ln 4}+2-\frac{1}{4\ln 4}\right)-\left(\frac{1}{\ln 4}-\frac{1}{\ln 4}\right)$$

$$= \frac{15}{4\ln 4}+2$$

$$= \frac{15}{8\ln 2}+2$$

(2) $\int_1^2 \frac{e^{3x}+1}{e^{2x}-e^x+1}dx=\int_1^2 \frac{(e^x+1)(e^{2x}-e^x+1)}{e^{2x}-e^x+1}dx$

$=\int_1^2 (e^x+1)dx$

$=\left[e^x+x\right]_1^2$

$=(e^2+2)-(e+1)$

$=e^2-e+1$

(3) $\int_0^{\pi}\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2dx$

$=\int_0^{\pi}\left(\sin^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}\right)dx$

$=\int_0^{\pi}(1+\sin x)\,dx$

$=\left[x-\cos x\right]_0^{\pi}$

$=(\pi+1)-(-1)$

$=\pi+2$

답 (1) $\frac{15}{8\ln 2}+2$ (2) $e^2-e+1$ (3) $\pi+2$

**098-❶** (1) $0\le x\le\pi$일 때 $f(x)=\cos x$, $\pi\le x\le 2\pi$일 때 $f(x)=-\sin x-1$이므로

$\int_0^{2\pi}f(x)dx$

$=\int_0^{\pi}f(x)dx+\int_{\pi}^{2\pi}f(x)dx$

$=\int_0^{\pi}\cos x\,dx+\int_{\pi}^{2\pi}(-\sin x-1)dx$

$=\left[\sin x\right]_0^{\pi}+\left[\cos x-x\right]_{\pi}^{2\pi}$

$=2-\pi$

(2) $-\pi\le x\le\pi$일 때 $f(x)=\cos x$, $\pi\le x\le 3\pi$일 때 $f(x)=-\sin x-1$이므로

$\int_{-\pi}^{3\pi}f(x)dx$

$=\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx+\int_{\pi}^{3\pi}f(x)dx$

$=\int_{-\pi}^{\pi}\cos x\,dx+\int_{\pi}^{3\pi}(-\sin x-1)dx$

$=\left[\sin x\right]_{-\pi}^{\pi}+\left[\cos x-x\right]_{\pi}^{3\pi}$

$=-2\pi$

답 (1) $2-\pi$ (2) $-2\pi$

**099-❶** (1) $x-2=0$에서 $x=2$이므로

$|x-2|=\begin{cases} x-2 & (x\ge 2) \\ -x+2 & (x\le 2)\end{cases}$

$\therefore \int_1^6\sqrt{|x-2|}\,dx$

$=\int_1^2\sqrt{-x+2}\,dx+\int_2^6\sqrt{x-2}\,dx$

$=\left[-\frac{2}{3}(-x+2)^{\frac{3}{2}}\right]_1^2+\left[\frac{2}{3}(x-2)^{\frac{3}{2}}\right]_2^6$

$=\frac{2}{3}+\frac{16}{3}=6$

(2) $e^x-1=0$에서 $x=0$이므로

$|e^x-1|=\begin{cases} e^x-1 & (x\ge 0) \\ -e^x+1 & (x\le 0)\end{cases}$

$\therefore \int_{-1}^2|e^x-1|dx$

$=\int_{-1}^0(-e^x+1)dx+\int_0^2(e^x-1)dx$

$=\left[-e^x+x\right]_{-1}^0+\left[e^x-x\right]_0^2$

$=\{-1-(-e^{-1}-1)\}+\{(e^2-2)-1\}$

$=e^2+\frac{1}{e}-3$

답 (1) 6 (2) $e^2+\frac{1}{e}-3$

**099-❷** $\sin 2x-\sin x=0$에서

$2\sin x\cos x-\sin x=0$

$\sin x(2\cos x-1)=0$

$\sin x=0$ 또는 $\cos x=\frac{1}{2}$

$\therefore x=0$ 또는 $x=\frac{\pi}{3}\left(\because 0\le x\le\frac{\pi}{2}\right)$

따라서

$|\sin 2x-\sin x|=\begin{cases} \sin 2x-\sin x & \left(0\le x\le\frac{\pi}{3}\right) \\ -\sin 2x+\sin x & \left(\frac{\pi}{3}\le x\le\frac{\pi}{2}\right)\end{cases}$

이므로

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\sin 2x-\sin x|dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}(\sin 2x-\sin x)dx+\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}(-\sin 2x+\sin x)dx$

$=\left[-\frac{1}{2}\cos 2x+\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{3}}+\left[\frac{1}{2}\cos 2x-\cos x\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}$

$=\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\right)$

$=\frac{1}{2}$

답 $\frac{1}{2}$

**100-❶** (1) $\cos\frac{\pi}{2}x$는 우함수이므로

$\int_{-1}^1\cos\frac{\pi}{2}x\,dx=2\int_0^1\cos\frac{\pi}{2}x\,dx$

$\sin \pi x$, $\cos \pi x \tan \frac{\pi}{4} x$는 기함수이므로

$$\int_{-1}^{1}\left(\sin \pi x+\cos \pi x \tan \frac{\pi}{4} x\right) dx=0$$

$$\therefore (\text{주어진 식})=2\int_{0}^{1} \cos \frac{\pi}{2} x\, dx$$

$$=2\left[\frac{2}{\pi}\sin \frac{\pi}{2} x\right]_{0}^{1}=\frac{4}{\pi}$$

(2) $2^{x}+2^{-x}$은 우함수이므로

$$\int_{-1}^{1}(2^{x}+2^{-x}) dx=2\int_{0}^{1}(2^{x}+2^{-x}) dx$$

$3^{x}-3^{-x}$은 기함수이므로

$$\int_{-1}^{1}(3^{x}-3^{-x}) dx=0$$

$$\therefore (\text{주어진 식})=2\int_{0}^{1}(2^{x}+2^{-x}) dx$$

$$=2\left[\frac{2^{x}}{\ln 2}-\frac{2^{-x}}{\ln 2}\right]_{0}^{1}$$

$$=2\left(\frac{2}{\ln 2}-\frac{1}{2\ln 2}\right)$$

$$=2\cdot\frac{3}{2\ln 2}=\frac{3}{\ln 2}$$

답 (1) $\frac{4}{\pi}$ (2) $\frac{3}{\ln 2}$

**Remark▶**

$a>0$, $a\neq 1$일 때

① $f(x)=a^{x}+a^{-x}$이면

$f(-x)=a^{-x}+a^{x}=f(x)$

이므로 $f(x)$는 우함수이다.

② $g(x)=a^{x}-a^{-x}$이면

$g(-x)=a^{-x}-a^{x}=-(a^{x}-a^{-x})=-g(x)$

이므로 $g(x)$는 기함수이다.

**101-❶** $\int_{-1}^{1} f(x) dx=\int_{-1}^{1}(e^{x}+e^{-x}) dx$

$$=2\int_{0}^{1}(e^{x}+e^{-x}) dx$$

$$=2\left[e^{x}-e^{-x}\right]_{0}^{1}=2\left(e-\frac{1}{e}\right)$$

한편 $f(x-1)=f(x+1)$, 즉 $f(x)=f(x+2)$에서 $f(x)$는 주기함수이므로

$$\int_{-1}^{1} f(x) dx=\int_{1}^{3} f(x) dx=\cdots=\int_{9}^{11} f(x) dx$$

$$\therefore \int_{-1}^{11} f(x) dx=6\int_{-1}^{1} f(x) dx$$

$$=6\cdot 2\left(e-\frac{1}{e}\right)$$

$$=12\left(e-\frac{1}{e}\right)$$

답 $12\left(e-\frac{1}{e}\right)$

**102-❶** (1) $x^{2}+1=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=2x$이고, $x=0$일 때 $t=1$, $x=1$일 때 $t=2$이므로

$$\int_{0}^{1} x\sqrt{x^{2}+1}\, dx=\int_{1}^{2}\frac{1}{2}\sqrt{t}\, dt$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_{1}^{2}$$

$$=\frac{1}{3}(2\sqrt{2}-1)$$

(2) $x^{2}-x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=2x-1$이고, $x=1$일 때 $t=0$, $x=2$일 때 $t=2$이므로

$$\int_{1}^{2}(2x-1)3^{x^{2}-x} dx=\int_{0}^{2} 3^{t} dt$$

$$=\left[\frac{3^{t}}{\ln 3}\right]_{0}^{2}$$

$$=\frac{9}{\ln 3}-\frac{1}{\ln 3}=\frac{8}{\ln 3}$$

(3) $\ln x+1=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}$이고, $x=1$일 때 $t=1$, $x=e$일 때 $t=2$이므로

$$\int_{1}^{e}\frac{1}{x(\ln x+1)^{2}} dx=\int_{1}^{2}\frac{1}{t^{2}} dt=\left[-\frac{1}{t}\right]_{1}^{2}$$

$$=-\frac{1}{2}-(-1)=\frac{1}{2}$$

(4) $e^{2x}+1=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=2e^{2x}$이고, $x=0$일 때 $t=2$, $x=\ln 2$일 때 $t=5$이므로

$$\int_{0}^{\ln 2}\frac{e^{2x}}{e^{2x}+1} dx=\int_{2}^{5}\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t} dt$$

$$=\frac{1}{2}\left[\ln|t|\right]_{2}^{5}$$

$$=\frac{1}{2}(\ln 5-\ln 2)$$

$$=\frac{1}{2}\ln\frac{5}{2}$$

(5) $\sin^{2} x=1-\cos^{2} x$이므로

$$\int_{0}^{\pi}\sin^{3} x\, dx=\int_{0}^{\pi}(1-\cos^{2} x)\sin x\, dx$$

$\cos x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=-\sin x$이고, $x=0$일 때 $t=1$, $x=\pi$일 때 $t=-1$이므로

$$\int_{0}^{\pi}(1-\cos^{2} x)\sin x\, dx$$

$$=\int_{1}^{-1}\{-(1-t^{2})\} dt=\int_{-1}^{1}(1-t^{2}) dt$$

$$=\left[t-\frac{1}{3}t^{3}\right]_{-1}^{1}=\frac{2}{3}-\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{4}{3}$$

(6) $1+\sin x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=\cos x$이고, $x=0$일 때 $t=1$, $x=\frac{\pi}{2}$일 때 $t=2$이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+\sin x}dx=\int_1^2 \frac{1}{t}dt$$
$$=\Big[\ln|t|\Big]_1^2$$
$$=\ln 2$$

답 (1) $\frac{1}{3}(2\sqrt{2}-1)$ (2) $\frac{8}{\ln 3}$ (3) $\frac{1}{2}$
(4) $\frac{1}{2}\ln\frac{5}{2}$ (5) $\frac{4}{3}$ (6) $\ln 2$

다른 풀이 (1) $\sqrt{x^2+1}=t$로 놓으면

$$\frac{dt}{dx}=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}=\frac{x}{t}$$

또 $x=0$일 때 $t=1$, $x=1$일 때 $t=\sqrt{2}$이므로

$$\int_0^1 x\sqrt{x^2+1}\,dx=\int_1^{\sqrt{2}} t^2\,dt=\Big[\frac{1}{3}t^3\Big]_1^{\sqrt{2}}$$
$$=\frac{1}{3}(2\sqrt{2}-1)$$

**103-❶** (1) $x=2\sin\theta\left(-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right)$로 놓으면

$\frac{dx}{d\theta}=2\cos\theta$이고, $x=-1$일 때 $\theta=-\frac{\pi}{6}$, $x=0$ 일 때 $\theta=0$이므로

$$\int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx=\int_{-\frac{\pi}{6}}^0 \frac{2\cos\theta}{\sqrt{4(1-\sin^2\theta)}}d\theta$$
$$=\int_{-\frac{\pi}{6}}^0 \frac{2\cos\theta}{\sqrt{4\cos^2\theta}}d\theta$$
$$=\int_{-\frac{\pi}{6}}^0 \frac{2\cos\theta}{2\cos\theta}d\theta$$
$$=\int_{-\frac{\pi}{6}}^0 d\theta$$
$$=\Big[\theta\Big]_{-\frac{\pi}{6}}^0=\frac{\pi}{6}$$

(2) $x=\sqrt{3}\tan\theta\left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$로 놓으면

$\frac{dx}{d\theta}=\sqrt{3}\sec^2\theta$이고, $x=0$일 때 $\theta=0$, $x=3$일 때 $\theta=\frac{\pi}{3}$이므로

$$\int_0^3 \frac{1}{x^2+3}dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{3}\sec^2\theta}{3(\tan^2\theta+1)}d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{3}\sec^2\theta}{3\sec^2\theta}d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{3}}{3}d\theta$$
$$=\Big[\frac{\sqrt{3}}{3}\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{9}\pi$$

답 (1) $\frac{\pi}{6}$ (2) $\frac{\sqrt{3}}{9}\pi$

**104-❶** (1) $f(x)=x$, $g'(x)=e^{-x}$으로 놓으면 $f'(x)=1$, $g(x)=-e^{-x}$이므로

$$\int_0^1 xe^{-x}dx=\Big[-xe^{-x}\Big]_0^1-\int_0^1(-e^{-x})dx$$
$$=-\frac{1}{e}-\Big[e^{-x}\Big]_0^1$$
$$=-\frac{1}{e}-\left(\frac{1}{e}-1\right)=1-\frac{2}{e}$$

(2) $f(x)=\ln x$, $g'(x)=\frac{1}{x^2}$로 놓으면 $f'(x)=\frac{1}{x}$, $g(x)=-\frac{1}{x}$이므로

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}dx=\Big[-\frac{1}{x}\ln x\Big]_1^e-\int_1^e\left(-\frac{1}{x^2}\right)dx$$
$$=-\frac{1}{e}-\Big[\frac{1}{x}\Big]_1^e$$
$$=-\frac{1}{e}-\left(\frac{1}{e}-1\right)=1-\frac{2}{e}$$

(3) $f(x)=x$, $g'(x)=\sin x+\cos x$로 놓으면 $f'(x)=1$, $g(x)=-\cos x+\sin x$이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x(\sin x+\cos x)dx$$
$$=\Big[x(-\cos x+\sin x)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$-\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-\cos x+\sin x)dx$$
$$=\frac{\pi}{2}-\Big[-\sin x-\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=\frac{\pi}{2}-\{-1-(-1)\}=\frac{\pi}{2}$$

답 (1) $1-\frac{2}{e}$ (2) $1-\frac{2}{e}$ (3) $\frac{\pi}{2}$

**105-❶** (1) $\int_1^2 tf(t)dt=k$ ($k$는 상수) …… ㉠

로 놓으면 $f(x)=\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}+k$

$f(t)=\frac{2}{t}-\frac{1}{t^2}+k$를 ㉠의 좌변에 대입하면

$$\int_1^2 t\left(\frac{2}{t}-\frac{1}{t^2}+k\right)dt=\int_1^2\left(2-\frac{1}{t}+kt\right)dt$$
$$=\Big[2t-\ln|t|+\frac{k}{2}t^2\Big]_1^2$$
$$=\frac{3}{2}k-\ln 2+2$$

즉 $\frac{3}{2}k-\ln 2+2=k$이므로

$k=2\ln 2-4$

따라서 $f(x)=\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}+2\ln 2-4$이므로

$f(1)=2-1+2\ln 2-4=2\ln 2-3$

(2) $\int_0^1 f(t)e^{-t}dt=k$ ($k$는 상수) $\cdots\cdots$ ㉠

로 놓으면 $f(x)=e^x+k$

$f(t)=e^t+k$를 ㉠의 좌변에 대입하면

$$\int_0^1 (e^t+k)e^{-t}dt=\int_0^1 (1+ke^{-t})dt$$
$$=\Big[t-ke^{-t}\Big]_0^1$$
$$=1-\frac{k}{e}+k$$

즉 $1-\frac{k}{e}+k=k$이므로 $k=e$

따라서 $f(x)=e^x+e$이므로

$f(1)=e+e=2e$

답 (1) $2\ln2-3$ (2) $2e$

**106-❶** 주어진 등식의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$f(x)=(\sin x+\cos x)+x(\cos x-\sin x)$

$\therefore f(\pi)=-1+\pi\cdot(-1)=-\pi-1$

답 $-\pi-1$

**106-❷** 주어진 등식의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$xf(x)=e^x+xe^x+ae^x$

주어진 등식의 양변에 $x=0$을 대입하면

$0=a+1$ $\quad\therefore a=-1$

따라서 $xf(x)=xe^x$이므로 $x\neq0$일 때,

$f(x)=e^x$

이때 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하므로 $x=0$에서 연속이다.

$\therefore f(0)=\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}e^x=1$

답 1

**107-❶** $G(x)=\int_0^x (x-t)f'(t)dt$

$$=x\int_0^x f'(t)dt-\int_0^x tf'(t)dt$$

이므로 $G(x)=x\int_0^x f'(t)dt-\int_0^x tf'(t)dt$의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$$G'(x)=\int_0^x f'(t)dt+xf'(x)-xf'(x)$$
$$=\int_0^x f'(t)dt$$

$f'(t)$의 한 부정적분은 $f(t)$이므로

$$\int_0^x f'(t)dt=\Big[f(t)\Big]_0^x=f(x)-f(0)$$

$$\therefore G'(x)=f(x)-f(0)$$
$$=(e^{2x}-x+2)-(1+2)$$
$$=e^{2x}-x-1$$

답 $G'(x)=e^{2x}-x-1$

**107-❷** $\int_0^x (x-t)f'(t)dt$

$$=x\int_0^x f'(t)dt-\int_0^x tf'(t)dt$$

이므로 주어진 등식은

$$x\int_0^x f'(t)dt-\int_0^x tf'(t)dt=\frac{1}{2}\sin2x-x$$

양변을 $x$에 대하여 미분하면

$$\int_0^x f'(t)dt+xf'(x)-xf'(x)=\cos2x-1$$
$$\int_0^x f'(t)dt=\cos2x-1$$
$$\Big[f(t)\Big]_0^x=\cos2x-1$$
$$f(x)-f(0)=\cos2x-1$$

이때 $f(0)=1$이므로 $f(x)=\cos2x$

답 $f(x)=\cos2x$

**108-❶** $f(x)=\int_0^x \sqrt{t}(1-t)dt$의 양변을 $x$에 대하여 미분하면 $f'(x)=\sqrt{x}(1-x)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ ($\because x>0$)

$x>0$에서 함수 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

| $x$ | 0 | $\cdots$ | 1 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | 0 | − |
| $f(x)$ | | ↗ | 극대 | ↘ |

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$일 때 극대이고

$$f(1)=\int_0^1 \sqrt{t}(1-t)dt=\int_0^1 (t^{\frac{1}{2}}-t^{\frac{3}{2}})dt$$
$$=\Big[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}\Big]_0^1=\frac{2}{3}-\frac{2}{5}=\frac{4}{15}$$

이므로 극댓값은 $\frac{4}{15}$이다.

답 극댓값: $\frac{4}{15}$

**Remark▶**

$f''(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}(1-x)-\sqrt{x}$에서 $f''(1)=-1<0$이므로 $f(x)$는 $x=1$에서 극대이다.

**108-❷** $f(x)=\int_0^x (e^t-1)(e^t+1)dt$의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$f'(x)=(e^x-1)(e^x+1)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ ($\because e^x+1>0$)

함수 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | 0 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | − | 0 | + |
| $f(x)$ | ↘ | 극소 | ↗ |

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$일 때 극소이면서 최소이고

$$f(0)=\int_0^0 (e^t-1)(e^t+1)dt=0$$

이므로 최솟값은 0이다. 답 0

**109-❶** (1) $f(t)=t(1-\cos t)^2$으로 놓고, $f(t)$의 한 부정적분을 $F(t)$라 하면 주어진 식은

$$\lim_{x\to\pi}\frac{1}{x-\pi}\int_\pi^x f(t)\,dt=\lim_{x\to\pi}\frac{1}{x-\pi}\Big[F(t)\Big]_\pi^x$$
$$=\lim_{x\to\pi}\frac{F(x)-F(\pi)}{x-\pi}$$
$$=F'(\pi)=f(\pi)$$
$$=\pi(1-\cos\pi)^2$$
$$=4\pi$$

(2) $f(t)=e^t\ln(t+1)$로 놓고, $f(t)$의 한 부정적분을 $F(t)$라 하면 주어진 식은

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\int_1^{1-x} f(t)dt$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\Big[F(t)\Big]_1^{1-x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{F(1-x)-F(1)}{x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{F(1-x)-F(1)}{-x}\cdot(-1)$$
$$=-F'(1)$$
$$=-f(1)$$
$$=-e\ln2$$

답 (1) $4\pi$ (2) $-e\ln2$

## 중단원 연습 문제

본책 260~264쪽

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **01** (1) $\frac{8}{3}$ (2) $\pi+2$ | | | **02** 6 | **03** 8 |
| **04** $e^2+e-2$ | | **05** $\sqrt{3}$ | **06** 2 | **07** $\frac{4}{3}$ |
| **08** $\frac{1}{3}$ | **09** ④ | **10** $\pi-2$ | **11** 1 | **12** ① |
| **13** 0 | **14** ① | **15** ② | **16** ① | |
| **17** $2\left(e^2+\frac{1}{e^3}\right)-1$ | | **18** 30 | **19** ④ | **20** ⑤ |
| **21** ② | **22** ⑤ | | | |

**01** 전략 정적분의 성질을 이용하여 계산한다.

풀이 (1) (주어진 식)

$$=\int_1^2\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx+\int_2^4\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$$
$$=\int_1^4\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-2x^{\frac{1}{2}}\right]_1^4$$
$$=\left(\frac{16}{3}-4\right)-\left(\frac{2}{3}-2\right)=\frac{8}{3}$$

(2) (주어진 식)

$$=\int_0^\pi(\sin\theta+\sin^2\theta+\cos\theta+\cos^2\theta)d\theta$$
$$=\int_0^\pi(1+\sin\theta+\cos\theta)d\theta$$
$$=\Big[\theta-\cos\theta+\sin\theta\Big]_0^\pi$$
$$=(\pi+1)-(-1)$$
$$=\pi+2$$

답 (1) $\frac{8}{3}$ (2) $\pi+2$

**02** 전략 인수분해를 이용하여 피적분함수를 적분하기 쉬운 꼴로 변형한다.

풀이
$$\int_0^k\frac{e^{2x}-1}{e^x+1}dx=\int_0^k\frac{(e^x+1)(e^x-1)}{e^x+1}dx$$
$$=\int_0^k(e^x-1)dx$$
$$=\Big[e^x-x\Big]_0^k$$
$$=e^k-k-1$$

따라서 $e^k-k-1=e^6-7$이므로 $k=6$ 답 6

**03** 전략 $f(x)=\int f'(x)dx$임을 이용하여 $f(x)$를 구한다.

풀이 $f'(x)=\pi^2\cos\frac{\pi}{4}x$이므로

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int\pi^2\cos\frac{\pi}{4}x\,dx$$
$$=\pi^2\int\cos\frac{\pi}{4}x\,dx=\pi^2\cdot\frac{4}{\pi}\sin\frac{\pi}{4}x+C$$
$$=4\pi\sin\frac{\pi}{4}x+C$$

이때 $f(0)=1$이므로 $C=1$

$$\therefore f(x)=4\pi\sin\frac{\pi}{4}x+1$$
$$\therefore \int_0^8 f(x)dx=\int_0^8\left(4\pi\sin\frac{\pi}{4}x+1\right)dx$$
$$=\left[-16\cos\frac{\pi}{4}x+x\right]_0^8$$
$$=(-16+8)-(-16)$$
$$=8$$

답 8

**04** 전략 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 $x$의 값을 경계로 구간을 나누어 구한다.

풀이 $f(x)=\begin{cases} e^{x} & (x\ge 0) \\ e^{-x} & (x\le 0) \end{cases}$이고 $y=f(x-1)$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프를 $x$축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로

$$\begin{aligned}\int_0^3 f(x-1)dx &= \int_{-1}^2 f(x)dx \\ &= \int_{-1}^0 e^{-x}dx+\int_0^2 e^{x}dx \\ &= \Big[-e^{-x}\Big]_{-1}^0+\Big[e^{x}\Big]_0^2 \\ &= (-1+e)+(e^2-1) \\ &= e^2+e-2\end{aligned}$$

답 $e^2+e-2$

**05** 전략 피적분함수를 우함수와 기함수로 나누어 계산한다.

풀이 $\cos x$는 우함수이므로

$$\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \cos x\,dx=2\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos x\,dx$$

$x\cos x$, $x^3\cos x$는 기함수이므로

$$\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (x\cos x+x^3\cos x)dx=0$$

$$\begin{aligned}\therefore \text{(주어진 식)} &= 2\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos x\,dx \\ &= 2\Big[\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{3}} \\ &= \sqrt{3}\end{aligned}$$

답 $\sqrt{3}$

**06** 전략 주기함수의 성질을 이용한다.

풀이 $f(x)=|\sin 4x|$로 놓으면 $f(x)=f\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$에서 $f(x)$는 주기함수이므로

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} |\sin 4x|\,dx &= 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} |\sin 4x|\,dx \\ &= 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 4x\,dx \\ &= 4\Big[-\frac{1}{4}\cos 4x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= 4\Big\{\frac{1}{4}-\Big(-\frac{1}{4}\Big)\Big\}=2\end{aligned}$$

답 2

**07** 전략 $\ln x=t$로 놓고 치환적분법을 이용한다.

풀이 $\ln x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}$이고, $x=1$일 때 $t=0$, $x=e$일 때 $t=1$이므로

$$\begin{aligned}\int_1^e \frac{\ln x^2+(\ln x)^2}{x}dx &= \int_1^e \frac{2\ln x+(\ln x)^2}{x}dx \\ &= \int_0^1 (2t+t^2)dt \\ &= \Big[t^2+\frac{1}{3}t^3\Big]_0^1 \\ &= 1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}\end{aligned}$$

답 $\frac{4}{3}$

**08** 전략 삼각함수 사이의 관계를 이용하여 피적분함수를 정리한 후 치환적분법을 이용한다.

풀이 $f(x)=1-x^2$, $g(x)=\cos x$이므로

$$\begin{aligned}&\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(g(x))g(x)dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2 x)\cos x\,dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\cos x\,dx \quad \cdots ❶\end{aligned}$$

$\sin x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=\cos x$이고, $x=0$일 때 $t=0$, $x=\frac{\pi}{2}$일 때 $t=1$이므로

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\cos x\,dx &= \int_0^1 t^2\,dt \\ &= \Big[\frac{1}{3}t^3\Big]_0^1=\frac{1}{3} \quad \cdots ❷\end{aligned}$$

답 $\frac{1}{3}$

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ❶ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(g(x))g(x)dx$에 $f(x)=1-x^2$, $g(x)=\cos x$를 대입하여 식을 정리할 수 있다. | 50 % |
| ❷ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(g(x))g(x)dx$의 값을 구할 수 있다. | 50 % |

**09** 전략 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$임을 이용하여 피적분함수를 $\cos\theta$에 대한 함수로 변형한다.

풀이 $x=\sin\theta\left(-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right)$로 놓으면 $\frac{dx}{d\theta}=\cos\theta$이고, $x=0$일 때 $\theta=0$, $x=1$일 때 $\theta=\frac{\pi}{2}$이므로

$$\begin{aligned}\int_0^1 2\sqrt{1-x^2}\,dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sqrt{1-\sin^2\theta}\cdot\cos\theta\,d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sqrt{\cos^2\theta}\cdot\cos\theta\,d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\boxed{\cos^2\theta}\,d\theta\end{aligned}$$

이때 $\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1$에서 $\cos^2\theta=\frac{1+\cos 2\theta}{2}$이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos^2\theta\, d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cdot\frac{1+\cos 2\theta}{2}\, d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\boxed{\cos 2\theta})\, d\theta$$
$$=\left[\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\boxed{\frac{\pi}{2}}$$

$\therefore$ (가) $\cos^2\theta$ (나) $\cos 2\theta$ (다) $\frac{\pi}{2}$ 　답 ④

**10** 전략 $f(x)=x^2$, $g'(x)=\sin x$로 놓고 부분적분법을 이용한다.

풀이 $f(x)=x^2$, $g'(x)=\sin x$로 놓으면
$f'(x)=2x$, $g(x)=-\cos x$이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\sin x\, dx$$
$$=\left[-x^2\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-2x\cos x)dx \quad \cdots ❶$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x\cos x\, dx$$

이때 $u(x)=2x$, $v'(x)=\cos x$로 놓으면 $u'(x)=2$, $v(x)=\sin x$이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x\cos x\, dx$$
$$=\left[2x\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin x\, dx \quad \cdots ❷$$
$$=\pi-2\left[-\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=\pi-2\cdot 1$$
$$=\pi-2 \quad \cdots ❸$$

답 $\pi-2$

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ❶ $f(x)=x^2$, $g'(x)=\sin x$로 놓고 부분적분법을 이용할 수 있다. | 40 % |
| ❷ $u(x)=2x$, $v'(x)=\cos x$로 놓고 부분적분법을 이용할 수 있다. | 40 % |
| ❸ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\sin x dx$의 값을 구할 수 있다. | 20 % |

**11** 전략 피적분함수에 변수 $x$가 포함되지 않도록 변형한 후 양변을 $x$에 대하여 미분한다.

풀이 $f(x)=\int_0^x (x-t)\cos t\, dt$
$$=x\int_0^x \cos t\, dt-\int_0^x t\cos t\, dt$$

이므로 $f(x)=x\int_0^x \cos t\, dt-\int_0^x t\cos t\, dt$의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$$f'(x)=\int_0^x \cos t\, dt+x\cos x-x\cos x$$
$$=\int_0^x \cos t\, dt=\left[\sin t\right]_0^x$$
$$=\sin x \quad \cdots ❶$$
$$\therefore f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sin\frac{\pi}{2}=1 \quad \cdots ❷$$

답 1

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ❶ $f'(x)$를 구할 수 있다. | 80 % |
| ❷ $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$의 값을 구할 수 있다. | 20 % |

**12** 전략 $\lim_{x\to a}\frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)dt=f(a)$임을 이용한다.

풀이 $f(t)$의 한 부정적분을 $F(t)$라 하면

$$\lim_{x\to 2}\frac{1}{x-2}\int_2^x f(t)dt=\lim_{x\to 2}\frac{1}{x-2}\left[F(t)\right]_2^x$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{F(x)-F(2)}{x-2}$$
$$=F'(2)=f(2)$$
$$=1-\sin 2\pi$$
$$=1$$

답 ①

**13** 전략 $x=0$, $0<x<1$, $x=1$, $x>1$인 경우로 나누어 $f(x)$를 구한다.

풀이 $f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^n+4x-3}{x^{n+1}+1}$에서

(i) $x=0$일 때, 　$f(0)=-3$

(ii) $0<x<1$일 때, $\lim_{n\to\infty}x^n=\lim_{n\to\infty}x^{n+1}=0$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^n+4x-3}{x^{n+1}+1}=4x-3$$

(iii) $x=1$일 때, 　$f(1)=1$

(iv) $x>1$일 때, $\lim_{n\to\infty}x^n=\lim_{n\to\infty}x^{n+1}=\infty$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^n+4x-3}{x^{n+1}+1}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{x}+\frac{4}{x^n}-\frac{3}{x^{n+1}}}{1+\frac{1}{x^{n+1}}}=\frac{1}{x}$$

이상에서

$$f(x)=\begin{cases}4x-3 & (0\le x\le 1)\\ \frac{1}{x} & (x\ge 1)\end{cases} \quad \cdots ❶$$

09 정적분

$$\therefore \int_0^e f(x)dx=\int_0^1 f(x)dx+\int_1^e f(x)dx$$
$$=\int_0^1 (4x-3)dx+\int_1^e \frac{1}{x}dx$$
$$=\Big[2x^2-3x\Big]_0^1+\Big[\ln|x|\Big]_1^e$$
$$=-1+1=0 \quad \cdots ❷$$

답 0

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ❶ $x$의 값의 범위를 나누어 $f(x)$를 구할 수 있다. | 50 % |
| ❷ $\int_0^e f(x)dx$의 값을 구할 수 있다. | 50 % |

**14** 전략 치환적분법을 이용하여 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x+\cos x}dx$를 변형한다.

풀이 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x+\cos x}{\sin x+\cos x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx$이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x+\cos x}dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \quad \cdots\cdots ㉠$$

이때 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x+\cos x}dx$에서 $x=\boxed{\frac{\pi}{2}-t}$로 놓으면

$\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=\cos t$, $\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=\sin t$이고

$\frac{dx}{dt}=\boxed{-1}$이다.

또 $x=0$일 때 $t=\frac{\pi}{2}$, $x=\frac{\pi}{2}$일 때 $t=0$이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x+\cos x}dx$$
$$=\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \left(-\frac{\sin t}{\sin t+\cos t}\right)dt$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx=\Big[x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}$$
$$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx=\boxed{\frac{\pi}{4}}$$

$\therefore$ (가) $\frac{\pi}{2}-t$ (나) $-1$ (다) $\frac{\pi}{4}$

답 ①

**15** 전략 $\cos x=t$로 놓고 치환적분법을 이용한다.

풀이 $a_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\sin x\,dx$에서 $\cos x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=-\sin x$이고, $x=0$일 때 $t=1$, $x=\frac{\pi}{2}$일 때 $t=0$이므로

$$a_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\sin x\,dx$$
$$=\int_1^0 t^n\cdot(-1)dt=\int_0^1 t^n dt$$
$$=\left[\frac{1}{n+1}t^{n+1}\right]_0^1=\frac{1}{n+1}$$
$$\therefore \sum_{n=1}^{98} a_n a_{n+1}=\sum_{n=1}^{98}\frac{1}{(n+1)(n+2)}$$
$$=\sum_{n=1}^{98}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$
$$=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)$$
$$+\cdots+\left(\frac{1}{99}-\frac{1}{100}\right)$$
$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{100}=\frac{49}{100}$$

답 ②

**16** 전략 부분적분법을 이용하여 함수 $f(x)$를 구한다.

풀이 $f(x)=x^2+\int_0^x t^2\sin(t-x)dt$에서 $u(t)=t^2$, $v'(t)=\sin(t-x)$로 놓으면

$u'(t)=2t$, $v(t)=-\cos(t-x)$

이므로

$$f(x)=x^2+\Big[-t^2\cos(t-x)\Big]_0^x$$
$$-\int_0^x \{-2t\cos(t-x)\}dt$$
$$=x^2-x^2+\int_0^x 2t\cos(t-x)dt$$
$$=\int_0^x 2t\cos(t-x)dt$$

이때 $p(t)=2t$, $q'(t)=\cos(t-x)$로 놓으면

$p'(t)=2$, $q(t)=\sin(t-x)$이므로

$$f(x)=\Big[2t\sin(t-x)\Big]_0^x-\int_0^x 2\sin(t-x)dt$$
$$=\Big[2\cos(t-x)\Big]_0^x$$
$$=2-2\cos(-x)=2-2\cos x$$

ㄱ. $\cos x=\cos(-x)$이므로 $f(x)=f(-x)$이다.

ㄴ. $f'(x)=2\sin x$이고, $f'(x)=0$에서

$x=-\pi$ 또는 $x=0$ 또는 $x=\pi$

$(\because -2\pi<x<2\pi)$

구간 $(-2\pi, 2\pi)$에서 함수 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

| $x$ | $-2\pi$ | $\cdots$ | $-\pi$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ | $\pi$ | $\cdots$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | | ↗ | 극대 | ↘ | 극소 | ↗ | 극대 | ↘ | |

이때 $f(-\pi)=2-2\cos(-\pi)=4$,
$f(0)=2-2\cos 0=0$, $f(\pi)=2-2\cos\pi=4$이므로 서로 다른 극값의 개수는 2이다.

ㄷ. $f(x)=2$에서 $2-2\cos x=2$, 즉 $\cos x=0$이므로 구간 $(-2\pi,\ 2\pi)$에서

$$x=-\frac{3}{2}\pi \text{ 또는 } x=-\frac{\pi}{2}$$

$$\text{또는 } x=\frac{\pi}{2} \text{ 또는 } x=\frac{3}{2}\pi$$

따라서 방정식 $f(x)=2$의 실근의 개수는 4이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ뿐이다. 답 ①

**17** 전략 주어진 그래프를 이용하여 함수 $f(x)$를 구한다.

풀이 $f(x)=\begin{cases} x-1 & (0\le x\le 3) \\ 2 & (3\le x\le 5)\end{cases}$이므로

$$f(x+3)=\begin{cases} x+2 & (-3\le x\le 0) \\ 2 & (0\le x\le 2)\end{cases}$$

$$\therefore \int_{-3}^{2} e^x f(x+3)dx$$
$$=\int_{-3}^{0} e^x f(x+3)dx+\int_{0}^{2} e^x f(x+3)dx$$
$$=\int_{-3}^{0}(x+2)e^x dx+\int_{0}^{2}2e^x dx \quad \cdots\cdots ㉠$$

$\int_{-3}^{0}(x+2)e^x dx$에서 $u(x)=x+2$, $v'(x)=e^x$으로 놓으면 $u'(x)=1$, $v(x)=e^x$이므로

$$\int_{-3}^{0}(x+2)e^x dx=\Big[(x+2)e^x\Big]_{-3}^{0}-\int_{-3}^{0}e^x dx$$
$$=(2+e^{-3})-\Big[e^x\Big]_{-3}^{0}$$
$$=2+e^{-3}-(1-e^{-3})$$
$$=1+\frac{2}{e^3} \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$\int_{-3}^{2}e^x f(x+3)dx=1+\frac{2}{e^3}+2\Big[e^x\Big]_{0}^{2}$$
$$=1+\frac{2}{e^3}+2(e^2-1)$$
$$=2\left(e^2+\frac{1}{e^3}\right)-1$$

답 $2\left(e^2+\frac{1}{e^3}\right)-1$

**18** 전략 주어진 등식의 양변을 $x$에 대하여 미분하여 $\frac{f'(x)}{f(x)}$를 구한다.

풀이 주어진 등식의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$$f(x)+xf'(x)-3=2f(x)-3$$

$$\therefore \frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{x} \quad \cdots ❶$$

위의 등식의 양변을 $x$에 대하여 적분하면

$$\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\int\frac{1}{x}dx$$

$$\therefore \ln f(x)=\ln x+C\ (\because x>0,\ f(x)>0) \quad \cdots\cdots ㉠$$

주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$f(1)-3=0 \quad \therefore f(1)=3$

$x=1$을 ㉠에 대입하면

$\ln f(1)=C \quad \therefore C=\ln 3$

따라서 $\ln f(x)=\ln x+\ln 3=\ln 3x$이므로

$f(x)=3x$ ··· ❷

$\therefore f(10)=30$ ··· ❸

답 30

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ❶ $\frac{f'(x)}{f(x)}$를 구할 수 있다. | 30 % |
| ❷ $f(x)$를 구할 수 있다. | 60 % |
| ❸ $f(10)$의 값을 구할 수 있다. | 10 % |

**19** 전략 피적분함수를 변형한 후 치환적분법을 이용하여 $f(x)$를 구한다.

풀이 $f(x)=\int_0^x \frac{1}{1+e^{-t}}dt=\int_0^x\frac{e^t}{1+e^t}dt$에서

$1+e^t=s$로 놓으면 $\frac{ds}{dt}=e^t$이고, $t=0$일 때 $s=2$, $t=x$일 때 $s=1+e^x$이므로

$$f(x)=\int_0^x\frac{e^t}{1+e^t}dt=\int_2^{1+e^x}\frac{1}{s}ds$$
$$=\Big[\ln|s|\Big]_2^{1+e^x}=\ln(1+e^x)-\ln 2$$
$$=\ln\frac{1+e^x}{2}$$

$$\therefore (f\circ f)(a)=f(f(a))=f\left(\ln\frac{1+e^a}{2}\right)$$
$$=\ln\frac{1+e^{\ln\frac{1+e^a}{2}}}{2}=\ln\frac{1+\frac{1+e^a}{2}}{2}$$
$$=\ln\frac{3+e^a}{4}$$

즉 $\ln\frac{3+e^a}{4}=\ln 5$이므로

$\frac{3+e^a}{4}=5,\qquad e^a=17$

$\therefore a=\ln 17$ 답 ④

**20** 전략 $1-x=t$로 놓고 치환적분법을 이용한다.

풀이 ㄱ. $1-x=t$로 놓으면 $x=1-t$에서 $\frac{dx}{dt}=-1$이고, $x=0$일 때 $t=1$, $x=1$일 때 $t=0$이므로

$$\int_0^1\{f(x)g'(1-x)-g(x)f'(1-x)\}dx$$
$$=\int_1^0\{f(1-t)g'(t)-g(1-t)f'(t)\}\cdot(-1)dt$$
$$=-\int_0^1\{f'(t)g(1-t)-g'(t)f(1-t)\}dt$$
$$=-k$$

ㄴ. $1-x=t$로 놓으면 $x=1-t$에서 $\frac{dx}{dt}=-1$이고, $x=0$일 때 $t=1$, $x=1$일 때 $t=0$이므로

$$\int_0^1 g'(x)f(1-x)dx=\int_1^0 g'(1-t)f(t)\cdot(-1)dt$$
$$=\int_0^1 f(t)g'(1-t)dt$$

에서

$$\int_0^1\{f'(x)g(1-x)-g'(x)f(1-x)\}dx$$
$$=\int_0^1\{f'(x)g(1-x)-f(x)g'(1-x)\}dx$$
$$=\int_0^1\{f(x)g(1-x)\}'dx=\Big[f(x)g(1-x)\Big]_0^1$$
$$=f(1)g(0)-f(0)g(1)$$
$$\therefore f(1)g(0)-f(0)g(1)=k$$

이때 $f(0)=f(1)$, $g(0)=g(1)$이면

$k=0$

ㄷ. $f(x)=\ln(1+x^4)$에서 $\qquad f(0)=0,\ f(1)=\ln 2$

$g(x)=\sin\pi x$에서 $\qquad g(0)=0,\ g(1)=0$

ㄴ에서 $k=f(1)g(0)-f(0)g(1)$이므로

$k=\ln 2\cdot 0-0\cdot 0=0$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

**21** 전략 주어진 등식의 양변을 $x$에 대하여 미분하여 $f(x)$를 구한다.

풀이 주어진 등식의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$f(x)=2x-\frac{a}{2\sqrt{x}}$

주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$0=1-a\qquad\therefore a=1$

따라서 $f(x)=2x-\frac{1}{2\sqrt{x}}$이므로

$f(1)=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$ 답 ②

**22** 전략 평균값 정리와 사잇값의 정리를 이용하여 참, 거짓을 판별한다.

풀이 ㄱ. $f(\sqrt{\pi})=e^{-\sqrt{\pi}}\int_0^{\sqrt{\pi}}\sin(t^2)dt$

$0\le t\le\sqrt{\pi}$에서 $\sin(t^2)\ge 0$이므로

$$\int_0^{\sqrt{\pi}}\sin(t^2)dt>0$$

또 $e^{-\sqrt{\pi}}>0$이므로 $\qquad f(\sqrt{\pi})>0$

ㄴ. 주어진 등식의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$$f'(x)=-e^{-x}\int_0^x\sin(t^2)dt+e^{-x}\sin(x^2)$$

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[0, \sqrt{\pi}]$에서 연속이고 열린구간 $(0, \sqrt{\pi})$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$$f'(a)=\frac{f(\sqrt{\pi})-f(0)}{\sqrt{\pi}-0}$$

을 만족시키는 $a$가 열린구간 $(0, \sqrt{\pi})$에 적어도 하나 존재한다.

이때 $f(0)=0$, $f(\sqrt{\pi})>0$이므로

$f'(a)>0$

을 만족시키는 $a$가 열린구간 $(0, \sqrt{\pi})$에 적어도 하나 존재한다.

ㄷ. $f'(\sqrt{\pi})=-e^{-\sqrt{\pi}}\int_0^{\sqrt{\pi}}\sin(t^2)dt+e^{-\sqrt{\pi}}\sin\pi$

$$=-e^{-\sqrt{\pi}}\int_0^{\sqrt{\pi}}\sin(t^2)dt$$
$$=-f(\sqrt{\pi})<0$$

이때 ㄴ을 만족시키는 $a\ (0<a<\sqrt{\pi})$에 대하여 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, \sqrt{\pi}]$에서 연속이고, $f'(a)>0$, $f'(\sqrt{\pi})<0$이므로 사잇값의 정리에 의하여

$f'(b)=0$

을 만족시키는 $b$가 열린구간 $(a, \sqrt{\pi})$에 적어도 하나 존재한다.

따라서 $f'(b)=0$을 만족시키는 $b$가 열린구간 $(0, \sqrt{\pi})$에 적어도 하나 존재한다.

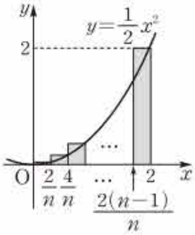
이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

Ⅲ. 적분법

# 10 정적분의 활용

유제 본책 270~295쪽

**110-❶** 오른쪽 그림과 같이 구간 $[0, 2]$를 $n$ 등분 하면 양 끝 점과 각 분점의 $x$좌표는 차례대로




$$0,\ \frac{2}{n},\ \frac{4}{n},\ \cdots,\ \frac{2(n-1)}{n},\ \frac{2n}{n}=2$$

이때 곡선 $y=\frac{1}{2}x^2$의 위쪽에 $n$ 등분 한 각 구간을 가로의 길이로, 구간의 오른쪽 끝에서의 함숫값을 세로의 길이로 하는 $n$개의 직사각형을 만들면 그 넓이의 합 $S_n$은

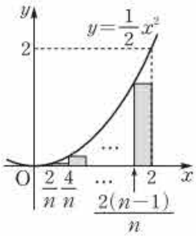
$$\begin{aligned}S_n&=\frac{2}{n}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{2}{n}\right)^2+\frac{2}{n}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{4}{n}\right)^2\\&\quad+\cdots+\frac{2}{n}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{2n}{n}\right)^2\\&=\frac{4}{n^3}(1^2+2^2+\cdots+n^2)\\&=\frac{4}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\\&=\frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)\end{aligned}$$

따라서 구하는 넓이를 $S$라 하면

$$\begin{aligned}S&=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)\\&=\frac{4}{3}\end{aligned}$$

답 $\frac{4}{3}$

**다른 풀이** 오른쪽 그림과 같이 구간 $[0, 2]$를 $n$ 등분 하고 곡선 $y=\frac{1}{2}x^2$의 아래쪽에 직사각형을 만들면 그 넓이의 합 $S_n'$은

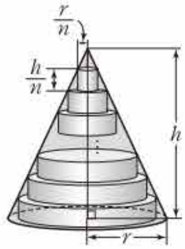



$$\begin{aligned}S_n'&=\frac{2}{n}\cdot 0+\frac{2}{n}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{2}{n}\right)^2\\&\quad+\frac{2}{n}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{4}{n}\right)^2+\cdots+\frac{2}{n}\cdot\frac{1}{2}\left\{\frac{2(n-1)}{n}\right\}^2\\&=\frac{4}{n^3}\{1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2\}\\&=\frac{4}{n^3}\cdot\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}\\&=\frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)\end{aligned}$$

따라서 구하는 넓이를 $S$라 하면

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n'=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)=\frac{4}{3}$$

**110-❷** 오른쪽 그림과 같이 원뿔의 높이를 $n$ 등분 하여 $(n-1)$개의 원기둥을 만들면 각 원기둥의 높이는 $\frac{h}{n}$이고, 밑면의 반지름의 길이는 위에서부터 차례대로




$$\frac{r}{n},\ \frac{2r}{n},\ \frac{3r}{n},\ \cdots,\ \frac{(n-1)r}{n}$$

이므로 $(n-1)$개의 원기둥의 부피의 합 $V_n$은

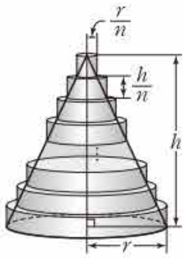
$$\begin{aligned}V_n&=\pi\left(\frac{r}{n}\right)^2\frac{h}{n}+\pi\left(\frac{2r}{n}\right)^2\frac{h}{n}\\&\quad+\cdots+\pi\left\{\frac{(n-1)r}{n}\right\}^2\frac{h}{n}\\&=\frac{\pi r^2h}{n^3}\{1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2\}\\&=\frac{\pi r^2h}{n^3}\cdot\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}\\&=\frac{1}{6}\pi r^2h\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)\end{aligned}$$

따라서 구하는 부피를 $V$라 하면

$$\begin{aligned}V&=\lim_{n\to\infty}V_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}\pi r^2h\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)\\&=\frac{1}{3}\pi r^2h\end{aligned}$$

답 $\frac{1}{3}\pi r^2h$

**다른 풀이** 오른쪽 그림과 같이 원뿔의 높이를 $n$ 등분 하여 $n$개의 원기둥을 만들면 그 부피의 합 $V_n'$은




$$\begin{aligned}V_n'&=\pi\left(\frac{r}{n}\right)^2\frac{h}{n}+\pi\left(\frac{2r}{n}\right)^2\frac{h}{n}\\&\quad+\cdots+\pi\left(\frac{nr}{n}\right)^2\frac{h}{n}\\&=\frac{\pi r^2h}{n^3}(1^2+2^2+\cdots+n^2)\\&=\frac{\pi r^2h}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\\&=\frac{1}{6}\pi r^2h\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)\end{aligned}$$

따라서 구하는 부피를 $V$라 하면

$$\begin{aligned}V&=\lim_{n\to\infty}V_n'=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}\pi r^2h\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)\\&=\frac{1}{3}\pi r^2h\end{aligned}$$

**111-❶** (1) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(4+\frac{2k}{n}\right)\cdot\frac{2}{n}$에서 $4+\frac{2k}{n}$를 $x$로, $\frac{2}{n}$를 $dx$로 나타낼 때,

$k=1$이고 $n \longrightarrow \infty$이면 $x=4$이고,

$k=n$이면 $x=6$

이므로 적분 구간은 $[4, 6]$이다.

$$\therefore \text{(주어진 식)}=\int_4^6 x\,dx=\left[\frac{1}{2}x^2\right]_4^6=10$$

(2) $$\text{(주어진 식)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}(2n+k)^2}{\sum_{k=1}^{n}k^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}(2n+k)^2\cdot\frac{1}{n^3}}{\sum_{k=1}^{n}k^2\cdot\frac{1}{n^3}}$$

$$=\frac{\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(2+\frac{k}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}}{\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}}$$

$$=\frac{\int_2^3 x^2\,dx}{\int_0^1 x^2\,dx}=\frac{\left[\frac{1}{3}x^3\right]_2^3}{\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1}$$

$$=19$$

답 (1) 10 (2) 19

**112-❶** (1) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$에서 $1+\frac{k}{n}$를 $x$로, $\frac{1}{n}$을 $dx$로 나타낼 때,

$k=1$이고 $n \longrightarrow \infty$이면 $x=1$이고,

$k=n$이면 $x=2$

이므로 적분 구간은 $[1, 2]$이다.

$$\therefore \text{(주어진 식)}=\int_1^2 \ln x\,dx$$

$$=\left[x\ln x\right]_1^2-\int_1^2 dx$$

$$=2\ln 2-\left[x\right]_1^2$$

$$=2\ln 2-1$$

(2) $$\text{(주어진 식)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}e^{\frac{2k}{n}}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}e^{\frac{2k}{n}}\cdot\frac{2}{n}$$

$\frac{2k}{n}$를 $x$로, $\frac{2}{n}$를 $dx$로 나타낼 때,

$k=1$이고 $n \longrightarrow \infty$이면 $x=0$이고,

$k=n$이면 $x=2$

이므로 적분 구간은 $[0, 2]$이다.

$$\therefore \text{(주어진 식)}=\frac{1}{2}\int_0^2 e^x\,dx=\frac{1}{2}\left[e^x\right]_0^2$$

$$=\frac{1}{2}(e^2-1)$$

답 (1) $2\ln 2-1$ (2) $\frac{1}{2}(e^2-1)$

다른 풀이 (2) $\frac{k}{n}$를 $x$로, $\frac{1}{n}$을 $dx$로 나타낼 때,

$$\text{(주어진 식)}=\int_0^1 e^{2x}\,dx=\left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^1=\frac{1}{2}(e^2-1)$$

**113-❶** 점 $P_k$의 좌표가 $\left(\frac{k}{n}, 2\sqrt{\frac{k}{n}+1}\right)$이므로

$$\overline{OP_k}=\sqrt{\left(\frac{k}{n}\right)^2+4\left(\frac{k}{n}+1\right)}$$

$$=\sqrt{\left(2+\frac{k}{n}\right)^2}=2+\frac{k}{n}$$

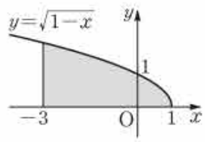
$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\overline{OP_k}=\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{k}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}$$

$$=\int_2^3 x\,dx=\left[\frac{1}{2}x^2\right]_2^3$$

$$=\frac{9}{2}-2=\frac{5}{2}$$

답 $\frac{5}{2}$

**114-❶** (1) 곡선과 $x$축의 교점의 $x$좌표는 $\sqrt{1-x}=0$에서 $x=1$



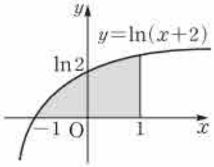

구간 $[-3, 1]$에서 $y\ge 0$이므로 구하는 넓이를 $S$라 하면

$$S=\int_{-3}^{1}\sqrt{1-x}\,dx=\left[-\frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}}\right]_{-3}^{1}=\frac{16}{3}$$

(2) 곡선과 $x$축의 교점의 $x$좌표는 $\ln(x+2)=0$에서

$x+2=1$

$\therefore x=-1$




구간 $[-1, 1]$에서 $y\ge 0$이므로 구하는 넓이를 $S$라 하면

$$S=\int_{-1}^{1}\ln(x+2)dx$$

$$=\left[x\ln(x+2)\right]_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1}\frac{x}{x+2}\,dx$$

$$=\ln 3-\int_{-1}^{1}\left(1-\frac{2}{x+2}\right)dx$$

$$=\ln 3-\left[x-2\ln|x+2|\right]_{-1}^{1}$$

$$=\ln 3-(2-2\ln 3)=3\ln 3-2$$

답 (1) $\frac{16}{3}$ (2) $3\ln 3-2$

**115-❶** $\sqrt{x}+\sqrt{y}=2$에서 $\quad \sqrt{x}=2-\sqrt{y}$

$\therefore x=4-4\sqrt{y}+y$

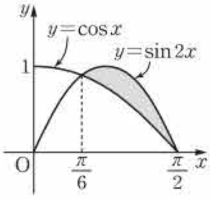
구간 $[0,\ 1]$에서 $x\geq 0$이므로 구하는 넓이를 $S$라 하면

$$S=\int_0^1(4-4\sqrt{y}+y)dy$$

$$=\left[4y-\frac{8}{3}y^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}y^2\right]_0^1=\frac{11}{6}$$

답 $\frac{11}{6}$

**116-❶** (1) 두 곡선의 교점의 $x$좌표는 $\sin 2x=\cos x$에서




$2\sin x\cos x=\cos x$

$\cos x(2\sin x-1)=0$

$\cos x=0$ 또는

$\sin x=\frac{1}{2}$

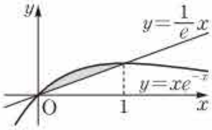
$\therefore x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{\pi}{2}$ $\left(\because 0\leq x\leq\frac{\pi}{2}\right)$

따라서 구하는 넓이를 $S$라 하면

$$S=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin 2x-\cos x)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{2}\cos 2x-\sin x\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{4}$$

(2) 곡선과 직선의 교점의 $x$좌표는 $xe^{-x}=\frac{1}{e}x$에서




$xe^{-x}-e^{-1}x=0$

$x(e^{-x}-e^{-1})=0$

$x=0$ 또는 $e^{-x}=e^{-1}$ $\quad\therefore x=0$ 또는 $x=1$

따라서 구하는 넓이를 $S$라 하면

$$S=\int_0^1\left(xe^{-x}-\frac{1}{e}x\right)dx$$

$$=\int_0^1 xe^{-x}dx-\int_0^1\frac{1}{e}x\,dx$$

$$=\left[-xe^{-x}\right]_0^1-\int_0^1(-e^{-x})dx-\left[\frac{1}{2e}x^2\right]_0^1$$

$$=-\frac{1}{e}-\left[e^{-x}\right]_0^1-\frac{1}{2e}=1-\frac{5}{2e}$$

답 (1) $\frac{1}{4}$ (2) $1-\frac{5}{2e}$

**Remark▶**

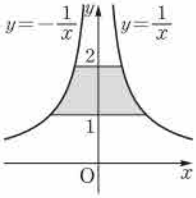
(2)에서 $\quad xe^{-x}-\frac{1}{e}x=xe^{-x}-e^{-1}x=x(e^{-x}-e^{-1})$

$0<x<1$일 때 $-x>-1$이므로 $\quad e^{-x}>e^{-1}$

$\therefore xe^{-x}-\frac{1}{e}x>0$

즉 $0<x<1$에서 곡선 $y=xe^{-x}$은 직선 $y=\frac{1}{e}x$보다 항상 위쪽에 있다.

**117-❶** (1) $y=\frac{1}{x}$에서




$x=\frac{1}{y}$

$y=-\frac{1}{x}$에서 $\quad x=-\frac{1}{y}$

따라서 구하는 넓이를 $S$라 하면

$$S=\int_1^2\left\{\frac{1}{y}-\left(-\frac{1}{y}\right)\right\}dy$$

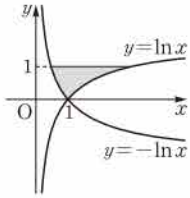
$$=2\int_1^2\frac{1}{y}\,dy$$

$$=2\left[\ln|y|\right]_1^2$$

$$=2\ln 2$$

(2) $y=\ln x$에서 $\quad x=e^y$

$y=-\ln x$에서 $\quad x=e^{-y}$




따라서 구하는 넓이를 $S$라 하면

$$S=\int_0^1(e^y-e^{-y})dy$$

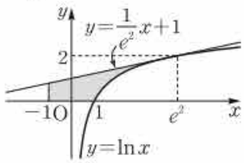
$$=\left[e^y+e^{-y}\right]_0^1$$

$$=e+\frac{1}{e}-2$$

답 (1) $2\ln 2$ (2) $e+\frac{1}{e}-2$

**118-❶** $y=\ln x$에서 $y'=\frac{1}{x}$이므로 곡선 위의 점 $(e^2,\ 2)$에서의 접선의 기울기는 $\frac{1}{e^2}$이다.

이때 곡선 위의 점 $(e^2,\ 2)$에서의 접선의 방정식은




$$y-2=\frac{1}{e^2}(x-e^2)$$

$$\therefore y=\frac{1}{e^2}x+1$$

따라서 구하는 넓이를 $S$라 하면

$$S=\int_{-1}^{e^2}\left(\frac{1}{e^2}x+1\right)dx-\int_1^{e^2}\ln x\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{2e^2}x^2+x\right]_{-1}^{e^2}-\left(\left[x\ln x\right]_1^{e^2}-\int_1^{e^2}dx\right)$$

$$=\left(\frac{3}{2}e^2-\frac{1}{2e^2}+1\right)-2e^2+\left[x\right]_1^{e^2}$$

$$=\left(\frac{3}{2}e^2-\frac{1}{2e^2}+1\right)-2e^2+(e^2-1)$$

$$=\frac{e^2}{2}-\frac{1}{2e^2}$$

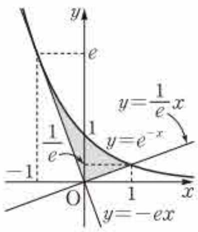
답 $\frac{e^2}{2}-\frac{1}{2e^2}$

10 정적분의 활용

**118-❷** $y=e^{-x}$에서 $y'=-e^{-x}$이므로 곡선 위의 점 $(-1,\ e)$에서의 접선의 기울기는 $-e$이다.
따라서 곡선 위의 점 $(-1,\ e)$에서의 접선의 방정식은

$$y-e=-e(x+1)$$
$$\therefore\ y=-ex$$

한편 접선에 수직인 직선의 기울기는 $\frac{1}{e}$이므로 기울기가 $\frac{1}{e}$이고 점 $\left(1,\ \frac{1}{e}\right)$을 지나는 직선의 방정식은




$$y-\frac{1}{e}=\frac{1}{e}(x-1)$$
$$\therefore\ y=\frac{1}{e}x$$

따라서 구하는 넓이를 $S$라 하면

$$\begin{aligned}S&=\int_{-1}^{1}e^{-x}dx-\left(\frac{1}{2}\cdot1\cdot e+\frac{1}{2}\cdot1\cdot\frac{1}{e}\right)\\&=\Big[-e^{-x}\Big]_{-1}^{1}-\left(\frac{e}{2}+\frac{1}{2e}\right)\\&=\left(-\frac{1}{e}+e\right)-\left(\frac{e}{2}+\frac{1}{2e}\right)\\&=\frac{e^2-3}{2e}\end{aligned}$$

답 $\frac{e^2-3}{2e}$

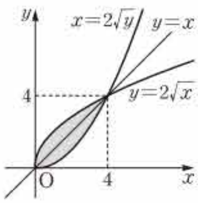
**다른 풀이** 구하는 넓이를 $S$라 하면

$$\begin{aligned}S&=\int_{-1}^{0}\{e^{-x}-(-ex)\}dx+\int_{0}^{1}\left(e^{-x}-\frac{1}{e}x\right)dx\\&=\left[-e^{-x}+\frac{e}{2}x^2\right]_{-1}^{0}+\left[-e^{-x}-\frac{1}{2e}x^2\right]_{0}^{1}\\&=\left(-1+\frac{e}{2}\right)+\left(-\frac{3}{2e}+1\right)=\frac{e^2-3}{2e}\end{aligned}$$

**119-❶** 두 함수 $y=2\sqrt{x}$, $x=2\sqrt{y}$는 서로 역함수이므로 두 함수의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다. 이때 두 곡선의 교점의 $x$좌표는 곡선 $y=2\sqrt{x}$와 직선 $y=x$의 교점의 $x$좌표와 같으므로 $2\sqrt{x}=x$에서

$$4x=x^2,\qquad x^2-4x=0$$
$$x(x-4)=0\qquad \therefore\ x=0\ \text{또는}\ x=4$$

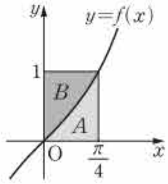
두 곡선 $y=2\sqrt{x}$, $x=2\sqrt{y}$로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선 $y=2\sqrt{x}$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배와 같으므로 구하는 넓이를 $S$라 하면




$$\begin{aligned}S&=2\int_{0}^{4}(2\sqrt{x}-x)dx\\&=2\left[\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}x^2\right]_{0}^{4}=\frac{16}{3}\end{aligned}$$

답 $\frac{16}{3}$

**119-❷** $f(0)=0$에서 $g(0)=0$이므로 $\int_{0}^{1}g(x)dx$는 $y=g(x)$의 그래프와 $x$축 및 직선 $x=1$로 둘러싸인 도형의 넓이와 같다.
그런데 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 $\int_{0}^{1}g(x)dx$의 값은 오른쪽 그림에서 곡선 $y=f(x)$와 $y$축 및 직선 $y=1$로 둘러싸인 도형의 넓이, 즉 $B$와 같다.




$$\begin{aligned}\therefore\ \int_{0}^{\frac{\pi}{4}}f(x)dx+\int_{0}^{1}g(x)dx&=A+B\\&=\frac{\pi}{4}\cdot1=\frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

답 $\frac{\pi}{4}$

**120-❶** 물의 깊이가 $x$ cm일 때의 수면의 넓이가 $\ln(x+1)$ $\text{cm}^2$이므로 물의 깊이가 4 cm일 때의 물의 부피를 $V$ $\text{cm}^3$라 하면

$$\begin{aligned}V&=\int_{0}^{4}\ln(x+1)dx\\&=\Big[x\ln(x+1)\Big]_{0}^{4}-\int_{0}^{4}\frac{x}{x+1}dx\\&=4\ln5-\int_{0}^{4}\left(1-\frac{1}{x+1}\right)dx\\&=4\ln5-\Big[x-\ln|x+1|\Big]_{0}^{4}\\&=4\ln5-(4-\ln5)\\&=5\ln5-4\end{aligned}$$

답 $(5\ln5-4)\,\text{cm}^3$

**다른 풀이** $V=\int_{0}^{4}\ln(x+1)dx$

이때 $x+1=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=1$이고, $x=0$일 때 $t=1$, $x=4$일 때 $t=5$이므로

$$\begin{aligned}V&=\int_{0}^{4}\ln(x+1)dx=\int_{1}^{5}\ln t\,dt\\&=\Big[t\ln t\Big]_{1}^{5}-\int_{1}^{5}dt=5\ln5-\Big[t\Big]_{1}^{5}\\&=5\ln5-4\end{aligned}$$

**120-❷** 물의 깊이가 $t$일 때의 수면의 넓이를 $S(t)$라 하면 물의 깊이가 $x$일 때의 물의 부피는

$$\int_{0}^{x}S(t)\,dt=e^{3x}+2x^2-1$$

양변을 $x$에 대하여 미분하면

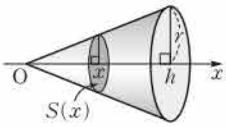
$$S(x)=3e^{3x}+4x$$

따라서 물의 깊이가 $\ln 2$일 때의 수면의 넓이는

$$S(\ln 2)=3e^{3\ln 2}+4\ln 2=24+4\ln 2$$

답 $24+4\ln 2$

**121-❶** 오른쪽 그림과 같이 원뿔의 꼭짓점 O를 원점, 꼭짓점에서 밑면에 내린 수선을 $x$축으로 정하고, $x$좌표가 $x$인 점을 지나고 $x$축에 수직인 평면으로 원뿔을 자른 단면의 넓이를 $S(x)$라 하자.




이때 단면과 밑면은 닮은 도형이고 닮음비가 $x : h$이므로 넓이의 비는 $x^2 : h^2$이다. 즉

$$S(x) : \pi r^2=x^2 : h^2 \qquad \therefore S(x)=\frac{\pi r^2}{h^2}x^2$$

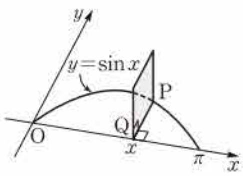
따라서 구하는 부피를 $V$라 하면

$$V=\int_0^h S(x)\,dx=\int_0^h \frac{\pi r^2}{h^2}x^2\,dx$$

$$=\frac{\pi r^2}{h^2}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^h=\frac{1}{3}\pi r^2 h$$

답 $\frac{1}{3}\pi r^2 h$

**122-❶** 오른쪽 그림과 같이 점 $\mathrm{P}(x, \sin x)$ $(0\le x\le \pi)$에 대하여 $\overline{\mathrm{PQ}}=\sin x$이므로 $\overline{\mathrm{PQ}}$를 한 변으로 하는 정사각형의 넓이를 $S(x)$라 하면




$$S(x)=\sin^2 x$$

따라서 구하는 부피를 $V$라 하면

$$V=\int_0^\pi S(x)\,dx=\int_0^\pi \sin^2 x\,dx$$

이때 $\cos 2x=\cos(x+x)=1-2\sin^2 x$에서

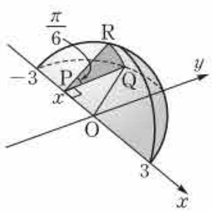
$\sin^2 x=\dfrac{1-\cos 2x}{2}$이므로

$$\int_0^\pi \sin^2 x\,dx=\int_0^\pi \frac{1-\cos 2x}{2}\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x\right]_0^\pi=\frac{\pi}{2}$$

답 $\frac{\pi}{2}$

**123-❶** 오른쪽 그림과 같이 밑면의 중심을 원점, 밑면의 지름을 $x$축으로 정하고, $x$축 위의 점 $\mathrm{P}(x, 0)$ $(-3\le x\le 3)$을 지나고 $x$축에 수직인 평면으로 주어진 입체도형을 자른 단면을 부채꼴 RPQ라 하자. 이때




$$\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{\overline{\mathrm{OQ}}^2-\overline{\mathrm{OP}}^2}=\sqrt{9-x^2}$$

이므로 부채꼴 RPQ의 넓이를 $S(x)$라 하면

$$S(x)=\frac{1}{2}\cdot\overline{\mathrm{PQ}}^2\cdot\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{12}(9-x^2)$$

따라서 구하는 부피를 $V$라 하면

$$V=\int_{-3}^3 S(x)\,dx=\int_{-3}^3 \frac{\pi}{12}(9-x^2)\,dx$$

$$=2\cdot\frac{\pi}{12}\int_0^3 (9-x^2)\,dx$$

$$=\frac{\pi}{6}\left[9x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^3=3\pi$$

답 $3\pi$

**124-❶** (1) $t=0$에서의 점 P의 위치가 0이므로 구하는 위치는

$$0+\int_0^t (t+3)e^{-t}\,dt$$

$$=\left[-(t+3)e^{-t}\right]_0^t-\int_0^t(-e^{-t})\,dt$$

$$=-(t+3)e^{-t}+3-\left[e^{-t}\right]_0^t$$

$$=-(t+3)e^{-t}+3-(e^{-t}-1)$$

$$=4-(t+4)e^{-t}$$

(2) $\displaystyle\int_1^3 |(t+3)e^{-t}|\,dt$

$$=\int_1^3 (t+3)e^{-t}\,dt$$

$$=\left[-(t+3)e^{-t}\right]_1^3-\int_1^3(-e^{-t})\,dt$$

$$=-\frac{6}{e^3}+\frac{4}{e}-\left[e^{-t}\right]_1^3$$

$$=-\frac{6}{e^3}+\frac{4}{e}-\frac{1}{e^3}+\frac{1}{e}=-\frac{7}{e^3}+\frac{5}{e}$$

답 (1) $4-(t+4)e^{-t}$ (2) $-\frac{7}{e^3}+\frac{5}{e}$

**125-❶** $\dfrac{dx}{dt}=6t$, $\dfrac{dy}{dt}=3t^2$이므로 $t=0$에서 $t=2$까지 점 P가 움직인 거리 $s$는

$$s=\int_0^2\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

$$=\int_0^2\sqrt{(6t)^2+(3t^2)^2}\,dt$$

$$=\int_0^2 3t\sqrt{4+t^2}\,dt$$

$4+t^2=u$로 놓으면 $\dfrac{du}{dt}=2t$이고, $t=0$일 때 $u=4$, $t=2$일 때 $u=8$이므로

$$s=\int_0^2 3t\sqrt{4+t^2}\,dt$$

$$=\int_4^8 \frac{3}{2}\sqrt{u}\,du=\left[u^{\frac{3}{2}}\right]_4^8$$

$$=16\sqrt{2}-8=8(2\sqrt{2}-1)$$

답 $8(2\sqrt{2}-1)$

**126-❶** (1) $\dfrac{dx}{dt}=2\sqrt{2}$, $\dfrac{dy}{dt}=t-\dfrac{2}{t}$ 이므로 곡선의 길이 $l$은

$$l=\int_1^2\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$
$$=\int_1^2\sqrt{(2\sqrt{2})^2+\left(t-\frac{2}{t}\right)^2}\,dt$$
$$=\int_1^2\sqrt{t^2+4+\frac{4}{t^2}}\,dt$$
$$=\int_1^2\sqrt{\left(t+\frac{2}{t}\right)^2}\,dt=\int_1^2\left(t+\frac{2}{t}\right)dt$$
$$=\left[\frac{1}{2}t^2+2\ln t\right]_1^2=\frac{3}{2}+2\ln 2$$

(2) $\dfrac{dy}{dx}=\sqrt{x}-\dfrac{1}{4\sqrt{x}}$ 이므로 곡선의 길이 $l$은

$$l=\int_4^9\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$
$$=\int_4^9\sqrt{1+\left(\sqrt{x}-\frac{1}{4\sqrt{x}}\right)^2}\,dx$$
$$=\int_4^9\sqrt{x+\frac{1}{2}+\frac{1}{16x}}\,dx$$
$$=\int_4^9\sqrt{\left(\sqrt{x}+\frac{1}{4\sqrt{x}}\right)^2}\,dx$$
$$=\int_4^9\left(\sqrt{x}+\frac{1}{4\sqrt{x}}\right)dx$$
$$=\left[\frac{2}{3}x\sqrt{x}+\frac{1}{2}\sqrt{x}\right]_4^9$$
$$=\frac{39}{2}-\frac{19}{3}=\frac{79}{6}$$

답 (1) $\frac{3}{2}+2\ln 2$ (2) $\frac{79}{6}$

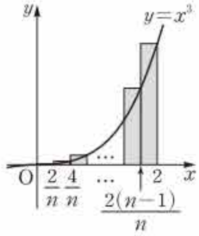
## 중단원 연습 문제

본책 296~300쪽

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **01** ④ | **02** 16 | **03** $\frac{19}{3}\ln 3$ | | **04** 1 |
| **05** $\ln\frac{4}{3}$ | **06** $\frac{2}{e}$ | **07** $\sqrt{3}-1$ | | **08** ④ |
| **09** $\frac{\sqrt{3}}{4}$ | **10** 2 | **11** 40 | **12** ③ | **13** ⑤ |
| **14** 30 | **15** $3\pi$ | **16** $\frac{e^3}{e^2-1}$ | | **17** ⑤ |
| **18** $\frac{225}{2}\sqrt{3}\,\mathrm{cm}^3$ | | **19** 8 | **20** ① | **21** ③ |
| **22** ④ | | | | |

**01** 전략 주어진 도형을 $n$개의 직사각형으로 나눈다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 구간 $[0, 2]$를 $n$ 등분 하면 양 끝점과 각 분점의 $x$좌표는 차례대로




$$0,\ \frac{2}{n},\ \frac{4}{n},\ \cdots,\ \frac{2(n-1)}{n},\ \frac{2n}{n}=2$$

이때 곡선 $y=x^3$의 위쪽에 $n$ 등분 한 각 구간을 가로의 길이로, 구간의 오른쪽 끝에서의 함숫값을 세로의 길이로 하는 $n$개의 직사각형을 만들면 그 넓이의 합 $S_n$은

$$S_n=\frac{2}{n}\left(\frac{2}{n}\right)^3+\frac{2}{n}\left(\frac{4}{n}\right)^3+\cdots+\frac{2}{n}\left(\frac{2n}{n}\right)^3$$
$$=\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2k}{n}\right)^3$$

따라서 구하는 넓이를 $S$라 하면

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2k}{n}\right)^3\cdot\frac{2}{n}$$

답 ④

**02** 전략 적분변수를 정한 후 적분 구간을 구하고 급수를 정적분으로 나타낸다.

풀이 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(2+\frac{k}{n}\right)\cdot\frac{3}{n}=3\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(2+\frac{k}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}$

에서 $2+\frac{k}{n}$를 $x$로, $\frac{1}{n}$을 $dx$로 나타낼 때,

$k=1$이고 $n\longrightarrow\infty$이면 $x=2$이고,

$k=n$이면 $x=3$

이므로 적분 구간은 $[2, 3]$이다.

$$\therefore\ (\text{주어진 식})=3\int_2^3 f(x)\,dx=3\int_2^3(x^2-1)\,dx$$
$$=3\left[\frac{1}{3}x^3-x\right]_2^3$$
$$=3\left(6-\frac{2}{3}\right)=16$$

답 16

**03** 전략 주어진 식을 합의 기호 $\Sigma$를 이용하여 나타낸 후 정적분으로 나타낸다.

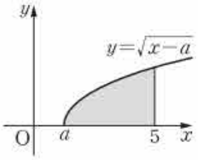
풀이 (주어진 식)

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\sum_{k=1}^{n}\left(2+\frac{k}{n}\right)^2\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{n+2k}\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(2+\frac{k}{n}\right)^2\frac{1}{n}\cdot\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{2k}{n}}\cdot\frac{2}{n}$$
$$=\int_2^3 x^2\,dx\cdot\int_1^3\frac{1}{x}\,dx=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_2^3\cdot\Big[\ln|x|\Big]_1^3$$
$$=\frac{19}{3}\ln 3$$

답 $\frac{19}{3}\ln 3$

**04** (전략) 주어진 곡선과 직선을 좌표평면 위에 그린 후 정적분의 값을 구한다.

(풀이) 오른쪽 그림에서 색칠한 부분의 넓이는




$$\int_a^5 \sqrt{x-a}\,dx$$
$$=\left[\frac{2}{3}(x-a)^{\frac{3}{2}}\right]_a^5$$
$$=\frac{2}{3}(5-a)^{\frac{3}{2}}$$

따라서 $\frac{2}{3}(5-a)^{\frac{3}{2}}=\frac{16}{3}$이므로

$(5-a)^{\frac{3}{2}}=8,\qquad 5-a=8^{\frac{2}{3}}$

$5-a=4$

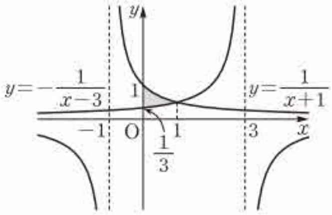
$\therefore a=1$

답 1

**05** (전략) 두 함수의 그래프의 교점의 좌표를 구하고 위치 관계를 파악한다.

(풀이) 두 곡선의 교점의 $x$좌표는 $\frac{1}{x+1}=-\frac{1}{x-3}$에서

$x-3=-x-1\qquad \therefore x=1$




따라서 구하는 넓이를 $S$라 하면

$$S=\int_0^1\left\{\frac{1}{x+1}-\left(-\frac{1}{x-3}\right)\right\}dx$$
$$=\Big[\ln|x+1|+\ln|x-3|\Big]_0^1$$
$$=2\ln 2-\ln 3$$
$$=\ln\frac{4}{3}$$

답 $\ln\frac{4}{3}$

(다른 풀이) $y=\frac{1}{x+1}$에서

$xy+y=1\qquad \therefore x=\frac{1}{y}-1$

또 $y=-\frac{1}{x-3}$에서

$xy-3y=-1$

$\therefore x=-\frac{1}{y}+3$

두 곡선의 교점의 $y$좌표는 $\frac{1}{y}-1=-\frac{1}{y}+3$에서

$\frac{2}{y}=4\qquad \therefore y=\frac{1}{2}$

따라서 구하는 넓이를 $S$라 하면

$$S=\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}}\left(-\frac{1}{y}+3\right)dy+\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(\frac{1}{y}-1\right)dy$$
$$=\Big[-\ln|y|+3y\Big]_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}}+\Big[\ln|y|-y\Big]_{\frac{1}{2}}^{1}$$
$$=\left(\frac{1}{2}+\ln 2-\ln 3\right)+\left(-\frac{1}{2}+\ln 2\right)$$
$$=2\ln 2-\ln 3=\ln\frac{4}{3}$$

**06** (전략) $f'(x)$를 구한 후 두 곡선 $y=f(x)$, $y=f'(x)$의 위치 관계를 파악한다.

(풀이) $f(x)=2-e^{-x}$에서

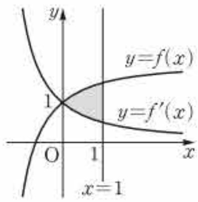
$f'(x)=e^{-x}$ ··· ❶

두 곡선 $y=f(x)$와 $y=f'(x)$의 교점의 $x$좌표는

$2-e^{-x}=e^{-x}$에서

$e^{-x}=1\qquad \therefore x=0$ ··· ❷

따라서 구하는 넓이를 $S$라 하면




$$S=\int_0^1(2-e^{-x}-e^{-x})dx$$
$$=\int_0^1(2-2e^{-x})dx$$
$$=\Big[2x+2e^{-x}\Big]_0^1$$
$$=\frac{2}{e}$$ ··· ❸

답 $\frac{2}{e}$

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ❶ $f'(x)$를 구할 수 있다. | 20 % |
| ❷ 두 곡선 $y=f(x)$, $y=f'(x)$의 교점의 $x$좌표를 구할 수 있다. | 30 % |
| ❸ 넓이를 구할 수 있다. | 50 % |

**Remark▶**

$y=e^{-x}$의 그래프는 $y=e^x$의 그래프를 $y$축에 대하여 대칭이동한 것이고, $y=2-e^{-x}$의 그래프는 $y=e^x$의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 다음 $y$축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

**07** (전략) $(A+B)-A=B$임을 이용하여 $B$를 구한다.

(풀이) 두 곡선 $y=\sqrt{3}\cos x$와 $y=\sin x$의 교점의 $x$좌표는

$\sqrt{3}\cos x=\sin x,\qquad \sin x-\sqrt{3}\cos x=0$

$2\left(\frac{1}{2}\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right)=0$

$2\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=0\qquad \therefore x=\frac{\pi}{3}\left(\because 0\le x\le\frac{\pi}{2}\right)$

$B=(A+B)-A$에서

$$A=\int_0^{\frac{\pi}{3}}(\sqrt{3}\cos x-\sin x)dx$$
$$=\left[\sqrt{3}\sin x+\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{3}}=1,$$
$$A+B=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{3}\cos x\,dx=\left[\sqrt{3}\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\sqrt{3}$$

이므로 $B=\sqrt{3}-1$

$\therefore AB=\sqrt{3}-1$ 답 $\sqrt{3}-1$

**08** 전략 단면의 넓이를 주어진 구간에서 적분한다.

풀이 $x$좌표가 $t$일 때의 단면의 넓이를 $S(t)$라 하면

$$S(t)=2e^t+1$$

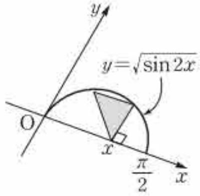
따라서 구하는 부피를 $V$라 하면

$$V=\int_{-1}^{1}S(t)dt=\int_{-1}^{1}(2e^t+1)dt$$
$$=\left[2e^t+t\right]_{-1}^{1}=2\left(e-\frac{1}{e}+1\right)$$

답 ④

**09** 전략 밑면을 좌표평면 위에 나타낸다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 $x$축 위의 한 점 $(x,\ 0)\left(0\le x\le\frac{\pi}{2}\right)$을 지나고 $x$축에 수직인 평면으로 자른 단면은 한 변의 길이가 $\sqrt{\sin 2x}$인 정삼각형이므로 그 넓이를 $S(x)$라 하면




$$S(x)=\frac{\sqrt{3}}{4}(\sqrt{\sin 2x})^2=\frac{\sqrt{3}}{4}\sin 2x \quad \cdots ❶$$

따라서 구하는 부피를 $V$라 하면

$$V=\int_0^{\frac{\pi}{2}}S(x)dx=\frac{\sqrt{3}}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2x\,dx$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\left[-\frac{1}{2}\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{4} \quad \cdots ❷$$

답 $\frac{\sqrt{3}}{4}$

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ❶ $x$축에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이를 구할 수 있다. | 50 % |
| ❷ 부피를 구할 수 있다. | 50 % |

**10** 전략 속도를 적분하여 2초 후의 두 점 P, Q의 위치를 각각 구한다.

풀이 2초 후의 점 P의 위치는

$$\int_0^2 e^t dt=\left[e^t\right]_0^2=e^2-1 \quad \cdots ❶$$

2초 후의 점 Q의 위치는

$$\int_0^2 te^t dt=\left[te^t\right]_0^2-\int_0^2 e^t dt$$
$$=2e^2-\left[e^t\right]_0^2=2e^2-(e^2-1)$$
$$=e^2+1 \quad \cdots ❷$$

따라서 두 점 사이의 거리는

$$(e^2+1)-(e^2-1)=2 \quad \cdots ❸$$

답 2

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ❶ 2초 후의 점 P의 위치를 구할 수 있다. | 30 % |
| ❷ 2초 후의 점 Q의 위치를 구할 수 있다. | 50 % |
| ❸ 두 점 사이의 거리를 구할 수 있다. | 20 % |

**11** 전략 점 P의 시각 $t$에서의 위치 $(x,\ y)$가 $x=f(t),\ y=g(t)$일 때 $t=a$에서 $t=b$까지 점 P가 움직인 거리는 $\int_a^b\sqrt{\{f'(t)\}^2+\{g'(t)\}^2}dt$임을 이용한다.

풀이 $\frac{dx}{dt}=2\sqrt{t},\ \frac{dy}{dt}=t-1$이므로 시각 $t=0$에서 $t=8$까지 점 P가 움직인 거리 $s$는

$$s=\int_0^8\sqrt{(2\sqrt{t})^2+(t-1)^2}\,dt=\int_0^8\sqrt{t^2+2t+1}\,dt$$
$$=\int_0^8\sqrt{(t+1)^2}\,dt=\int_0^8(t+1)\,dt$$
$$=\left[\frac{1}{2}t^2+t\right]_0^8=40$$

답 40

**12** 전략 $a\le x\le b$에서 곡선 $y=f(x)$의 길이는 $\int_a^b\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$임을 이용한다.

풀이 $y'=\frac{2x}{x^2-1}$이므로 구하는 곡선의 길이 $s$는

$$s=\int_2^4\sqrt{1+\left(\frac{2x}{x^2-1}\right)^2}\,dx$$
$$=\int_2^4\sqrt{\frac{(x^2-1)^2+4x^2}{(x^2-1)^2}}\,dx$$
$$=\int_2^4\sqrt{\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^2}\,dx=\int_2^4\frac{x^2+1}{x^2-1}\,dx$$
$$=\int_2^4\left(1+\frac{2}{x^2-1}\right)dx$$
$$=\int_2^4\left\{1+\frac{2}{(x-1)(x+1)}\right\}dx$$
$$=\int_2^4\left(1+\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)dx$$
$$=\left[x+\ln|x-1|-\ln|x+1|\right]_2^4$$
$$=2+2\ln 3-\ln 5=2+\ln\frac{9}{5}$$

답 ③

**13** 전략 적분변수를 정한 후 적분 구간을 구하고 급수를 정적분으로 나타낸다.

풀이 ㄱ. $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{2k}{n}\right)^2\frac{1}{n}$

$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{2k}{n}\right)^2\frac{2}{n}\cdot\frac{1}{2}$

$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{2k}{n}\right)^2\frac{2}{n}$

$\frac{2k}{n}$를 $x$로, $\frac{2}{n}$를 $dx$로 나타낼 때,

$k=1$이고 $n\longrightarrow\infty$이면 $x=0$이고,

$k=n$이면 $x=2$

이므로 적분 구간은 $[0, 2]$이다.

$\therefore \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{2k}{n}\right)^2\frac{1}{n}=\frac{1}{2}\int_0^2(1+x)^2dx$

ㄴ. $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}\left(1+\frac{k}{2n}\right)^2\frac{1}{n}$

$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}\left(1+\frac{k}{2n}\right)^2\frac{1}{2n}\cdot 2$

$=2\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}\left(1+\frac{k}{2n}\right)^2\frac{1}{2n}$

$\frac{k}{2n}$를 $x$로, $\frac{1}{2n}$을 $dx$로 나타낼 때,

$k=1$이고 $n\longrightarrow\infty$이면 $x=0$이고,

$k=2n$이면 $x=1$

이므로 적분 구간은 $[0, 1]$이다.

$\therefore \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}\left(1+\frac{k}{2n}\right)^2\frac{1}{n}=2\int_0^1(1+x)^2dx$

ㄷ. $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{3n}\left(1+\frac{k}{n}\right)^2\frac{1}{n}$에서 $\frac{k}{n}$를 $x$로, $\frac{1}{n}$을 $dx$로 나타낼 때,

$k=1$이고 $n\longrightarrow\infty$이면 $x=0$이고,

$k=3n$이면 $x=3$

이므로 적분 구간은 $[0, 3]$이다.

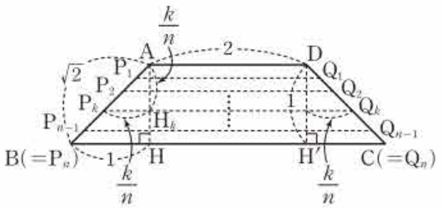
$\therefore \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{3n}\left(1+\frac{k}{n}\right)^2\frac{1}{n}=\int_0^3(1+x)^2dx$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

**14** 전략 점 A에서 $\overline{P_kQ_k}$에 내린 수선의 발을 $H_k$로 놓고 삼각형의 닮음을 이용하여 $\overline{AH_k}$, $\overline{P_kH_k}$의 길이를 구한 후 $\overline{P_kQ_k}$의 길이를 $n$, $k$에 대한 식으로 나타낸다.

풀이




두 점 A, D에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 각각 H, H′이라 하면 $\triangle ABH\equiv\triangle DCH'$이므로

$\overline{BH}=\overline{CH'}=\frac{1}{2}(4-2)=1$ ··· ❶

또 $\overline{AB}=\sqrt{2}$이므로 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{AH}=\sqrt{(\sqrt{2})^2-1^2}=1$

$\overline{AH}$와 $\overline{P_kQ_k}$의 교점을 $H_k$라 하면

$\overline{AH_k}=\frac{k}{n}$, $\overline{P_kH_k}=\frac{k}{n}$

$\therefore \overline{P_kQ_k}=2+\frac{2k}{n}$ ··· ❷

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(\overline{P_1Q_1}^3+\overline{P_2Q_2}^3+\cdots+\overline{P_nQ_n}^3)$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\overline{P_kQ_k}^3$

$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(2+\frac{2k}{n}\right)^3\cdot\frac{2}{n}$

$=\frac{1}{2}\int_2^4x^3dx=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}x^4\right]_2^4$

$=\frac{1}{2}(64-4)=30$ ··· ❸

답 30

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ❶ $\overline{BH}$, $\overline{CH'}$의 길이를 구할 수 있다. | 30 % |
| ❷ $\overline{P_kQ_k}$의 길이를 $n$과 $k$에 대한 식으로 나타낼 수 있다. | 30 % |
| ❸ 주어진 식의 값을 구할 수 있다. | 40 % |

**15** 전략 주어진 식을 $y=f(x)$ 꼴로 변형하여 정적분의 값을 구한다.

풀이 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$에서

$y=\frac{3}{4}\sqrt{16-x^2}\ (x\ge 0)$

구하는 넓이를 $S$라 하면

$S=\int_0^4\frac{3}{4}\sqrt{16-x^2}\,dx$

이때 $x=4\sin\theta\left(0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right)$로 놓으면

$\frac{dx}{d\theta}=4\cos\theta$이고, $x=0$일 때 $\theta=0$, $x=4$일 때

$\theta=\frac{\pi}{2}$이므로

$S=\int_0^4\frac{3}{4}\sqrt{16-x^2}\,dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{3}{4}\sqrt{16(1-\sin^2\theta)}\cdot 4\cos\theta\,d\theta$

$=12\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,d\theta$

이때 $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$에서 $\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}$이므로

$$S = 12\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta \, d\theta$$
$$= 12\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2\theta}{2} d\theta$$
$$= 6\left[\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 3\pi$$

답 $3\pi$

**16** 전략 곡선 $y=\frac{1}{x}$과 $x$축 및 두 직선 $x=a_{n+1}$, $x=a_n$으로 둘러싸인 도형의 넓이를 정적분을 이용하여 구한다.

풀이 곡선 $y=\frac{1}{x}$과 $x$축 및 두 직선 $x=a_{n+1}$, $x=a_n$으로 둘러싸인 도형의 넓이가 2이므로 $\int_{a_{n+1}}^{a_n} \frac{1}{x} dx = 2$에서

$$\int_{a_{n+1}}^{a_n} \frac{1}{x} dx = \Big[\ln|x|\Big]_{a_{n+1}}^{a_n}$$
$$= \ln a_n - \ln a_{n+1}$$
$$= \ln \frac{a_n}{a_{n+1}} = 2$$

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = e^2 \qquad \therefore a_{n+1} = \frac{1}{e^2} a_n$$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $e$이고, 공비가 $\frac{1}{e^2}$인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{e}{1-\frac{1}{e^2}} = \frac{e^3}{e^2-1}$$

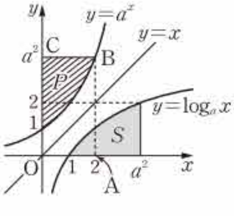
답 $\frac{e^3}{e^2-1}$

**17** 전략 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭임을 이용한다.

풀이 함수 $y=a^x$은 $y=\log_a x$의 역함수이므로 $y=a^x$의 그래프는 $y=\log_a x$의 그래프와 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

$S=\int_1^{a^2} \log_a x \, dx$이고 오른쪽 그림에서 빗금 친 부분의 넓이를 $P$라 하면

$P=S$




이때 $\int_0^2 a^x dx$의 값은 직사각형 OABC의 넓이에서 $P$를 뺀 것과 같으므로

$$\int_0^2 a^x dx = 2a^2 - P = 2a^2 - S$$

답 ⑤

다른 풀이 $S=\int_1^{a^2} \log_a x \, dx = \int_1^{a^2} \frac{\ln x}{\ln a} dx$

$$= \frac{1}{\ln a}\int_1^{a^2} \ln x \, dx$$
$$= \frac{1}{\ln a}\left(\Big[x\ln x\Big]_1^{a^2} - \int_1^{a^2} dx\right)$$
$$= \frac{1}{\ln a}\left(a^2 \ln a^2 - \Big[x\Big]_1^{a^2}\right)$$
$$= \frac{1}{\ln a}(2a^2\ln a - a^2 + 1)$$
$$= 2a^2 - \frac{a^2}{\ln a} + \frac{1}{\ln a} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$$\therefore \int_0^2 a^x dx = \left[\frac{a^x}{\ln a}\right]_0^2$$
$$= \frac{a^2}{\ln a} - \frac{1}{\ln a}$$
$$= 2a^2 - S \ (\because ㉠)$$

**18** 전략 단면인 정삼각형의 한 변의 길이를 구한 후 단면의 넓이를 식으로 나타낸다.

풀이 단면인 정삼각형의 한 변의 길이를 $a$ cm라 하면 이 정삼각형의 높이는 $\frac{\sqrt{3}}{2}a$ cm이고 무게중심에서 꼭짓점까지의 거리가 $\sqrt{3x}$ cm이므로

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a = \sqrt{3x} \qquad \therefore a = 3\sqrt{x}$$

이때 단면의 넓이를 $S(x)$ cm$^2$라 하면

$$S(x) = \frac{\sqrt{3}}{4}(3\sqrt{x})^2 = \frac{9\sqrt{3}}{4}x$$

따라서 구하는 부피를 $V$ cm$^3$라 하면

$$V = \int_0^{10} S(x)dx = \frac{9\sqrt{3}}{4}\int_0^{10} x\,dx$$
$$= \frac{9\sqrt{3}}{4}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^{10} = \frac{225}{2}\sqrt{3}$$

답 $\frac{225}{2}\sqrt{3}$ cm$^3$

**Remark▶**

정삼각형의 한 중선의 길이는 높이와 같고 삼각형의 무게중심은 중선을 꼭짓점으로부터 $2:1$로 내분하는 점이므로 무게중심에서 꼭짓점까지의 거리는 정삼각형의 높이의 $\frac{2}{3}$와 같다.

**19** 전략 두 점의 위치가 같을 때 두 점이 만남을 이용하여 두 점이 만나는 시각을 구한다.

풀이 시각 $t$에서의 점 P의 위치는

$$\int_0^t \cos t \, dt = \Big[\sin t\Big]_0^t = \sin t$$

시각 $t$에서의 점 Q의 위치는

$$\int_0^t 2\cos 2t\,dt=\Big[\sin 2t\Big]_0^t=\sin 2t \quad \cdots\cdots ❶$$

두 점의 위치가 같을 때 두 점이 만나므로 $\sin t=\sin 2t$에서

$$\sin t=2\sin t\cos t, \qquad \sin t(1-2\cos t)=0$$

$$\therefore \sin t=0 \text{ 또는 } \cos t=\frac{1}{2}$$

이때 $0<t\le 4\pi$이므로 $\sin t=0$에서

$$t=\pi,\ 2\pi,\ 3\pi,\ 4\pi$$

$\cos t=\frac{1}{2}$에서

$$t=\frac{\pi}{3},\ \frac{5}{3}\pi,\ \frac{7}{3}\pi,\ \frac{11}{3}\pi \quad \cdots\cdots ❷$$

따라서 두 점 P, Q가 만난 횟수는 8이다. $\cdots\cdots$ ❸

답 8

| 채점 기준 | 비율 |
|---|---|
| ❶ 시각 $t$에서의 두 점 P, Q의 위치를 각각 구할 수 있다. | 40 % |
| ❷ 두 점 P, Q가 만난 시각을 구할 수 있다. | 50 % |
| ❸ 두 점 P, Q가 만난 횟수를 구할 수 있다. | 10 % |

**20** 전략 $S_k$를 $n$과 $k$에 대한 식으로 나타낸 후 주어진 급수를 정적분을 이용하여 나타낸다.

풀이 $\angle P_mOP_{m+1}=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2n}=\frac{\pi}{4n}$ $(m=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 2n-1)$이므로 삼각형 $OP_{n-k}P_{n+k}$에서

$$\angle P_{n-k}OP_{n+k}=2k\cdot\frac{\pi}{4n}=\frac{k\pi}{2n}$$

$$\therefore S_k=\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\sin\frac{k\pi}{2n}=\frac{1}{2}\sin\frac{k\pi}{2n}$$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}S_k&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\sin\frac{k\pi}{2n}\cdot\frac{1}{n}\\&=\int_0^1\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}x\,dx\\&=\Big[-\frac{1}{\pi}\cos\frac{\pi}{2}x\Big]_0^1\\&=\frac{1}{\pi}\end{aligned}$$

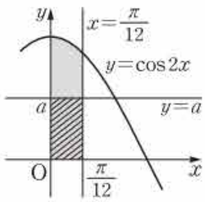
답 ①

**21** 전략 먼저 주어진 그림의 색칠한 영역의 넓이를 구한다.

풀이 곡선 $y=\cos 2x$와 $x$축, $y$축 및 직선 $x=\frac{\pi}{12}$로 둘러싸인 영역의 넓이는

$$\int_0^{\frac{\pi}{12}}\cos 2x\,dx=\Big[\frac{1}{2}\sin 2x\Big]_0^{\frac{\pi}{12}}=\frac{1}{4}$$

따라서 오른쪽 그림의 빗금 친 부분의 넓이가 $\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$이므로




$$\frac{\pi}{12}\cdot a=\frac{1}{8}$$

$$\therefore a=\frac{3}{2\pi}$$

답 ③

**22** 전략 입체도형을 자른 단면의 넓이를 $x$에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 $x<0$일 때, $\overline{PH}=e^{-x}$이므로 선분 PH를 한 변으로 하는 정사각형의 넓이는

$$e^{-2x}$$

$x\ge 0$일 때, $\overline{PH}=\sqrt{\ln(x+1)+1}$이므로 선분 PH를 한 변으로 하는 정사각형의 넓이는

$$\ln(x+1)+1$$

따라서 구하는 부피를 $V$라 하면

$$\begin{aligned}V&=\int_{-\ln 2}^{0}e^{-2x}dx+\int_0^{e-1}\{\ln(x+1)+1\}dx\\&=\Big[-\frac{1}{2}e^{-2x}\Big]_{-\ln 2}^{0}+\int_0^{e-1}\ln(x+1)dx+\int_0^{e-1}dx\\&=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{2\ln 2}+\int_0^{e-1}\ln(x+1)dx+\Big[x\Big]_0^{e-1}\\&=e+\frac{1}{2}+\int_0^{e-1}\ln(x+1)\,dx\end{aligned}$$

$\int_0^{e-1}\ln(x+1)\,dx$에서 $x+1=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=1$이고, $x=0$일 때 $t=1$, $x=e-1$일 때 $t=e$이므로

$$\begin{aligned}\int_0^{e-1}\ln(x+1)dx&=\int_1^e\ln t\,dt\\&=\Big[t\ln t\Big]_1^e-\int_1^e dt\\&=e-\Big[t\Big]_1^e=1\end{aligned}$$

따라서 구하는 부피는

$$V=e+\frac{1}{2}+1=e+\frac{3}{2}$$

답 ④

MEMO