Solution

Lecture Book

Ⅰ 함수의 극한과 연속

Ⅱ 다항함수의 미분법

Ⅲ 다항함수의 적분법

Work Book

Ⅰ 함수의 극한과 연속

Ⅱ 다항함수의 미분법

Ⅲ 다항함수의 적분법

빠른 정답 찾기 Lecture Book

01 함수의 극한

6쪽 **Lecture 01** **1-1** (1) 1 (2) 3
1-2 (1) 4 (2) 2 (3) $\frac{1}{2}$ (4) 7 **2-1** (1) 2 (2) 2
2-2 (1) 1 (2) 0

7쪽 **Lecture 02** **1-1** ∞ **1-2** (1) $-\infty$ (2) ∞
2-1 (1) $-\infty$ (2) ∞ **2-2** (1) ∞ (2) $-\infty$ (3) ∞ (4) $-\infty$

8쪽 **Lecture 03** **1-1** (1) 4 (2) -1
1-2 (1) 0 (2) 0 (3) 0 (4) 2 (5) 1 (6) 존재하지 않는다.
1-3 (1) 존재하지 않는다. (2) 0

9쪽 **유형 Q+Q** **01** 4 **02** ⑤ **03** ④ **04** 3
05 ② **06** -3

10쪽 **Lecture 04** **1-1** (1) -24 (2) 4 (3) -12 (4) -3
1-2 (1) -1 (2) -15 (3) 14 (4) $-\frac{1}{8}$
1-3 (1) 15 (2) 11 (3) 310 (4) $-\frac{3}{2}$

11쪽 **Lecture 05** **1-1** (1) 1 (2) 3 (3) $\frac{1}{4}$ (4) 2
2-1 (1) ∞ (2) $-\frac{1}{7}$ (3) 0 (4) 5 **3-1** (1) ∞ (2) 0 (3) $-\frac{1}{4}$ (4) -2

12쪽 **Lecture 06** **1-1** (1) 0 (2) 6 **1-2** (1) 3 (2) -1
2-1 4 **2-2** (1) 1 (2) 3

13쪽 **유형 Q+Q** **01** 2 **02** ① **03** ④ **04** 3
05 ⑤ **06** $\frac{1}{2}$ **07** ② **08** ③ **09** ④ **10** $-\frac{1}{4}$
11 4 **12** ⑤ **13** ③ **14** $f(x)=3x^2-14x+16$
15 -2 **16** 3 **17** ② **18** $\frac{1}{4}$

16쪽 **중단원 마무리** **01** -2 **02** ③ **03** ③ **04** ④
05 ① **06** ④ **07** 30 **08** ⑤ **09** 6 **10** ②
11 9 **12** 0 **13** ② **14** 5 **15** 13 **16** 4
17 $\frac{1}{4}$ **18** ④

02 함수의 연속

20쪽 **Lecture 07** **1-1** (1) ㄴ (2) ㄱ (3) ㄷ
1-2 (1) 연속 (2) 불연속 (3) 불연속 (4) 불연속

21쪽 **Lecture 08** **1-1** (1) $[-2, 8]$ (2) $(0, 7]$ (3) $(-1, 4)$
(4) $(-\infty, -3]$
1-2 (1) $(-\infty, \infty)$ (2) $(-\infty, 0)$, $(0, \infty)$
2-1 (1) $(-\infty, 9)$, $(9, \infty)$ (2) $[-2, \infty)$
2-2 (1) $x\neq0$인 모든 실수 x에서 연속이다.
(2) 모든 실수 x에서 연속이다.

22쪽 **유형 Q+Q** **01** ④ **02** ⑤ **03** ④ **04** 연속
05 ① **06** 15 **07** ③ **08** ②

24쪽 **Lecture 09** **1-1** 모든 실수 x에서 연속이다.
1-2 (1) $(-\infty, \infty)$ (2) $(-\infty, \infty)$ (3) $(-\infty, 8)$, $(8, \infty)$
(4) $(-\infty, -3)$, $(-3, 3)$, $(3, \infty)$
2-1 $x\neq0$, $x\neq1$인 모든 실수 x에서 연속이다.
2-2 (1) $(-\infty, \infty)$ (2) $(-\infty, \infty)$ (3) $(-\infty, \infty)$
(4) $(-\infty, 2)$, $(2, \infty)$

25쪽 **Lecture 10** **1-1** (1) 최댓값: 1, 최솟값: 0
(2) 최댓값: 없다, 최솟값: -1
1-2 (1) 최댓값: 4, 최솟값: 1 (2) 최댓값: 1, 최솟값: -2
(3) 최댓값: $-\frac{1}{4}$, 최솟값: -1 (4) 최댓값: 2, 최솟값: 1
2-1 연속, 사잇값의 정리 **2-2** 풀이 21쪽

26쪽 **유형 Q+Q** **01** ① **02** ② **03** ⑤ **04** -5
05 ② **06** 최댓값: 없다, 최솟값: -3 **07** ④ **08** 3

28쪽 **중단원 마무리** **01** ① **02** 2 **03** ③ **04** ③
05 6 **06** ⑤ **07** ③ **08** 24 **09** ① **10** ④
11 ③ **12** 21 **13** ③ **14** -4 **15** ② **16** 4

03 미분계수와 도함수

34쪽 **Lecture 11** **1-1** (1) 4 (2) -2 **1-2** (1) -3 (2) $4+\Delta x$
2-1 (1) 5 (2) -1 **2-2** (1) -3 (2) 1

35쪽 **Lecture 12** **1-1** ㄱ **1-2** (1) 2 (2) 3
2-1 연속, -1, 미분가능
2-2 (1) 연속이지만 미분가능하지 않다. (2) 연속이고 미분가능하다.

36쪽 **유형 Q+Q** **01** ⑤ **02** ④ **03** -4 **04** ③
05 ① **06** 3 **07** ④ **08** ② **09** 26 **10** 5
11 ② **12** ⑤ **13** ① **14** ① **15** 8

39쪽 **Lecture 13** **1-1** x, 2, 3, $2h$, 2
1-2 (1) $f'(x)=0$ (2) $f'(x)=4$ (3) $f'(x)=-2x$ (4) $f'(x)=3x^2+2$
1-3 (1) -3 (2) 4

40쪽 **Lecture 14** **1-1** (1) $y'=7x^6$ (2) $y'=0$
2-1 (1) $y'=1$ (2) $y'=-4x+5$ (3) $y'=3x^2-2x$ (4) $y'=2x^3-x^2+2$
2-2 (1) -1 (2) 4
3-1 (1) $y'=6x+6$ (2) $y'=-8x^3-3x^2+12x+3$ (3) $y'=12x^2+26x-35$
(4) $y'=6(2x+1)^2$

41쪽 **유형 Q+Q** **01** (가) $x+h$ (나) h (다) n **02** ③
03 ⑤ **04** 18 **05** ④ **06** 2 **07** -36 **08** 27
09 ② **10** ③ **11** 4 **12** 7 **13** -3 **14** 8
15 ③ **16** ⑤ **17** 0 **18** ① **19** 10

44쪽 **중단원 마무리** **01** ④ **02** -1 **03** 7 **04** ④
05 ① **06** 1 **07** ② **08** ⑤ **09** ② **10** 1
11 ③ **12** ② **13** 48 **14** 6 **15** ① **16** ③
17 ② **18** ① **19** 11

04 도함수의 활용 (1)

48쪽 **Lecture 15** **1-1** (1) -5 (2) 4 **1-2** (1) 3 (2) 5
2-1 (1) $y=-3x+8$ (2) $y=8x+22$
2-2 (1) $\frac{1}{2}$ (2) $y=\frac{1}{2}x-\frac{7}{2}$

49쪽 **Lecture 16** **1-1** (1) 2 (2) $y=8x-13$
1-2 $y=-x-1$, $y=-x+3$
2-1 (1) $y=(-2t+3)x+t^2$ (2) -2, 2 (3) $y=7x+4$, $y=-x+4$
2-2 $y=-10x-3$, $y=-2x+5$

50쪽 **유형 Q+Q** **01** ① **02** 3 **03** ④ **04** ②
05 12 **06** ③ **07** ④ **08** ③ **09** ④ **10** 18
11 ⑤ **12** (1) (0, 2) (2) $\frac{15}{2}$ **13** ② **14** ③
15 (1) -1, 1 (2) -1, $\frac{1}{3}$ (3) $y=-3x-1$ **16** ② **17** ③
18 18

53쪽 **Lecture 17** **1-1** (1) 2 (2) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ **1-2** (1) $\frac{5}{2}$ (2) 3
2-1 (1) 3 (2) $-\sqrt{3}$ **2-2** (1) $\frac{1}{2}$ (2) -1

54쪽 **유형 Q+Q** **01** ③ **02** ① **03** 2 **04** ③
05 3

55쪽 **중단원 마무리** **01** 8 **02** ② **03** ⑤ **04** ①
05 ④ **06** 20 **07** 4 **08** 2 **09** -3 **10** ②
11 ① **12** ② **13** ④ **14** 48 **15** 8 **16** ⑤
17 4 **18** ⑤ **19** ③ **20** ②

05 도함수의 활용 (2)

58쪽 **Lecture 18** **1-1** <, <, 증가 **1-2** (1) 증가 (2) 감소
2-1 (1) 구간 $(-\infty, 3]$에서 증가하고, 구간 $[3, \infty)$에서 감소한다.
(2) 구간 $(-\infty, -1]$, $[1, \infty)$에서 증가하고, 구간 $[-1, 1]$에서 감소한다.
2-2 구간 $[0, 4]$에서 증가하고, 구간 $(-\infty, 0]$, $[4, \infty)$에서 감소한다.

59쪽 **유형 Q+Q** **01** ② **02** 9 **03** $a\ge\frac{4}{3}$ **04** 7
05 ① **06** ①

60쪽 **Lecture 19** **1-1** (1) 2 (2) -1, 4 (3) 극댓값: 5, 극솟값: -1, 1
2-1 (1) -3 (2) 0
3-1

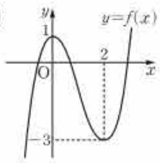
x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	5	↘	1	↗

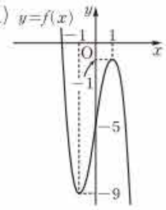
, 극댓값: 5, 극솟값: 1

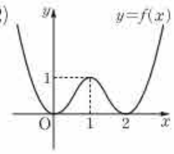
3-2 극댓값: -1, 극솟값: -2

61쪽 **유형 Q+Q** **01** ③ **02** 1 **03** $(-1, -6)$
04 16 **05** -26 **06** ① **07** ④

62쪽 **Lecture 20** **1-1** (1) 0, 2 (2) 극댓값: 1, 극솟값: -3

(3)


1-2 (1)


(2)


2-1 서로 다른 두 실근, $>$, $>$, $a<-\sqrt{3}$ 또는 $a>\sqrt{3}$

2-2 $a\geq 27$

63쪽 **Lecture 21** **1-1** (1) 극솟값: -8, $f(0)=-1$, $f(2)=3$
(2) 최댓값: 3, 최솟값: -8

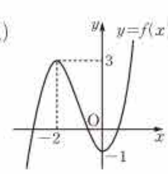
1-2 (1) 최댓값: 2, 최솟값: -3 (2) 최댓값: 18, 최솟값: -14

2-1 (1) $0<a<3$ (2) $-2a^3+18a$ (3) $12\sqrt{3}$

64쪽 유형 Q+Q **01** ③ **02** ④ **03** $a<0$ 또는 $a>6$
04 ② **05** ④ **06** 4 **07** ① **08** ② **09** ⑤
10 3 **11** ② **12** 8 **13** ⑤ **14** ③

67쪽 중단원 마무리 **01** ① **02** ④ **03** ④ **04** 6
05 ① **06** 13 **07** 16 **08** ③ **09** ② **10** ①
11 4 **12** ③ **13** ⑤ **14** ① **15** 14 **16** ②
17 ② **18** ③ **19** ④ **20** -7 **21** ④ **22** ②
23 8π

06 도함수의 활용 (3)

72쪽 **Lecture 22** **1-1** (1)


(2) 3 **1-2** 2

2-1 1, 1, 0 **2-2** 풀이 56쪽

73쪽 유형 Q+Q **01** $-\frac{9}{2}<k<\frac{7}{2}$ **02** ② **03** ④
04 ① **05** ③ **06** 56 **07** $-27<k<5$ **08** ⑤
09 ⑤ **10** -13 **11** ① **12** 32

75쪽 **Lecture 23** **1-1** $v=-5$, $a=6$ **1-2** 3
2-1 (1) $6t-4$ (2) 20 **2-2** 17 **2-3** 144

76쪽 유형 Q+Q **01** 3 **02** ④ **03** ③ **04** ④
05 500 m **06** ② **07** 63 m **08** -20 m/s **09** ③
10 ㄴ **11** ⑤ **12** (1) $2t$ m (2) $4t$ (3) 4 m/s

78쪽 중단원 마무리 **01** 3 **02** ② **03** ③ **04** ②
05 7 **06** $k<-7$ 또는 $k>20$ **07** 21 **08** ④ **09** 32
10 3 **11** 8 **12** ⑤ **13** 27 **14** ④ **15** ①
16 30 **17** ④ **18** 30 **19** $\frac{16}{3}$초

07 부정적분

84쪽 **Lecture 24** **1-1** (1) $6x+C$ (2) $-x^2+C$ (3) x^3+C
(4) x^4+C

1-2 (1) $f(x)=-4$ (2) $f(x)=2x-6$

2-1 (1) x^2-x (2) x^2-x+C

2-2 (1) $-5x^2+2x$ (2) $-5x^2+2x+C$

85쪽 **Lecture 25** **1-1** (1) $\frac{1}{6}x^6+C$ (2) $\frac{1}{10}x^{10}+C$ (3) $\frac{1}{8}y^8+C$
(4) $\frac{1}{13}t^{13}+C$

2-1 (1) $2x^5+C$ (2) x^2+7x+C (3) $2x^3-5x+C$ (4) $\frac{1}{4}x^4-2x^2+x+C$

2-2 (1) $x^3+\frac{5}{2}x^2-2x+C$ (2) $\frac{1}{2}x^2-x+C$ (3) $\frac{3}{2}x^2-4x+C$
(4) $\frac{1}{2}x^2+3x+C$

2-3 (1) $f(x)=5x^2+9x-7$ (2) $f(x)=-x^3+3x^2+x+1$

86쪽 유형 Q+Q **01** 1 **02** ② **03** 6 **04** ⑤
05 ② **06** 8 **07** ④ **08** -2 **09** 41 **10** -3
11 $f(x)=3x^2+6x-5$ **12** ③ **13** 12 **14** ① **15** ③
16 2 **17** ② **18** ④ **19** ⑤ **20** ⑤ **21** 10

90쪽 중단원 마무리 **01** -8 **02** ② **03** 10 **04** 7
05 ④ **06** 15 **07** ① **08** ③ **09** ⑤ **10** 1
11 $\frac{2}{3}$ **12** (1) $f'(x)=-x+4$ (2) $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+4x$ **13** 7
14 ④

08 정적분

92쪽 Lecture 26 **1-1** (1) 8 (2) 12 (3) 3 (4) $\frac{16}{3}$ (5) -24 (6) 0
1-2 (1) 0 (2) 0 (3) 7 (4) -7

93쪽 Lecture 27 **1-1** (1) 124 (2) 4 **1-2** (1) 36 (2) 6
2-1 (1) 0 (2) 64 **2-2** $\frac{46}{15}$

94쪽 유형 Q+Q **01** ④ **02** 12 **03** 9 **04** ③
05 ② **06** 27 **07** ⑤ **08** $-\frac{1}{3}$ **09** ⑤ **10** ①
11 ③ **12** 10

96쪽 Lecture 28 **1-1** (1) $3x-5$ (2) x^2+6x+4 (3) 14 (4) $4x-7$
1-2 (1) $f(x)=2x$ (2) $f(x)=6x+1$
2-1 (1) 14 (2) 4 (3) -7 (4) 8 **2-2** 1

97쪽 유형 Q+Q **01** ③ **02** $\frac{11}{2}$ **03** $f(x)=6x^2-8x+3$
04 ② **05** -2 **06** ⑤ **07** ④ **08** 6 **09** $-\frac{1}{3}$
10 ③ **11** ① **12** 10

99쪽 중단원 마무리 **01** $-\frac{9}{2}$ **02** ③ **03** 45 **04** ②
05 ① **06** $\frac{25}{6}$ **07** 43 **08** ④ **09** ② **10** ④
11 1 **12** 5 **13** ③ **14** -8 **15** ⑤ **16** $\frac{8}{3}$
17 ③ **18** 5

09 정적분의 활용

102쪽 Lecture 29 **1-1** (1) $\frac{9}{2}$ (2) $\frac{4}{3}$ (3) $\frac{4}{3}$
1-2 (1) $\frac{1}{2}$ (2) $\frac{37}{12}$ (3) $\frac{1}{6}$ (4) 8 **1-3** (1) 6 (2) $\frac{8}{3}$ (3) 3

103쪽 Lecture 30 **1-1** (1) $a=-1$, $b=3$ (2) $\frac{32}{3}$
1-2 (1) $\frac{125}{6}$ (2) $\frac{32}{3}$ **2-1** (1) $a=-2$, $b=1$ (2) 9
2-2 (1) 4 (2) $\frac{27}{2}$

104쪽 유형 Q+Q **01** 12 **02** ② **03** ① **04** 7
05 ④ **06** -2 **07** ③ **08** 3 **09** $\frac{8}{3}$ **10** ⑤
11 ② **12** -2 **13** ② **14** 4 **15** ④ **16** 14
17 12 **18** ②

107쪽 Lecture 31 **1-1** (1) $\frac{16}{3}$ (2) 0 (3) $\frac{8}{3}$
1-2 (1) 11 (2) 3 (3) 5 **1-3** (가) 0 (나) 4 (다) 16

108쪽 유형 Q+Q **01** ③ **02** 50 **03** ④ **04** 81 m
05 -1 **06** ②

109쪽 중단원 마무리 **01** ③ **02** ④ **03** 2 **04** ①
05 40 **06** $\frac{64}{3}$ **07** $\frac{27}{4}$ **08** ④ **09** ⑤ **10** ①
11 ② **12** 80 **13** 40 **14** ③ **15** 12 **16** 14 m
17 ③ **18** ⑤

빠른 정답 찾기 **Work Book**

01 함수의 극한

W 2쪽 01 함수의 극한

01 (1) 2 (2) 5 (3) 0 (4) 1   **02** (1) ∞ (2) $-\infty$ (3) $-\infty$ (4) ∞

03 (1) 4 (2) 2   **04** (1) 존재하지 않는다. (2) 0   **05** ③

06 3   **07** ④   **08** ②   **09** 3   **10** 2   **11** ④

12 1

W 4쪽 02 함수의 극한값의 계산

01 (1) 6 (2) 4 (3) 11 (4) -1

02 (1) -3 (2) $\frac{1}{6}$ (3) 0 (4) 2 (5) $-\infty$ (6) $-\frac{1}{4}$

03 (1) -8 (2) 15   **04** 5   **05** ③   **06** 1   **07** ②

08 ㄴ, ㄷ, ㄹ   **09** ④   **10** ⑤   **11** 4   **12** ③

13 ①   **14** 3   **15** ①   **16** 5   **17** ①   **18** 8

19 ③   **20** ④   **21** ⑤   **22** 6   **23** $\frac{1}{4}$ **24** 12

25 ④   **26** -8 **27** ⑤   **28** ③   **29** 0   **30** ②

31 16   **32** ④   **33** $\frac{9}{2}$

02 함수의 연속

W 10쪽 03 함수의 연속

01 (1) 불연속 (2) 연속 (3) 불연속

02 (1) $(-\infty, \infty)$ (2) $(-\infty, 4)$, $(4, \infty)$ (3) $[3, \infty)$

03 (1) $(-\infty, \infty)$ (2) $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2}, \infty\right)$ (3) $(-\infty, 7]$ **04** ⑤

05 ㄴ, ㄷ   **06** 8   **07** ④   **08** 4   **09** ㄱ, ㄷ

10 (1) 1 (2) 2 (3) 불연속   **11** ③   **12** 10   **13** -8

14 ⑤   **15** 3   **16** ①   **17** 3   **18** ③

W 13쪽 04 연속함수의 성질

01 (1) $(-\infty, \infty)$ (2) $(-\infty, 5)$, $(5, \infty)$

(3) $(-\infty, -4)$, $(-4, 1)$, $(1, \infty)$

02 (1) $(-\infty, \infty)$ (2) $(-\infty, -1)$, $(-1, 2)$, $(2, \infty)$

03 (1) 최댓값: 10, 최솟값: 1 (2) 최댓값: 2, 최솟값: $\frac{2}{3}$

(3) 최댓값: -1, 최솟값: -2

04 풀이 100쪽   **05** 6   **06** ③   **07** ⑤   **08** -3

09 ②   **10** -5 **11** ①   **12** ④   **13** 4   **14** ④

15 ②   **16** 10   **17** ②   **18** ④   **19** 3개

03 미분계수와 도함수

W 16쪽 05 미분계수

01 (1) 1 (2) 2   **02** 3, 9, 12, 12, 3, 9, 3, 3, 12

03 (1) -3 (2) 6

04 (1) 연속이고 미분가능하다. (2) 연속이지만 미분가능하지 않다.

05 ②   **06** -18 **07** ④   **08** 4   **09** ⑤   **10** ③

11 ①   **12** 12   **13** ①   **14** 6   **15** ⑤   **16** 7

17 ⑤   **18** 1   **19** $f'(b)<f'(d)<f'(c)<f'(a)$ **20** ④

21 ③   **22** ⑤   **23** ③

W 20쪽 06 도함수

01 (1) $f'(x)=-1$ (2) $f'(x)=6x+7$

02 (1) $y'=9x^8$ (2) $y'=0$ (3) $y'=-15x^4$

(4) $y'=2$ (5) $y'=8x-6$ (6) $y'=-x^2+\frac{1}{2}x$

03 (1) $y'=8x-12$ (2) $y'=6x^2-2x+4$ (3) $y'=9x^2+40x+12$

(4) $y'=4(x+7)^3$ (5) $y'=2(2x-5)(x^2-5x+1)$

04 (가) $2h$ (나) 2 (다) $2f(x)$ **05** ④   **06** 1   **07** ④

08 9   **09** ③   **10** -10 **11** ⑤   **12** ②   **13** ④

14 ①   **15** 88   **16** ⑤   **17** ③   **18** 78   **19** 3

20 -2 **21** ⑤   **22** 5   **23** ④   **24** ②   **25** ①

26 -5 **27** ①   **28** 14   **29** ③

04 도함수의 활용 (1)

W 25쪽 07 접선의 방정식

01 (1) -3 (2) 13 (3) 6

02 (1) $y=2x-1$ (2) $y=-3x$ (3) $y=4x-13$

03 $y=-x-1$

04 (1) $y=x+1$ (2) $y=6x-2$ (3) $y=-5x-1$, $y=-5x-5$

05 (1) $y=-4x+6$, $y=8x-6$ (2) $y=7x+5$, $y=-5x+5$

(3) $y=-3x+2$, $y=6x-16$

06 ⑤   **07** ③   **08** -7 **09** ①   **10** ②   **11** 11

12 ①   **13** ④   **14** -8 **15** ③   **16** ④   **17** ①

18 11   **19** ①   **20** ⑤   **21** ③   **22** 2   **23** ①

24 ②   **25** $8\sqrt{2}$ **26** $\frac{\sqrt{10}}{2}$ **27** ④   **28** ②   **29** ④

30 ② **31** 1 **32** (1) $a=-\frac{1}{4}$, $b=3$ (2) $y=-x-4$

33 ② **34** ⑤ **35** ④ **36** $\frac{17}{2}$ **37** ⑤

W 31쪽 08 평균값 정리

01 (1) $\frac{7}{2}$ (2) 0 **02** (1) -1 (2) $\frac{1}{3}$ **03** 3 **04** ②

05 ⑤ **06** -2 **07** ① **08** ③ **09** ③ **10** 5

11 ④

05 도함수의 활용 (2)

W 33쪽 09 함수의 증가와 감소

01 (1) 감소 (2) 증가 (3) 감소

02 (1) 구간 $[2, \infty)$에서 증가하고, 구간 $(-\infty, 2]$에서 감소한다.

(2) 구간 $[-1, 3]$에서 증가하고, 구간 $(-\infty, -1]$, $[3, \infty)$에서 감소한다.

(3) 구간 $[-1, 0]$, $[1, \infty)$에서 증가하고, 구간 $(-\infty, -1]$, $[0, 1]$에서 감소한다.

03 ① **04** ③ **05** 4 **06** ④ **07** ① **08** ⑤

09 -5 **10** ④ **11** -6 **12** ⑤

W 35쪽 10 함수의 극대와 극소

01 (1) 5 (2) 0

02 (1) 극댓값: 20, 극솟값: -12 (2) 극댓값: 10, 극솟값: $\frac{13}{4}$

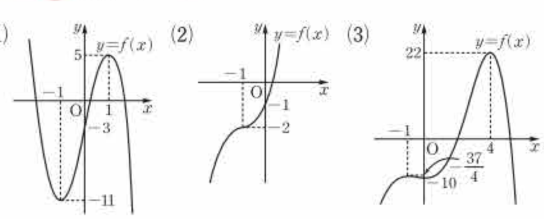
(3) 극댓값: 9, 극솟값: -7

03 ③ **04** ② **05** 2 **06** ① **07** ⑤ **08** ④

09 1 **10** -2 **11** $\frac{4}{3}$ **12** ③

W 37쪽 11 함수의 그래프

01 (1)



02 (1) 최댓값: 4, 최솟값: -1 (2) 최댓값: 5, 최솟값: -3

(3) 최댓값: 11, 최솟값: -21

03 (1) $0<x<3$ (2) $4x^3-24x^2+36x$ (3) 16 **04** ③ **05** ⑤

06 2 **07** ⑤ **08** 3 **09** 9 **10** ④ **11** ①

12 34 **13** ④ **14** 2 **15** ② **16** -1 **17** ⑤

18 -8 **19** ④ **20** ③ **21** 12 **22** ④ **23** 54

24 ③

06 도함수의 활용 (3)

W 41쪽 12 방정식과 부등식에의 활용

01 (1) 2 (2) 4 (3) 1 **02** 풀이 126쪽 **03** 3 **04** ①

05 2 **06** ① **07** ④ **08** ⑤ **09** -6 **10** ③

11 (1) $-5<k<-4$ (2) -5, -4 (3) $k<-5$ 또는 $k>-4$ **12** ④

13 -36 **14** ② **15** ③ **16** 6 **17** ④ **18** ⑤

19 ④ **20** $k<0$ **21** ④ **22** ① **23** ⑤ **24** 46

W 45쪽 13 속도와 가속도

01 (1) 6 (2) -24 (3) 2 **02** (1) 15 (2) 19 (3) $\frac{9}{2}$

03 25 **04** ② **05** 5, 2 **06** ① **07** $\frac{1}{3}$ **08** ③

09 ① **10** ② **11** ② **12** 288 **13** ⑤ **14** 20 m/s

15 ③ **16** ④ **17** ① **18** $5\sqrt{2}$ cm/s **19** ⑤

20 ③ **21** 6 **22** 54π cm^3/s **23** ④

07 부정적분

W 49쪽 14 부정적분

01 (1) $f(x)=8$ (2) $f(x)=-2x+2$ (3) $f(x)=x^2-9$

02 (1) x^3-x^2+x (2) x^3-x^2+x+C

03 (1) $\frac{1}{5}x^5+C$ (2) $\frac{1}{12}t^{12}+C$

04 (1) $-x^4+x^3-5x+C$ (2) $3x^3+3x^2+x+C$ (3) $\frac{1}{3}x^3+x^2+4x+C$

(4) x^3+x^2+4x+C (5) $-x^6+2x^4+C$

05 ⑤ **06** -2 **07** 9 **08** ③ **09** -3 **10** ②

11 1 **12** ① **13** ④ **14** 2 **15** ⑤ **16** ③

17 -6 **18** -3 **19** ④ **20** -3

21 $f(x)=-4x^3+12x+1$ **22** ④ **23** ⑤ **24** -8

25 22 **26** ⑤ **27** 56 **28** ① **29** ③ **30** 9

31 ⑤ **32** $(0, 2)$ **33** ② **34** ④ **35** 6

36 $-8<k<\frac{8}{3}$

08 정적분

W 55쪽 **15** 정적분

01 (1) 22 (2) 0 (3) 18 (4) $\frac{5}{2}$ **02** (1) 4 (2) $\frac{39}{2}$ (3) 23 (4) 27

03 (1) 48 (2) 4 **04** ④ **05** 120 **06** ② **07** ③

08 57 **09** ④ **10** 9 **11** ② **12** 4 **13** ②

14 $\frac{3}{2}$ **15** ① **16** ⑤ **17** 2 **18** ① **19** 6

20 ③ **21** -18 **22** ② **23** ③ **24** 8 **25** ⑤

W 59쪽 **16** 정적분으로 정의된 함수

01 (1) x^2+5x (2) $2x^3-4x+1$ (3) 3 (4) $-4x+8$

02 (1) $f(x)=2x-6$ (2) $f(x)=3x^2+16x$ **03** (1) 19 (2) 5

04 3 **05** -14 **06** ③ **07** -7 **08** ② **09** 12

10 ④ **11** -4 **12** $f(x)=4x^3+5$ **13** ⑤ **14** ①

15 4 **16** ④ **17** ② **18** -1 **19** 2 **20** ⑤

21 45

09 정적분의 활용

W 62쪽 **17** 넓이

01 (1) 3 (2) 6 (3) $\frac{23}{4}$ **02** (1) 4 (2) 36 (3) $\frac{37}{12}$ (4) $\frac{1}{12}$

03 (1) $\frac{9}{2}$ (2) 8 **04** (1) $\frac{64}{3}$ (2) $\frac{27}{2}$ **05** ③ **06** ①

07 27 **08** 13 **09** ② **10** 2 **11** ⑤ **12** ④

13 8 **14** ② **15** $\frac{27}{4}$ **16** ③ **17** ④ **18** ③

19 $\frac{2}{3}$ **20** ② **21** (1) $y=-5x+3$, $y=3x-5$ (2) $\frac{16}{3}$

22 ⑤ **23** ③ **24** $\frac{9}{4}$ **25** ④ **26** 2 **27** $1-\sqrt{2}$

28 ② **29** ① **30** ② **31** $\frac{35}{6}$ **32** ⑤ **33** 20

34 14 **35** ③

W 68쪽 **18** 속도와 거리

01 (1) $\frac{7}{2}$ (2) -2 (3) 9 **02** ④ **03** 6 **04** ③

05 10 **06** ② **07** ④ **08** 20 **09** ⑤ **10** 4

11 7 **12** ②

Lecture Book

I. 함수의 극한과 연속

01 함수의 극한

01 함수의 극한

Lecture 01 함수의 수렴 6쪽

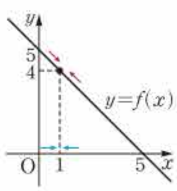
1-1 (1) $y=f(x)$의 그래프에서 x의 값이 2가 아니면서 2에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 1에 한없이 가까워지므로 $\lim_{x\to2}f(x)=1$

(2) $y=f(x)$의 그래프에서 x의 값이 4가 아니면서 4에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 3에 한없이 가까워지므로 $\lim_{x\to4}f(x)=3$

함수 $f(x)$의 $x=a$에서의 함숫값과 극한값이 다를 수 있다.

답 (1) 1 (2) 3

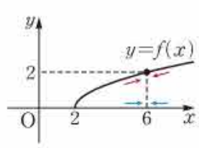
1-2 (1) $f(x)=-x+5$라 하면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 x의 값이 1이 아니면서 1에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 4에 한없이 가까워지므로

$\lim_{x\to1}(-x+5)=4$

(2) $f(x)=\sqrt{x-2}$라 하면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

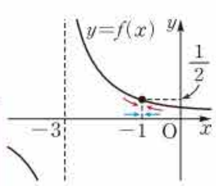


$y=\sqrt{x-2}$의 그래프는 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 x의 값이 6이 아니면서 6에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 2에 한없이 가까워지므로

$\lim_{x\to6}\sqrt{x-2}=2$

(3) $f(x)=\dfrac{1}{x+3}$이라 하면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

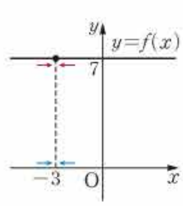


$y=\dfrac{1}{x+3}$의 그래프는 $y=\dfrac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이다.

따라서 x의 값이 -1이 아니면서 -1에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 $\dfrac{1}{2}$에 한없이 가까워지므로

$\lim_{x\to-1}\dfrac{1}{x+3}=\dfrac{1}{2}$

(4) $f(x)=7$이라 하면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 x의 값이 -3이 아니면서 -3에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 7이므로

$\lim_{x\to-3}7=7$

답 (1) 4 (2) 2 (3) $\dfrac{1}{2}$ (4) 7

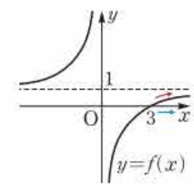
2-1 (1) $y=f(x)$의 그래프에서 x의 값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값은 2에 한없이 가까워지므로

$\lim_{x\to\infty}f(x)=2$

(2) $y=f(x)$의 그래프에서 x의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값은 2에 한없이 가까워지므로 $\lim_{x\to-\infty}f(x)=2$

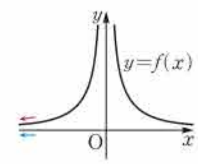
답 (1) 2 (2) 2

2-2 (1) $f(x)=1-\dfrac{3}{x}$이라 하면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 x의 값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값은 1에 한없이 가까워지므로 $\lim_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{3}{x}\right)=1$

(2) $f(x)=\dfrac{1}{|x|}$이라 하면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



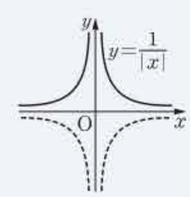
따라서 x의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값은 0에 한없이 가까워지므로 $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{1}{|x|}=0$

답 (1) 1 (2) 0

쌤 한마디

$\dfrac{1}{|x|}=\begin{cases}\dfrac{1}{x} & (x>0)\\ -\dfrac{1}{x} & (x<0)\end{cases}$이므로

함수 $y=\dfrac{1}{|x|}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 이 그래프를 평행이동 또는 대칭이동하면 $y=\dfrac{1}{|x-1|}$, $y=-\dfrac{1}{|x|}+1$과 같은 함수의 그래프를 x의 값의 범위를 나누지 않고 그릴 수 있다.



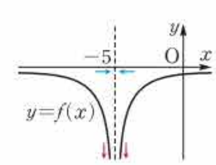
Lecture 02 함수의 발산 7쪽

1-1 $y=f(x)$의 그래프에서 x의 값이 0이 아니면서 0에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 한없이 커지므로

$\lim_{x\to0}f(x)=\infty$

답 ∞

1-2 (1) $f(x)=-\dfrac{1}{|x+5|}$이라 하면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



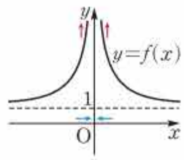
$y=-\dfrac{1}{|x+5|}$의 그래프는 $y=\dfrac{1}{|x|}$의 그래프를 x축의 방향으로 -5만큼 평행이동한 후 x축에 대하여 대칭이동한 것이다.

따라서 x의 값이 -5가 아니면서 -5에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지므로

$\lim_{x\to-5}\left(-\dfrac{1}{|x+5|}\right)=-\infty$

(2) $f(x)=1+\dfrac{1}{|x|}$이라 하면

$y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 x의 값이 0이 아니면서 0에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 한없이 커지므로

$$\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{|x|}\right)=\infty$$

답 (1) $-\infty$　(2) ∞

2-1 (1) $y=f(x)$의 그래프에서 x의 값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값은 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지므로

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=-\infty$$

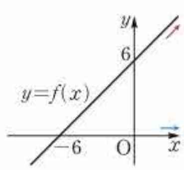
(2) $y=f(x)$의 그래프에서 x의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값은 한없이 커지므로

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\infty$$

답 (1) $-\infty$　(2) ∞

2-2 (1) $f(x)=x+6$이라 하면

$y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

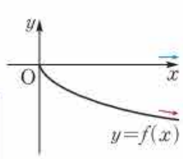


따라서 x의 값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값은 한없이 커지므로

$$\lim_{x\to\infty}(x+6)=\infty$$

(2) $f(x)=-\sqrt{x}$라 하면

$y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

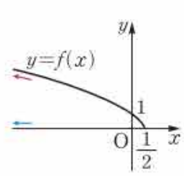


따라서 x의 값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값은 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지므로

$$\lim_{x\to\infty}(-\sqrt{x})=-\infty$$

(3) $f(x)=\sqrt{1-2x}$라 하면

$y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

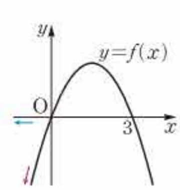


따라서 x의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값은 한없이 커지므로

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{1-2x}=\infty$$

(4) $f(x)=-x^2+3x$라 하면

$y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 x의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값은 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지므로

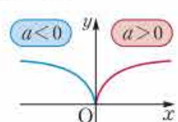
$$\lim_{x\to-\infty}(-x^2+3x)=-\infty$$

답 (1) ∞　(2) $-\infty$　(3) ∞　(4) $-\infty$

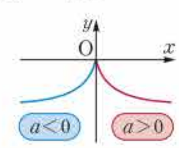
함수 $f(x)$가 $x=a$에서 정의되지 않을 때도 $\lim_{x\to a+} f(x)$, $\lim_{x\to a-} f(x)$가 존재할 수 있다.

무리함수 $y=\pm\sqrt{ax}$ $(a\neq 0)$의 그래프는 다음 그림과 같다.

① $y=\sqrt{ax}$



② $y=-\sqrt{ax}$



우극한과 좌극한이 모두 존재하더라도 그 값이 같지 않으면 극한값은 존재하지 않는다.

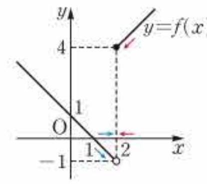
$|x|=\begin{cases} x & (x\geq 0) \\ -x & (x<0)\end{cases}$

$f(x)$는 $x=0$에서 정의되지 않는다.

Lecture 03 우극한과 좌극한

L 8쪽

1-1 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



(1) x의 값이 2보다 크면서 2에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 4에 한없이 가까워지므로

$$\lim_{x\to 2+} f(x)=4$$

(2) x의 값이 2보다 작으면서 2에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 -1에 한없이 가까워지므로

$$\lim_{x\to 2-} f(x)=-1$$

답 (1) 4　(2) -1

1-2 (1) $y=f(x)$의 그래프에서 x의 값이 0보다 크면서 0에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 0에 한없이 가까워지므로

$$\lim_{x\to 0+} f(x)=0$$

(2) $y=f(x)$의 그래프에서 x의 값이 0보다 작으면서 0에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 0에 한없이 가까워지므로

$$\lim_{x\to 0-} f(x)=0$$

(3) $\lim_{x\to 0+} f(x)=\lim_{x\to 0-} f(x)=0$이므로

$$\lim_{x\to 0} f(x)=0$$

(4) $y=f(x)$의 그래프에서 x의 값이 1보다 크면서 1에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 2에 한없이 가까워지므로

$$\lim_{x\to 1+} f(x)=2$$

(5) $y=f(x)$의 그래프에서 x의 값이 1보다 작으면서 1에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 1에 한없이 가까워지므로

$$\lim_{x\to 1-} f(x)=1$$

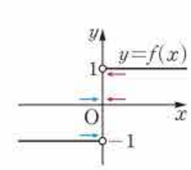
(6) $\lim_{x\to 1+} f(x)\neq\lim_{x\to 1-} f(x)$이므로 $\lim_{x\to 1} f(x)$는 존재하지 않는다.

답 (1) 0　(2) 0　(3) 0
(4) 2　(5) 1　(6) 존재하지 않는다.

1-3 (1) $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$라 하면

$$f(x)=\begin{cases} 1 & (x>0) \\ -1 & (x<0)\end{cases}$$

$y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$$\lim_{x\to 0+} f(x)=1,$$
$$\lim_{x\to 0-} f(x)=-1$$

따라서 $\lim_{x\to 0+} f(x)\neq\lim_{x\to 0-} f(x)$이므로 $\lim_{x\to 0} f(x)$, 즉

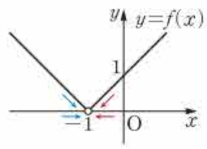
$\lim_{x\to 0}\dfrac{|x|}{x}$는 존재하지 않는다.

(2) $f(x)=\dfrac{(x+1)^2}{|x+1|}$이라 하면

$f(x)=\begin{cases} x+1 & (x>-1) \\ -x-1 & (x<-1) \end{cases}$

$|x+1|$
$=\begin{cases} x+1 & (x\ge -1) \\ -(x+1) & (x<-1) \end{cases}$

$y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$\lim\limits_{x\to -1+} f(x)$

$=\lim\limits_{x\to -1-} f(x)=0$

$\therefore \lim\limits_{x\to -1} f(x)=0$, 즉 $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x+1)^2}{|x+1|}=0$

답 (1) 존재하지 않는다. (2) 0

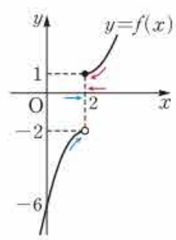
기본+표준 유형 Q+Q

9쪽

01 $\lim\limits_{x\to -1+} f(x)+\lim\limits_{x\to 1-} f(x)=1+3=4$

답 4

02 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



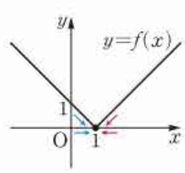
x^2-4x+5
$=(x-2)^2+1$,
$-x^2+4x-6$
$=-(x-2)^2-2$
이므로
$f(x)$
$=\begin{cases} (x-2)^2+1 & (x\ge 2) \\ -(x-2)^2-2 & (x<2) \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to 2+} f(x)-\lim\limits_{x\to 2-} f(x)$

$=1-(-2)=3$

답 ⑤

03 ㄱ. $f(x)=|x-1|$이라 하면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$\lim\limits_{x\to 1+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1-} f(x)$

$=0$

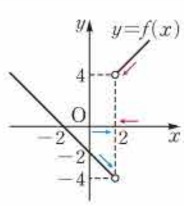
$\therefore \lim\limits_{x\to 1} f(x)=0$, 즉 $\lim\limits_{x\to 1}|x-1|=0$

$x^2-4=(x+2)(x-2)$

ㄴ. $f(x)=\dfrac{x^2-4}{|x-2|}$라 하면

$f(x)$

$=\begin{cases} x+2 & (x>2) \\ -x-2 & (x<2) \end{cases}$



이므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 $\lim\limits_{x\to 2+} f(x)=4$, $\lim\limits_{x\to 2-} f(x)=-4$에서

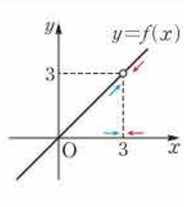
$\lim\limits_{x\to 2+} f(x)\neq\lim\limits_{x\to 2-} f(x)$

이므로 $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$, 즉 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{|x-2|}$는 존재하지 않는다.

$x^2-3x=x(x-3)$

ㄷ. $f(x)=\dfrac{x^2-3x}{x-3}$라 하면

$f(x)=x\ (x\neq 3)$



이므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서

$\lim\limits_{x\to 3+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3-} f(x)=3$

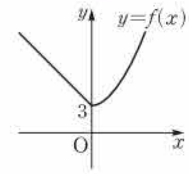
이므로 $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=3$, 즉 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-3x}{x-3}=3$

이상에서 극한값이 존재하는 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ④

04 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$가 존재하려면

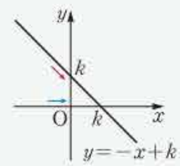
$\lim\limits_{x\to 0+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0-} f(x)$



이어야 하므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.

이때

$\lim\limits_{x\to 0+} f(x)=3$, $\lim\limits_{x\to 0-} f(x)=k$



이므로 $k=3$

답 3

05 $f(x)=t$로 놓으면 $x\to 2+$일 때 $t\to 1+$이므로

$\lim\limits_{x\to 2+} f(f(x))=\lim\limits_{t\to 1+} f(t)=0$

또 $x\to 1-$일 때 $t=2$이므로

$\lim\limits_{x\to 1-} f(f(x))=f(2)=2$

$\therefore \lim\limits_{x\to 2+} f(f(x))+\lim\limits_{x\to 1-} f(f(x))=2$

답 ②

Q쌤 한마디

두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $\lim\limits_{x\to a+} g(f(x))$의 값은 $f(x)=t$로 놓고 다음을 이용하여 구한다.

① $x\to a+$일 때 $t\to b+$이면

$\lim\limits_{x\to a+} g(f(x))=\lim\limits_{t\to b+} g(t)$

② $x\to a+$일 때 $t\to b-$이면

$\lim\limits_{x\to a+} g(f(x))=\lim\limits_{t\to b-} g(t)$

③ $x\to a+$일 때 $t=b$이면

$\lim\limits_{x\to a+} g(f(x))=g(b)$

06 $f(x)=t$로 놓으면 $x\to 1+$일 때 $t\to 2+$이므로

$\lim\limits_{x\to 1+} g(f(x))=\lim\limits_{t\to 2+} g(t)=-1$

$g(x)=s$로 놓으면 $x\to 2-$일 때 $s\to 0-$이므로

$\lim\limits_{x\to 2-} f(g(x))=\lim\limits_{s\to 0-} f(s)=2$

$\therefore \lim\limits_{x\to 1+} g(f(x))-\lim\limits_{x\to 2-} f(g(x))=-3$

답 -3

02 함수의 극한값의 계산

Lecture 04 함수의 극한에 대한 성질

10쪽

1-1 (1) $\lim\limits_{x\to 0}\{-4f(x)\}=-4\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

$=-4\cdot 6=-24$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\{f(x)+g(x)\}=\lim\limits_{x\to 0} f(x)+\lim\limits_{x\to 0} g(x)$

$=6+(-2)=4$

(3) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)g(x)=\lim\limits_{x\to 0} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to 0} g(x)$

$=6\cdot(-2)=-12$

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 0} f(x)}{\lim\limits_{x\to 0} g(x)}=\dfrac{6}{-2}=-3$

답 (1) -24 (2) 4 (3) -12 (4) -3

1-2 (1) $\lim_{x\to1}\{5f(x)+g(x)\}=5\lim_{x\to1}f(x)+\lim_{x\to1}g(x)$

$=5\cdot(-1)+4=-1$

(2) $\lim_{x\to1}\{7f(x)-2g(x)\}=7\lim_{x\to1}f(x)-2\lim_{x\to1}g(x)$

$=7\cdot(-1)-2\cdot4=-15$

(3) $\lim_{x\to1}\{-2f(x)g(x)+6\}$

$=-2\lim_{x\to1}f(x)\cdot\lim_{x\to1}g(x)+\lim_{x\to1}6$

$=-2\cdot(-1)\cdot4+6=14$

(4) $\lim_{x\to1}\dfrac{f(x)-3}{8g(x)}=\dfrac{\lim_{x\to1}f(x)-\lim_{x\to1}3}{8\lim_{x\to1}g(x)}$

$=\dfrac{-1-3}{8\cdot4}=-\dfrac{1}{8}$

답 (1) -1 (2) -15 (3) 14 (4) $-\dfrac{1}{8}$

1-3 (1) $\lim_{x\to3}(4x+3)=4\cdot3+3=15$

(2) $\lim_{x\to-1}(x^2-3x+7)=(-1)^2-3\cdot(-1)+7=11$

(3) $\lim_{x\to4}(x+6)(2x^2-1)=\lim_{x\to4}(x+6)\cdot\lim_{x\to4}(2x^2-1)$

$=(4+6)\cdot(2\cdot4^2-1)=310$

(4) $\lim_{x\to2}\dfrac{x^2-5x}{x+2}=\dfrac{\lim_{x\to2}(x^2-5x)}{\lim_{x\to2}(x+2)}$

$=\dfrac{2^2-5\cdot2}{2+2}=-\dfrac{3}{2}$

답 (1) 15 (2) 11 (3) 310 (4) $-\dfrac{3}{2}$

Lecture 05 함수의 극한값의 계산

11쪽

1-1 (1) $\lim_{x\to1}\dfrac{x^2-x}{x-1}=\lim_{x\to1}\dfrac{x(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to1}x=1$

(2) $\lim_{x\to2}\dfrac{x^2-x-2}{x-2}=\lim_{x\to2}\dfrac{(x+1)(x-2)}{x-2}$

$=\lim_{x\to2}(x+1)$

$=2+1=3$

(3) $\lim_{x\to4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}=\lim_{x\to4}\dfrac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{x}+2)}$

$=\lim_{x\to4}\dfrac{x-4}{(x-4)(\sqrt{x}+2)}$

$=\lim_{x\to4}\dfrac{1}{\sqrt{x}+2}$

$=\dfrac{1}{2+2}=\dfrac{1}{4}$

(4) $\lim_{x\to-3}\dfrac{x+3}{\sqrt{x+4}-1}$

$=\lim_{x\to-3}\dfrac{(x+3)(\sqrt{x+4}+1)}{(\sqrt{x+4}-1)(\sqrt{x+4}+1)}$

$=\lim_{x\to-3}\dfrac{(x+3)(\sqrt{x+4}+1)}{x+3}$

$=\lim_{x\to-3}(\sqrt{x+4}+1)$

$=1+1=2$

답 (1) 1 (2) 3 (3) $\dfrac{1}{4}$ (4) 2

Q BOX

분모의 최고차항 x로 분자, 분모를 각각 나눈다.

분모의 최고차항은 $\sqrt{x^2}$, 즉 x이다.

함수 $f(x)$가 다항함수이면 $\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$

$\infty\times$(0이 아닌 상수) 꼴

$\dfrac{(\text{상수})}{\infty}$ 꼴

$\dfrac{\infty}{\infty}$ 꼴

2-1 (1) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{x^2+1}{5x-4}=\lim_{x\to\infty}\dfrac{x+\dfrac{1}{x}}{5-\dfrac{4}{x}}=\infty$

(2) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{-x^2+2}{7x^2-2x+3}=\lim_{x\to\infty}\dfrac{-1+\dfrac{2}{x^2}}{7-\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x^2}}=-\dfrac{1}{7}$

(3) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-3}{3x^3+6x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{2}{x}-\dfrac{3}{x^3}}{3+\dfrac{6}{x}+\dfrac{1}{x^3}}=0$

(4) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{5x}{\sqrt{x^2+x}-1}=\lim_{x\to\infty}\dfrac{5}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}-\dfrac{1}{x}}=5$

답 (1) ∞ (2) $-\dfrac{1}{7}$ (3) 0 (4) 5

3-1 (1) $\lim_{x\to\infty}(x^3-5x+7)=\lim_{x\to\infty}x^3\left(1-\dfrac{5}{x^2}+\dfrac{7}{x^3}\right)$

$=\infty$

(2) $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+3}-x)$

$=\lim_{x\to\infty}\dfrac{(\sqrt{x^2+3}-x)(\sqrt{x^2+3}+x)}{\sqrt{x^2+3}+x}$

$=\lim_{x\to\infty}\dfrac{3}{\sqrt{x^2+3}+x}=0$

(3) $\lim_{x\to0}\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{1}{2}\right)=\lim_{x\to0}\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{x}{2x-4}$

$=\lim_{x\to0}\dfrac{1}{2x-4}=-\dfrac{1}{4}$

(4) $\lim_{x\to\infty}x\left(1-\dfrac{x+1}{x-1}\right)=\lim_{x\to\infty}x\cdot\dfrac{-2}{x-1}$

$=\lim_{x\to\infty}\dfrac{-2x}{x-1}$

$=\lim_{x\to\infty}\dfrac{-2}{1-\dfrac{1}{x}}=-2$

답 (1) ∞ (2) 0 (3) $-\dfrac{1}{4}$ (4) -2

Lecture 06 함수의 극한 ; 미정계수의 결정, 대소 관계

12쪽

1-1 (1) $x\to3$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\to0$ 이므로 (분자) $\to0$이다.

$\therefore \lim_{x\to3}(x^2-5x+a)=0$

(2) $\lim_{x\to3}(x^2-5x+a)=0$에서

$3^2-5\cdot3+a=0 \quad \therefore a=6$

답 (1) 0 (2) 6

1-2 (1) $x\to2$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\to0$ 이므로 (분자) $\to0$이다.

즉 $\lim_{x\to2}(x^2+ax-10)=0$이므로

$2^2+2a-10=0 \quad \therefore a=3$

(2) $x \to -1$일 때 0이 아닌 극한값이 존재하고

(분자) $\to 0$이므로 (분모) $\to 0$이다.

즉 $\lim_{x \to -1}(x^2+a)=0$이므로

$(-1)^2+a=0 \qquad \therefore a=-1$

답 (1) 3 (2) -1

2-1 모든 실수 x에 대하여

$-x^2+5 \le f(x) \le x^2-4x+7$이고

$\lim_{x \to 1}(-x^2+5)=4$, $\lim_{x \to 1}(x^2-4x+7)=4$

이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim_{x \to 1} f(x)=4$

답 4

2-2 (1) 모든 양의 실수 x에 대하여

$1-\dfrac{1}{x} \le f(x) \le 1+\dfrac{1}{x}$이고

$\lim_{x \to \infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)=1$, $\lim_{x \to \infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=1$

이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim_{x \to \infty} f(x)=1$

(2) 모든 양의 실수 x에 대하여

$\dfrac{3x}{x+1} \le f(x) \le \dfrac{3x+5}{x+2}$이고

$\lim_{x \to \infty}\dfrac{3x}{x+1}=3$, $\lim_{x \to \infty}\dfrac{3x+5}{x+2}=3$

이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim_{x \to \infty} f(x)=3$

답 (1) 1 (2) 3

Q BOX

$\dfrac{\infty}{\infty}$ 꼴의 함수의 극한에서 분자의 차수와 분모의 차수가 같으면 극한값은 최고차항의 계수의 비이다.

기본+표준 유형 Q+Q

L 13쪽

01 $\lim_{x \to 1}\dfrac{f(x)-6g(x)}{3+f(x)g(x)}=\dfrac{-3-6\cdot a}{3+(-3)\cdot a}=\dfrac{2a+1}{a-1}$

따라서 $\dfrac{2a+1}{a-1}=5$이므로

$2a+1=5a-5, \qquad 3a=6$

$\therefore a=2$

답 2

02 $\lim_{x \to 0}\dfrac{x+5f(x)}{x-2f(x)}=\lim_{x \to 0}\dfrac{1+5\cdot\dfrac{f(x)}{x}}{1-2\cdot\dfrac{f(x)}{x}}$

$=\dfrac{1+5\cdot 4}{1-2\cdot 4}=-3$

답 ①

$\lim_{x \to 0}\dfrac{f(x)}{x}=4$를 이용할 수 있도록 분자, 분모를 각각 x로 나누어 식을 변형한다.

03 $\lim_{x \to -2}\dfrac{x^3-x^2-4x+4}{-x^2+3x+10}$

$=\lim_{x \to -2}\dfrac{(x+2)(x-1)(x-2)}{-(x+2)(x-5)}$

$=\lim_{x \to -2}\left\{-\dfrac{(x-1)(x-2)}{x-5}\right\}$

$=-\dfrac{-3\cdot(-4)}{-7}=\dfrac{12}{7}$

따라서 $p=7$, $q=12$이므로

$q-p=5$

답 ④

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -1 & -4 & 4 \\ & & 1 & 0 & -4 \\ \hline & 1 & 0 & -4 & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore x^3-x^2-4x+4$

$=(x-1)(x^2-4)$

$=(x+2)(x-1)(x-2)$

04 $\lim_{x \to 9}\dfrac{x-9}{f(x)(\sqrt{x}-3)}$

$=\lim_{x \to 9}\dfrac{(x-9)(\sqrt{x}+3)}{f(x)(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}$

$=\lim_{x \to 9}\dfrac{(x-9)(\sqrt{x}+3)}{f(x)(x-9)}$

$=\lim_{x \to 9}\dfrac{\sqrt{x}+3}{f(x)}$

$=\dfrac{3+3}{2}=3$

답 3

05 $\lim_{x \to \infty}\dfrac{12x}{\sqrt{4x^2-x}+\sqrt{x^2+2x}}$

$=\lim_{x \to \infty}\dfrac{12}{\sqrt{4-\dfrac{1}{x}}+\sqrt{1+\dfrac{2}{x}}}$

$=\dfrac{12}{2+1}=4$

답 ⑤

06 $\lim_{x \to \infty}\dfrac{f(x)-f(x-1)}{4x}$

$=\lim_{x \to \infty}\dfrac{x^2+2x-\{(x-1)^2+2(x-1)\}}{4x}$

$=\lim_{x \to \infty}\dfrac{2x+1}{4x}$

$=\lim_{x \to \infty}\dfrac{2+\dfrac{1}{x}}{4}=\dfrac{1}{2}$

답 $\dfrac{1}{2}$

07 $\lim_{x \to \infty}\dfrac{1}{x-\sqrt{x^2-5x+1}}$

$=\lim_{x \to \infty}\dfrac{x+\sqrt{x^2-5x+1}}{(x-\sqrt{x^2-5x+1})(x+\sqrt{x^2-5x+1})}$

$=\lim_{x \to \infty}\dfrac{x+\sqrt{x^2-5x+1}}{5x-1}$

$=\lim_{x \to \infty}\dfrac{1+\sqrt{1-\dfrac{5}{x}+\dfrac{1}{x^2}}}{5-\dfrac{1}{x}}$

$=\dfrac{1+1}{5}=\dfrac{2}{5}$

답 ②

08 ① $\lim_{x \to \infty}(-2x^3+3x^2-x+7)$

$=\lim_{x \to \infty}\left\{-x^3\left(2-\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{7}{x^3}\right)\right\}=-\infty$

② $\lim_{x \to \infty}(\sqrt{x^2+8x}-x)$

$=\lim_{x \to \infty}\dfrac{(\sqrt{x^2+8x}-x)(\sqrt{x^2+8x}+x)}{\sqrt{x^2+8x}+x}$

$=\lim_{x \to \infty}\dfrac{8x}{\sqrt{x^2+8x}+x}$

$=\lim_{x \to \infty}\dfrac{8}{\sqrt{1+\dfrac{8}{x}}+1}$

$=\dfrac{8}{1+1}=4$

③ $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2-6}-x}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2-6}+x}{(\sqrt{x^2-6}-x)(\sqrt{x^2-6}+x)}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2-6}+x}{-6}=-\infty$

④ $\lim_{x\to\infty}x\left(1-\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}}\right)$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{x(\sqrt{x}-\sqrt{x-1})}{\sqrt{x}}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{x(\sqrt{x}-\sqrt{x-1})(\sqrt{x}+\sqrt{x-1})}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{x-1})}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x+\sqrt{x^2-x}}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+\sqrt{1-\frac{1}{x}}}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$

⑤ $\lim_{x\to2}(x-2)\left(1-\frac{6}{x^2-4}\right)$

$=\lim_{x\to2}(x-2)\cdot\frac{x^2-10}{x^2-4}$

$=\lim_{x\to2}(x-2)\cdot\frac{x^2-10}{(x+2)(x-2)}$

$=\lim_{x\to2}\frac{x^2-10}{x+2}=-\frac{3}{2}$

답 ③

09 $x \longrightarrow -2$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\longrightarrow 0$이므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉 $\lim_{x\to-2}(x^2+7x+a)=0$이므로

$(-2)^2+7\cdot(-2)+a=0 \qquad \therefore a=10$

$a=10$을 주어진 식의 좌변에 대입하면

$\lim_{x\to-2}\frac{x^2+7x+10}{x+2}=\lim_{x\to-2}\frac{(x+5)(x+2)}{x+2}$

$=\lim_{x\to-2}(x+5)=3$

따라서 $b=3$이므로

$a+b=13$

답 ④

10 $x \longrightarrow 4$일 때 0이 아닌 극한값이 존재하고 (분자) $\longrightarrow 0$이므로 (분모) $\longrightarrow 0$이다.

즉 $\lim_{x\to4}(ax+b)=0$이므로

$4a+b=0 \qquad \therefore b=-4a$ …… ㉠

㉠을 주어진 식의 좌변에 대입하면

$\lim_{x\to4}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{6}}{ax-4a}$

$=\lim_{x\to4}\frac{(\sqrt{x+2}-\sqrt{6})(\sqrt{x+2}+\sqrt{6})}{a(x-4)(\sqrt{x+2}+\sqrt{6})}$

$=\lim_{x\to4}\frac{x-4}{a(x-4)(\sqrt{x+2}+\sqrt{6})}$

$=\lim_{x\to4}\frac{1}{a(\sqrt{x+2}+\sqrt{6})}$

$=\frac{1}{2\sqrt{6}a}=\frac{\sqrt{6}}{12a}$

따라서 $\frac{\sqrt{6}}{12a}=\frac{\sqrt{6}}{3}$이므로

$12a=3 \qquad \therefore a=\frac{1}{4}$

$a=\frac{1}{4}$을 ㉠에 대입하면 $\qquad b=-1$

$\therefore ab=-\frac{1}{4}$

답 $-\frac{1}{4}$

11 $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+2ax}-\sqrt{x^2-2ax})$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+2ax}-\sqrt{x^2-2ax})(\sqrt{x^2+2ax}+\sqrt{x^2-2ax})}{\sqrt{x^2+2ax}+\sqrt{x^2-2ax}}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{4ax}{\sqrt{x^2+2ax}+\sqrt{x^2-2ax}}$

Q BOX: $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한이므로 분모의 최고차항 $\sqrt{x^2}$, 즉 x로 분자, 분모를 각각 나눈다.

$=\lim_{x\to\infty}\frac{4a}{\sqrt{1+\frac{2a}{x}}+\sqrt{1-\frac{2a}{x}}}$

$=\frac{4a}{1+1}=2a$

따라서 $2a=8$이므로 $\qquad a=4$

답 4

12 $x=-t$로 놓으면 $x \longrightarrow -\infty$일 때 $t \longrightarrow \infty$이므로

$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{ax^2-bx}+x)$

$=\lim_{t\to\infty}(\sqrt{at^2+bt}-t)$

$=\lim_{t\to\infty}\frac{(\sqrt{at^2+bt}-t)(\sqrt{at^2+bt}+t)}{\sqrt{at^2+bt}+t}$

$=\lim_{t\to\infty}\frac{(a-1)t^2+bt}{\sqrt{at^2+bt}+t}$ …… ㉠

이때 ㉠의 극한값이 존재하려면

$a-1=0 \qquad \therefore a=1$

Q BOX: $a-1\neq0$이면 (분자의 차수) > (분모의 차수)이므로 극한값이 존재하지 않는다.

$a=1$을 ㉠에 대입하면

$\lim_{t\to\infty}\frac{bt}{\sqrt{t^2+bt}+t}=\lim_{t\to\infty}\frac{b}{\sqrt{1+\frac{b}{t}}+1}$

$=\frac{b}{1+1}=\frac{b}{2}$

따라서 $\frac{b}{2}=3$이므로 $\qquad b=6$

$\therefore b-a=5$

답 ⑤

13 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{3x-1}=2$에서 $f(x)$는 일차항의 계수가 6인 일차식임을 알 수 있다.

Q BOX: $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{3x-1}$의 값이 2, 즉 0이 아닌 실수이므로
① $f(x)$와 $3x-1$의 차수가 같다.
② $f(x)$와 $3x-1$의 최고차항의 계수의 비는 2이다.
➡ $f(x)$는 x의 계수가 6인 일차식이다.

$f(x)=6x+a$ (a는 상수)라 하면

$\lim_{x\to-1}f(x)=\lim_{x\to-1}(6x+a)=-6+a$

즉 $-6+a=4$이므로 $\qquad a=10$

따라서 $f(x)=6x+10$이므로

$f(-2)=-12+10=-2$

답 ③

14 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2+2x-6}=3$에서 $f(x)$는 이차항의 계수가 3인 이차식임을 알 수 있다.

또 $\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{x^2-2x}=-1$에서 $x \longrightarrow 2$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\longrightarrow 0$이므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉 $\lim_{x\to2}f(x)=0$이므로 $\quad f(2)=0$

$f(x)=(x-2)(3x+a)$ (a는 상수)라 하면

$$\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{x^2-2x}=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(3x+a)}{x(x-2)}$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{3x+a}{x}=\frac{6+a}{2}$$

따라서 $\frac{6+a}{2}=-1$이므로 $\quad 6+a=-2$

$\therefore a=-8$

$\therefore f(x)=(x-2)(3x-8)=3x^2-14x+16$

답 $f(x)=3x^2-14x+16$

> $f(x)$는 $x-2$를 인수로 갖는다.

> $F(x)=\begin{cases}g(x) & (x\ge a)\\ h(x) & (x<a)\end{cases}$
> 일 때
> $\lim_{x\to a+}F(x)=\lim_{x\to a+}g(x)$,
> $\lim_{x\to a-}F(x)=\lim_{x\to a-}h(x)$

쌤 한마디

다항식 $P(x)$에 대하여 다음은 모두 같은 의미이다.

① $P(x)$가 $x-\alpha$로 나누어떨어진다.
② $P(x)$를 $x-\alpha$로 나누었을 때의 나머지가 0이다.
③ $P(\alpha)=0$
④ $P(x)$가 $x-\alpha$를 인수로 갖는다.

15 모든 실수 x에 대하여

$-x^2+6x-10\le f(x)\le\frac{1}{2}x^2-6x+14$이고

$\lim_{x\to4}(-x^2+6x-10)=-2$,

$\lim_{x\to4}\left(\frac{1}{2}x^2-6x+14\right)=-2$

이므로 $\quad \lim_{x\to4}f(x)=-2$ 답 -2

16 모든 실수 x에 대하여

$3x^2-x+2\le f(x)\le 3x^2-x+5$이므로 각 변을 x^2+1로 나누면

> $x^2+1>0$이므로 부등호의 방향이 바뀌지 않는다.

$$\frac{3x^2-x+2}{x^2+1}\le\frac{f(x)}{x^2+1}\le\frac{3x^2-x+5}{x^2+1}$$

이때 $\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-x+2}{x^2+1}=3$, $\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-x+5}{x^2+1}=3$이므로

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2+1}=3$ 답 3

17 $\mathrm{P}(t, \sqrt{3t})$, $\mathrm{H}(t, 0)$이므로

$\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{t^2+(\sqrt{3t})^2}=\sqrt{t^2+3t}$, $\overline{\mathrm{OH}}=t$

> 두 점 (x_1, y_1), (x_2, y_2) 사이의 거리는 $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

$$\therefore \lim_{t\to\infty}\frac{\overline{\mathrm{OP}}}{\overline{\mathrm{OH}}}=\lim_{t\to\infty}\frac{\sqrt{t^2+3t}}{t}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\sqrt{1+\frac{3}{t}}=1$$ 답 ②

18 점 P의 좌표를 $(t, 2t^2)$ $(t\ne0)$, 점 C의 좌표를 $(0, k)$라 하면 $\overline{\mathrm{OC}}=\overline{\mathrm{CP}}$, 즉 $\overline{\mathrm{OC}}^2=\overline{\mathrm{CP}}^2$이므로

> 점 P는 원점이 아니므로 $t\ne0$

> $\overline{\mathrm{OC}}$와 $\overline{\mathrm{CP}}$는 모두 원 C의 반지름이므로 $\overline{\mathrm{OC}}=\overline{\mathrm{CP}}$

$k^2=t^2+(2t^2-k)^2$

$k^2=t^2+4t^4-4kt^2+k^2$, $\quad 4kt^2=t^2+4t^4$

$\therefore k=t^2+\frac{1}{4}$ ($\because t\ne0$)

점 P가 원점 O에 한없이 가까워지면 $t\longrightarrow0$이므로

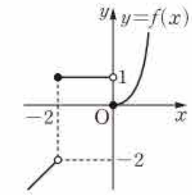
$a=\lim_{t\to0}k=\lim_{t\to0}\left(t^2+\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}$ 답 $\frac{1}{4}$

중단원 마무리

L 16쪽

01 전략 함수의 그래프를 그려 각 극한값을 구한다.

풀이 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$\lim_{x\to-2-}f(x)+\lim_{x\to0+}f(x)$

$=-2+0$

$=-2$ 답 -2

다른 풀이 $\lim_{x\to-2-}f(x)=\lim_{x\to-2-}x$

$=-2$,

$\lim_{x\to0+}f(x)=\lim_{x\to0+}x^2=0$

$\therefore \lim_{x\to-2-}f(x)+\lim_{x\to0+}f(x)=-2$

02 전략 정수 n에 대하여 $\lim_{x\to n+}[x]=n$, $\lim_{x\to n-}[x]=n-1$임을 이용한다.

풀이 $x\longrightarrow2+$일 때 $[x]=2$이므로

$\lim_{x\to2+}[x]=2$

$x\longrightarrow2-$일 때 $x+1\longrightarrow3-$이므로

$[x+1]=2$

$\therefore \lim_{x\to2-}[x+1]=2$

$\therefore \lim_{x\to2+}[x]+\lim_{x\to2-}[x+1]=4$ 답 ③

쌤 한마디

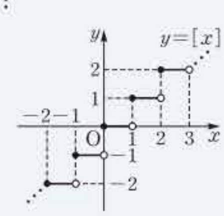
함수 $y=[x]$ ($[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수)에서

$n\le x<n+1$이면 $\quad [x]=n$ (n은 정수)

이므로 정수가 되는 x의 값을 경계로 구간을 나누어 $[x]$의 값을 구하면

⋮	⋮
$-2\le x<-1$일 때,	$[x]=-2$
$-1\le x<0$일 때,	$[x]=-1$
$0\le x<1$일 때,	$[x]=0$
$1\le x<2$일 때,	$[x]=1$
$2\le x<3$일 때,	$[x]=2$
⋮	⋮

따라서 함수 $y=[x]$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



- $x=n$ (n은 정수)일 때,
  $\lim_{x\to n+}[x]=n$,
  $\lim_{x\to n-}[x]=n-1$
- 함수 $y=[x]$는
  $x=n$ (n은 정수)에서 극한값이 존재하지 않는다.

03 전략 우극한과 좌극한이 모두 존재하고 그 값이 같으면 극한값이 존재한다.

풀이 ㄱ. $\lim_{x\to0}f(x)=-2$

ㄴ. $\lim_{x\to0+}f(x)=1$, $\lim_{x\to0-}f(x)=0$이므로

$\lim_{x\to0+}f(x)\ne\lim_{x\to0-}f(x)$

따라서 $\lim_{x\to0}f(x)$가 존재하지 않는다.

ㄷ. $\lim_{x\to0} f(x)=0$

ㄹ. $\lim_{x\to0} f(x)=-\infty$

이상에서 $\lim_{x\to0} f(x)$가 존재하는 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

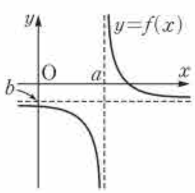
04 전략 함수의 그래프에서 각 극한값을 구한다.

풀이 $\lim_{x\to-1-} f(x)+\lim_{x\to2} f(x)=3+1=4$

답 ④

05 전략 유리함수의 그래프의 개형을 그려 주어진 조건을 만족시키는 a, b의 값을 구한다.

풀이 $y=f(x)$의 그래프에서



$\lim_{x\to a} f(x)$가 존재하지 않으므로

조건 (가)에서

$a=4$

또 $\lim_{x\to-\infty} f(x)=b$이므로 조건 (나)에서

$b=-1$

$\therefore ab=-4$

답 ①

06 전략 $x-1=t$로 놓고 $\lim_{x\to0+} f(x-1)$의 값을 구하고, $f(x)=s$로 놓고 $\lim_{x\to1+} f(f(x))$의 값을 구한다.

풀이 $x-1=t$로 놓으면 $x \to 0+$일 때 $t \to -1+$이므로

$$\lim_{x\to0+} f(x-1)=\lim_{t\to-1+} f(t)=-1$$

$f(x)=s$로 놓으면 $x \to 1+$일 때 $s \to -1-$이므로

$$\lim_{x\to1+} f(f(x))=\lim_{s\to-1-} f(s)=2$$

$$\therefore \lim_{x\to0+} f(x-1)+\lim_{x\to1+} f(f(x))=-1+2=1$$

답 ④

07 전략 $\lim_{x\to1}(x+1)f(x)$의 값을 이용할 수 있도록 주어진 식을 변형한다.

풀이 $$\lim_{x\to1}(2x^2+1)f(x)=\lim_{x\to1}\frac{2x^2+1}{x+1}\cdot(x+1)f(x)$$
$$=\frac{3}{2}\cdot1=\frac{3}{2}$$

이므로 $a=\frac{3}{2}$

$\therefore 20a=20\cdot\frac{3}{2}=30$

답 30

08 전략 분모를 유리화한 후 약분하여 극한값을 구한다.

풀이 $$\lim_{x\to1}\frac{x^3-x^2+x-1}{\sqrt{x+8}-3}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{(x^3-x^2+x-1)(\sqrt{x+8}+3)}{(\sqrt{x+8}-3)(\sqrt{x+8}+3)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^2+1)(\sqrt{x+8}+3)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}(x^2+1)(\sqrt{x+8}+3)$$
$$=2\cdot6=12$$

답 ⑤

Q BOX

$f(x)=|x-a|$에서 $x>a$일 때 $x-a>0$이므로

$\lim_{x\to a+} f(x)$
$=\lim_{x\to a+}(x-a)$

$x<a$일 때 $x-a<0$이므로

$\lim_{x\to a-} f(x)$
$=\lim_{x\to a-}\{-(x-a)\}$

$\lim_{x\to0} f(x)=-\infty$에서 $-\infty$는 일정한 값이 아닌 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지는 상태를 나타내므로 $\lim_{x\to0} f(x)$가 존재하지 않는다.

$\lim_{x\to1}\frac{2x^2+1}{x+1}$, $\lim_{x\to1}(x+1)f(x)$가 모두 존재하므로 함수의 극한에 대한 성질을 이용할 수 있다.

x^3-x^2+x-1
$=x^2(x-1)+(x-1)$
$=(x-1)(x^2+1)$

09 전략 절댓값 기호 안의 식의 부호를 확인한다.

풀이 $$\lim_{x\to-3-}\frac{x^2+4x+3}{|x+3|}=\lim_{x\to-3-}\frac{(x+1)(x+3)}{-(x+3)}$$
$$=\lim_{x\to-3-}(-x-1)=2$$

이므로 $a=2$ ⋯ ❶

$$\lim_{x\to1+}\frac{x^2-6x+5}{|x-1|}=\lim_{x\to1+}\frac{(x-1)(x-5)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1+}(x-5)=-4$$

이므로 $b=-4$ ⋯ ❷

$\therefore a-b=6$ ⋯ ❸

답 6

단계	채점 기준	비율
❶	a의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷	b의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸	$a-b$의 값을 구할 수 있다.	20 %

10 전략 분모의 최고차항으로 분자, 분모를 각각 나누어 극한값을 구한다.

풀이 $$\lim_{x\to\infty}\frac{4x-1}{x^2+2x-3}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{4}{x}-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}}=0$$

$\therefore a=0$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{6x^2+x+5}{3x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{6+\frac{1}{x}+\frac{5}{x^2}}{3-\frac{1}{x^2}}=2$$

$\therefore b=2$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{4x^2+2}}{2x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{4+\frac{2}{x^2}}}{2+\frac{1}{x}}=1$$

$\therefore c=1$

$\therefore a<c<b$

답 ②

11 전략 먼저 $\lim_{x\to3}\frac{g(x)}{f(x)}$의 값을 구한 후 이를 이용할 수 있도록 주어진 식을 변형한다.

풀이 $\lim_{x\to3} f(x)=\infty$, $\lim_{x\to3} g(x)=5$이므로

$$\lim_{x\to3}\frac{g(x)}{f(x)}=0$$

$$\therefore \lim_{x\to3}\frac{9f(x)-g(x)}{f(x)+3g(x)}=\lim_{x\to3}\frac{9-\frac{g(x)}{f(x)}}{1+3\cdot\frac{g(x)}{f(x)}}$$
$$=\frac{9-0}{1+3\cdot0}$$
$$=9$$

답 9

12 전략 $x \to a$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\to 0$이면 (분자) $\to 0$임을 이용한다.

풀이 $$\lim_{x\to-1}\frac{x^3+ax^2+bx}{x+1}=4 \quad \cdots\cdots ㉠$$

$x \to -1$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\to 0$이므로 (분자) $\to 0$이다.

즉 $\lim_{x\to-1}(x^3+ax^2+bx)=0$이므로

$-1+a-b=0$

$\therefore b=a-1$ …… ㉡ ⋯ ❶

㉡을 ㉠의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to-1}\frac{x^3+ax^2+(a-1)x}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to-1}\frac{x(x+1)(x+a-1)}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to-1}x(x+a-1)=-a+2$$

따라서 $-a+2=4$이므로 $a=-2$

$a=-2$를 ㉡에 대입하면 $b=-3$ ⋯ ❷

즉 $f(x)=x^3-2x^2-3x$이므로

$f(3)=27-18-9=0$ ⋯ ❸

답 0

단계	채점 기준	비율
❶	b를 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30 %
❷	a, b의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸	$f(3)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

13 전략 분모를 유리화한 후 분자와 분모의 최고차항을 비교하여 0이 아닌 극한값이 존재할 조건을 파악한다.

풀이
$$\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{ax^2+x}-3x}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2(\sqrt{ax^2+x}+3x)}{(\sqrt{ax^2+x}-3x)(\sqrt{ax^2+x}+3x)}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2(\sqrt{ax^2+x}+3x)}{(a-9)x^2+x}\quad\cdots\cdots ㉠$$

이때 ㉠에서 0이 아닌 극한값이 존재하려면

$a-9=0$ $\therefore a=9$

$a-9\neq0$이면 (분자의 차수) < (분모의 차수) 이므로 극한값이 0이다.

$a=9$를 ㉠에 대입하면

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2(\sqrt{9x^2+x}+3x)}{x}=\lim_{x\to\infty}2\left(\sqrt{9+\frac{1}{x}}+3\right)$$
$$=2\cdot(3+3)=12$$

$\therefore b=12$

$\therefore a+b=21$

답 ②

14 전략 주어진 조건을 이용하여 $f(x)$의 식을 세운다.

풀이 $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=-8$에서 $x\to0$일 때 극한값이 존재하고 (분모) ⟶ 0이므로 (분자) ⟶ 0이다.

즉 $\lim_{x\to0}f(x)=0$이므로 $f(0)=0$

$f(x)$는 x를 인수로 갖는다.

$\lim_{x\to-2}\frac{f(x)}{x+2}=12$에서 $x\to-2$일 때 극한값이 존재하고 (분모) ⟶ 0이므로 (분자) ⟶ 0이다.

즉 $\lim_{x\to-2}f(x)=0$이므로 $f(-2)=0$

$f(x)$는 $x+2$를 인수로 갖는다.

$f(x)=x(x+2)(ax+b)$ (a, b는 상수, $a\neq0$)라 하면

x, $x+2$를 인수로 갖는 삼차식

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{x(x+2)(ax+b)}{x}$$
$$=\lim_{x\to0}(x+2)(ax+b)=2b$$

이므로 $2b=-8$ $\therefore b=-4$

또

$$\lim_{x\to-2}\frac{f(x)}{x+2}=\lim_{x\to-2}\frac{x(x+2)(ax-4)}{x+2}$$
$$=\lim_{x\to-2}x(ax-4)$$
$$=4a+8$$

이므로 $4a+8=12$ $\therefore a=1$

따라서 $f(x)=x(x+2)(x-4)$이므로

$f(-1)=-1\cdot1\cdot(-5)=5$

답 5

15 전략 조건 (가)를 이용하여 $f(x)-x^3$의 차수와 최고차항의 계수를 구한다.

풀이 조건 (가)에서 $f(x)-x^3$은 최고차항의 계수가 6인 일차함수임을 알 수 있다.

분자와 분모의 차수는 같고, 최고차항의 계수의 비가 2이다.

$f(x)-x^3=6x+a$ (a는 상수)라 하면

$f(x)=x^3+6x+a$

이때 조건 (나)에서 $f(0)=-7$이므로

$a=-7$

따라서 $f(x)=x^3+6x-7$이므로

$f(2)=8+12-7=13$

답 13

16 전략 $x>2$, $x<2$일 때로 나누어 함수의 극한의 대소 관계를 이용하여 극한값을 구한다.

풀이 (i) $x>2$일 때, $x-2>0$이므로 주어진 부등식의 각 변을 $x-2$로 나누면

부등호의 방향이 바뀌지 않는다.

$$\frac{x^2-4}{x-2}\le\frac{f(x)}{x-2}\le\frac{2x^2-4x}{x-2}$$
$$\frac{(x+2)(x-2)}{x-2}\le\frac{f(x)}{x-2}\le\frac{2x(x-2)}{x-2}$$
$$\therefore x+2\le\frac{f(x)}{x-2}\le2x$$

이때 $\lim_{x\to2+}(x+2)=4$, $\lim_{x\to2+}2x=4$이므로

$$\lim_{x\to2+}\frac{f(x)}{x-2}=4$$

(ii) $x<2$일 때, $x-2<0$이므로 주어진 부등식의 각 변을 $x-2$로 나누면

부등호의 방향이 바뀐다.

$$\frac{2x^2-4x}{x-2}\le\frac{f(x)}{x-2}\le\frac{x^2-4}{x-2}$$
$$\frac{2x(x-2)}{x-2}\le\frac{f(x)}{x-2}\le\frac{(x+2)(x-2)}{x-2}$$
$$\therefore 2x\le\frac{f(x)}{x-2}\le x+2$$

이때 $\lim_{x\to2-}2x=4$, $\lim_{x\to2-}(x+2)=4$이므로

$$\lim_{x\to2-}\frac{f(x)}{x-2}=4$$

(i), (ii)에서 $\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{x-2}=4$

답 4

17 전략 점 P가 원 위의 점임을 이용하여 b를 a에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 점 P(a, b)는 원 $x^2+y^2=4$ 위의 점이므로

$a^2+b^2=4$

$\therefore b=\sqrt{4-a^2}$ ($\because b>0$) ⋯ ❶

이때 Q$(-a,\ b)$이므로

$$S(a)=\frac{1}{2}\cdot 2a\cdot\sqrt{4-a^2}$$
$$=a\sqrt{4-a^2} \quad \cdots ❷$$

$$\therefore \lim_{a\to 2-}\frac{\sqrt{2-a}}{S(a)}=\lim_{a\to 2-}\frac{\sqrt{2-a}}{a\sqrt{4-a^2}}$$
$$=\lim_{a\to 2-}\frac{\sqrt{2-a}}{a\sqrt{2+a}\sqrt{2-a}}$$
$$=\lim_{a\to 2-}\frac{1}{a\sqrt{2+a}}$$
$$=\frac{1}{4} \quad \cdots ❸$$

답 $\frac{1}{4}$

단계	채점 기준	비율
❶	b를 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	20 %
❷	$S(a)$를 구할 수 있다.	30 %
❸	$\lim_{a\to 2-}\frac{\sqrt{2-a}}{S(a)}$의 값을 구할 수 있다.	50 %

$S(a)$
$=\frac{1}{2}\overline{\text{QP}}\times b$
$=\frac{1}{2}\{a-(-a)\}$
$\times\sqrt{4-a^2}$

18 전략 $\overline{\text{OP}}^2$, $\overline{\text{PH}}^2$을 t에 대한 식으로 나타낸 후 피타고라스 정리를 이용하여 $\overline{\text{OH}}^2$을 구한다.

풀이 P$(t,\ \sqrt{t})$이므로

$$\overline{\text{OP}}^2=t^2+(\sqrt{t})^2=t^2+t$$

$\overline{\text{PH}}$의 길이는 점 P$(t,\ \sqrt{t})$와 직선 $y=\frac{1}{2}x$, 즉 $x-2y=0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\overline{\text{PH}}=\frac{|t-2\sqrt{t}|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{|t-2\sqrt{t}|}{\sqrt{5}}$$
$$\therefore \overline{\text{PH}}^2=\frac{(t-2\sqrt{t})^2}{5}$$

점 $(x_1,\ y_1)$과 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리는 $\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

△OPH는 직각삼각형이므로

$$\overline{\text{OH}}^2=\overline{\text{OP}}^2-\overline{\text{PH}}^2$$
$$=(t^2+t)-\frac{(t-2\sqrt{t})^2}{5}$$
$$=\frac{4t^2+4t\sqrt{t}+t}{5}$$

$$\therefore \lim_{t\to\infty}\frac{\overline{\text{OH}}^2}{\overline{\text{OP}}^2}=\lim_{t\to\infty}\frac{4t^2+4t\sqrt{t}+t}{5(t^2+t)}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{4+\frac{4\sqrt{t}}{t}+\frac{1}{t}}{5+\frac{5}{t}}$$
$$=\frac{4}{5}$$

답 ④

$\frac{4\sqrt{t}}{t}$에서 (분자의 차수)<(분모의 차수)이므로 $\lim_{t\to\infty}\frac{4\sqrt{t}}{t}=0$

02 함수의 연속

03 함수의 연속

Lecture 07 함수의 연속과 불연속

20쪽

1-1 (1) $\lim_{x\to 1+}f(x)=2,\ \lim_{x\to 1-}f(x)=1$이므로

$$\lim_{x\to 1+}f(x)\neq\lim_{x\to 1-}f(x)$$

따라서 $\lim_{x\to 1}f(x)$가 존재하지 않는다.

(3) $f(1)=0,\ \lim_{x\to 1}f(x)=2$이므로

$$\lim_{x\to 1}f(x)\neq f(1)$$

답 (1) ㄴ (2) ㄱ (3) ㄷ

1-2 (1) $f(2)=2,\ \lim_{x\to 2}f(x)=2$이므로

$$\lim_{x\to 2}f(x)=f(2)$$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 연속이다.

(2) $f(x)$가 $x=2$에서 정의되어 있지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 불연속이다.

유리함수는 분모가 0이 되는 값에서 정의되어 있지 않다.

(3) $f(2)=0$이고

$$\lim_{x\to 2}f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x+2)(x-2)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to 2}(x+2)=4$$

이므로 $\lim_{x\to 2}f(x)\neq f(2)$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 불연속이다.

(4) $\lim_{x\to 2+}f(x)=\lim_{x\to 2+}\sqrt{x-2}=0,$

$\lim_{x\to 2-}f(x)=\lim_{x\to 2-}(-2x+2)=-2$

$$\therefore \lim_{x\to 2+}f(x)\neq\lim_{x\to 2-}f(x)$$

따라서 $\lim_{x\to 2}f(x)$가 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 불연속이다.

답 (1) 연속 (2) 불연속 (3) 불연속 (4) 불연속

쌤 한마디

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속임은 다음 세 가지 조건

(i) $f(x)$가 $x=a$에서 정의되어 있다.

(ii) $\lim_{x\to a}f(x)$가 존재한다.

(iii) $\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$

를 모두 만족시키는지 보여야 한다.

그러나 $x=a$에서 불연속임은 위의 세 가지 중 한 가지라도 만족시키지 않음을 보이면 된다.

Lecture 08 연속함수

21쪽

1-1 답 (1) $[-2,\ 8]$ (2) $(0,\ 7]$

(3) $(-1,\ 4)$ (4) $(-\infty,\ -3]$

1-2 (1) 함수 $f(x)=-x+5$의 정의역은 실수 전체의 집합이므로

$(-\infty,\ \infty)$

(2) 함수 $f(x)=\dfrac{2}{x}$의 정의역은 $x\neq0$, 즉 $x<0$ 또는 $x>0$인 모든 실수 x의 값의 집합이므로

$(-\infty,\ 0),\ (0,\ \infty)$

답 (1) $(-\infty,\ \infty)$ (2) $(-\infty,\ 0),\ (0,\ \infty)$

> 유리함수에서 정의역이 주어지지 않을 때에는 분모가 0이 되지 않도록 하는 실수 전체의 집합을 정의역으로 한다.

2-1 (1) 함수 $f(x)=\dfrac{x}{x-9}$는 $x\neq9$, 즉 $x<9$ 또는 $x>9$인 모든 실수 x에서 연속이므로 구간 $(-\infty,\ 9),\ (9,\ \infty)$에서 연속이다.

> $x-9\neq0$에서 $x\neq9$

(2) 함수 $f(x)=\sqrt{4x+8}$은 $4x+8\geq0$, 즉 $x\geq-2$인 모든 실수 x에서 연속이므로 구간 $[-2,\ \infty)$에서 연속이다.

> 무리함수는 근호 안의 식의 값이 0 이상이 되도록 하는 실수 전체의 집합에서 정의되어 있다.

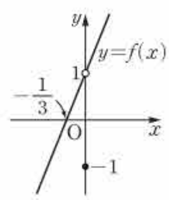
답 (1) $(-\infty,\ 9),\ (9,\ \infty)$ (2) $[-2,\ \infty)$

2-2 (1) $f(0)=-1$,

$\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}(3x+1)=1$이므로

$\lim\limits_{x\to0}f(x)\neq f(0)$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이므로 $x\neq0$인 모든 실수 x에서 연속이다.



(2) $f(1)=-1$이고

$\lim\limits_{x\to1+}f(x)$

$=\lim\limits_{x\to1+}(x-2)=-1$,

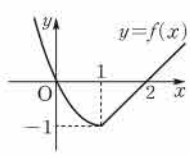
$\lim\limits_{x\to1-}f(x)$

$=\lim\limits_{x\to1-}(x^2-2x)=-1$

에서 $\lim\limits_{x\to1}f(x)=-1$이므로

$\lim\limits_{x\to1}f(x)=f(1)$

따라서 함수 $f(x)$는 모든 실수 x에서 연속이다.



답 풀이 참조

기본+표준 유형 Q+Q

22쪽

01 ① $f(x)$가 $x=-1$에서 정의되어 있지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 불연속이다.

> $x=-1$에서의 함숫값과 극한을 조사한다.

② $f(x)$가 $x=-1$에서 정의되어 있지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 불연속이다.

> $f(x)=\sqrt{x-1}$의 정의역은 $\{x\,|\,x\geq1\}$이다.

③ $\lim\limits_{x\to-1+}f(x)=\lim\limits_{x\to-1+}\dfrac{x+1}{|x+1|}$

$=\lim\limits_{x\to-1+}\dfrac{x+1}{x+1}=1$,

$\lim\limits_{x\to-1-}f(x)=\lim\limits_{x\to-1-}\dfrac{x+1}{|x+1|}$

$=\lim\limits_{x\to-1-}\dfrac{x+1}{-(x+1)}=-1$

이므로

$\lim\limits_{x\to-1+}f(x)\neq\lim\limits_{x\to-1-}f(x)$

따라서 $\lim\limits_{x\to-1}f(x)$가 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 불연속이다.

④ $f(-1)=-1$이고

$\lim\limits_{x\to-1}f(x)=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2+x}{x+1}$

$=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x(x+1)}{x+1}$

$=\lim\limits_{x\to-1}x=-1$

이므로

$\lim\limits_{x\to-1}f(x)=f(-1)$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 연속이다.

⑤ $\lim\limits_{x\to-1+}f(x)=\lim\limits_{x\to-1+}(x+1)=0$,

$\lim\limits_{x\to-1-}f(x)=\lim\limits_{x\to-1-}(-x+1)=2$

이므로

$\lim\limits_{x\to-1+}f(x)\neq\lim\limits_{x\to-1-}f(x)$

따라서 $\lim\limits_{x\to-1}f(x)$가 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 불연속이다.

답 ④

02 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이려면

$\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$

이어야 한다.

이때

$f(a)=-5$,

$\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}(x^2-9x+13)=a^2-9a+13$

이므로 $a^2-9a+13=-5$

$a^2-9a+18=0$, $(a-3)(a-6)=0$

$\therefore a=3$ 또는 $a=6$

따라서 구하는 합은

$3+6=9$

답 ⑤

03 (i) $f(-1)=2$, $\lim\limits_{x\to-1}f(x)=1$이므로

$\lim\limits_{x\to-1}f(x)\neq f(-1)$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 불연속이다.

(ii) $\lim\limits_{x\to1+}f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to1-}f(x)=2$이므로

$\lim\limits_{x\to1+}f(x)\neq\lim\limits_{x\to1-}f(x)$

따라서 $\lim\limits_{x\to1}f(x)$가 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

(i), (ii)에서 극한값이 존재하지 않는 x의 값은 1의 1개이고, 불연속인 x의 값은 -1, 1의 2개이므로

$a=1$, $b=2$

$\therefore b-a=1$

답 ④

쌤 한마디

함수 $y=f(x)$의 그래프가 $x=a$에서 이어져 있으면 $f(x)$는 $x=a$에서 연속, $x=a$에서 끊어져 있으면 $f(x)$는 $x=a$에서 불연속임을 직관적으로 알 수 있다.

04 $f(2)g(2)=2\cdot(-1)=-2$이고

$$\lim_{x\to2+}f(x)g(x)=\lim_{x\to2+}f(x)\cdot\lim_{x\to2+}g(x)=2\cdot(-1)=-2,$$

$$\lim_{x\to2-}f(x)g(x)=\lim_{x\to2-}f(x)\cdot\lim_{x\to2-}g(x)=(-1)\cdot2=-2$$

에서 $\lim_{x\to2}f(x)g(x)=-2$이므로

$$\lim_{x\to2}f(x)g(x)=f(2)g(2)$$

따라서 함수 $f(x)g(x)$는 $x=2$에서 연속이다.

답 연속

05 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이려면 $x=-3$에서 연속이어야 하므로

$$\lim_{x\to-3+}f(x)=\lim_{x\to-3-}f(x)=f(-3)$$

이때

$$\lim_{x\to-3+}f(x)=\lim_{x\to-3+}\sqrt{x+7}=2,$$

$$\lim_{x\to-3-}f(x)=\lim_{x\to-3-}(x^2+2x+a)=a+3,$$

$$f(-3)=2$$

이므로 $a+3=2$

$\therefore a=-1$

답 ①

06 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이려면

$$\lim_{x\to1}f(x)=f(1)$$

이어야 하므로

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2+ax-4}{x-1}=b \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$x\to1$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\to0$이므로 (분자) $\to0$이다.

즉 $\lim_{x\to1}(x^2+ax-4)=0$이므로

$1+a-4=0 \qquad \therefore a=3$

$a=3$을 ㉠의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2+3x-4}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x+4)(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to1}(x+4)=5$$

$\therefore b=5$

$\therefore ab=15$

답 15

07 $x\neq4$일 때,

$$f(x)=\frac{x^2-16}{x-4}=\frac{(x+4)(x-4)}{x-4}=x+4$$

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이면 $x=4$에서 연속이므로

$$f(4)=\lim_{x\to4}f(x)=\lim_{x\to4}(x+4)=8$$

답 ③

08 $x\neq-2$일 때,

$$f(x)=\frac{x^2-x+a}{x+2}$$

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이면 $x=-2$에서 연속이므로

$$f(-2)=\lim_{x\to-2}f(x)=\lim_{x\to-2}\frac{x^2-x+a}{x+2}$$

$x\to-2$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\to0$이므로 (분자) $\to0$이다.

즉 $\lim_{x\to-2}(x^2-x+a)=0$이므로

$4+2+a=0 \qquad \therefore a=-6$

$$\therefore f(-2)=\lim_{x\to-2}\frac{x^2-x-6}{x+2}=\lim_{x\to-2}\frac{(x+2)(x-3)}{x+2}=\lim_{x\to-2}(x-3)=-5$$

$\therefore a+f(-2)=-11$

답 ②

Q BOX

함수 $f(x)$가 $x=-2$에서 연속이므로 $\lim_{x\to-2}\frac{x^2-x+a}{x+2}$가 존재한다.

$p(x)=x-1$, $q(x)=x^2-5x+3$이라 하면 $p(x)$, $q(x)$는 모든 실수 x에서 연속이므로 연속함수의 성질에 의하여 $p(x)q(x)$도 모든 실수 x에서 연속임을 알 수도 있다.

$x\neq4$이므로 $(x-4)f(x)=x^2-16$의 양변을 $x-4$로 나눌 수 있다.

$x<-3$ 또는 $-3<x<3$ 또는 $x>3$

04 연속함수의 성질

Lecture 09 연속함수의 성질 24쪽

1-1 $f(x)=x^3+2x^2-4x+1$은 다항함수이므로 모든 실수 x에서 연속이다.

답 모든 실수 x에서 연속이다.

쌤 한마디

일차함수 $y=x$는 모든 실수 x에서 연속이므로 연속함수의 성질에 의하여 함수

$y=x^2$, $y=x^3$, $\cdots$, $y=x^n$ (n은 자연수)

도 모든 실수 x에서 연속이다. 또 상수함수도 모든 실수 x에서 연속이므로 연속함수의 성질에 의하여 다항함수

$y=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$

(a_n, a_{n-1}, $\cdots$, a_1, a_0은 상수)

도 모든 실수 x에서 연속이다.

1-2 (1) $f(x)=2x^2-6x-1$은 다항함수이므로 모든 실수 x에서 연속이다.

즉 구간 $(-\infty, \infty)$에서 연속이다.

(2) $f(x)=(x-1)(x^2-5x+3)=x^3-6x^2+8x-3$은 다항함수이므로 모든 실수 x에서 연속이다.

즉 구간 $(-\infty, \infty)$에서 연속이다.

(3) $f(x)=\frac{x+1}{x-8}$은 유리함수이므로 $x-8\neq0$, 즉 $x\neq8$인 모든 실수 x에서 연속이다.

즉 구간 $(-\infty, 8)$, $(8, \infty)$에서 연속이다.

(4) $f(x)=\frac{x}{x^2-9}=\frac{x}{(x+3)(x-3)}$는 유리함수이므로 $(x+3)(x-3)\neq0$, 즉 $x\neq-3$, $x\neq3$인 모든 실수 x에서 연속이다.

즉 구간 $(-\infty, -3)$, $(-3, 3)$, $(3, \infty)$에서 연속이다.

답 (1) $(-\infty, \infty)$ (2) $(-\infty, \infty)$
(3) $(-\infty, 8)$, $(8, \infty)$
(4) $(-\infty, -3)$, $(-3, 3)$, $(3, \infty)$

2-1 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 모든 실수 x에서 연속이므로 함수 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$는 $g(x)=0$인 x에서 불연속이다.

$g(x)=x^2-x=0$에서

$x(x-1)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=1$

따라서 함수 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$는 $x\neq0$, $x\neq1$인 모든 실수 x에서 연속이다.

답 $x\neq0$, $x\neq1$인 모든 실수 x에서 연속이다.

Q BOX

두 함수 $f(x)$, $g(x)$는 모두 다항함수이므로 모든 실수 x에서 연속이다.

2-2 (1) 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 모든 실수 x에서 연속이므로 함수 $f(x)+g(x)$도 모든 실수 x에서 연속이다.
즉 구간 $(-\infty, \infty)$에서 연속이다.

(2) 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 모든 실수 x에서 연속이므로 함수 $f(x)-g(x)$도 모든 실수 x에서 연속이다.
즉 구간 $(-\infty, \infty)$에서 연속이다.

(3) 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 모든 실수 x에서 연속이므로 함수 $f(x)g(x)$도 모든 실수 x에서 연속이다.
즉 구간 $(-\infty, \infty)$에서 연속이다.

(4) 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 모든 실수 x에서 연속이므로 함수 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$는 $g(x)=0$인 x에서 불연속이다.
$g(x)=3x-6=0$에서 $\quad x=2$
따라서 함수 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$는 $x\neq2$인 모든 실수 x에서 연속이다.
즉 구간 $(-\infty, 2)$, $(2, \infty)$에서 연속이다.

답 (1) $(-\infty, \infty)$ (2) $(-\infty, \infty)$
(3) $(-\infty, \infty)$ (4) $(-\infty, 2)$, $(2, \infty)$

Lecture 10 최대·최소 정리와 사잇값의 정리

25쪽

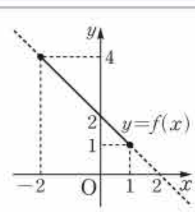
1-1 (1) 함수 $f(x)$는 구간 $[0, 1]$에서 $x=0$일 때 최댓값 1, $x=1$일 때 최솟값 0을 갖는다.

(2) 함수 $f(x)$는 구간 $[2, 4]$에서 $x=2$일 때 최솟값 -1을 갖고, 최댓값은 없다.

답 (1) 최댓값: 1, 최솟값: 0
(2) 최댓값: 없다, 최솟값: -1

함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[0, 1]$에서 연속이므로 최대·최소 정리에 의하여 이 구간에서 반드시 최댓값과 최솟값을 갖는다.

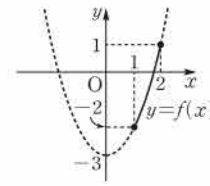
1-2 (1) 함수 $f(x)=-x+2$는 구간 $[-2, 1]$에서 연속이고 이 구간에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 최댓값 4, $x=1$에서 최솟값 1을 갖는다.

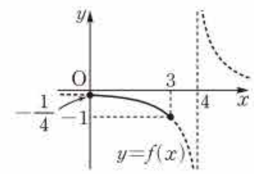
최댓값과 최솟값을 구할 때에는 그래프를 그려서 생각한다.

(2) 함수 $f(x)=x^2-3$은 구간 $[1, 2]$에서 연속이고 이 구간에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



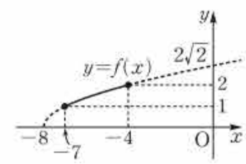
따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 최댓값 1, $x=1$에서 최솟값 -2를 갖는다.

(3) 함수 $f(x)=\dfrac{1}{x-4}$은 구간 $[0, 3]$에서 연속이고 이 구간에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 최댓값 $-\dfrac{1}{4}$, $x=3$에서 최솟값 -1을 갖는다.

(4) 함수 $f(x)=\sqrt{x+8}$은 구간 $[-7, -4]$에서 연속이고 이 구간에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 함수 $f(x)$는 $x=-4$에서 최댓값 2, $x=-7$에서 최솟값 1을 갖는다.

답 (1) 최댓값: 4, 최솟값: 1
(2) 최댓값: 1, 최솟값: -2
(3) 최댓값: $-\dfrac{1}{4}$, 최솟값: -1
(4) 최댓값: 2, 최솟값: 1

2-1 답 연속, 사잇값의 정리

2-2 $f(x)=x^2-2x-1$이라 하면 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[2, 3]$에서 연속이다.
또 $f(2)=-1$, $f(3)=2$에서

$f(2)=4-4-1=-1$, $f(3)=9-6-1=2$

$f(2)f(3)<0$

이므로 사잇값의 정리에 의하여 $f(c)=0$인 c가 열린구간 $(2, 3)$에 적어도 하나 존재한다.
따라서 방정식 $x^2-2x-1=0$이 열린구간 $(2, 3)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

답 풀이 참조

기본+표준 유형 Q+Q

26쪽

01 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 모든 실수 x에서 연속이므로 함수 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$는 $g(x)=0$인 x에서 불연속이다.

$g(x)=x^2-7x+6=0$에서

이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 x의 값의 합을 7로 바로 구할 수도 있다.

$(x-1)(x-6)=0 \qquad \therefore x=1$ 또는 $x=6$

따라서 함수 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$는 $x=1$, $x=6$에서 불연속이므로 구하는 합은 $\quad 1+6=7$

답 ①

02 ㄱ. 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이므로 함수 $2f(x)$도 $x=a$에서 연속이다.
또 함수 $g(x)$가 $x=a$에서 연속이므로 함수 $2f(x)+g(x)$도 $x=a$에서 연속이다.

ㄴ. [반례] $f(a)=-g(a)$이면 두 함수 $f(x)$, $g(x)$는 $x=a$에서 연속이지만 함수 $\dfrac{f(x)}{f(x)+g(x)}$는 $x=a$에서 정의되지 않으므로 $x=a$에서 불연속이다.

$f(a)+g(a)$
$=-g(a)+g(a)$
$=0$
즉 $x=a$일 때
(분모)$=0$이다.

ㄷ. 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이므로 함수 $\{f(x)\}^2=f(x)\cdot f(x)$도 $x=a$에서 연속이다.

ㄹ. [반례] $f(x)=x-1$, $g(x)=\begin{cases} 2 & (x\ge 0) \\ 0 & (x<0)\end{cases}$이면

$$g(f(x))=\begin{cases} 2 & (x\ge 1) \\ 0 & (x<1)\end{cases}$$

$g(f(x))$
$=g(x-1)$
$=\begin{cases} 2 & (x-1\ge 0) \\ 0 & (x-1<0)\end{cases}$
$=\begin{cases} 2 & (x\ge 1) \\ 0 & (x<1)\end{cases}$

이때 두 함수 $f(x)$, $g(x)$는 $x=1$에서 연속이지만 함수 $g(f(x))$는 $x=1$에서 불연속이다.

이상에서 $x=a$에서 항상 연속인 함수인 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ②

쌤 한마디

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이고 함수 $g(x)$가 $x=f(a)$에서 연속이면 합성함수 $g(f(x))$는 $x=a$에서 연속이다.

03 $x\ge 3$일 때,
$$f(x)=x^2-2x+5=(x-1)^2+4>0$$
$x<3$일 때, $\quad f(x)=4$

즉 실수 전체의 집합에서 $f(x)\ne 0$이다. 한편
$$\lim_{x\to 3+} f(x)=\lim_{x\to 3+}(x^2-2x+5)=8,$$
$$\lim_{x\to 3-} f(x)=\lim_{x\to 3-}4=4$$
이므로 $\quad \lim_{x\to 3+} f(x)\ne \lim_{x\to 3-} f(x)$

따라서 $\lim_{x\to 3} f(x)$가 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 불연속이다.

함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 함수 $\dfrac{g(x)}{f(x)}$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $x=3$에서 연속이어야 한다. 즉
$$\lim_{x\to 3+}\frac{g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to 3-}\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{g(3)}{f(3)}$$
이어야 한다.

이때
$$\lim_{x\to 3+}\frac{g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to 3+}\frac{ax+1}{x^2-2x+5}=\frac{3a+1}{8},$$
$$\lim_{x\to 3-}\frac{g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to 3-}\frac{ax+1}{4}=\frac{3a+1}{4},$$
$$\frac{g(3)}{f(3)}=\frac{3a+1}{8}$$
이므로 $\quad \dfrac{3a+1}{8}=\dfrac{3a+1}{4}$

$3a+1=6a+2 \quad \therefore a=-\dfrac{1}{3}$

답 ⑤

쌤 한마디

$x\ge 3$일 때, $f(x)\ne 0$이고 $f(x)=x^2-2x+5$, $g(x)=ax+1$은 구간 $[3, \infty)$에서 연속이므로 연속함수의 성질에 의하여 함수 $\dfrac{g(x)}{f(x)}=\dfrac{ax+1}{x^2-2x+5}$도 구간 $[3, \infty)$에서 연속이다.
또 $x<3$일 때, $f(x)\ne 0$이고 $f(x)=4$, $g(x)=ax+1$은 구간 $(-\infty, 3)$에서 연속이므로 연속함수의 성질에 의하여 함수 $\dfrac{g(x)}{f(x)}=\dfrac{ax+1}{4}$도 구간 $(-\infty, 3)$에서 연속이다.
따라서 함수 $\dfrac{g(x)}{f(x)}$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $x=3$에서 연속이어야 한다.

04 함수 $f(x)$는 $x\ge a$, $x<a$인 모든 실수 x에서 각각 연속이고 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $x=a$에서 연속이어야 한다. 즉
$$\lim_{x\to a+} f(x)g(x)=\lim_{x\to a-} f(x)g(x)=f(a)g(a)$$
이어야 한다.

이때
$$\lim_{x\to a+} f(x)g(x)=\lim_{x\to a+}(-x+3)(x-5)=(-a+3)(a-5),$$
$$\lim_{x\to a-} f(x)g(x)=\lim_{x\to a-}(2x+6)(x-5)=(2a+6)(a-5),$$
$$f(a)g(a)=(-a+3)(a-5)$$
이므로 $\quad (-a+3)(a-5)=(2a+6)(a-5)$

$\{(-a+3)-(2a+6)\}$
$\times(a-5)=0$
이므로
$(-3a-3)(a-5)=0$
$\therefore (a+1)(a-5)=0$

$(a+1)(a-5)=0$

$\therefore a=-1$ 또는 $a=5$

따라서 구하는 곱은
$-1\cdot 5=-5$

답 -5

05 ㄱ. 함수 $f(x)$는 구간 $[0, 1]$에서 $x=1$일 때 최댓값 2를 갖는다.

ㄴ. 함수 $f(x)$는 구간 $[1, 3]$에서 연속이므로 최대·최소 정리에 의하여 반드시 최댓값과 최솟값을 갖는다.

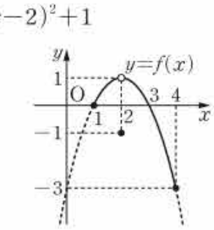
$x=2$에서 최댓값 3, $x=1$, $x=3$에서 최솟값 2를 갖는다.

ㄷ. 함수 $f(x)$는 구간 $[3, 5]$에서 최솟값을 갖지 않는다.

이상에서 옳은 것은 ㄴ뿐이다.

답 ②

06 $x\ne 2$일 때,
$$f(x)=-x^2+4x-3=-(x-2)^2+1$$
구간 $[1, 4]$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $f(x)$는 $x=2$에서 불연속이다.



따라서 함수 $f(x)$는 구간 $[1, 4]$에서 $x=4$일 때 최솟값 -3을 갖고, 최댓값은 없다.

답 최댓값: 없다, 최솟값: -3

07 $f(x)=x^3+x^2-5$라 하면 $f(x)$는 모든 실수 x에서 연속이고

$f(-2)=-9,\ f(-1)=-5,\ f(0)=-5,$
$f(1)=-3,\ f(2)=7,\ f(3)=31$

따라서 $f(1)f(2)<0$이므로 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$은 구간 $(1,\ 2)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.
그런데 방정식 $f(x)=0$은 오직 하나의 실근을 가지므로 주어진 방정식의 실근이 존재하는 구간은 $(1,\ 2)$이다.

답 ④

08 $f(-3)f(-2)=4\cdot(-2)=-8<0,$
$f(-2)f(-1)=-2\cdot(-1)=2>0,$
$f(-1)f(1)=-1\cdot1=-1<0,$
$f(1)f(2)=1\cdot(-3)=-3<0$
이므로 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$은 구간 $(-3,\ -2)$, $(-1,\ 1)$, $(1,\ 2)$에서 각각 적어도 하나의 실근을 갖는다.
따라서 방정식 $f(x)=0$은 적어도 3개의 실근을 가지므로

$n=3$

답 3

중단원 마무리

28쪽

01 **전략** 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이려면
$\lim\limits_{x\to a+}f(x)=\lim\limits_{x\to a-}f(x)=f(a)$이어야 함을 이용한다.

풀이 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이려면

$\lim\limits_{x\to a+}f(x)=\lim\limits_{x\to a-}f(x)=f(a)$

이어야 한다.
이때

$\lim\limits_{x\to a+}f(x)=\lim\limits_{x\to a+}3x=3a,$
$\lim\limits_{x\to a-}f(x)=\lim\limits_{x\to a-}(x^2-18)=a^2-18,$
$f(a)=3a$

이므로 $3a=a^2-18$

$a^2-3a-18=0,\quad (a+3)(a-6)=0$
$\therefore a=-3$ 또는 $a=6$

따라서 구하는 곱은

$-3\cdot6=-18$

답 ①

02 **전략** 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 정의되어 있지 않으면 $f(x)$는 $x=a$에서 불연속임을 이용한다.

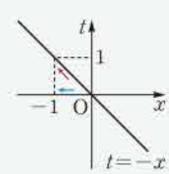
풀이 $f(x)=\dfrac{1}{x+\dfrac{1}{x+2}}=\dfrac{1}{\dfrac{x^2+2x+1}{x+2}}$
$=\dfrac{x+2}{x^2+2x+1}$

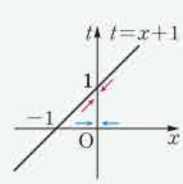
이므로 $x+2=0$, $x^2+2x+1=0$인 x의 값에서 함수 $f(x)$가 정의되어 있지 않다.

QBOX

방정식 $f(x)=0$에 대하여 주어진 각 구간 $(a,\ b)$에서 $f(a)$, $f(b)$의 값을 구한 후
$f(a)f(b)<0$
인 구간을 찾는다.

함수의 극한에 대한 성질을 이용하여 각 함수의 우극한과 좌극한을 구한다.





$x+2=0$에서 $\quad x=-2$
$x^2+2x+1=0$에서 $\quad (x+1)^2=0$
$\therefore x=-1$

따라서 함수 $f(x)$가 불연속인 x의 값은 $-2,\ -1$의 2개이다.

답 2

03 **전략** 보기의 각 함수가 $x=1$에서 함숫값과 극한값이 모두 존재하고 두 값이 같은지 확인한다.

풀이 ㄱ. $\lim\limits_{x\to1+}\{f(x)+g(x)\}$
$=\lim\limits_{x\to1+}f(x)+\lim\limits_{x\to1+}g(x)$
$=-1+1=0,$

$\lim\limits_{x\to1-}\{f(x)+g(x)\}=\lim\limits_{x\to1-}f(x)+\lim\limits_{x\to1-}g(x)$
$=1+(-1)=0$

이므로 $\lim\limits_{x\to1}\{f(x)+g(x)\}=0$

이때 $f(1)+g(1)=-1+1=0$이므로

$\lim\limits_{x\to1}\{f(x)+g(x)\}=f(1)+g(1)$

따라서 함수 $f(x)+g(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

ㄴ. $\lim\limits_{x\to1+}\{f(x)-g(x)\}=\lim\limits_{x\to1+}f(x)-\lim\limits_{x\to1+}g(x)$
$=-1-1=-2,$

$\lim\limits_{x\to1-}\{f(x)-g(x)\}=\lim\limits_{x\to1-}f(x)-\lim\limits_{x\to1-}g(x)$
$=1-(-1)=2$

이므로

$\lim\limits_{x\to1+}\{f(x)-g(x)\}\neq\lim\limits_{x\to1-}\{f(x)-g(x)\}$

따라서 $\lim\limits_{x\to1}\{f(x)-g(x)\}$가 존재하지 않으므로 함수 $f(x)-g(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

ㄷ. $\lim\limits_{x\to1+}f(x)g(x)=\lim\limits_{x\to1+}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to1+}g(x)$
$=-1\cdot1=-1,$

$\lim\limits_{x\to1-}f(x)g(x)=\lim\limits_{x\to1-}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to1-}g(x)$
$=1\cdot(-1)=-1$

이므로 $\lim\limits_{x\to1}f(x)g(x)=-1$

이때 $f(1)g(1)=-1\cdot1=-1$이므로

$\lim\limits_{x\to1}f(x)g(x)=f(1)g(1)$

따라서 함수 $f(x)g(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

이상에서 $x=1$에서 연속인 함수인 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

04 **전략** $\lim\limits_{x\to a}f(g(x))$의 값은 $g(x)=t$로 치환하여 구한다.

풀이 ㄴ. $-x=t$로 놓으면 $x\to-1+$일 때 $t\to1-$이므로

$\lim\limits_{x\to-1+}f(-x)=\lim\limits_{t\to1-}f(t)=2$

이때 $f(1)=1$이므로

$\lim\limits_{x\to-1+}f(-x)\neq f(1)$

ㄷ. $x+1=t$로 놓으면 $x\to0+$일 때 $t\to1+$이므로

$\lim\limits_{x\to0+}f(x)f(x+1)=\lim\limits_{x\to0+}f(x)\cdot\lim\limits_{t\to1+}f(t)$
$=2\cdot1=2$

$x \longrightarrow 0-$일 때 $t \longrightarrow 1-$이므로

$$\lim_{x\to0-} f(x)f(x+1)=\lim_{x\to0-} f(x)\cdot\lim_{t\to1-} f(t)$$
$$=1\cdot2=2$$
$$\therefore \lim_{x\to0} f(x)f(x+1)=2$$

이때 $f(0)f(1)=2\cdot1=2$이므로

$$\lim_{x\to0} f(x)f(x+1)=f(0)f(1)$$

따라서 함수 $f(x)f(x+1)$은 $x=0$에서 연속이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

05 전략 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이면 $x=1$에서 연속임을 이용한다.

풀이 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이면 $x=1$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to1+} f(x)=\lim_{x\to1-} f(x)=f(1)$$
$$\therefore \lim_{x\to1+}\frac{x+b}{\sqrt{x+3}-2}=-3+a \quad \cdots\cdots ㉠$$

Q BOX

$\lim_{x\to1-} f(x)$
$=\lim_{x\to1-}(-3x+a)$
$=-3+a,$
$f(1)=-3+a$

$x \longrightarrow 1+$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\longrightarrow 0$이므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉 $\lim_{x\to1+}(x+b)=0$이므로

$1+b=0 \qquad \therefore b=-1$

$b=-1$을 ㉠의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to1+}\frac{x-1}{\sqrt{x+3}-2}=\lim_{x\to1+}\frac{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)}$$
$$=\lim_{x\to1+}\frac{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1+}(\sqrt{x+3}+2)=4$$

따라서 $4=-3+a$이므로 $\quad a=7$

$\therefore a+b=6$ 답 6

06 전략 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이려면 $\lim_{x\to0+} f(x)=\lim_{x\to0-} f(x)=f(0)$이어야 함을 이용한다.

풀이 ㄱ. $f(-3)=\dfrac{(-3)^2}{2\cdot(-3)-|-3|}=-1$

ㄴ. $x>0$일 때, $|x|=x$이므로

$$f(x)=\frac{x^2}{2x-|x|}=\frac{x^2}{2x-x}=x$$

ㄷ. $x<0$일 때, $|x|=-x$이므로

$$f(x)=\frac{x^2}{2x-|x|}=\frac{x^2}{2x+x}=\frac{x}{3}$$

$f(x)$가 $x=0$에서 연속이려면

$$\lim_{x\to0+} f(x)=\lim_{x\to0-} f(x)=f(0)$$

이어야 한다.

이때

$$\lim_{x\to0+} f(x)=\lim_{x\to0+} x=0,$$
$$\lim_{x\to0-} f(x)=\lim_{x\to0-}\frac{x}{3}=0,$$
$$f(0)=a$$

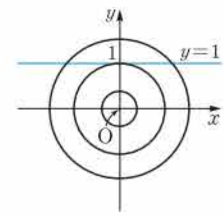
이므로 $\quad a=0$

따라서 $a=0$이면 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ⑤

07 전략 t의 값의 범위를 나누어 $f(t)$를 구한다.

풀이 t의 값에 따라 직선 $y=1$과 원 $x^2+y^2=t^2$의 위치 관계는 오른쪽 그림과 같으므로



$$f(t)=\begin{cases}0 & (|t|<1)\\ 1 & (|t|=1)\\ 2 & (|t|>1)\end{cases}$$

$$\therefore (x+k)f(x)=\begin{cases}0 & (-1<x<1)\\ x+k & (x=-1 \text{ 또는 } x=1)\\ 2(x+k) & (x<-1 \text{ 또는 } x>1)\end{cases}$$

함수 $(x+k)f(x)$가 구간 $(0, \infty)$에서 연속이면 $x=1$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to1+}(x+k)f(x)=\lim_{x\to1-}(x+k)f(x)$$
$$=(1+k)f(1)$$

이때

$$\lim_{x\to1+}(x+k)f(x)=\lim_{x\to1+}2(x+k)$$
$$=2(1+k),$$
$$\lim_{x\to1-}(x+k)f(x)=\lim_{x\to1-}0=0,$$
$$(1+k)f(1)=1+k$$

이므로 $\quad 1+k=0 \qquad \therefore k=-1$

$\therefore f(1)+k=0$ 답 ③

$f(1)=1$

08 전략 $x\neq-1$일 때 $f(x)$를 구하고 함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 연속이므로 $\lim_{x\to-1} f(x)=f(-1)$임을 이용한다.

풀이 $x\neq-1$일 때,

$$f(x)=\frac{a\sqrt{x+5}+b}{x+1}$$

함수 $f(x)$가 $x\geq-5$인 모든 실수 x에서 연속이면 $x=-1$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to-1} f(x)=f(-1)$$
$$\therefore \lim_{x\to-1}\frac{a\sqrt{x+5}+b}{x+1}=2 \quad \cdots\cdots ㉠ \quad \cdots ❶$$

$x \longrightarrow -1$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\longrightarrow 0$이므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉 $\lim_{x\to-1}(a\sqrt{x+5}+b)=0$이므로

$2a+b=0 \qquad \therefore b=-2a \quad \cdots\cdots ㉡$

㉡을 ㉠의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to-1}\frac{a\sqrt{x+5}-2a}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to-1}\frac{a(\sqrt{x+5}-2)(\sqrt{x+5}+2)}{(x+1)(\sqrt{x+5}+2)}$$
$$=\lim_{x\to-1}\frac{a(x+1)}{(x+1)(\sqrt{x+5}+2)}$$
$$=\lim_{x\to-1}\frac{a}{\sqrt{x+5}+2}=\frac{a}{4}$$

따라서 $\dfrac{a}{4}=2$이므로 $\quad a=8$

$a=8$을 ㉡에 대입하면 $\quad b=-16$ ··· ❷

$\therefore a-b=24$ ··· ❸

답 24

단계	채점 기준	비율
❶	$f(x)$가 $x=-1$에서 연속임을 이용하여 식을 세울 수 있다.	30 %
❷	a, b의 값을 구할 수 있다.	60 %
❸	$a-b$의 값을 구할 수 있다.	10 %

09 전략 조건 (가)에서 $g(x)$를 $f(x)$를 이용하여 나타낸 후 조건 (나)에 대입한다.

풀이 조건 (가)에서 $x\neq2$일 때,

$$g(x)=\frac{f(x)-x^2}{x-2}$$

조건 (나)에 의하여

$$\lim_{x\to\infty}g(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-x^2}{x-2}=-4$$

이므로

$$f(x)-x^2=-4x+a\ (a\text{는 상수})$$

라 하면

$$g(x)=\frac{-4x+a}{x-2}$$

함수 $g(x)$가 모든 실수 x에서 연속이면 $x=2$에서 연속이므로

$$g(2)=\lim_{x\to2}g(x)=\lim_{x\to2}\frac{-4x+a}{x-2}$$

$x\longrightarrow2$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\longrightarrow0$이므로 (분자) $\longrightarrow0$이다.

즉 $\lim_{x\to2}(-4x+a)=0$이므로

$$-8+a=0\qquad\therefore a=8$$

$$\therefore g(2)=\lim_{x\to2}\frac{-4x+8}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{-4(x-2)}{x-2}=-4$$

또 $f(x)=x^2-4x+8$이므로

$$f(1)=1-4+8=5$$

$$\therefore f(1)+g(2)=1$$

답 ①

10 전략 연속함수의 성질을 이용한다.

풀이 ㄱ. $h(x)=f(x)+g(x)$라 하면

$$f(x)=h(x)-g(x)$$

이때 $g(x)$와 $h(x)$가 연속함수이므로 $f(x)$도 연속함수이다.

ㄴ. [반례] $f(x)=0$, $g(x)=\begin{cases}1 & (x\geq0)\\ -1 & (x<0)\end{cases}$이라 하면

$$f(x)g(x)=0$$

따라서 $f(x)$와 $f(x)g(x)$가 연속함수이지만 $g(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

ㄷ. $f(x)$와 $g(x)$가 연속함수이면 $\{f(x)\}^2$과 $\{g(x)\}^2$도 연속함수이다.

따라서 $\{f(x)\}^2-\{g(x)\}^2$도 연속함수이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ④

Q BOX

$f(x)-x^2$은 일차항의 계수가 -4인 일차식이다.

$f(x)-x^2=-4x+a$에서 $f(x)=x^2-4x+a$

$\{f(x)\}^2=f(x)\cdot f(x)$, $\{g(x)\}^2=g(x)\cdot g(x)$

11 전략 함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $x=1$에서 연속이어야 함을 이용한다.

풀이 $g(0)=\lim_{x\to1-}f(x)=2$이므로 $g(x)$의 상수항은 2이다.

이때 $g(x)$는 일차함수이므로

$$g(x)=ax+2\ (a\neq0)$$

라 하자.

함수 $f(x)$는 $x>1$, $x<1$인 모든 실수 x에서 각각 연속이고 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $x=1$에서 연속이어야 한다. 즉

$$\lim_{x\to1+}f(x)g(x)=\lim_{x\to1-}f(x)g(x)=f(1)g(1)$$

이어야 한다.

이때

$$\lim_{x\to1+}f(x)g(x)=\lim_{x\to1+}f(x)\cdot\lim_{x\to1+}(ax+2)=0\cdot(a+2)=0,$$

$$\lim_{x\to1-}f(x)g(x)=\lim_{x\to1-}f(x)\cdot\lim_{x\to1-}(ax+2)=2\cdot(a+2)=2(a+2),$$

$$f(1)g(1)=1\cdot(a+2)=a+2$$

이므로

$$a+2=0\qquad\therefore a=-2$$

따라서 $g(x)=-2x+2$이므로

$$g(-1)=2+2=4$$

답 ③

12 전략 함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $x=a$에서 연속이어야 함을 이용한다.

풀이 함수 $f(x)$는 $x\leq a$, $x>a$인 모든 실수 x에서 각각 연속이고 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $x=a$에서 연속이어야 한다. 즉

$$\lim_{x\to a+}f(x)g(x)=\lim_{x\to a-}f(x)g(x)=f(a)g(a)$$

이어야 한다.

이때

$$\lim_{x\to a+}f(x)g(x)=\lim_{x\to a+}(x^2-x)\cdot\lim_{x\to a+}\{x-(2a+7)\}=(a^2-a)(-a-7),$$

$$\lim_{x\to a-}f(x)g(x)=\lim_{x\to a-}(x+3)\cdot\lim_{x\to a-}\{x-(2a+7)\}=(a+3)(-a-7),$$

$$f(a)g(a)=(a+3)(-a-7)$$

이므로 $(a^2-a)(-a-7)=(a+3)(-a-7)$

$$(a+7)(a^2-2a-3)=0$$

$$(a+7)(a+1)(a-3)=0$$

$$\therefore a=-7\text{ 또는 }a=-1\text{ 또는 }a=3$$

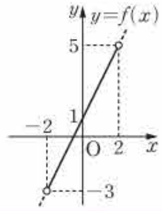
따라서 구하는 곱은

$$-7\cdot(-1)\cdot3=21$$

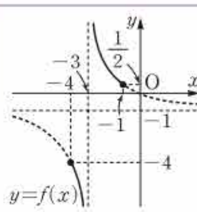
답 21

13 전략 최대·최소 정리는 함수가 닫힌구간에서 연속일 때 성립함을 이용한다.

풀이 ① 구간 $(-2, 2)$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $f(x)$는 이 구간에서 최댓값과 최솟값을 모두 갖지 않는다.



② 구간 $[-4, -1]$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $f(x)$는 이 구간에서 최댓값과 최솟값을 모두 갖지 않는다.



Q BOX: $f(x)=-\dfrac{x}{x+3}$
$=\dfrac{3}{x+3}-1$

③ $\lim\limits_{x\to0+} f(x)=\lim\limits_{x\to0+}(-x^2+2)=2$,

$\lim\limits_{x\to0-} f(x)=\lim\limits_{x\to0-}(x+2)=2$

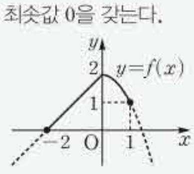
이므로 $\lim\limits_{x\to0} f(x)=2$

이때 $f(0)=2$이므로 $\lim\limits_{x\to0} f(x)=f(0)$

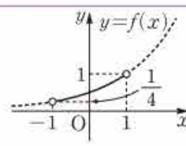
즉 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이므로 구간 $[-2, 1]$에서 연속이다.

따라서 최대·최소 정리에 의하여 $f(x)$는 이 구간에서 반드시 최댓값과 최솟값을 갖는다.

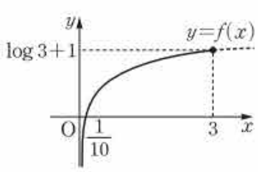
Q BOX: 구간 $[-2, 1]$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같으므로 $f(x)$는 $x=0$에서 최댓값 2, $x=-2$에서 최솟값 0을 갖는다.



④ 구간 $(-1, 1)$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $f(x)$는 이 구간에서 최댓값과 최솟값을 모두 갖지 않는다.



⑤ 구간 $(0, 3]$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $f(x)$는 이 구간에서 $x=3$일 때 최댓값 $\log 3+1$을 갖고 최솟값을 갖지 않는다.



답 ③

14 전략 함수 $y=f(x)$의 그래프를 이용하여 최댓값과 최솟값을 구한다.

풀이 $x\neq1$일 때,

$$f(x)=\frac{x^3-3x^2-x+3}{x-1}$$
$$=\frac{(x-1)(x^2-2x-3)}{x-1}$$
$$=x^2-2x-3$$

이때 $f(1)=-4$이고

$\lim\limits_{x\to1} f(x)=\lim\limits_{x\to1}(x^2-2x-3)=-4$

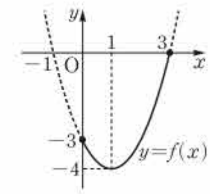
이므로 $\lim\limits_{x\to1} f(x)=f(1)$

즉 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이므로 구간 $[0, 3]$에서 연속이다. ··· ❶

따라서 최대·최소 정리에 의하여 $f(x)$는 이 구간에서 반드시 최댓값과 최솟값을 갖는다.

Q BOX: $x\neq1$일 때,
$f(x)=x^2-2x-3$
$=(x-1)^2-4$

구간 $[0, 3]$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $f(x)$는 $x=3$에서 최댓값 0, $x=1$에서 최솟값 -4를 갖는다.



$\therefore M=0,\ m=-4$ ··· ❷

$\therefore M+m=-4$ ··· ❸

답 -4

단계	채점 기준	비율
❶	함수 $f(x)$가 구간 $[0, 3]$에서 연속임을 알 수 있다.	40 %
❷	M, m의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸	$M+m$의 값을 구할 수 있다.	20 %

15 전략 사잇값의 정리를 이용한다.

풀이 이차함수 $f(x)$는 연속함수이고 $f(1)>0$, $f(4)>0$이므로 $f(2)<0$이면 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$은 구간 $(1, 2)$, $(2, 4)$에서 각각 하나의 실근을 갖는다.

Q BOX: $f(1)f(2)<0$,
$f(2)f(4)<0$

$f(2)<0$에서

$a^2-11a+18<0,\quad (a-2)(a-9)<0$

$\therefore 2<a<9$

따라서 $\alpha=2$, $\beta=9$이므로

$\beta-\alpha=7$

답 ②

16 전략 P 지점을 출발한 지 x분 후의 자전거의 속력을 $f(x)$ km/h라 하고 사잇값의 정리를 이용한다.

풀이 P 지점을 출발한 지 x분 후의 자전거의 속력을 $f(x)$ km/h라 하면 $f(x)$는 연속함수이다.

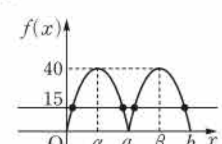
Q BOX: 자전거의 속력은 시간에 따른 연속함수이다.

P 지점을 출발한 지 a분, b분 후에 각각 A 지점, B 지점에서 멈췄다고 하면

$f(0)=0,\ f(a)=0,\ f(b)=0$

이때 $0<\alpha<a$, $a<\beta<b$이고 $f(\alpha)=40$, $f(\beta)=40$인 α, β가 존재하므로 사잇값의 정리에 의하여 $f(k)=15$인 k가 구간 $(0, \alpha)$, (α, a), (a, β), (β, b)에 각각 적어도 하나씩 존재한다.

Q BOX: 자전거의 속력이 최고인 시점



따라서 자전거의 속력이 15 km/h인 순간은 적어도 4번 존재한다.

$\therefore n=4$

답 4

30~35쪽

03 미분계수와 도함수

05 미분계수

Lecture 11 평균변화율과 미분계수

34쪽

1-1 (1) $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(4)-f(1)}{4-1}$

$=\frac{12-0}{3}=4$

(2) $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(2)-f(-3)}{2-(-3)}$

$=\frac{2-12}{5}=-2$

답 (1) 4 (2) -2

1-2 (1) $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(3)-f(-1)}{3-(-1)}$

$=\frac{-7-5}{4}=-3$

(2) $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{(2+\Delta x)-2}$

$=\frac{\{(2+\Delta x)^2+4\}-8}{\Delta x}$

$=\frac{4\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}=4+\Delta x$

답 (1) -3 (2) $4+\Delta x$

2-1 (1) $f'(1)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\{5(1+\Delta x)+1\}-6}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{5\Delta x}{\Delta x}=5$

(2) $f'(1)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\{(1+\Delta x)^2-3(1+\Delta x)\}-(-2)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x)^2-\Delta x}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}(\Delta x-1)=-1$

답 (1) 5 (2) -1

다른 풀이 (1) $f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$

$=\lim_{x\to 1}\frac{(5x+1)-6}{x-1}$

$=\lim_{x\to 1}\frac{5(x-1)}{x-1}=5$

(2) $f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$

$=\lim_{x\to 1}\frac{(x^2-3x)-(-2)}{x-1}$

$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x-2)}{x-1}$

$=\lim_{x\to 1}(x-2)=-1$

Q BOX

함수 $y=f(x)$가 $x=a$에서 미분가능할 때, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 기울기
➡ $f'(a)$

$f(2+\Delta x)$는 $f(x)$에 x 대신 $2+\Delta x$를 대입한 것이다.

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하지 않은 경우
① $x=a$에서 불연속인 경우
② $x=a$에서 그래프가 꺾인 경우

$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$이 존재하지 않는다.

미분계수 $f'(-1)$이 존재하지 않는다.

2-2 (1) $f(x)=2x^2+x$라 하면 점 $(-1, 1)$에서의 접선의 기울기는

$f'(-1)$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(-1+\Delta x)-f(-1)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\{2(-1+\Delta x)^2+(-1+\Delta x)\}-1}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2(\Delta x)^2-3\Delta x}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}(2\Delta x-3)=-3$

(2) $f(x)=x^3+x-1$이라 하면 점 $(0, -1)$에서의 접선의 기울기는

$f'(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\{(\Delta x)^3+\Delta x-1\}-(-1)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x)^3+\Delta x}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\{(\Delta x)^2+1\}=1$

답 (1) -3 (2) 1

Lecture 12 미분가능성과 연속성

35쪽

1-1 답 ㄱ

1-2 (1) 구간 $(-3, 3)$에서 함수 $f(x)$는 $x=-1$, $x=2$에서 불연속이므로 불연속인 x의 값의 개수는 2이다.

(2) 구간 $(-3, 3)$에서 함수 $f(x)$는 $x=-1$, $x=1$, $x=2$에서 미분가능하지 않으므로 미분가능하지 않은 x의 값의 개수는 3이다.

답 (1) 2 (2) 3

2-1 답 연속, -1, 미분가능

2-2 (1) (i) $f(-1)=0$, $\lim_{x\to -1}f(x)=\lim_{x\to -1}|x+1|=0$이므로

$\lim_{x\to -1}f(x)=f(-1)$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 연속이다.

(ii) $\lim_{x\to -1+}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=\lim_{x\to -1+}\frac{x+1}{x+1}=1$,

$\lim_{x\to -1-}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=\lim_{x\to -1-}\frac{-(x+1)}{x+1}=-1$

이므로 $\lim_{x\to -1}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}$이 존재하지 않는다.

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 미분가능하지 않다.

(i), (ii)에서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 연속이지만 미분가능하지 않다.

(2) (i) $\lim_{x\to-1+} f(x)=\lim_{x\to-1+}(-2x)=2$,

$\lim_{x\to-1-} f(x)=\lim_{x\to-1-}(x^2+1)=2$이므로

$\lim_{x\to-1} f(x)=2$

이때 $f(-1)=2$이므로

$\lim_{x\to-1} f(x)=f(-1)$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 연속이다.

(ii) $\lim_{x\to-1+}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=\lim_{x\to-1+}\frac{-2x-2}{x+1}$

$=\lim_{x\to-1+}\frac{-2(x+1)}{x+1}$

$=-2$,

$\lim_{x\to-1-}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=\lim_{x\to-1-}\frac{(x^2+1)-2}{x+1}$

$=\lim_{x\to-1-}\frac{(x+1)(x-1)}{x+1}$

$=\lim_{x\to-1-}(x-1)=-2$

이므로 $\lim_{x\to-1}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=-2$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 미분가능하다.

(i), (ii)에서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 연속이고 미분가능하다.

답 (1) 연속이지만 미분가능하지 않다.
(2) 연속이고 미분가능하다.

기본+표준 유형 Q+Q

36쪽

01 함수 $f(x)$에서 x의 값이 -2에서 1까지 변할 때의 평균변화율은

$\frac{f(1)-f(-2)}{1-(-2)}=\frac{(-1+k)-(8-2k)}{3}$

$=k-3$

따라서 $k-3=5$이므로

$k=8$

답 ⑤

02 함수 $f(x)$에서 x의 값이 -1에서 5까지 변할 때의 평균변화율은

$\frac{f(5)-f(-1)}{5-(-1)}=\frac{18-6}{6}=2$

함수 $f(x)$에서 x의 값이 0에서 a까지 변할 때의 평균변화율은

$\frac{f(a)-f(0)}{a-0}=\frac{(a^2-2a+3)-3}{a}$

$=\frac{a(a-2)}{a}=a-2$

따라서 $a-2=2$이므로

$a=4$

답 ④

03 함수 $f(x)$에서 x의 값이 1에서 3까지 변할 때의 평균변화율은 두 점 A$(1, f(1))$, B$(3, f(3))$을 지나는 직선의 기울기와 같다.

따라서 직선 AB의 기울기는 -4이다.

답 -4

Q BOX

미분계수의 정의에서 Δx 대신 h를 사용하여

$f'(a)$
$=\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

와 같이 나타내기도 한다.

04 $f'(3)=\lim_{h\to0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{\{a(3+h)^2+(3+h)\}-(9a+3)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{ah^2+(6a+1)h}{h}$

$=\lim_{h\to0}(ah+6a+1)=6a+1$

따라서 $6a+1=19$이므로

$a=3$

답 ③

05 함수 $f(x)$에서 x의 값이 -4에서 2까지 변할 때의 평균변화율은

$\frac{f(2)-f(-4)}{2-(-4)}=\frac{6-(-66)}{6}=12$

함수 $f(x)$의 $x=c$에서의 미분계수는

$f'(c)=\lim_{h\to0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{\{(c+h)^3-2\}-(c^3-2)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{3c^2h+3ch^2+h^3}{h}$

$=\lim_{h\to0}(3c^2+3ch+h^2)=3c^2$

따라서 $3c^2=12$이므로 $c^2=4$

$\therefore c=-2\ (\because c<0)$

답 ①

분자가
$f(1+3h)-f(1)$
이므로 분모가 $3h$가 되도록 변형한다.

$h\to0$일 때, $3h\to0$

06 $\lim_{h\to0}\frac{f(1+3h)-f(1)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+3h)-f(1)}{3h}\cdot3$

$=3f'(1)$

따라서 $3f'(1)=9$이므로

$f'(1)=3$

답 3

07 $\lim_{h\to0}\frac{f(-2+h)-f(-2+2h)}{2h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(-2+h)-f(-2)+f(-2)-f(-2+2h)}{2h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{\{f(-2+h)-f(-2)\}-\{f(-2+2h)-f(-2)\}}{2h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(-2+h)-f(-2)}{h}\cdot\frac{1}{2}$

$-\lim_{h\to0}\frac{f(-2+2h)-f(-2)}{2h}$

$=\frac{1}{2}f'(-2)-f'(-2)=-\frac{1}{2}f'(-2)$

$=-\frac{1}{2}\cdot4=-2$

답 ④

함수의 극한에 대한 성질을 이용하면

$\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$
$\times\lim_{x\to2}\frac{1}{x+2}$
$=f'(2)\cdot\frac{1}{4}$

08 $\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x^2-4}=\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{(x+2)(x-2)}$

$=\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\cdot\frac{1}{x+2}$

$=f'(2)\cdot\frac{1}{4}$

$=2\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$

답 ②

09 $\lim_{x \to 3} \dfrac{3f(x)-xf(3)}{x-3}$

$=\lim_{x \to 3} \dfrac{3f(x)-3f(3)+3f(3)-xf(3)}{x-3}$

$=\lim_{x \to 3} \dfrac{3\{f(x)-f(3)\}-f(3)(x-3)}{x-3}$

$=3\lim_{x \to 3} \dfrac{f(x)-f(3)}{x-3}-f(3)$

$=3f'(3)-f(3)$

$=3\cdot 7-(-5)=26$ 답 26

10 주어진 식에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)$ $\therefore f(0)=0$

주어진 식은 모든 실수 x, y에 대하여 성립하는 항등식이므로 $x=0$, $y=0$을 대입해도 등식이 성립한다.

$\therefore f'(4)=\lim_{h \to 0} \dfrac{f(4+h)-f(4)}{h}$

$=\lim_{h \to 0} \dfrac{f(4)+f(h)-f(4)}{h}$

$=\lim_{h \to 0} \dfrac{f(h)}{h}=\lim_{h \to 0} \dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}$

$=f'(0)=5$ 답 5

11 주어진 식에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)+0$ $\therefore f(0)=0$

$\therefore f'(a)=\lim_{h \to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$

$=\lim_{h \to 0} \dfrac{f(a)+f(h)+4ah-f(a)}{h}$

$=\lim_{h \to 0} \dfrac{f(h)+4ah}{h}$

$=\lim_{h \to 0} \dfrac{f(h)}{h}+4a$

$=\lim_{h \to 0} \dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}+4a$

$=f'(0)+4a$

$=9+4a$

따라서 $9+4a=1$이므로

$a=-2$ 답 ②

12 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, f(1))$에서의 접선의 기울기가 6이므로

$f'(1)=6$

$\therefore \lim_{h \to 0} \dfrac{f(1-h)-f(1)}{h}$

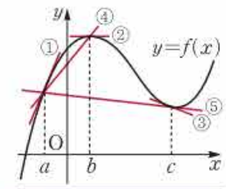
$=\lim_{h \to 0} \dfrac{f(1-h)-f(1)}{-h}\cdot(-1)$

$=-f'(1)=-6$ 답 ⑤

13 $f'(a)$, $f'(b)$, $f'(c)$는 각각 곡선 $y=f(x)$ 위의 세 점 $(a, f(a))$, $(b, f(b))$, $(c, f(c))$에서의 접선의 기울기이다.

또 x의 값이 a에서 b까지 변할 때의 평균변화율은 두 점 $(a, f(a))$, $(b, f(b))$를 지나는 직선의 기울기이고, x의 값이 a에서 c까지 변할 때의 평균변화율은 두 점 $(a, f(a))$, $(c, f(c))$를 지나는 직선의 기울기이다.

따라서 오른쪽 그림에서 직선의 기울기 중 가장 큰 것은 ①이다.



답 ①

직선 ①~⑤의 기울기의 대소를 비교하면
①>④>②>⑤>③

14 ㄱ. (i) $f(0)=0$, $\lim_{x \to 0} f(x)=\lim_{x \to 0} (x+|x|)=0$이므로

$\lim_{x \to 0} f(x)=f(0)$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

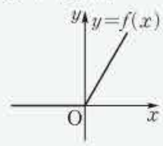
(ii) $\lim_{x \to 0+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x \to 0+} \dfrac{x+x}{x}=2$,

$\lim_{x \to 0-} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x \to 0-} \dfrac{x-x}{x}=0$

이므로 $\lim_{x \to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$이 존재하지 않는다.

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하지 않다.

$y=f(x)$의 그래프를 그려 보면 다음 그림과 같이 $x=0$에서 그래프가 꺾여 있으므로 미분가능하지 않다.



ㄴ. (i) $g(0)=0$, $\lim_{x \to 0} g(x)=\lim_{x \to 0} x|x|=0$이므로

$\lim_{x \to 0} g(x)=g(0)$

따라서 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

(ii) $\lim_{x \to 0+} \dfrac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x \to 0+} \dfrac{x\cdot x}{x}$

$=\lim_{x \to 0+} x=0$,

$\lim_{x \to 0-} \dfrac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x \to 0-} \dfrac{x\cdot(-x)}{x}$

$=\lim_{x \to 0-} (-x)=0$

이므로 $\lim_{x \to 0} \dfrac{g(x)-g(0)}{x-0}=0$

따라서 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

ㄷ. (i) $\lim_{x \to 0+} h(x)=\lim_{x \to 0+} 2x^2=0$,

$\lim_{x \to 0-} h(x)=\lim_{x \to 0-} (-x^3)=0$

이므로 $\lim_{x \to 0} h(x)=0$

이때 $h(0)=0$이므로

$\lim_{x \to 0} h(x)=h(0)$

따라서 함수 $h(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

(ii) $\lim_{x \to 0+} \dfrac{h(x)-h(0)}{x-0}=\lim_{x \to 0+} \dfrac{2x^2}{x}$

$=\lim_{x \to 0+} 2x=0$,

$\lim_{x \to 0-} \dfrac{h(x)-h(0)}{x-0}=\lim_{x \to 0-} \dfrac{-x^3}{x}$

$=\lim_{x \to 0-} (-x^2)=0$

이므로 $\lim_{x \to 0} \dfrac{h(x)-h(0)}{x-0}=0$

따라서 함수 $h(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

이상에서 $x=0$에서 연속이지만 미분가능하지 않은 함수는 ㄱ뿐이다. 답 ①

15 구간 $(-2, 4)$에서 함수 $f(x)$는 $x=-1$, $x=2$에서 불연속이므로

$a=2$

또 구간 $(-2, 4)$에서 함수 $f(x)$는 $x=-1$, $x=0$, $x=2$, $x=3$에서 미분가능하지 않으므로

$b=4$

$\therefore ab=8$ 답 8

06 도함수

Lecture 13 도함수 Ⓛ 39쪽

1-1 답 x, 2, 3, $2h$, 2

1-2 (1) $f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{3-3}{h}=0$

(2) $f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{\{4(x+h)-2\}-(4x-2)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{4h}{h}=4$

(3) $f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{\{-(x+h)^2+1\}-(-x^2+1)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{-2xh-h^2}{h}=\lim_{h\to0}(-2x-h)$

$=-2x$

(4) $f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{\{(x+h)^3+2(x+h)\}-(x^3+2x)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{(3x^2+2)h+3xh^2+h^3}{h}$

$=\lim_{h\to0}(3x^2+2+3xh+h^2)=3x^2+2$

답 (1) $f'(x)=0$ (2) $f'(x)=4$
(3) $f'(x)=-2x$ (4) $f'(x)=3x^2+2$

1-3 (1) $f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{\{-3(x+h)+6\}-(-3x+6)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{-3h}{h}=-3$

$\therefore f'(0)=-3$

(2) $f'(x)$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{\{(x+h)^2+2(x+h)-1\}-(x^2+2x-1)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{(2x+2)h+h^2}{h}=\lim_{h\to0}(2x+2+h)$

$=2x+2$

$\therefore f'(1)=2+2=4$

답 (1) -3 (2) 4

Q BOX

$(-2x^2)'=-2(x^2)'$
$=-2\cdot2x$
$=-4x$

$\{f(x)+g(x)\}'$
$=f'(x)+g'(x)$

함수의 곱의 미분법을 이용하면 곱의 꼴인 함수를 함수식을 전개하지 않고 미분할 수 있다.

$f'(x)=-3$에서 $f'(x)$는 상수함수이므로 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)$의 값은 항상 -3이다.

n이 1이 아닌 양의 정수일 때
a^n-b^n
$=(a-b)$
$\times(a^{n-1}+a^{n-2}b$
$+\cdots+b^{n-1})$

$f(x)$의 $x=t$에서의 미분계수

Lecture 14 미분법의 공식 Ⓛ 40쪽

1-1 (1) $y'=(x^7)'=7x^6$

(2) $y'=(4)'=0$

답 (1) $y'=7x^6$ (2) $y'=0$

2-1 (1) $y'=(x-3)'=(x)'-(3)'=1$

(2) $y'=(-2x^2+5x)'=(-2x^2)'+(5x)'$

$=-4x+5$

(3) $y'=(x^3-x^2+8)'=(x^3)'-(x^2)'+(8)'$

$=3x^2-2x$

(4) $y'=\left(\frac{1}{2}x^4-\frac{1}{3}x^3+2x\right)'$

$=\left(\frac{1}{2}x^4\right)'-\left(\frac{1}{3}x^3\right)'+(2x)'$

$=2x^3-x^2+2$

답 (1) $y'=1$ (2) $y'=-4x+5$
(3) $y'=3x^2-2x$ (4) $y'=2x^3-x^2+2$

2-2 (1) 함수 $f(x)+g(x)$의 $x=0$에서의 미분계수는

$f'(0)+g'(0)=1+(-2)=-1$

(2) 함수 $2f(x)-g(x)$의 $x=0$에서의 미분계수는

$2f'(0)-g'(0)=2\cdot1-(-2)=4$

답 (1) -1 (2) 4

3-1 (1) $y'=(3x)'(x+2)+3x(x+2)'$

$=3(x+2)+3x\cdot1$

$=6x+6$

(2) $y'=(2x^2+x)'(-x^2+3)+(2x^2+x)(-x^2+3)'$

$=(4x+1)(-x^2+3)+(2x^2+x)(-2x)$

$=-8x^3-3x^2+12x+3$

(3) $y'=(x)'(4x-7)(x+5)+x(4x-7)'(x+5)$
$+x(4x-7)(x+5)'$

$=1\cdot(4x-7)(x+5)+x\cdot4(x+5)+x(4x-7)\cdot1$

$=12x^2+26x-35$

(4) $y'=\{(2x+1)^3\}'=3(2x+1)^2(2x+1)'$

$=3(2x+1)^2\cdot2=6(2x+1)^2$

답 (1) $y'=6x+6$
(2) $y'=-8x^3-3x^2+12x+3$
(3) $y'=12x^2+26x-35$
(4) $y'=6(2x+1)^2$

기본+표준 유형 Q+Q Ⓛ 41쪽

01 답 (가) $x+h$ (나) h (다) n

02 ㄱ. $\lim_{h\to0}\frac{f(x+h^2)-f(x)}{h^2}=f'(x)$

ㄴ. $\lim_{x\to t}\frac{f(x)-f(t)}{x-t}=f'(t)$

ㄷ. $\lim_{h\to0}\frac{f(x)-f(x+h)}{h}=-\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$=-f'(x)$

ㄹ. $\lim_{h\to0}\frac{f(x+4h)-f(x+3h)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(x+4h)-f(x)+f(x)-f(x+3h)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{\{f(x+4h)-f(x)\}-\{f(x+3h)-f(x)\}}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(x+4h)-f(x)}{4h}\cdot4$

$-\lim_{h\to0}\frac{f(x+3h)-f(x)}{3h}\cdot3$

$=4f'(x)-3f'(x)=f'(x)$

이상에서 도함수 $f'(x)$와 같은 것은 ㄱ, ㄹ이다.

답 ③

03 $f(1)=1+1-1+1-1+1=2$

$f'(x)=9x^8+6x^5-5x^4+2x-1$이므로

$f'(1)=9+6-5+2-1=11$

$\therefore f(1)+f'(1)=13$

답 ⑤

04 $f(2)=0$에서 $-12+2a+b=0$

$\therefore 2a+b=12$ …… ㉠

$f'(x)=-6x+a$이므로 $f'(-1)=4$에서

$6+a=4$ $\therefore a=-2$

$a=-2$를 ㉠에 대입하면 $-4+b=12$

$\therefore b=16$

$\therefore b-a=18$

답 18

05 $f'(x)=(x^3-x-1)'(x^2-2x+3)$

$+(x^3-x-1)(x^2-2x+3)'$

$=(3x^2-1)(x^2-2x+3)$

$+(x^3-x-1)(2x-2)$

$\therefore f'(2)=11\cdot3+5\cdot2=43$

답 ④

06 $f'(x)=(3x+1)'(x^2-a)(-x+2)$

$+(3x+1)(x^2-a)'(-x+2)$

$+(3x+1)(x^2-a)(-x+2)'$

$=3(x^2-a)(-x+2)$

$+(3x+1)\cdot2x(-x+2)$

$+(3x+1)(x^2-a)\cdot(-1)$

따라서

$f'(1)=3(1-a)\cdot1+4\cdot2\cdot1+4(1-a)\cdot(-1)$

$=a+7$

이므로 $a+7=9$ $\therefore a=2$

답 2

07 $f'(x)=3(x^2-5x)^2(x^2-5x)'$

$=3(x^2-5x)^2(2x-5)$

$\therefore f'(1)+f'(3)=3\cdot(-4)^2\cdot(-3)+3\cdot(-6)^2\cdot1$

$=-144+108=-36$

답 -36

QBOX

분모를 인수분해한 후 미분계수의 정의를 이용할 수 있도록 식을 변형한다.

함숫값을 구하는 문제이므로 $f'(x)$의 식을 전개하지 않고 $x=2$를 대입하는 것이 편리하다.

08 $\lim_{h\to0}\frac{f(4+3h)-f(4)}{5h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(4+3h)-f(4)}{3h}\cdot\frac{3}{5}=\frac{3}{5}f'(4)$

이때 $f'(x)=3x^2-2x+5$이므로

$\frac{3}{5}f'(4)=\frac{3}{5}\cdot(48-8+5)=27$

답 27

09 $\lim_{x\to3}\frac{f(x)-f(3)}{x^2-3x}=\lim_{x\to3}\frac{f(x)-f(3)}{x(x-3)}$

$=\lim_{x\to3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}\cdot\frac{1}{x}$

$=\frac{1}{3}f'(3)$

이때

$f'(x)=(4-x)'(8x-1)+(4-x)(8x-1)'$

$=-1\cdot(8x-1)+(4-x)\cdot8=-16x+33$

이므로

$\frac{1}{3}f'(3)=\frac{1}{3}\cdot(-48+33)=-5$

답 ②

10 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=-2$에서 $x\to1$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\to0$이므로 (분자) $\to0$이다.

즉 $\lim_{x\to1}f(x)=0$이므로 $f(1)=0$

$\therefore \lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$

$\therefore f'(1)=-2$

이때 $f'(x)=6x^2-2ax$이므로

$6-2a=-2$ $\therefore a=4$

따라서 $f(x)=2x^3-4x^2+b$이므로 $f(1)=0$에서

$2-4+b=0$ $\therefore b=2$

$\therefore a+b=6$

답 ③

11 $\lim_{h\to0}\frac{f(2-h)-1}{h}=5$에서 $h\to0$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\to0$이므로 (분자) $\to0$이다.

즉 $\lim_{h\to0}\{f(2-h)-1\}=0$이므로 $f(2)=1$

$\therefore \lim_{h\to0}\frac{f(2-h)-1}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(2-h)-f(2)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(2-h)-f(2)}{-h}\cdot(-1)=-f'(2)$

$-f'(2)=5$이므로 $f'(2)=-5$

이때 $f'(x)=-3x^2+2ax+b$이므로

$-12+4a+b=-5$

$\therefore 4a+b=7$ …… ㉠

또 $f(2)=1$에서 $-8+4a+2b+7=1$

$\therefore 2a+b=1$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=3,\ b=-5$

따라서 $f(x)=-x^3+3x^2-5x+7$이므로

$f(1)=-1+3-5+7=4$

답 4

12 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 미분가능하면 $x=0$에서 연속이므로 $\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)$

$\lim_{x\to 0-} (x^2+bx+3)=f(0)$

$\therefore a=3$

$f'(x)=\begin{cases} 4 & (x>0) \\ 2x+b & (x<0) \end{cases}$이고 $f'(0)$이 존재하므로

$\lim_{x\to 0+} 4=\lim_{x\to 0-} (2x+b)$

$\therefore b=4$

$\therefore a+b=7$ 　답 7

다른 풀이 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 미분가능하면 $x=0$에서 연속이므로 $\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)$

$\lim_{x\to 0-} (x^2+bx+3)=f(0)$ 　$\therefore a=3$

$f'(0)$이 존재하므로

$\lim_{x\to 0+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0+} \frac{(4x+3)-3}{x}$

$=\lim_{x\to 0+} \frac{4x}{x}=4,$

$\lim_{x\to 0-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0-} \frac{(x^2+bx+3)-3}{x}$

$=\lim_{x\to 0-} \frac{x^2+bx}{x}$

$=\lim_{x\to 0-} (x+b)=b$

에서 $b=4$

$\therefore a+b=7$

13 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하면 $x=1$에서 연속이므로 $\lim_{x\to 1} f(x)=f(1)$

$\lim_{x\to 1-} (-x^3-4)=f(1)$

$\therefore a+b=-5$ 　…… ㉠

$f'(x)=\begin{cases} 2ax+b & (x>1) \\ -3x^2 & (x<1) \end{cases}$이고 $f'(1)$이 존재하므로

$\lim_{x\to 1+} (2ax+b)=\lim_{x\to 1-} (-3x^2)$

$\therefore 2a+b=-3$ 　…… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=2,\ b=-7$

따라서 $f(x)=\begin{cases} 2x^2-7x & (x\ge 1) \\ -x^3-4 & (x<1) \end{cases}$이므로

$f(3)=18-21=-3$ 　답 -3

14 $f(x)=x^7+x$라 하면 $f(1)=2$이므로

$\lim_{x\to 1} \frac{x^7+x-2}{x-1}=\lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$

이때 $f'(x)=7x^6+1$이므로

$f'(1)=7+1=8$ 　답 8

15 $f(x)=x^n-2x$라 하면 $f(1)=-1$이므로

$\lim_{x\to 1} \frac{x^n-2x+1}{x-1}=\lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$

$\therefore f'(1)=6$

이때 $f'(x)=nx^{n-1}-2$이므로

$n-2=6$ 　$\therefore n=8$ 　답 ③

Q BOX

$\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)$
➡ $\lim_{x\to 0+} f(x)$
$=\lim_{x\to 0-} f(x)$
$=f(0)$

$\lim_{x\to 0+} f'(x)$
$=\lim_{x\to 0-} f'(x)$

ax^2+bx+c
$=a'x^2+b'x+c'$
이 x에 대한 항등식이면
$a=a',\ b=b',\ c=c'$

$x=0$에서의 미분계수가 존재
➡ $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$이 존재

$ax^2+bx+c=0$이 x에 대한 항등식이면
$a=b=c=0$

$3>1$이므로 $f(3)$의 값은 $x=3$을 $f(x)=2x^2-7x$에 대입하여 구한다.

16 $f(x)=3x^2-xf'(5)$에서 $f'(5)$는 상수이므로 $f'(5)=a$ (a는 상수)라 하면

$f(x)=3x^2-ax$

$\therefore f'(x)=6x-a$

$f'(5)=30-a$이므로 $f(x)$와 $f'(5)$를 주어진 등식에 대입하면

$3x^2-ax=3x^2-(30-a)x$

위의 등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로

$a=30-a$ 　$\therefore a=15$

따라서 $f'(x)=6x-15$이므로

$f'(4)=24-15=9$ 　답 ⑤

다른 풀이 $f(x)=3x^2-xf'(5)$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=6x-f'(5)$

위의 식의 양변에 $x=5$를 대입하면

$f'(5)=30-f'(5)$

$\therefore f'(5)=15$

따라서 $f'(x)=6x-15$이므로

$f'(4)=24-15=9$

17 $f(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수, $a\neq 0$)라 하면

$f'(x)=2ax+b$

$f(x)$와 $f'(x)$를 주어진 등식에 대입하면

$(x+1)(2ax+b)-2(ax^2+bx+c)-8=0$

$\therefore (2a-b)x+b-2c-8=0$

위의 등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로

$2a-b=0$ 　…… ㉠

$b-2c-8=0$ 　…… ㉡

이때 $f(0)=-3$에서

$c=-3$

$c=-3$을 ㉡에 대입하면 　$b+6-8=0$

$\therefore b=2$

$b=2$를 ㉠에 대입하면 　$2a-2=0$

$\therefore a=1$

따라서 $f(x)=x^2+2x-3$이므로

$f(1)=1+2-3=0$ 　답 0

18 $f(x)=x^9+ax^3+b$라 하면

$f'(x)=9x^8+3ax^2$

$f(x)$가 $(x-1)^2$으로 나누어떨어지므로

$f(1)=0,\ f'(1)=0$

$f(1)=0$에서 　$1+a+b=0$

$\therefore a+b=-1$ 　…… ㉠

$f'(1)=0$에서 　$9+3a=0$

$\therefore a=-3$

$a=-3$을 ㉠에 대입하면

$-3+b=-1$ 　$\therefore b=2$

$\therefore b-a=5$ 　답 ①

쌤 한마디

다항식 $f(x)$가 $(x-a)^2$으로 나누어떨어질 때, 몫을 $Q(x)$라 하면

$f(x)=(x-a)^2Q(x)$ … ㉠

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=2(x-a)Q(x)+(x-a)^2Q'(x)$ … ㉡

이때 $x=a$를 ㉠, ㉡에 각각 대입하면

$f(a)=0,\ f'(a)=0$

19 x^6+ax^5+b를 $(x+1)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면 나머지가 $4x+8$이므로

x^6+ax^5+b

$=(x+1)^2Q(x)+4x+8$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$1-a+b=4$

$\therefore a-b=-3$ …… ㉡

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$6x^5+5ax^4=2(x+1)Q(x)+(x+1)^2Q'(x)+4$

위의 식의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$-6+5a=4 \qquad \therefore a=2$

$a=2$를 ㉡에 대입하면

$2-b=-3 \qquad \therefore b=5$

$\therefore ab=10$

답 10

다항식 A를 다항식 $B(B\neq0)$로 나누었을 때의 몫을 Q, 나머지를 R라 하면

$A=BQ+R$

특히 $R=0$이면 A는 B로 나누어떨어진다고 한다.

중단원 마무리

44쪽

01 전략 평균변화율과 순간변화율을 각각 구한 후 방정식을 세운다.

풀이 함수 $f(x)$에서 x의 값이 -2에서 a까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{f(a)-f(-2)}{a-(-2)}=\frac{(a^3+7)-(-1)}{a+2}=\frac{a^3+8}{a+2}=\frac{(a+2)(a^2-2a+4)}{a+2}=a^2-2a+4$$

함수 $f(x)$의 $x=2$에서의 순간변화율은

$$f'(2)=\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\{(2+h)^3+7\}-15}{h}=\lim_{h\to0}\frac{12h+6h^2+h^3}{h}=\lim_{h\to0}(12+6h+h^2)=12$$

따라서 $a^2-2a+4=12$이므로

$a^2-2a-8=0, \qquad (a+2)(a-4)=0$

$\therefore a=4\ (\because a>0)$

답 ④

02 전략 $h\to0$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\to0$이므로 (분자) $\to0$임을 이용하여 $f(3)$의 값을 구하고, 주어진 등식의 좌변을 $f'(3)$을 이용하여 나타낸다.

풀이 $\lim_{h\to0}\frac{f(3-h)-4}{h}=5$에서 $h\to0$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\to0$이므로 (분자) $\to0$이다.

즉 $\lim_{h\to0}\{f(3-h)-4\}=0$이므로

$f(3)=4$ ··· ❶

$$\therefore \lim_{h\to0}\frac{f(3-h)-4}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(3-h)-f(3)}{-h}\cdot(-1)=-f'(3)$$

따라서 $-f'(3)=5$이므로

$f'(3)=-5$ ··· ❷

$\therefore f(3)+f'(3)=-1$ ··· ❸

답 -1

단계	채점 기준	비율
❶	$f(3)$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷	$f'(3)$의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸	$f(3)+f'(3)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

03 전략 주어진 극한을 $f(1)$과 $f'(1)$을 이용하여 나타낸다.

풀이
$$\lim_{x\to1}\frac{x^2f(1)-f(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{x^2f(1)-f(1)+f(1)-f(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x^2-1)f(1)-\{f(x)-f(1)\}}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{(x^2-1)f(1)}{x-1}-\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1}(x+1)f(1)-f'(1)=2f(1)-f'(1)=2\cdot2-(-3)=7$$

$\lim_{x\to1}\frac{(x+1)(x-1)f(1)}{x-1}$

답 7

04 전략 주어진 두 극한을 모두 $f'(2)$를 이용하여 나타낸다.

풀이 $\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)$이므로

$f'(2)=3$

$$\therefore \lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2-h)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2)+f(2)-f(2-h)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\{f(2+h)-f(2)\}-\{f(2-h)-f(2)\}}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}-\lim_{h\to0}\frac{f(2-h)-f(2)}{-h}\cdot(-1)=f'(2)+f'(2)=2f'(2)=2\cdot3=6$$

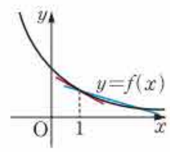
답 ④

05 전략 평균변화율은 그래프 위의 두 점을 지나는 직선의 기울기와 같고, 미분계수는 그래프 위의 점에서의 접선의 기울기와 같음을 이용한다.

풀이 $f'(1)$은 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $(1, f(1))$에서의 접선의 기울기이고, $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$은 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 두 점 $(1, f(1))$, $(x, f(x))$를 지나는 직선의 기울기이다.

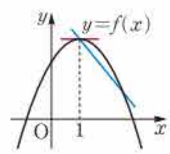
ㄱ. $x>1$일 때, $f'(1)$은 $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$보다 항상 작으므로

$$f'(1)<\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

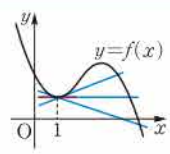


ㄴ. $x>1$일 때, $f'(1)$은 $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$보다 항상 크므로

$$f'(1)>\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$



ㄷ. $x>1$일 때, $f'(1)$은 $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$보다 크거나 같을 수 있으므로 주어진 부등식을 만족시키지 않는다.



이상에서 $x>1$일 때, 주어진 부등식을 항상 만족시키는 함수 $y=f(x)$의 그래프는 ㄱ뿐이다. 답 ①

06 전략 직선 $y=3x+5$는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(-1, 2)$에서의 접선임을 이용한다.

풀이 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(-1, 2)$에서의 접선의 기울기가 3이므로

$$f'(-1)=3$$

$$\therefore \lim_{h\to0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{3h}=\lim_{h\to0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}\cdot\frac{1}{3}=f'(-1)\cdot\frac{1}{3}=3\cdot\frac{1}{3}=1$$

답 1

07 전략 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하면 $x=a$에서 연속임을 이용한다.

풀이 함수 $f(x)$가 $x=5$에서 미분가능하면 $x=5$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to5}f(x)=f(5)$$

이때

$$\lim_{x\to5}f(x)=\lim_{x\to5}\frac{x^2-3x-10}{x-5}=\lim_{x\to5}\frac{(x+2)(x-5)}{x-5}=\lim_{x\to5}(x+2)=7$$

이므로

$7=k-5 \qquad \therefore k=12$ 답 ②

Q BOX

그래프가 꺾여 있으므로 미분가능하지 않다.

$f'(1)$과 $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$은 모두 음수이므로 절댓값이 큰 값이 작다.

$f'(1)=0$, $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}<0$

08 전략 그래프를 해석하여 함수의 극한, 접선의 기울기, 연속과 미분가능성 등을 파악한다.

풀이 ① $\lim_{x\to3+}f(x)=0$, $\lim_{x\to3-}f(x)=0$이므로 $\lim_{x\to3}f(x)=0$

② $f'(x)=0$인 x의 값은 0의 1개이다.

③ $0<a<1$일 때 함수 $y=f(x)$의 그래프의 접선의 기울기는 음수이므로 $f'(a)<0$이다.

④ 함수 $f(x)$는 $x=3$, $x=6$에서 불연속이므로 불연속인 x의 값은 2개이다.

⑤ 함수 $f(x)$는 $x=1$, $x=2$, $x=3$, $x=4$, $x=6$에서 미분가능하지 않으므로 미분가능하지 않은 x의 값은 5개이다.

답 ⑤

09 전략 $f'(x)=\lim_{h\to0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$에서 $f(x+h)$를 주어진 항등식을 이용하여 변형한다.

풀이 주어진 식에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)-0 \qquad \therefore f(0)=0$

$$\begin{aligned}\therefore f'(x)&=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{f(x)+f(h)-3xh-f(x)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-3xh}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}-3x\\&=\lim_{h\to0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}-3x\\&=f'(0)-3x\\&=-3x+2\end{aligned}$$

답 ②

10 전략 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 (a, b)에서의 접선의 기울기가 m이면 $f(a)=b$, $f'(a)=m$임을 이용한다.

풀이 점 (a, b)가 함수 $f(x)$의 그래프 위의 점이므로 $f(a)=b$에서

$a^4+5a+6=b$ …… ㉠ ··· ❶

$f'(x)=4x^3+5$이고 점 (a, b)에서의 접선의 기울기가 1이므로 $f'(a)=1$에서

$4a^3+5=1, \qquad a^3+1=0$

$(a+1)(a^2-a+1)=0$

$\therefore a=-1$ ($\because a^2-a+1>0$) ··· ❷

$a=-1$을 ㉠에 대입하면

$b=1-5+6=2$ ··· ❸

$\therefore a+b=1$ ··· ❹

답 1

단계	채점 기준	비율
❶	a, b 사이의 관계식을 구할 수 있다.	30 %
❷	a의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸	b의 값을 구할 수 있다.	20 %
❹	$a+b$의 값을 구할 수 있다.	10 %

11 전략 곱의 미분법을 이용하여 $g'(x)$를 $f'(x)$에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 $g'(x)=(x^2+3)'f(x)+(x^2+3)f'(x)$

$=2xf(x)+(x^2+3)f'(x)$

$\therefore g'(1)=2f(1)+4f'(1)$

$=2\cdot2+4\cdot1=8$ 답 ③

12 전략 그래프를 이용하여 $f(x)$와 $f'(x)$의 부호를 알아본다.

풀이 $g(x)=xf(x)$에서

$g'(x)=f(x)+xf'(x)$

ㄱ. $g(1)=f(1)=0$,

$g'(1)=f(1)+f'(1)=f'(1)<0$

이므로 $g(1)+g'(1)<0$

ㄴ. $g(3)=3f(3)=0$,

$g'(3)=f(3)+3f'(3)=3f'(3)>0$

이므로 $g(3)-g'(3)<0$

ㄷ. $f(4)>0$, $g'(4)=f(4)+4f'(4)>0$

이므로 $f(4)+g'(4)>0$

ㄹ. $g(-2)=-2f(-2)>0$,

$g'(-2)=f(-2)-2f'(-2)<0$

이므로 $g(-2)g'(-2)<0$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ②

Q BOX

$f'(4)>0$

$f(-2)<0$이므로 $-2f(-2)>0$

$f'(-2)>0$

$\{f(x)g(x)\}'$
$=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$
이므로 $x=1$에서의 미분계수는 $f'(1)g(1)+f(1)g'(1)$

13 전략 $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$임을 이용할 수 있도록 식을 변형한다.

풀이 $\lim_{x\to-2}\dfrac{\{f(x)\}^2-\{f(-2)\}^2}{x+2}$

$=\lim_{x\to-2}\dfrac{\{f(x)+f(-2)\}\{f(x)-f(-2)\}}{x-(-2)}$

$=\lim_{x\to-2}\dfrac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)}\cdot\{f(x)+f(-2)\}$

$=f'(-2)\cdot2f(-2)$

이때 $f'(x)=3x^2-6$이므로

$f'(-2)=12-6=6$

또 $f(-2)=-8+12=4$이므로

$f'(-2)\cdot2f(-2)=6\cdot2\cdot4=48$ 답 48

14 전략 주어진 식에서 $f(3)$, $f'(3)$의 값을 구하여 a, b에 대한 방정식을 세운다.

풀이 $\lim_{h\to0}\dfrac{f(3+2h)}{5h}=6$에서 $h \to 0$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\to$ 0이므로 (분자) $\to$ 0이다.

즉 $\lim_{h\to0}f(3+2h)=0$이므로 $f(3)=0$

$\therefore \lim_{h\to0}\dfrac{f(3+2h)}{5h}=\lim_{h\to0}\dfrac{f(3+2h)-f(3)}{2h}\cdot\dfrac{2}{5}$

$=\dfrac{2}{5}f'(3)$

따라서 $\dfrac{2}{5}f'(3)=6$이므로

$f'(3)=15$

이때 $f'(x)=3x^2+2ax+b$이므로

$27+6a+b=15$

$\therefore 6a+b=-12$ …… ㉠

또 $f(3)=0$에서 $27+9a+3b=0$

$\therefore 3a+b=-9$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=-6$

$\therefore ab=6$ 답 6

15 전략 $x \to 1$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\to$ 0이므로 (분자) $\to$ 0임을 이용하여 $f(1)g(1)$의 값을 구하고, $\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$임을 이용한다.

풀이 조건 ㈎에서 $x \to 1$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\to$ 0이므로 (분자) $\to$ 0이다.

즉 $\lim_{x\to1}\{f(x)g(x)+4\}=0$이므로

$f(1)g(1)=-4$ …… ㉠

$\lim_{x\to1}\dfrac{f(x)g(x)+4}{x-1}=\lim_{x\to1}\dfrac{f(x)g(x)-f(1)g(1)}{x-1}$

이므로 함수 $f(x)g(x)$의 $x=1$에서의 미분계수가 8이다.

$\therefore f'(1)g(1)+f(1)g'(1)=8$ …… ㉡

$f(1)=-2$이므로 ㉠에서

$g(1)=2$ …… ㉢

한편 $g(x)$는 일차함수이므로 $g(x)=ax+b$(a, b는 상수, $a\neq0$)라 하면

$g'(x)=a$

조건 ㈏에서 $g(0)=g'(0)$이므로 $b=a$

즉 $g(x)=ax+a$이므로 ㉢에서

$a+a=2$ $\therefore a=1$

따라서 $g'(x)=1$이므로

$g'(1)=1$ …… ㉣

㉢, ㉣을 ㉡에 대입하면

$f'(1)\cdot2+(-2)\cdot1=8$

$\therefore f'(1)=5$ 답 ①

16 전략 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이고 $x=1$에서의 미분계수가 존재함을 이용하여 a, b 사이의 관계식을 구한다.

풀이 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하면 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to1}f(x)=f(1)$

$\lim_{x\to1-}(x^3+ax)=f(1)$

$1+a=b+2$

$\therefore a-b=1$ …… ㉠

$f'(x)=\begin{cases}3x^2+a & (x<1)\\ 2bx+1 & (x>1)\end{cases}$이고 $f'(1)$이 존재하므로

$\lim_{x\to1+}(2bx+1)=\lim_{x\to1-}(3x^2+a)$

$2b+1=3+a$

$\therefore a-2b=-2$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=4$, $b=3$

$\therefore a+b=7$ 답 ③

17 전략 주어진 식의 일부를 $f(x)$로 치환하여 미분계수의 정의를 이용한다.

풀이 $\lim_{x\to2}\frac{x^n-x^4-16}{x-2}=a$에서 $x\to2$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\to0$이므로 (분자) $\to0$이다.

즉 $\lim_{x\to2}(x^n-x^4-16)=0$이므로

$2^n-16-16=0,\quad 2^n=32$

$\therefore n=5$

$f(x)=x^5-x^4$이라 하면 $f(2)=32-16=16$이므로

$$\lim_{x\to2}\frac{x^5-x^4-16}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)$$

이때 $f'(x)=5x^4-4x^3$이므로

$f'(2)=80-32=48\qquad \therefore a=48$

$\therefore a-n=43$ 답 ②

18 전략 $f(x)$, $f'(x)$를 주어진 등식에 대입하여 x에 대한 항등식을 세운다.

풀이 $f'(x)=2ax$이므로 주어진 등식에 $f(x)$, $f'(x)$를 대입하면

$4(ax^2+b)=(2ax)^2+x^2+4$

$\therefore 4ax^2+4b=(4a^2+1)x^2+4$

위의 등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로

$4a=4a^2+1,\ 4b=4$

$4a=4a^2+1$에서 $\quad 4a^2-4a+1=0$

$(2a-1)^2=0\qquad \therefore a=\frac{1}{2}$

$4b=4$에서 $\quad b=1$

따라서 $f(x)=\frac{1}{2}x^2+1$이므로

$f(2)=2+1=3$ 답 ①

19 전략 $f(x)$를 몫과 나머지를 이용하여 나타낸 후 그래프 위의 점의 좌표와 그 점에서의 접선의 기울기를 이용한다.

풀이 $f(x)$를 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)=ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$f(x)=(x-1)^2Q(x)+ax+b$ ······ ㉠ ··· ❶

$f(1)=-4$이므로 ㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$a+b=-4$ ······ ㉡

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=2(x-1)Q(x)+(x-1)^2Q'(x)+a$

$f'(1)=5$이므로 위의 식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$a=5$

$a=5$를 ㉡에 대입하면 $\quad 5+b=-4$

$\therefore b=-9$

따라서 $R(x)=5x-9$이므로 ··· ❷

$R(4)=20-9=11$ ··· ❸

답 11

단계	채점 기준	비율
❶	$f(x)$를 몫과 나머지를 이용하여 나타낼 수 있다.	30 %
❷	$R(x)$를 구할 수 있다.	60 %
❸	$R(4)$의 값을 구할 수 있다.	10 %

Q BOX

다항식을 이차식으로 나누었을 때의 나머지는 상수이거나 일차식이므로 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)라 한다.

점 $(1, -4)$가 $y=f(x)$의 그래프 위의 점이므로 $f(1)=-4$

점 $(1, -4)$에서의 접선의 기울기가 5이므로 $f'(1)=5$

두 직선 $y=mx+n$, $y=m'x+n'$이 수직이면 $mm'=-1$

04 도함수의 활용 (1)

07 접선의 방정식

Lecture 15 접점의 좌표가 주어진 접선의 방정식

Ⓛ 48쪽

1-1 (1) $f(x)=x^2-3x-4$라 하면 $\quad f'(x)=2x-3$

따라서 점 $(-1, 0)$에서의 접선의 기울기는

$f'(-1)=-2-3=-5$

(2) $f(x)=2x^3-5x^2+1$이라 하면

$f'(x)=6x^2-10x$

따라서 점 $(2, -3)$에서의 접선의 기울기는

$f'(2)=24-20=4$

답 (1) -5 (2) 4

1-2 $f(x)=x^4-x^2+3x+5$라 하면

$f'(x)=4x^3-2x+3$

(1) 점 $(0, 5)$에서의 접선의 기울기는

$f'(0)=3$

(2) 점 $(1, 8)$에서의 접선의 기울기는

$f'(1)=4-2+3=5$

답 (1) 3 (2) 5

2-1 (1) $f(x)=-2x^2+x+6$이라 하면

$f'(x)=-4x+1$

점 $(1, 5)$에서의 접선의 기울기는

$f'(1)=-4+1=-3$

이므로 구하는 접선의 방정식은

$y-5=-3(x-1)\qquad \therefore y=-3x+8$

(2) $f(x)=3x^3+7x^2+2$라 하면

$f'(x)=9x^2+14x$

점 $(-2, 6)$에서의 접선의 기울기는

$f'(-2)=36-28=8$

이므로 구하는 접선의 방정식은

$y-6=8\{x-(-2)\}\qquad \therefore y=8x+22$

답 (1) $y=-3x+8$ (2) $y=8x+22$

2-2 (1) $f(x)=x^2-4x$라 하면 $\quad f'(x)=2x-4$

점 $(1, -3)$에서의 접선의 기울기는

$f'(1)=2-4=-2$

이므로 직선 l의 기울기는 $\quad \frac{1}{2}$

(2) 직선 l은 점 $(1, -3)$을 지나고 기울기가 $\frac{1}{2}$이므로 직선 l의 방정식은

$y-(-3)=\frac{1}{2}(x-1)\qquad \therefore y=\frac{1}{2}x-\frac{7}{2}$

답 (1) $\frac{1}{2}$ (2) $y=\frac{1}{2}x-\frac{7}{2}$

Lecture 16 기울기 또는 곡선 밖의 한 점이 주어진 접선의 방정식

49쪽

1-1 (1) $f(x)=3x^2-4x-1$이라 하면

$f'(x)=6x-4$

접점의 x좌표가 t이고 직선 l의 기울기가 8이므로

$f'(t)=8, \quad 6t-4=8$

$\therefore t=2$

(2) 접점의 좌표가 (2, 3)이므로 직선 l의 방정식은

$y-3=8(x-2)$

$\therefore y=8x-13$

답 (1) 2 (2) $y=8x-13$

1-2 $f(x)=-x^3+2x+1$이라 하면

$f'(x)=-3x^2+2$

접점의 좌표를 $(t, -t^3+2t+1)$이라 하면 접선의 기울기가 -1이므로

$f'(t)=-1, \quad -3t^2+2=-1$

$t^2=1 \quad \therefore t=-1$ 또는 $t=1$

따라서 접점의 좌표는 $(-1, 0)$, $(1, 2)$이므로 구하는 접선의 방정식은

$y=-\{x-(-1)\}$, $y-2=-(x-1)$

$\therefore y=-x-1$, $y=-x+3$

답 $y=-x-1$, $y=-x+3$

2-1 (1) $f(x)=-x^2+3x$라 하면

$f'(x)=-2x+3$

접점의 좌표가 $(t, -t^2+3t)$이므로 접선의 기울기는

$f'(t)=-2t+3$

즉 접선의 방정식은

$y-(-t^2+3t)=(-2t+3)(x-t)$

$\therefore y=(-2t+3)x+t^2 \quad \cdots\cdots$ ㉠

(2) 직선 ㉠이 점 (0, 4)를 지나므로

$4=t^2 \quad \therefore t=-2$ 또는 $t=2$

(3) $t=-2$를 ㉠에 대입하면 접선의 방정식은

$y=7x+4$

$t=2$를 ㉠에 대입하면 접선의 방정식은

$y=-x+4$

답 (1) $y=(-2t+3)x+t^2$ (2) -2, 2
(3) $y=7x+4$, $y=-x+4$

2-2 $f(x)=x^2-4x+6$이라 하면

$f'(x)=2x-4$

접점의 좌표를 (t, t^2-4t+6)이라 하면 접선의 기울기는

$f'(t)=2t-4$

이므로 접선의 방정식은

$y-(t^2-4t+6)=(2t-4)(x-t)$

$\therefore y=(2t-4)x-t^2+6 \quad \cdots\cdots$ ㉠

Q BOX

$f(2)=12-8-1=3$

주어진 곡선에 접하고 기울기가 -1인 직선은 2개이다.

곡선 $y=f(x)$에 접하는 직선의 기울기의 최댓값 또는 최솟값은 $f'(x)$의 최대·최소를 이용하여 구한다.

점 (0, 4)는 주어진 곡선 위의 점이 아니다.

직선 ㉠이 점 $(-1, 7)$을 지나므로

$7=-(2t-4)-t^2+6$

$t^2+2t-3=0, \quad (t+3)(t-1)=0$

$\therefore t=-3$ 또는 $t=1$

$t=-3$을 ㉠에 대입하면 접선의 방정식은

$y=-10x-3$

$t=1$을 ㉠에 대입하면 접선의 방정식은

$y=-2x+5$

답 $y=-10x-3$, $y=-2x+5$

기본+표준 유형 Q+Q

50쪽

01 점 (1, 3)이 곡선 $y=x^3+ax^2+b$ 위의 점이므로

$3=1+a+b \quad \therefore a+b=2 \quad \cdots\cdots$ ㉠

$f(x)=x^3+ax^2+b$라 하면

$f'(x)=3x^2+2ax$

점 (1, 3)에서의 접선의 기울기가 -1이므로

$f'(1)=-1, \quad 3+2a=-1$

$\therefore a=-2$

$a=-2$를 ㉠에 대입하면

$-2+b=2 \quad \therefore b=4$

$\therefore ab=-8$

답 ①

02 $f(x)=x^3-6x^2+15x-3$이라 하면

$f'(x)=3x^2-12x+15=3(x-2)^2+3$

이므로 이차함수 $f'(x)$는 $x=2$에서 최솟값 3을 갖는다.

따라서 접선의 기울기 m의 최솟값은 3이다. 답 3

03 $f(x)=3x^2-2x+1$이라 하면

$f'(x)=6x-2$

점 $(-1, 6)$에서의 접선의 기울기는

$f'(-1)=-6-2=-8$

이므로 접선의 방정식은

$y-6=-8\{x-(-1)\}$

$\therefore y=-8x-2$

따라서 구하는 접선의 y절편은 -2이다. 답 ④

04 점 $(2, -3)$이 곡선 $y=x^3+ax-5$ 위의 점이므로

$-3=8+2a-5$

$\therefore a=-3$

$f(x)=x^3-3x-5$라 하면

$f'(x)=3x^2-3$

점 $(2, -3)$에서의 접선의 기울기는

$f'(2)=12-3=9$

이므로 접선의 방정식은

$y-(-3)=9(x-2)$

$\therefore y=9x-21$

따라서 $b=9$, $c=-21$이므로

$a+b-c=27$

답 ②

05 $f(x)=2x^2+9x-3$이라 하면

$f'(x)=4x+9$

점 $(-3,\ -12)$에서의 접선의 기울기는

$f'(-3)=-12+9=-3$

이므로 이 점에서의 접선과 수직인 직선의 기울기는 $\frac{1}{3}$이다.

즉 점 $(-3,\ -12)$를 지나고 기울기가 $\frac{1}{3}$인 직선의 방정식은

$y-(-12)=\frac{1}{3}\{x-(-3)\}$

$\therefore\ y=\frac{1}{3}x-11$

따라서 $a=\frac{1}{3}$, $b=-11$이므로

$3a-b=3\cdot\frac{1}{3}-(-11)=12$ 답 12

06 $f(x)=x^3-2x-8$이라 하면 $f'(x)=3x^2-2$

점 $(1,\ -9)$에서의 접선의 기울기는

$f'(1)=3-2=1$

이므로 이 점에서의 접선과 수직인 직선의 기울기는 -1이다.

따라서 점 $(1,\ -9)$를 지나고 기울기가 -1인 직선의 방정식은

$y-(-9)=-(x-1)$ $\therefore\ y=-x-8$

이 직선이 점 $(-10,\ k)$를 지나므로

$k=10-8=2$ 답 ③

07 직선 $x+y-2=0$, 즉 $y=-x+2$에 평행한 직선의 기울기는 -1이다.

> 두 직선 $y=mx+n$, $y=m'x+n'$이 평행하면 $m=m'$, $n\neq n'$

$f(x)=2x^2+x-4$라 하면

$f'(x)=4x+1$

접점의 좌표를 $(t,\ 2t^2+t-4)$라 하면 접선의 기울기가 -1이므로

$f'(t)=-1$, $4t+1=-1$

$\therefore\ t=-\frac{1}{2}$

따라서 접점의 좌표가 $\left(-\frac{1}{2},\ -4\right)$이므로 접선의 방정식은

$y-(-4)=-\left\{x-\left(-\frac{1}{2}\right)\right\}$

$\therefore\ x+y+\frac{9}{2}=0$, 즉 $2x+2y+9=0$

이 직선이 직선 $2x+2y+k=0$과 일치해야 하므로

$k=9$ 답 ④

08 직선 $y=3x-1$과 곡선 $y=5x^2-3x+2$ 위의 점 $(a,\ b)$에서의 접선은 평행하므로 기울기가 같다.

$f(x)=5x^2-3x+2$라 하면

$f'(x)=10x-3$

점 $(a,\ b)$에서의 접선의 기울기가 3이므로

$f'(a)=3$, $10a-3=3$

$\therefore\ a=\frac{3}{5}$

따라서 $b=f\left(\frac{3}{5}\right)=\frac{9}{5}-\frac{9}{5}+2=2$이므로

$ab=\frac{6}{5}$ 답 ③

09 $f(x)=x^3-5x^2+ax$라 하면

$f'(x)=3x^2-10x+a$

접점의 좌표를 $(t,\ t^3-5t^2+at)$라 하면 접선의 기울기는 $f'(t)=3t^2-10t+a$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^3-5t^2+at)=(3t^2-10t+a)(x-t)$

$\therefore\ y=(3t^2-10t+a)x-2t^3+5t^2$

이 직선이 직선 $y=9x+7$과 일치해야 하므로

$3t^2-10t+a=9$ …… ㉠

$-2t^3+5t^2=7$ …… ㉡

㉡에서

$2t^3-5t^2+7=0$, $(t+1)(2t^2-7t+7)=0$

> $$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 2 & -5 & 0 & 7 \\ & & -2 & 7 & -7 \\ \hline & 2 & -7 & 7 & 0 \end{array}$$
> $\therefore\ 2t^3-5t^2+7$
> $=(t+1)(2t^2-7t+7)$

$\therefore\ t=-1$ ($\because\ 2t^2-7t+7>0$)

> $2t^2-7t+7$
> $=2\left(t-\frac{7}{4}\right)^2+\frac{7}{8}>0$

$t=-1$을 ㉠에 대입하면

$3+10+a=9$ $\therefore\ a=-4$ 답 ④

10 $f(x)=x^2-8x+k$라 하면

$f'(x)=2x-8$

$x=t$인 점에서의 접선의 기울기가 -2이므로

$f'(t)=-2$, $2t-8=-2$ $\therefore\ t=3$

따라서 접점의 좌표가 $(3,\ 0)$이고 이 점은 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로 $f(3)=0$

> $y=-2x+6$에 $x=3$을 대입하면
> $y=-6+6=0$

$9-24+k=0$ $\therefore\ k=15$

$\therefore\ k+t=18$ 답 18

11 $f(x)=x^2$이라 하면 $f'(x)=2x$

곡선 $y=f(x)$의 접선 중에서 직선 $y=2x-11$과 평행한 접선의 접점의 좌표를 $(t,\ t^2)$이라 하면 접선의 기울기가 2이므로

$f'(t)=2$, $2t=2$ $\therefore\ t=1$

따라서 접점의 좌표는 $(1,\ 1)$이고, 점 $(1,\ 1)$과 직선 $y=2x-11$, 즉 $2x-y-11=0$ 사이의 거리가 구하는 최솟값이므로

$\frac{|2-1-11|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=2\sqrt{5}$ 답 ⑤

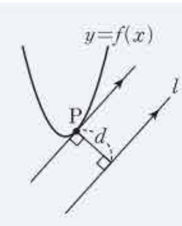
> 점 $(x_1,\ y_1)$과 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리는 $\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

쌤 한마디

곡선 $y=f(x)$ 위의 점과 직선 l 사이의 거리의 최솟값 d는 다음과 같은 순서로 구한다.

(i) 직선 l과 평행한 접선의 접점 P의 좌표를 구한다.

(ii) 접점 P와 직선 l 사이의 거리를 구한다.



12 (1) $f(x)=x^2+x+2$라 하면

$f'(x)=2x+1$

곡선 $y=f(x)$의 접선 중에서 직선 $y=x-3$과 평행한 접선의 접점의 좌표를 $(t,\ t^2+t+2)$라 하면 접선의 기울기가 1이므로

$f'(t)=1,\qquad 2t+1=1\qquad \therefore t=0$

따라서 접점의 좌표는 $(0,\ 2)$이고, 점 P의 좌표가 $(0,\ 2)$일 때 △ABP의 넓이가 최소이다.

△ABP의 넓이가 최소이려면 $\overline{AB}$를 밑변으로 할 때 △ABP의 높이, 즉 점 P와 직선 $y=x-3$ 사이의 거리가 최소이어야 한다.

(2) 점 $P(0,\ 2)$와 직선 $y=x-3$, 즉 $x-y-3=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|0-2-3|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{5}{\sqrt{2}}$$

$\overline{AB}=\sqrt{(6-3)^2+(3-0)^2}=3\sqrt{2}$이므로 △ABP의 넓이의 최솟값은

$$\frac{1}{2}\cdot 3\sqrt{2}\cdot\frac{5}{\sqrt{2}}=\frac{15}{2}$$

답 (1) $(0,\ 2)$ (2) $\frac{15}{2}$

13 $f(x)=-x^3+2x$라 하면

$f'(x)=-3x^2+2$

접점의 좌표를 $(t,\ -t^3+2t)$라 하면 접선의 기울기는 $f'(t)=-3t^2+2$이므로 접선의 방정식은

$y-(-t^3+2t)=(-3t^2+2)(x-t)$

$\therefore y=(-3t^2+2)x+2t^3$ …… ㉠

직선 ㉠이 점 $(0,\ -2)$를 지나므로

$-2=2t^3,\qquad t^3+1=0$

$(t+1)(t^2-t+1)=0$

$\therefore t=-1\ (\because t^2-t+1>0)$

$t^2-t+1=\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$

$t=-1$을 ㉠에 대입하면 접선의 방정식은

$y=-x-2$

따라서 이 직선이 점 $(a,\ 4)$를 지나므로

$4=-a-2\qquad \therefore a=-6$

답 ②

14 $f(x)=x^2-6x+5$라 하면

$f'(x)=2x-6$

접점의 좌표를 $(t,\ t^2-6t+5)$라 하면 접선의 기울기는 $f'(t)=2t-6$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^2-6t+5)=(2t-6)(x-t)$

$\therefore y=(2t-6)x-t^2+5$

이 직선이 점 $(1,\ -1)$을 지나므로

$-1=2t-6-t^2+5,\qquad t^2-2t=0$

$t(t-2)=0\qquad \therefore t=0$ 또는 $t=2$

따라서 두 접선의 기울기의 곱은

$f'(0)f'(2)=-6\cdot(-2)=12$

답 ③

15 (1) $f(t)=g(t)$에서

$-t^3+1=t^2-t,\qquad t^3+t^2-t-1=0$

$(t+1)^2(t-1)=0$

$\therefore t=-1$ 또는 $t=1$ …… ㉠

(2) $f'(x)=-3x^2,\ g'(x)=2x-1$이므로

$f'(t)=g'(t)$에서

$-3t^2=2t-1,\qquad 3t^2+2t-1=0$

$(t+1)(3t-1)=0$

$\therefore t=-1$ 또는 $t=\frac{1}{3}$ …… ㉡

(3) ㉠, ㉡에서 $t=-1$

$f(-1)=g(-1)=2$

따라서 점 $(-1,\ 2)$에서 두 곡선은 공통인 접선을 갖고 접선의 기울기는 $f'(-1)=g'(-1)=-3$이므로 공통인 접선의 방정식은

$y-2=-3\{x-(-1)\}$

$\therefore y=-3x-1$

답 (1) $-1,\ 1$ (2) $-1,\ \frac{1}{3}$ (3) $y=-3x-1$

16 $f(x)=2x^3+kx,\ g(x)=3x^2+2x-1$이라 하면

$f'(x)=6x^2+k,\ g'(x)=6x+2$

두 곡선이 $x=t$인 점에서 공통인 접선을 가진다고 하면

$f(t)=g(t)$에서 $\quad 2t^3+kt=3t^2+2t-1$ …… ㉠

$f'(t)=g'(t)$에서 $\quad 6t^2+k=6t+2$

$\therefore k=-6t^2+6t+2$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하여 정리하면

$4t^3-3t^2-1=0,\qquad (t-1)(4t^2+t+1)=0$

$\therefore t=1\ (\because 4t^2+t+1>0)$

$4t^2+t+1=\left(2t+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{15}{16}>0$

$t=1$을 ㉡에 대입하면

$k=-6+6+2=2$

답 ②

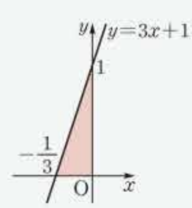
17 $f(x)=x^3+3$이라 하면

$f'(x)=3x^2$

점 $(1,\ 4)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=3$이므로 접선의 방정식은

$y-4=3(x-1)\qquad \therefore y=3x+1$

따라서 접선의 x절편이 $-\frac{1}{3}$, y절편이 1이므로 구하는 도형의 넓이는



$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot 1=\frac{1}{6}$$

답 ③

18 $f(x)=x^2+4x-1$이라 하면

$f'(x)=2x+4$

접점의 좌표를 $(t,\ t^2+4t-1)$이라 하면 접선의 기울기는 $f'(t)=2t+4$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^2+4t-1)=(2t+4)(x-t)$

$\therefore y=(2t+4)x-t^2-1$ …… ㉠

직선 ㉠이 점 $(-2,\ -6)$을 지나므로

$-6=-2(2t+4)-t^2-1$

$t^2+4t+3=0,\qquad (t+3)(t+1)=0$

$\therefore t=-3$ 또는 $t=-1$

$t=-3$을 ㉠에 대입하면 접선의 방정식은

$y=-2x-10$

$t=-1$을 ㉠에 대입하면 접선의 방정식은

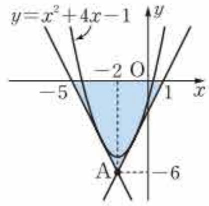
$y=2x-2$

따라서 오른쪽 그림과 같이 두 접선이 x축과 만나는 점의 좌표는

$(-5,\ 0),\ (1,\ 0)$

이므로 구하는 삼각형의 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot\{1-(-5)\}\cdot 6=18$



답 18

08 평균값 정리

Lecture 17 평균값 정리 53쪽

1-1 (1) 함수 $f(x)=x^2-4x+2$는 닫힌구간 $[0,\ 4]$에서 연속이고 열린구간 $(0,\ 4)$에서 미분가능하며 $f(0)=f(4)=2$이므로 롤의 정리에 의하여 $f'(c)=0$인 c가 열린구간 $(0,\ 4)$에 적어도 하나 존재한다.

이때 $f'(x)=2x-4$이므로

$2c-4=0 \qquad \therefore c=2$

(2) 함수 $f(x)=-x^3+x$는 닫힌구간 $[-1,\ 0]$에서 연속이고 열린구간 $(-1,\ 0)$에서 미분가능하며 $f(-1)=f(0)=0$이므로 롤의 정리에 의하여 $f'(c)=0$인 c가 열린구간 $(-1,\ 0)$에 적어도 하나 존재한다.

이때 $f'(x)=-3x^2+1$이므로

$-3c^2+1=0, \qquad c^2=\frac{1}{3}$

$\therefore c=-\frac{\sqrt{3}}{3}\ (\because -1<c<0)$

답 (1) 2 (2) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

1-2 (1) 함수 $f(x)=-x^2+5x$는 닫힌구간 $[-1,\ 6]$에서 연속이고 열린구간 $(-1,\ 6)$에서 미분가능하며 $f(-1)=f(6)=-6$이므로 롤의 정리에 의하여 $f'(c)=0$인 c가 열린구간 $(-1,\ 6)$에 적어도 하나 존재한다.

이때 $f'(x)=-2x+5$이므로

$-2c+5=0 \qquad \therefore c=\frac{5}{2}$

(2) 함수 $f(x)=x^3-6x^2+9x-1$은 닫힌구간 $[1,\ 4]$에서 연속이고 열린구간 $(1,\ 4)$에서 미분가능하며 $f(1)=f(4)=3$이므로 롤의 정리에 의하여 $f'(c)=0$인 c가 열린구간 $(1,\ 4)$에 적어도 하나 존재한다.

이때 $f'(x)=3x^2-12x+9$이므로

$3c^2-12c+9=0, \qquad (c-1)(c-3)=0$

$\therefore c=3\ (\because 1<c<4)$

답 (1) $\frac{5}{2}$ (2) 3

2-1 (1) 함수 $f(x)=-x^2+2x-2$는 닫힌구간 $[1,\ 5]$에서 연속이고 열린구간 $(1,\ 5)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$\frac{f(5)-f(1)}{5-1}=f'(c)$

인 c가 열린구간 $(1,\ 5)$에 적어도 하나 존재한다.

이때 $f'(x)=-2x+2$이므로

$\frac{-17-(-1)}{5-1}=-2c+2 \qquad \therefore c=3$

Q BOX: $f(5)=-25+10-2$
$=-17,$
$f(1)=-1+2-2$
$=-1$

(2) 함수 $f(x)=x^3+3$은 닫힌구간 $[-3,\ 0]$에서 연속이고 열린구간 $(-3,\ 0)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$\frac{f(0)-f(-3)}{0-(-3)}=f'(c)$

인 c가 열린구간 $(-3,\ 0)$에 적어도 하나 존재한다.

이때 $f'(x)=3x^2$이므로

$\frac{3-(-24)}{0-(-3)}=3c^2, \qquad c^2=3$

$\therefore c=-\sqrt{3}\ (\because -3<c<0)$

답 (1) 3 (2) $-\sqrt{3}$

2-2 (1) 함수 $f(x)=x^2+6x+1$은 닫힌구간 $[-1,\ 2]$에서 연속이고 열린구간 $(-1,\ 2)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$\frac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)}=f'(c)$

인 c가 열린구간 $(-1,\ 2)$에 적어도 하나 존재한다.

이때 $f'(x)=2x+6$이므로

$\frac{17-(-4)}{2-(-1)}=2c+6 \qquad \therefore c=\frac{1}{2}$

(2) 함수 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+x$는 닫힌구간 $[-3,\ 3]$에서 연속이고 열린구간 $(-3,\ 3)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$\frac{f(3)-f(-3)}{3-(-3)}=f'(c)$

인 c가 열린구간 $(-3,\ 3)$에 적어도 하나 존재한다.

이때 $f'(x)=x^2-2x+1$이므로

$\frac{3-(-21)}{3-(-3)}=c^2-2c+1$

$c^2-2c-3=0, \qquad (c+1)(c-3)=0$

$\therefore c=-1\ (\because -3<c<3)$

답 (1) $\frac{1}{2}$ (2) -1

기본+표준 유형 Q+Q 54쪽

01 함수 $f(x)=x^3-6x+3$은 닫힌구간 $[-\sqrt{6},\ \sqrt{6}]$에서 연속이고 열린구간 $(-\sqrt{6},\ \sqrt{6})$에서 미분가능하며 $f(-\sqrt{6})=f(\sqrt{6})=3$이므로 롤의 정리에 의하여 $f'(c)=0$인 c가 열린구간 $(-\sqrt{6},\ \sqrt{6})$에 적어도 하나 존재한다.

$f(-\sqrt{6})$
$=-6\sqrt{6}+6\sqrt{6}+3$
$=3,$
$f(\sqrt{6})$
$=6\sqrt{6}-6\sqrt{6}+3$
$=3$

이때 $f'(x)=3x^2-6$이므로

$3c^2-6=0$, $\quad c^2=2$

$\therefore c=-\sqrt{2}$ 또는 $c=\sqrt{2}$

따라서 모든 상수 c의 값의 합은

$-\sqrt{2}+\sqrt{2}=0$ 답 ③

02 닫힌구간 $[1, 4]$에서 롤의 정리를 만족시키는 상수가 $\frac{5}{2}$이므로 $\quad f'\left(\frac{5}{2}\right)=0$

이때 $f'(x)=2x+k$이므로

$5+k=0 \quad \therefore k=-5$ 답 ①

다른 풀이 함수 $f(x)=x^2+kx$는 닫힌구간 $[1, 4]$에서 연속이고 열린구간 $(1, 4)$에서 미분가능하다.

이때 롤의 정리를 만족시키려면 $f(1)=f(4)$이어야 하므로

$1+k=16+4k \quad \therefore k=-5$

03 함수 $f(x)=-x^3+7x-1$은 닫힌구간 $[-3, 4]$에서 연속이고 열린구간 $(-3, 4)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$$\frac{f(4)-f(-3)}{4-(-3)}=f'(c)$$

인 c가 열린구간 $(-3, 4)$에 적어도 하나 존재한다.

이때 $f'(x)=-3x^2+7$이므로

$\frac{-37-5}{4-(-3)}=-3c^2+7$, $\quad c^2=\frac{13}{3}$

$\therefore c=-\frac{\sqrt{39}}{3}$ 또는 $c=\frac{\sqrt{39}}{3}$

따라서 평균값 정리를 만족시키는 상수 c는 $-\frac{\sqrt{39}}{3}$, $\frac{\sqrt{39}}{3}$의 2개이다. 답 2

$\sqrt{36}<\sqrt{39}<\sqrt{49}$이므로 $6<\sqrt{39}<7$

$\therefore 2<\frac{\sqrt{39}}{3}<\frac{7}{3}$,

$-\frac{7}{3}<-\frac{\sqrt{39}}{3}<-2$

따라서 $-\frac{\sqrt{39}}{3}$, $\frac{\sqrt{39}}{3}$는 모두 열린구간 $(-3, 4)$에 속한다.

04 닫힌구간 $[1, k]$에서 평균값 정리를 만족시키는 상수가 4이므로

$$\frac{f(k)-f(1)}{k-1}=f'(4)$$

이때 $f'(x)=2x-1$이므로

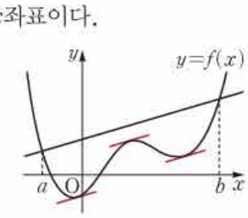
$\frac{(k^2-k+5)-5}{k-1}=8-1$, $\quad k^2-k=7k-7$

$k^2-8k+7=0$, $\quad (k-1)(k-7)=0$

$\therefore k=7$ ($\because k>4$) 답 ③

05 닫힌구간 $[a, b]$에서 평균값 정리를 만족시키는 상수 c는 두 점 $(a, f(a))$, $(b, f(b))$를 지나는 직선과 평행한 접선을 갖는 점의 x좌표이다.

오른쪽 그림과 같이 두 점 $(a, f(a))$, $(b, f(b))$를 지나는 직선과 평행한 접선을 3개 그을 수 있으므로 평균값 정리를 만족시키는 상수 c의 개수는 3이다. 답 3



함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 열린구간 (a, b)에서 미분가능할 때, 평균값 정리는 곡선 $y=f(x)$ 위의 두 점 $(a, f(a))$, $(b, f(b))$를 지나는 직선과 평행한 접선을 갖는 점이 열린구간 (a, b)에 적어도 하나 존재함을 의미한다.

중단원 마무리

55쪽

01 **전략** 곡선 $y=f(x)$ 위의 $x=t$인 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)$임을 이용한다.

풀이 $f(x)=-\frac{1}{3}x^3+ax^2+bx+1$이라 하면

$f'(x)=-x^2+2ax+b$

$f'(1)=-5$에서 $\quad -1+2a+b=-5$

$\therefore 2a+b=-4$ ...... ㉠

$f'(-4)=20$에서 $\quad -16-8a+b=20$

$\therefore 8a-b=-36$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-4$, $b=4$

$\therefore b-a=8$ 답 8

02 **전략** 서로 수직인 두 직선의 기울기의 곱은 -1임을 이용한다.

풀이 $f'(x)=2x^2+a$이므로 곡선 $y=f(x)$ 위의 두 점 $(0, f(0))$, $(1, f(1))$에서의 접선의 기울기는 각각

$f'(0)=a$, $f'(1)=2+a$

두 접선이 서로 수직이므로

$a(2+a)=-1$, $\quad a^2+2a+1=0$

$(a+1)^2=0 \quad \therefore a=-1$ 답 ②

03 **전략** 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(2, g(2))$에서의 접선의 기울기는 $g'(2)$임을 이용한다.

풀이 함수 $g(x)$의 도함수가 $f(x)$이므로

$g'(x)=f(x)$

곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(2, g(2))$에서의 접선의 기울기는

$g'(2)=f(2)=(-1)^2=1$

이때 접선의 y절편이 -5이므로 접선의 방정식은

$y=x-5$

따라서 이 접선의 x절편은 5이다. 답 ⑤

04 **전략** 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, f(1))$에서의 접선의 기울기가 2임을 이용하여 a의 값을 구한 후 접점의 좌표를 구한다.

풀이 $f'(x)=3x^2+2ax+9$

점 $(1, f(1))$에서의 접선의 기울기가 2이므로

$f'(1)=2$, $\quad 3+2a+9=2$

$\therefore a=-5$

즉 $f(x)=x^3-5x^2+9x+3$이므로

$f(1)=1-5+9+3=8$

점 $(1, 8)$에서의 접선의 방정식은

$y-8=2(x-1)$

$\therefore y=2x+6$

따라서 $b=6$이므로

$a+b=1$ 답 ①

05 전략 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선 $y=g(x)$가 이 곡선과 다시 만나는 점의 x좌표는 방정식 $f(x)=g(x)$의 $x\neq a$인 실근임을 이용한다.

풀이 $f(x)=x^3+x-5$라 하면

$f'(x)=3x^2+1$

점 $(-1, -7)$에서의 접선의 기울기는

$f'(-1)=3+1=4$

이므로 접선의 방정식은

$y-(-7)=4\{x-(-1)\}$ $\therefore y=4x-3$

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=4x-3$이 만나는 점의 x좌표는 $x^3+x-5=4x-3$에서

$x^3-3x-2=0$, $(x+1)^2(x-2)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=2$

따라서 다시 만나는 점의 좌표가 $(2, 5)$이므로

$a=2$, $b=5$ $\therefore ab=10$ 답 ④

06 전략 함수의 극한에 대한 성질과 미분계수의 정의를 이용하여 접점의 좌표와 접선의 기울기를 구한다.

풀이 $\lim_{x\to 3}\frac{f(x)}{x-3}=5$에서 $x\to 3$일 때 극한값이 존재하고 (분모) → 0이므로 (분자) → 0이다.

즉 $\lim_{x\to 3}f(x)=0$이므로 $f(3)=0$

$\therefore \lim_{x\to 3}\frac{f(x)}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=f'(3)$

$\therefore f'(3)=5$ ··· ❶

즉 점 $(3, 0)$에서의 접선의 기울기는 5이므로 접선의 방정식은

$y=5(x-3)$ $\therefore y=5x-15$ ··· ❷

따라서 $m=5$, $n=-15$이므로

$m-n=20$ ··· ❸

답 20

단계	채점 기준	비율
❶	$f(3)$, $f'(3)$의 값을 구할 수 있다.	60 %
❷	접선의 방정식을 구할 수 있다.	30 %
❸	$m-n$의 값을 구할 수 있다.	10 %

07 전략 기울기가 k인 직선과 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{k}$임을 이용한다.

풀이 $f(x)=x(x+1)(x-2)$라 하면

$f'(x)=(x+1)(x-2)+x(x-2)+x(x+1)$

$=3x^2-2x-2$

점 $(-1, 0)$에서의 접선의 기울기는

$f'(-1)=3+2-2=3$

이므로 이 점에서의 접선과 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{3}$이다.

즉 점 $(-1, 0)$을 지나고 기울기가 $-\frac{1}{3}$인 직선의 방정식은

$y=-\frac{1}{3}\{x-(-1)\}$ $\therefore x+3y+1=0$

Q BOX

$f(3)=27-81+45$
$=-9$

$f(2)=8+2-5=5$

방정식 $f(x, y)=0$이 나타내는 도형을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 도형의 방정식
➡ x 대신 $x-a$, y 대신 $y-b$를 대입한다.
➡ $f(x-a, y-b)=0$

$f(-2)=-8+12+4$
$=8$

$y=f(x)g(x)h(x)$
➡ y'
$=f'(x)g(x)h(x)$
$+f(x)g'(x)h(x)$
$+f(x)g(x)h'(x)$

$f(2)=8-12+4=0$

따라서 $a=1$, $b=3$이므로

$a+b=4$ 답 4

08 전략 곡선 $y=f(x)$ 위의 점에서의 접선의 기울기의 최솟값은 $f'(x)$의 최솟값과 같음을 이용한다.

풀이 $f(x)=x^3-9x^2+15x$라 하면

$f'(x)=3x^2-18x+15=3(x-3)^2-12$

이므로 이차함수 $f'(x)$는 $x=3$에서 최솟값 -12를 갖는다. ··· ❶

따라서 곡선 $y=f(x)$와 직선 l의 접점의 좌표는 $(3, -9)$이고 접선의 기울기는 -12이므로 직선 l의 방정식은

$y-(-9)=-12(x-3)$

$\therefore y=-12x+27$ ··· ❷

직선 l이 점 $(a, 3)$을 지나므로

$3=-12a+27$ $\therefore a=2$ ··· ❸

답 2

단계	채점 기준	비율
❶	접선의 기울기의 최솟값과 이때의 x의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷	직선 l의 방정식을 구할 수 있다.	40 %
❸	a의 값을 구할 수 있다.	20 %

09 전략 주어진 곡선에 접하고 기울기가 6인 직선의 방정식을 구하여 평행이동한 직선의 방정식과 비교한다.

풀이 직선 $y=6x+2$를 x축의 방향으로 m만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$y=6(x-m)+2$

$\therefore y=6x-6m+2$ ······ ㉠

$f(x)=x^3-6x+4$라 하면

$f'(x)=3x^2-6$

접점의 좌표를 (t, t^3-6t+4)라 하면 접선의 기울기가 6이므로

$f'(t)=6$, $3t^2-6=6$, $t^2=4$

$\therefore t=-2$ 또는 $t=2$

(i) $t=-2$일 때,

접점의 좌표가 $(-2, 8)$이므로 접선의 방정식은

$y-8=6\{x-(-2)\}$

$\therefore y=6x+20$

이 직선이 직선 ㉠과 일치해야 하므로

$-6m+2=20$ $\therefore m=-3$

(ii) $t=2$일 때,

접점의 좌표가 $(2, 0)$이므로 접선의 방정식은

$y=6(x-2)$

$\therefore y=6x-12$

이 직선이 직선 ㉠과 일치해야 하므로

$-6m+2=-12$ $\therefore m=\frac{7}{3}$

(i), (ii)에서

$m=-3$ ($\because$ m은 정수) 답 -3

10 전략 평행한 두 직선 사이의 거리는 한 직선 위의 점과 다른 직선 사이의 거리와 같음을 이용한다.

풀이 $f(x)=x^3-5x+1$이라 하면

$$f'(x)=3x^2-5$$

접점의 좌표를 $(t,\ t^3-5t+1)$이라 하면 접선의 기울기가 -2이므로

$$f'(t)=-2,\qquad 3t^2-5=-2,\qquad t^2=1$$

$$\therefore t=-1 \text{ 또는 } t=1$$

즉 접점의 좌표가 $(-1,\ 5)$, $(1,\ -3)$이므로 접선의 방정식은

$$y-5=-2\{x-(-1)\},\ y-(-3)=-2(x-1)$$

$$\therefore 2x+y-3=0,\ 2x+y+1=0$$

따라서 구하는 두 직선 사이의 거리는 직선 $2x+y-3=0$ 위의 점 $(0,\ 3)$과 직선 $2x+y+1=0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|0+3+1|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{4\sqrt{5}}{5}$$

답 ②

$f(-1)=-1+5+1=5$

$f(1)=1-5+1=-3$

직선 $2x+y-3=0$ 위의 점 중에서 계산이 간단한 점을 택한다.

쌤 한마디

평행한 두 직선 사이의 거리

① 평행한 두 직선 l, l' 사이의 거리는 직선 l 위의 임의의 점과 직선 l' 사이의 거리와 같다.

② 평행한 두 직선 $ax+by+c=0$, $ax+by+c'=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

11 전략 접점의 좌표를 $(t,\ f(t))$라 하고 접선의 방정식을 세워 주어진 직선의 방정식과 비교한다.

풀이 $f(x)=x^3+1$이라 하면

$$f'(x)=3x^2$$

접점의 좌표를 $(t,\ t^3+1)$이라 하면 접선의 기울기는 $f'(t)=3t^2$이므로 접선의 방정식은

$$y-(t^3+1)=3t^2(x-t)$$

$$\therefore y=3t^2x-2t^3+1$$

이 직선이 직선 $y=kx-1$과 일치해야 하므로

$$3t^2=k \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$$-2t^3+1=-1 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉡에서 $t^3-1=0,\qquad (t-1)(t^2+t+1)=0$

$$\therefore t=1\ (\because t^2+t+1>0)$$

$t=1$을 ㉠에 대입하면

$$k=3$$

답 ①

$$t^2+t+1=\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$$

12 전략 △OAP의 넓이가 최대가 되는 것은 점 P에서의 접선이 직선 $y=x$와 평행할 때임을 이용한다.

풀이 △OAP의 넓이가 최대가 되는 점 P에서의 접선은 직선 $y=x$와 평행한 직선, 즉 기울기가 1인 직선이다.

따라서 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\left(\frac{1}{2},\ f\left(\frac{1}{2}\right)\right)$에서의 접선의 기울기가 1이다.

이때 $f'(x)=a(x-2)^2+2ax(x-2)$이므로

$$f'\left(\frac{1}{2}\right)=1,\qquad \frac{9}{4}a-\frac{3}{2}a=1$$

$$\frac{3}{4}a=1 \qquad \therefore a=\frac{4}{3}$$

답 ②

13 전략 접점의 좌표를 $(t,\ f(t))$라 하고 세운 접선의 방정식에 점 $(2,\ 0)$의 좌표를 대입하여 t에 대한 삼차방정식을 세운다.

풀이 $f(x)=x^3-2x^2+x$라 하면

$$f'(x)=3x^2-4x+1$$

접점의 좌표를 $(t,\ t^3-2t^2+t)$라 하면 접선의 기울기는 $f'(t)=3t^2-4t+1$이므로 접선의 방정식은

$$y-(t^3-2t^2+t)=(3t^2-4t+1)(x-t)$$

$$\therefore y=(3t^2-4t+1)x-2t^3+2t^2$$

이 직선이 점 $(2,\ 0)$을 지나므로

$$0=2(3t^2-4t+1)-2t^3+2t^2$$

$$\therefore t^3-4t^2+4t-1=0$$

위의 삼차방정식이 서로 다른 세 실근을 갖고, 이 세 실근이 세 접점의 x좌표이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 구하는 x좌표의 합은

$$-\frac{-4}{1}=4$$

답 ④

삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0$의 세 근을 α, β, γ라 하면

$$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a},$$

$$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a},$$

$$\alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}$$

쌤 한마디

$t^3-4t^2+4t-1=0$에서

$$(t-1)(t^2-3t+1)=0$$

이차방정식 $t^2-3t+1=0$의 판별식을 D라 하면

$$D=(-3)^2-4\cdot1\cdot1=5>0$$

이므로 방정식 $t^2-3t+1=0$은 서로 다른 두 실근을 갖고, $t=1$을 근으로 갖지 않는다.

따라서 삼차방정식 $t^3-4t^2+4t-1=0$은 서로 다른 세 실근을 갖는다.

14 전략 접점의 좌표를 $(t,\ f(t))$라 하고 접선의 방정식을 세운 후 접선이 지나는 점의 좌표와 접선의 기울기를 이용하여 a의 값을 구한다.

$f(0)=0$이므로 점 $(0,\ 16)$은 주어진 곡선 위의 점이 아니다.

풀이 $f'(x)=3x^2-a$

접점의 좌표를 $(t,\ t^3-at)$라 하면 접선의 기울기는 $f'(t)=3t^2-a$이므로 접선의 방정식은

$$y-(t^3-at)=(3t^2-a)(x-t)$$

$$\therefore y=(3t^2-a)x-2t^3$$

이 직선이 점 $(0,\ 16)$을 지나므로

$$16=-2t^3,\qquad t^3+8=0$$

$$(t+2)(t^2-2t+4)=0$$

$$\therefore t=-2\ (\because t^2-2t+4>0)$$

즉 $x=-2$인 점에서의 접선의 기울기가 8이므로

$$f'(-2)=8,\qquad 12-a=8$$

$$\therefore a=4$$

따라서 $f(x)=x^3-4x$이므로

$$f(a)=f(4)=64-16=48$$

답 48

$$t^2-2t+4=(t-1)^2+3>0$$

15 전략 접점의 좌표를 구한 후 접점과 원점을 좌표평면 위에 나타내어 삼각형의 넓이를 구한다.

풀이 $f(x)=2x^4+6$이라 하면

$f'(x)=8x^3$

접점의 좌표를 $(t,\ 2t^4+6)$이라 하면 접선의 기울기는 $f'(t)=8t^3$이므로 접선의 방정식은

$y-(2t^4+6)=8t^3(x-t)$

$\therefore\ y=8t^3x-6t^4+6$ ⋯ ❶

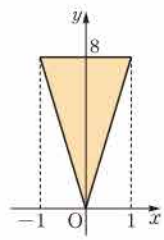
이 직선이 원점을 지나므로

$0=-6t^4+6,\qquad t^4-1=0$

$(t^2+1)(t+1)(t-1)=0$

$\therefore\ t=-1$ 또는 $t=1$ ($\because\ t^2+1>0$) ⋯ ❷

따라서 접점의 좌표는 $(-1,\ 8)$, $(1,\ 8)$이므로 오른쪽 그림에서 구하는 삼각형의 넓이는



$\frac{1}{2}\cdot\{1-(-1)\}\cdot 8=8$ ⋯ ❸

답 8

단계	채점 기준	비율
❶	접선의 방정식을 접점의 x좌표를 이용하여 나타낼 수 있다.	40 %
❷	접점의 x좌표를 구할 수 있다.	30 %
❸	삼각형의 넓이를 구할 수 있다.	30 %

16 전략 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 $x=a$인 점에서 공통인 접선을 가지면 $f(a)=g(a)$, $f'(a)=g'(a)$임을 이용한다.

풀이 $f(x)=x^2+ax+b$, $g(x)=-x^2+5$라 하면

$f'(x)=2x+a$, $g'(x)=-2x$

두 곡선이 $x=-3$인 점에서 공통인 접선을 가지므로

$f(-3)=g(-3)$에서

$9-3a+b=-9+5$

$\therefore\ 3a-b=13$ ⋯⋯ ㉠

$f'(-3)=g'(-3)$에서

$-6+a=6\qquad\therefore\ a=12$

$a=12$를 ㉠에 대입하면

$36-b=13\qquad\therefore\ b=23$

$\therefore\ b-a=11$

답 ⑤

17 전략 접선과 수직인 직선의 방정식을 구한 후 x절편과 y절편을 이용하여 도형의 넓이를 구한다.

풀이 $f(x)=\frac{1}{4}x^4+6x+5$라 하면

$f'(x)=x^3+6$

점 $(-2,\ -3)$에서의 접선의 기울기는

$f'(-2)=-8+6=-2$

이므로 이 점에서의 접선과 수직인 직선의 기울기는 $\frac{1}{2}$이다.

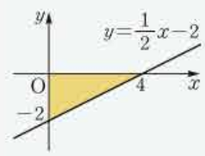
따라서 점 $(-2,\ -3)$을 지나고 기울기가 $\frac{1}{2}$인 직선의 방정식은

$y-(-3)=\frac{1}{2}\{x-(-2)\}$

$\therefore\ y=\frac{1}{2}x-2$

이 직선의 x절편이 4, y절편이 -2이므로 구하는 도형의 넓이는

Q BOX



$\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 2=4$

답 4

18 전략 $f'(c)=0$을 만족시키는 c의 값을 a, b로 나타낸다.

풀이 함수 $f(x)=(a-x)(b-x)$는 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 열린구간 $(a,\ b)$에서 미분가능하며 $f(a)=f(b)=0$이므로 롤의 정리에 의하여 $f'(c)=0$인 c가 열린구간 $(a,\ b)$에 적어도 하나 존재한다.

이때

$f'(x)=-(b-x)+(a-x)\cdot(-1)=2x-a-b$

이므로 $\quad 2c-a-b=0$

$\therefore\ c=\frac{a+b}{2}$

답 ⑤

19 전략 $\frac{g(0)-g(-2)}{0-(-2)}=g'(c)$를 만족시키는 c의 값을 구한다.

풀이 함수 $g(x)=f'(x)=-3x^2+2x-2$는 닫힌구간 $[-2,\ 0]$에서 연속이고 열린구간 $(-2,\ 0)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$\frac{g(0)-g(-2)}{0-(-2)}=g'(c)$

인 c가 열린구간 $(-2,\ 0)$에 적어도 하나 존재한다.

이때 $g'(x)=-6x+2$이므로

$\frac{-2-(-18)}{0-(-2)}=-6c+2$

$\therefore\ c=-1$

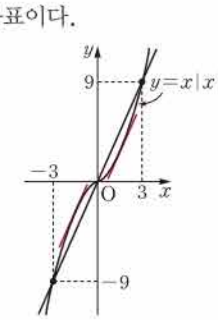
답 ③

20 전략 평균값 정리의 기하적 의미를 이용한다.

풀이 닫힌구간 $[-3,\ 3]$에서 평균값 정리를 만족시키는 상수 c는 두 점 $(-3,\ -9)$, $(3,\ 9)$를 지나는 직선과 평행한 접선을 갖는 점의 x좌표이다.

$y=x|x|$
$=\begin{cases} x^2 & (x\ge 0) \\ -x^2 & (x<0) \end{cases}$

이때 함수 $y=x|x|$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 두 점 $(-3,\ -9)$, $(3,\ 9)$를 지나는 직선과 평행한 접선을 2개 그을 수 있다.



따라서 평균값 정리를 만족시키는 상수 c의 개수는 2이다.

답 ②

05 도함수의 활용 (2)

09 함수의 증가와 감소

Lecture 18 함수의 증가와 감소 58쪽

1-1 답 <, <, 증가

1-2 (1) $1 \le x_1 < x_2$인 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여

$$\begin{aligned} f(x_1)-f(x_2) &= (x_1^2-2x_1)-(x_2^2-2x_2) \\ &= (x_1^2-x_2^2)-2(x_1-x_2) \\ &= (x_1+x_2)(x_1-x_2)-2(x_1-x_2) \\ &= (x_1+x_2-2)(x_1-x_2)<0 \end{aligned}$$

$\therefore f(x_1)<f(x_2)$

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $[1, \infty)$에서 증가한다.

(2) $x_1 < x_2$인 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여

$$\begin{aligned} & f(x_1)-f(x_2) \\ &= -x_1^3-(-x_2^3) \\ &= -(x_1^3-x_2^3) \\ &= -(x_1-x_2)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)>0 \end{aligned}$$

$\therefore f(x_1)>f(x_2)$

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty, \infty)$에서 감소한다.

답 (1) 증가 (2) 감소

2-1 (1) $f'(x)=-2x+6$

$f'(x)=0$에서 $x=3$

x	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−
$f(x)$	↗	10	↘

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty, 3]$에서 증가하고, 구간 $[3, \infty)$에서 감소한다.

(2) $f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	2	↘	-2	↗

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty, -1]$, $[1, \infty)$에서 증가하고, 구간 $[-1, 1]$에서 감소한다.

답 풀이 참조

2-2 $y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표가 0, 4이므로 $f'(x)=0$에서

$x=0$ 또는 $x=4$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	−	0	+	0	−
$f(x)$	↘		↗		↘

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $[0, 4]$에서 증가하고, 구간 $(-\infty, 0]$, $[4, \infty)$에서 감소한다.

답 풀이 참조

Q BOX

$x_1-x_2<0$,
$x_1^2+x_1x_2+x_2^2$
$=\left(x_1+\dfrac{x_2}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}x_2^2$
>0

$x_1 \ge 1$, $x_2>1$이므로
$x_1+x_2>2$
$\therefore x_1+x_2-2>0$

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 열린구간 (a, b)에서 미분가능할 때
① 열린구간 (a, b)에서 $f'(x)>0$이면 $f(x)$는 닫힌구간 $[a, b]$에서 증가한다.
② 열린구간 (a, b)에서 $f'(x)<0$이면 $f(x)$는 닫힌구간 $[a, b]$에서 감소한다.

도함수의 부호를 조사하여 함수의 증가와 감소를 표로 나타낸 것을 증감표라 하며 증감표에서 ↗는 함수의 증가를, ↘는 함수의 감소를 나타낸다.

57~59쪽

기본+표준 유형 Q+Q 59쪽

01 $f'(x)=-3x^2+9=-3(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$

$f'(x)=0$에서 $x=-\sqrt{3}$ 또는 $x=\sqrt{3}$

x	$\cdots$	$-\sqrt{3}$	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	−	0	+	0	−
$f(x)$	↘	$-6\sqrt{3}-5$	↗	$6\sqrt{3}-5$	↘

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$에서 증가하므로

$\alpha=-\sqrt{3}$, $\beta=\sqrt{3}$

$\therefore \alpha\beta=-3$

답 ②

02 $f'(x)=3x^2+2ax+b$

주어진 조건에서 함수 $f(x)$는 $x=-1$, $x=5$의 좌우에서 증가와 감소가 바뀌므로 $x=-1$, $x=5$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀐다.

즉 이차방정식 $f'(x)=0$의 두 근이 -1, 5이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-1+5=-\dfrac{2a}{3}$, $-1\cdot5=\dfrac{b}{3}$

$\therefore a=-6$, $b=-15$

$\therefore a-b=9$

답 9

03 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\ge0$이어야 한다.

$f'(x)=3x^2-4x+a$이므로 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=(-2)^2-3a\le0$, $4-3a\le0$

$\therefore a\ge\dfrac{4}{3}$

답 $a\ge\dfrac{4}{3}$

Q 쌤 한마디

이차부등식이 항상 성립할 조건

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 D라 할 때

① 모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $ax^2+bx+c\ge0$이 성립하려면
$a>0$, $D\le0$

② 모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $ax^2+bx+c\le0$이 성립하려면
$a<0$, $D\le0$

04 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여 $x_1<x_2$이면 $f(x_1)>f(x_2)$를 만족시키려면 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 감소해야 한다.

즉 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\le0$이어야 한다.

$f'(x)=-3x^2+2kx-2k$이므로 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=k^2-(-3)\cdot(-2k)\le 0$$

$k^2-6k\le 0,\quad k(k-6)\le 0$

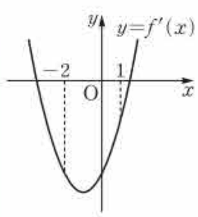
$\therefore 0\le k\le 6$

따라서 정수 k는 0, 1, 2, ⋯, 6의 7개이다. 답 7

쌤 한마디

다음 표현은 삼차함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가하거나 감소함을 나타낸다.
① 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여 $x_1<x_2$이면 $f(x_1)<f(x_2)$ 또는 $f(x_1)>f(x_2)$이다.
② 함수 $f(x)$가 일대일대응 또는 일대일함수이다.
③ 함수 $f(x)$의 역함수가 존재한다.

05 함수 $f(x)$가 $-2<x<1$에서 감소하려면 $-2<x<1$에서 $f'(x)\le 0$이어야 한다.
$f'(x)=3x^2+6x+a$이고, 오른쪽 그림에서



$f'(-2)\le 0$이어야 하므로

$12-12+a\le 0$

$\therefore a\le 0$ ⋯⋯ ㉠

$f'(1)\le 0$이어야 하므로

$3+6+a\le 0$

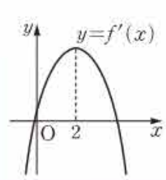
$\therefore a\le -9$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$a\le -9$ 답 ①

참고 직선 $x=1$이 직선 $x=-2$보다 대칭축 $x=-1$에서 멀리 떨어져 있음을 이용하면 $f'(1)\le 0$이면 $f'(-2)\le 0$도 성립함을 알 수 있다. 즉 $f'(1)\le 0$을 만족시키는 a의 값의 범위만 생각해도 된다.

06 함수 $f(x)$가 구간 (0, 2)에서 증가하려면 이 구간에서 $f'(x)\ge 0$이어야 한다.
$f'(x)=-3x^2+12x+2k-1$이고, 오른쪽 그림에서



$f'(0)\ge 0$이어야 하므로

$2k-1\ge 0$

$\therefore k\ge \frac{1}{2}$ ⋯⋯ ㉠

$f'(2)\ge 0$이어야 하므로

$-12+24+2k-1\ge 0$

$\therefore k\ge -\frac{11}{2}$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$k\ge \frac{1}{2}$

따라서 k의 최솟값은 $\frac{1}{2}$이다. 답 ①

참고 함수 $f'(x)$는 $x=2$에서 최댓값을 가지므로 $f'(0)\ge 0$이면 $f'(2)\ge 0$도 성립함을 알 수 있다. 즉 $f'(0)\ge 0$을 만족시키는 k의 값의 범위만 생각해도 된다.

Q BOX

$y=3x^2+6x+a$
$=3(x+1)^2+a-3$
의 그래프는 아래로 볼록하고 축의 방정식이 $x=-1$인 포물선이다.

$y=-3x^2+12x+2k-1$
$=-3(x-2)^2+2k+11$
의 그래프는 위로 볼록하고 축의 방정식이 $x=2$인 포물선이다.

삼차 이상인 다항함수 $f(x)$의 극대와 극소를 판정할 때에는 함수의 증감표를 이용한다.

10 함수의 극대와 극소

Lecture 19 함수의 극대와 극소 60쪽

1-1 (1) $f(x)$가 $x=2$의 좌우에서 증가하다가 감소하므로 극댓값을 갖는 x의 값은 2이다.
(2) $f(x)$가 $x=-1$, $x=4$의 좌우에서 감소하다가 증가하므로 극솟값을 갖는 x의 값은 -1, 4이다.
(3) 극댓값은 $f(2)=5$
극솟값은 $f(-1)=-1$, $f(4)=1$

답 (1) 2 (2) -1, 4
(3) 극댓값: 5, 극솟값: -1, 1

2-1 답 (1) -3 (2) 0

3-1 $f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$
$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=3$

x	⋯	1	⋯	3	⋯
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	5	↘	1	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극댓값 5, $x=3$에서 극솟값 1을 갖는다. 답 풀이 참조

3-2 $f'(x)=4x^3-4x=4x(x+1)(x-1)$
$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

x	⋯	−1	⋯	0	⋯	1	⋯
$f'(x)$	−	0	+	0	−	0	+
$f(x)$	↘	−2	↗	−1	↘	−2	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값 -1, $x=-1$, $x=1$에서 극솟값 -2를 갖는다.

답 극댓값: -1, 극솟값: -2

기본+표준 유형 Q+Q 61쪽

01 $f'(x)=x^2-9=(x+3)(x-3)$
$f'(x)=0$에서 $x=-3$ 또는 $x=3$

x	⋯	−3	⋯	3	⋯
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	25	↘	−11	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-3$에서 극댓값 25, $x=3$에서 극솟값 -11을 가지므로

$M=25,\ m=-11$

$\therefore M+m=14$ 답 ③

02 $f'(x)=-12x^3+12x^2=-12x^2(x-1)$
$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	-1	↗	0	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극댓값 0을 가지므로

$a=1,\ b=0$

$\therefore a+b=1$ 답 1

Q BOX: $f'(0)=0$이지만 $x=0$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌지 않으므로 $x=0$에서 극값을 갖지 않는다.

03 $f'(x)=3x^2+6x=3x(x+2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=0$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	-4	↘	-8	↗

함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 극댓값 -4, $x=0$에서 극솟값 -8을 가지므로

$\mathrm{A}(-2,\ -4),\ \mathrm{B}(0,\ -8)$

따라서 $\overline{\mathrm{AB}}$의 중점의 좌표는

$\left(\frac{-2+0}{2},\ \frac{-4+(-8)}{2}\right)$ $\therefore (-1,\ -6)$

답 $(-1,\ -6)$

두 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$에 대하여 $\overline{\mathrm{AB}}$의 중점의 좌표는 $\left(\frac{x_1+x_2}{2},\ \frac{y_1+y_2}{2}\right)$

04 함수 $f(x)$가 $x=-2$에서 극솟값 4를 가지므로

$f(-2)=4,\ f'(-2)=0$

$f(-2)=4$에서 $8-8-2a+b=4$

$\therefore 2a-b=-4$ ⋯⋯ ㉠

$f'(x)=-3x^2-4x+a$이므로 $f'(-2)=0$에서

$-12+8+a=0$ $\therefore a=4$

$a=4$를 ㉠에 대입하면

$8-b=-4$ $\therefore b=12$

$\therefore a+b=16$ 답 16

미분가능한 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극값 p를 갖는다.
➡ $f(a)=p,\ f'(a)=0$

05 $f'(x)=6x^2-12x-18=6(x+1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=3$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$k+10$	↘	$k-54$	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값 $k+10$을 가지므로

$k+10=24$ $\therefore k=14$

또 $f(x)$는 $x=3$에서 극솟값 $k-54$를 가지므로

$m=14-54=-40$

$\therefore k+m=-26$ 답 -26

06 $y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표가 $-2,\ 2$이므로 $f'(x)=0$에서

$x=-2$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

$f'(x)=3x^2+2ax+b$이므로 $f'(-2)=0$에서

$12-4a+b=0$

$\therefore 4a-b=12$ ⋯⋯ ㉠

$f'(2)=0$에서 $12+4a+b=0$

$\therefore 4a+b=-12$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=0,\ b=-12$

즉 $f(x)=x^3-12x+c$이므로 $f(2)=-11$에서

함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극솟값 -11을 갖는다.

$8-24+c=-11$ $\therefore c=5$

따라서 $f(x)=x^3-12x+5$이므로 구하는 극댓값은

$f(-2)=-8+24+5=21$ 답 ①

07 ① 구간 $(-5,\ -4)$에서 $f'(x)<0$이므로 $f(x)$는 감소한다.

② 구간 $(1,\ 3)$에서 $f'(x)>0$이므로 $f(x)$는 증가한다.

③ $f'(-1)=0$이지만 $x=-1$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌지 않으므로 $f(x)$는 $x=-1$에서 극값을 갖지 않는다.

④ $f'(3)=0$이고 $x=3$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 $f(x)$는 $x=3$에서 극댓값을 갖는다.

⑤ 구간 $(-5,\ 4)$에서 $f(x)$는 $x=-4,\ x=3$에서 극값을 가지므로 극값을 갖는 x의 값은 2개이다.

$f(x)$는 $x=-4$에서 극소이고 $x=3$에서 극대이다.

답 ④

11 함수의 그래프

Lecture 20 함수의 그래프 Ⓛ 62쪽

1-1 (1) $f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

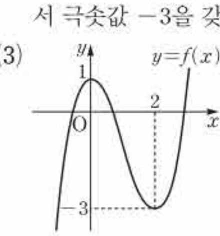
$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

(2)

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	1	↘	-3	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값 1, $x=2$에서 극솟값 -3을 갖는다.

(3)



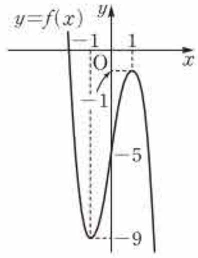
답 풀이 참조

1-2 (1) $f'(x)=-6x^2+6=-6(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	-9	↗	-1	↘

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



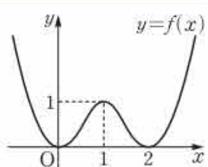
> $f(0)=-5$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 점 $(0,\ -5)$를 지난다.

(2) $f'(x)=4x^3-12x^2+8x=4x(x-1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=0$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	0	↗	1	↘	0	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



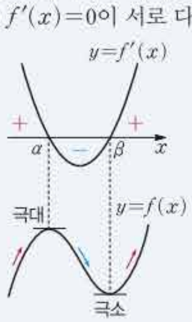
답 풀이 참조

2-1 답 서로 다른 두 실근, $>$, $>$, $a<-\sqrt{3}$ 또는 $a>\sqrt{3}$

쌤 한마디

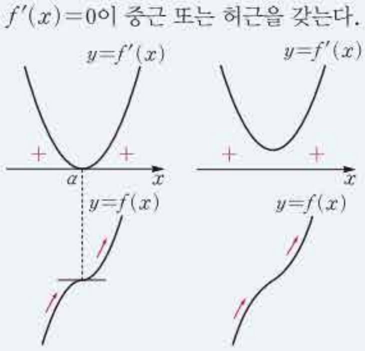
최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$와 도함수 $f'(x)$에 대하여 이차방정식

① $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 갖는다.



극값을 갖는다.

② $f'(x)=0$이 중근 또는 허근을 갖는다.



극값을 갖지 않는다.

2-2 $f'(x)=3x^2-18x+a$

삼차함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 중근 또는 허근을 가져야 한다.

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-9)^2-3a\le 0, \quad 81-3a\le 0$

$\therefore a\ge 27$

답 $a\ge 27$

QBOX

Lecture 21 함수의 최대와 최소

63쪽

1-1 (1) $f'(x)=6x^2+6x-12$

$=6(x+2)(x-1)$

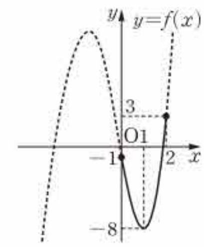
$f'(x)=0$에서

$x=1$ ($\because 0\le x\le 2$)

> 주어진 구간에서 증감표를 만든다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	-1	↘	-8	↗	3

따라서 구간 $[0,\ 2]$에서 함수 $f(x)$는 $x=1$일 때 극솟값 -8을 갖고, $f(0)=-1$, $f(2)=3$이다.



(2) 구간 $[0,\ 2]$에서 함수 $f(x)$는 $x=2$일 때 최댓값 3, $x=1$일 때 최솟값 -8을 갖는다.

> $f(x)$의 극값, $f(0)$, $f(2)$ 중 가장 큰 값이 최댓값, 가장 작은 값이 최솟값이다.

답 (1) 극솟값: -8, $f(0)=-1$, $f(2)=3$
(2) 최댓값: 3, 최솟값: -8

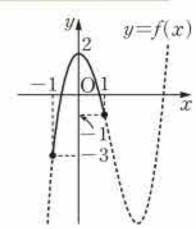
1-2 (1) $f'(x)=3x^2-8x=x(3x-8)$

$f'(x)=0$에서

$x=0$ ($\because -1\le x\le 1$)

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	-3	↗	2	↘	-1

따라서 구간 $[-1,\ 1]$에서 함수 $f(x)$는 $x=0$일 때 최댓값 2, $x=-1$일 때 최솟값 -3을 갖는다.



(2) $f'(x)=4x^3-12x+8$

$=4(x^3-3x+2)$

$=4(x+2)(x-1)^2$

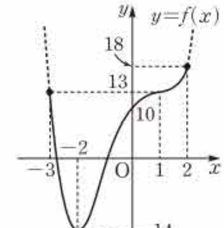
> $$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 0 & -3 & 2 \\ & & 1 & 1 & -2 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & \boxed{0} \end{array}$$
> $\therefore x^3-3x+2$
> $=(x-1)(x^2+x-2)$
> $=(x+2)(x-1)^2$

$f'(x)=0$에서

$x=-2$ 또는 $x=1$

x	-3	$\cdots$	-2	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	
$f(x)$	13	↘	-14	↗	13	↗	18

따라서 구간 $[-3,\ 2]$에서 함수 $f(x)$는 $x=2$일 때 최댓값 18, $x=-2$일 때 최솟값 -14를 갖는다.



답 (1) 최댓값: 2, 최솟값: -3
(2) 최댓값: 18, 최솟값: -14

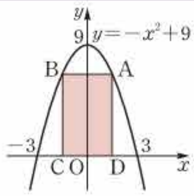
2-1 (1) 곡선 $y=-x^2+9$와 x축의 교점의 x좌표는

$-x^2+9=0$에서

$x^2=9 \quad \therefore x=\pm3$

이때 $a>0$이므로 $\quad 0<a<3$

(2) 오른쪽 그림에서



$A(a,\ -a^2+9)$,

$B(-a,\ -a^2+9)$,

$C(-a,\ 0)$, $D(a,\ 0)$

이므로 직사각형의 넓이를 $S(a)$라 하면

$S(a)=2a(-a^2+9)=-2a^3+18a$

(3) $S'(a)=-6a^2+18=-6(a+\sqrt{3})(a-\sqrt{3})$

$S'(a)=0$에서 $\quad a=\sqrt{3}$ ($\because 0<a<3$)

a	0	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$	3
$S'(a)$		$+$	0	$-$	
$S(a)$		↗	$12\sqrt{3}$	↘	

따라서 $0<a<3$에서 $S(a)$는 $a=\sqrt{3}$일 때 최댓값 $12\sqrt{3}$을 가지므로 직사각형의 넓이의 최댓값은 $12\sqrt{3}$이다.

답 (1) $0<a<3$ (2) $-2a^3+18a$ (3) $12\sqrt{3}$

Q BOX

삼차함수 $f(x)$가 극값을 갖는다.
⟺ 삼차함수 $f(x)$가 극댓값과 극솟값을 모두 갖는다.

점 A는 제1사분면 위의 점이다.

기본+표준 **유형 Q+Q** 64쪽

01 $f'(x)=-4x^3-4x^2+4x+4$

$=-4(x^3+x^2-x-1)$

$=-4(x+1)^2(x-1)$

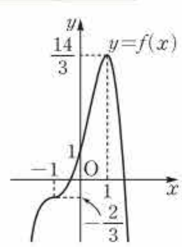
$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ & & 1 & 2 & 1 \\ \hline & 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}$$

$\therefore x^3+x^2-x-1$
$=(x-1)(x^2+2x+1)$
$=(x+1)^2(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-1$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	$-\frac{2}{3}$	↗	$\frac{14}{3}$	↘

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



답 ③

02 $y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표가 0, 3이므로 $f'(x)=0$에서

$x=0$ 또는 $x=3$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗		↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형이 될 수 있는 것은 ④이다.

답 ④

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극소이고, $x=3$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌지 않으므로 $x=3$에서 극값을 갖지 않는다.

03 $f'(x)=3x^2+2ax+2a$

삼차함수 $f(x)$가 극값을 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=a^2-3\cdot2a>0, \quad a(a-6)>0$

$\therefore a<0$ 또는 $a>6$

답 $a<0$ 또는 $a>6$

04 $f'(x)=-3x^2+8ax-3$

삼차함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 중근 또는 허근을 가져야 한다.

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(4a)^2-(-3)\cdot(-3)\le0$

$16a^2-9\le0, \quad (4a+3)(4a-3)\le0$

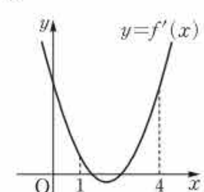
$\therefore -\frac{3}{4}\le a\le\frac{3}{4}$

따라서 a의 최댓값은 $\frac{3}{4}$, 최솟값은 $-\frac{3}{4}$이므로 구하는 곱은 $\quad \frac{3}{4}\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)=-\frac{9}{16}$

답 ②

05 $f'(x)=3x^2-12x+k$

삼차함수 $f(x)$가 구간 $(1,\ 4)$에서 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 구간 $(1,\ 4)$에서 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.



(i) 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-6)^2-3k>0$

$36-3k>0 \quad \therefore k<12$

(ii) $f'(1)>0$에서

$3-12+k>0 \quad \therefore k>9$

$f'(4)>0$에서

$48-48+k>0 \quad \therefore k>0$

(iii) 이차함수 $y=f'(x)$의 그래프의 축의 방정식은 $x=2$이고 $1<2<4$이다.

$3x^2-12x+k$
$=3(x-2)^2+k-12$

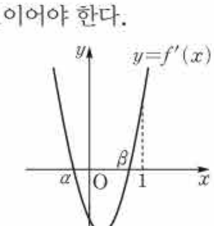
이상에서 k의 값의 범위는

$9<k<12$

답 ④

06 $f'(x)=9x^2-4x+a$

삼차함수 $f(x)$가 $x<0$에서 극댓값, $0<x<1$에서 극솟값을 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$의 두 실근을 α, β $(\alpha<\beta)$라 할 때, $\alpha<0$, $0<\beta<1$이어야 한다.



$f'(0)<0$에서

$a<0 \quad \cdots\cdots ㉠$

$f'(1)>0$에서

$9-4+a>0$

$\therefore a>-5 \quad \cdots\cdots ㉡$

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$-5<a<0$

따라서 정수 a는 -4, -3, -2, -1의 4개이다. 답 4

07 $f'(x)=2x^3-6x^2+2ax=2x(x^2-3x+a)$

사차함수 $f(x)$가 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 삼차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.
그런데 $f'(x)=0$의 한 실근이 $x=0$이므로 이차방정식 $x^2-3x+a=0$이 0이 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

> $2x(x^2-3x+a)=0$
> 에서
> $x=0$ 또는
> $x^2-3x+a=0$

이차방정식 $x^2-3x+a=0$의 판별식을 D라 하면

$a\neq0$, $D=(-3)^2-4a>0$

> $x=0$이 이차방정식
> $x^2-3x+a=0$의 근이
> 아니어야 하므로
> $0-0+a\neq0$
> $\therefore a\neq0$

에서 $\quad a\neq0$, $a<\dfrac{9}{4}$

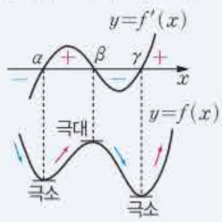
$\therefore a<0$ 또는 $0<a<\dfrac{9}{4}$

따라서 정수 a의 최댓값은 2이다. 답 ①

쌤한마디

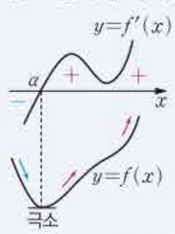
최고차항의 계수가 양수인 사차함수 $f(x)$와 도함수 $f'(x)$에 대하여 삼차방정식

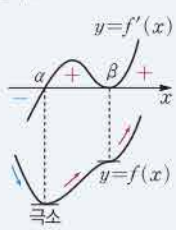
① $f'(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 갖는다.

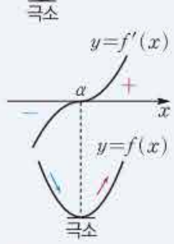


○ 극댓값과 극솟값을 모두 갖는다.

② $f'(x)=0$이 한 실근과 두 허근 또는 한 실근과 중근 또는 삼중근을 갖는다.







○ 극솟값을 갖고 극댓값을 갖지 않는다.

08 $f'(x)=4x^3+2(a-2)x-2a$
$\quad=2\{2x^3+(a-2)x-a\}$
$\quad=2(x-1)(2x^2+2x+a)$

> $$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 2 & 0 & a-2 & -a \\ & & 2 & 2 & a \\ \hline & 2 & 2 & a & 0 \end{array}$$
> $\therefore 2x^3+(a-2)x-a$
> $=(x-1)(2x^2+2x+a)$

사차함수 $f(x)$가 극댓값을 갖지 않으려면 삼차방정식 $f'(x)=0$이 한 실근과 두 허근 또는 한 실근과 중근 또는 삼중근을 가져야 한다.

(i) $f'(x)=0$이 한 실근과 두 허근을 갖는 경우
$f'(x)=0$의 한 실근이 $x=1$이므로 이차방정식 $2x^2+2x+a=0$이 두 허근을 가져야 한다.
이차방정식 $2x^2+2x+a=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=1^2-2a<0 \qquad \therefore a>\dfrac{1}{2}$

(ii) $f'(x)=0$이 한 실근과 중근을 갖는 경우
$f'(x)=0$의 한 실근이 $x=1$이므로 이차방정식 $2x^2+2x+a=0$이 $x=1$을 근으로 갖거나 중근을 가져야 한다.
이차방정식 $2x^2+2x+a=0$이 $x=1$을 근으로 가지면

$2+2+a=0 \qquad \therefore a=-4$

이차방정식 $2x^2+2x+a=0$이 중근을 가지면 판별식을 D라 할 때,

$\dfrac{D}{4}=1^2-2a=0 \qquad \therefore a=\dfrac{1}{2}$

(i), (ii)에서 $\quad a=-4$ 또는 $a\geq\dfrac{1}{2}$

즉 a의 값이 될 수 없는 것은 ②이다. 답 ②

참고 $2x^2+2x+a=0$이 중근을 갖는 경우 $a=\dfrac{1}{2}$이므로
$2x^2+2x+\dfrac{1}{2}=0$에서 $\quad (2x+1)^2=0 \quad \therefore x=-\dfrac{1}{2}$
따라서 $2x^2+2x+a=0$이 $x=1$을 중근으로 가질 수 없으므로 $f'(x)=0$은 삼중근을 가질 수 없다.

09 $f'(x)=4x^3+12x^2-16=4(x^3+3x^2-4)$
$\quad=4(x+2)^2(x-1)$

> $$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 3 & 0 & -4 \\ & & 1 & 4 & 4 \\ \hline & 1 & 4 & 4 & 0 \end{array}$$
> $\therefore x^3+3x^2-4$
> $=(x-1)(x^2+4x+4)$
> $=(x+2)^2(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=1$ ($\because -1\leq x\leq2$)

x	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	15	↘	-9	↗	18

따라서 구간 $[-1, 2]$에서 함수 $f(x)$는 $x=2$일 때 최댓값 18, $x=1$일 때 최솟값 -9를 갖는다.
즉 $M=18$, $m=-9$이므로

$M+m=9$ 답 ⑤

10 $f'(x)=-6x^2+15x-6=-3(2x-1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=\dfrac{1}{2}$ 또는 $x=2$

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	-1	↘	$-\frac{19}{8}$	↗	1	↘	$-\frac{11}{2}$

따라서 구간 $[0, 3]$에서 함수 $f(x)$는 $x=2$일 때 최댓값 1을 가지므로

$a=2$, $b=1$

$\therefore a+b=3$ 답 3

11 $f'(x)=-8x^3-4x^2+2x-2$
$\quad=-2(x+1)(4x^2-2x+1)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-1$ ($\because 4x^2-2x+1>0$)

> $4x^2-2x+1$
> $=4\left(x-\dfrac{1}{4}\right)^2+\dfrac{3}{4}$
> >0

x	$\cdots$	-1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	$a+\frac{7}{3}$	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 최댓값 $a+\frac{7}{3}$을 가지므로

$a+\frac{7}{3}=\frac{13}{3}$ $\therefore a=2$ 답 ②

12 $f'(x)=3x^2-12=3(x+2)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ ($\because -3\le x\le 0$)

x	-3	$\cdots$	-2	$\cdots$	0
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$k+9$	↗	$k+16$	↘	k

따라서 구간 $[-3, 0]$에서 함수 $f(x)$는 $x=-2$일 때 최댓값 $k+16$, $x=0$일 때 최솟값 k를 갖는다.

$k<k+9<k+16$

이때 함수 $f(x)$의 최댓값과 최솟값의 합이 32이므로

$(k+16)+k=32$, $2k=16$

$\therefore k=8$ 답 8

13 잘라 내는 정사각형의 한 변의 길이를 x라 하면 상자의 밑면은 가로, 세로의 길이가 각각

$30-2x$, $14-2x$

인 직사각형이다.

이때 $x>0$, $30-2x>0$, $14-2x>0$이므로

변의 길이는 양수이다.

$0<x<7$

상자의 부피를 $V(x)$라 하면

$V(x)=x(30-2x)(14-2x)$
$=4x^3-88x^2+420x$

$\therefore V'(x)=12x^2-176x+420$
$=4(3x^2-44x+105)$
$=4(x-3)(3x-35)$

$V'(x)=0$에서 $x=3$ ($\because 0<x<7$)

x	0	$\cdots$	3	$\cdots$	7
$V'(x)$		$+$	0	$-$	
$V(x)$		↗	576	↘	

따라서 $0<x<7$에서 $V(x)$는 $x=3$일 때 최댓값 576을 가지므로 상자의 부피의 최댓값은 576이다. 답 ⑤

14 점 P의 좌표를 (t, t^2+1)이라 하면

$\overline{AP}^2=(t-3)^2+(t^2)^2$
$=t^4+t^2-6t+9$

$f(t)=t^4+t^2-6t+9$라 하면

$f'(t)=4t^3+2t-6=2(t-1)(2t^2+2t+3)$

$f'(t)=0$에서 $t=1$ ($\because 2t^2+2t+3>0$)

$2t^2+2t+3$
$=2\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{2}>0$

t	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(t)$	$-$	0	$+$
$f(t)$	↘	5	↗

따라서 $f(t)$는 $t=1$에서 최솟값 5를 가지므로 $\overline{AP}^2$의 최솟값은 5이다. 답 ③

중단원 마무리

67쪽

01 전략 $f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값을 구한 후 그 값의 좌우에서 $f'(x)$의 부호를 조사한다.

풀이 $f'(x)=4x^3+4$
$=4(x+1)(x^2-x+1)$

$f'(x)=0$에서

$x=-1$ ($\because x^2-x+1>0$)

x^2-x+1
$=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-6	↗

따라서 함수 $f(x)$가 감소하는 구간은 $(-\infty, -1]$이다.

답 ①

02 전략 어떤 구간의 모든 x에 대하여 $f'(x)>0$이면 $f(x)$는 이 구간에서 증가하고, $f'(x)<0$이면 $f(x)$는 이 구간에서 감소한다.

풀이 ① 구간 $(-5, -3)$에서 $f'(x)>0$이므로 $f(x)$는 증가한다.

② 구간 $(-3, -1)$에서 $f'(x)>0$이므로 $f(x)$는 증가한다.

③ 구간 $(-1, 2)$에서 $f'(x)<0$이므로 $f(x)$는 감소한다.

④ 구간 $(2, 3)$에서 $f'(x)<0$이므로 $f(x)$는 감소한다.

⑤ 구간 $(3, 4)$에서 $f'(x)<0$이므로 $f(x)$는 감소한다.

답 ④

03 전략 함수 $f(x)$가 구간 $(-\infty, \infty)$에서 증가하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\ge 0$이어야 함을 이용한다.

풀이 함수 $f(x)$가 구간 $(-\infty, \infty)$에서 증가하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\ge 0$이어야 한다.

$f'(x)=3kx^2-2x+12k$이므로 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$f(x)$가 삼차함수이므로
$k\neq 0$
따라서 $3k\neq 0$이므로
$f'(x)$는 이차함수이다.

$3k>0$, $\frac{D}{4}=(-1)^2-3k\cdot 12k\le 0$

에서

$k>0$, $1-36k^2\le 0$

$1-36k^2\le 0$에서
$36k^2-1\ge 0$
$(6k+1)(6k-1)\ge 0$
$\therefore k\le -\frac{1}{6}$
또는 $k\ge \frac{1}{6}$

$\therefore k\ge \frac{1}{6}$ 답 ④

04 전략 실수 전체의 집합에서 정의된 함수가 일대일대응이려면 실수 전체의 집합에서 증가하거나 감소해야 함을 이용한다.

풀이 함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 음수이므로 일대일대응이 되려면 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 감소해야 한다.

즉 실수 전체의 집합에서 $f'(x)\le 0$이어야 한다. ··· ❶

$f'(x)=-3x^2+4ax-4a$이므로 이차방정식

$f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(2a)^2-(-3)\cdot(-4a)\le 0$$

$a^2-3a\le 0,\quad a(a-3)\le 0$

$\therefore\ 0\le a\le 3$ ⋯ ❷

따라서 모든 정수 a의 값의 합은

$0+1+2+3=6$ ⋯ ❸

답 6

단계	채점 기준	비율
❶	$f(x)$가 일대일대응이 되도록 하는 $f'(x)$의 조건을 구할 수 있다.	40 %
❷	a의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❸	모든 정수 a의 값의 합을 구할 수 있다.	20 %

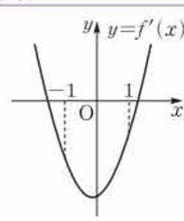
05 전략 주어진 조건을 만족시키도록 $y=f'(x)$의 그래프를 그려 본다.

풀이 함수 $f(x)$가 $-1<x<1$에서 감소하려면

$-1<x<1$에서 $f'(x)\le 0$이어야 한다.

$f'(x)=6x^2+2x+2a-1$이고,

오른쪽 그림에서



$f'(-1)\le 0$이어야 하므로

$6-2+2a-1\le 0$

$\therefore\ a\le -\frac{3}{2}$ ⋯⋯ ㉠

$f'(1)\le 0$이어야 하므로

$6+2+2a-1\le 0$

$\therefore\ a\le -\frac{7}{2}$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$a\le -\frac{7}{2}$

따라서 a의 최댓값은 $-\frac{7}{2}$이다.

답 ①

06 전략 접선의 방정식을 t에 대한 식으로 나타내어 $g(t)$를 구하고, 주어진 조건을 만족시키도록 $y=g'(t)$의 그래프를 그려 본다.

풀이 $f'(x)=3x^2-2(a+2)x+a$

점 $(t,\ f(t))$에서의 접선의 기울기가

$f'(t)=3t^2-2(a+2)t+a$

이므로 접선의 방정식은

$y-\{t^3-(a+2)t^2+at\}$

$=\{3t^2-2(a+2)t+a\}(x-t)$

이 직선의 y절편은

$y=\{3t^2-2(a+2)t+a\}\cdot(-t)$

$+\{t^3-(a+2)t^2+at\}$

$=-2t^3+(a+2)t^2$

$\therefore\ g(t)=-2t^3+(a+2)t^2$

이때 함수 $g(t)$가 구간 $(0,\ 5)$에서 증가하려면 이 구간에서 $g'(t)\ge 0$이어야 한다.

QBOX

$g'(0)=0$이므로 함수 $y=g'(t)$의 그래프는 점 $(0,\ 0)$을 지난다.

$y=6x^2+2x+2a-1$

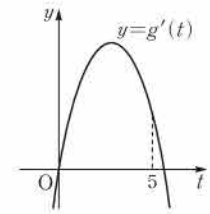
$=6\left(x+\frac{1}{6}\right)^2+2a-\frac{7}{6}$

의 그래프는 아래로 볼록하고 축의 방정식이 $x=-\frac{1}{6}$인 포물선이다.

$x=0$을 대입하여 구한다.

$g'(t)=-6t^2+2(a+2)t$이고,

오른쪽 그림에서



$g'(5)\ge 0$이어야 하므로

$-150+10(a+2)\ge 0$

$a+2\ge 15$

$\therefore\ a\ge 13$

따라서 a의 최솟값은 13이다.

답 13

07 전략 미분가능한 함수 $g(x)$가 $x=a$에서 극값 p를 가지면 $g(a)=p,\ g'(a)=0$임을 이용한다.

풀이 함수 $g(x)$가 $x=1$에서 극솟값 24를 가지므로

$g(1)=24,\ g'(1)=0$

$g(x)=(x^3+2)f(x)$의 양변에 $x=1$을 대입하면

$24=(1+2)\cdot f(1)$

$\therefore\ f(1)=8$

$g'(x)=3x^2f(x)+(x^3+2)f'(x)$이므로 양변에 $x=1$을 대입하면

$0=3f(1)+(1+2)\cdot f'(1)$

$f(1)+f'(1)=0,\qquad 8+f'(1)=0$

$\therefore\ f'(1)=-8$

$\therefore\ f(1)-f'(1)=16$

답 16

08 전략 삼차함수 $f(x)$가 $x=\alpha,\ x=\beta$에서 극값을 가짐을 이용한다.

풀이 방정식 $f'(x)=0$의 두 실근이 $\alpha,\ \beta$이므로

$f'(\alpha)=f'(\beta)=0$

따라서 $f(\alpha),\ f(\beta)$는 함수 $f(x)$의 극값이다.

조건 (나)에서

$\sqrt{(\beta-\alpha)^2+\{f(\beta)-f(\alpha)\}^2}=26$

$(\beta-\alpha)^2+\{f(\beta)-f(\alpha)\}^2=676$

이때 조건 (가)에서 $(\beta-\alpha)^2=|\alpha-\beta|^2=100$이므로

$100+\{f(\beta)-f(\alpha)\}^2=676$

$\{f(\beta)-f(\alpha)\}^2=576=24^2$

$\therefore\ |f(\beta)-f(\alpha)|=24$

답 ③

09 전략 함수 $f(x)$의 모든 극값을 각각 k에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 $f'(x)=-x^2+6x=-x(x-6)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=0$ 또는 $x=6$

x	⋯	0	⋯	6	⋯
$f'(x)$	−	0	+	0	−
$f(x)$	↘	k	↗	$k+36$	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=6$에서 극댓값 $k+36$, $x=0$에서 극솟값 k를 가지므로

$k(k+36)=160,\qquad k^2+36k-160=0$

$(k+40)(k-4)=0$

$\therefore\ k=4\ (\because\ k>0)$

답 ②

10 전략 함수 $f(x)$의 증감표를 만들어 $f(x)$가 극댓값을 갖는 x의 값을 찾는다.

풀이 $f'(x)=-4x^3+16a^2x$

$=-4x(x+2a)(x-2a)$

$f'(x)=0$에서

$x=-2a$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2a$

$a>0$이므로 $-2a<0<2a$

x	$\cdots$	$-2a$	$\cdots$	0	$\cdots$	$2a$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗	극대	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-2a$, $x=2a$에서 극대이므로

$b+(2-2b)=-2a+2a$

$-2a$와 $2a$의 합이 0임을 이용한다.

$2-b=0$ $\quad\therefore b=2$

즉 함수 $f(x)$는 $x=2$와 $x=-2$에서 극대이므로

$a=1\ (\because a>0)$

$\therefore a+b=3$

답 ①

11 전략 조건 (가)를 이용하여 $f(x)$의 식을 세우고, 조건 (나)에서 $f(1)$, $f'(1)$의 값을 이용하여 $f(x)$를 구한다.

풀이 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)라 하면

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

이때 조건 (가)에서 $f'(x)=f'(-x)$이므로 $f'(x)$는 우함수이다.

함수 $y=f(x)$가
① 우함수
$\iff f(-x)=f(x)$
$\iff$ 그래프가 y축에 대하여 대칭
② 기함수
$\iff f(-x)=-f(x)$
$\iff$ 그래프가 원점에 대하여 대칭

$\therefore a=0$

일반적으로 다항함수에서 우함수는 짝수 차수의 항 또는 상수항의 합으로 이루어져 있다.

즉 $f(x)=x^3+bx+c$, $f'(x)=3x^2+b$이고, 조건 (나)에서 $f(1)=0$, $f'(1)=0$이므로

$1+b+c=0$, $3+b=0$

$\therefore b=-3$, $c=2$

$\therefore f(x)=x^3-3x+2$

$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$이므로 $f'(x)=0$에서 $\quad x=-1$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	4	↘	0	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값 4를 갖는다.

답 4

12 전략 주어진 그래프에서 $f'(0)=8$, $f'(-2)=0$, $f'(4)=0$임을 이용하여 함수 $f(x)$의 식을 구한다.

풀이 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ (a, b, c, d는 상수, $a<0$)라 하면

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$

$f'(0)=8$에서 $\quad c=8$

$f'(-2)=0$에서

$12a-4b+c=0$, $\quad 12a-4b+8=0$

$\therefore 3a-b=-2$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$f'(4)=0$에서

$48a+8b+c=0$, $\quad 48a+8b+8=0$

$\therefore 6a+b=-1$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-\frac{1}{3}$, $b=1$

이때 $f(0)=12$에서 $d=12$이므로

$f(x)=-\frac{1}{3}x^3+x^2+8x+12$

한편 $y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표가 -2, 4이므로 $f'(x)=0$에서

$x=-2$ 또는 $x=4$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	$\frac{8}{3}$	↗	$\frac{116}{3}$	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 극솟값 $\frac{8}{3}$을 갖는다.

답 ③

13 전략 함수 $f(x)$의 도함수를 이용하여 $y=f(x)$의 그래프를 그린다.

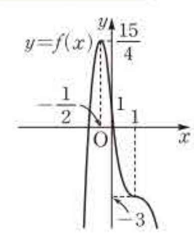
풀이 $f'(x)=-16x^3+24x^2-8$

$=-8(2x+1)(x-1)^2$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$
$f(x)$	↗	$\frac{15}{4}$	↘	-3	↘

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



① $x>0$에서 $f'(x)<0$이다.

② $f(x)$는 구간 $(-3, -1)$에서 증가한다.

③ $f(x)$는 $x=-\frac{1}{2}$에서 극댓값을 갖는다.

④ $x=1$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌지 않으므로 $f(x)$는 $x=1$에서 극값을 갖지 않는다.

답 ⑤

14 전략 $y=f'(x)$의 그래프를 이용하여 $f(x)$의 증감표를 만들고 $y=f(x)$의 그래프의 개형을 추측한다.

풀이 $y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표가 -1, 0, 2이므로 $f'(x)=0$에서

$x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘		↘

함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극소, $x=0$에서 극대이다. 또 $x=2$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌지 않으므로 $f(x)$는 $x=2$에서 극값을 갖지 않는다.

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형이 될 수 있는 것은 ①이다.

답 ①

15 전략 삼차함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 중근 또는 허근을 가져야함을 이용한다.

풀이 $f'(x)=3x^2+6ax+2b$

삼차함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 중근 또는 허근을 가져야 한다.

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(3a)^2-3\cdot 2b\le 0,\qquad 9a^2-6b\le 0$$

$$\therefore b\ge \frac{3}{2}a^2$$ ···· ❶

(i) $a=1$이면 $\quad b\ge\frac{3}{2}$

$b=2,\ 3,\ 4,\ \cdots,\ 10$이므로 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는 9이다.

(ii) $a=2$이면 $\quad b\ge 6$

$b=6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10$이므로 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는 5이다.

(iii) $a\ge 3$이면 $b\ge\frac{3}{2}a^2\ge\frac{27}{2}$이므로 이를 만족시키는 10 이하의 자연수 b는 존재하지 않는다.

이상에서 구하는 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는

$9+5=14$ ···· ❷

답 14

단계	채점 기준	비율
❶	a, b에 대한 부등식을 세울 수 있다.	40 %
❷	순서쌍 $(a,\ b)$의 개수를 구할 수 있다.	60 %

Q BOX

$a\ge 3$에서 $\quad a^2\ge 9$

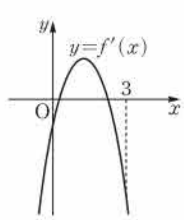
$\therefore \frac{3}{2}a^2\ge\frac{27}{2}$

16 전략 삼차함수 $f(x)$가 $0<x<3$에서 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 $0<x<3$에서 서로 다른 두 실근을 가져야 함을 이용한다.

풀이 $f'(x)=-3x^2+2px-p+2$

삼차함수 $f(x)$가 $0<x<3$에서 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 $0<x<3$에서 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

(i) 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면



$$\frac{D}{4}=p^2-(-3)\cdot(-p+2)>0$$

$$\therefore p^2-3p+6>0$$

이때

$$p^2-3p+6=\left(p-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{15}{4}>0$$

이므로 이차방정식 $f'(x)=0$은 항상 서로 다른 두 실근을 갖는다.

(ii) $f'(0)<0$에서

$-p+2<0 \qquad \therefore p>2$

$f'(3)<0$에서

$-27+6p-p+2<0$

$5p-25<0$

$\therefore p<5$

(iii) 이차함수 $y=f'(x)$의 그래프의 축의 방정식은

$x=\frac{p}{3}$이므로 $0<\frac{p}{3}<3$에서

$0<p<9$

이상에서

$2<p<5$

따라서 정수 p는 3, 4의 2개이다. 답 ②

$-3x^2+2px-p+2$
$=-3\left(x-\frac{p}{3}\right)^2+\frac{p^2}{3}-p+2$

17 전략 사차함수 $f(x)$가 주어진 조건을 만족시키려면 삼차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가져야함을 이용한다.

풀이 $f'(x)=4x^3-12x^2-12kx$

$=4x(x^2-3x-3k)$

사차함수 $f(x)$가 극댓값을 가지려면 $f(x)$는 극댓값과 극솟값을 모두 가져야 하므로 삼차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.

최고차항의 계수가 양수인 사차함수 $f(x)$는 항상 극솟값을 가지므로 $f(x)$가 극댓값을 가지면 $f(x)$는 극댓값과 극솟값을 모두 갖는다.

그런데 $f'(x)=0$의 한 실근이 $x=0$이므로 이차방정식 $x^2-3x-3k=0$이 0이 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

이차방정식 $x^2-3x-3k=0$의 판별식을 D라 하면

$k\ne 0,\ D=(-3)^2-4\cdot(-3k)>0$

에서

$x=0$이 이차방정식 $x^2-3x-3k=0$의 근이 아니어야 하므로
$0-0-3k\ne 0$
$\therefore k\ne 0$

$k\ne 0,\ k>-\frac{3}{4}$

$\therefore -\frac{3}{4}<k<0$ 또는 $k>0$ 답 ②

18 전략 주어진 구간에서 $f(x)$의 극값, $f(-3)$, $f(1)$의 값을 비교하여 최솟값을 구한다.

풀이 $f'(x)=3x^3-3x^2-18x$

$=3x(x+2)(x-3)$

$f'(x)=0$에서

$x=-2$ 또는 $x=0$ ($\because -3\le x\le 1$)

x	-3	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\frac{23}{4}$	↘	-17	↗	-1	↘	$-\frac{41}{4}$

따라서 구간 $[-3,\ 1]$에서 함수 $f(x)$는 $x=-2$일 때 최솟값 -17을 갖는다.

즉 $a=-2,\ b=-17$이므로

$a+b=-19$ 답 ③

19 전략 $y=f'(x)$의 그래프를 이용하여 $f(x)$의 증감표를 만들고 보기의 참, 거짓을 판별한다.

풀이 $y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표가 $-1,\ 1,\ 3,\ 5$이므로 $f'(x)=0$에서

$x=-1$ 또는 $x=1$ 또는 $x=3$ 또는 $x=5$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$	5	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

ㄱ. $f(x)$는 $x=1,\ x=5$에서 극솟값을 갖는다.

ㄴ. 구간 $(1,\ 3)$에서 $f'(x)>0$이므로 $f(x)$는 이 구간에서 증가한다.

$\therefore\ f(2)<f(3)$

> $f(2)$, $f(3)$의 값은 알 수 없지만 구간 $(1,\ 3)$에서 함수 $f(x)$가 증가함을 이용하여 대소를 비교할 수 있다.

ㄷ. 구간 $[-1,\ 3]$에서 함수 $f(x)$는 $f(-1)$, $f(3)$ 중 큰 값을 최댓값으로 갖는다.

ㄹ. 구간 $[1,\ 5]$에서 함수 $f(x)$는 $x=3$일 때 극대이면서 최대이므로 최댓값은 $f(3)$이다.

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄹ이다. 답 ④

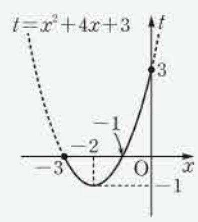
20 **전략** $x^2+4x+3=t$로 놓고 주어진 함수를 t에 대한 함수로 변형한다.

풀이 $x^2+4x+3=t$로 놓으면

$t=x^2+4x+3=(x+2)^2-1$

구간 $[-3,\ 0]$에서 t의 값의 범위는

$-1\le t\le 3$



$g(t)=t^3-6t^2+10$으로 놓으면

$g'(t)=3t^2-12t=3t(t-4)$

$g'(t)=0$에서 $\quad t=0\ (\because\ -1\le t\le 3)$

t	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	3
$g'(t)$		$+$	0	$-$	
$g(t)$	3	$\nearrow$	10	$\searrow$	-17

따라서 $-1\le t\le 3$에서 함수 $g(t)$는 $t=0$일 때 최댓값 10, $t=3$일 때 최솟값 -17을 가지므로 구하는 합은

$10+(-17)=-7$ 답 -7

21 **전략** 주어진 구간에서 $f(x)$의 극값, $f(1)$, $f(4)$의 값을 비교하여 최댓값, 최솟값을 a에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 $f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

$f'(x)=0$에서

$x=2\ (\because\ 1\le x\le 4)$

x	1	$\cdots$	2	$\cdots$	4
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$a-2$	$\searrow$	$a-4$	$\nearrow$	$a+16$

따라서 구간 $[1,\ 4]$에서 함수 $f(x)$는 $x=4$일 때 최댓값 $a+16$, $x=2$일 때 최솟값 $a-4$를 갖는다.

> $a-4<a-2<a+16$

$\therefore\ M=a+16,\ m=a-4$

이때 $M+m=20$이므로

$(a+16)+(a-4)=20$

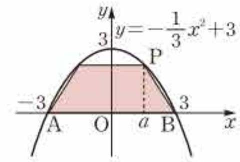
$\therefore\ a=4$ 답 ④

22 **전략** 사다리꼴의 한 꼭짓점의 x좌표를 a로 놓고 사다리꼴의 넓이를 a에 대한 함수로 나타낸다.

풀이 곡선 $y=-\frac{1}{3}x^2+3$이 x축과 만나는 점의 x좌표는 $-\frac{1}{3}x^2+3=0$에서

$x^2=9$

$\therefore\ x=-3$ 또는 $x=3$



오른쪽 그림과 같이 사다리꼴의 꼭짓점 중 제1사분면 위에 있는 점을 P라 하고 점 P의 x좌표를 a라 하면

$\mathrm{P}\left(a,\ -\frac{1}{3}a^2+3\right)\ (0<a<3)$

사다리꼴의 넓이를 $S(a)$라 하면

$S(a)=\frac{1}{2}(2a+6)\left(-\frac{1}{3}a^2+3\right)$

> 사다리꼴의 윗변의 길이는 $2a$, 아랫변의 길이는 6, 높이는 $-\frac{1}{3}a^2+3$

$=-\frac{1}{3}a^3-a^2+3a+9$

$\therefore\ S'(a)=-a^2-2a+3$

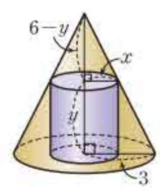
$=-(a+3)(a-1)$

$S'(a)=0$에서 $\quad a=1\ (\because\ 0<a<3)$

a	0	$\cdots$	1	$\cdots$	3
$S'(a)$		$+$	0	$-$	
$S(a)$		$\nearrow$	$\frac{32}{3}$	$\searrow$	

따라서 $0<a<3$에서 $S(a)$는 $a=1$일 때 최댓값 $\frac{32}{3}$를 가지므로 사다리꼴의 넓이의 최댓값은 $\frac{32}{3}$이다. 답 ②

23 **전략** 원기둥의 밑면의 반지름의 길이를 x로 놓고 원기둥의 부피를 x에 대한 함수로 나타낸다.



풀이 오른쪽 그림과 같이 원기둥의 밑면의 반지름의 길이를 x, 높이를 y라 하면

$3:x=6:(6-y)$

> 원뿔을 밑면에 평행한 평면으로 자를 때 생기는 원뿔은 처음 원뿔과 닮은 도형이다.

$6-y=2x$

$\therefore\ y=6-2x\ (0<x<3)$

원기둥의 부피를 $V(x)$라 하면

$V(x)=\pi x^2y=\pi x^2(6-2x)$

$=-2\pi x^3+6\pi x^2$ ⋯ ❶

$\therefore\ V'(x)=-6\pi x^2+12\pi x$

$=-6\pi x(x-2)$

$V'(x)=0$에서 $\quad x=2\ (\because\ 0<x<3)$ ⋯ ❷

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$V'(x)$		$+$	0	$-$	
$V(x)$		$\nearrow$	8π	$\searrow$	

따라서 $0<x<3$에서 $V(x)$는 $x=2$일 때 최댓값 8π를 가지므로 원기둥의 부피의 최댓값은 8π이다. ⋯ ❸

답 8π

단계	채점 기준	비율
❶	원기둥의 부피 $V(x)$를 구할 수 있다.	40 %
❷	$V'(x)=0$인 x의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸	원기둥의 부피의 최댓값을 구할 수 있다.	30 %

06 도함수의 활용 (3)

12 방정식과 부등식에의 활용

Lecture 22 방정식과 부등식에의 활용

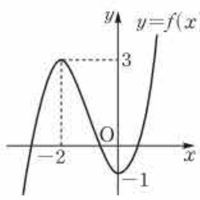
72쪽

1-1 (1) $f'(x)=3x^2+6x=3x(x+2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=0$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	3	↘	-1	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



(2) (1)에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 x축과 서로 다른 세 점에서 만나므로 방정식 $x^3+3x^2-1=0$은 서로 다른 세 실근을 갖는다.

답 풀이 참조

1-2 $f(x)=x^4-4x^2+4$라 하면

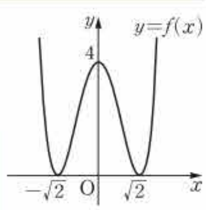
$f'(x)=4x^3-8x=4x(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$

$f'(x)=0$에서

$x=-\sqrt{2}$ 또는 $x=0$ 또는 $x=\sqrt{2}$

x	$\cdots$	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	0	↗	4	↘	0	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 방정식은 서로 다른 두 실근을 갖는다.



답 2

방정식 $f(x)=0$은 $x=-\sqrt{2}$와 $x=\sqrt{2}$를 각각 중근으로 가지므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.

2-1 답 1, 1, 0

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	0	↗

따라서 $x\ge 0$일 때, 함수 $f(x)$의 최솟값은 $f(1)=0$

2-2 $f(x)=x^4-4x+3$이라 하면

$f'(x)=4x^3-4=4(x-1)(x^2+x+1)$

$f'(x)=0$에서

$x=1$ ($\because x^2+x+1>0$)

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	0	↗

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 최솟값 0을 가지므로

$f(x)\ge 0$

따라서 모든 실수 x에 대하여 부등식 $x^4-4x+3\ge 0$이 성립한다.

답 풀이 참조

Q BOX

기본+표준 유형 Q+Q

73쪽

01 $f(x)=\frac{1}{2}x^4-2x^3-x^2+6x$라 하면

방정식 $f(x)=k$의 서로 다른 실근의 개수는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 개수와 같다.

$f'(x)=2x^3-6x^2-2x+6$

$=2(x^3-3x^2-x+3)$

$=2(x+1)(x-1)(x-3)$

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & -3 & -1 & 3 \\ & & 1 & -2 & -3 \\ \hline & 1 & -2 & -3 & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore x^3-3x^2-x+3$

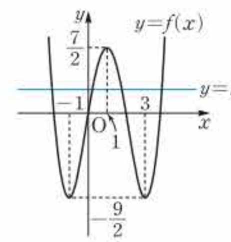
$=(x-1)(x^2-2x-3)$

$=(x+1)(x-1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$ 또는 $x=3$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$-\frac{9}{2}$	↗	$\frac{7}{2}$	↘	$-\frac{9}{2}$	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 주어진 방정식이 서로 다른 네 실근을 가지려면 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 서로 다른 네 점에서 만나야 하므로



$-\frac{9}{2}<k<\frac{7}{2}$

답 $-\frac{9}{2}<k<\frac{7}{2}$

02 $3x^4+4x^3-12x^2+16-k=0$에서

$3x^4+4x^3-12x^2+16=k$

$f(x)=3x^4+4x^3-12x^2+16$이라 하면

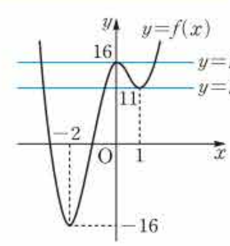
$f'(x)=12x^3+12x^2-24x$

$=12x(x+2)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-16	↗	16	↘	11	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 주어진 방정식이 한 중근과 서로 다른 두 실근을 가지려면 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 한 점에서 접하고 접점이 아닌 서로 다른 두 점에서 만나야 하므로



$k=11$ 또는 $k=16$

즉 모든 k의 값의 합은 $11+16=27$

답 ②

03 $x^3-3x^2-24x-k=0$에서

$x^3-3x^2-24x=k$

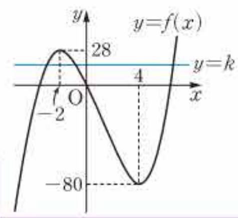
$f(x)=x^3-3x^2-24x$라 하면

$f'(x)=3x^2-6x-24=3(x+2)(x-4)$

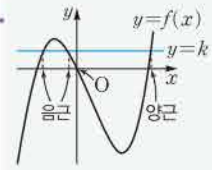
$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=4$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	28	↘	-80	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
주어진 방정식이 한 개의 양근과 서로 다른 두 개의 음근을 가지려면 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나고, 교점의 x좌표가 한 개는 양수이고 두 개는 음수이어야 하므로 $0<k<28$ 답 ④



Q BOX



04 $x^3+10x+3=9x^2-5x+k$에서

$x^3-9x^2+15x+3=k$

$f(x)=x^3-9x^2+15x+3$이라 하면

$f'(x)=3x^2-18x+15=3(x-1)(x-5)$

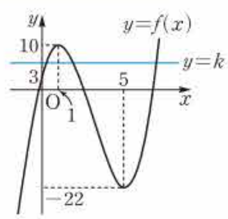
$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=5$

x	$\cdots$	1	$\cdots$	5	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	10	↘	−22	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
주어진 방정식이 서로 다른 세 개의 양근을 가지려면 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나고, 교점의 x좌표가 모두 양수이어야 하므로

$3<k<10$

즉 정수 k는 4, 5, 6, 7, 8, 9의 6개이다. 답 ①



이항하여 $f(x)=k$ 꼴로 만든다.

두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프의 교점의 개수
⇒ 방정식 $f(x)=g(x)$, 즉 $f(x)-g(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수

곡선 $y=f(x)$가 점 $(0, 3)$을 지나므로 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$의 교점의 x좌표가 모두 양수이려면 $3<k$

05 $f(x)=x^3-6x^2+9x+k$라 하면

$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=3$

삼차방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면 $f(1)f(3)<0$이어야 하므로

$(k+4)k<0$ $\therefore -4<k<0$

따라서 k의 값이 될 수 있는 것은 ③이다. 답 ③

이차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가지므로 삼차함수 $f(x)$는 극댓값과 극솟값을 모두 갖는다.

다른 풀이 $x^3-6x^2+9x+k=0$에서

$x^3-6x^2+9x=-k$

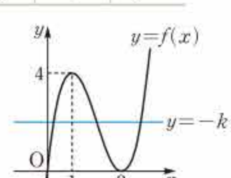
$f(x)=x^3-6x^2+9x$라 하면

$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=3$

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	4	↘	0	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
주어진 방정식이 서로 다른 세 실근을 가지려면 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-k$가 서로 다른 세 점에서 만나야 하므로 $0<-k<4$ $\therefore -4<k<0$



06 $f(x)=x^3-\frac{9}{2}x^2-12x+k$라 하면

$f'(x)=3x^2-9x-12=3(x+1)(x-4)$

$f'(x)=0$에서

$x=-1$ 또는 $x=4$

삼차방정식 $f(x)=0$이 한 실근과 중근을 가지려면 $f(-1)f(4)=0$이어야 하므로

$\left(k+\frac{13}{2}\right)(k-56)=0$

$\therefore k=56$ ($\because$ k는 정수) 답 56

07 주어진 곡선과 직선이 서로 다른 세 점에서 만나려면 방정식

$x^3-3x^2-7x=2x+k$, 즉 $x^3-3x^2-9x-k=0$

이 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.

$f(x)=x^3-3x^2-9x-k$라 하면

$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서

$x=-1$ 또는 $x=3$

삼차방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면 $f(-1)f(3)<0$이어야 하므로

$(-k+5)(-k-27)<0$

$(k+27)(k-5)<0$

$\therefore -27<k<5$ 답 $-27<k<5$

다른 풀이 주어진 곡선과 직선이 서로 다른 세 점에서 만나려면 방정식

$x^3-3x^2-7x=2x+k$, 즉 $x^3-3x^2-9x=k$

가 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.

$f(x)=x^3-3x^2-9x$라 하면

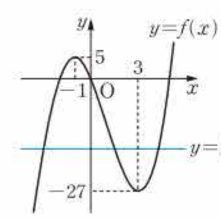
$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=3$

x	$\cdots$	−1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	5	↘	−27	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
방정식 $f(x)=k$가 서로 다른 세 실근을 가지려면 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나야 하므로

$-27<k<5$



08 주어진 두 곡선이 서로 다른 두 점에서 만나려면 방정식

$2x^3-12x=3x^2-k$, 즉 $2x^3-3x^2-12x+k=0$

이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

$f(x)=2x^3-3x^2-12x+k$라 하면

$f'(x)=6x^2-6x-12=6(x+1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=2$

삼차방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 두 실근, 즉 한 실근과 중근을 가지려면 $f(-1)f(2)=0$이어야 하므로

$(k+7)(k-20)=0$

$\therefore k=20$ ($\because$ k는 자연수) 답 ⑤

09 $f(x)=3x^4-12a^3x+9$라 하면

$f'(x)=12x^3-12a^3$

$=12(x-a)(x^2+ax+a^2)$

$f'(x)=0$에서 $x=a$ ($\because$ $x^2+ax+a^2>0$)

x	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$-9a^4+9$	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 최솟값 $-9a^4+9$를 가지므로 모든 실수 x에 대하여 부등식 $f(x)>0$이 성립하려면

$-9a^4+9>0$, $a^4-1<0$

$(a^2+1)(a+1)(a-1)<0$

$(a+1)(a-1)<0$ ($\because$ $a^2+1>0$)

$\therefore -1<a<0$ 또는 $0<a<1$ ($\because$ $a\neq0$)

즉 a의 값이 될 수 없는 것은 ⑤이다. 답 ⑤

10 $f(x)\le g(x)$에서

$x^3+3x^2-3+k\le x^4+x^3-5x^2$

$\therefore -x^4+8x^2-3+k\le0$

$h(x)=-x^4+8x^2-3+k$라 하면

$h'(x)=-4x^3+16x=-4x(x+2)(x-2)$

$h'(x)=0$에서

$x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$h'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$h(x)$	↗	$k+13$	↘	$k-3$	↗	$k+13$	↘

따라서 함수 $h(x)$는 $x=-2$, $x=2$에서 최댓값 $k+13$을 가지므로 모든 실수 x에 대하여 부등식 $h(x)\le0$이 성립하려면

$k+13\le0$ $\therefore k\le-13$

즉 k의 최댓값은 -13이다. 답 -13

쌤 한마디

모든 실수 x에 대하여

① 부등식 $f(x)\le g(x)$가 성립하려면

$h(x)=f(x)-g(x)$라 할 때,

(함수 $h(x)$의 최댓값)≤0

② 부등식 $f(x)\ge g(x)$가 성립하려면

$h(x)=f(x)-g(x)$라 할 때,

(함수 $h(x)$의 최솟값)≥0

11 $8x^3-9x^2-6x\ge k$에서

$8x^3-9x^2-6x-k\ge0$

$f(x)=8x^3-9x^2-6x-k$라 하면

$f'(x)=24x^2-18x-6=6(4x+1)(x-1)$

Q BOX

x^2+ax+a^2

$=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+\frac{3}{4}a^2$

>0 ($\because$ $a\neq0$)

운동 방향을 바꿀 때

➡ 속도가 0이다.

$f'(x)=0$에서 $x=1$ ($\because$ $x>0$)

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	$-k-7$	↗

따라서 $x>0$일 때, 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 최솟값 $-k-7$을 가지므로 $x>0$일 때, 부등식 $f(x)\ge0$이 성립하려면

$-k-7\ge0$ $\therefore k\le-7$ 답 ①

12 $f(x)=x^3-6x^2+k$라 하면

$f'(x)=3x^2-12x=3x(x-4)$

$0<x<4$일 때 $f'(x)<0$이므로 함수 $f(x)$는 구간 $(0, 4)$에서 감소한다.

따라서 $0<x<4$일 때, 부등식 $f(x)>0$이 성립하려면

$f(4)\ge0$, $64-96+k\ge0$

$\therefore k\ge32$

즉 k의 최솟값은 32이다. 답 32

쌤 한마디

구간 (a, b)에서

① 함수 $f(x)$가 증가할 때, 이 구간에서

부등식 $f(x)>0$이 성립하려면 $f(a)\ge0$

부등식 $f(x)<0$이 성립하려면 $f(b)\le0$

② 함수 $f(x)$가 감소할 때, 이 구간에서

부등식 $f(x)>0$이 성립하려면 $f(b)\ge0$

부등식 $f(x)<0$이 성립하려면 $f(a)\le0$

13 속도와 가속도

Lecture 23 속도와 가속도 75쪽

1-1 $v=\frac{dx}{dt}=3t^2-8$, $a=\frac{dv}{dt}=6t$

따라서 $t=1$에서의 점 P의 속도와 가속도는

$v=3\cdot1^2-8=-5$, $a=6\cdot1=6$

답 $v=-5$, $a=6$

1-2 시각 t에서의 점 P의 속도를 v라 하면

$v=\frac{dx}{dt}=-2t+6$

점 P가 운동 방향을 바꿀 때 $v=0$이므로

$-2t+6=0$ $\therefore t=3$

따라서 $t=3$에서 점 P가 운동 방향을 바꾼다. 답 3

2-1 (1) $l=3t^2-4t+3$에서

$\frac{dl}{dt}=6t-4$

(2) $t=4$에서의 물체의 길이의 변화율은

$6\cdot4-4=20$

답 (1) $6t-4$ (2) 20

L 74~77쪽

2-2 $S=(2t+5)(t+2)$에서

$\frac{dS}{dt}=2(t+2)+(2t+5)\cdot1=4t+9$

따라서 $t=2$에서의 물체의 넓이의 변화율은

$4\cdot2+9=17$ 답 17

2-3 $V=(3t+1)^3$에서

$\frac{dV}{dt}=3(3t+1)^2\cdot3=9(3t+1)^2$

따라서 $t=1$에서의 물체의 부피의 변화율은

$9\cdot(3\cdot1+1)^2=144$ 답 144

기본+표준 유형 Q+Q

L 76쪽

01 점 P가 원점을 지나는 순간 $x=0$이므로

원점을 지나는 순간 ➡ 위치가 0이다.

$2t^2-3t=0,\quad t(2t-3)=0$

$\therefore t=0$ 또는 $t=\frac{3}{2}$

따라서 점 P가 출발 후 다시 원점을 지나는 것은 $t=\frac{3}{2}$일 때이고, 시각 t에서의 점 P의 속도를 v라 하면

$v=\frac{dx}{dt}=4t-3$

이므로 $t=\frac{3}{2}$에서의 점 P의 속도는

$4\cdot\frac{3}{2}-3=3$ 답 3

02 시각 t에서의 점 P의 속도를 v라 하면

$v=\frac{dx}{dt}=6t^2+2kt+1$

$t=1$에서의 점 P의 속도가 5이므로

$6\cdot1^2+2k\cdot1+1=5,\quad 2k=-2$

$\therefore k=-1$

$\therefore v=6t^2-2t+1$

이때 시각 t에서의 점 P의 가속도를 a라 하면

$a=\frac{dv}{dt}=12t-2$

따라서 $t=1$에서의 점 P의 가속도는

$12\cdot1-2=10$ 답 ④

03 시각 t에서의 점 P의 속도를 v라 하면

$v=\frac{dx}{dt}=3t^2-24t+36$

점 P가 운동 방향을 바꿀 때 $v=0$이므로

$3t^2-24t+36=0,\quad (t-2)(t-6)=0$

$\therefore t=2$ 또는 $t=6$

따라서 점 P가 첫 번째로 운동 방향을 바꾸는 것은 $t=2$일 때이고, 시각 t에서의 점 P의 가속도를 a라 하면

$a=\frac{dv}{dt}=6t-24$

이므로 $t=2$에서의 점 P의 가속도는

$6\cdot2-24=-12$ 답 ③

04 시각 t에서의 두 점 P, Q의 속도를 각각 v_P, v_Q라 하면

$v_P=\frac{dx_P}{dt}=2t-18,$

$v_Q=\frac{dx_Q}{dt}=2t-8$

두 점의 속도의 부호가 반대이다.

두 점 P, Q가 서로 반대 방향으로 움직이면 $v_Pv_Q<0$이므로

$(2t-18)(2t-8)<0,\quad (t-9)(t-4)<0$

$\therefore 4<t<9$ 답 ④

05 제동을 건 지 t초 후의 열차의 속도를 v m/s라 하면

$v=\frac{dx}{dt}=40-1.6t$

열차가 정지할 때 $v=0$이므로

$40-1.6t=0\quad \therefore t=25$

따라서 제동을 건 후 열차가 25초 동안 움직인 거리는

$40\times25-0.8\times25^2=500\,(\mathrm{m})$ 답 500 m

06 제동을 건 지 t초 후의 자동차의 속도를 v m/s라 하면

$v=\frac{dx}{dt}=32-2at$

이때 자동차에 제동을 건 지 4초 후에 정지하므로 $t=4$에서 $v=0$이다.

즉 $32-8a=0$이므로

$a=4$ 답 ②

07 t초 후의 로켓의 속도를 v m/s라 하면

$v=\frac{dh}{dt}=30-10t$

위로 던진 물체가 최고 높이에 도달할 때 물체는 정지하므로 그때의 속도는 0이다.

로켓이 최고 높이에 도달할 때 $v=0$이므로

$30-10t=0\quad \therefore t=3$

따라서 3초 후의 지면으로부터의 높이는

$18+30\cdot3-5\cdot3^2=63\,(\mathrm{m})$ 답 63 m

08 공이 지면에 떨어지는 순간 $h=0$이므로

$20t-5t^2=0,\quad t(4-t)=0$

$\therefore t=4\ (\because t>0)$

t초 후의 공의 속도를 v m/s라 하면

$v=\frac{dh}{dt}=20-10t$

따라서 4초 후의 공의 속도는

$20-10\cdot4=-20\,(\mathrm{m/s})$ 답 -20 m/s

09 ① $x'(3)=0$이므로 $t=3$에서의 점 P의 속도는 0이다.

시각 t에서의 점 P의 속도는 $x'(t)$이고, $x'(t)$의 부호는 점 P의 운동 방향을 나타낸다.

② $x'(5)=0$이고 $t=5$의 좌우에서 $x'(t)$의 부호가 바뀌므로 $t=5$에서 점 P는 운동 방향을 바꾼다.

③ $x'(7)>0$이므로 $t=7$에서 점 P는 양의 방향으로 움직인다.

④ $0<t<7$에서 점 P는 $t=2$, $t=4$일 때 원점을 지나므로 두 번 지난다.

⑤ $0<t<7$에서 $t=1$일 때 $|x(t)|$의 값이 가장 크므로 점 P는 원점에서 가장 멀리 떨어져 있다.

원점에서 점 P까지의 거리는 $|x(t)|$이다.

답 ③

시각 t에서의 점 P의 가속도는 $v'(t)$이다.

10 ㄱ. $v'(b)<0$이므로 $t=b$에서의 점 P의 가속도는 0이 아니다.

ㄴ. $v(a)>0$이므로 $t=a$에서 점 P는 양의 방향으로 움직이고, $v(c)<0$이므로 $t=c$에서 점 P는 음의 방향으로 움직인다.
따라서 $t=a$에서와 $t=c$에서의 점 P의 운동 방향은 서로 반대이다.

$v'(a)=0$, $v'(c)=0$이므로 $t=a$, $t=c$에서의 점 P의 가속도는 0이다.

ㄷ. $0<t<d$에서 점 P는 $t=b$일 때 운동 방향을 바꾸므로 한 번 바꾼다.

$v(b)=0$이고 $t=b$의 좌우에서 $v(t)$의 부호가 바뀐다.

이상에서 옳은 것은 ㄴ뿐이다. 답 ㄴ

쌤 한마디

시각 t에서의 위치의 그래프가 주어졌을 때 각 점에서의 접선의 기울기는 속도를 나타내고, 속도의 그래프가 주어졌을 때 각 점에서의 접선의 기울기는 가속도를 나타낸다.
따라서 위치의 그래프가 주어지고 속도에 대한 문제를 해결하거나 속도의 그래프가 주어지고 가속도에 대한 문제를 해결할 때에는 각 점에서의 접선을 그려 본다.

11 t초 후의 가장 바깥쪽 원의 반지름의 길이는 $8t$ cm이므로 원의 넓이를 S cm^{2}라 하면

$S=\pi\cdot(8t)^2=64\pi t^2$

따라서 가장 바깥쪽 원의 넓이의 변화율은

$\frac{dS}{dt}=128\pi t$

이므로 5초 후의 가장 바깥쪽 원의 넓이의 변화율은

$128\pi\cdot5=640\pi$ (cm^2/s) 답 ⑤

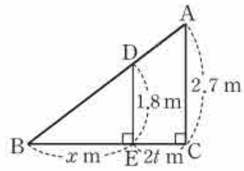
12 (1) 초속 2 m로 걷고 있으므로 t초 후의 가로등 바로 밑에서부터 준우까지의 거리는

$2t$ m

(2) 오른쪽 그림에서

△ABC∽△DBE

(AA 닮음)이므로



$2.7 : 1.8$

$=(x+2t) : x$

$3 : 2=(x+2t) : x$, $3x=2(x+2t)$

$\therefore x=4t$

△ABC와 △DBE에서 ∠B는 공통, ∠C=∠DEB 이므로 △ABC∽△DBE (AA 닮음)

(3) 준우의 그림자의 길이의 변화율은

$\frac{dx}{dt}=4$

즉 4 m/s이다.

답 (1) $2t$ m (2) $4t$ (3) 4 m/s

중단원 마무리

78쪽

01 전략 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축의 교점의 개수와 같음을 이용한다.

풀이 $4x^4-8x^3+7=x^4+18x^2$에서

$3x^4-8x^3-18x^2+7=0$

$f(x)=3x^4-8x^3-18x^2+7$이라 하면

$f'(x)=12x^3-24x^2-36x$

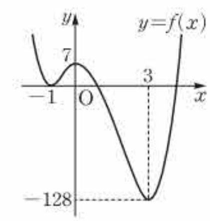
$=12x(x+1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서

$x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=3$

x	⋯	-1	⋯	0	⋯	3	⋯
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	0	↗	7	↘	-128	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 방정식은 서로 다른 세 실근을 갖는다.



방정식 $f(x)=0$은 $x=-1$을 중근으로 갖고 서로 다른 두 실근을 가지므로 서로 다른 세 실근을 갖는다.

답 3

02 전략 주어진 방정식을 $f(x)=-a$ 꼴로 변형하고 곡선 $y=f(x)$를 그린 후 조건을 만족시키도록 직선 $y=-a$를 움직여 본다.

풀이 $x^3-6x^2+a=0$에서

$x^3-6x^2=-a$

$f(x)=x^3-6x^2$이라 하면

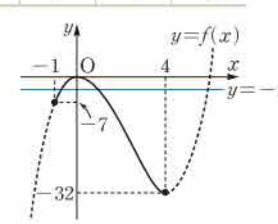
$f'(x)=3x^2-12x$

$=3x(x-4)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=4$

x	-1	⋯	0	⋯	4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	-7	↗	0	↘	-32

따라서 $-1\le x\le4$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



$-1\le x\le4$에서 주어진 방정식이 서로 다른 두 실근을 가지려면 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-a$가 서로 다른 두 점에서 만나야 하므로

$-7\le -a<0$ $\therefore 0<a\le7$

즉 정수 a는 1, 2, 3, ⋯, 7의 7개이다. 답 ②

03 전략 주어진 도함수의 그래프를 이용하여 함수 $y=h(x)$의 그래프의 개형을 파악한다.

풀이 ㄱ, ㄴ. $h(x)=f(x)-g(x)$에서

$h'(x)=f'(x)-g'(x)$

$y=f'(x)$, $y=g'(x)$의 그래프가 만나는 점의 x좌표가 0, 2이므로 $h'(x)=0$에서

$x=0$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$h'(x)$	+	0	−	0	+
$h(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

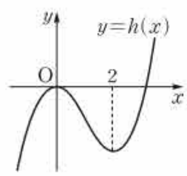
$x<0$, $x>2$에서 $f'(x)>g'(x)$이므로 $h'(x)>0$
$0<x<2$에서 $f'(x)<g'(x)$이므로 $h'(x)<0$

따라서 $0<x<2$에서 함수 $h(x)$는 감소하고, $x=2$에서 극솟값을 갖는다.

ㄷ. $f(0)=g(0)$이므로

$h(0)=f(0)-g(0)=0$

따라서 함수 $y=h(x)$의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같으므로 방정식 $h(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.



이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

04 전략 주어진 방정식을 $f(x)=k$ 꼴로 변형하고 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$의 교점의 x좌표의 부호를 알아본다.

풀이 $\frac{1}{3}x^3+4x^2+15x-k=0$에서

$\frac{1}{3}x^3+4x^2+15x=k$

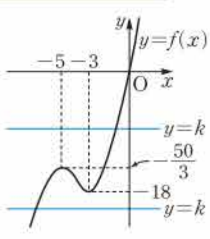
$f(x)=\frac{1}{3}x^3+4x^2+15x$라 하면

$f'(x)=x^2+8x+15=(x+5)(x+3)$

$f'(x)=0$에서 $x=-5$ 또는 $x=-3$

x	$\cdots$	-5	$\cdots$	-3	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	$-\frac{50}{3}$	↘	-18	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



주어진 방정식이 한 개의 음근과 두 허근을 가지려면 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 한 점에서만 만나고, 교점의 x좌표가 음수이어야 하므로

$k<-18$ 또는 $-\frac{50}{3}<k<0$

$-\frac{50}{3}=-16.6\times\times\times$

따라서 k의 값이 될 수 없는 것은 ②이다.

답 ②

05 전략 주어진 방정식을 $g(x)=n$ 꼴로 변형하고 곡선 $y=g(x)$를 그린 후 직선 $y=n$을 움직여 보면서 교점 중 x좌표가 양수인 점의 개수를 구한다.

풀이 $12x^3-9x+4-n=0$에서

$12x^3-9x+4=n$

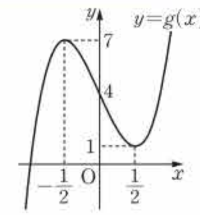
$g(x)=12x^3-9x+4$라 하면

$g'(x)=36x^2-9=9(2x+1)(2x-1)$

$g'(x)=0$에서 $x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=\frac{1}{2}$

x	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$g'(x)$	+	0	−	0	+
$g(x)$	↗	7	↘	1	↗

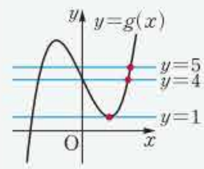
따라서 함수 $y=g(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. ··· ❶



(i) $n=1$, 4, 5일 때,

곡선 $y=g(x)$와 직선 $y=n$의 교점 중 x좌표가 양수인 점은 1개이므로

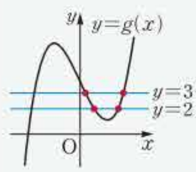
$f(1)=f(4)=f(5)=1$



(ii) $n=2$, 3일 때,

곡선 $y=g(x)$와 직선 $y=n$의 교점 중 x좌표가 양수인 점은 2개이므로

$f(2)=f(3)=2$ ··· ❷



(i), (ii)에서

$f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)$

$=1+2+2+1+1=7$ ··· ❸

답 7

단계	채점 기준	비율
❶	$y=12x^3-9x+4$의 그래프를 그릴 수 있다.	40 %
❷	$f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸	$f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)$의 값을 구할 수 있다.	10 %

06 전략 삼차함수 $f(x)$가 극값을 가질 때, 삼차방정식 $f(x)=0$이 오직 하나의 실근을 가지려면 (극댓값)×(극솟값)>0이어야 한다.

풀이 $f(x)=2x^3-3x^2-12x+k$라 하면

$f'(x)=6x^2-6x-12=6(x+1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서

$x=-1$ 또는 $x=2$

삼차방정식 $f(x)=0$이 오직 하나의 실근, 즉 한 실근과 두 허근을 가지려면 $f(-1)f(2)>0$이어야 하므로

$(k+7)(k-20)>0$

$\therefore k<-7$ 또는 $k>20$

답 $k<-7$ 또는 $k>20$

07 전략 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나려면 방정식 $f(x)=g(x)$가 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

풀이 곡선 $y=x^3-3x^2+2x-3$과 직선 $y=2x+k$가 서로 다른 두 점에서만 만나려면 방정식

$x^3-3x^2+2x-3=2x+k$, 즉

$x^3-3x^2-3-k=0$

이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

$f(x)=x^3-3x^2-3-k$라 하면

$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

삼차방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 두 실근, 즉 한 실근과 중근을 가지려면 $f(0)f(2)=0$이어야 하므로

$(-k-3)(-k-7)=0$

$\therefore k=-7$ 또는 $k=-3$

따라서 모든 k의 값의 곱은

$-7\cdot(-3)=21$ 답 21

08 전략 곡선 밖의 한 점에서 이 곡선에 그을 수 있는 접선의 개수는 접점의 개수와 같음을 이용한다.

풀이 $y=x^3+1$에서 $y'=3x^2$

점 $(1,\ a)$에서 곡선 $y=x^3+1$에 그은 접선의 접점의 좌표를 $(t,\ t^3+1)$이라 하면 접선의 기울기는 $3t^2$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^3+1)=3t^2(x-t)$

이 직선이 점 $(1,\ a)$를 지나므로

$a-(t^3+1)=3t^2(1-t)$

$\therefore 2t^3-3t^2-1+a=0$ …… ㉠

점 $(1,\ a)$에서 주어진 곡선에 서로 다른 세 개의 접선을 그을 수 있으려면 t에 대한 삼차방정식 ㉠이 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.

$f(t)=2t^3-3t^2-1+a$라 하면

$f'(t)=6t^2-6t=6t(t-1)$

$f'(t)=0$에서 $t=0$ 또는 $t=1$

삼차방정식 $f(t)=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면 $f(0)f(1)<0$이어야 하므로

$(a-1)(a-2)<0$

$\therefore 1<a<2$ 답 ④

09 전략 모든 실수 x에 대하여 부등식 $f(x)\ge 0$이 성립하려면 (함수 $f(x)$의 최솟값)≥ 0이어야 함을 이용한다.

풀이 $f(x)=3x^4-4x^3-12x^2+k$라 하면

$f'(x)=12x^3-12x^2-24x=12x(x+1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$k-5$	↗	k	↘	$k-32$	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 최솟값 $k-32$를 가지므로 모든 실수 x에 대하여 부등식 $f(x)\ge 0$이 성립하려면

$k-32<k-5<k$

$k-32\ge 0$ $\therefore k\ge 32$

즉 k의 최솟값은 32이다. 답 32

10 전략 어떤 구간에서 부등식 $h(x)\ge 0$이 성립하려면 그 구간에서 (함수 $h(x)$의 최솟값)≥ 0이어야 함을 이용한다.

풀이 $f(x)\ge 3g(x)$에서

$x^3+3x^2-k\ge 3(2x^2+3x-10)$

$\therefore x^3-3x^2-9x+30-k\ge 0$

$h(x)=x^3-3x^2-9x+30-k$라 하면

$h'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$

$h'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=3$

x	-1	$\cdots$	3	$\cdots$	4
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$	$-k+35$	↘	$-k+3$	↗	$-k+10$

따라서 구간 $[-1,\ 4]$에서 함수 $h(x)$는 $x=3$일 때 최솟값 $-k+3$을 가지므로 구간 $[-1,\ 4]$에서 부등식 $h(x)\ge 0$이 성립하려면

$-k+3<-k+10<-k+35$

$-k+3\ge 0$ $\therefore k\le 3$

즉 k의 최댓값은 3이다. 답 3

11 전략 어떤 구간에서 함수 $y=f(x)$의 그래프가 함수 $y=g(x)$의 그래프보다 항상 아래쪽에 있으려면 그 구간에서 부등식 $f(x)<g(x)$가 성립해야 함을 이용한다.

풀이 $x<0$일 때, 함수 $y=f(x)$의 그래프가 함수 $y=g(x)$의 그래프보다 항상 아래쪽에 있으려면 $x<0$일 때, 부등식 $f(x)<g(x)$가 성립해야 한다.

$f(x)<g(x)$에서

$2x^3-5x^2+k<4x^2-12x+8$

$\therefore 2x^3-9x^2+12x-8+k<0$ ··· ❶

$h(x)=2x^3-9x^2+12x-8+k$라 하면

$h'(x)=6x^2-18x+12=6(x-1)(x-2)$

$x<0$일 때 $h'(x)>0$이므로 함수 $h(x)$는 구간 $(-\infty,\ 0)$에서 증가한다. ··· ❷

따라서 $x<0$일 때, 부등식 $h(x)<0$이 성립하려면

$h(0)\le 0,$ $-8+k\le 0$

$\therefore k\le 8$ ··· ❸

즉 자연수 k는 1, 2, 3, …, 8의 8개이다. ··· ❹

답 8

단계	채점 기준	비율
❶	부등식을 세울 수 있다.	30 %
❷	함수 $h(x)$가 구간 $(-\infty,\ 0)$에서 증가함을 알 수 있다.	30 %
❸	k의 값의 범위를 구할 수 있다.	30 %
❹	자연수 k의 개수를 구할 수 있다.	10 %

12 전략 시각 t에서의 점 M의 위치를 구한 후 점 M의 가속도를 구한다.

풀이 시각 t에서의 점 M의 위치를 x라 하면

$x=\frac{1}{2}\{(4t^3+t^2-2t)+(t^2-6t)\}$

$=2t^3+t^2-4t$

수직선 위의 두 점 $\mathrm{A}(x_1)$, $\mathrm{B}(x_2)$를 이은 선분 AB의 중점의 좌표는

$\frac{x_1+x_2}{2}$

시각 t에서의 점 M의 속도를 v, 가속도를 a라 하면

$v=\frac{dx}{dt}=6t^2+2t-4,\ a=\frac{dv}{dt}=12t+2$

따라서 $t=3$에서의 점 M의 가속도는

$12\cdot 3+2=38$ 답 ⑤

13 전략 시각 t에서의 위치가 x일 때 속도는 $\frac{dx}{dt}$임을 이용한다.

풀이 시각 t에서의 두 점 P, Q의 속도를 각각 v_{P}, v_{Q}라 하면

$$v_P=\frac{dx_1}{dt}=3t^2-4t+3,\ v_Q=\frac{dx_2}{dt}=2t+12$$

이때 $v_P=v_Q$에서 $\quad 3t^2-4t+3=2t+12$

$3t^2-6t-9=0, \quad (t+1)(t-3)=0$

$\therefore t=3\ (\because t\geq 0)$

$t=3$에서의 점 P의 위치는

$3^3-2\cdot 3^2+3\cdot 3=18$

$t=3$에서의 점 Q의 위치는

$3^2+12\cdot 3=45$

따라서 두 점 P, Q 사이의 거리는

$45-18=27$ 답 27

두 점 P, Q의 속도가 같으면 $v_P=v_Q$

14 전략 운동 방향을 바꿀 때의 속도는 0임을 이용한다.

풀이 시각 t에서의 점 P의 속도를 v라 하면

$$v=\frac{dx}{dt}=3t^2-12$$

점 P가 운동 방향을 바꿀 때 $v=0$이므로

$3t^2-12=0, \quad (t+2)(t-2)=0$

$\therefore t=2\ (\because t>0)$

즉 $t=2$에서의 점 P의 위치는 원점이므로

$2^3-12\cdot 2+k=0 \quad \therefore k=16$ 답 ④

15 전략 열차가 정지할 때의 속도는 0임을 이용한다.

풀이 제동을 건 지 t초 후의 열차의 속도를 v m/s라 하면

$$v=\frac{dx}{dt}=72-2.4t$$

열차가 정지할 때 $v=0$이므로

$72-2.4t=0 \quad \therefore t=30$

따라서 제동을 건 후 열차가 정지할 때까지 걸린 시간은 30초이다. 답 ①

16 전략 지면으로부터의 높이가 45 m일 때 물체가 최고 높이에 도달하므로 이때의 속도가 0 m/s임을 이용한다.

풀이 t초 후의 물체의 속도를 v m/s라 하면

$$v=\frac{dh}{dt}=a-10t$$

최고 높이에 도달할 때 $v=0$이므로

$a-10t=0 \quad \therefore t=\frac{a}{10}$

즉 $\frac{a}{10}$초 후의 물체의 높이가 45 m이므로

$$a\cdot\frac{a}{10}-5\left(\frac{a}{10}\right)^2=45$$

$\frac{a^2}{20}=45, \quad a^2=900$

$\therefore a=30\ (\because a>0)$ 답 30

17 전략 위치의 그래프에서 접선의 기울기는 속도임을 이용한다.

풀이 ① $x'(b)<0$이므로 $t=b$에서 점 P는 음의 방향으로 움직인다.

② $x'(g)>0$이므로 $t=g$에서 점 P는 양의 방향으로 움직인다.

③ $x'(a)=0$이므로 $t=a$에서의 점 P의 속도는 0이다. 이때 $0<t<a$에서 $x'(t)>0$이므로 $t=a$일 때 점 P의 속도는 최대가 아니다.

④ $0<t<g$에서 점 P는 $t=a$, $t=c$, $t=d$, $t=f$일 때 운동 방향을 바꾸므로 네 번 바꾼다.

⑤ $0<t<g$에서 점 P는 $t=c$, $t=e$일 때 원점을 지나므로 두 번 지난다.

답 ④

점 P가 $t=a$에서 운동 방향을 바꿀 때, $x'(a)=0$이고 $t=a$의 좌우에서 $x'(t)$의 부호가 바뀐다.

18 전략 두 점 P, Q의 좌표를 t를 이용하여 나타낸다.

풀이 점 P가 출발한 지 $t\ (t\geq 1)$초 후의 두 점 P, Q의 좌표는 각각

$(3t,\ 0),\ (0,\ 4(t-1))$

이므로 △OPQ의 넓이를 S라 하면

$$S=\frac{1}{2}\cdot 3t\cdot 4(t-1)=6t^2-6t$$

따라서 △OPQ의 넓이의 변화율은

$$\frac{dS}{dt}=12t-6$$

이므로 점 P가 출발한 지 3초 후의 △OPQ의 넓이의 변화율은

$12\cdot 3-6=30$ 답 30

19 전략 시각 t에서의 부피가 V일 때 부피의 변화율은 $\frac{dV}{dt}$이다.

풀이 t초 후의 원뿔의 밑면의 반지름의 길이를 r cm, 높이를 h cm라 하면

$r=8+t,\ h=12-t$

t초 후의 원뿔의 부피를 V cm^{3}라 하면

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi(8+t)^2(12-t) \quad \cdots ❶$$

원뿔의 부피의 변화율은

$$\frac{dV}{dt}$$
$$=\frac{1}{3}\pi\{2(8+t)\cdot 1\cdot(12-t)+(8+t)^2\cdot(-1)\}$$
$$=\frac{1}{3}\pi(8+t)(16-3t) \quad \cdots ❷$$

$\frac{dV}{dt}=0$에서 $\quad \frac{1}{3}\pi(8+t)(16-3t)=0$

$\therefore t=\frac{16}{3}\ (\because 0<t<12)$

$12-t>0$이므로 $t<12$

따라서 원뿔의 부피의 변화율이 0 cm^3/s가 되는 것은 $\frac{16}{3}$초 후이다. $\cdots$ ❸

답 $\frac{16}{3}$초

단계	채점 기준	비율
❶	원뿔의 부피를 t에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40 %
❷	원뿔의 부피의 변화율을 구할 수 있다.	30 %
❸	원뿔의 부피의 변화율이 0 cm^3/s가 되는 것은 몇 초 후인지 구할 수 있다.	30 %

07 부정적분

14 부정적분

Lecture 24 부정적분 84쪽

1-1 (1) $(6x)'=6$이므로 $\int 6\,dx=6x+C$

(2) $(-x^2)'=-2x$이므로 $\int(-2x)\,dx=-x^2+C$

(3) $(x^3)'=3x^2$이므로 $\int 3x^2\,dx=x^3+C$

(4) $(x^4)'=4x^3$이므로 $\int 4x^3\,dx=x^4+C$

답 (1) $6x+C$ (2) $-x^2+C$
(3) x^3+C (4) x^4+C

1-2 (1) $f(x)=(-4x+C)'=-4$

(2) $f(x)=(x^2-6x+C)'=2x-6$

답 (1) $f(x)=-4$ (2) $f(x)=2x-6$

2-1 (1) $\dfrac{d}{dx}\int f(x)\,dx=f(x)=x^2-x$

(2) $\int\left\{\dfrac{d}{dx}f(x)\right\}dx=f(x)+C=x^2-x+C$

답 (1) x^2-x (2) x^2-x+C

2-2 (1) $\dfrac{d}{dx}\int f(x)\,dx=f(x)$이므로

$$\frac{d}{dx}\int(-5x^2+2x)\,dx=-5x^2+2x$$

(2) $\int\left\{\dfrac{d}{dx}f(x)\right\}dx=f(x)+C$이므로

$$\int\left\{\frac{d}{dx}(-5x^2+2x)\right\}dx=-5x^2+2x+C$$

답 (1) $-5x^2+2x$ (2) $-5x^2+2x+C$

Lecture 25 부정적분의 계산 85쪽

1-1 (1) $\int x^5\,dx=\dfrac{1}{5+1}x^{5+1}+C=\dfrac{1}{6}x^6+C$

(2) $\int x^9\,dx=\dfrac{1}{9+1}x^{9+1}+C=\dfrac{1}{10}x^{10}+C$

(3) $\int y^7\,dy=\dfrac{1}{7+1}y^{7+1}+C=\dfrac{1}{8}y^8+C$

(4) $\int t^{12}\,dt=\dfrac{1}{12+1}t^{12+1}+C=\dfrac{1}{13}t^{13}+C$

답 (1) $\dfrac{1}{6}x^6+C$ (2) $\dfrac{1}{10}x^{10}+C$
(3) $\dfrac{1}{8}y^8+C$ (4) $\dfrac{1}{13}t^{13}+C$

Q BOX

$f(x)$를 적분한 후 미분하면 ➡ $f(x)$
$f(x)$를 미분한 후 적분하면 ➡ $f(x)+C$
(단, C는 적분상수)

함수의 합, 차의 부정적분에서 적분상수는 각각의 적분상수를 더하거나 뺀 것으로 나타내지 않고 하나의 적분상수로 나타낼 수 있다.

$\int 1\,dx$를 간단히 $\int dx$로 나타내기도 한다.

$\int f(x)dx\pm\int g(x)dx$
$=\int\{f(x)\pm g(x)\}dx$
(복호동순)

2-1 (1) $\int 10x^4\,dx=10\int x^4\,dx$
$=10\cdot\dfrac{1}{5}x^5+C$
$=2x^5+C$

(2) $\int(2x+7)\,dx=\int 2x\,dx+\int 7\,dx$
$=2\int x\,dx+\int 7\,dx$
$=2\cdot\dfrac{1}{2}x^2+7x+C$
$=x^2+7x+C$

(3) $\int(6x^2-5)\,dx=\int 6x^2\,dx-\int 5\,dx$
$=6\int x^2\,dx-\int 5\,dx$
$=6\cdot\dfrac{1}{3}x^3-5x+C$
$=2x^3-5x+C$

(4) $\int(x^3-4x+1)\,dx=\int x^3\,dx-\int 4x\,dx+\int dx$
$=\int x^3\,dx-4\int x\,dx+\int dx$
$=\dfrac{1}{4}x^4-4\cdot\dfrac{1}{2}x^2+x+C$
$=\dfrac{1}{4}x^4-2x^2+x+C$

답 (1) $2x^5+C$ (2) x^2+7x+C
(3) $2x^3-5x+C$ (4) $\dfrac{1}{4}x^4-2x^2+x+C$

2-2 (1) $\int(3x-1)(x+2)\,dx=\int(3x^2+5x-2)\,dx$
$=x^3+\dfrac{5}{2}x^2-2x+C$

(2) $\int\dfrac{x^2-1}{x+1}\,dx=\int\dfrac{(x+1)(x-1)}{x+1}\,dx$
$=\int(x-1)\,dx$
$=\dfrac{1}{2}x^2-x+C$

(3) $\int(x-8)\,dx+\int(2x+4)\,dx=\int(x-8+2x+4)\,dx$
$=\int(3x-4)\,dx$
$=\dfrac{3}{2}x^2-4x+C$

(4) $\int\dfrac{x^2}{x-3}\,dx-\int\dfrac{9}{x-3}\,dx=\int\dfrac{x^2-9}{x-3}\,dx$
$=\int\dfrac{(x+3)(x-3)}{x-3}\,dx$
$=\int(x+3)\,dx$
$=\dfrac{1}{2}x^2+3x+C$

답 (1) $x^3+\dfrac{5}{2}x^2-2x+C$ (2) $\dfrac{1}{2}x^2-x+C$
(3) $\dfrac{3}{2}x^2-4x+C$ (4) $\dfrac{1}{2}x^2+3x+C$

2-3 (1) $f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(10x+9)\,dx$

$=5x^2+9x+C$

$f(1)=7$이므로

$5+9+C=7 \qquad \therefore C=-7$

$\therefore f(x)=5x^2+9x-7$

(2) $f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(-3x^2+6x+1)\,dx$

$=-x^3+3x^2+x+C$

$f(-1)=4$이므로

$1+3-1+C=4 \qquad \therefore C=1$

$\therefore f(x)=-x^3+3x^2+x+1$

답 (1) $f(x)=5x^2+9x-7$
(2) $f(x)=-x^3+3x^2+x+1$

Q BOX

도함수 $f'(x)$가 주어지면 $f(x)=\int f'(x)\,dx$임을 이용하여 $f(x)$를 적분상수를 포함한 식으로 나타낼 수 있다.

기본+표준 유형 Q+Q

86쪽

01 $f(x)=(-2x^3+5x^2-3x+C)'=-6x^2+10x-3$
이므로

$f(1)=-6+10-3=1$ 답 1

02 $f(x)=F'(x)=(x^3+ax^2+bx)'$

$=3x^2+2ax+b$

$f(0)=6$이므로 $\qquad b=6$

$f'(x)=6x+2a$이고 $f'(0)=-2$이므로

$2a=-2 \qquad \therefore a=-1$

$\therefore ab=-6$ 답 ②

Q 쌤 한마디

$F(x)$는 $f(x)$의 한 부정적분이다.
$\Longleftrightarrow F'(x)=f(x)$
$\Longleftrightarrow$ 함수 $F(x)$의 도함수가 $f(x)$이다.
$\Longleftrightarrow \int f(x)\,dx=F(x)+C$ (단, C는 적분상수)

03 $\dfrac{d}{dx}\int(3x^2+px+7)\,dx=qx^2-4x+r$에서

$3x^2+px+7=qx^2-4x+r$

위의 등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로

$p=-4,\ q=3,\ r=7$

$\therefore p+q+r=6$ 답 6

ax^2+bx+c
$=a'x^2+b'x+c'$
이 x에 대한 항등식이면
$a=a',\ b=b',\ c=c'$

04 $F(x)=\int\left\{\dfrac{d}{dx}(-x^3+7x)\right\}dx=-x^3+7x+C$

$F(0)=4$이므로 $\qquad C=4$

따라서 $F(x)=-x^3+7x+4$이므로

$F(2)=-8+14+4=10$ 답 ⑤

05 $\int\{f(x)-2x\}\,dx=x^3+ax^2+bx+C$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)-2x=3x^2+2ax+b$

$\therefore f(x)=3x^2+2(a+1)x+b$

$f(0)=-4$이므로 $\qquad b=-4$

$f'(x)=6x+2(a+1)$이고 $f'(-1)=2$이므로

$-6+2(a+1)=2 \qquad \therefore a=3$

따라서 $f(x)=3x^2+8x-4$이므로

$f(-3)=27-24-4=-1$ 답 ②

06 $\dfrac{d}{dx}\{f(x)+g(x)\}=-2$에서

$\int\left[\dfrac{d}{dx}\{f(x)+g(x)\}\right]dx=\int(-2)\,dx$

$\therefore f(x)+g(x)=-2x+C_1$

좌변과 우변을 각각 적분하고 각 변의 적분상수를 하나로 묶어서 C_1로 나타낼 수 있다.

위의 등식에 $x=0$을 대입하면

$f(0)+g(0)=C_1$

이때 $f(0)=1,\ g(0)=-1$이므로 $\qquad C_1=0$

$\therefore f(x)+g(x)=-2x$ …… ㉠

$\dfrac{d}{dx}\{f(x)-g(x)\}=8x$에서

$\int\left[\dfrac{d}{dx}\{f(x)-g(x)\}\right]dx=\int 8x\,dx$

$\therefore f(x)-g(x)=4x^2+C_2$

위의 등식에 $x=0$을 대입하면

$f(0)-g(0)=C_2$

이때 $f(0)=1,\ g(0)=-1$이므로 $\qquad C_2=2$

$\therefore f(x)-g(x)=4x^2+2$ …… ㉡

㉠+㉡을 하면 $\qquad 2f(x)=4x^2-2x+2$

$\therefore f(x)=2x^2-x+1$

㉠−㉡을 하면 $\qquad 2g(x)=-4x^2-2x-2$

$\therefore g(x)=-2x^2-x-1$

$\therefore f(-1)-g(1)=(2+1+1)-(-2-1-1)$

$=4-(-4)=8$

답 8

07 $f(x)=\int\dfrac{x^3}{x+1}\,dx+\int\dfrac{1}{x+1}\,dx$

$=\int\dfrac{x^3+1}{x+1}\,dx$

$=\int\dfrac{(x+1)(x^2-x+1)}{x+1}\,dx$

$=\int(x^2-x+1)\,dx$

$=\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{2}x^2+x+C$

$f(1)=\dfrac{5}{6}$이므로

$\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{2}+1+C=\dfrac{5}{6} \qquad \therefore C=0$

따라서 $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{2}x^2+x$이므로

$f(3)=9-\dfrac{9}{2}+3=\dfrac{15}{2}$ 답 ④

07 부정적분

08 $f(x)=\int(1+2x+3x^2+4x^3+5x^4)\,dx$

$\quad=x+x^2+x^3+x^4+x^5+C$

$f(0)=-1$이므로 $\quad C=-1$

따라서 $f(x)=x+x^2+x^3+x^4+x^5-1$이므로

$\quad f(-1)=-1+1-1+1-1-1$

$\quad\quad=-2$

답 -2

09 $f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(4x^3-9x^2+k)\,dx$

$\quad=x^4-3x^3+kx+C$

$f(0)=3$이므로 $\quad C=3$

$f(x)=x^4-3x^3+kx+3$이고 $f(1)=2$이므로

$\quad 1-3+k+3=2 \quad \therefore k=1$

따라서 $f(x)=x^4-3x^3+x+3$이므로

$\quad f(-2)=16+24-2+3=41$

답 41

10 $f(x)=\int f'(x)\,dx=\int\frac{x^4-1}{x^2+1}\,dx$

$\quad=\int\frac{(x^2+1)(x^2-1)}{x^2+1}\,dx$

$\quad=\int(x^2-1)\,dx$

$\quad=\frac{1}{3}x^3-x+C$

$f(-2)=\frac{16}{3}$이므로

$\quad -\frac{8}{3}+2+C=\frac{16}{3} \quad \therefore C=6$

따라서 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x+6$이므로 $f(x)=0$에서

$\quad \frac{1}{3}x^3-x+6=0, \quad x^3-3x+18=0$

$\quad (x+3)(x^2-3x+6)=0$

$\quad \therefore x=-3 \ (\because x^2-3x+6>0)$

답 -3

11 $\int f(x)\,dx=xf(x)-2x^3-3x^2+C$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\quad f(x)=f(x)+xf'(x)-6x^2-6x$

$\quad xf'(x)=6x^2+6x$

$\quad \therefore f'(x)=6x+6$

$\quad \therefore f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(6x+6)\,dx$

$\quad\quad=3x^2+6x+C_1$

$f(1)=4$이므로

$\quad 3+6+C_1=4 \quad \therefore C_1=-5$

$\quad \therefore f(x)=3x^2+6x-5$

답 $f(x)=3x^2+6x-5$

12 $F(x)$는 함수 $f(x)$의 한 부정적분이므로

$\quad F'(x)=f(x)$

$F(x)+\int(x-1)f(x)\,dx=2x^4-8x^3+7x^2$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\quad f(x)+(x-1)f(x)=8x^3-24x^2+14x$

$\quad xf(x)=8x^3-24x^2+14x$

$\quad \therefore f(x)=8x^2-24x+14=8\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-4$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\frac{3}{2}$에서 최솟값 -4를 갖는다.

답 ③

13 $f(x)=\begin{cases}2x^2+x+C_1 & (x>-2)\\ -x+C_2 & (x<-2)\end{cases}$

$f(1)=5$이므로

$\quad 2+1+C_1=5 \quad \therefore C_1=2$

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이면 $x=-2$에서 연속이므로

$\quad \lim_{x\to-2+}f(x)=\lim_{x\to-2-}f(x)=f(-2)$

즉 $\lim_{x\to-2+}(2x^2+x+2)=\lim_{x\to-2-}(-x+C_2)$에서

$\quad 8-2+2=2+C_2 \quad \therefore C_2=6$

따라서 $f(x)=\begin{cases}2x^2+x+2 & (x\ge-2)\\ -x+6 & (x<-2)\end{cases}$이므로

$\quad f(-6)=6+6=12$

답 12

쌤 한마디

함수 $f(x)$는 모든 실수 x에서 연속이므로

$\quad f(x)=\begin{cases}2x^2+x+2 & (x>-2)\\ -x+6 & (x\le-2)\end{cases}$

과 같이 등호를 아래 식의 x의 값의 범위에 포함하여 나타내어도 상관없다.

14 $f(x)=\begin{cases}3x+C_1 & (x>1)\\ kx+C_2 & (x<1)\end{cases}$

$f(2)=1$이므로

$\quad 6+C_1=1 \quad \therefore C_1=-5$

$f(0)=3$이므로 $\quad C_2=3$

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이려면

$\quad \lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1-}f(x)=f(1)$

즉 $\lim_{x\to1+}(3x-5)=\lim_{x\to1-}(kx+3)$에서

$\quad 3-5=k+3 \quad \therefore k=-5$

답 ①

15 $\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x^2-4}=\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{(x+2)(x-2)}$

$\quad=\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\cdot\frac{1}{x+2}$

$\quad=\frac{1}{4}f'(2)$

$f(x)=\int(-x^3+2x^2+5x-2)\,dx$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\quad f'(x)=-x^3+2x^2+5x-2$

$\quad \therefore f'(2)=-8+8+10-2=8$

따라서 구하는 값은

$\quad \frac{1}{4}f'(2)=\frac{1}{4}\cdot8=2$

답 ③

Q BOX

이차함수의 최대·최소
$y=ax^2+bx+c$ 꼴의 최댓값 또는 최솟값은 $y=a(x-p)^2+q$ 꼴로 변형하여 구한다.
① $a>0$일 때, $x=p$에서 최솟값 q를 갖는다.
② $a<0$일 때, $x=p$에서 최댓값 q를 갖는다.

구간에 따라 다르게 정의된 함수는 각 구간에서의 식을 각각 적분한다. 이때 적분상수를 C_1, C_2와 같이 서로 다른 문자를 사용하여 나타내어야 함에 주의한다.

$$\begin{array}{r|rrrr} -3 & 1 & 0 & -3 & 18 \\ & & -3 & 9 & -18 \\ \hline & 1 & -3 & 6 & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore x^3-3x+18$
$=(x+3)(x^2-3x+6)$

$\{f(x)g(x)\}'$
$=f'(x)g(x)$
$+f(x)g'(x)$

16 $\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(3h)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)+f(0)-f(3h)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{\{f(h)-f(0)\}-\{f(3h)-f(0)\}}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}-\lim_{h\to 0}\frac{f(3h)-f(0)}{3h}\cdot 3$

$=f'(0)-3f'(0)=-2f'(0)$

$f(x)=\int(x-1)(x^2+x+1)\,dx$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=(x-1)(x^2+x+1)=x^3-1$

$\therefore f'(0)=-1$

따라서 구하는 값은

$-2f'(0)=-2\cdot(-1)=2$ 답 2

17 $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x-2h)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)+f(x)-f(x-2h)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{\{f(x+h)-f(x)\}-\{f(x-2h)-f(x)\}}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$-\lim_{h\to 0}\frac{f(x-2h)-f(x)}{-2h}\cdot(-2)$

$=f'(x)+2f'(x)=3f'(x)$

즉 $3f'(x)=3x^2-12x+6$이므로

$f'(x)=x^2-4x+2$

$\therefore f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(x^2-4x+2)\,dx$

$=\frac{1}{3}x^3-2x^2+2x+C$

$f(0)=1$이므로 $C=1$

따라서 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2+2x+1$이므로

$f(-1)=-\frac{1}{3}-2-2+1=-\frac{10}{3}$ 답 ②

18 $f'(x)=x^3-1$이므로

$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(x^3-1)\,dx$

$=\frac{1}{4}x^4-x+C$

곡선 $y=f(x)$가 점 $(2, 4)$를 지나므로

$4=4-2+C$ $\therefore C=2$

따라서 $f(x)=\frac{1}{4}x^4-x+2$이므로

$f(4)=64-4+2=62$ 답 ④

19 $f'(x)=-8x+k$이므로

$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(-8x+k)\,dx$

$=-4x^2+kx+C$

Q BOX

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 기울기는 $x=a$에서의 미분계수 $f'(a)$와 같다.

이차함수 $f'(x)$에 대하여 $f'(0)=0$, $f'(4)=0$이므로 $f'(x)=ax(x-4)$라 할 수 있다. 이때 주어진 $y=f'(x)$의 그래프는 위로 볼록하므로 $a<0$이다.

곡선 $y=f(x)$가 점 $(0, -1)$을 지나므로

$C=-1$

$\therefore f(x)=-4x^2+kx-1$

따라서 이차방정식 $-4x^2+kx-1=0$의 두 근의 합이 3이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-\frac{k}{-4}=3$ $\therefore k=12$

즉 $f(x)=-4x^2+12x-1$이므로

$f(1)=-4+12-1=7$ 답 ⑤

20 $f'(x)=x^2+2x-3=(x+3)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-3$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-3$에서 극댓값 13을 갖고, $x=1$에서 극솟값을 갖는다.

이때

$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(x^2+2x-3)\,dx$

$=\frac{1}{3}x^3+x^2-3x+C$

이고 $f(-3)=13$이므로

$-9+9+9+C=13$ $\therefore C=4$

즉 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2-3x+4$이므로 $f(x)$의 극솟값은

$f(1)=\frac{1}{3}+1-3+4=\frac{7}{3}$ 답 ⑤

21 $y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표가 0, 4이므로 $f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=4$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=4$에서 극댓값을 갖고, $x=0$에서 극솟값 $-\frac{2}{3}$를 갖는다.

$f'(x)=ax(x-4)$ $(a<0)$라 하면 $y=f'(x)$의 그래프가 점 $(2, 4)$를 지나므로

$4=a\cdot 2\cdot(-2)$ $\therefore a=-1$

$\therefore f(x)=\int f'(x)\,dx=\int\{-x(x-4)\}\,dx$

$=\int(-x^2+4x)\,dx$

$=-\frac{1}{3}x^3+2x^2+C$

$f(0)=-\frac{2}{3}$이므로 $C=-\frac{2}{3}$

즉 $f(x)=-\frac{1}{3}x^3+2x^2-\frac{2}{3}$이므로 $f(x)$의 극댓값은

$f(4)=-\frac{64}{3}+32-\frac{2}{3}=10$ 답 10

07 부정적분

중단원 마무리

90쪽

01 전략 $F(x)$와 $G(x)$가 모두 $f(x)$의 부정적분이므로 $F'(x)=G'(x)$임을 이용한다.

풀이 $F'(x)=G'(x)$이므로

$$\int F'(x)\,dx=\int G'(x)\,dx$$

$$\therefore G(x)=F(x)+C$$

위의 등식에 $x=0$을 대입하면

$$G(0)=F(0)+C,\quad 2=0+C\quad \therefore C=2$$

따라서 $G(x)=F(x)+2=4x^3+x^2-9x+2$이므로

$$G(-2)=-32+4+18+2=-8$$

답 -8

02 전략 $\frac{d}{dx}\int g(x)\,dx=g(x)$임을 이용한다.

풀이 $F(x)=\frac{d}{dx}\int xf(x)\,dx=xf(x)$이므로

$$F(2)=2f(2)=2\cdot 16=32$$

답 ②

03 전략 $\int\left\{\frac{d}{dx}g(x)\right\}dx=g(x)+C$임을 이용한다.

풀이 $f(x)=\int\left\{\frac{d}{dx}(-x^2+ax)\right\}dx=-x^2+ax+C$

이고 $f(0)=3$이므로 $\quad C=3$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1-h)-f(1+2h)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(1-h)-f(1)+f(1)-f(1+2h)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\{f(1-h)-f(1)\}-\{f(1+2h)-f(1)\}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(1-h)-f(1)}{-h}\cdot(-1)$$

$$-\lim_{h\to 0}\frac{f(1+2h)-f(1)}{2h}\cdot 2$$

$$=-f'(1)-2f'(1)=-3f'(1)$$

이므로 $\quad -3f'(1)=-6\quad \therefore f'(1)=2$

이때 $f'(x)=-2x+a$이므로

$$-2+a=2\quad \therefore a=4$$

따라서 $f(x)=-x^2+4x+3$이므로

$$f(3)=-9+12+3=6$$

$$\therefore a+f(3)=10$$

답 10

04 전략 주어진 등식의 양변을 적분하여 $f(x)g(x)$를 적분상수를 포함한 식으로 나타낸 후 주어진 함숫값을 이용하여 적분상수를 구한다.

풀이 $\frac{d}{dx}\{f(x)g(x)\}=3x^2$에서

$$\int\left[\frac{d}{dx}\{f(x)g(x)\}\right]dx=\int 3x^2\,dx$$

$$\therefore f(x)g(x)=x^3+C$$

위의 등식에 $x=1$을 대입하면 $\quad f(1)g(1)=1+C$

이때 $f(1)=7$, $g(1)=-1$이므로

$$-7=1+C\quad \therefore C=-8$$

$$\therefore f(x)g(x)=x^3-8=(x-2)(x^2+2x+4)$$

따라서

$$\begin{cases}f(x)=x-2\\ g(x)=x^2+2x+4\end{cases}\text{ 또는 }\begin{cases}f(x)=x^2+2x+4\\ g(x)=x-2\end{cases}$$

이고 $f(1)=7$, $g(1)=-1$이므로

$$f(x)=x^2+2x+4,\ g(x)=x-2$$

$$\therefore f(-1)+g(6)=(1-2+4)+(6-2)$$

$$=3+4=7$$

답 7

> Q BOX
> $f(x)=x-2$, $g(x)=x^2+2x+4$이면 $f(1)=1-2=-1$, $g(1)=1+2+4=7$이므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

05 전략 $\int g(x)\,dx-\int h(x)\,dx=\int\{g(x)-h(x)\}dx$임을 이용한다.

풀이 $f(x)=\int\left(\frac{1}{2}x^3+2x+1\right)dx-\int\left(\frac{1}{2}x^3+x\right)dx$

$$=\int\left\{\frac{1}{2}x^3+2x+1-\left(\frac{1}{2}x^3+x\right)\right\}dx$$

$$=\int(x+1)\,dx=\frac{1}{2}x^2+x+C$$

$f(0)=1$이므로 $\quad C=1$

따라서 $f(x)=\frac{1}{2}x^2+x+1$이므로

$$f(4)=8+4+1=13$$

답 ④

06 전략 주어진 두 등식을 더하고 빼서 $f(x)$, $g(x)$를 각각 구한다.

풀이 $f(x)+g(x)=\int(x^2-2x)\,dx\quad$ ⋯⋯ ㉠

$$f(x)-g(x)=\int(-x^2+6x)\,dx\quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠+㉡을 하면

$$2f(x)=\int(x^2-2x)\,dx+\int(-x^2+6x)\,dx$$

$$=\int(x^2-2x-x^2+6x)\,dx$$

$$=\int 4x\,dx=2x^2+C_1$$

$$\therefore f(x)=x^2+\frac{C_1}{2}$$

$f(0)=-1$이므로 $\quad \frac{C_1}{2}=-1$

$$\therefore f(x)=x^2-1\quad \cdots ❶$$

> $f(x)=x^2+\frac{C_1}{2}$에서 상수항이 $\frac{C_1}{2}$이므로 C_1의 값을 구할 필요가 없다.

㉠−㉡을 하면

$$2g(x)=\int(x^2-2x)\,dx-\int(-x^2+6x)\,dx$$

$$=\int\{x^2-2x-(-x^2+6x)\}dx$$

$$=\int(2x^2-8x)\,dx=\frac{2}{3}x^3-4x^2+C_2$$

$$\therefore g(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2+\frac{C_2}{2}$$

$g(0)=2$이므로 $\quad \frac{C_2}{2}=2$

$$\therefore g(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2+2\quad \cdots ❷$$

$$\therefore f(-3)-g(3)=(9-1)-(9-18+2)$$

$$=8-(-7)=15\quad \cdots ❸$$

답 15

단계	채점 기준	비율
❶	$f(x)$를 구할 수 있다.	40 %
❷	$g(x)$를 구할 수 있다.	40 %
❸	$f(-3)-g(3)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

07 전략 $f(x)=\int f'(x)\,dx$임을 이용한다.

풀이 $f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(3x^2-kx+1)\,dx$

$=x^3-\frac{k}{2}x^2+x+C$

$f(0)=1$이므로 $C=1$

$f(2)=1$이므로

$8-2k+2+1=1$ $\therefore k=5$ 답 ①

08 전략 $y=f'(x)$의 그래프를 이용하여 $f'(x)$를 구한 후 $f(x)=\int f'(x)\,dx$임을 이용한다.

풀이 $f'(x)=-\frac{2}{5}x$이므로

$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int\left(-\frac{2}{5}x\right)dx$

$=-\frac{1}{5}x^2+C$

$y=f(x)$의 그래프가 점 $(5,\ 3)$을 지나므로

$3=-5+C$ $\therefore C=8$

따라서 $f(x)=-\frac{1}{5}x^2+8$이고 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(10,\ a)$를 지나므로

$a=-20+8=-12$ 답 ③

두 점 $(0,\ 0)$, $(5,\ -2)$를 지나는 직선의 방정식은

$y=-\frac{2}{5}x$

09 전략 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하여 $f'(x)$를 구한다.

풀이 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=f(x)+xf'(x)+24x^3-6x^2$

$xf'(x)=-24x^3+6x^2$

$\therefore f'(x)=-24x^2+6x$

$\therefore f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(-24x^2+6x)\,dx$

$=-8x^3+3x^2+C$

$f(1)=0$이므로

$-8+3+C=0$ $\therefore C=5$

따라서 $f(x)=-8x^3+3x^2+5$이므로

$f(-1)=8+3+5=16$ 답 ⑤

10 전략 $x\ge-1$, $x<-1$에서 각각 $f'(x)$를 나타내어 $f(x)$를 구한 후 $f(x)$가 $x=-1$에서 연속임을 이용한다.

풀이 $f'(x)=\begin{cases} x & (x\ge-1) \\ -1 & (x<-1)\end{cases}$이므로

$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}x^2+C_1 & (x\ge-1) \\ -x+C_2 & (x<-1)\end{cases}$

$y=f(x)$의 그래프가 원점을 지나므로

$C_1=0$

두 점 $(-1,\ -1)$, $(0,\ 0)$을 지나는 직선의 방정식은

$y=x$

$f(0)=0$

$f(x)$가 연속함수이면 $x=-1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to-1+}f(x)=\lim_{x\to-1-}f(x)=f(-1)$

즉 $\lim_{x\to-1+}\frac{1}{2}x^2=\lim_{x\to-1-}(-x+C_2)$에서

$\frac{1}{2}=1+C_2$ $\therefore C_2=-\frac{1}{2}$

따라서 $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}x^2 & (x\ge-1) \\ -x-\frac{1}{2} & (x<-1)\end{cases}$이므로

$f\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}=1$ 답 1

11 전략 극한의 성질과 미분계수의 정의를 이용한다.

풀이 $\lim_{x\to-1}\frac{f(x)}{x+1}=2k$에서 $x\longrightarrow-1$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\longrightarrow 0$이므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉 $\lim_{x\to-1}f(x)=0$이므로

$f(-1)=0$

$\therefore \lim_{x\to-1}\frac{f(x)}{x+1}=\lim_{x\to-1}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=f'(-1)$

$\therefore f'(-1)=2k$

이때 $f'(x)=x-k$에서 $f'(-1)=-1-k$이므로

$2k=-1-k$, $3k=-1$

$\therefore k=-\frac{1}{3}$

$f'(x)=x+\frac{1}{3}$이므로

$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int\left(x+\frac{1}{3}\right)dx$

$=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x+C$

$f(-1)=0$이므로

$\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+C=0$ $\therefore C=-\frac{1}{6}$

따라서 $f(x)=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x-\frac{1}{6}$이므로

$f(1)=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$ 답 $\frac{2}{3}$

12 전략 도함수의 정의를 이용하여 $f'(x)$를 구한다.

$f(x+y)$
$=f(x)+f(y)-xy$
에 $x=0$, $y=h$를 대입하면
$f(0+h)$
$=f(0)+f(h)-0$

풀이 (1) $f'(0)=\lim_{h\to0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(0)+f(h)-0-f(0)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}$

이때 $f'(0)=4$이므로 $\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}=4$

$\therefore f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(x)+f(h)-xh-f(x)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}-x$

$=-x+4$ ··· ❶

07 부정적분

(2) $f'(x)=-x+4$이므로

$$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(-x+4)\,dx$$
$$=-\frac{1}{2}x^2+4x+C$$

이때 $f(x+y)=f(x)+f(y)-xy$에 $x=0,\ y=0$을 대입하면

$$f(0)=f(0)+f(0)-0 \qquad \therefore f(0)=0$$

따라서 $C=0$이므로

$$f(x)=-\frac{1}{2}x^2+4x \qquad \cdots ❷$$

답 (1) $f'(x)=-x+4$ (2) $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+4x$

단계	채점 기준	비율
❶	$f'(x)$를 구할 수 있다.	50 %
❷	$f(x)$를 구할 수 있다.	50 %

13 전략 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(x,\ f(x))$에서의 접선의 기울기는 $f'(x)$임을 이용한다.

풀이 $f'(x)=4x-1$이므로

$$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(4x-1)\,dx=2x^2-x+C$$

$f(0)=1$이므로 $\quad C=1$

따라서 $f(x)=2x^2-x+1$이므로

$$f(2)=8-2+1=7$$

답 7

14 전략 $y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표와 $f'(x)$의 부호를 이용하여 $f(x)$가 극댓값을 갖는 x의 값과 극솟값을 갖는 x의 값을 각각 찾는다.

풀이 $y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표가 $-6,\ 0$이므로 $f'(x)=0$에서

$x=-6$ 또는 $x=0$

x	$\cdots$	-6	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-6$에서 극댓값 10, $x=0$에서 극솟값 -2를 갖는다.

$f'(x)=ax(x+6)\ (a>0)$이라 하면

$$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int ax(x+6)\,dx$$
$$=\int(ax^2+6ax)\,dx=\frac{a}{3}x^3+3ax^2+C$$

$f(-6)=10$이므로

$$-72a+108a+C=10$$
$$\therefore 36a+C=10 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$f(0)=-2$이므로 $\quad C=-2$

$C=-2$를 ㉠에 대입하면 $\quad 36a-2=10$

$$36a=12 \qquad \therefore a=\frac{1}{3}$$

즉 $f(x)=\frac{1}{9}x^3+x^2-2$이므로

$$f(6)=24+36-2=58$$

답 ④

이차함수 $f'(x)$에 대하여 $f'(-6)=0$, $f'(0)=0$이므로 $f'(x)=ax(x+6)$이라 할 수 있다. 이때 주어진 $y=f'(x)$의 그래프는 아래로 볼록하므로 $a>0$이다.

정적분에서 변수를 x 대신 다른 문자를 사용해도 그 값은 변하지 않는다. 즉

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b f(t)\,dt=\int_a^b f(u)\,du$$

08 정적분

15 정적분

Lecture 26 정적분

92쪽

1-1 (1) $\int_0^1(10x+3)\,dx=\Big[5x^2+3x\Big]_0^1$
$=5+3=8$

(2) $\int_{-2}^1(x^2-6x)\,dx=\Big[\frac{1}{3}x^3-3x^2\Big]_{-2}^1$
$=\left(\frac{1}{3}-3\right)-\left(-\frac{8}{3}-12\right)=12$

(3) $\int_1^2(3t^2-2t-1)\,dt=\Big[t^3-t^2-t\Big]_1^2$
$=(8-4-2)-(1-1-1)$
$=3$

(4) $\int_{-1}^3(x-1)^2dx=\int_{-1}^3(x^2-2x+1)\,dx$
$=\Big[\frac{1}{3}x^3-x^2+x\Big]_{-1}^3$
$=(9-9+3)-\left(-\frac{1}{3}-1-1\right)$
$=\frac{16}{3}$

(5) $\int_{-3}^0(x+4)(x-2)\,dx=\int_{-3}^0(x^2+2x-8)\,dx$
$=\Big[\frac{1}{3}x^3+x^2-8x\Big]_{-3}^0$
$=-(-9+9+24)=-24$

(6) $\int_2^4\frac{x^2-9}{x+3}\,dx=\int_2^4\frac{(x+3)(x-3)}{x+3}\,dx$
$=\int_2^4(x-3)\,dx=\Big[\frac{1}{2}x^2-3x\Big]_2^4$
$=(8-12)-(2-6)=0$

답 (1) 8 (2) 12 (3) 3 (4) $\frac{16}{3}$ (5) -24 (6) 0

1-2 (1) $\int_2^2 f(x)\,dx=\int_2^2(-3x^2+8)\,dx$
$=\Big[-x^3+8x\Big]_2^2$
$=(-8+16)-(-8+16)=0$

(2) $\int_{-1}^{-1}f(x)\,dx=\int_{-1}^{-1}(-3x^2+8)\,dx$
$=\Big[-x^3+8x\Big]_{-1}^{-1}$
$=(1-8)-(1-8)=0$

(3) $\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1(-3x^2+8)\,dx$
$=\Big[-x^3+8x\Big]_0^1$
$=-1+8=7$

(4) $\int_{1}^{0} f(x)\,dx=\int_{1}^{0}(-3x^2+8)\,dx$

$=\left[-x^3+8x\right]_1^0$

$=-(-1+8)=-7$

답 (1) 0 (2) 0 (3) 7 (4) -7

쌤 한마디

함수 $f(x)$가 두 실수 a, b를 포함하는 구간에서 연속일 때, $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면

① $\int_{a}^{a} f(x)\,dx=\left[F(x)\right]_a^a=F(a)-F(a)=0$

② $\int_{a}^{b} f(x)\,dx=\left[F(x)\right]_a^b=F(b)-F(a)$,

$\int_{b}^{a} f(x)\,dx=\left[F(x)\right]_b^a=F(a)-F(b)$

$=-\{F(b)-F(a)\}$

이므로 $\int_{a}^{b} f(x)\,dx=-\int_{b}^{a} f(x)\,dx$

아래끝과 위끝이 같은 정적분의 값은 0이다.

Lecture 27 정적분의 계산

L 93쪽

1-1 (1) $\int_{1}^{3}(3x^3-2x)\,dx+\int_{1}^{3}(x^3+6x^2)\,dx$

적분 구간이 같은 정적분의 계산은 하나의 정적분으로 나타낸 후 피적분함수를 간단히 정리하여 적분한다.

$=\int_{1}^{3}(3x^3-2x+x^3+6x^2)\,dx$

$=\int_{1}^{3}(4x^3+6x^2-2x)\,dx$

$=\left[x^4+2x^3-x^2\right]_1^3$

$=(81+54-9)-(1+2-1)=124$

(2) $\int_{-2}^{0}(7x^2+x+2)\,dx-\int_{-2}^{0}(x^2-5x+2)\,dx$

$=\int_{-2}^{0}\{7x^2+x+2-(x^2-5x+2)\}\,dx$

$=\int_{-2}^{0}(6x^2+6x)\,dx=\left[2x^3+3x^2\right]_{-2}^0$

$=-(-16+12)=4$

답 (1) 124 (2) 4

1-2 (1) $\int_{-1}^{0}(3x^2+9)\,dx+\int_{0}^{2}(3x^2+9)\,dx$

피적분함수가 같고, 한 정적분의 위끝과 다른 정적분의 아래끝이 같은 정적분의 계산은 적분 구간을 하나로 나타내어 적분한다.

$=\int_{-1}^{2}(3x^2+9)\,dx$

$=\left[x^3+9x\right]_{-1}^2$

$=(8+18)-(-1-9)=36$

(2) $\int_{0}^{2}(x^2-6x+8)\,dx+\int_{2}^{3}(x^2-6x+8)\,dx$

$=\int_{0}^{3}(x^2-6x+8)\,dx$

$=\left[\frac{1}{3}x^3-3x^2+8x\right]_0^3$

$=9-27+24=6$

답 (1) 36 (2) 6

2-1 (1) $\int_{-3}^{3}(2x^3+x)\,dx=0$

홀수 차수의 항의 합으로 이루어져 있으므로 기함수이다.

(2) $\int_{-2}^{2}(5x^4-3x^2+4)\,dx=2\int_{0}^{2}(5x^4-3x^2+4)\,dx$

짝수 차수의 항과 상수항의 합으로 이루어져 있으므로 우함수이다.

$=2\left[x^5-x^3+4x\right]_0^2$

$=2\cdot(32-8+8)$

$=64$

답 (1) 0 (2) 64

쌤 한마디

정적분의 아래끝과 위끝의 절댓값이 같고 부호가 다른 경우 다음을 이용하면 정적분의 계산 과정이 간단해진다.

n이 짝수일 때 ◯ $\int_{-a}^{a} x^n\,dx=2\int_{0}^{a} x^n\,dx$

n이 홀수일 때 ◯ $\int_{-a}^{a} x^n\,dx=0$

2-2 $\int_{-1}^{1}(x^4+x^3+x^2+x+1)\,dx$

$=\int_{-1}^{1}(x^4+x^2+1)\,dx+\int_{-1}^{1}(x^3+x)\,dx$

$\int_{-1}^{1}(x^3+x)\,dx=0$

$=2\int_{0}^{1}(x^4+x^2+1)\,dx$

$=2\left[\frac{1}{5}x^5+\frac{1}{3}x^3+x\right]_0^1$

$=2\cdot\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{3}+1\right)$

$=\frac{46}{15}$

답 $\frac{46}{15}$

기본+표준 유형 Q+Q

L 94쪽

01 $\int_{-2}^{1}(x+1)(2x^2+x-3)\,dx$

$=\int_{-2}^{1}(2x^3+3x^2-2x-3)\,dx$

$=\left[\frac{1}{2}x^4+x^3-x^2-3x\right]_{-2}^1$

$=\left(\frac{1}{2}+1-1-3\right)-(8-8-4+6)=-\frac{9}{2}$

따라서 $p=2$, $q=9$이므로

$p+q=11$

답 ④

02 $\int_{1}^{k}(-2x+6)\,dx=\left[-x^2+6x\right]_1^k$

$=(-k^2+6k)-(-1+6)$

$=-k^2+6k-5$

$=-(k-3)^2+4$

따라서 $\int_{1}^{k}(-2x+6)\,dx$는 $k=3$일 때 최댓값 4를 가지므로

$m=3$, $n=4$

$\therefore mn=12$

답 12

L 08 정적분

03 $\int_0^3 (4x^2+x)\,dx+\int_3^0 (x^2+5x)\,dx$

$=\int_0^3 (4x^2+x)\,dx-\int_0^3 (x^2+5x)\,dx$

$=\int_0^3 \{4x^2+x-(x^2+5x)\}\,dx$

$=\int_0^3 (3x^2-4x)\,dx=\Big[x^3-2x^2\Big]_0^3$

$=27-18=9$ 답 9

$\int_3^0 (x^2+5x)\,dx$
$=-\int_0^3 (x^2+5x)\,dx$

04 $\int_{-1}^0 \frac{x^3}{x-2}\,dx-\int_{-1}^0 \frac{8}{t-2}\,dt$

$=\int_{-1}^0 \frac{x^3}{x-2}\,dx-\int_{-1}^0 \frac{8}{x-2}\,dx$

$=\int_{-1}^0 \frac{x^3-8}{x-2}\,dx$

$=\int_{-1}^0 \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2}\,dx$

$=\int_{-1}^0 (x^2+2x+4)\,dx$

$=\Big[\frac{1}{3}x^3+x^2+4x\Big]_{-1}^0$

$=-\left(-\frac{1}{3}+1-4\right)=\frac{10}{3}$ 답 ③

05 $\int_{-1}^{-2} (x+3)(x-3)\,dx+\int_{-2}^2 (y+3)(y-3)\,dy$

$=\int_{-1}^{-2} (x+3)(x-3)\,dx+\int_{-2}^2 (x+3)(x-3)\,dx$

$=\int_{-1}^2 (x+3)(x-3)\,dx$

$=\int_{-1}^2 (x^2-9)\,dx=\Big[\frac{1}{3}x^3-9x\Big]_{-1}^2$

$=\left(\frac{8}{3}-18\right)-\left(-\frac{1}{3}+9\right)=-24$ 답 ②

$\int_a^c f(x)\,dx$
$+\int_c^b f(x)\,dx$
$=\int_a^b f(x)\,dx$
는 a, b, c의 대소에 관계없이 성립한다.

06 $\int_0^1 (4x^3-12x)\,dx-\int_2^1 (4x^3-12x)\,dx$
$+\int_2^3 (4x^3-12x)\,dx$

$=\int_0^1 (4x^3-12x)\,dx+\int_1^2 (4x^3-12x)\,dx$
$+\int_2^3 (4x^3-12x)\,dx$

$=\int_0^3 (4x^3-12x)\,dx=\Big[x^4-6x^2\Big]_0^3$

$=81-54=27$ 답 27

쌤 한마디

함수 $f(x)$가 네 실수 a, b, c, d를 포함하는 구간에서 연속일 때,

$\int_a^b f(x)\,dx+\int_b^c f(x)\,dx+\int_c^d f(x)\,dx$
$=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^d f(x)\,dx$
$=\int_a^d f(x)\,dx$

07 $\int_0^2 f(x)\,dx$

$=\int_0^1 f(x)\,dx+\int_1^2 f(x)\,dx$

$=\int_0^1 (-3x-1)\,dx+\int_1^2 (x-5)\,dx$

$=\Big[-\frac{3}{2}x^2-x\Big]_0^1+\Big[\frac{1}{2}x^2-5x\Big]_1^2$

$=\left(-\frac{3}{2}-1\right)+\left\{(2-10)-\left(\frac{1}{2}-5\right)\right\}$

$=-6$ 답 ⑤

$x=1$을 경계로 함수식이 다르므로 이 값을 경계로 적분 구간을 나눈다.

두 점 (0, 2), (2, 0)을 지나는 직선의 방정식은
$y=-x+2$

08 $f(x)=\begin{cases} -x+2 & (x\ge 0) \\ 2 & (x\le 0) \end{cases}$이므로

$xf(x)=\begin{cases} -x^2+2x & (x\ge 0) \\ 2x & (x\le 0) \end{cases}$

$\therefore \int_{-1}^1 xf(x)\,dx$

$=\int_{-1}^0 xf(x)\,dx+\int_0^1 xf(x)\,dx$

$=\int_{-1}^0 2x\,dx+\int_0^1 (-x^2+2x)\,dx$

$=\Big[x^2\Big]_{-1}^0+\Big[-\frac{1}{3}x^3+x^2\Big]_0^1$

$=-1+\left(-\frac{1}{3}+1\right)=-\frac{1}{3}$ 답 $-\frac{1}{3}$

절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되게 하는 x의 값, 즉 $x=-3$을 경계로 적분 구간을 나눈다.

09 $|x+3|=\begin{cases} x+3 & (x\ge -3) \\ -x-3 & (x\le -3) \end{cases}$이므로

$\int_{-4}^0 |x+3|\,dx$

$=\int_{-4}^{-3} (-x-3)\,dx+\int_{-3}^0 (x+3)\,dx$

$=\Big[-\frac{1}{2}x^2-3x\Big]_{-4}^{-3}+\Big[\frac{1}{2}x^2+3x\Big]_{-3}^0$

$=\left\{\left(-\frac{9}{2}+9\right)-(-8+12)\right\}+\left\{-\left(\frac{9}{2}-9\right)\right\}$

$=5$ 답 ⑤

$x^2-1=0$에서 $x^2=1$
$\therefore x=-1$ 또는 $x=1$
즉 $x=-1$, $x=1$을 경계로 x^2-1의 값의 부호가 바뀐다.

10 $|x^2-1|=\begin{cases} x^2-1 & (x\le -1 \text{ 또는 } x\ge 1) \\ -x^2+1 & (-1\le x\le 1) \end{cases}$이므로

$\int_0^3 \frac{|x^2-1|}{x+1}\,dx$

$=\int_0^1 \frac{-x^2+1}{x+1}\,dx+\int_1^3 \frac{x^2-1}{x+1}\,dx$

$=-\int_0^1 \frac{(x+1)(x-1)}{x+1}\,dx+\int_1^3 \frac{(x+1)(x-1)}{x+1}\,dx$

$=-\int_0^1 (x-1)\,dx+\int_1^3 (x-1)\,dx$

$=-\Big[\frac{1}{2}x^2-x\Big]_0^1+\Big[\frac{1}{2}x^2-x\Big]_1^3$

$=-\left(\frac{1}{2}-1\right)+\left\{\left(\frac{9}{2}-3\right)-\left(\frac{1}{2}-1\right)\right\}$

$=\frac{5}{2}$ 답 ①

11 $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$

$=\int_{-1}^{1}(1+2x+3x^2+\cdots+12x^{11})\,dx$

$=\int_{-1}^{1}(1+3x^2+5x^4+7x^6+9x^8+11x^{10})\,dx$

$\quad+\int_{-1}^{1}(2x+4x^3+6x^5+8x^7+10x^9+12x^{11})\,dx$

$=2\int_{0}^{1}(1+3x^2+5x^4+7x^6+9x^8+11x^{10})\,dx$

$=2\Big[x+x^3+x^5+x^7+x^9+x^{11}\Big]_0^1$

$=2\cdot 6=12$ 답 ③

12 $f(-x)=f(x)$에서 $f(x)$는 우함수이고

$\int_{0}^{2} f(x)\,dx=5$이므로

$\int_{-2}^{2} f(x)\,dx=2\int_{0}^{2} f(x)\,dx$

$=2\cdot 5=10$ 답 10

Q BOX

$f(-x)=f(x)$이면

$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx$

$=2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$

$f(-x)=-f(x)$이면

$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx=0$

16 정적분으로 정의된 함수

Lecture 28 정적분으로 정의된 함수 96쪽

1-1 (3) $\frac{d}{dx}\int_{x}^{x+2}(7t+1)\,dt$

$=\{7(x+2)+1\}-(7x+1)=14$

(4) $\frac{d}{dx}\int_{x}^{x+1}(2t^2-9t)\,dt$

$=\{2(x+1)^2-9(x+1)\}-(2x^2-9x)$

$=4x-7$

답 (1) $3x-5$ (2) x^2+6x+4 (3) 14 (4) $4x-7$

1-2 (1) 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\frac{d}{dx}\int_{1}^{x} f(t)\,dt=\frac{d}{dx}(x^2-1)$

$\therefore f(x)=2x$

(2) 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\frac{d}{dx}\int_{-2}^{x} f(t)\,dt=\frac{d}{dx}(3x^2+x-10)$

$\therefore f(x)=6x+1$

답 (1) $f(x)=2x$ (2) $f(x)=6x+1$

2-1 (1) $f(t)=2t^2+6$, $F'(t)=f(t)$라 하면

$\lim_{x\to 2}\frac{1}{x-2}\int_{2}^{x}(2t^2+6)\,dt$

$=\lim_{x\to 2}\frac{1}{x-2}\int_{2}^{x} f(t)\,dt$

$=\lim_{x\to 2}\frac{F(x)-F(2)}{x-2}$

$=F'(2)=f(2)$

$=8+6=14$

정적분의 아래끝과 위끝이 모두 상수이면 정적분의 결과도 상수이다.

함수 $y=f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수는

$f'(a)$

$=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

(2) $f(t)=5t^2-4t+3$, $F'(t)=f(t)$라 하면

$\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}\int_{1}^{x}(5t^2-4t+3)\,dt$

$=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}\int_{1}^{x} f(t)\,dt$

$=\lim_{x\to 1}\frac{F(x)-F(1)}{x-1}$

$=F'(1)=f(1)$

$=5-4+3=4$

(3) $f(t)=t^2-8t$, $F'(t)=f(t)$라 하면

$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_{1}^{x+1}(t^2-8t)\,dt$

$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_{1}^{x+1} f(t)\,dt$

$=\lim_{x\to 0}\frac{F(x+1)-F(1)}{x}$

$=F'(1)=f(1)$

$=1-8=-7$

(4) $f(t)=t^2+2t-7$, $F'(t)=f(t)$라 하면

$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_{3}^{x+3}(t^2+2t-7)\,dt$

$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_{3}^{x+3} f(t)\,dt$

$=\lim_{x\to 0}\frac{F(x+3)-F(3)}{x}$

$=F'(3)=f(3)$

$=9+6-7=8$

답 (1) 14 (2) 4 (3) -7 (4) 8

2-2 $F'(t)=f(t)$라 하면

$\lim_{x\to -1}\frac{1}{x+1}\int_{-1}^{x} f(t)\,dt=\lim_{x\to -1}\frac{F(x)-F(-1)}{x-(-1)}$

$=F'(-1)=f(-1)$

$=-1-2+4=1$ 답 1

기본+표준 유형 Q+Q 97쪽

01 $\int_{0}^{2} f(t)\,dt=k$ (k는 상수) ······ ㉠

로 놓으면

$f(x)=3x+k$

$f(t)=3t+k$를 ㉠의 좌변에 대입하면

$\int_{0}^{2}(3t+k)\,dt=\Big[\frac{3}{2}t^2+kt\Big]_0^2=6+2k$

즉 ㉠에서 $6+2k=k$이므로

$k=-6$

따라서 $f(x)=3x-6$이므로

$f(3)=9-6=3$ 답 ③

02 $\int_{0}^{1} tf(t)\,dt=k$ (k는 상수) ······ ㉠

로 놓으면

$f(x)=x^2+6x-k$

$f(t)=t^2+6t-k$를 ㉠의 좌변에 대입하면

$$\int_0^1 t(t^2+6t-k)\,dt=\int_0^1 (t^3+6t^2-kt)\,dt$$
$$=\left[\frac{1}{4}t^4+2t^3-\frac{k}{2}t^2\right]_0^1$$
$$=\frac{1}{4}+2-\frac{k}{2}$$
$$=\frac{9}{4}-\frac{k}{2}$$

즉 ㉠에서 $\frac{9}{4}-\frac{k}{2}=k$이므로

$\frac{3}{2}k=\frac{9}{4}$ $\quad\therefore k=\frac{3}{2}$

따라서 $f(x)=x^2+6x-\frac{3}{2}$이므로

$f(1)=1+6-\frac{3}{2}=\frac{11}{2}$ 　　답 $\frac{11}{2}$

03 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=6x^2+2ax+3$

또 $x=1$을 주어진 등식의 양변에 대입하면

$0=2+a+3-1$ $\quad\therefore a=-4$

$\therefore f(x)=6x^2-8x+3$

답 $f(x)=6x^2-8x+3$

쌤 한마디

정적분을 포함한 등식에서 함수 $f(x)$는 다음과 같은 방법을 이용하여 구한다.

① $f(x)=g(x)+\int_a^b f(t)\,dt$ (a, b는 실수) 꼴

⇨ $\int_a^b f(t)\,dt=k$ (k는 상수) ⋯⋯ ㉠

로 놓으면 $f(x)=g(x)+k$이므로 이 식을 ㉠에 대입하여 k의 값을 구한다.

② $\int_a^x f(t)\,dt=g(x)$ (a는 실수) 꼴

⇨ 양변을 x에 대하여 미분하면 $f(x)=g'(x)$

양변에 $x=a$를 대입하면 $0=g(a)$

임을 이용한다.

04 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=2x-5$

또 $x=a$를 주어진 등식의 양변에 대입하면

$0=a^2-5a$, $\quad a(a-5)=0$

$\therefore a=5$ ($\because a>0$)

$\therefore f(a)=f(5)=10-5=5$ 　　답 ②

05 주어진 등식의 좌변을 변형하면

$$x\int_{-1}^x f(t)\,dt-\int_{-1}^x tf(t)\,dt=x^3+2x^2+x$$

양변을 x에 대하여 미분하면

$$\int_{-1}^x f(t)\,dt+xf(x)-xf(x)=3x^2+4x+1$$

$$\therefore \int_{-1}^x f(t)\,dt=3x^2+4x+1$$

양변을 다시 x에 대하여 미분하면

$f(x)=6x+4$

$\therefore f(-1)=-6+4=-2$ 　　답 -2

06 주어진 등식의 좌변을 변형하면

$$x\int_2^x f(t)\,dt-\int_2^x tf(t)\,dt=-x^3+ax^2-4$$

양변을 x에 대하여 미분하면

$$\int_2^x f(t)\,dt+xf(x)-xf(x)=-3x^2+2ax$$

$$\therefore \int_2^x f(t)\,dt=-3x^2+2ax$$

양변을 다시 x에 대하여 미분하면

$f(x)=-6x+2a$

한편 $x=2$를 주어진 등식의 양변에 대입하면

$0=-8+4a-4$ $\quad\therefore a=3$

따라서 $f(x)=-6x+6$이므로

$f(2)=-12+6=-6$

$\therefore a-f(2)=9$ 　　답 ⑤

07 $f(x)=\int_1^x (t^2-2t)\,dt$에서

$f'(x)=x^2-2x=x(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=0$ 또는 $x=2$

x	⋯	0	⋯	2	⋯
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값 a, $x=2$에서 극솟값 b를 가지므로

$$a=f(0)=\int_1^0 (t^2-2t)\,dt=\left[\frac{1}{3}t^3-t^2\right]_1^0$$
$$=-\left(\frac{1}{3}-1\right)=\frac{2}{3},$$
$$b=f(2)=\int_1^2 (t^2-2t)\,dt=\left[\frac{1}{3}t^3-t^2\right]_1^2$$
$$=\left(\frac{8}{3}-4\right)-\left(\frac{1}{3}-1\right)=-\frac{2}{3}$$

$\therefore a-b=\frac{4}{3}$ 　　답 ④

08 $f(x)=\int_0^x (-3t^2+10t+a)\,dt$에서

$f'(x)=-3x^2+10x+a$

함수 $f(x)$가 $x=3$에서 극댓값 M을 가지므로

$f'(3)=0$, $f(3)=M$

$f'(3)=0$에서 $\quad -27+30+a=0$

$\therefore a=-3$

$$\therefore M=f(3)=\int_0^3 (-3t^2+10t-3)\,dt$$
$$=\left[-t^3+5t^2-3t\right]_0^3$$
$$=-27+45-9=9$$

$\therefore a+M=6$ 　　답 6

Q BOX

$\int_2^x f(t)\,dt=-3x^2+2ax$의 양변에 $x=2$를 대입하여 a의 값을 구할 수도 있다.

$\int_1^1 f(t)\,dt=0$

아래끝과 위끝이 상수인 정적분을 포함하는 경우

아래끝 또는 위끝에 변수가 있는 정적분을 포함하는 경우

미분가능한 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극값 b를 갖는다.
➡ $f'(a)=0$, $f(a)=b$

정적분에서 변수가 t이므로 t 이외의 문자는 상수로 생각하여 변형한다.

$$\left\{x\int_{-1}^x f(t)\,dt\right\}'=(x)'\int_{-1}^x f(t)\,dt+x\left\{\int_{-1}^x f(t)\,dt\right\}'$$

09 $f(x)=3x^2-\int_{-1}^{0} xf(t)\,dt=3x^2-x\int_{-1}^{0} f(t)\,dt$

$\int_{-1}^{0} f(t)\,dt=k$ (k는 상수) …… ㉠

로 놓으면 $f(x)=3x^2-kx$

$f(t)=3t^2-kt$를 ㉠의 좌변에 대입하면

$$\int_{-1}^{0}(3t^2-kt)\,dt=\left[t^3-\frac{k}{2}t^2\right]_{-1}^{0}$$
$$=-\left(-1-\frac{k}{2}\right)=1+\frac{k}{2}$$

즉 ㉠에서 $1+\frac{k}{2}=k$이므로

$\frac{k}{2}=1$ $\quad\therefore k=2$

$\therefore f(x)=3x^2-2x=3\left(x-\frac{1}{3}\right)^2-\frac{1}{3}$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\frac{1}{3}$에서 최솟값 $-\frac{1}{3}$을 갖는다.

답 $-\frac{1}{3}$

10 $f(x)=\int_{x}^{x+1}(t^2+3t)\,dt$에서

$f'(x)=\{(x+1)^2+3(x+1)\}-(x^2+3x)$

$=2x+4=2(x+2)$

$\frac{d}{dx}\int_{x}^{x+a} f(t)\,dt=f(x+a)-f(x)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$

x	-3	$\cdots$	-2	$\cdots$	0
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	극소	↗	

이때

$$f(-3)=\int_{-3}^{-2}(t^2+3t)\,dt$$
$$=\left[\frac{1}{3}t^3+\frac{3}{2}t^2\right]_{-3}^{-2}$$
$$=\left(-\frac{8}{3}+6\right)-\left(-9+\frac{27}{2}\right)=-\frac{7}{6},$$

$$f(-2)=\int_{-2}^{-1}(t^2+3t)\,dt$$
$$=\left[\frac{1}{3}t^3+\frac{3}{2}t^2\right]_{-2}^{-1}$$
$$=\left(-\frac{1}{3}+\frac{3}{2}\right)-\left(-\frac{8}{3}+6\right)=-\frac{13}{6},$$

$$f(0)=\int_{0}^{1}(t^2+3t)\,dt=\left[\frac{1}{3}t^3+\frac{3}{2}t^2\right]_{0}^{1}$$
$$=\frac{1}{3}+\frac{3}{2}=\frac{11}{6}$$

이므로 $M=\frac{11}{6},\ m=-\frac{13}{6}$

$-3\le x\le 0$에서 함수 $f(x)$는 $x=-2$일 때 극소이면서 최소이므로 최솟값은 $f(-2)$의 값이고, 최댓값은 $f(-3)$, $f(0)$ 중 큰 값이다.

$\therefore \frac{M}{m}=\frac{11}{6}\cdot\left(-\frac{6}{13}\right)=-\frac{11}{13}$ 답 ③

11 $f(t)=4t^2-2t$, $F'(t)=f(t)$라 하면

$$\lim_{x\to a}\frac{1}{x-a}\int_{a}^{x}(4t^2-2t)\,dt=\lim_{x\to a}\frac{1}{x-a}\int_{a}^{x}f(t)\,dt$$
$$=\lim_{x\to a}\frac{F(x)-F(a)}{x-a}$$
$$=F'(a)=f(a)$$

즉 $f(a)=-\frac{1}{4}$이므로

$4a^2-2a=-\frac{1}{4}$, $\quad 16a^2-8a+1=0$

$(4a-1)^2=0$ $\quad\therefore a=\frac{1}{4}$ 답 ①

12 $f(x)=\int_{0}^{x}(6t^3-t^2)\,dt$에서 $\quad f'(x)=6x^3-x^2$

$$\therefore \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{1-h}^{1+h}f'(x)\,dx$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1-h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)+f(1)-f(1-h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\{f(1+h)-f(1)\}-\{f(1-h)-f(1)\}}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}-\lim_{h\to 0}\frac{f(1-h)-f(1)}{-h}\cdot(-1)$$
$$=f'(1)+f'(1)=2f'(1)$$
$$=2\cdot(6-1)=10$$

답 10

중단원 마무리

99쪽

01 전략 피적분함수의 분자를 인수분해한 후 약분하여 식을 간단히 한다.

풀이 $\int_{-1}^{2}\frac{x^2-4}{x+2}\,dx=\int_{-1}^{2}\frac{(x+2)(x-2)}{x+2}\,dx$

$$=\int_{-1}^{2}(x-2)\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{2}x^2-2x\right]_{-1}^{2}$$
$$=(2-4)-\left(\frac{1}{2}+2\right)$$
$$=-\frac{9}{2}$$

답 $-\frac{9}{2}$

02 전략 정적분의 값을 k에 대한 식으로 나타낸 후 k에 대한 부등식을 푼다.

풀이 $\int_{-3}^{1}(3x^2-2kx+2)\,dx$

$$=\left[x^3-kx^2+2x\right]_{-3}^{1}$$
$$=(1-k+2)-(-27-9k-6)$$
$$=8k+36$$

즉 $8k+36<-4$이므로 $\quad k<-5$

따라서 정수 k의 최댓값은 -6이다. 답 ③

03 전략 $|f(x)|=-f(x)$이면 $f(x)\le 0$, $|f(x)|=f(x)$이면 $f(x)\ge 0$임을 이용한다.

풀이 조건 (가)에 의하여 $0\le x\le 2$에서 $\quad f(x)\le 0$

조건 (나)에 의하여 $2\le x\le 3$에서 $\quad f(x)\ge 0$

이때 $f(x)$는 연속함수이므로

$f(2)=0$

또 $f(0)=0$이므로

$f(x)=ax(x-2)\ (a>0)$

라 하자.

조건 (가)에서 $\int_0^2 f(x)\,dx=-4$이고

$$\int_0^2 ax(x-2)\,dx=a\int_0^2(x^2-2x)\,dx$$
$$=a\left[\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_0^2$$
$$=a\left(\frac{8}{3}-4\right)=-\frac{4}{3}a$$

이므로 $\quad -\frac{4}{3}a=-4 \qquad \therefore a=3$

따라서 $f(x)=3x(x-2)$이므로

$f(5)=3\cdot5\cdot3=45$ 답 45

04 전략 $\int_a^b f(x)\,dx=-\int_b^a f(x)\,dx$임을 이용하여 두 정적분의 적분 구간이 같아지도록 변형한다.

풀이 $\int_1^2(x+k)^2dx+\int_2^1(x-k)^2dx$

$$=\int_1^2(x+k)^2dx-\int_1^2(x-k)^2dx$$
$$=\int_1^2\{(x+k)^2-(x-k)^2\}\,dx$$
$$=\int_1^2\{x^2+2kx+k^2-(x^2-2kx+k^2)\}\,dx$$
$$=\int_1^2 4kx\,dx=\left[2kx^2\right]_1^2$$
$$=8k-2k=6k$$

따라서 $6k=12$이므로

$k=2$ 답 ②

05 전략 $\int_{-1}^1 f(x)\,dx=\int_{-1}^0 f(x)\,dx+\int_0^1 f(x)\,dx$임을 이용하여 $\int_{-1}^0 f(x)\,dx$, $\int_0^1 f(x)\,dx$의 값을 구한다.

풀이 $f(x)$는 $f(0)=-1$인 이차함수이므로

$f(x)=ax^2+bx-1$ (a, b는 상수, $a\neq0$)

이라 하자.

$\int_{-1}^1 f(x)\,dx=\int_0^1 f(x)\,dx$에서

$$\int_{-1}^0 f(x)\,dx+\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1 f(x)\,dx$$
$$\therefore \int_{-1}^0 f(x)\,dx=0$$
$$\therefore \int_0^1 f(x)\,dx=\int_{-1}^0 f(x)\,dx=0$$

$\int_{-1}^0 f(x)\,dx=0$에서 $\qquad \int_{-1}^0(ax^2+bx-1)\,dx=0$

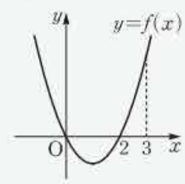
$$\left[\frac{a}{3}x^3+\frac{b}{2}x^2-x\right]_{-1}^0=0$$
$$-\left(-\frac{a}{3}+\frac{b}{2}+1\right)=0$$

$\therefore 2a-3b=6$ …… ㉠

Q BOX

이차함수는 연속함수이다.

$f(0)=f(2)=0$이고, $0\le x\le2$에서 $f(x)\le0$, $2\le x\le3$에서 $f(x)\ge0$인 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같이 아래로 볼록한 포물선이다.



하나의 정적분을 피적분함수가 같은 두 정적분의 합으로 나타낼 수 있다.

$x=4$를 경계로 함수식이 다르므로 이 값을 경계로 적분 구간을 나눈다.

$-x(x-4)=-x^2+4x$

$\int_0^1 f(x)\,dx=0$에서 $\qquad \int_0^1(ax^2+bx-1)\,dx=0$

$$\left[\frac{a}{3}x^3+\frac{b}{2}x^2-x\right]_0^1=0$$
$$\frac{a}{3}+\frac{b}{2}-1=0$$

$\therefore 2a+3b=6$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\qquad a=3,\ b=0$

따라서 $f(x)=3x^2-1$이므로

$f(2)=12-1=11$ 답 ①

06 전략 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속임을 이용하여 a의 값을 구한 후 적분 구간을 나누어 적분한다.

풀이 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이면 $x=1$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1-}f(x)=f(1)$$

즉 $\lim_{x\to1+}(x^2+2x-5)=\lim_{x\to1-}(x+a)$이므로

$1+2-5=1+a \qquad \therefore a=-3$ ··· ❶

$$\therefore \int_0^3 f(x)\,dx$$
$$=\int_0^1 f(x)\,dx+\int_1^3 f(x)\,dx$$
$$=\int_0^1(x-3)\,dx+\int_1^3(x^2+2x-5)\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{2}x^2-3x\right]_0^1+\left[\frac{1}{3}x^3+x^2-5x\right]_1^3$$
$$=\left(\frac{1}{2}-3\right)+\left\{(9+9-15)-\left(\frac{1}{3}+1-5\right)\right\}$$
$$=\frac{25}{6}$$ ··· ❷

답 $\frac{25}{6}$

단계	채점 기준	비율
❶	a의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷	$\int_0^3 f(x)\,dx$의 값을 구할 수 있다.	60 %

07 전략 적분 구간을 나누어 $f(x)$를 적분하여 $\int_a^{a+4} f(x)\,dx$의 값을 a에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 $g(a)=\int_a^{a+4} f(x)\,dx\ (0\le a\le4)$라 하면

$$g(a)=\int_a^4 f(x)\,dx+\int_4^{a+4} f(x)\,dx$$
$$=\int_a^4(-x^2+4x)\,dx+\int_4^{a+4}(x-4)\,dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+2x^2\right]_a^4+\left[\frac{1}{2}x^2-4x\right]_4^{a+4}$$
$$=\left\{\left(-\frac{64}{3}+32\right)-\left(-\frac{1}{3}a^3+2a^2\right)\right\}$$
$$+\left[\left\{\frac{1}{2}(a+4)^2-4(a+4)\right\}-(8-16)\right]$$
$$=\frac{1}{3}a^3-\frac{3}{2}a^2+\frac{32}{3}$$

$\therefore g'(a)=a^2-3a=a(a-3)$

$g'(a)=0$에서 $\quad a=0$ 또는 $a=3$

a	0	$\cdots$	3	$\cdots$	4
$g'(a)$		$-$	0	$+$	
$g(a)$		↘	극소	↗	

따라서 $0\le a\le 4$에서 함수 $g(a)$는 $a=3$일 때 극소이면서 최소이므로 최솟값은

$$g(3)=9-\frac{27}{2}+\frac{32}{3}=\frac{37}{6}$$

즉 $p=6$, $q=37$이므로

$p+q=43$ 답 43

08 전략 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되게 하는 x의 값을 경계로 적분 구간을 나누어 적분한다.

풀이 $|4x^2(x-2)|=\begin{cases}4x^2(x-2) & (x\ge 2)\\ -4x^2(x-2) & (x\le 2)\end{cases}$이므로

$x^2\ge 0$이므로
$|4x^2(x-2)|$
$=4x^2|x-2|$
따라서 $x-2=0$, 즉 $x=2$를 경계로 구간을 나누어 함수식을 절댓값 기호 없이 나타낸다.

$$\int_1^3 |4x^2(x-2)|\,dx$$
$$=\int_1^2 \{-4x^2(x-2)\}\,dx+\int_2^3 4x^2(x-2)\,dx$$
$$=\int_1^2 (-4x^3+8x^2)\,dx+\int_2^3 (4x^3-8x^2)\,dx$$
$$=\left[-x^4+\frac{8}{3}x^3\right]_1^2+\left[x^4-\frac{8}{3}x^3\right]_2^3$$
$$=\left\{\left(-16+\frac{64}{3}\right)-\left(-1+\frac{8}{3}\right)\right\}$$
$$+\left\{(81-72)-\left(16-\frac{64}{3}\right)\right\}$$
$$=18$$

답 ④

09 전략 정적분의 성질을 이용하여 식을 간단히 한 후 우함수와 기함수로 나누어 적분한다.

풀이 $\displaystyle\int_{-2}^1 (6x^5+5x^4+4x^3)\,dx+\int_1^2 (6x^5+5x^4+4x^3)\,dx$
$$=\int_{-2}^2 (6x^5+5x^4+4x^3)\,dx$$
$$=\int_{-2}^2 (6x^5+4x^3)\,dx+\int_{-2}^2 5x^4\,dx$$
$$=2\int_0^2 5x^4\,dx$$
$$=2\Big[x^5\Big]_0^2$$
$$=2\cdot 32=64$$

답 ②

함수 $f(x)$가 어떤 구간에서 미분가능하고, 이 구간에서 $f(x)$가
① 증가
➡ 이 구간의 모든 x에 대하여
$f'(x)\ge 0$
② 감소
➡ 이 구간의 모든 x에 대하여
$f'(x)\le 0$

10 전략 두 정적분의 아래끝과 위끝의 절댓값이 같고 부호가 다르므로 피적분함수를 우함수와 기함수로 나누어 적분한다.

풀이 $\displaystyle\int_{-1}^1 f(x)\,dx=\int_{-1}^1 (x+1)\,dx$
$$=\int_{-1}^1 x\,dx+\int_{-1}^1 1\,dx$$
$$=2\int_0^1 1\,dx=2\Big[x\Big]_0^1$$
$$=2,$$

$$\int_{-1}^1 \{f(x)\}^2\,dx=\int_{-1}^1 (x^2+2x+1)\,dx$$
$$=\int_{-1}^1 (x^2+1)\,dx+\int_{-1}^1 2x\,dx$$
$$=2\int_0^1 (x^2+1)\,dx$$
$$=2\left[\frac{1}{3}x^3+x\right]_0^1$$
$$=2\cdot\left(\frac{1}{3}+1\right)=\frac{8}{3}$$

이때 $\displaystyle\int_{-1}^1 \{f(x)\}^2\,dx=k\left(\int_{-1}^1 f(x)\,dx\right)^2$이므로

$\dfrac{8}{3}=k\cdot 2^2 \qquad \therefore k=\dfrac{2}{3}$ 답 ④

11 전략 $\displaystyle\int_0^2 f(t)\,dt$, $\displaystyle\int_{-1}^0 f(t)\,dt$가 모두 상수임을 이용한다.

풀이 $\displaystyle\int_0^2 f(t)\,dt=a$ (a는 상수) $\cdots\cdots$ ㉠

$\displaystyle\int_{-1}^0 f(t)\,dt=b$ (b는 상수) $\cdots\cdots$ ㉡

로 놓으면

$f(x)=-6x^2+2ax+b$ $\cdots$ ❶

$f(t)=-6t^2+2at+b$를 ㉠의 좌변에 대입하면

$$\int_0^2 (-6t^2+2at+b)\,dt=\Big[-2t^3+at^2+bt\Big]_0^2$$
$$=-16+4a+2b$$

즉 ㉠에서 $-16+4a+2b=a$이므로

$3a+2b=16$ $\cdots\cdots$ ㉢

$f(t)=-6t^2+2at+b$를 ㉡의 좌변에 대입하면

$$\int_{-1}^0 (-6t^2+2at+b)\,dt=\Big[-2t^3+at^2+bt\Big]_{-1}^0$$
$$=-(2+a-b)$$
$$=-2-a+b$$

즉 ㉡에서 $-2-a+b=b$이므로 $\quad a=-2$

$a=-2$를 ㉢에 대입하면

$-6+2b=16 \qquad \therefore b=11$ $\cdots$ ❷

따라서 $f(x)=-6x^2-4x+11$이므로

$f(1)=-6-4+11=1$ $\cdots$ ❸

답 1

단계	채점 기준	비율
❶	정적분의 값을 a, b로 놓고 $f(x)$를 a, b에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	20 %
❷	a, b의 값을 구할 수 있다.	60 %
❸	$f(1)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

12 전략 주어진 구간에서 $g(x)$가 증가하도록 하는 조건을 도함수 $g'(x)$를 이용하여 파악한다.

풀이 함수 $g(x)$가 닫힌구간 $[0,\ 1]$에서 증가하려면 $0\le x\le 1$에서 $g'(x)\ge 0$이어야 한다.

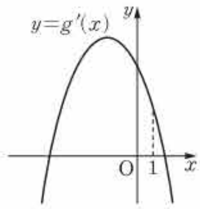
$g(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$에서

$g'(x)=f(x)=-x^2-4x+a$

$y=-x^2-4x+a$
$=-(x+2)^2+a+4$
의 그래프는 위로 볼록하고 축의 방정식이 $x=-2$인 포물선이다.

L 08 정적분

오른쪽 그림에서



$g'(0)\ge 0$이어야 하므로

$$a\ge 0 \quad \cdots\cdots ㉠$$

$g'(1)\ge 0$이어야 하므로

$$-1-4+a\ge 0$$

$$\therefore a\ge 5 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$$a\ge 5$$

따라서 a의 최솟값은 5이다. 답 5

13 전략 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하여 $f'(x)$를 구한다.

풀이 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f(x)=f(x)+xf'(x)-6x^2+2ax$$

$$xf'(x)=6x^2-2ax$$

$$\therefore f'(x)=6x-2a$$

$$\therefore f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(6x-2a)\,dx$$

$$=3x^2-2ax+C$$

$f(0)=-3$이므로 $\quad C=-3$

$$\therefore f(x)=3x^2-2ax-3 \quad \cdots\cdots ㉠$$

또 주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$$0=f(1)-2+a \qquad \therefore f(1)=2-a$$

이때 ㉠에서 $f(1)=3-2a-3=-2a$이므로

$$2-a=-2a \qquad \therefore a=-2$$

따라서 $f(x)=3x^2+4x-3$이므로

$$f(2)=12+8-3=17$$

답 ③

14 전략 주어진 등식의 좌변을 변형한 후 양변을 x에 대하여 미분한다.

풀이 $\displaystyle\int_a^x (x-t)f(t)\,dt=x^3-x^2-5x-3 \quad \cdots ㉠$

㉠의 좌변을 변형하면

$$x\int_a^x f(t)\,dt-\int_a^x tf(t)\,dt=x^3-x^2-5x-3$$

양변을 x에 대하여 미분하면

$$\int_a^x f(t)\,dt+xf(x)-xf(x)=3x^2-2x-5$$

$$\therefore \int_a^x f(t)\,dt=3x^2-2x-5 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉡의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f(x)=6x-2$$

$x=a$를 ㉠의 양변에 대입하면

$$0=a^3-a^2-5a-3, \qquad (a+1)^2(a-3)=0$$

$$\therefore a=-1 \text{ 또는 } a=3 \quad \cdots\cdots ㉢$$

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & -1 & -5 & -3 \\ & & -1 & 2 & 3 \\ \hline & 1 & -2 & -3 & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore a^3-a^2-5a-3$

$=(a+1)(a^2-2a-3)$

$=(a+1)^2(a-3)$

$x=a$를 ㉡의 양변에 대입하면

$$0=3a^2-2a-5, \qquad (a+1)(3a-5)=0$$

$$\therefore a=-1 \text{ 또는 } a=\frac{5}{3} \quad \cdots\cdots ㉣$$

㉢, ㉣에서 $\quad a=-1$

$$\therefore f(a)=f(-1)=-6-2=-8$$

답 -8

Q BOX

15 전략 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극솟값 -5를 가지므로 $f'(1)=0$, $f(1)=-5$임을 이용한다.

풀이 $\displaystyle f(x)=\int_0^x (3t^2+at+b)\,dt$에서

$$f'(x)=3x^2+ax+b$$

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극솟값 -5를 가지므로

$$f'(1)=0,\ f(1)=-5$$

$f'(1)=0$에서 $\quad 3+a+b=0$

$$\therefore a+b=-3 \quad \cdots\cdots ㉠$$

$$f(1)=\int_0^1 (3t^2+at+b)\,dt=\left[t^3+\frac{a}{2}t^2+bt\right]_0^1$$

$$=1+\frac{a}{2}+b$$

이므로 $f(1)=-5$에서 $\quad 1+\frac{a}{2}+b=-5$

$$\therefore a+2b=-12 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a=6,\ b=-9$$

$f'(x)=3x^2+6x-9$

$=3(x+3)(x-1)$

$f'(x)=0$에서

$x=-3$ 또는 $x=1$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-3$에서 극댓값을 갖는다.

$$\therefore a-b=15$$

답 ⑤

16 전략 주어진 그래프를 이용하여 $f(x)$의 식을 세운다.

풀이 $y=f(x)$의 그래프가 두 점 $(-2,\ 0)$, $(0,\ 0)$을 지나므로

$$f(x)=ax(x+2)=ax^2+2ax$$

$$=a(x+1)^2-a\ (a>0)$$

라 하면 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 최솟값 $-a$를 갖는다.

즉 $-a=-2$이므로

$$a=2$$

$$\therefore f(x)=2x(x+2)=2x^2+4x \quad \cdots ❶$$

$\displaystyle F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$에서 $\quad F'(x)=f(x)$

$F'(x)=0$, 즉 $f(x)=0$에서

$$x=-2 \text{ 또는 } x=0$$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$
$F'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$F(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

즉 함수 $F(x)$는 $x=-2$에서 극댓값을 갖는다. $\cdots$ ❷

따라서 구하는 극댓값은

$$F(-2)=\int_0^{-2} f(t)\,dt$$

$$=\int_0^{-2}(2t^2+4t)\,dt$$

$$=\left[\frac{2}{3}t^3+2t^2\right]_0^{-2}$$

$$=-\frac{16}{3}+8=\frac{8}{3} \quad \cdots ❸$$

답 $\frac{8}{3}$

단계	채점 기준	비율
❶	$f(x)$를 구할 수 있다.	30 %
❷	$F(x)$가 극대가 되는 x의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸	$F(x)$의 극댓값을 구할 수 있다.	30 %

17 전략 피적분함수에 x가 포함되지 않도록 식을 변형한 후 미분하여 $f'(x)$를 구한다.

풀이 $f(x)=\int_0^x (2t-1)(x-t)\,dt$

$=x\int_0^x (2t-1)\,dt-\int_0^x t(2t-1)\,dt$

이므로

$f'(x)=\int_0^x (2t-1)\,dt+x(2x-1)-x(2x-1)$

$=\int_0^x (2t-1)\,dt$

$=\left[t^2-t\right]_0^x$

$=x^2-x=x(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=0$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

ㄱ. 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극솟값을 갖는다.

ㄴ. 구간 $(-1,\ 0)$에서 함수 $f(x)$는 증가한다.

ㄷ. 구간 $[1,\ 2]$에서 함수 $f(x)$는 증가하므로 이 구간에서 함수 $f(x)$의 최댓값은

$f(2)=\int_0^2 (2t-1)(2-t)\,dt$

$=\int_0^2 (-2t^2+5t-2)\,dt$

$=\left[-\frac{2}{3}t^3+\frac{5}{2}t^2-2t\right]_0^2$

$=-\frac{16}{3}+10-4=\frac{2}{3}$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

18 전략 $\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\int_p^{p+h} f(x)\,dx=f(p)$임을 이용한다.

풀이 $F'(x)=f(x)$라 하면

$\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\int_{1-h}^{1+2h} f(x)\,dx$

$=\lim_{h\to0}\frac{F(1+2h)-F(1-h)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{F(1+2h)-F(1)+F(1)-F(1-h)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{\{F(1+2h)-F(1)\}-\{F(1-h)-F(1)\}}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{F(1+2h)-F(1)}{2h}\cdot2$

$\quad-\lim_{h\to0}\frac{F(1-h)-F(1)}{-h}\cdot(-1)$

$=2F'(1)+F'(1)$

$=3F'(1)=3f(1)$

$=3(2-9+a)=3a-21$

따라서 $3a-21=-6$이므로

$a=5$ 답 5

Q BOX

$\int_0^x (2t-1)(x-t)\,dt$
$=\int_0^x x(2t-1)\,dt$
$\quad-\int_0^x t(2t-1)\,dt$

닫힌구간 $[-1,\ 0]$에서 $y\le0$, 닫힌구간 $[0,\ 1]$에서 $y\ge0$이다.

정적분을 이용하여 넓이를 구할 때에는 먼저 곡선의 개형을 그려 넓이를 구하는 부분을 나타낸다.

09 정적분의 활용

17 넓이

Lecture 29 곡선과 x축 사이의 넓이 102쪽

1-1 (1) $\int_0^3 (-x^2+3x)\,dx=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2\right]_0^3$

$=\frac{9}{2}$

(2) $\int_0^2 \{-(x^3-2x^2)\}\,dx=\int_0^2 (-x^3+2x^2)\,dx$

$=\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3\right]_0^2=\frac{4}{3}$

(3) $\int_{-1}^1 \left|x^2+\frac{4}{3}x\right|dx$

$=\int_{-1}^0 \left(-x^2-\frac{4}{3}x\right)dx+\int_0^1 \left(x^2+\frac{4}{3}x\right)dx$

$=\left[-\frac{1}{3}x^3-\frac{2}{3}x^2\right]_{-1}^0+\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{3}x^2\right]_0^1$

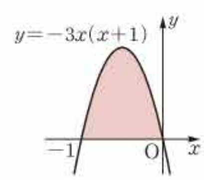
$=\frac{1}{3}+1=\frac{4}{3}$

답 (1) $\frac{9}{2}$ (2) $\frac{4}{3}$ (3) $\frac{4}{3}$

1-2 (1) 곡선 $y=-3x(x+1)$과 x축의 교점의 x좌표는

$-3x(x+1)=0$에서

$x=-1$ 또는 $x=0$



따라서 구하는 넓이는

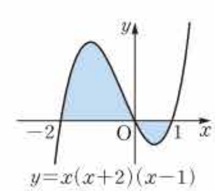
$\int_{-1}^0 (-3x^2-3x)\,dx=\left[-x^3-\frac{3}{2}x^2\right]_{-1}^0$

$=\frac{1}{2}$

(2) 곡선 $y=x(x+2)(x-1)$과 x축의 교점의 x좌표는

$x(x+2)(x-1)=0$에서

$x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$



따라서 구하는 넓이는

$\int_{-2}^1 |x(x+2)(x-1)|\,dx$

$=\int_{-2}^0 x(x+2)(x-1)\,dx$

$\quad+\int_0^1 \{-x(x+2)(x-1)\}\,dx$

$=\int_{-2}^0 (x^3+x^2-2x)\,dx+\int_0^1 (-x^3-x^2+2x)\,dx$

$=\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_{-2}^0+\left[-\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_0^1$

$=\frac{8}{3}+\frac{5}{12}$

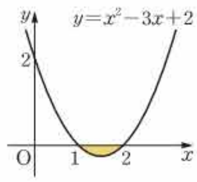
$=\frac{37}{12}$

(3) 곡선 $y=x^2-3x+2$와 x축의 교점의 x좌표는

$x^2-3x+2=0$에서

$(x-1)(x-2)=0$

$\therefore$ $x=1$ 또는 $x=2$



따라서 구하는 넓이는

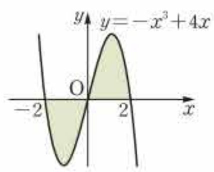
$$\int_1^2 \{-(x^2-3x+2)\}\,dx$$
$$=\int_1^2 (-x^2+3x-2)\,dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2-2x\right]_1^2$$
$$=\frac{1}{6}$$

(4) 곡선 $y=-x^3+4x$와 x축의 교점의 x좌표는

$-x^3+4x=0$에서

$x(x+2)(x-2)=0$

$\therefore$ $x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$



따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-2}^2 |-x^3+4x|\,dx$$
$$=\int_{-2}^0 (x^3-4x)\,dx+\int_0^2 (-x^3+4x)\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}x^4-2x^2\right]_{-2}^0+\left[-\frac{1}{4}x^4+2x^2\right]_0^2$$
$$=4+4$$
$$=8$$

곡선 $y=-x^3+4x$가 원점에 대하여 대칭이므로

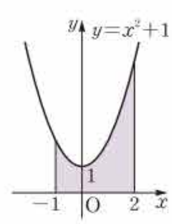
$\int_{-2}^0 (x^3-4x)\,dx$

$=\int_0^2 (-x^3+4x)\,dx$

임을 이용하여 간단히 계산할 수도 있다.

답 (1) $\frac{1}{2}$ (2) $\frac{37}{12}$ (3) $\frac{1}{6}$ (4) 8

1-3 (1) 구하는 넓이는



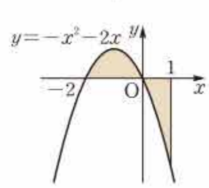
$$\int_{-1}^2 (x^2+1)\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3+x\right]_{-1}^2$$
$$=6$$

(2) 곡선 $y=-x^2-2x$와 x축의 교점의 x좌표는

$-x^2-2x=0$에서

$x(x+2)=0$

$\therefore$ $x=-2$ 또는 $x=0$



따라서 구하는 넓이는

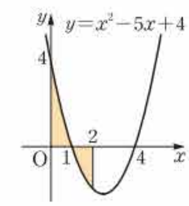
$$\int_{-2}^1 |-x^2-2x|\,dx$$
$$=\int_{-2}^0 (-x^2-2x)\,dx+\int_0^1 (x^2+2x)\,dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_{-2}^0+\left[\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_0^1$$
$$=\frac{4}{3}+\frac{4}{3}=\frac{8}{3}$$

(3) 곡선 $y=x^2-5x+4$와 x축의 교점의 x좌표는

$x^2-5x+4=0$에서

$(x-1)(x-4)=0$

$\therefore$ $x=1$ 또는 $x=4$



따라서 구하는 넓이는

$$\int_0^2 |x^2-5x+4|\,dx$$
$$=\int_0^1 (x^2-5x+4)\,dx+\int_1^2 (-x^2+5x-4)\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+4x\right]_0^1+\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{5}{2}x^2-4x\right]_1^2$$
$$=\frac{11}{6}+\frac{7}{6}=3$$

답 (1) 6 (2) $\frac{8}{3}$ (3) 3

Lecture 30 두 곡선 사이의 넓이

103쪽

1-1 (1) 곡선 $y=x^2-2$와 직선 $y=2x+1$의 교점의 x좌표는 $x^2-2=2x+1$에서

$x^2-2x-3=0$, $(x+1)(x-3)=0$

$\therefore$ $x=-1$ 또는 $x=3$

$a<b$이므로 $a=-1$, $b=3$

(2) 구하는 넓이는

$$\int_{-1}^3 \{2x+1-(x^2-2)\}\,dx$$
$$=\int_{-1}^3 (-x^2+2x+3)\,dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2+3x\right]_{-1}^3=\frac{32}{3}$$

닫힌구간 $[-1, 3]$에서 $2x+1\ge x^2-2$이다.

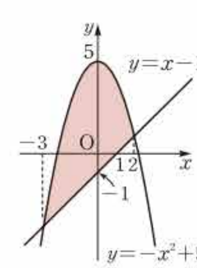
답 (1) $a=-1$, $b=3$ (2) $\frac{32}{3}$

1-2 (1) 곡선 $y=-x^2+5$와 직선 $y=x-1$의 교점의 x좌표는 $-x^2+5=x-1$에서

$x^2+x-6=0$

$(x+3)(x-2)=0$

$\therefore$ $x=-3$ 또는 $x=2$



따라서 구하는 넓이는

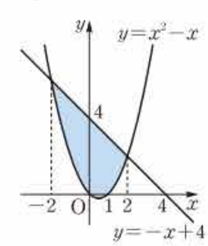
$$\int_{-3}^2 \{-x^2+5-(x-1)\}\,dx$$
$$=\int_{-3}^2 (-x^2-x+6)\,dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+6x\right]_{-3}^2=\frac{125}{6}$$

(2) 곡선 $y=x^2-x$와 직선 $y=-x+4$의 교점의 x좌표는 $x^2-x=-x+4$에서

$x^2-4=0$

$(x+2)(x-2)=0$

$\therefore$ $x=-2$ 또는 $x=2$



따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-2}^{2}\{-x+4-(x^2-x)\}\,dx$$
$$=\int_{-2}^{2}(-x^2+4)\,dx$$
$$=2\int_{0}^{2}(-x^2+4)\,dx$$
$$=2\left[-\frac{1}{3}x^3+4x\right]_0^2=2\cdot\frac{16}{3}=\frac{32}{3}$$

Q BOX: $f(x)$가 우함수이면 $\int_{-a}^{a}f(x)\,dx=2\int_{0}^{a}f(x)\,dx$

답 (1) $\frac{125}{6}$ (2) $\frac{32}{3}$

2-1 (1) 두 곡선 $y=x^2+2x$, $y=-x^2+4$의 교점의 x좌표는 $x^2+2x=-x^2+4$에서

$2x^2+2x-4=0$, $(x+2)(x-1)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=1$

$a<b$이므로 $a=-2$, $b=1$

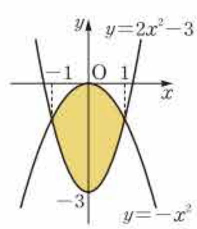
(2) 구하는 넓이는

$$\int_{-2}^{1}\{-x^2+4-(x^2+2x)\}\,dx$$
$$=\int_{-2}^{1}(-2x^2-2x+4)\,dx$$
$$=\left[-\frac{2}{3}x^3-x^2+4x\right]_{-2}^{1}=9$$

Q BOX: 닫힌구간 $[-2, 1]$에서 $-x^2+4\ge x^2+2x$이다.

답 (1) $a=-2$, $b=1$ (2) 9

2-2 (1) 두 곡선 $y=-x^2$, $y=2x^2-3$의 교점의 x좌표는 $-x^2=2x^2-3$에서



$3x^2-3=0$

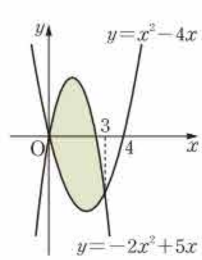
$(x+1)(x-1)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=1$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-1}^{1}\{-x^2-(2x^2-3)\}\,dx$$
$$=\int_{-1}^{1}(-3x^2+3)\,dx=2\int_{0}^{1}(-3x^2+3)\,dx$$
$$=2\left[-x^3+3x\right]_0^1=2\cdot 2=4$$

(2) 두 곡선 $y=x^2-4x$, $y=-2x^2+5x$의 교점의 x좌표는 $x^2-4x=-2x^2+5x$에서



$3x^2-9x=0$

$x(x-3)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=3$

따라서 구하는 넓이는

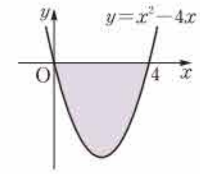
$$\int_{0}^{3}\{-2x^2+5x-(x^2-4x)\}\,dx$$
$$=\int_{0}^{3}(-3x^2+9x)\,dx$$
$$=\left[-x^3+\frac{9}{2}x^2\right]_0^3=\frac{27}{2}$$

답 (1) 4 (2) $\frac{27}{2}$

기본+표준 유형 Q+Q

104쪽

01 곡선 $y=x^2-4x$와 x축의 교점의 x좌표는 $x^2-4x=0$에서

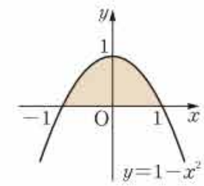


$x(x-4)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=4$

$\therefore S_1$
$$=\int_{0}^{4}\{-(x^2-4x)\}\,dx$$
$$=\int_{0}^{4}(-x^2+4x)\,dx=\left[-\frac{1}{3}x^3+2x^2\right]_0^4=\frac{32}{3}$$

곡선 $y=1-x^2$과 x축의 교점의 x좌표는 $1-x^2=0$에서



$(x+1)(x-1)=0$

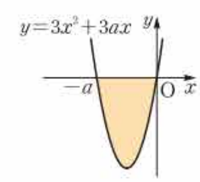
$\therefore x=-1$ 또는 $x=1$

$$\therefore S_2=\int_{-1}^{1}(1-x^2)\,dx$$
$$=2\int_{0}^{1}(1-x^2)\,dx$$
$$=2\left[x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^1=2\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$$

$\therefore S_1+S_2=12$

답 12

02 곡선 $y=3x^2+3ax$와 x축의 교점의 x좌표는 $3x^2+3ax=0$에서 $x(x+a)=0$



$\therefore x=-a$ 또는 $x=0$

Q BOX: $a>0$이므로 $-a<0$

곡선과 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_{-a}^{0}\{-(3x^2+3ax)\}\,dx$$
$$=\int_{-a}^{0}(-3x^2-3ax)\,dx$$
$$=\left[-x^3-\frac{3}{2}ax^2\right]_{-a}^{0}=\frac{a^3}{2}$$

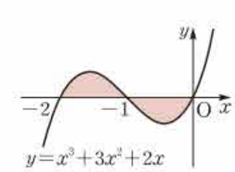
따라서 $\frac{a^3}{2}=4$이므로 $a^3-8=0$

$(a-2)(a^2+2a+4)=0$

$\therefore a=2$ ($\because a^2+2a+4>0$)

답 ②

03 곡선 $y=x^3+3x^2+2x$와 x축의 교점의 x좌표는 $x^3+3x^2+2x=0$에서



Q BOX: $x^3+3x^2+2x=0$에서 $x(x^2+3x+2)=0$ $\therefore x(x+2)(x+1)=0$

$x(x+2)(x+1)=0$

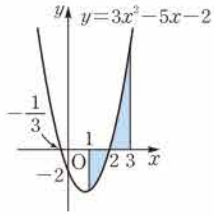
$\therefore x=-2$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=0$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-2}^{0}|x^3+3x^2+2x|\,dx$$
$$=\int_{-2}^{-1}(x^3+3x^2+2x)\,dx+\int_{-1}^{0}(-x^3-3x^2-2x)\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}x^4+x^3+x^2\right]_{-2}^{-1}+\left[-\frac{1}{4}x^4-x^3-x^2\right]_{-1}^{0}$$
$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

답 ①

04 곡선 $y=3x^2-5x-2$와 x축의 교점의 x좌표는 $3x^2-5x-2=0$에서



$(3x+1)(x-2)=0$

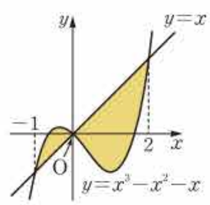
$\therefore x=-\frac{1}{3}$ 또는 $x=2$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_1^3 |3x^2-5x-2|\,dx$$
$$=\int_1^2 (-3x^2+5x+2)\,dx+\int_2^3 (3x^2-5x-2)\,dx$$
$$=\left[-x^3+\frac{5}{2}x^2+2x\right]_1^2+\left[x^3-\frac{5}{2}x^2-2x\right]_2^3$$
$$=\frac{5}{2}+\frac{9}{2}=7$$

답 7

05 곡선 $y=x^3-x^2-x$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표는 $x^3-x^2-x=x$에서



$x^3-x^2-2x=0$

$x(x+1)(x-2)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$

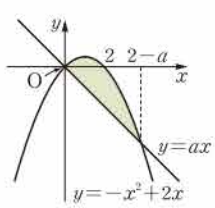
따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-1}^0 (x^3-x^2-x-x)\,dx+\int_0^2 \{x-(x^3-x^2-x)\}\,dx$$
$$=\int_{-1}^0 (x^3-x^2-2x)\,dx+\int_0^2 (-x^3+x^2+2x)\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_{-1}^0+\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_0^2$$
$$=\frac{5}{12}+\frac{8}{3}$$
$$=\frac{37}{12}$$

답 ④

> $f(x)=x^3-x^2-x$, $g(x)=x$라 하면
> 닫힌구간 $[-1, 0]$에서 $f(x)\ge g(x)$
> 닫힌구간 $[0, 2]$에서 $f(x)\le g(x)$

06 곡선 $y=-x^2+2x$와 직선 $y=ax$의 교점의 x좌표는 $-x^2+2x=ax$에서



$x^2+(a-2)x=0$

$x\{x+(a-2)\}=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=2-a$

> $a<0$이므로 $-a>0$
> $\therefore 2-a>2$

곡선과 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_0^{2-a} (-x^2+2x-ax)\,dx$$
$$=\int_0^{2-a} \{-x^2+(2-a)x\}\,dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{2-a}{2}x^2\right]_0^{2-a}$$
$$=-\frac{(2-a)^3}{3}+\frac{(2-a)^3}{2}=\frac{(2-a)^3}{6}$$

따라서 $\frac{(2-a)^3}{6}=\frac{32}{3}$이므로

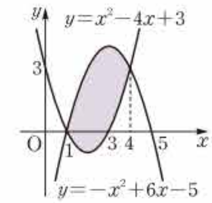
$a^3-6a^2+12a+56=0$

$(a+2)(a^2-8a+28)=0$

$\therefore a=-2$ ($\because a^2-8a+28>0$)

답 -2

07 두 곡선 $y=x^2-4x+3$, $y=-x^2+6x-5$의 교점의 x좌표는 $x^2-4x+3=-x^2+6x-5$에서



$2x^2-10x+8=0$

$(x-1)(x-4)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=4$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_1^4 \{-x^2+6x-5-(x^2-4x+3)\}\,dx$$
$$=\int_1^4 (-2x^2+10x-8)\,dx$$
$$=\left[-\frac{2}{3}x^3+5x^2-8x\right]_1^4$$
$$=9$$

답 ③

08 두 곡선 $y=x^3-2x$, $y=-x^2$의 교점의 x좌표는 $x^3-2x=-x^2$에서 $\quad x^3+x^2-2x=0$

$x(x+2)(x-1)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

따라서

$$S_1=\int_{-2}^0 \{x^3-2x-(-x^2)\}\,dx$$
$$=\int_{-2}^0 (x^3+x^2-2x)\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_{-2}^0=\frac{8}{3},$$
$$S_2=\int_0^1 \{-x^2-(x^3-2x)\}\,dx$$
$$=\int_0^1 (-x^3-x^2+2x)\,dx$$
$$=\left[-\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_0^1=\frac{5}{12}$$

이므로

$$3S_1-12S_2=3\cdot\frac{8}{3}-12\cdot\frac{5}{12}$$
$$=3$$

답 3

09 $y=x^2-6$에서 $\quad y'=2x$

곡선 위의 점 $(-2, -2)$에서의 접선의 기울기는

$2\cdot(-2)=-4$

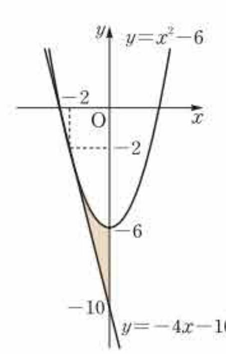
이므로 접선의 방정식은

$y-(-2)=-4\{x-(-2)\}$

$\therefore y=-4x-10$

> 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 방정식은
> $y-f(a)=f'(a)(x-a)$

따라서 구하는 넓이는



$$\int_{-2}^0 \{x^2-6-(-4x-10)\}\,dx$$
$$=\int_{-2}^0 (x^2+4x+4)\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3+2x^2+4x\right]_{-2}^0$$
$$=\frac{8}{3}$$

답 $\frac{8}{3}$

10 $y=x^3+1$에서 $\quad y'=3x^2$

곡선 위의 점 $(1, 2)$에서의 접선의 기울기는

$3\cdot1^2=3$

이므로 접선의 방정식은

$y-2=3(x-1) \qquad \therefore y=3x-1$

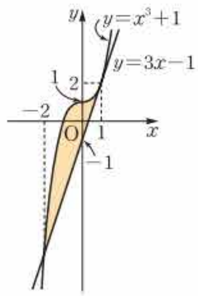
곡선 $y=x^3+1$과 직선 $y=3x-1$의 교점의 x좌표는

$x^3+1=3x-1$에서

$x^3-3x+2=0$

$(x+2)(x-1)^2=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=1$



따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-2}^{1}\{x^3+1-(3x-1)\}\,dx$$
$$=\int_{-2}^{1}(x^3-3x+2)\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}x^2+2x\right]_{-2}^{1}=\frac{27}{4}$$

답 ⑤

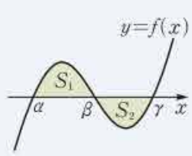
11 색칠한 두 부분의 넓이가 같으므로

$$\int_{-3}^{k}(x^2+3x)\,dx=0$$
$$\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2\right]_{-3}^{k}=0$$
$$\frac{1}{3}k^3+\frac{3}{2}k^2-\frac{9}{2}=0, \qquad 2k^3+9k^2-27=0$$
$$(k+3)^2(2k-3)=0 \qquad \therefore k=\frac{3}{2}\ (\because k>0)$$

답 ②

쌤한마디

오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 두 도형의 넓이를 각각 S_1, S_2라 할 때, $S_1=S_2$이면



$$\int_{\alpha}^{\beta}f(x)\,dx=\int_{\beta}^{\gamma}\{-f(x)\}\,dx$$
$$\int_{\alpha}^{\beta}f(x)\,dx=-\int_{\beta}^{\gamma}f(x)\,dx$$
$$\int_{\alpha}^{\beta}f(x)\,dx+\int_{\beta}^{\gamma}f(x)\,dx=0$$
$$\therefore \int_{\alpha}^{\gamma}f(x)\,dx=0$$

12 색칠한 두 부분의 넓이가 같으므로

$$\int_{0}^{2}\{-2x^2(x-2)-ax(x-2)\}\,dx=0$$
$$\int_{0}^{2}\{-2x^3+(4-a)x^2+2ax\}\,dx=0$$
$$\left[-\frac{1}{2}x^4+\frac{4-a}{3}x^3+ax^2\right]_{0}^{2}=0$$
$$-8+\frac{8(4-a)}{3}+4a=0$$
$$\frac{4}{3}a+\frac{8}{3}=0 \qquad \therefore a=-2$$

답 -2

Q BOX

곡선 $y=-x^2+5x$와 x축의 교점의 x좌표는

$-x^2+5x=0$에서

$x(x-5)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=5$

$$\begin{array}{r|rrrr} -3 & 2 & 9 & 0 & -27 \\ & & -6 & -9 & 27 \\ \hline & 2 & 3 & -9 & 0 \end{array}$$

$\therefore 2k^3+9k^2-27$

$=(k+3)(2k^2+3k-9)$

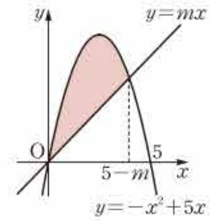
$=(k+3)^2(2k-3)$

13 곡선 $y=-x^2+5x$와 직선 $y=mx$의 교점의 x좌표는 $-x^2+5x=mx$에서

$x^2+(m-5)x=0, \qquad x\{x+(m-5)\}=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=5-m$

오른쪽 그림에서 색칠한 부분의 넓이는



$$\int_{0}^{5-m}(-x^2+5x-mx)\,dx$$
$$=\int_{0}^{5-m}\{-x^2+(5-m)x\}\,dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{5-m}{2}x^2\right]_{0}^{5-m}$$
$$=-\frac{(5-m)^3}{3}+\frac{(5-m)^3}{2}=\frac{(5-m)^3}{6}$$

곡선 $y=-x^2+5x$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_{0}^{5}(-x^2+5x)\,dx=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{5}{2}x^2\right]_{0}^{5}=\frac{125}{6}$$

따라서 $\dfrac{(5-m)^3}{6}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{125}{6}$이므로

$$(5-m)^3=\frac{125}{2}$$

답 ②

14 곡선 $y=ax^2\ (x\geq0)$과 직선 $y=4$의 교점의 x좌표는 $ax^2=4$에서

$$x^2=\frac{4}{a} \qquad \therefore x=\frac{2}{\sqrt{a}}\ (\because x\geq0)$$

곡선 $y=ax^2\ (x\geq0)$과 y축 및 직선 $y=4$로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_{0}^{\frac{2}{\sqrt{a}}}(4-ax^2)\,dx=\left[4x-\frac{a}{3}x^3\right]_{0}^{\frac{2}{\sqrt{a}}}$$
$$=\frac{8}{\sqrt{a}}-\frac{8}{3\sqrt{a}}=\frac{16}{3\sqrt{a}}$$

곡선 $y=x^2\ (x\geq0)$과 직선 $y=4$의 교점의 x좌표는 $x^2=4$에서

$x=2\ (\because x\geq0)$

곡선 $y=x^2\ (x\geq0)$과 y축 및 직선 $y=4$로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_{0}^{2}(4-x^2)\,dx=\left[4x-\frac{1}{3}x^3\right]_{0}^{2}=\frac{16}{3}$$

따라서 $\dfrac{16}{3\sqrt{a}}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{16}{3}$이므로

$\sqrt{a}=2 \qquad \therefore a=4$

답 4

15 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$f(x+1)=f(x)$

이므로

$$\int_{0}^{1}f(x)\,dx=\int_{1}^{2}f(x)\,dx=\int_{2}^{3}f(x)\,dx$$
$$=\int_{3}^{4}f(x)\,dx=3$$
$$\therefore \int_{1}^{4}f(x)\,dx$$
$$=\int_{1}^{2}f(x)\,dx+\int_{2}^{3}f(x)\,dx+\int_{3}^{4}f(x)\,dx$$
$$=3\cdot3=9$$

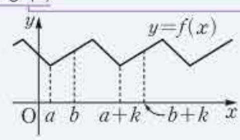
답 ④

쌤 한마디

연속함수 $f(x)$가 정의역에 속하는 모든 실수 x에 대하여

$f(x+k)=f(x)$ (k는 상수)

를 만족시키면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 일정한 모양이 반복된다.



① 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=a+k$, $x=b+k$로 둘러싸인 도형의 넓이와 같으므로

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_{a+k}^{b+k} f(x)\,dx$$

② 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=a+k$로 둘러싸인 도형의 넓이는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=b$, $x=b+k$로 둘러싸인 도형의 넓이와 같으므로

$$\int_a^{a+k} f(x)\,dx=\int_b^{b+k} f(x)\,dx$$

QBOX

함수 $f(x)$에서 정의역에 속하는 모든 실수 x에 대하여 $f(x+k)=f(x)$를 만족시키는 0이 아닌 상수 k가 존재할 때, 함수 $f(x)$를 주기함수라 한다.

16 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$f(x)=f(x+2)$

이므로

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx=\int_1^3 f(x)\,dx=\int_3^5 f(x)\,dx$$

이때

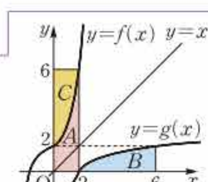
$$\int_1^3 f(x)\,dx=\int_1^3 (x^2-4x+6)\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3-2x^2+6x\right]_1^3$$
$$=\frac{14}{3}$$

이므로

$$\int_{-1}^{5} f(x)\,dx$$
$$=\int_{-1}^{1} f(x)\,dx+\int_1^3 f(x)\,dx+\int_3^5 f(x)\,dx$$
$$=3\cdot\frac{14}{3}=14$$

답 14

17 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림에서



(B의 넓이)$=$(C의 넓이)

$$\therefore \int_0^2 f(x)\,dx+\int_2^6 g(x)\,dx$$
$=$(A의 넓이)$+$(B의 넓이)
$=$(A의 넓이)$+$(C의 넓이)
$=2\cdot6=12$

답 12

함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

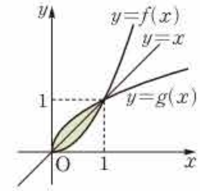
가로, 세로의 길이가 각각 2, 6인 직사각형의 넓이

18 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 교점의 x좌표는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표와 같다.

$x^2=x$에서 $x^2-x=0$

$x(x-1)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=1$



이때 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배와 같으므로 구하는 넓이는

$$2\int_0^1 (x-x^2)\,dx=2\left[\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3\right]_0^1$$
$$=2\cdot\frac{1}{6}$$
$$=\frac{1}{3}$$

답 ②

18 속도와 거리

Lecture 31 수직선 위를 움직이는 점의 위치와 움직인 거리 L 107쪽

1-1 (1) $t=0$에서의 점 P의 위치가 0이므로 $t=4$에서의 점 P의 위치는

$$0+\int_0^4 v(t)\,dt=\int_0^4 (t^2-2t)\,dt$$
$$=\left[\frac{1}{3}t^3-t^2\right]_0^4$$
$$=\frac{16}{3}$$

(2) $t=0$에서 $t=3$까지 점 P의 위치의 변화량은

$$\int_0^3 v(t)\,dt=\int_0^3 (t^2-2t)\,dt$$
$$=\left[\frac{1}{3}t^3-t^2\right]_0^3$$
$$=0$$

(3) $0\le t\le 2$에서 $v(t)\le 0$, $2\le t\le 3$에서 $v(t)\ge 0$이므로 $t=0$에서 $t=3$까지 점 P가 움직인 거리는

점 P는 $t=0$에서 $t=2$까지 음의 방향으로 움직이고 $t=2$에서 $t=3$까지 양의 방향으로 움직인다.

$$\int_0^3 |v(t)|\,dt$$
$$=\int_0^2 (-t^2+2t)\,dt+\int_2^3 (t^2-2t)\,dt$$
$$=\left[-\frac{1}{3}t^3+t^2\right]_0^2+\left[\frac{1}{3}t^3-t^2\right]_2^3$$
$$=\frac{4}{3}+\frac{4}{3}$$
$$=\frac{8}{3}$$

답 (1) $\frac{16}{3}$ (2) 0 (3) $\frac{8}{3}$

1-2 (1) $t=0$에서의 점 P의 위치가 3이므로 $t=2$에서의 점 P의 위치는

$$3+\int_0^2 v(t)\,dt=3+\int_0^2 (6-2t)\,dt$$
$$=3+\left[6t-t^2\right]_0^2$$
$$=3+8=11$$

(2) $t=1$에서 $t=4$까지 점 P의 위치의 변화량은

$$\int_1^4 v(t)\,dt=\int_1^4 (6-2t)\,dt$$
$$=\Big[6t-t^2\Big]_1^4=3$$

(3) $1\le t\le 3$에서 $v(t)\ge 0$, $3\le t\le 4$에서 $v(t)\le 0$이므로 $t=1$에서 $t=4$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_1^4 |v(t)|\,dt$$
$$=\int_1^3 (6-2t)\,dt+\int_3^4 (-6+2t)\,dt$$
$$=\Big[6t-t^2\Big]_1^3+\Big[-6t+t^2\Big]_3^4$$
$$=4+1=5$$

답 (1) 11 (2) 3 (3) 5

1-3 답 (가) 0 (나) 4 (다) 16

기본+표준 유형 Q+Q

108쪽

01 $t=2$에서의 점 P의 위치는

$$4+\int_0^2 v(t)\,dt=4+\int_0^2 (6t+a)\,dt$$
$$=4+\Big[3t^2+at\Big]_0^2=4+12+2a$$
$$=2a+16$$

따라서 $2a+16=10$이므로

$a=-3$

답 ③

02 점 P가 원점으로 되돌아오는 시각을 $t=a\ (a>0)$라 하면 $\int_0^a v(t)\,dt=0$이므로

$\int_0^a (10-2t)\,dt=0,\quad \Big[10t-t^2\Big]_0^a=0$

$10a-a^2=0,\quad a(a-10)=0$

$\therefore a=10\ (\because a>0)$

따라서 $t=10$일 때 점 P가 원점으로 되돌아오므로 $t=0$에서 $t=10$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^{10} |10-2t|\,dt$$
$$=\int_0^5 (10-2t)\,dt+\int_5^{10} (-10+2t)\,dt$$
$$=\Big[10t-t^2\Big]_0^5+\Big[-10t+t^2\Big]_5^{10}$$
$$=25+25=50$$

답 50

03 점 P가 운동 방향을 바꿀 때 $v(t)=0$이므로

$12-3t^2=0,\quad t^2=4$

$\therefore t=2\ (\because t>0)$

따라서 출발 후 $t=2$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^2 |v(t)|\,dt=\int_0^2 (12-3t^2)\,dt$$
$$=\Big[12t-t^3\Big]_0^2=16$$

답 ④

Q BOX

$t=0$에서의 점 P의 위치

점 P가 원점을 출발하여 원점으로 되돌아오므로 위치의 변화량은 0이다.

다음과 같은 상황에서 물체의 속도는 0이다.
① 물체가 정지할 때
② 물체가 운동 방향을 바꿀 때
③ 위로 쏘아 올린 물체가 최고 높이에 도달할 때

1	1	-1	-1	1
		1	0	-1
	1	0	-1	0

$\therefore x^3-x^2-x+1$
$=(x-1)(x^2-1)$
$=(x+1)(x-1)^2$

04 자동차가 정지할 때 $v(t)=0$이므로

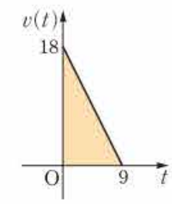
$18-2t=0 \qquad \therefore t=9$

따라서 자동차가 제동을 건 지 9초 후에 정지하므로 정지할 때까지 움직인 거리는

$$\int_0^9 |v(t)|\,dt=\int_0^9 (18-2t)\,dt$$
$$=\Big[18t-t^2\Big]_0^9$$
$$=81\,(\mathrm{m})$$

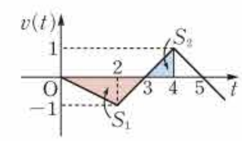
답 81 m

다른 풀이 $v(t)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로 제동을 건 후 자동차가 정지할 때까지 움직인 거리는



$$\int_0^9 |v(t)|\,dt=\frac{1}{2}\cdot 9\cdot 18$$
$$=81\,(\mathrm{m})$$

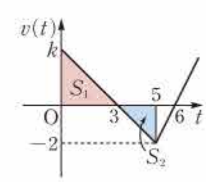
05 $t=4$에서의 점 P의 위치는 오른쪽 그림에서



$$0+\int_0^4 v(t)\,dt$$
$$=-S_1+S_2$$
$$=-\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1$$
$$=-1$$

답 -1

06 $t=0$에서 $t=5$까지 점 P가 움직인 거리는 오른쪽 그림에서



$$\int_0^5 |v(t)|\,dt$$
$$=S_1+S_2$$
$$=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot k+\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2$$
$$=\frac{3}{2}k+2$$

따라서 $\frac{3}{2}k+2=\frac{13}{2}$이므로 $\qquad \frac{3}{2}k=\frac{9}{2}$

$\therefore k=3$

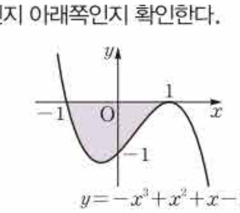
답 ②

중단원 마무리

109쪽

01 전략 곡선과 x축의 교점의 x좌표를 구한 후 적분 구간에서 그래프가 x축보다 위쪽인지 아래쪽인지 확인한다.

풀이 곡선 $y=-x^3+x^2+x-1$과 x축의 교점의 x좌표는



$-x^3+x^2+x-1=0$에서

$x^3-x^2-x+1=0$

$(x+1)(x-1)^2=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=1$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-1}^{1}\{-(-x^3+x^2+x-1)\}dx$$

$$=\int_{-1}^{1}(x^3-x^2-x+1)\,dx$$

$$=2\int_{0}^{1}(-x^2+1)\,dx=2\Big[-\frac{1}{3}x^3+x\Big]_{0}^{1}$$

$$=2\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$$

답 ③

02 전략 S_2가 등차중항임을 이용하여 S_1, S_2, S_3 사이의 관계식을 구한다.

풀이 S_1, S_2, S_3이 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$2S_2=S_1+S_3$$

$$\therefore S_1+S_2+S_3=2S_2+S_2=3S_2$$

세 수 a, b, c가 이 순서대로 등차수열을 이루면 $b=\dfrac{a+c}{2}$

이때

$$S_1+S_2+S_3=\int_{-1}^{2}(-x^2+x+2)\,dx$$

$$=\Big[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+2x\Big]_{-1}^{2}$$

$$=\frac{9}{2}$$

이므로

$$3S_2=\frac{9}{2}\qquad\therefore S_2=\frac{3}{2}$$

답 ④

다른 풀이 $S_1=\displaystyle\int_{-1}^{0}(-x^2+x+2)dx$

$$=\Big[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+2x\Big]_{-1}^{0}=\frac{7}{6},$$

$$S_2=\int_{0}^{k}(-x^2+x+2)dx=\Big[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+2x\Big]_{0}^{k}$$

$$=-\frac{1}{3}k^3+\frac{1}{2}k^2+2k,\qquad\cdots\cdots ㉠$$

$$S_3=\int_{k}^{2}(-x^2+x+2)dx=\Big[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+2x\Big]_{k}^{2}$$

$$=\frac{10}{3}-\Big(-\frac{1}{3}k^3+\frac{1}{2}k^2+2k\Big)$$

$$=\frac{10}{3}-S_2\ (\because ㉠)$$

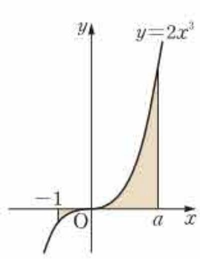
이때 $2S_2=S_1+S_3$이므로

$$2S_2=\frac{7}{6}+\Big(\frac{10}{3}-S_2\Big)$$

$$3S_2=\frac{9}{2}\qquad\therefore S_2=\frac{3}{2}$$

03 전략 그래프를 그려 $y\ge0$인 구간과 $y\le0$인 구간으로 나누어 넓이를 구한다.

풀이 오른쪽 그림에서 색칠한 부분의 넓이는



$$\int_{-1}^{a}|2x^3|dx$$

$$=\int_{-1}^{0}(-2x^3)\,dx+\int_{0}^{a}2x^3\,dx$$

$$=\Big[-\frac{1}{2}x^4\Big]_{-1}^{0}+\Big[\frac{1}{2}x^4\Big]_{0}^{a}$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{a^4}{2}\qquad\cdots ❶$$

따라서 $\dfrac{1}{2}+\dfrac{a^4}{2}=\dfrac{17}{2}$이므로

$$a^4=16\qquad\therefore a=2\ (\because a>0)\qquad\cdots ❷$$

답 2

단계	채점 기준	비율
❶	넓이를 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	60 %
❷	a의 값을 구할 수 있다.	40 %

04 전략 S_2의 값은 곡선 $y=-x^2+6x$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이에서 S_1을 뺀 것과 같음을 이용한다.

풀이 곡선 $y=-x^2+6x$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표는 $-x^2+6x=x$에서

$$x^2-5x=0,\qquad x(x-5)=0$$

$$\therefore x=0\ \text{또는}\ x=5$$

$$\therefore S_1=\int_{0}^{5}(-x^2+6x-x)\,dx$$

$$=\int_{0}^{5}(-x^2+5x)\,dx$$

$$=\Big[-\frac{1}{3}x^3+\frac{5}{2}x^2\Big]_{0}^{5}$$

$$=\frac{125}{6}$$

곡선 $y=-x^2+6x$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_{0}^{6}(-x^2+6x)\,dx=\Big[-\frac{1}{3}x^3+3x^2\Big]_{0}^{6}$$

$$=36$$

$$\therefore S_2=36-\frac{125}{6}=\frac{91}{6}$$

$$\therefore S_1-S_2=\frac{17}{3}$$

답 ①

05 전략 점 P가 곡선 $y=\frac{1}{2}x^3$ 위의 점임을 이용하여 S_2를 a에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 $S_1=\displaystyle\int_{0}^{1}\frac{1}{2}x^3\,dx=\Big[\frac{1}{8}x^4\Big]_{0}^{1}=\frac{1}{8}$

점 $P(a,\ b)$가 곡선 $y=\frac{1}{2}x^3$ 위의 점이므로

$$b=\frac{1}{2}a^3$$

$$\therefore S_2=\int_{1}^{a}\Big(b-\frac{1}{2}x^3\Big)dx$$

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=b$의 교점이 점 P이므로 적분 구간은 $[1,\ a]$이다.

$$=\int_{1}^{a}\Big(\frac{1}{2}a^3-\frac{1}{2}x^3\Big)dx$$

$$=\Big[\frac{1}{2}a^3x-\frac{1}{8}x^4\Big]_{1}^{a}$$

$$=\frac{3}{8}a^4-\frac{1}{2}a^3+\frac{1}{8}$$

$S_1=S_2$이므로

$$\frac{1}{8}=\frac{3}{8}a^4-\frac{1}{2}a^3+\frac{1}{8}$$

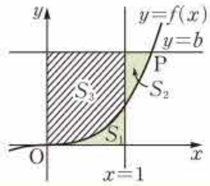
$$3a^4-4a^3=0,\qquad a^3(3a-4)=0$$

$$\therefore a=\frac{4}{3}\ (\because a>1)$$

$$\therefore 30a=30\cdot\frac{4}{3}=40$$

답 40

다른 풀이 오른쪽 그림과 같이 빗금 친 부분의 넓이를 S_3이라 하면 $S_1=S_2$이므로



$S_1+S_3=S_2+S_3$

$1\cdot b$

$=\int_0^a \{b-f(x)\}dx$

곡선 $y=f(x)$와 y축 및 직선 $y=b$로 둘러싸인 도형의 넓이

이때 $b=\frac{1}{2}a^3$이므로

$\frac{1}{2}a^3=\int_0^a \left(\frac{1}{2}a^3-\frac{1}{2}x^3\right)dx$

$\frac{1}{2}a^3=\left[\frac{1}{2}a^3x-\frac{1}{8}x^4\right]_0^a$

$\frac{1}{2}a^3=\frac{3}{8}a^4,\qquad 3a^4-4a^3=0$

$a^3(3a-4)=0\qquad \therefore a=\frac{4}{3}\ (\because a>1)$

$\therefore 30a=30\cdot\frac{4}{3}=40$

06 **전략** 평행이동한 그래프의 식을 구하여 두 곡선의 교점의 x좌표를 구한다.

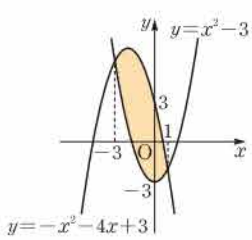
풀이 곡선 $y=-x^2$을 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 7만큼 평행이동한 그래프의 식은

도형 $f(x,\ y)=0$을 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 도형의 방정식
➡ x 대신 $x-p$, y 대신 $y-q$를 대입한다.
➡ $f(x-p,\ y-q)=0$

$y-7=-\{x-(-2)\}^2$

$\therefore y=-x^2-4x+3$

두 곡선 $y=-x^2-4x+3$, $y=x^2-3$의 교점의 x좌표는 $-x^2-4x+3=x^2-3$에서



$2x^2+4x-6=0$

$(x+3)(x-1)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=1$

따라서 구하는 넓이는

$\int_{-3}^{1}\{-x^2-4x+3-(x^2-3)\}dx$

$=\int_{-3}^{1}(-2x^2-4x+6)dx$

$=\left[-\frac{2}{3}x^3-2x^2+6x\right]_{-3}^{1}$

$=\frac{64}{3}$

답 $\frac{64}{3}$

07 **전략** 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a,\ f(a))$에서의 접선의 방정식은 $y-f(a)=f'(a)(x-a)$임을 이용하여 접선의 방정식을 구한 후 곡선과 접선의 위치 관계를 파악하여 넓이를 구한다.

풀이 $y=-x^3+6x^2-8x$에서

$y'=-3x^2+12x-8$

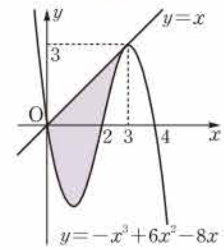
곡선 위의 점 $(3,\ 3)$에서의 접선의 기울기는

$-3\cdot 3^2+12\cdot 3-8=1$

이므로 접선의 방정식은

$y-3=x-3\qquad \therefore y=x$

곡선 $y=-x^3+6x^2-8x$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표는



$-x^3+6x^2-8x=x$에서

$x^3-6x^2+9x=0$

$x(x-3)^2=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=3$

따라서 구하는 넓이는

$\int_0^3\{x-(-x^3+6x^2-8x)\}dx$

$=\int_0^3(x^3-6x^2+9x)dx$

$=\left[\frac{1}{4}x^4-2x^3+\frac{9}{2}x^2\right]_0^3$

$=\frac{27}{4}$

답 $\frac{27}{4}$

08 **전략** 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=g(x)$가 접하면 이차방정식 $f(x)=g(x)$, 즉 $f(x)-g(x)=0$이 중근을 가짐을 이용한다.

풀이 $x>0$일 때, 곡선 $y=ax^2+2$와 직선 $y=2x$가 접하므로

$x>0$일 때, $y=2|x|=2x$

$ax^2+2=2x$, 즉 $ax^2-2x+2=0$

에서 이차방정식 $ax^2-2x+2=0$이 중근을 갖는다.

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-1)^2-a\cdot 2=0$

$1-2a=0$

$\therefore a=\frac{1}{2}$

곡선 $y=\frac{1}{2}x^2+2$와 직선 $y=2x$의 교점의 x좌표는

$\frac{1}{2}x^2+2=2x$에서

$x^2-4x+4=0$

$(x-2)^2=0$

$\therefore x=2$

두 함수 $y=\frac{1}{2}x^2+2$와 $y=2|x|$의 그래프는 각각 y축에 대하여 대칭이므로 구하는 넓이는

$2\int_0^2\left(\frac{1}{2}x^2+2-2x\right)dx=2\left[\frac{1}{6}x^3+2x-x^2\right]_0^2$

$=2\cdot\frac{4}{3}$

$=\frac{8}{3}$

답 ④

09 **전략** 곡선과 x축의 교점의 x좌표를 구한 후 두 도형의 넓이가 같음을 이용한다.

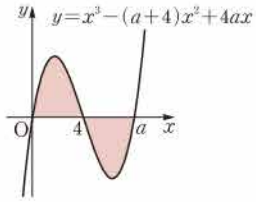
풀이 곡선 $y=x^3-(a+4)x^2+4ax$와 x축의 교점의 x좌표는 $x^3-(a+4)x^2+4ax=0$에서

$x^3-(a+4)x^2+4ax$
$=x\{x^2-(a+4)x+4a\}$
$=x(x-4)(x-a)$

$x(x-4)(x-a)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=4$ 또는 $x=a$

오른쪽 그림에서 색칠한 두 부분의 넓이가 같으므로



$$\int_0^a \{x^3-(a+4)x^2+4ax\}\,dx=0$$

$$\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{a+4}{3}x^3+2ax^2\right]_0^a=0$$

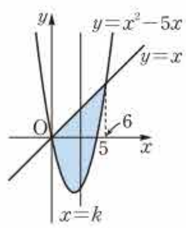
$$\frac{1}{4}a^4-\frac{a^4+4a^3}{3}+2a^3=0$$

$a^4-8a^3=0,\qquad a^3(a-8)=0$

$\therefore\ a=8\ (\because\ a>4)$ 답 ⑤

10 전략 곡선 $y=x^2-5x$와 직선 $y=x$ 및 직선 $x=k$로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선 $y=x^2-5x$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이의 $\frac{1}{2}$임을 이용한다.

풀이 곡선 $y=x^2-5x$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표는



$x^2-5x=x$에서

$x^2-6x=0$

$x(x-6)=0$

$\therefore\ x=0$ 또는 $x=6$

곡선 $y=x^2-5x$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\int_0^6 \{x-(x^2-5x)\}\,dx=\int_0^6 (-x^2+6x)\,dx=\left[-\frac{1}{3}x^3+3x^2\right]_0^6=36$$

이 넓이를 직선 $x=k$가 이등분하므로

$$\int_0^k \{x-(x^2-5x)\}\,dx=\frac{1}{2}\cdot 36$$

$$\int_0^k (-x^2+6x)\,dx=18$$

$$\left[-\frac{1}{3}x^3+3x^2\right]_0^k=18$$

$-\frac{1}{3}k^3+3k^2=18,\qquad k^3-9k^2+54=0$

$(k-3)(k^2-6k-18)=0$

$\therefore\ k=3\ (\because\ 0<k<6)$ 답 ①

$\int_0^k \{x-(x^2-5x)\}dx$
$=\int_k^6 \{x-(x^2-5x)\}dx$
임을 이용할 수도 있다.

$k^2-6k-18=0$에서
$k=3\pm3\sqrt{3}$

곡선과 직선으로 둘러싸인 도형은 구간 $[0,\ 6]$에서 그려지므로 이 도형의 넓이를 직선 $x=k$가 이등분하려면
$0<k<6$

11 전략 함수 $f(x)$가 $x=2$에서 연속임을 이용하여 a의 값을 구한 후 $f(x)=f(x+4)$임을 이용하여 구하는 정적분의 적분 구간을 변형한다.

풀이 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이면 $x=2$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to2+}f(x)=\lim_{x\to2-}f(x)=f(2)$$

즉 $\lim_{x\to2+}(x^2-2x+a)=\lim_{x\to2-}(-4x+2)$이므로

$4-4+a=-8+2$

$\therefore\ a=-6$

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$f(x)=f(x+4)$

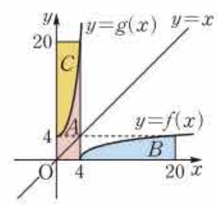
이므로

$$\int_9^{11}f(x)dx=\int_5^7 f(x)dx=\int_1^3 f(x)dx$$
$$=\int_1^2(-4x+2)dx+\int_2^3(x^2-2x-6)dx$$
$$=\left[-2x^2+2x\right]_1^2+\left[\frac{1}{3}x^3-x^2-6x\right]_2^3$$
$$=-4-\frac{14}{3}=-\frac{26}{3}$$

답 ②

12 전략 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$가 서로 역함수 관계이므로 두 함수의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭임을 이용한다.

풀이 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림에서



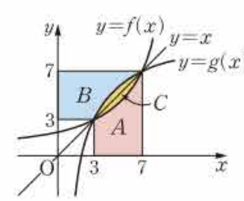
$(B$의 넓이$)=(C$의 넓이$)$

$$\therefore\ \int_0^4 g(x)\,dx+\int_4^{20}f(x)\,dx$$
$=(A$의 넓이$)+(B$의 넓이$)$
$=(A$의 넓이$)+(C$의 넓이$)$
$=4\cdot20=80$

답 80

13 전략 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$가 서로 역함수 관계이므로 두 함수의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭임을 이용하여 넓이가 같은 부분을 찾는다.

풀이 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림에서



$(A$의 넓이$)$
$=(B$의 넓이$)$

$\therefore\ \int_3^7 g(x)\,dx=(A$의 넓이$)+(C$의 넓이$)$
$=7^2-3^2-(B$의 넓이$)$
$=40-(A$의 넓이$)$
$=40-S$

$\int_3^7 f(x)\,dx$

$\therefore\ k=40$

답 40

14 전략 시각 t에서의 가속도는 $v'(t)$임을 이용하여 k의 값을 구한다.

풀이 점 P의 시각 $t\ (t>0)$에서의 가속도를 $a(t)$라 하면

$a(t)=v'(t)=-12t^2+24t$

시각 $t=k$에서의 가속도가 12이므로

$-12k^2+24k=12$

$k^2-2k+1=0,\qquad (k-1)^2=0$

$\therefore\ k=1$

$t=3k=3$에서 $t=4k=4$까지

$v(t)=-4t^2(t-3)\le 0$

이므로 $t=3$에서 $t=4$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_3^4 |v(t)|\,dt=\int_3^4 \{-(-4t^3+12t^2)\}\,dt$$
$$=\int_3^4 (4t^3-12t^2)\,dt$$
$$=\Big[t^4-4t^3\Big]_3^4$$
$$=27$$

답 ③

15 전략 두 점 A, B의 위치를 각각 x_A, x_B라 하면 두 점이 다시 만날 때 $x_A=x_B$이고 두 점 사이의 거리는 $|x_A-x_B|$임을 이용한다.

풀이 시각 t에서의 두 점 A, B의 위치를 각각 x_A, x_B라 하면

$$x_A=0+\int_0^t v_A\,dt$$
$$=\int_0^t (2t-8)\,dt$$
$$=\Big[t^2-8t\Big]_0^t$$
$$=t^2-8t,$$
$$x_B=0+\int_0^t v_B\,dt$$
$$=\int_0^t (-2t+8)\,dt$$
$$=\Big[-t^2+8t\Big]_0^t$$
$$=-t^2+8t \qquad \cdots ❶$$

$t=t_1$일 때 두 점 A, B가 다시 만나므로

$t_1^2-8t_1=-t_1^2+8t_1$

$t_1(t_1-8)=0$

$\therefore t_1=8\ (\because t_1>0)$ ⋯ ❷

한편 두 점 A, B 사이의 거리는

$$|(t^2-8t)-(-t^2+8t)|=2|t^2-8t|$$
$$=2|(t-4)^2-16|$$

이므로 $0\le t\le 8$에서 두 점 사이의 거리는 $t=4$일 때 최대이다.

$\therefore t_2=4$ ⋯ ❸

$\therefore t_1+t_2=12$ ⋯ ❹

답 12

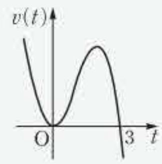
단계	채점 기준	비율
❶	시각 t에서의 두 점 A, B의 위치를 구할 수 있다.	40 %
❷	t_1의 값을 구할 수 있다.	20 %
❸	t_2의 값을 구할 수 있다.	30 %
❹	t_1+t_2의 값을 구할 수 있다.	10 %

16 전략 물체가 최고 높이에 도달할 때 $v(t)=0$임을 이용하여 최고 높이에 도달한 시각을 구한다.

풀이 물체가 최고 높이에 도달할 때 $v(t)=0$이므로

$14-7t=0 \qquad \therefore t=2$

Q BOX



점 P가 운동 방향을 바꿀 때 $v(t)=0$이므로 $t=3$, $t=6$에서 운동 방향을 바꾼다.

$0+\int_0^5 v(t)\,dt$
$=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 2$
$-\frac{1}{2}\cdot(2+1)\cdot 2$
$=0$
이므로 $t=5$에서 점 P는 원점을 지난다.

두 점 A, B는 출발한 후 다시 만날 때까지 움직인다.

따라서 물체는 출발한 지 2초 후에 최고 높이에 도달하므로 구하는 거리는

$$\int_2^4 |14-7t|\,dt=\int_2^4 (7t-14)\,dt$$
$$=\Big[\frac{7}{2}t^2-14t\Big]_2^4$$
$$=14\,(\mathrm{m})$$

답 14 m

17 전략 점이 움직이는 방향을 바꿀 때 $v(t)=0$임을 이용한다.

풀이 점 P가 움직이는 방향을 바꿀 때 $v(t)=0$이므로

$t^2-at=0, \qquad t(t-a)=0$

$\therefore t=0$ 또는 $t=a$

즉 $t=a$에서 점 P가 움직이는 방향을 바꾸므로 $t=0$에서 $t=a$까지 움직인 거리는

$$\int_0^a |v(t)|\,dt=\int_0^a (-t^2+at)\,dt$$
$$=\Big[-\frac{1}{3}t^3+\frac{a}{2}t^2\Big]_0^a$$
$$=\frac{a^3}{6}$$

따라서 $\frac{a^3}{6}=\frac{9}{2}$이므로

$a^3-27=0, \qquad (a-3)(a^2+3a+9)=0$

$\therefore a=3\ (\because a^2+3a+9>0)$

답 ③

18 전략 $v(t)$의 그래프와 x축 사이의 넓이가 점 P가 움직인 거리임을 이용한다.

풀이 ① $t=2$의 좌우에서 $v(t)$의 부호가 바뀌지 않으므로 $t=2$에서 점 P는 운동 방향을 바꾸지 않는다.

② $t=3$에서의 점 P의 위치는

$$0+\int_0^3 v(t)\,dt=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 2=3$$

따라서 $t=3$에서 점 P는 원점을 지나지 않는다.

③ $t=4$에서의 점 P의 위치는

$$0+\int_0^4 v(t)\,dt=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 2-\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2=2$$

④ $t=2$에서 $t=5$까지 점 P의 위치의 변화량은

$$\int_2^5 v(t)\,dt=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2-\frac{1}{2}\cdot(2+1)\cdot 2$$
$$=-2$$

⑤ $t=0$에서 $t=6$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^6 |v(t)|\,dt=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 2+\frac{1}{2}\cdot(3+1)\cdot 2$$
$$=7$$

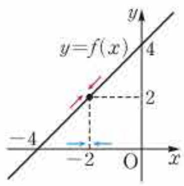
답 ⑤

01 함수의 극한

01 함수의 극한

W 2쪽

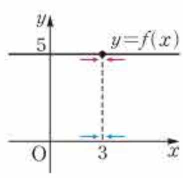
01 (1) $f(x)=x+4$라 하면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 x의 값이 -2가 아니면서 -2에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 2에 한없이 가까워지므로

$\lim\limits_{x \to -2}(x+4)=2$

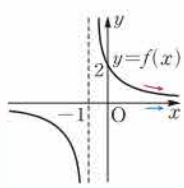
(2) $f(x)=5$라 하면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 x의 값이 3이 아니면서 3에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 5이므로

$\lim\limits_{x \to 3} 5=5$

(3) $f(x)=\dfrac{2}{x+1}$라 하면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

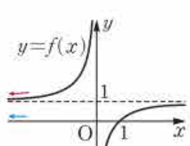


따라서 x의 값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값은 0에 한없이 가까워지므로

$\lim\limits_{x \to \infty}\dfrac{2}{x+1}=0$

> $y=\dfrac{2}{x+1}$의 그래프는 $y=\dfrac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

(4) $f(x)=1-\dfrac{1}{x}$이라 하면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

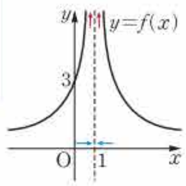


따라서 x의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값은 1에 한없이 가까워지므로

$\lim\limits_{x \to -\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)=1$

답 (1) 2 (2) 5 (3) 0 (4) 1

02 (1) $f(x)=\dfrac{3}{|x-1|}$이라 하면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



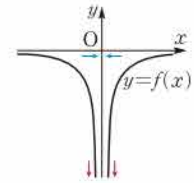
> $|x-1|=\begin{cases} x-1 & (x\ge1) \\ -(x-1) & (x<1)\end{cases}$

> $y=\dfrac{3}{|x-1|}$의 그래프는 $y=\dfrac{3}{|x|}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

따라서 x의 값이 1이 아니면서 1에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 한없이 커지므로

$\lim\limits_{x \to 1}\dfrac{3}{|x-1|}=\infty$

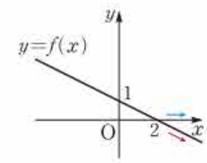
(2) $f(x)=-\dfrac{1}{x^2}$이라 하면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 x의 값이 0이 아니면서 0에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지므로

$\lim\limits_{x \to 0}\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)=-\infty$

(3) $f(x)=-\dfrac{1}{2}x+1$이라 하면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

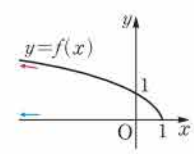


따라서 x의 값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값은 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지므로

$\lim\limits_{x \to \infty}\left(-\dfrac{1}{2}x+1\right)=-\infty$

(4) $f(x)=\sqrt{-x+1}$이라 하면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

> $y=\sqrt{-x+1}$의 그래프는 $y=\sqrt{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

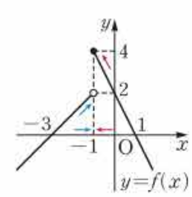


따라서 x의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값은 한없이 커지므로

$\lim\limits_{x \to -\infty}\sqrt{-x+1}=\infty$

답 (1) ∞ (2) $-\infty$ (3) $-\infty$ (4) ∞

03 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



(1) x의 값이 -1보다 크면서 -1에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 4에 한없이 가까워지므로 $\lim\limits_{x \to -1+}f(x)=4$

(2) x의 값이 -1보다 작으면서 -1에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 2에 한없이 가까워지므로

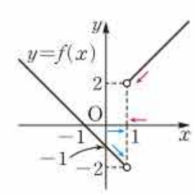
$\lim\limits_{x \to -1-}f(x)=2$

답 (1) 4 (2) 2

04 (1) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{|x-1|}=\dfrac{(x+1)(x-1)}{|x-1|}$이라 하면

$f(x)=\begin{cases} x+1 & (x>1) \\ -x-1 & (x<1)\end{cases}$

$y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$\lim\limits_{x \to 1+}f(x)=2$,

$\lim\limits_{x \to 1-}f(x)=-2$

따라서 $\lim\limits_{x \to 1+}f(x)\neq\lim\limits_{x \to 1-}f(x)$이므로 $\lim\limits_{x \to 1}f(x)$, 즉 $\lim\limits_{x \to 1}\dfrac{x^2-1}{|x-1|}$은 존재하지 않는다.

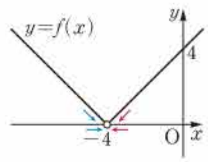
> 우극한과 좌극한이 모두 존재하더라도 그 값이 같지 않으면 극한값은 존재하지 않는다.

(2) $f(x)=\dfrac{x^2+8x+16}{|x+4|}=\dfrac{(x+4)^2}{|x+4|}$이라 하면

$$f(x)=\begin{cases} x+4 & (x>-4) \\ -x-4 & (x<-4) \end{cases}$$

Q BOX: $|x+4|=\begin{cases} x+4 & (x\ge -4) \\ -(x+4) & (x<-4) \end{cases}$

$y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$\displaystyle\lim_{x\to -4+}f(x)$

$\displaystyle=\lim_{x\to -4-}f(x)=0$

$\displaystyle\therefore \lim_{x\to -4}f(x)=0$, 즉 $\displaystyle\lim_{x\to -4}\frac{x^2+8x+16}{|x+4|}=0$

답 (1) 존재하지 않는다. (2) 0

05 $\displaystyle\lim_{x\to -1-}f(x)+\lim_{x\to 0+}f(x)+f(1)=1+1+3$

$=5$

답 ③

06 $\displaystyle\lim_{x\to 0+}f(x)=-1$이므로 $a=-1$

$\displaystyle\therefore \lim_{x\to a+}f(x)+\lim_{x\to -a-}f(x)$

$\displaystyle=\lim_{x\to -1+}f(x)+\lim_{x\to 1-}f(x)$

$=2+1=3$

답 3

07 ① $\displaystyle\lim_{x\to 0+}f(x)\ne\lim_{x\to 0-}f(x)$이므로 $\displaystyle\lim_{x\to 0}f(x)$가 존재하지 않는다.

Q BOX: $\displaystyle\lim_{x\to a}f(x)$가 존재하지 않는 a의 값이 있는지 확인한다.

② $\displaystyle\lim_{x\to 0+}f(x)=-\infty$, $\displaystyle\lim_{x\to 0-}f(x)=\infty$이므로 $\displaystyle\lim_{x\to 0}f(x)$가 존재하지 않는다.

③ $\displaystyle\lim_{x\to 0}f(x)=\infty$이므로 $\displaystyle\lim_{x\to 0}f(x)$가 존재하지 않는다.

⑤ 정수 a에 대하여 $\displaystyle\lim_{x\to a+}f(x)\ne\lim_{x\to a-}f(x)$이므로 $\displaystyle\lim_{x\to a}f(x)$가 존재하지 않는다.

답 ④

쌤 한마디

③ $\displaystyle\lim_{x\to 0}f(x)=\infty$에서 ∞는 일정한 값이 아니라 한없이 커지는 상태를 나타내므로 $\displaystyle\lim_{x\to 0}f(x)$가 존재하지 않는다.

④ 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 정의되지 않을 때도 $\displaystyle\lim_{x\to 0+}f(x)$, $\displaystyle\lim_{x\to 0-}f(x)$가 모두 존재하고 그 값이 같으면 극한값이 존재한다.

08 ㄱ. $\displaystyle\lim_{x\to -1+}f(x)=0$, $\displaystyle\lim_{x\to -1-}f(x)=1$이므로

$\displaystyle\lim_{x\to -1+}f(x)\ne\lim_{x\to -1-}f(x)$

따라서 $\displaystyle\lim_{x\to -1}f(x)$가 존재하지 않는다.

ㄴ. $\displaystyle\lim_{x\to 1+}f(x)=\lim_{x\to 1-}f(x)=0$이므로

$\displaystyle\lim_{x\to 1}f(x)=0$

ㄷ. $\displaystyle\lim_{x\to 0+}f(x)=1$, $\displaystyle\lim_{x\to 0-}f(x)=-1$이므로

$\displaystyle\lim_{x\to 0+}f(x)\ne\lim_{x\to 0-}f(x)$

따라서 $\displaystyle\lim_{x\to 0}f(x)$가 존재하지 않는다.

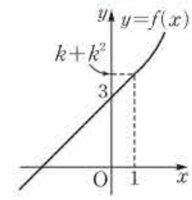
Q BOX: $-1<0<1$

이상에서 옳은 것은 ㄴ뿐이다.

답 ②

09 $\displaystyle\lim_{x\to 1}f(x)$가 존재하려면

$\displaystyle\lim_{x\to 1+}f(x)=\lim_{x\to 1-}f(x)$

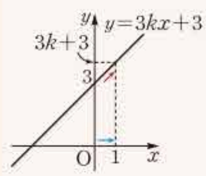


이어야 하므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.

이때

$\displaystyle\lim_{x\to 1+}f(x)=k+k^2$,

$\displaystyle\lim_{x\to 1-}f(x)=3k+3$



이므로

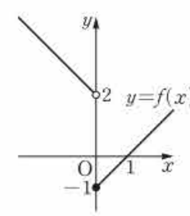
$k+k^2=3k+3$, $\quad k^2-2k-3=0$

$(k+1)(k-3)=0$

$\therefore k=3$ ($\because k>0$)

답 3

10 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



$f(x)=t$로 놓으면 $x\to 1-$일 때 $t\to 0-$이므로

$\displaystyle\lim_{x\to 1-}f(f(x))=\lim_{t\to 0-}f(t)$

$=2$

답 2

11 $f(x)=t$로 놓으면 $x\to -1-$일 때 $t\to 1+$이므로

$\displaystyle\lim_{x\to -1-}f(f(x))=\lim_{t\to 1+}f(t)=2$

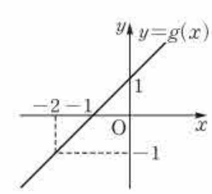
또 $x\to 2+$일 때 $t\to 0-$이므로

$\displaystyle\lim_{x\to 2+}f(f(x))=\lim_{t\to 0-}f(t)=-1$

$\displaystyle\therefore \lim_{x\to -1-}f(f(x))-\lim_{x\to 2+}f(f(x))=3$

답 ④

12 함수 $y=g(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



$f(x)=t$로 놓으면 $x\to 1+$일 때 $t\to 0+$이므로

$\displaystyle\lim_{x\to 1+}g(f(x))=\lim_{t\to 0+}g(t)$

$=1$

$g(x)=s$로 놓으면 $x\to -2-$일 때 $s\to -1-$이므로

$\displaystyle\lim_{x\to -2-}f(g(x))=\lim_{s\to -1-}f(s)=0$

$\displaystyle\therefore \lim_{x\to 1+}g(f(x))+\lim_{x\to -2-}f(g(x))=1$

답 1

02 함수의 극한값의 계산

4쪽

01 (1) $\displaystyle\lim_{x\to -1}\{4f(x)+3g(x)\}$

$\displaystyle=4\lim_{x\to -1}f(x)+3\lim_{x\to -1}g(x)$

$=4\cdot 3+3\cdot(-2)=6$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to -1}\left\{f(x)-\frac{1}{2}g(x)\right\}=\lim_{x\to -1}f(x)-\frac{1}{2}\lim_{x\to -1}g(x)$

$=3-\dfrac{1}{2}\cdot(-2)=4$

(3) $\lim_{x\to-1}\{5-f(x)g(x)\}$

$=\lim_{x\to-1}5-\lim_{x\to-1}f(x)\cdot\lim_{x\to-1}g(x)$

$=5-3\cdot(-2)=11$

$\lim_{x\to-1}5=5$

(4) $\lim_{x\to-1}\dfrac{2g(x)-1}{f(x)+2}=\dfrac{2\lim_{x\to-1}g(x)-\lim_{x\to-1}1}{\lim_{x\to-1}f(x)+\lim_{x\to-1}2}$

$=\dfrac{2\cdot(-2)-1}{3+2}=-1$

답 (1) 6 (2) 4 (3) 11 (4) -1

02 (1) $\lim_{x\to-2}\dfrac{2x^2+5x+2}{x+2}=\lim_{x\to-2}\dfrac{(2x+1)(x+2)}{x+2}$

$=\lim_{x\to-2}(2x+1)$

$=2\cdot(-2)+1=-3$

(2) $\lim_{x\to9}\dfrac{\sqrt{x}-3}{x-9}=\lim_{x\to9}\dfrac{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}{(x-9)(\sqrt{x}+3)}$

$=\lim_{x\to9}\dfrac{x-9}{(x-9)(\sqrt{x}+3)}$

$=\lim_{x\to9}\dfrac{1}{\sqrt{x}+3}$

$=\dfrac{1}{3+3}=\dfrac{1}{6}$

(3) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{x^2+6}{x(x+1)(x-3)}=\lim_{x\to\infty}\dfrac{\frac{1}{x}+\frac{6}{x^3}}{1\cdot\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1-\frac{3}{x}\right)}$

$=0$

$x(x+1)(x-3)$의 최고차항은 x^3이므로 x^3으로 나누면
$\dfrac{x(x+1)(x-3)}{x^3}$
$=\dfrac{x}{x}\cdot\dfrac{x+1}{x}\cdot\dfrac{x-3}{x}$
$=1\cdot\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(1-\dfrac{3}{x}\right)$

(4) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{2}{\sqrt{x^2+2x}-x}$

$=\lim_{x\to\infty}\dfrac{2(\sqrt{x^2+2x}+x)}{(\sqrt{x^2+2x}-x)(\sqrt{x^2+2x}+x)}$

$=\lim_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+2x}+x}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{1+\dfrac{2}{x}}+1\right)$

$=1+1=2$

(5) $\lim_{x\to\infty}(1+x^2-2x^3)=\lim_{x\to\infty}x^3\left(\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{1}{x}-2\right)=-\infty$

$\infty\times$(0이 아닌 상수) 꼴

(6) $\lim_{x\to0}\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{4}{x-4}+1\right)=\lim_{x\to0}\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{x}{x-4}$

$=\lim_{x\to0}\dfrac{1}{x-4}=-\dfrac{1}{4}$

답 (1) -3 (2) $\dfrac{1}{6}$ (3) 0

(4) 2 (5) $-\infty$ (6) $-\dfrac{1}{4}$

03 (1) $x\to1$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\to0$ 이므로 (분자) $\to0$이다.

즉 $\lim_{x\to1}(x^2+ax+7)=0$이므로

$1^2+a\cdot1+7=0\qquad\therefore a=-8$

(2) $x\to-3$일 때 0이 아닌 극한값이 존재하고 (분자) $\to0$이므로 (분모) $\to0$이다.

즉 $\lim_{x\to-3}(x^2+8x+a)=0$이므로

$(-3)^2+8\cdot(-3)+a=0\qquad\therefore a=15$

답 (1) -8 (2) 15

Q BOX

04 모든 실수 x에 대하여 $2x+3\le f(x)\le x^2+4$이고

$\lim_{x\to1}(2x+3)=5,\ \lim_{x\to1}(x^2+4)=5$

이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim_{x\to1}f(x)=5$

답 5

05 $\lim_{x\to2}(2x^2-6x)f(x)=\lim_{x\to2}2x(x-3)f(x)$

$=2\lim_{x\to2}xf(x)\cdot(x-3)$

$=2\cdot3\cdot(-1)$

$=-6$

답 ③

$\lim_{x\to2}xf(x)=3$을 이용할 수 있도록 식을 변형한다.

06 $\lim_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}\{f(x)+2x\}=0$에서 $\lim_{x\to\infty}\left\{\dfrac{f(x)}{x}+2\right\}=0$

이므로

$\lim_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=-2$

$\therefore\lim_{x\to\infty}\dfrac{6f(x)+4x}{3f(x)-2x+1}=\lim_{x\to\infty}\dfrac{6\cdot\frac{f(x)}{x}+4}{3\cdot\frac{f(x)}{x}-2+\frac{1}{x}}$

$=\dfrac{6\cdot(-2)+4}{3\cdot(-2)-2+0}$

$=1$

답 1

$\lim_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=-2$를 이용할 수 있도록 분자, 분모를 각각 x로 나누어 식을 변형한다.

07 $f(x)-3g(x)=h(x)$라 하면 $\lim_{x\to a}h(x)=5$이고

$g(x)=\dfrac{f(x)-h(x)}{3}$

이므로

$\lim_{x\to a}g(x)=\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)-h(x)}{3}$

$=\dfrac{-1-5}{3}=-2$

답 ②

08 $\lim_{x\to0+}f(x)=-2,\ \lim_{x\to0-}f(x)=2,$

$\lim_{x\to0+}g(x)=-2,\ \lim_{x\to0-}g(x)=2$

ㄱ. $\lim_{x\to0+}\{f(x)+g(x)\}=\lim_{x\to0+}f(x)+\lim_{x\to0+}g(x)$

$=-2+(-2)=-4$

$\lim_{x\to0-}\{f(x)+g(x)\}=\lim_{x\to0-}f(x)+\lim_{x\to0-}g(x)$

$=2+2=4$

따라서 $\lim_{x\to0}\{f(x)+g(x)\}$는 존재하지 않는다.

$\lim_{x\to0+}\{f(x)+g(x)\}\ne\lim_{x\to0-}\{f(x)+g(x)\}$

ㄴ. $\lim_{x\to0+}\{f(x)-g(x)\}=\lim_{x\to0+}f(x)-\lim_{x\to0+}g(x)$

$=-2-(-2)=0$

$\lim_{x\to0-}\{f(x)-g(x)\}=\lim_{x\to0-}f(x)-\lim_{x\to0-}g(x)$

$=2-2=0$

$\therefore\lim_{x\to0}\{f(x)-g(x)\}=0$

ㄷ. $\lim_{x\to0+}f(x)g(x)=\lim_{x\to0+}f(x)\cdot\lim_{x\to0+}g(x)$

$=-2\cdot(-2)=4$

$\lim_{x\to0-}f(x)g(x)=\lim_{x\to0-}f(x)\cdot\lim_{x\to0-}g(x)$

$=2\cdot2=4$

$\therefore\lim_{x\to0}f(x)g(x)=4$

ㄹ. $\lim_{x\to0+}\dfrac{g(x)}{f(x)}=\dfrac{\lim_{x\to0+}g(x)}{\lim_{x\to0+}f(x)}=\dfrac{-2}{-2}=1$

$$\lim_{x\to 0-}\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{\lim_{x\to 0-}g(x)}{\lim_{x\to 0-}f(x)}=\frac{2}{2}=1$$

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{f(x)}=1$$

이상에서 극한값이 존재하는 것은 ㄴ, ㄷ, ㄹ이다.

답 ㄴ, ㄷ, ㄹ

09 ㄱ. [반례] $f(x)=\frac{2}{x}$, $g(x)=\frac{1}{x}$이면

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\infty,\ \lim_{x\to 0}g(x)=\infty$$

이지만 $\lim_{x\to 0}\{f(x)-g(x)\}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}=\infty$

ㄴ. $\lim_{x\to a}\{f(x)+g(x)\}=\alpha$, $\lim_{x\to a}\{f(x)-g(x)\}=\beta$

(α, β는 실수)라 하고 두 식을 변끼리 더하면

$$\lim_{x\to a}\{f(x)+g(x)\}+\lim_{x\to a}\{f(x)-g(x)\}=\alpha+\beta$$

$$2\lim_{x\to a}f(x)=\alpha+\beta \qquad \therefore \lim_{x\to a}f(x)=\frac{\alpha+\beta}{2}$$

따라서 $\lim_{x\to a}f(x)$가 존재한다.

ㄷ. $\lim_{x\to a}g(x)=\alpha$, $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\beta$ (α, β는 실수)라 하면

$$\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(x)\cdot\frac{f(x)}{g(x)}=\alpha\beta$$

따라서 $\lim_{x\to a}f(x)$가 존재한다.

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ④

10 ① $\lim_{x\to -4}\frac{x+4}{x^2+3x-4}=\lim_{x\to -4}\frac{x+4}{(x+4)(x-1)}$

$$=\lim_{x\to -4}\frac{1}{x-1}=-\frac{1}{5}$$

② $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}$

$$=\lim_{x\to 1}(x^2+x+1)=3$$

③ $\lim_{x\to -1}\frac{x+1}{\frac{1}{x}+1}=\lim_{x\to -1}\frac{x+1}{\frac{1}{x}(1+x)}=\lim_{x\to -1}x=-1$

④ $\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{\sqrt{x+1}-2}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}{(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2)}$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}{x-3}$$

$$=\lim_{x\to 3}(\sqrt{x+1}+2)=2+2=4$$

⑤ $\lim_{x\to -2}\frac{\sqrt{x^2-3}-1}{x+2}$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{(\sqrt{x^2-3}-1)(\sqrt{x^2-3}+1)}{(x+2)(\sqrt{x^2-3}+1)}$$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{x^2-4}{(x+2)(\sqrt{x^2-3}+1)}$$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(x-2)}{(x+2)(\sqrt{x^2-3}+1)}$$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{x-2}{\sqrt{x^2-3}+1}=\frac{-2-2}{1+1}=-2$$

답 ⑤

Q BOX

$f(x)-g(x)=\frac{2}{x}-\frac{1}{x}$
$=\frac{1}{x}$

$f(x)$는 다항함수이므로

$\lim_{x\to 1}f(x)=f(1)$

$\therefore \lim_{x\to 1}\frac{2(x^2+1)}{f(x)}$

$=\frac{\lim_{x\to 1}2(x^2+1)}{\lim_{x\to 1}f(x)}$

$=\frac{4}{f(1)}$

$-3<x<3$에서

$x^2-9<0$

이므로

$|x^2-9|=-(x^2-9)$

11 $\lim_{x\to 1}\frac{2(x^4-1)}{(x^2-1)f(x)}=\lim_{x\to 1}\frac{2(x^2+1)(x^2-1)}{(x^2-1)f(x)}$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{2(x^2+1)}{f(x)}=\frac{4}{f(1)}$$

따라서 $\frac{4}{f(1)}=1$이므로

$f(1)=4$

답 4

12 $\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)f(x)}{\sqrt{x+11}-3}$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(\sqrt{x+11}+3)f(x)}{(\sqrt{x+11}-3)(\sqrt{x+11}+3)}$$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(\sqrt{x+11}+3)f(x)}{x+2}$$

$$=\lim_{x\to -2}(\sqrt{x+11}+3)f(x)$$

$$=(3+3)\cdot\frac{1}{3}=2$$

답 ③

13 $\lim_{x\to 0-}\frac{2x+|x|}{|x|}+\lim_{x\to -3+}\frac{x^2+3x}{|x^2-9|}$

$$=\lim_{x\to 0-}\frac{2x+(-x)}{-x}+\lim_{x\to -3+}\frac{x^2+3x}{-(x^2-9)}$$

$$=\lim_{x\to 0-}\frac{x}{-x}+\lim_{x\to -3+}\frac{x(x+3)}{-(x+3)(x-3)}$$

$$=\lim_{x\to 0-}(-1)+\lim_{x\to -3+}\left(-\frac{x}{x-3}\right)$$

$$=-1+\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$=-\frac{3}{2}$$

답 ①

14 $\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2-1}{3x^2+x}+\lim_{x\to\infty}\frac{4x}{\sqrt{x^2+1}+2x}$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{5-\frac{1}{x^2}}{3+\frac{1}{x}}+\lim_{x\to\infty}\frac{4}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+2}$$

$$=\frac{5}{3}+\frac{4}{1+2}=3$$

답 3

15 $A=\lim_{x\to\infty}\frac{8x-3}{2x^2+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{8}{x}-\frac{3}{x^2}}{2+\frac{5}{x^2}}=0$

$B=\lim_{x\to 0}\frac{2-\sqrt{4-x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(2-\sqrt{4-x})(2+\sqrt{4-x})}{x(2+\sqrt{4-x})}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x(2+\sqrt{4-x})}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2+\sqrt{4-x}}$$

$$=\frac{1}{2+2}=\frac{1}{4}$$

$C=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{9x^2+2}-7}{3x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{9+\frac{2}{x^2}}-\frac{7}{x}}{3}$

$$=\frac{3}{3}=1$$

$\therefore A<B<C$

답 ①

16 $\lim_{x\to\infty}\dfrac{x^2+6\{f(x)\}^2}{5x^2-f(x)}=\lim_{x\to\infty}\dfrac{1+6\left\{\dfrac{f(x)}{x}\right\}^2}{5-\dfrac{f(x)}{x}\cdot\dfrac{1}{x}}$

$=\dfrac{1+6\cdot 2^2}{5-2\cdot 0}=5$ 답 5

17 $\lim_{x\to\infty}\dfrac{1}{3x-\sqrt{9x^2+x}}$

$=\lim_{x\to\infty}\dfrac{3x+\sqrt{9x^2+x}}{(3x-\sqrt{9x^2+x})(3x+\sqrt{9x^2+x})}$

$=\lim_{x\to\infty}\dfrac{3x+\sqrt{9x^2+x}}{-x}$

$=\lim_{x\to\infty}\left(-3-\sqrt{9+\dfrac{1}{x}}\right)$

$=-3-3=-6$ 답 ①

18 $\lim_{x\to-1}\underline{\dfrac{3}{x+1}\left(\dfrac{x^2}{x-2}+\dfrac{1}{3}\right)}$ ∞×0 꼴

$=\lim_{x\to-1}\dfrac{3}{x+1}\cdot\dfrac{3x^2+x-2}{3(x-2)}$

$=\lim_{x\to-1}\dfrac{3}{x+1}\cdot\dfrac{(x+1)(3x-2)}{3(x-2)}$

$=\lim_{x\to-1}\dfrac{3x-2}{x-2}=\dfrac{5}{3}$

따라서 $p=3$, $q=5$이므로 $p+q=8$ 답 8

19 $x=-t$로 놓으면 $x\longrightarrow-\infty$일 때 $t\longrightarrow\infty$이므로

$\lim_{x\to-\infty}\{\sqrt{f(x)}-\sqrt{f(-x)}\}$

$=\lim_{t\to\infty}\{\sqrt{f(-t)}-\sqrt{f(t)}\}$

$=\lim_{t\to\infty}(\sqrt{t^2+t}-\sqrt{t^2-t})$

$=\lim_{t\to\infty}\dfrac{(\sqrt{t^2+t}-\sqrt{t^2-t})(\sqrt{t^2+t}+\sqrt{t^2-t})}{\sqrt{t^2+t}+\sqrt{t^2-t}}$

$=\lim_{t\to\infty}\dfrac{2t}{\sqrt{t^2+t}+\sqrt{t^2-t}}$ 분모의 최고차항은 $\sqrt{t^2}$, 즉 t이다.

$=\lim_{t\to\infty}\dfrac{2}{\sqrt{1+\dfrac{1}{t}}+\sqrt{1-\dfrac{1}{t}}}$

$=\dfrac{2}{1+1}=1$ 답 ③

쌤 한마디

치환을 이용하지 않고 다음과 같이 풀 수도 있다.

$\lim_{x\to-\infty}\{\sqrt{f(x)}-\sqrt{f(-x)}\}$

$=\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2-x}-\sqrt{x^2+x})$

$=\lim_{x\to-\infty}\dfrac{(\sqrt{x^2-x}-\sqrt{x^2+x})(\sqrt{x^2-x}+\sqrt{x^2+x})}{\sqrt{x^2-x}+\sqrt{x^2+x}}$

$=\lim_{x\to-\infty}\dfrac{-2x}{\sqrt{x^2-x}+\sqrt{x^2+x}}$

이때 $x<0$이면 $\sqrt{x^2}=-x$이므로

$\lim_{x\to-\infty}\dfrac{-2x}{\sqrt{x^2-x}+\sqrt{x^2+x}}$

$=\lim_{x\to-\infty}\dfrac{2}{\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}+\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}}$

$=\dfrac{2}{1+1}=1$

Q BOX

20 $x\longrightarrow3$일 때 0이 아닌 극한값이 존재하고 (분자) $\longrightarrow$ 0이므로 (분모) $\longrightarrow$ 0이다.

즉 $\lim_{x\to3}(x^2-b)=0$이므로

$3^2-b=0$ $\therefore b=9$

$b=9$를 주어진 식의 좌변에 대입하면

$\lim_{x\to3}\dfrac{(x-3)(x-a)}{x^2-9}=\lim_{x\to3}\dfrac{(x-3)(x-a)}{(x+3)(x-3)}$

$=\lim_{x\to3}\dfrac{x-a}{x+3}=\dfrac{3-a}{6}$

따라서 $\dfrac{3-a}{6}=-1$이므로

$3-a=-6$ $\therefore a=9$

$\therefore a+b=18$ 답 ④

21 $x\longrightarrow2$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\longrightarrow$ 0이므로 (분자) $\longrightarrow$ 0이다.

즉 $\lim_{x\to2}(\sqrt{x+a}-b)=0$이므로

$\sqrt{2+a}-b=0$ $\therefore b=\sqrt{2+a}$ ...... ㉠

㉠을 주어진 식의 좌변에 대입하면

$\lim_{x\to2}\dfrac{\sqrt{x+a}-\sqrt{2+a}}{x-2}$

$=\lim_{x\to2}\dfrac{(\sqrt{x+a}-\sqrt{2+a})(\sqrt{x+a}+\sqrt{2+a})}{(x-2)(\sqrt{x+a}+\sqrt{2+a})}$

$=\lim_{x\to2}\dfrac{x-2}{(x-2)(\sqrt{x+a}+\sqrt{2+a})}$

$=\lim_{x\to2}\dfrac{1}{\sqrt{x+a}+\sqrt{2+a}}=\dfrac{1}{2\sqrt{2+a}}$

따라서 $\dfrac{1}{2\sqrt{2+a}}=\dfrac{1}{6}$이므로

$2\sqrt{2+a}=6$, $\sqrt{2+a}=3$ 양변을 제곱한다.

$2+a=9$ $\therefore a=7$

$a=7$을 ㉠에 대입하면 $b=3$

$\therefore ab=21$ 답 ⑤

22 $x\longrightarrow a$일 때 0이 아닌 극한값이 존재하고 (분자) $\longrightarrow$ 0이므로 (분모) $\longrightarrow$ 0이다. $b>0$이므로 $b\neq0$

즉 $\lim_{x\to a}(x^2-x-2)=0$이므로

$a^2-a-2=0$, $(a+1)(a-2)=0$

$\therefore a=-1$ 또는 $a=2$

(i) $a=-1$일 때,

$b=\lim_{x\to-1}\dfrac{x^2+3x+2}{x^2-x-2}=\lim_{x\to-1}\dfrac{(x+1)(x+2)}{(x+1)(x-2)}$

$=\lim_{x\to-1}\dfrac{x+2}{x-2}=-\dfrac{1}{3}$

그런데 $b<0$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a=2$일 때,

$b=\lim_{x\to2}\dfrac{x^2-4}{x^2-x-2}=\lim_{x\to2}\dfrac{(x+2)(x-2)}{(x+1)(x-2)}$

$=\lim_{x\to2}\dfrac{x+2}{x+1}=\dfrac{4}{3}$

(i), (ii)에서 $a=2$, $b=\dfrac{4}{3}$이므로

$a+3b=2+3\cdot\dfrac{4}{3}=6$ 답 6

Q BOX

23 $\lim_{x\to\infty} f(x)=1$에서 $\lim_{x\to\infty}\dfrac{ax^2+bx+c}{x^2+x}=1$이므로

$a=1$

> $\dfrac{\infty}{\infty}$ 꼴의 함수의 극한에서 분자의 차수와 분모의 차수가 같으면 극한값은 최고차항의 계수의 비이다.

$\lim_{x\to 0} f(x)=-2$에서

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+bx+c}{x^2+x}=-2 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$x\to 0$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\to 0$이므로 (분자) $\to 0$이다.

즉 $\lim_{x\to 0}(x^2+bx+c)=0$이므로

$c=0$

$c=0$을 ㉠의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+bx}{x^2+x}=\lim_{x\to 0}\frac{x(x+b)}{x(x+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{x+b}{x+1}=b$$

이므로

$b=-2$

따라서 $f(x)=\dfrac{x^2-2x}{x^2+x}$이므로

$f(3)=\dfrac{9-6}{9+3}=\dfrac{1}{4}$ 　　　답 $\dfrac{1}{4}$

24 $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{ax^2+bx}-2x)$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{ax^2+bx}-2x)(\sqrt{ax^2+bx}+2x)}{\sqrt{ax^2+bx}+2x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(a-4)x^2+bx}{\sqrt{ax^2+bx}+2x} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

이때 ㉠의 극한값이 존재하려면

$a-4=0$ 　　$\therefore a=4$

> $a-4\neq 0$이면 (분자의 차수) $>$ (분모의 차수)이므로 극한값이 존재하지 않는다.

$a=4$를 ㉠에 대입하면

$$\lim_{x\to\infty}\frac{bx}{\sqrt{4x^2+bx}+2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{b}{\sqrt{4+\frac{b}{x}}+2}$$

$$=\frac{b}{2+2}=\frac{b}{4}$$

따라서 $\dfrac{b}{4}=4$이므로 　　$b=16$

$\therefore b-a=12$ 　　　답 12

25 $a\le 0$이면 $\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+2}+ax)=\infty$이므로

$a>0$

$x=-t$로 놓으면 $x\to-\infty$일 때 $t\to\infty$이므로

$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+2}+ax)$

$=\lim_{t\to\infty}(\sqrt{t^2+2}-at)$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{(\sqrt{t^2+2}-at)(\sqrt{t^2+2}+at)}{\sqrt{t^2+2}+at}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{(1-a^2)t^2+2}{\sqrt{t^2+2}+at} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

이때 ㉠의 극한값이 존재하려면 　$1-a^2=0$

> $a^2=1$이므로 $a=-1$ 또는 $a=1$

$\therefore a=1$ $(\because a>0)$

$a=1$을 ㉠에 대입하면

$$\lim_{t\to\infty}\frac{2}{\sqrt{t^2+2}+t}=0 \qquad \therefore b=0$$

$\therefore a+b=1$ 　　　답 ④

26 $\lim_{x\to 3}\dfrac{f(x)}{x-3}=8$에서 $x\to 3$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\to 0$이므로 (분자) $\to 0$이다.

즉 $\lim_{x\to 3} f(x)=0$이므로 　　$f(3)=0$

$f(x)=(x-3)(x+a)$ (a는 상수)라 하면

> 최고차항의 계수가 1이고 $x-3$을 인수로 갖는 이차식

$$\lim_{x\to 3}\frac{f(x)}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+a)}{x-3}$$

$$=\lim_{x\to 3}(x+a)=3+a$$

따라서 $3+a=8$이므로 　　$a=5$

$f(x)=(x-3)(x+5)$이므로

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x-6)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-6-3)(x-6+5)}{x-1}$$

$=\lim_{x\to 1}(x-9)=-8$ 　　　답 -8

27 $\lim_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x^2-2}=2$에서 $f(x)$는 이차항의 계수가 2인 이차식임을 알 수 있다.

또 $\lim_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1}=5$에서 $x\to 1$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\to 0$이므로 (분자) $\to 0$이다.

즉 $\lim_{x\to 1} f(x)=0$이므로 　　$f(1)=0$

$f(x)=(x-1)(2x+a)$ (a는 상수)라 하면

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(2x+a)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}(2x+a)=2+a$$

따라서 $2+a=5$이므로 　　$a=3$

$f(x)=(x-1)(2x+3)$이므로

$f(-1)=-2\cdot 1=-2$ 　　　답 ⑤

쌤 한마디

$\lim_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x^2-2}$의 값이 2, 즉 0이 아닌 실수이므로 $f(x)$와 x^2-2의 차수는 같다. 따라서 $f(x)$는 x^2-2와 같은 이차식이고, 최고차항의 계수의 비는 2임을 알 수 있다.

28 $\lim_{x\to\infty}\dfrac{f(x)-x^3}{x^2}=1$에서 $f(x)-x^3$은 이차항의 계수가 1인 이차식임을 알 수 있다.

> 분자와 분모의 차수가 같고, 최고차항의 계수의 비가 1이다.

$f(x)-x^3=x^2+ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$$f(x)=x^3+x^2+ax+b \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$\lim_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=-3$에서 $x\to 0$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\to 0$이므로 (분자) $\to 0$이다.

즉 $\lim_{x\to 0} f(x)=0$이므로 　　$f(0)=0$

따라서 ㉠에서 $b=0$이므로 　　$f(x)=x^3+x^2+ax$

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3+x^2+ax}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}(x^2+x+a)=a$$

$\therefore a=-3$

$f(x)=x^3+x^2-3x$이므로 구하는 나머지는

$f(2)=8+4-6=6$ 　　　답 ③

> 다항식 $P(x)$를 일차식 $x-a$로 나누었을 때의 나머지는 $P(a)$이다.

29 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\le h(x)\le g(x)$이고

$\lim_{x\to1}(2x^3-6x^2+4x)=0$, $\lim_{x\to1}(x^4-2x^3+1)=0$

이므로 $\lim_{x\to1}h(x)=0$ 답 0

30 모든 실수 x에 대하여

$5x^2+x-2\le(2x^2+3)f(x)\le5x^2+x+2$이므로 각 변을 $2x^2+3$으로 나누면

$$\frac{5x^2+x-2}{2x^2+3}\le f(x)\le\frac{5x^2+x+2}{2x^2+3}$$

이때 $\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2+x-2}{2x^2+3}=\frac{5}{2}$, $\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2+x+2}{2x^2+3}=\frac{5}{2}$이므로 $\lim_{x\to\infty}f(x)=\frac{5}{2}$ 답 ②

31 모든 양의 실수 x에 대하여

$4x+1<f(x)<4x+3$이므로 각 변을 제곱하면

$$(4x+1)^2<\{f(x)\}^2<(4x+3)^2$$

위의 부등식의 각 변을 x^2+x+1로 나누면

$$\frac{(4x+1)^2}{x^2+x+1}<\frac{\{f(x)\}^2}{x^2+x+1}<\frac{(4x+3)^2}{x^2+x+1}$$

이때

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(4x+1)^2}{x^2+x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{16x^2+8x+1}{x^2+x+1}=16,$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(4x+3)^2}{x^2+x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{16x^2+24x+9}{x^2+x+1}=16$$

이므로 $\lim_{x\to\infty}\frac{\{f(x)\}^2}{x^2+x+1}=16$ 답 16

32 $\mathrm{A}(k, \sqrt{5k})$, $\mathrm{B}(k, \sqrt{k})$이므로

$\overline{\mathrm{OA}}=\sqrt{k^2+(\sqrt{5k})^2}=\sqrt{k^2+5k}$,

$\overline{\mathrm{OB}}=\sqrt{k^2+(\sqrt{k})^2}=\sqrt{k^2+k}$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{k\to\infty}(\overline{\mathrm{OA}}-\overline{\mathrm{OB}})&=\lim_{k\to\infty}(\sqrt{k^2+5k}-\sqrt{k^2+k})\\&=\lim_{k\to\infty}\frac{(\sqrt{k^2+5k}-\sqrt{k^2+k})(\sqrt{k^2+5k}+\sqrt{k^2+k})}{\sqrt{k^2+5k}+\sqrt{k^2+k}}\\&=\lim_{k\to\infty}\frac{4k}{\sqrt{k^2+5k}+\sqrt{k^2+k}}\\&=\lim_{k\to\infty}\frac{4}{\sqrt{1+\frac{5}{k}}+\sqrt{1+\frac{1}{k}}}=\frac{4}{1+1}=2\end{aligned}$$

답 ④

33 $S(t)=\frac{1}{2}\cdot3\cdot\left(\frac{1}{3}t^2-3\right)=\frac{1}{2}t^2-\frac{9}{2}$

$T(t)=\frac{1}{2}\cdot3\cdot(t-3)=\frac{3}{2}t-\frac{9}{2}$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{t\to3+}\frac{S(t)+T(t)}{t-3}&=\lim_{t\to3+}\frac{\left(\frac{1}{2}t^2-\frac{9}{2}\right)+\left(\frac{3}{2}t-\frac{9}{2}\right)}{t-3}\\&=\lim_{t\to3+}\frac{\frac{1}{2}(t+6)(t-3)}{t-3}\\&=\lim_{t\to3+}\frac{1}{2}(t+6)=\frac{9}{2}\end{aligned}$$

답 $\frac{9}{2}$

Q BOX

$2x^2+3>0$이므로 부등호의 방향이 바뀌지 않는다.

유리함수는 분모가 0이 되는 값에서 정의되어 있지 않다.

$x>0$이므로 $4x+1>0$

$x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$ 이므로 부등호의 방향이 바뀌지 않는다.

$x-4\ne0$에서 $x\ne4$

원점 O와 점 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$ 사이의 거리는 $\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{x_1^{\,2}+y_1^{\,2}}$

$2x-1\ne0$에서 $x\ne\frac{1}{2}$

(△PBC의 높이) =(점 P의 y좌표) −(점 C의 y좌표)

(△PCA의 높이) =(점 P의 x좌표) −(점 C의 x좌표)

02 함수의 연속

03 함수의 연속

W 10쪽

01 (1) $f(x)$가 $x=-1$에서 정의되어 있지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 불연속이다.

(2) $f(-1)=2$, $\lim_{x\to-1}f(x)=2$이므로

$\lim_{x\to-1}f(x)=f(-1)$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 연속이다.

(3) $f(-1)=1$, $\lim_{x\to-1}f(x)=\lim_{x\to-1}(x+1)^2=0$이므로

$\lim_{x\to-1}f(x)\ne f(-1)$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 불연속이다.

답 (1) 불연속 (2) 연속 (3) 불연속

02 (1) 함수 $f(x)=x^2-9x+2$의 정의역은 실수 전체의 집합이므로 $(-\infty, \infty)$

(2) 함수 $f(x)=-\frac{x}{x-4}$의 정의역은 $x\ne4$, 즉 $x<4$ 또는 $x>4$인 모든 실수 x의 값의 집합이므로

$(-\infty, 4)$, $(4, \infty)$

(3) 함수 $f(x)=\sqrt{2x-6}$의 정의역은 $2x-6\ge0$, 즉 $x\ge3$인 모든 실수 x의 값의 집합이므로

$[3, \infty)$

답 (1) $(-\infty, \infty)$ (2) $(-\infty, 4)$, $(4, \infty)$ (3) $[3, \infty)$

03 (1) 함수 $f(x)=-x^2+6$은 모든 실수, 즉 구간 $(-\infty, \infty)$에서 연속이다.

(2) 함수 $f(x)=\frac{x+1}{2x-1}$은 $x\ne\frac{1}{2}$, 즉 $x<\frac{1}{2}$ 또는 $x>\frac{1}{2}$인 모든 실수 x에서 연속이므로 구간 $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2}, \infty\right)$에서 연속이다.

(3) 함수 $f(x)=\sqrt{7-x}$는 $7-x\ge0$, 즉 $x\le7$인 모든 실수 x에서 연속이므로 구간 $(-\infty, 7]$에서 연속이다.

답 (1) $(-\infty, \infty)$ (2) $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2}, \infty\right)$ (3) $(-\infty, 7]$

04 ① $f(1)=-2$이므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 정의되어 있다.

② $$\begin{aligned}\lim_{x\to1}f(x)&=\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{(x-1)(x-2)}\\&=\lim_{x\to1}\frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)(x-2)}\\&=\lim_{x\to1}\frac{x+1}{x-2}=-2\end{aligned}$$

③ $f(1)=-2$, $\lim_{x\to1}f(x)=-2$이므로

$\lim_{x\to1}f(x)=f(1)$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

④ $f(x)$가 $x=2$에서 정의되어 있지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 불연속이다.

⑤ 함수 $f(x)$가 불연속인 x의 값은 2의 1개이다.

답 ⑤

05 ㄱ. $f(x)$가 $x=-4$에서 정의되어 있지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=-4$에서 불연속이다.

ㄴ. $f(x)=\begin{cases} x(x-3) & (x\ge3) \\ -x(x-3) & (x<3) \end{cases}$

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이려면 $x=3$에서 연속이어야 한다.

$f(3)=0$이고

$\lim_{x\to3+}f(x)=\lim_{x\to3+}x(x-3)=0$,

$\lim_{x\to3-}f(x)=\lim_{x\to3-}\{-x(x-3)\}=0$

에서 $\lim_{x\to3}f(x)=0$이므로

$\lim_{x\to3}f(x)=f(3)$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 연속이므로 모든 실수 x에서 연속이다.

ㄷ. 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이려면 $x=-2$에서 연속이어야 한다.

$f(-2)=-5$이고

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-2}f(x)&=\lim_{x\to-2}\frac{2x^2+3x-2}{x+2}\\&=\lim_{x\to-2}\frac{(x+2)(2x-1)}{x+2}\\&=\lim_{x\to-2}(2x-1)=-5\end{aligned}$$

이므로

$\lim_{x\to-2}f(x)=f(-2)$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 연속이므로 모든 실수 x에서 연속이다.

이상에서 모든 실수 x에서 연속인 함수인 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ㄴ, ㄷ

06 $f(x)=\frac{3}{x}+2$, $g(x)=x-8$에 대하여

$$\begin{aligned}(f\circ g)(x)&=f(g(x))\\&=f(x-8)\\&=\frac{3}{x-8}+2\end{aligned}$$

따라서 함수 $(f\circ g)(x)$는 $x=8$에서 불연속이므로

$a=8$

답 8

07 ③ $f(3)=1$, $\lim_{x\to3}f(x)=1$이므로

$\lim_{x\to3}f(x)=f(3)$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 연속이다.

Q BOX

함수 $y=f(x)$의 그래프가 $x=3$에서 이어져 있으므로 $f(x)$는 $x=3$에서 연속임을 직관적으로 알 수 있다.

④ $\lim_{x\to2+}f(x)=0$, $\lim_{x\to2-}f(x)=0$이므로

$\lim_{x\to2}f(x)=0$

따라서 $\lim_{x\to2}f(x)$가 존재하지만 $\lim_{x\to2}f(x)\ne f(2)$이므로 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 불연속이다.

$f(2)=2$

⑤ $\lim_{x\to0+}f(x)=0$, $\lim_{x\to0-}f(x)=2$이므로

$\lim_{x\to0+}f(x)\ne\lim_{x\to0-}f(x)$

따라서 $\lim_{x\to0}f(x)$가 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

즉 구간 $(-1, 3)$에서 함수 $f(x)$가 불연속인 x의 값은 0, 2의 2개이다.

함수 $y=f(x)$의 그래프가 $x=0$, $x=2$에서 끊어져 있으므로 $f(x)$는 $x=0$, $x=2$에서 불연속임을 직관적으로 알 수 있다.

답 ④

08 (i) $x=1$일 때,

$f(1)g(1)=-1\cdot1=-1$,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1}f(x)g(x)&=\lim_{x\to1}f(x)\cdot\lim_{x\to1}g(x)\\&=1\cdot0=0\end{aligned}$$

이므로

$\lim_{x\to1}f(x)g(x)\ne f(1)g(1)$

따라서 함수 $f(x)g(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

(ii) $x=2$일 때,

$f(2)g(2)=0\cdot0=0$,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to2}f(x)g(x)&=\lim_{x\to2}f(x)\cdot\lim_{x\to2}g(x)\\&=0\cdot(-1)=0\end{aligned}$$

이므로

$\lim_{x\to2}f(x)g(x)=f(2)g(2)$

따라서 함수 $f(x)g(x)$는 $x=2$에서 연속이다.

(iii) $x=3$일 때,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to3+}f(x)g(x)&=\lim_{x\to3+}f(x)\cdot\lim_{x\to3+}g(x)\\&=-1\cdot1=-1,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to3-}f(x)g(x)&=\lim_{x\to3-}f(x)\cdot\lim_{x\to3-}g(x)\\&=-1\cdot0=0\end{aligned}$$

이므로

$\lim_{x\to3+}f(x)g(x)\ne\lim_{x\to3-}f(x)g(x)$

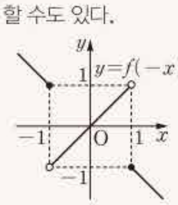
따라서 $\lim_{x\to3}f(x)g(x)$가 존재하지 않으므로 함수 $f(x)g(x)$는 $x=3$에서 불연속이다.

이상에서 함수 $f(x)g(x)$가 불연속인 자연수 x의 값은 1, 3이므로 구하는 합은

$1+3=4$

답 4

다음 그림과 같이 $y=f(-x)$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 것임을 이용하여 $f(-x)$의 극한값을 구할 수도 있다.



09 ㄱ. $-x=t$로 놓으면 $x\to1-$일 때 $t\to-1+$이므로

$\lim_{x\to1-}f(-x)=\lim_{t\to-1+}f(t)=1$

ㄴ. $-x=t$로 놓으면 $x\to1+$일 때 $t\to-1-$이므로

$\lim_{x\to1+}f(-x)=\lim_{t\to-1-}f(t)=-1$

$$\begin{aligned}\therefore\ &\lim_{x\to1+}\{f(x)+f(-x)\}\\&=\lim_{x\to1+}f(x)+\lim_{x\to1+}f(-x)\\&=1+(-1)=0\qquad\cdots\cdots\ ㉠\end{aligned}$$

ㄷ. $f(1)+f(-1)=1+(-1)=0$이고

$$\lim_{x\to1-}\{f(x)+f(-x)\}$$
$$=\lim_{x\to1-}f(x)+\lim_{x\to1-}f(-x)$$
$$=-1+1=0 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서 $\lim_{x\to1}\{f(x)+f(-x)\}=0$

$\therefore \lim_{x\to1}\{f(x)+f(-x)\}=f(1)+f(-1)$

따라서 함수 $f(x)+f(-x)$는 $x=1$에서 연속이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ㄱ, ㄷ

10 (1) $f(-1)=1$이므로

$(f\circ f)(-1)=f(f(-1))=f(1)=1$

(2) $f(x)=t$로 놓으면 $x\to-1$일 때 $t\to0+$이므로

$$\lim_{x\to-1}(f\circ f)(x)=\lim_{x\to-1}f(f(x))=\lim_{t\to0+}f(t)=2$$

(3) $\lim_{x\to-1}(f\circ f)(x)\neq(f\circ f)(-1)$이므로 함수 $(f\circ f)(x)$는 $x=-1$에서 불연속이다.

답 (1) 1 (2) 2 (3) 불연속

쌤 한마디

실수 전체의 집합에서 정의된 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 합성함수 $f(g(x))$가 $x=a$에서 연속이려면

$$\lim_{x\to a+}f(g(x))=\lim_{x\to a-}f(g(x))=f(g(a))$$

이어야 한다.

11 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이려면

$\lim_{x\to1}f(x)=f(1)$

이어야 하므로

$$k=\lim_{x\to1}\frac{2x^3-2x^2+x-1}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(2x^2+1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}(2x^2+1)=3$$

답 ③

12 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이면 $x=3$에서 연속이므로

$\lim_{x\to3+}f(x)=\lim_{x\to3-}f(x)=f(3)$

이때

$\lim_{x\to3+}f(x)=\lim_{x\to3+}(x+a)=3+a$,

$\lim_{x\to3-}f(x)=\lim_{x\to3-}(x^2-2)=7$,

$f(3)=3+a$

이므로 $3+a=7$ $\quad\therefore a=4$

또 $x=-1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to-1+}f(x)=\lim_{x\to-1-}f(x)=f(-1)$

이때

$\lim_{x\to-1+}f(x)=\lim_{x\to-1+}(x^2-2)=-1$,

$\lim_{x\to-1-}f(x)=\lim_{x\to-1-}(-2x+b)=2+b$,

$f(-1)=-1$

이므로 $2+b=-1$ $\quad\therefore b=-3$

Q BOX

$\lim_{x\to2-}f(x)=\lim_{x\to2-}2$
$=2$,
$f(2)=2$

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 2 & -2 & 1 & -1 \\ & & 2 & 0 & 1 \\ \hline & 2 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

$\therefore 2x^3-2x^2+x-1$
$=(x-1)(2x^2+1)$

$|x|\geq1$에서
$x\leq-1$ 또는 $x\geq1$
$|x|<1$에서
$-1<x<1$

따라서 $f(x)=\begin{cases} x+4 & (x\geq3) \\ x^2-2 & (-1\leq x<3) \\ -2x-3 & (x<-1) \end{cases}$이므로

$f(-2)+f(5)=(4-3)+(5+4)=10$ 답 10

13 함수 $f(x)$가 $x=2$에서 연속이려면

$\lim_{x\to2+}f(x)=\lim_{x\to2-}f(x)=f(2)$

이어야 하므로

$$\lim_{x\to2+}\frac{a\sqrt{x+2}+b}{x-2}=2 \quad \cdots\cdots ㉠$$

$x\to2+$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\to0$이므로 (분자) $\to0$이다.

즉 $\lim_{x\to2+}(a\sqrt{x+2}+b)=0$이므로

$2a+b=0 \quad \therefore b=-2a \quad \cdots\cdots ㉡$

㉡을 ㉠의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to2+}\frac{a\sqrt{x+2}-2a}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to2+}\frac{a(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{x+2}+2)}{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}$$
$$=\lim_{x\to2+}\frac{a(x-2)}{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}$$
$$=\lim_{x\to2+}\frac{a}{\sqrt{x+2}+2}$$
$$=\frac{a}{4}$$

따라서 $\frac{a}{4}=2$이므로 $a=8$

$a=8$을 ㉡에 대입하면 $b=-16$

$\therefore a+b=-8$ 답 -8

14 $f(x)=\begin{cases} x^2+3x & (x\leq-1 \text{ 또는 } x\geq1) \\ -x^2+ax+b & (-1<x<1) \end{cases}$

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이려면 $x=-1$에서 연속이어야 하므로

$\lim_{x\to-1+}f(x)=\lim_{x\to-1-}f(x)=f(-1)$

이때

$\lim_{x\to-1+}f(x)=\lim_{x\to-1+}(-x^2+ax+b)=-1-a+b$,

$\lim_{x\to-1-}f(x)=\lim_{x\to-1-}(x^2+3x)=-2$,

$f(-1)=-2$

이므로 $-1-a+b=-2$

$\therefore a-b=1 \quad \cdots\cdots ㉠$

또 $x=1$에서 연속이어야 하므로

$\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1-}f(x)=f(1)$

이때

$\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1+}(x^2+3x)=4$,

$\lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to1-}(-x^2+ax+b)=-1+a+b$,

$f(1)=4$

이므로 $-1+a+b=4$

$\therefore a+b=5 \quad \cdots\cdots ㉡$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=2$

$\therefore ab=6$ 답 ⑤

15 $x\neq1$일 때,

$$f(x)=\frac{x\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-1}=\frac{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}-1}$$
$$=x+\sqrt{x}+1$$

함수 $f(x)$가 모든 양수 x에서 연속이면 $x=1$에서 연속이므로

$$f(1)=\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}(x+\sqrt{x}+1)=3$$ 답 3

16 $x\neq3$일 때, $f(x)=\frac{\sqrt{x+1}-a}{x-3}$

함수 $f(x)$가 $x\geq-1$인 모든 실수 x에서 연속이면 $x=3$에서 연속이므로

$$f(3)=\lim_{x\to3}f(x)=\lim_{x\to3}\frac{\sqrt{x+1}-a}{x-3}$$

$x\longrightarrow3$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\longrightarrow0$이므로 (분자) $\longrightarrow0$이다.

즉 $\lim_{x\to3}(\sqrt{x+1}-a)=0$이므로

$2-a=0$ $\quad\therefore a=2$

$$\therefore f(3)=\lim_{x\to3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$$
$$=\lim_{x\to3}\frac{(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2)}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}$$
$$=\lim_{x\to3}\frac{x-3}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}$$
$$=\lim_{x\to3}\frac{1}{\sqrt{x+1}+2}$$
$$=\frac{1}{4}$$ 답 ①

17 $x\neq-1$일 때, $f(x)=\frac{x^2+ax+b}{x+1}$

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이면 $x=-1$에서 연속이므로

$$f(-1)=\lim_{x\to-1}f(x)=\lim_{x\to-1}\frac{x^2+ax+b}{x+1}$$

$x\longrightarrow-1$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\longrightarrow0$이므로 (분자) $\longrightarrow0$이다.

즉 $\lim_{x\to-1}(x^2+ax+b)=0$이므로

$1-a+b=0$ $\quad\therefore a-b=1$ …… ㉠

$f(2)=3$이므로 주어진 식의 양변에 $x=2$를 대입하면

$3f(2)=4+2a+b$, $\quad 9=4+2a+b$

$\therefore 2a+b=5$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad a=2$, $b=1$

$\therefore a+b=3$ 답 3

18 $x\neq-5$, $x\neq0$일 때,

$$f(x)=\frac{2x^3-ax^2+b}{x^2+5x}$$

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이면 $x=-5$에서 연속이므로

$$f(-5)=\lim_{x\to-5}f(x)=\lim_{x\to-5}\frac{2x^3-ax^2+b}{x^2+5x}$$

$x\longrightarrow-5$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\longrightarrow0$이므로 (분자) $\longrightarrow0$이다.

즉 $\lim_{x\to-5}(2x^3-ax^2+b)=0$이므로

$-250-25a+b=0$

$\therefore 25a-b=-250$ …… ㉠

또 $x=0$에서 연속이므로

$$f(0)=\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\frac{2x^3-ax^2+b}{x^2+5x}$$

$x\longrightarrow0$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\longrightarrow0$이므로 (분자) $\longrightarrow0$이다.

즉 $\lim_{x\to0}(2x^3-ax^2+b)=0$이므로 $\quad b=0$

$b=0$을 ㉠에 대입하면 $\quad 25a=-250$

$\therefore a=-10$

따라서 $(x^2+5x)f(x)=2x^3+10x^2$이므로 양변에 $x=-1$을 대입하면

$-4f(-1)=8$

$\therefore f(-1)=-2$ 답 ③

Q BOX

$x\sqrt{x}-1$
$=(\sqrt{x})^3-1^3$
$=(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)$

$p(x)=x+2$, $q(x)=x^2-8x+5$라 하면 $p(x)$, $q(x)$는 모든 실수 x에서 연속이므로 연속함수의 성질에 의하여 $p(x)q(x)$도 모든 실수 x에서 연속임을 알 수도 있다.

$x<-4$ 또는 $-4<x<1$ 또는 $x>1$

$x^2+5x=0$에서
$x(x+5)=0$
$\therefore x=-5$ 또는 $x=0$
따라서 $x\neq-5$, $x\neq0$일 때 $x^2+5x\neq0$이다.

04 연속함수의 성질

W 13쪽

01 (1) $f(x)=(x+2)(x^2-8x+5)$
$=x^3-6x^2-11x+10$

은 다항함수이므로 모든 실수 x에서 연속이다.

즉 구간 $(-\infty, \infty)$에서 연속이다.

(2) $f(x)=\frac{3x+1}{x-5}$은 유리함수이므로 $x-5\neq0$, 즉 $x\neq5$인 모든 실수 x에서 연속이다.

즉 구간 $(-\infty, 5)$, $(5, \infty)$에서 연속이다.

(3) $f(x)=\frac{x-6}{x^2+3x-4}=\frac{x-6}{(x+4)(x-1)}$은 유리함수이므로 $(x+4)(x-1)\neq0$, 즉 $x\neq-4$, $x\neq1$인 모든 실수 x에서 연속이다.

즉 구간 $(-\infty, -4)$, $(-4, 1)$, $(1, \infty)$에서 연속이다.

답 (1) $(-\infty, \infty)$
(2) $(-\infty, 5)$, $(5, \infty)$
(3) $(-\infty, -4)$, $(-4, 1)$, $(1, \infty)$

02 (1) 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 모든 실수 x에서 연속이므로 함수 $f(x)-g(x)$도 모든 실수 x에서 연속이다.

즉 구간 $(-\infty, \infty)$에서 연속이다.

(2) 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 모든 실수 x에서 연속이므로 함수 $\frac{f(x)}{g(x)}$는 $g(x)=0$인 x에서 불연속이다.

$g(x)=x^2-x-2=0$에서 $\quad (x+1)(x-2)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=2$

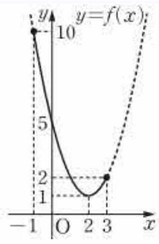
따라서 함수 $\frac{f(x)}{g(x)}$는 $x\neq-1$, $x\neq2$인 모든 실수 x에서 연속이다.

즉 구간 $(-\infty, -1)$, $(-1, 2)$, $(2, \infty)$에서 연속이다.

답 (1) $(-\infty, \infty)$

(2) $(-\infty, -1)$, $(-1, 2)$, $(2, \infty)$

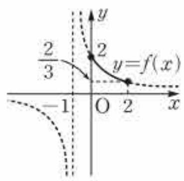
03 (1) 함수 $f(x)=x^2-4x+5$는 구간 $[-1, 3]$에서 연속이고 이 구간에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 최댓값 10, $x=2$에서 최솟값 1을 갖는다.

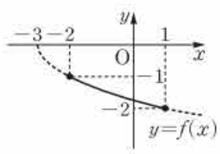
최댓값과 최솟값을 구할 때에는 그래프를 그려서 생각한다.

(2) 함수 $f(x)=\dfrac{2}{x+1}$는 구간 $[0, 2]$에서 연속이고 이 구간에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 최댓값 2, $x=2$에서 최솟값 $\dfrac{2}{3}$를 갖는다.

(3) 함수 $f(x)=-\sqrt{x+3}$은 구간 $[-2, 1]$에서 연속이고 이 구간에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 최댓값 -1, $x=1$에서 최솟값 -2를 갖는다.

답 (1) 최댓값: 10, 최솟값: 1

(2) 최댓값: 2, 최솟값: $\dfrac{2}{3}$

(3) 최댓값: -1, 최솟값: -2

04 (1) $f(x)=x^3-4x^2+x+3$이라 하면 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[1, 3]$에서 연속이다.

또 $f(1)=1$, $f(3)=-3$에서

$f(1)f(3)<0$

$f(1)=1-4+1+3$
$=1$,
$f(3)=27-36+3+3$
$=-3$

이므로 사잇값의 정리에 의하여 $f(c)=0$인 c가 열린구간 $(1, 3)$에 적어도 하나 존재한다.

따라서 방정식 $x^3-4x^2+x+3=0$은 열린구간 $(1, 3)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

(2) $f(x)=x^4-2x^3-1$이라 하면 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[-1, 1]$에서 연속이다.

또 $f(-1)=2$, $f(1)=-2$에서

$f(-1)f(1)<0$

$f(-1)=1+2-1=2$,
$f(1)=1-2-1=-2$

이므로 사잇값의 정리에 의하여 $f(c)=0$인 c가 열린구간 $(-1, 1)$에 적어도 하나 존재한다.

따라서 방정식 $x^4-2x^3-1=0$은 열린구간 $(-1, 1)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

답 풀이 참조

05 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 함수 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $g(x)\neq 0$이어야 한다.

즉 이차방정식 $x^2+2ax+4a=0$의 실근이 존재하지 않아야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=a^2-4a<0$, $\quad a(a-4)<0$

$\therefore 0<a<4$

따라서 정수 a는 1, 2, 3이므로 구하는 합은

$1+2+3=6$

답 6

06 ① 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 모든 실수 x에서 연속이므로 함수 $f(x)+g(x)$도 모든 실수 x에서 연속이다.

② 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 모든 실수 x에서 연속이므로 함수 $f(x)g(x)$도 모든 실수 x에서 연속이다.

③ 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 모든 실수 x에서 연속이므로 함수 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$는 $g(x)=0$인 x에서 불연속이다.

$g(x)=x^3-1=0$에서 $\quad (x-1)(x^2+x+1)=0$

$\therefore x=1$ ($\because x^2+x+1>0$)

x^2+x+1
$=\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}>0$

따라서 함수 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$는 $x=1$에서 불연속이다.

④ 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 모든 실수 x에서 연속이므로 함수 $\dfrac{g(x)}{f(x)}$는 $f(x)=0$인 x에서 불연속이다.

그런데 $f(x)=x^2+3>0$이므로 함수 $\dfrac{g(x)}{f(x)}$는 모든 실수 x에서 연속이다.

$x^2+3=0$을 만족시키는 실수 x의 값은 존재하지 않는다.

⑤ $f(g(x))=\{g(x)\}^2+3$

이때 함수 $g(x)$가 모든 실수 x에서 연속이므로 함수 $f(g(x))$도 모든 실수 x에서 연속이다.

$f(g(x))$
$=\{g(x)\}^2+3$
$=g(x)\cdot g(x)+3$

답 ③

07 ② $g(x)$가 연속함수이면

$\{g(x)\}^3=g(x)\cdot g(x)\cdot g(x)$도 연속함수이다.

③ $h(x)=f(x)-g(x)$라 하면

$g(x)=f(x)-h(x)$

이때 $f(x)$와 $h(x)$가 연속함수이므로 $g(x)$도 연속함수이다.

④ 임의의 실수 a에 대하여 $g(a)=b$라 하면 $g(x)$가 연속함수이므로 $\quad \lim\limits_{x\to a} g(x)=b$

즉 $g(x)=t$로 놓으면 $x \to a$일 때 $t \to b$이므로

$\lim\limits_{x\to a} f(g(x))=\lim\limits_{t\to b} f(t)=f(b)$

($\because f(x)$가 연속함수)

이때 $f(g(a))=f(b)$이므로

$\lim\limits_{x\to a} f(g(x))=f(g(a))$

따라서 $f(g(x))$는 $x=a$에서 연속이므로 연속함수이다.

임의의 실수 a에 대하여 함수 $f(g(x))$가 $x=a$에서 연속이므로 이 함수는 모든 실수 x에서 연속이다.

⑤ [반례] $f(x)=\begin{cases} 1 & (x\ge 0) \\ -1 & (x<0) \end{cases}$이면 $|f(x)|=1$

따라서 $|f(x)|$는 연속함수이지만 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

답 ⑤

08 함수 $f(x)$는 $x\ge1$, $x<1$인 모든 실수 x에서 각각 연속이고 함수 $g(x)$도 $x\ge1$, $x<1$인 모든 실수 x에서 각각 연속이므로 함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $x=1$에서 연속이어야 한다. 즉

$$\lim_{x\to1+}f(x)g(x)=\lim_{x\to1-}f(x)g(x)=f(1)g(1)$$

이어야 한다.

이때

$$\lim_{x\to1+}f(x)g(x)=\lim_{x\to1+}(x+a)\cdot(-2x)$$
$$=-2(1+a),$$
$$\lim_{x\to1-}f(x)g(x)=\lim_{x\to1-}(x^2-1)\cdot\frac{2}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1-}\frac{2(x+1)(x-1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1-}2(x+1)=4,$$
$$f(1)g(1)=-2(1+a)$$

이므로 $-2(1+a)=4$ $\quad\therefore a=-3$ 답 -3

함수 $y=\frac{2}{x-1}$는 $x<1$인 모든 실수 x에서 연속이다.

09 $x\ge2$일 때,

$$g(x)=x^2+2x+1=(x+1)^2>0$$

$x<2$일 때, $g(x)=-x+3>1$

즉 실수 전체의 집합에서 $g(x)\ne0$이다. 한편

$$\lim_{x\to2+}g(x)=\lim_{x\to2+}(x^2+2x+1)=9,$$
$$\lim_{x\to2-}g(x)=\lim_{x\to2-}(-x+3)=1$$

이므로 $\lim_{x\to2+}g(x)\ne\lim_{x\to2-}g(x)$

따라서 $\lim_{x\to2}g(x)$가 존재하지 않으므로 함수 $g(x)$는 $x=2$에서 불연속이다.

함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 함수 $\frac{f(x)}{g(x)}$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $x=2$에서 연속이어야 한다. 즉

$$\lim_{x\to2+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to2-}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(2)}{g(2)}$$

이어야 한다.

이때

$$\lim_{x\to2+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to2+}\frac{ax-3}{x^2+2x+1}=\frac{2a-3}{9},$$
$$\lim_{x\to2-}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to2-}\frac{ax-3}{-x+3}=2a-3,$$
$$\frac{f(2)}{g(2)}=\frac{2a-3}{9}$$

이므로 $\frac{2a-3}{9}=2a-3$

$2a-3=18a-27,\quad 16a=24$

$\therefore a=\frac{3}{2}$ 답 ②

$x<2$에서
$-x>-2$
$\therefore -x+3>1$

10 함수 $f(x)$는 $x\ge1$, $x<1$인 모든 실수 x에서 각각 연속이고 함수 $g(x)$는 모든 실수 x에서 연속이므로 함수 $f(x)g(x)$가 모든 실수 x에서 연속이려면 $x=1$에서 연속이어야 한다. 즉

$$\lim_{x\to1+}f(x)g(x)=\lim_{x\to1-}f(x)g(x)=f(1)g(1)$$

이어야 한다.

이때

$$\lim_{x\to1-}f(x)g(x)=\lim_{x\to1-}\frac{1}{x-1}\cdot(x^3+ax+b)$$
$$=\lim_{x\to1-}\frac{x^3+ax+b}{x-1}=f(1)g(1)$$

에서 $x\to1-$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\to0$이므로 (분자) $\to0$이다.

즉 $\lim_{x\to1-}(x^3+ax+b)=0$이므로

$1+a+b=0\quad\therefore b=-a-1\quad\cdots\cdots$ ㉠

따라서

$$\lim_{x\to1+}f(x)g(x)=\lim_{x\to1+}\frac{x^3+ax-a-1}{2x+3}$$
$$=0,$$
$$\lim_{x\to1-}f(x)g(x)=\lim_{x\to1-}\frac{x^3+ax-a-1}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1-}\frac{(x-1)(x^2+x+a+1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1-}(x^2+x+a+1)$$
$$=a+3,$$
$$f(1)g(1)=0$$

이므로 $a+3=0\quad\therefore a=-3$

$a=-3$을 ㉠에 대입하면 $b=2$

$\therefore a-b=-5$ 답 -5

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 0 & a & -a-1 \\ & & 1 & 1 & a+1 \\ \hline & 1 & 1 & a+1 & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore x^3+ax-a-1$
$=(x-1)\times(x^2+x+a+1)$

11 $f(x-2)=\begin{cases} 2x-4+a & (x\ge2) \\ -x & (x<2) \end{cases}$

$f(x-2)$
$=\begin{cases} 2(x-2)+a & (x-2\ge0) \\ -(x-2)-2 & (x-2<0) \end{cases}$
$=\begin{cases} 2x-4+a & (x\ge2) \\ -x & (x<2) \end{cases}$

함수 $f(x)$는 $x\ge0$, $x<0$인 모든 실수 x에서 각각 연속이고 함수 $f(x-2)$는 $x\ge2$, $x<2$인 모든 실수 x에서 각각 연속이므로 함수 $g(x)=f(x)f(x-2)$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $x=0$, $x=2$에서 연속이어야 한다. 즉

$$\lim_{x\to0+}g(x)=\lim_{x\to0-}g(x)=g(0),$$
$$\lim_{x\to2+}g(x)=\lim_{x\to2-}g(x)=g(2)$$

이어야 한다.

이때

$$\lim_{x\to0+}g(x)=\lim_{x\to0+}f(x)f(x-2)$$
$$=\lim_{x\to0+}(2x+a)\cdot(-x)$$
$$=0,$$
$$\lim_{x\to0-}g(x)=\lim_{x\to0-}f(x)f(x-2)$$
$$=\lim_{x\to0-}(-x-2)\cdot(-x)$$
$$=0,$$
$$g(0)=f(0)f(-2)=0$$

이므로 a의 값에 관계없이 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

또

$$\lim_{x\to 2+} g(x)=\lim_{x\to 2+} f(x)f(x-2)$$
$$=\lim_{x\to 2+} (2x+a)(2x-4+a)$$
$$=a^2+4a,$$
$$\lim_{x\to 2-} g(x)=\lim_{x\to 2-} f(x)f(x-2)$$
$$=\lim_{x\to 2-} (2x+a)\cdot(-x)$$
$$=-2a-8,$$
$$g(2)=f(2)f(0)=a^2+4a$$

이므로 $\quad a^2+4a=-2a-8$

$a^2+6a+8=0, \qquad (a+4)(a+2)=0$

$\therefore\ a=-4$ 또는 $a=-2$

따라서 구하는 곱은

$-4\cdot(-2)=8$ 답 ①

이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 a의 값의 곱을 8로 바로 구할 수도 있다.

12 함수 $f(x)=\dfrac{x-2}{1-x}=\dfrac{1}{x-1}-1$은 $x\neq 1$인 모든 실수 x에서 연속이다.

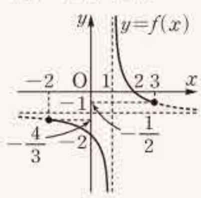
①, ②, ⑤ $f(x)$는 주어진 닫힌구간에서 연속이므로 최대·최소 정리에 의하여 주어진 구간에서 반드시 최댓값과 최솟값을 갖는다.

③ 구간 $[0, 1)$에서 x의 값이 증가할 때 $f(x)$의 값은 감소하므로 이 구간에서 함수 $f(x)$는 $x=0$일 때 최댓값 -2를 갖고, 최솟값은 없다.

④ 구간 $(1, 2]$에서 x의 값이 증가할 때 $f(x)$의 값은 감소하므로 이 구간에서 함수 $f(x)$는 $x=2$일 때 최솟값 0을 갖고, 최댓값은 없다.

답 ④

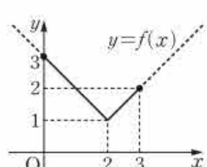
구간 $[-2, 3]$에서 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



$f(x)$
$=3x^2+2x+a$
$=3\left(x+\dfrac{1}{3}\right)^2+a-\dfrac{1}{3}$
이므로 $f(x)$는 구간 $(1, 2)$에서 중근 또는 서로 다른 두 실근을 가질 수 없다.

13 $f(x)=\begin{cases} x-1 & (x\ge 2) \\ -x+3 & (x<2) \end{cases}$

이므로 구간 $[0, 3]$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



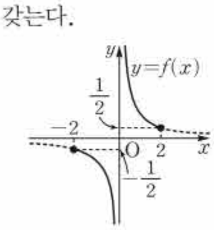
따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 최댓값 3, $x=2$에서 최솟값 1을 가지므로

$M=3,\ m=1$

$\therefore\ M+m=4$ 답 4

14 ①, ②, ③, ⑤ 주어진 함수는 구간 $[-2, 2]$에서 연속이므로 최대·최소 정리에 의하여 이 구간에서 반드시 최댓값과 최솟값을 갖는다.

④ 구간 $[-2, 2]$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $f(x)$는 이 구간에서 최댓값과 최솟값을 모두 갖지 않는다.



답 ④

$f(x)=\dfrac{1}{x-3}$은 $x\neq 3$인 모든 실수 x에서 연속이다.

11시부터 12시까지 적어도 한 번 존재한다.

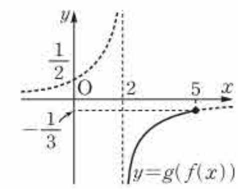
15 ㄱ. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$는 구간 $[2, 5]$에서 연속이므로 함수 $f(x)+g(x)$도 구간 $[2, 5]$에서 연속이다.

따라서 $f(x)+g(x)$는 최대·최소 정리에 의하여 이 구간에서 반드시 최댓값과 최솟값을 갖는다.

ㄴ. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$는 구간 $[2, 5]$에서 연속이므로 함수 $f(x)g(x)$도 구간 $[2, 5]$에서 연속이다.

따라서 $f(x)g(x)$는 최대·최소 정리에 의하여 이 구간에서 반드시 최댓값과 최솟값을 갖는다.

ㄷ. $g(f(x))=g(-x+8)$
$$=-\frac{1}{x-2}$$
이므로 구간 $[2, 5]$에서 함수 $y=g(f(x))$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 이 구간에서 함수 $g(f(x))$는 $x=5$일 때 최댓값 $-\dfrac{1}{3}$을 갖고, 최솟값은 없다.

이상에서 구간 $[2, 5]$에서 최댓값과 최솟값을 모두 갖는 함수는 ㄱ, ㄴ이다. 답 ②

16 $f(x)=3x^2+2x+a$라 하면 방정식 $f(x)=0$이 구간 $(1, 2)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는 경우는 이 구간에서 중근이 아닌 오직 하나의 실근을 갖는 경우이다.

$f(x)$는 구간 $[1, 2]$에서 연속이고

$f(1)=5+a,\ f(2)=16+a$

에서 $f(1)f(2)<0$이어야 하므로

$(5+a)(16+a)<0 \qquad \therefore\ -16<a<-5$

따라서 정수 a는 $-15, -14, -13, \cdots, -6$의 10개이다. 답 10

17 $f(-3)f(6)>0$에서

$f(-3)>0,\ f(6)>0$ 또는 $f(-3)<0,\ f(6)<0$

$f(1)f(6)<0$에서

$f(1)>0,\ f(6)<0$ 또는 $f(1)<0,\ f(6)>0$

$\therefore\ f(-3)>0,\ f(1)<0,\ f(6)>0$ 또는

$f(-3)<0,\ f(1)>0,\ f(6)<0$

따라서 $f(-3)f(1)<0$, $f(1)f(6)<0$이므로 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$은 구간 $(-3, 1)$, $(1, 6)$에서 각각 적어도 하나의 실근을 갖는다.

즉 방정식 $f(x)=0$은 구간 $[-3, 6]$에서 적어도 2개의 실근을 갖는다. 답 ②

18 온도의 변화는 연속이므로 사잇값의 정리에 의하여

① 9시부터 10시까지 온도가 19 °C가 되는 때는 적어도 한 번 존재한다.

② 10시부터 11시까지 온도가 18 °C가 되는 때는 존재하지 않을 수도 있다.

③ 11시부터 13시까지 온도가 21 °C가 되는 때는 적어도 한 번 존재한다.

④ 11시부터 14시까지 온도가 22.5 °C가 되는 때는 12시부터 13시까지 적어도 한 번, 13시부터 14시까지 적어도 한 번 존재하므로 적어도 두 번 존재한다.

⑤ 9시부터 14시까지 온도가 21.5 °C가 되는 때는 11시부터 12시까지 적어도 한 번, 13시부터 14시까지 적어도 한 번 존재하므로 적어도 두 번 존재한다.

답 ④

19 $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=1$ …… ㉠

$\lim_{x\to4}\frac{f(x)}{x-4}=1$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 각각 $x\to0$, $x\to4$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\to$ 0이므로 (분자) $\to$ 0이다.

즉 $f(0)=0$, $f(4)=0$이므로

$f(x)=x(x-4)Q(x)$ ($Q(x)$는 다항함수) …… ㉢

라 하자.

㉢을 ㉠의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to0}\frac{x(x-4)Q(x)}{x}=\lim_{x\to0}(x-4)Q(x)=-4Q(0)$$

즉 $-4Q(0)=1$이므로

$Q(0)=-\frac{1}{4}$ …… ㉣

또 ㉢을 ㉡의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to4}\frac{x(x-4)Q(x)}{x-4}=\lim_{x\to4}xQ(x)=4Q(4)$$

즉 $4Q(4)=1$이므로

$Q(4)=\frac{1}{4}$ …… ㉤

다항함수 $Q(x)$는 구간 $[0, 4]$에서 연속이고 ㉣, ㉤에서 $Q(0)Q(4)<0$이므로 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $Q(x)=0$은 구간 $(0, 4)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

따라서 방정식 $f(x)=0$은 구간 $[0, 4]$에서 적어도 3개의 실근을 갖는다.

답 3개

Q BOX

x와 $x-4$를 인수로 갖는다.

구간 $[0, 4]$에서 방정식 $f(x)=0$의 근은 $x=0$, $x=4$와 구간 $(0, 4)$에 있는 근이다.

$f(x)$
$=(x-2)|x-2|$
$=\begin{cases}(x-2)^2 & (x\ge2)\\ -(x-2)^2 & (x<2)\end{cases}$

03 미분계수와 도함수

05 미분계수

Ⓦ 16쪽

01 (1) $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)}=\frac{6-4}{2}=1$

(2) $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)}=\frac{1-(-3)}{2}=2$

답 (1) 1 (2) 2

02 답 3, 9, 12, 12, 3, 9, 3, 3, 12

03 (1) $f'(4)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(4+\Delta x)-f(4)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\{-3(4+\Delta x)+7\}-(-5)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to0}\frac{-3\Delta x}{\Delta x}=-3$

(2) $f'(-1)$

$=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(-1+\Delta x)-f(-1)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\{(-1+\Delta x)^2+8(-1+\Delta x)\}-(-7)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to0}\frac{(\Delta x)^2+6\Delta x}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to0}(\Delta x+6)=6$

답 (1) −3 (2) 6

다른 풀이 (1) $f'(4)=\lim_{x\to4}\frac{f(x)-f(4)}{x-4}$

$=\lim_{x\to4}\frac{(-3x+7)-(-5)}{x-4}$

$=\lim_{x\to4}\frac{-3(x-4)}{x-4}=-3$

(2) $f'(-1)=\lim_{x\to-1}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}$

$=\lim_{x\to-1}\frac{(x^2+8x)-(-7)}{x+1}$

$=\lim_{x\to-1}\frac{(x+7)(x+1)}{x+1}$

$=\lim_{x\to-1}(x+7)=6$

04 (1) (i) $f(2)=0$,

$\lim_{x\to2}f(x)=\lim_{x\to2}(x-2)|x-2|=0$

이므로 $\lim_{x\to2}f(x)=f(2)$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 연속이다.

(ii) $\lim_{x\to2+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to2+}\frac{(x-2)^2}{x-2}$

$=\lim_{x\to2+}(x-2)=0$,

$\lim_{x\to2-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to2-}\frac{-(x-2)^2}{x-2}$

$=\lim_{x\to2-}(-x+2)=0$

이므로 $\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=0$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 미분가능하다.

(i), (ii)에서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 연속이고 미분가능하다.

(2) (i) $\lim\limits_{x\to2+} f(x)=\lim\limits_{x\to2+}\{(x-2)^2+1\}=1$,

$\lim\limits_{x\to2-} f(x)=\lim\limits_{x\to2-}\{2(x-2)+1\}=1$

이므로 $\quad \lim\limits_{x\to2} f(x)=1$

이때 $f(2)=1$이므로

$\lim\limits_{x\to2} f(x)=f(2)$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 연속이다.

(ii) $$\lim_{x\to2+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to2+}\frac{\{(x-2)^2+1\}-1}{x-2}=\lim_{x\to2+}\frac{(x-2)^2}{x-2}=\lim_{x\to2+}(x-2)=0,$$

$$\lim_{x\to2-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to2-}\frac{\{2(x-2)+1\}-1}{x-2}=\lim_{x\to2-}\frac{2(x-2)}{x-2}=2$$

이므로 $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$가 존재하지 않는다.

미분계수 $f'(2)$가 존재하지 않는다.

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 미분가능하지 않다.

(i), (ii)에서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 연속이지만 미분가능하지 않다.

답 (1) 연속이고 미분가능하다.
(2) 연속이지만 미분가능하지 않다.

05 함수 $f(x)$에서 x의 값이 1에서 a까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{f(a)-f(1)}{a-1}=\frac{(a^3-2a-2)-(-3)}{a-1}=\frac{a^3-2a+1}{a-1}=\frac{(a-1)(a^2+a-1)}{a-1}=a^2+a-1$$

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ & & 1 & 1 & -1 \\ \hline & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}$$

$\therefore a^3-2a+1=(a-1)(a^2+a-1)$

따라서 $a^2+a-1=11$이므로

$a^2+a-12=0, \quad (a+4)(a-3)=0$

$\therefore a=3\ (\because a>1)$ 답 ②

06 $f(5)=0$이므로 함수 $f(x)$에서 x의 값이 k에서 5까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{f(5)-f(k)}{5-k}=\frac{-f(k)}{5-k}$$

따라서 $\dfrac{-f(k)}{5-k}=2-k$이므로

$f(k)=-(2-k)(5-k)$
$=-k^2+7k-10$

$\therefore f(-1)=-1-7-10=-18$ 답 -18

다른 풀이 $f(5)=0$이므로 함수 $f(x)$에서 x의 값이 -1에서 5까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{f(5)-f(-1)}{5-(-1)}=\frac{-f(-1)}{6}$$

이때 주어진 조건에 의하여 함수 $f(x)$에서 x의 값이 -1에서 5까지 변할 때의 평균변화율이

$2-(-1)=3$

$k=-1$일 때이므로
$2-k=2-(-1)$
$=3$

이므로 $\quad \dfrac{-f(-1)}{6}=3$

$\therefore f(-1)=-18$

07 직선 AB의 기울기는 함수 $f(x)$에서 x의 값이 0에서 2까지 변할 때의 평균변화율과 같으므로

$$\frac{f(2)-f(0)}{2-0}=2 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

한편 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=2$에 대하여 대칭이므로 $\quad f(4)=f(0)$

따라서 함수 $f(x)$에서 x의 값이 2에서 4까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{f(4)-f(2)}{4-2}=\frac{f(0)-f(2)}{2}=-\frac{f(2)-f(0)}{2-0}=-2\ (\because ㉠)$$

답 ④

08 함수 $f(x)$에서 x의 값이 a에서 b까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{(b^2+b-3)-(a^2+a-3)}{b-a}=\frac{(b^2-a^2)+(b-a)}{b-a}=\frac{(b+a)(b-a)+(b-a)}{b-a}=a+b+1$$

함수 $f(x)$의 $x=2$에서의 순간변화율은

$$f'(2)=\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\{(2+h)^2+(2+h)-3\}-3}{h}=\lim_{h\to0}\frac{h^2+5h}{h}=\lim_{h\to0}(h+5)=5$$

따라서 $a+b+1=5$이므로

$a+b=4$ 답 4

09 $$f'(3)=\lim_{x\to0}\frac{f(3+x)-f(3)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{3x^2+2x}{x}=\lim_{x\to0}(3x+2)=2$$

답 ⑤

10 $$\lim_{h\to0}\frac{f(a+2h)-f(a)}{3h}=\lim_{h\to0}\frac{f(a+2h)-f(a)}{2h}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{3}f'(a)$$

분자가 $f(a+2h)-f(a)$이므로 분모가 $2h$가 되도록 변형한다.

답 ③

11 $\lim_{h\to0}\frac{f(1+4h)-f(1-h)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+4h)-f(1)+f(1)-f(1-h)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{\{f(1+4h)-f(1)\}-\{f(1-h)-f(1)\}}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+4h)-f(1)}{4h}\cdot4$

$\quad-\lim_{h\to0}\frac{f(1-h)-f(1)}{-h}\cdot(-1)$

$=4f'(1)+f'(1)=5f'(1)$

$=5\cdot2=10$ 답 ①

Q BOX: $h\to0$일 때, $-h\to0$

12 $\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(3h)}{-6h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(0+h)-f(0)+f(0)-f(0+3h)}{-6h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{\{f(0+h)-f(0)\}-\{f(0+3h)-f(0)\}}{-6h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)$

$\quad+\lim_{h\to0}\frac{f(0+3h)-f(0)}{3h}\cdot\frac{1}{2}$

$=-\frac{1}{6}f'(0)+\frac{1}{2}f'(0)=\frac{1}{3}f'(0)$

따라서 $\frac{1}{3}f'(0)=4$이므로

$f'(0)=12$ 답 12

13 $\lim_{x\to1}\frac{x^3-1}{f(x)-f(1)}$

$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{f(x)-f(1)}$

$=\lim_{x\to1}\frac{1}{\frac{f(x)-f(1)}{x-1}}\cdot(x^2+x+1)$

$=\frac{1}{f'(1)}\cdot3=\frac{1}{3}\cdot3=1$ 답 ①

Q BOX: 함수의 극한에 대한 성질을 이용하면

$\lim_{x\to1}\frac{1}{\frac{f(x)-f(1)}{x-1}}$

$\times\lim_{x\to1}(x^2+x+1)$

$=\frac{1}{f'(1)}\cdot3$

14 $\lim_{x\to-2}\frac{f(x)+1}{x^2+5x+6}=\lim_{x\to-2}\frac{f(x)-(-1)}{(x+3)(x+2)}$

$=\lim_{x\to-2}\frac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)}\cdot\frac{1}{x+3}$

$=f'(-2)\cdot1$

$=6\cdot1=6$ 답 6

15 $\lim_{x\to3}\frac{f(x)-2}{x-3}=8$에서 $x\longrightarrow3$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\longrightarrow$ 0이므로 (분자) $\longrightarrow$ 0이다.

즉 $\lim_{x\to3}\{f(x)-2\}=0$이므로 $\quad f(3)=2$

따라서

$\lim_{x\to3}\frac{f(x)-2}{x-3}=\lim_{x\to3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=f'(3)$

이므로 $\quad f'(3)=8$

$\therefore f(3)+f'(3)=10$ 답 ⑤

Q BOX: 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\alpha$ (α는 실수)이고 $\lim_{x\to a}g(x)=0$이면 $\lim_{x\to a}f(x)=0$

16 주어진 식에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)+0 \quad \therefore f(0)=0$

$\therefore f'(3)=\lim_{h\to0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(3)+f(h)+6h-f(3)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)+6h}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}+6$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}+6$

$=f'(0)+6$

$=1+6=7$ 답 7

17 주어진 식에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)+0-5$

$\therefore f(0)=5$

$\therefore f'(-1)$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(-1)+f(h)-h-5-f(-1)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-h-5}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-5}{h}-1$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}-1$

$=f'(0)-1$

따라서 $f'(0)-1=4$이므로

$f'(0)=5$ 답 ⑤

18 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(-1, f(-1))$에서의 접선의 기울기가 -2이므로

$f'(-1)=-2$

$\therefore \lim_{x\to-1}\frac{f(x)-f(-1)}{x^2-1}$

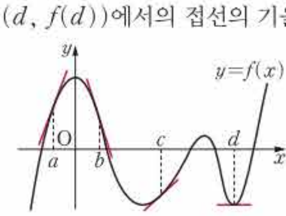
$=\lim_{x\to-1}\frac{f(x)-f(-1)}{(x+1)(x-1)}$

$=\lim_{x\to-1}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}\cdot\frac{1}{x-1}$

$=f'(-1)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$

$=-2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=1$ 답 1

19 $f'(a)$, $f'(b)$, $f'(c)$, $f'(d)$는 각각 곡선 $y=f(x)$ 위의 네 점 $(a, f(a))$, $(b, f(b))$, $(c, f(c))$, $(d, f(d))$에서의 접선의 기울기이다.



따라서 위의 그림에서

$f'(b)<f'(d)<f'(c)<f'(a)$

답 $f'(b)<f'(d)<f'(c)<f'(a)$

W 03 미분계수와 도함수

20 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 (1, 3)에서의 접선의 기울기는

$$f'(1)=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{\{(2x^2+3)(x-1)+3\}-3}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}(2x^2+3)=5$$

이때 $\tan\theta$의 값은 이 접선의 기울기와 같으므로

$\tan\theta=5$ 답 ④

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 $\theta\,(0°\le\theta<90°)$라 하면 $f'(a)=\tan\theta$

21 구간 $(-1, 6)$에서 함수 $f(x)$는 $x=2$, $x=4$에서 불연속이므로 $a=2$

또 구간 $(-1, 6)$에서 함수 $f(x)$는 $x=2$, $x=3$, $x=4$에서 미분가능하지 않으므로 $b=3$

$\therefore a+b=5$ 답 ③

22 ①, ③ 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 불연속이므로 미분가능하지 않다.

②, ④ 함수 $f(x)$의 그래프가 $x=a$에서 꺾여 있으므로 $f(x)$는 $x=a$에서 미분가능하지 않다.

답 ⑤

함수 $f(x)$의 그래프가 $x=a$에서 꺾인 경우
➡ $f'(a)$가 존재하지 않으므로 $f(x)$는 $x=a$에서 미분가능하지 않다.

23 ㄱ. 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 정의되어 있지 않으므로 불연속이다.

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하지 않다.

ㄴ. (i) $\lim_{x\to1+}g(x)=\lim_{x\to1+}(x-1)=0$,

$\lim_{x\to1-}g(x)=\lim_{x\to1-}(x^2-x)=0$

이므로 $\lim_{x\to1}g(x)=0$

이때 $g(1)=0$이므로 $\lim_{x\to1}g(x)=g(1)$

따라서 함수 $g(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

(ii) $\lim_{x\to1+}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim_{x\to1+}\frac{x-1}{x-1}=1$,

$$\lim_{x\to1-}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim_{x\to1-}\frac{x^2-x}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1-}\frac{x(x-1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1-}x=1$$

이므로 $\lim_{x\to1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=1$

따라서 함수 $g(x)$는 $x=1$에서 미분가능하다.

ㄷ. (i) $\lim_{x\to1+}h(x)=\lim_{x\to1+}(x^2+3x-4)=0$,

$\lim_{x\to1-}h(x)=\lim_{x\to1-}(x^2-3x+2)=0$

이므로 $\lim_{x\to1}h(x)=0$

이때 $h(1)=0$이므로 $\lim_{x\to1}h(x)=h(1)$

따라서 함수 $h(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

(ii) $$\lim_{x\to1+}\frac{h(x)-h(1)}{x-1}=\lim_{x\to1+}\frac{x^2+3x-4}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1+}\frac{(x+4)(x-1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1+}(x+4)=5,$$

$$\lim_{x\to1-}\frac{h(x)-h(1)}{x-1}=\lim_{x\to1-}\frac{x^2-3x+2}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1-}\frac{(x-1)(x-2)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1-}(x-2)=-1$$

이므로 $\lim_{x\to1}\frac{h(x)-h(1)}{x-1}$이 존재하지 않는다.

따라서 함수 $h(x)$는 $x=1$에서 미분가능하지 않다.

이상에서 $x=1$에서 연속이지만 미분가능하지 않은 함수인 것은 ㄷ뿐이다. 답 ③

06 도함수

W 20쪽

01 (1) $$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{\{-(x+h)+5\}-(-x+5)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{-h}{h}=-1$$

(2) $$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{\{3(x+h)^2+7(x+h)\}-(3x^2+7x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{(6x+7)h+3h^2}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}(6x+7+3h)=6x+7$$

답 (1) $f'(x)=-1$ (2) $f'(x)=6x+7$

02 (1) $y'=(x^9)'=9x^8$

(2) $y'=(-5)'=0$

(3) $y'=(-3x^5)'=-3(x^5)'=-3\cdot5x^4=-15x^4$

(4) $y'=(2x-7)'=(2x)'-(7)'=2$

(5) $y'=(4x^2-6x+9)'=(4x^2)'-(6x)'+(9)'$
$=8x-6$

(6) $y'=\left(-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{4}x^2+1\right)'$
$=\left(-\frac{1}{3}x^3\right)'+\left(\frac{1}{4}x^2\right)'+(1)'=-x^2+\frac{1}{2}x$

답 (1) $y'=9x^8$ (2) $y'=0$
(3) $y'=-15x^4$ (4) $y'=2$
(5) $y'=8x-6$ (6) $y'=-x^2+\frac{1}{2}x$

03 (1) $y'=(4x)'(x-3)+4x(x-3)'$
$=4(x-3)+4x\cdot1=8x-12$

(2) $y'=(2x-1)'(x^2+2)+(2x-1)(x^2+2)'$
$=2(x^2+2)+(2x-1)\cdot2x=6x^2-2x+4$

(3) $y'=x'(x+6)(3x+2)+x(x+6)'(3x+2)$
$+x(x+6)(3x+2)'$
$=1\cdot(x+6)(3x+2)+x\cdot1\cdot(3x+2)$
$+x(x+6)\cdot3$
$=9x^2+40x+12$

(4) $y'=\{(x+7)^4\}'=4(x+7)^3(x+7)'$

$=4(x+7)^3\cdot 1=4(x+7)^3$

(5) $y'=\{(x^2-5x+1)^2\}'$

$=2(x^2-5x+1)(x^2-5x+1)'$

$=2(2x-5)(x^2-5x+1)$

답 (1) $y'=8x-12$ (2) $y'=6x^2-2x+4$

(3) $y'=9x^2+40x+12$ (4) $y'=4(x+7)^3$

(5) $y'=2(2x-5)(x^2-5x+1)$

04 답 (가) $2h$ (나) 2 (다) $2f(x)$

05 ① $\frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{1}{2}f'(x)$

② $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+2h)-f(x)}{4h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+2h)-f(x)}{2h}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}f'(x)$

③ $\lim_{h\to 0}\frac{f(x-h)-f(x)}{-2h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x-h)-f(x)}{-h}\cdot\frac{1}{2}$

$=\frac{1}{2}f'(x)$

④ $\lim_{h\to 0}\frac{f(x-2h)-f(x)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x-2h)-f(x)}{-2h}\cdot(-2)=-2f'(x)$

⑤ $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+3h)-f(x+2h)}{2h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+3h)-f(x)+f(x)-f(x+2h)}{2h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{\{f(x+3h)-f(x)\}-\{f(x+2h)-f(x)\}}{2h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+3h)-f(x)}{3h}\cdot\frac{3}{2}-\lim_{h\to 0}\frac{f(x+2h)-f(x)}{2h}$

$=\frac{3}{2}f'(x)-f'(x)=\frac{1}{2}f'(x)$

따라서 나머지 넷과 다른 하나는 ④이다. 답 ④

06 $f'(x)=6x^2+1$이므로 $f'(a)=7$에서

$6a^2+1=7,\quad a^2=1$

$\therefore a=1\ (\because a>0)$ 답 1

07 $f(0)=4$에서 $c=4$

$f'(x)=2ax+b$이므로

$f'(1)=3$에서 $2a+b=3$ …… ㉠

$f'(3)=11$에서 $6a+b=11$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2,\ b=-1$

$\therefore a+b+c=5$ 답 ④

08 $f'(x)=3x^2+2ax-2a$이므로 $f'(-2)=f'(0)$에서

$12-4a-2a=-2a,\quad 4a=12\quad \therefore a=3$

이때 $m=f'(0)=-2a=-6$이므로

$a-m=9$ 답 9

Q BOX

두 점 $(-2,\ f(-2))$, $(0,\ f(0))$에서의 접선의 기울기가 같다.

09 $f(x)=\sum_{k=1}^{5}k^2x^k=x+2^2x^2+3^2x^3+4^2x^4+5^2x^5$

이므로

$f'(x)=1+2^3x+3^3x^2+4^3x^3+5^3x^4$

$\therefore f'(1)=1^3+2^3+3^3+4^3+5^3$

$=\sum_{k=1}^{5}k^3=\left(\frac{5\cdot 6}{2}\right)^2$

$=225$ 답 ③

자연수의 거듭제곱의 합

① $\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$

② $\sum_{k=1}^{n}k^2$

$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

③ $\sum_{k=1}^{n}k^3$

$=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

10 $h'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

$=(3x^2+2x+2)(x^2-3x+1)$

$+(x^3+x^2+2x-1)(2x-3)$

이므로

$h'(1)=7\cdot(-1)+3\cdot(-1)=-10$ 답 -10

11 $f'(x)=(x)'(3-x)(2x+1)+x(3-x)'(2x+1)$

$+x(3-x)(2x+1)'$

$=(3-x)(2x+1)-x(2x+1)+2x(3-x)$

$=-6x^2+10x+3$

$f'(a)=0$에서 $-6a^2+10a+3=0$

$\therefore 6a^2-10a-3=0$

따라서 실수 a는 이차방정식 $6a^2-10a-3=0$의 실근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 구하는 a의 값의 합은

$-\frac{-10}{6}=\frac{5}{3}$ 답 ⑤

이차방정식 $6a^2-10a-3=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}$

$=(-5)^2-6\cdot(-3)$

>0

이므로 이 이차방정식은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

12 $f(x)=(2x-5)^2(x^2+1)$이라 하면

$f'(x)=\{(2x-5)^2\}'(x^2+1)+(2x-5)^2(x^2+1)'$

$=2(2x-5)\cdot 2\cdot(x^2+1)+(2x-5)^2\cdot 2x$

$=4(2x-5)(x^2+1)+2x(2x-5)^2$

$\{(2x-5)^2\}'$

$=2(2x-5)(2x-5)'$

$=2(2x-5)\cdot 2$

따라서 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2,\ 5)$에서의 접선의 기울기는

$f'(2)=4\cdot(-1)\cdot 5+4\cdot(-1)^2$

$=-16$ 답 ②

13 $f'(x)=2(x^4+ax)(x^4+ax)'$

$=2(x^4+ax)(4x^3+a)$

이므로 $f'(1)=56$에서

$2(1+a)(4+a)=56,\quad (a+1)(a+4)=28$

$a^2+5a-24=0,\quad (a+8)(a-3)=0$

$\therefore a=3\ (\because a>0)$

따라서 $f(x)=(x^4+3x)^2$이므로

$f(-1)=(1-3)^2=4$

$\therefore a+f(-1)=7$ 답 ④

14 $\lim_{x\to -1}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}$

$=f'(-1)$

이때 $f'(x)=9x^2-9$이므로

$f'(-1)=9-9=0$ 답 ①

W 03 미분계수와 도함수

15 $\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2-h)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2)+f(2)-f(2-h)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{\{f(2+h)-f(2)\}-\{f(2-h)-f(2)\}}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}-\lim_{h\to0}\frac{f(2-h)-f(2)}{-h}\cdot(-1)$

$=f'(2)+f'(2)=2f'(2)$

이때 $f'(x)=8x^3-10x$이므로

$2f'(2)=2\cdot(64-20)=88$ 답 88

16 $\frac{1}{2x}=h$로 놓으면 $x\to\infty$일 때 $h\to0+$이므로

$\lim_{x\to\infty}x\left\{f\left(1+\frac{1}{2x}\right)-f(1)\right\}$

$=\lim_{h\to0+}\frac{1}{2h}\{f(1+h)-f(1)\}$

$=\frac{1}{2}\lim_{h\to0+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\frac{1}{2}f'(1)$

이때 $f'(x)=-6x+4$이므로

$\frac{1}{2}f'(1)=\frac{1}{2}\cdot(-6+4)=-1$ 답 ⑤

17 $f(1)=4$에서 $1+a+b=4$

$\therefore a+b=3$ ...... ㉠

$\lim_{x\to-2}\frac{f(x)-f(-2)}{x^2-4}=\lim_{x\to-2}\frac{f(x)-f(-2)}{(x+2)(x-2)}$

$=\lim_{x\to-2}\frac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)}\cdot\frac{1}{x-2}$

$=-\frac{1}{4}f'(-2)$

즉 $-\frac{1}{4}f'(-2)=7$이므로 $f'(-2)=-28$

이때 $f'(x)=4x^3+a$이므로

$-32+a=-28$ $\therefore a=4$

$a=4$를 ㉠에 대입하면

$4+b=3$ $\therefore b=-1$

따라서 $f(x)=x^4+4x-1$이므로

$f(-1)=1-4-1=-4$ 답 ③

18 $\lim_{h\to0}\frac{f(3+h)-b}{h}=11$에서 $h\to0$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\to$ 0이므로 (분자) $\to$ 0이다.

즉 $\lim_{h\to0}\{f(3+h)-b\}=0$이므로 $f(3)=b$

$\therefore \lim_{h\to0}\frac{f(3+h)-b}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}$

$=f'(3)$

$\therefore f'(3)=11$

이때

$f'(x)=(x+a)'(3x-1)+(x+a)(3x-1)'$

$=1\cdot(3x-1)+(x+a)\cdot3$

$=6x+3a-1$

이므로

$18+3a-1=11$ $\therefore a=-2$

Q BOX

$\frac{1}{2x}=h$에서

$2x=\frac{1}{h}$

$\therefore x=\frac{1}{2h}$

$\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한에서 0이 아닌 극한값이 존재하므로

① (분자의 차수) =(분모의 차수)

② 극한값은 최고차항의 계수의 비이다.

$\Rightarrow a=0,\ \frac{b}{2}=2$

$\lim_{x\to-1}f(x)=f(-1)$

$\Rightarrow \lim_{x\to-1+}f(x)$

$=\lim_{x\to-1-}f(x)$

$=f(-1)$

$\lim_{x\to-1+}f'(x)$

$=\lim_{x\to-1-}f'(x)$

따라서 $f(x)=(x-2)(3x-1)$이므로

$b=f(3)=1\cdot8=8$

$\therefore f\left(\frac{b}{a}\right)=f(-4)=-6\cdot(-13)=78$ 답 78

19 조건 (가)에서 $\lim_{x\to\infty}\frac{ax^3+bx^2+cx+d}{2x^2+3x+1}=2$이므로

$a=0,\ b=4$

조건 (나)에서 $x\to-3$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\to$ 0이므로 (분자) $\to$ 0이다.

즉 $\lim_{x\to-3}\{f(x)-5\}=0$이므로 $f(-3)=5$

$\therefore \lim_{x\to-3}\frac{f(x)-5}{x+3}=\lim_{x\to-3}\frac{f(x)-f(-3)}{x-(-3)}$

$=f'(-3)$

$\therefore f'(-3)=-12$

$f(x)=4x^2+cx+d,\ f'(x)=8x+c$이므로

$f(-3)=5$에서 $36-3c+d=5$

$\therefore 3c-d=31$ ...... ㉠

$f'(-3)=-12$에서 $-24+c=-12$

$\therefore c=12$

$c=12$를 ㉠에 대입하면

$36-d=31$ $\therefore d=5$

$\therefore a-b+c-d=0-4+12-5=3$ 답 3

20 함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 미분가능하면 $x=-1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to-1}f(x)=f(-1)$

$\lim_{x\to-1-}(2x+b)=f(-1)$, $-2+b=a+1$

$\therefore b=a+3$ ...... ㉠

$f'(x)=\begin{cases}2ax & (x>-1)\\ 2 & (x<-1)\end{cases}$이고 $f'(-1)$이 존재하므로

$\lim_{x\to-1+}2ax=\lim_{x\to-1-}2$

$-2a=2$ $\therefore a=-1$

$a=-1$을 ㉠에 대입하면 $b=2$

$\therefore ab=-2$ 답 -2

다른 풀이 함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 미분가능하면 $x=-1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to-1}f(x)=f(-1)$

$\lim_{x\to-1-}(2x+b)=f(-1)$, $-2+b=a+1$

$\therefore b=a+3$ ...... ㉠

$f'(-1)$이 존재하므로

$\lim_{x\to-1+}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}$

$=\lim_{x\to-1+}\frac{(ax^2+1)-(a+1)}{x+1}$

$=\lim_{x\to-1+}\frac{a(x+1)(x-1)}{x+1}$

$=\lim_{x\to-1+}a(x-1)$

$=-2a$,

$$\lim_{x \to -1-} \frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}$$
$$= \lim_{x \to -1-} \frac{(2x+b)-(a+1)}{x+1}$$
$$= \lim_{x \to -1-} \frac{2(x+1)}{x+1} \ (\because ㉠)$$
$$= \lim_{x \to -1-} 2$$
$$=2$$

에서 $-2a=2$

$\therefore a=-1$

$a=-1$을 ㉠에 대입하면 $b=2$

$\therefore ab=-2$

21 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 미분가능하다.

즉 함수 $f(x)$가 $x=2$에서 연속이므로

$\lim_{x \to 2} f(x)=f(2)$

$\lim_{x \to 2-} (2x^3+ax^2+b)=f(2)$

$16+4a+b=8-a$

$\therefore b=-5a-8$ ······ ㉠

$f'(x)=\begin{cases} 4 & (x>2) \\ 6x^2+2ax & (x<2) \end{cases}$이고 $f'(2)$가 존재하므로

$\lim_{x \to 2+} 4=\lim_{x \to 2-} (6x^2+2ax)$

$4=24+4a \quad \therefore a=-5$

$a=-5$를 ㉠에 대입하면

$b=17$

따라서 $f(x)=\begin{cases} 4x+5 & (x \ge 2) \\ 2x^3-5x^2+17 & (x<2) \end{cases}$이므로

$f(-1)=-2-5+17=10$ 답 ⑤

22 $p=-1$, $q=-1$, $r=7$이므로

$p+q+r=5$ 답 5

23 $\lim_{x \to 1} \frac{2x^n-ax+3}{x-1}=21$에서 $x \to 1$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\to$ 0이므로 (분자) $\to$ 0이다.

즉 $\lim_{x \to 1} (2x^n-ax+3)=0$이므로

$2-a+3=0 \quad \therefore a=5$

$\therefore \lim_{x \to 1} \frac{2x^n-5x+3}{x-1}=21$

$f(x)=2x^n-5x$라 하면 $f(1)=-3$이므로

$\lim_{x \to 1} \frac{2x^n-5x+3}{x-1}=\lim_{x \to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$

$\therefore f'(1)=21$

이때 $f'(x)=2nx^{n-1}-5$이므로

$2n-5=21 \quad \therefore n=13$

$\therefore a+n=18$ 답 ④

QBOX

등식의 양변의 동류항의 계수를 비교한다.

$ax^2+bx+c=0$이 x에 대한 항등식이면 $a=b=c=0$

$-1<2$이므로 $f(-1)$의 값은 $x=-1$을 $f(x)=2x^3-5x^2+17$에 대입하여 구한다.

24 $f(x)=x^3-x^2f'(1)+3x$에서 $f'(1)$은 상수이므로 $f'(1)=a$ (a는 상수)라 하면

$f(x)=x^3-ax^2+3x$

$\therefore f'(x)=3x^2-2ax+3$

$f'(1)=3-2a+3=6-2a$이므로 $f(x)$와 $f'(1)$을 주어진 등식에 대입하면

$x^3-ax^2+3x=x^3-(6-2a)x^2+3x$

위의 등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로

$a=6-2a \quad \therefore a=2$

따라서 $f(x)=x^3-2x^2+3x$이므로

$f(2)=8-8+6=6$ 답 ②

다른 풀이 $f(x)=x^3-x^2f'(1)+3x$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=3x^2-2xf'(1)+3$

위의 식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$f'(1)=3-2f'(1)+3$

$\therefore f'(1)=2$

따라서 $f(x)=x^3-2x^2+3x$이므로

$f(2)=8-8+6=6$

25 $f'(x)=2x-3$이므로 $f(x)$와 $f'(x)$를 주어진 등식에 대입하면

$(2x-1)(2x-3)+a(x^2-3x)-4x-3=0$

$\therefore (a+4)x^2-3(a+4)x=0$

위의 등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로

$a+4=0 \quad \therefore a=-4$ 답 ①

26 $f(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수, $a \ne 0$)라 하면

$f'(x)=2ax+b$

$f(x)$와 $f'(x)$를 주어진 등식에 대입하면

$x(2ax+b)+x=2(ax^2+bx+c)-10$

$\therefore 2ax^2+(b+1)x=2ax^2+2bx+2c-10$

위의 등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로

$b+1=2b$, $0=2c-10$

$\therefore b=1$, $c=5$

$f(x)=ax^2+x+5$이므로 $f(-1)=1$에서

$a-1+5=1 \quad \therefore a=-3$

따라서 $f'(x)=-6x+1$이므로

$f'(1)=-6+1=-5$ 답 -5

27 $f(x)$의 최고차항이 이차 이상이면 $f(x)f'(x)$의 최고차항은 삼차 이상이므로 주어진 등식을 만족시키는 $f(x)$는 일차함수이다.

$f(x)=ax+b$ (a, b는 상수, $a \ne 0$)라 하면

$f'(x)=a$

$f(x)$와 $f'(x)$를 주어진 등식에 대입하면

$(ax+b) \cdot a=9x+3$

$\therefore a^2x+ab=9x+3$

앞의 등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로

$a^2=9,\ ab=3$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=-3,\ b=-1$ 또는 $a=3,\ b=1$

(i) $a=-3,\ b=-1$일 때, $f(x)=-3x-1$이므로

$f(-1)f(1)=2\cdot(-4)=-8$

(ii) $a=3,\ b=1$일 때, $f(x)=3x+1$이므로

$f(-1)f(1)=-2\cdot4=-8$

(i), (ii)에서 $f(-1)f(1)=-8$ 답 ①

쌤 한마디

$f(x)$의 최고차항이 n차이면

(i) $n\geq2$일 때, $f'(x)$의 최고차항이 $(n-1)$차이므로 $f(x)f'(x)$의 최고차항은 $(2n-1)$차이다. 따라서 $f(x)f'(x)$는 일차함수가 아니다.

(ii) $n=1$일 때, $f'(x)$는 상수함수이므로 $f(x)f'(x)$는 일차함수이다.

$n\geq2$에서
$2n-1\geq3$

28 다항식 $2x^8+ax^2+b$가 $(x+1)^2$을 인수로 가지므로 $2x^8+ax^2+b$는 $(x+1)^2$으로 나누어떨어진다.

$f(x)=2x^8+ax^2+b$라 하면

$f'(x)=16x^7+2ax$

$f(x)$가 $(x+1)^2$으로 나누어떨어지므로

$f(-1)=0,\ f'(-1)=0$

$f(-1)=0$에서 $2+a+b=0$

$\therefore a+b=-2$ ······ ㉠

$f'(-1)=0$에서 $-16-2a=0$

$\therefore a=-8$

$a=-8$을 ㉠에 대입하면

$-8+b=-2 \quad \therefore b=6$

$\therefore b-a=14$ 답 14

$2x^8+ax^2+b$가 $(x+1)^2$을 인수로 가지면
$2x^8+ax^2+b=(x+1)^2p(x)$
($p(x)$는 다항식)
꼴이므로 $2x^8+ax^2+b$는 $(x+1)^2$으로 나누어떨어진다.

29 x^5-32를 $(x-2)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)=ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$x^5-32=(x-2)^2Q(x)+ax+b$ ······ ㉠

㉠의 양변에 $x=2$를 대입하면

$0=2a+b$ ······ ㉡

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$5x^4=2(x-2)Q(x)+(x-2)^2Q'(x)+a$

위의 식의 양변에 $x=2$를 대입하면

$a=80$

$a=80$을 ㉡에 대입하면

$0=160+b \quad \therefore b=-160$

따라서 $R(x)=80x-160$이므로

$R\left(\frac{1}{8}\right)=10-160=-150$ 답 ③

다항식을 이차식으로 나누었을 때의 나머지는 상수이거나 일차식이므로 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)라 한다.

두 직선 $y=mx+n$, $y=m'x+n'$이 수직이면 $mm'=-1$

04 도함수의 활용 (1)

07 접선의 방정식

25쪽

01 (1) $f(x)=-x^2-7x+2$라 하면

$f'(x)=-2x-7$

따라서 점 $(-2,\ 12)$에서의 접선의 기울기는

$f'(-2)=4-7=-3$

(2) $f(x)=\frac{2}{3}x^3-5x-7$이라 하면

$f'(x)=2x^2-5$

따라서 점 $(3,\ -4)$에서의 접선의 기울기는

$f'(3)=18-5=13$

(3) $f(x)=-2x^4+x^2+4$라 하면

$f'(x)=-8x^3+2x$

따라서 점 $(-1,\ 3)$에서의 접선의 기울기는

$f'(-1)=8-2=6$

답 (1) -3 (2) 13 (3) 6

02 (1) $f(x)=3x^2-4x+2$라 하면

$f'(x)=6x-4$

점 $(1,\ 1)$에서의 접선의 기울기는

$f'(1)=6-4=2$

이므로 구하는 접선의 방정식은

$y-1=2(x-1)$

$\therefore y=2x-1$

(2) $f(x)=-x^2-5x-1$이라 하면

$f'(x)=-2x-5$

점 $(-1,\ 3)$에서의 접선의 기울기는

$f'(-1)=2-5=-3$

이므로 구하는 접선의 방정식은

$y-3=-3\{x-(-1)\}$

$\therefore y=-3x$

(3) $f(x)=x^3-2x^2-5$라 하면

$f'(x)=3x^2-4x$

점 $(2,\ -5)$에서의 접선의 기울기는

$f'(2)=12-8=4$

이므로 구하는 접선의 방정식은

$y-(-5)=4(x-2)$

$\therefore y=4x-13$

답 (1) $y=2x-1$ (2) $y=-3x$ (3) $y=4x-13$

03 $f(x)=-x^2+3x-4$라 하면

$f'(x)=-2x+3$

점 $(1,\ -2)$에서의 접선의 기울기는

$f'(1)=-2+3=1$

이므로 이 점에서의 접선과 수직인 직선의 기울기는 -1이다.

따라서 점 $(1,\ -2)$를 지나고 기울기가 -1인 직선의 방정식은

$y-(-2)=-(x-1)$

$\therefore\ y=-x-1$ 답 $y=-x-1$

04 (1) $f(x)=4x^2-3x+2$라 하면

$f'(x)=8x-3$

접점의 좌표를 $(t,\ 4t^2-3t+2)$라 하면 접선의 기울기가 1이므로

$f'(t)=1,\quad 8t-3=1\quad \therefore\ t=\frac{1}{2}$

따라서 접점의 좌표는 $\left(\frac{1}{2},\ \frac{3}{2}\right)$이므로 구하는 접선의 방정식은

$y-\frac{3}{2}=x-\frac{1}{2}\quad \therefore\ y=x+1$

(2) $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+4x-4$라 하면

$f'(x)=-x+4$

접점의 좌표를 $\left(t,\ -\frac{1}{2}t^2+4t-4\right)$라 하면 접선의 기울기가 6이므로

$f'(t)=6,\quad -t+4=6\quad \therefore\ t=-2$

따라서 접점의 좌표는 $(-2,\ -14)$이므로 구하는 접선의 방정식은

$y-(-14)=6\{x-(-2)\}$

$\therefore\ y=6x-2$

(3) $f(x)=x^3-3x^2-5x-1$이라 하면

$f'(x)=3x^2-6x-5$

접점의 좌표를 $(t,\ t^3-3t^2-5t-1)$이라 하면 접선의 기울기가 -5이므로

$f'(t)=-5,\quad 3t^2-6t-5=-5$

$t(t-2)=0\quad \therefore\ t=0$ 또는 $t=2$

따라서 접점의 좌표는 $(0,\ -1)$, $(2,\ -15)$이므로 구하는 접선의 방정식은

$y-(-1)=-5x,\ y-(-15)=-5(x-2)$

$\therefore\ y=-5x-1,\ y=-5x-5$

답 (1) $y=x+1$ (2) $y=6x-2$
(3) $y=-5x-1$, $y=-5x-5$

05 (1) $f(x)=x^2+10$이라 하면

$f'(x)=2x$

접점의 좌표를 $(t,\ t^2+10)$이라 하면 접선의 기울기는

$f'(t)=2t$

이므로 접선의 방정식은

$y-(t^2+10)=2t(x-t)$

$\therefore\ y=2tx-t^2+10$ …… ㉠

직선 ㉠이 점 $(1,\ 2)$를 지나므로

$2=2t-t^2+10,\quad t^2-2t-8=0$

$(t+2)(t-4)=0\quad \therefore\ t=-2$ 또는 $t=4$

Q BOX

$f\left(\frac{1}{2}\right)=1-\frac{3}{2}+2$
$=\frac{3}{2}$

$f(-2)=-2-8-4$
$=-14$

$f(2)=8-12-10-1$
$=-15$

주어진 곡선에 접하고 기울기가 -5인 직선은 2개이다.

$\lim_{\blacksquare\to0}\frac{f(a+\blacksquare)-f(a)}{\blacksquare}$
$=f'(a)$

$t=-2$를 ㉠에 대입하면 접선의 방정식은

$y=-4x+6$

$t=4$를 ㉠에 대입하면 접선의 방정식은

$y=8x-6$

(2) $f(x)=-x^2+x-4$라 하면

$f'(x)=-2x+1$

접점의 좌표를 $(t,\ -t^2+t-4)$라 하면 접선의 기울기는

$f'(t)=-2t+1$

이므로 접선의 방정식은

$y-(-t^2+t-4)=(-2t+1)(x-t)$

$\therefore\ y=(-2t+1)x+t^2-4$ …… ㉠

직선 ㉠이 점 $(0,\ 5)$를 지나므로

$5=t^2-4,\quad t^2=9$

$\therefore\ t=-3$ 또는 $t=3$

$t=-3$을 ㉠에 대입하면 접선의 방정식은

$y=7x+5$

$t=3$을 ㉠에 대입하면 접선의 방정식은

$y=-5x+5$

(3) $f(x)=\frac{1}{3}x^3-3x+2$라 하면

$f'(x)=x^2-3$

접점의 좌표를 $\left(t,\ \frac{1}{3}t^3-3t+2\right)$라 하면 접선의 기울기는

$f'(t)=t^2-3$

이므로 접선의 방정식은

$y-\left(\frac{1}{3}t^3-3t+2\right)=(t^2-3)(x-t)$

$\therefore\ y=(t^2-3)x-\frac{2}{3}t^3+2$ …… ㉠

직선 ㉠이 점 $(2,\ -4)$를 지나므로

$-4=2(t^2-3)-\frac{2}{3}t^3+2$

$\frac{2}{3}t^3-2t^2=0,\quad t^2(t-3)=0$

$\therefore\ t=0$ 또는 $t=3$

$t=0$을 ㉠에 대입하면 접선의 방정식은

$y=-3x+2$

$t=3$을 ㉠에 대입하면 접선의 방정식은

$y=6x-16$

답 (1) $y=-4x+6$, $y=8x-6$
(2) $y=7x+5$, $y=-5x+5$
(3) $y=-3x+2$, $y=6x-16$

06 $f'(2)=-3$이므로

$\lim_{h\to0}\frac{f(2-3h)-f(2)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(2-3h)-f(2)}{-3h}\cdot(-3)$

$=-3f'(2)=-3\cdot(-3)$

$=9$

답 ⑤

07 $f(x)=x^4-10x^2+2$라 하면

$f'(x)=4x^3-20x$

$x=a$인 점에서의 접선이 x축과 평행하므로

$f'(a)=0,\quad 4a^3-20a=0$

$a(a+\sqrt{5})(a-\sqrt{5})=0$

$\therefore a=-\sqrt{5}$ 또는 $a=0$ 또는 $a=\sqrt{5}$

따라서 구하는 합은

$-\sqrt{5}+0+\sqrt{5}=0$ 답 ③

08 두 점 $(-1,\ -1)$, $(2,\ 8)$이 곡선 $y=2x^3+ax^2+bx+c$ 위의 점이므로

$-1=-2+a-b+c,\ 8=16+4a+2b+c$

$\therefore a-b+c=1,\ 4a+2b+c=-8$ …… ㉠

$f(x)=2x^3+ax^2+bx+c$라 하면

$f'(x)=6x^2+2ax+b$

두 점 $(-1,\ -1)$, $(2,\ 8)$에서의 접선이 서로 평행하므로

$f'(-1)=f'(2),\quad 6-2a+b=24+4a+b$

$6a=-18\quad \therefore a=-3$

$a=-3$을 ㉠에 대입하면

$-3-b+c=1,\ -12+2b+c=-8$

$\therefore b-c=-4,\ 2b+c=4$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$b=0,\ c=4$

$\therefore a-b-c=-7$ 답 -7

09 $f(x)=-2x^3+6x^2-4x-5$라 하면

$f'(x)=-6x^2+12x-4=-6(x-1)^2+2$

이므로 이차함수 $f'(x)$는 $x=1$에서 최댓값 2를 갖는다.

$\therefore a=1,\ m=2$

점 $(1,\ b)$가 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$b=f(1)=-2+6-4-5=-5$

$\therefore a+b+m=-2$ 답 ①

10 $f(x)=(x+2)(x-1)^2$이라 하면

$f'(x)=(x-1)^2+2(x+2)(x-1)$

$=3x^2-3$

점 $(2,\ 4)$에서의 접선의 기울기는

$f'(2)=12-3=9$

이므로 접선의 방정식은

$y-4=9(x-2)\quad \therefore y=9x-14$

이 직선이 점 $(1,\ k)$를 지나므로

$k=9-14=-5$ 답 ②

11 $f'(x)=3x^2-6x+a$

점 $(3,\ f(3))$에서의 접선의 기울기가 3이므로

$f'(3)=3,\quad 27-18+a=3\quad \therefore a=-6$

즉 $f(x)=x^3-3x^2-6x+10$이므로

$f(3)=27-27-18+10=-8$

점 $(3,\ -8)$에서의 접선의 방정식은

$y-(-8)=3(x-3)\quad \therefore y=3x-17$

따라서 $b=-17$이므로 $\quad a-b=11$ 답 11

12 $f(x)=x^3-4x+1$이라 하면 $\quad f'(x)=3x^2-4$

점 $(-2,\ 1)$에서의 접선의 기울기는

$f'(-2)=12-4=8$

이므로 직선 l의 방정식은

$y-1=8\{x-(-2)\}\quad \therefore y=8x+17$

점 $(0,\ 1)$에서의 접선의 기울기는 $f'(0)=-4$이므로 직선 m의 방정식은

$y-1=-4x\quad \therefore y=-4x+1$

두 직선 l, m의 교점의 x좌표는 $8x+17=-4x+1$에서

$12x=-16\quad \therefore x=-\frac{4}{3}$

따라서 구하는 교점의 좌표는

$\left(-\frac{4}{3},\ \frac{19}{3}\right)$ 답 ①

13 $f(x)=-2x^3+2x^2+x-3$이라 하면

$f'(x)=-6x^2+4x+1$

점 $\mathrm{A}(1,\ -2)$에서의 접선의 기울기는

$f'(1)=-6+4+1=-1$

이므로 접선의 방정식은

$y-(-2)=-(x-1)\quad \therefore y=-x-1$

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-x-1$이 만나는 점의 x좌표는 $-2x^3+2x^2+x-3=-x-1$에서

$x^3-x^2-x+1=0,\quad (x+1)(x-1)^2=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=1$

따라서 $\mathrm{B}(-1,\ 0)$이므로

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(-1-1)^2+2^2}=2\sqrt{2}$ 답 ④

쌤 한마디

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a,\ f(a))$에서의 접선 $y=g(x)$와 이 곡선이 만나는 접점이 아닌 다른 점의 x좌표

⇨ 방정식 $f(x)=g(x)$의 $x\neq a$인 실근

14 점 $(-1,\ 3)$이 곡선 $y=-3x^2+ax+b$ 위의 점이므로

$3=-3-a+b\quad \therefore a-b=-6$ …… ㉠

$f(x)=-3x^2+ax+b$라 하면 $\quad f'(x)=-6x+a$

점 $(-1,\ 3)$에서의 접선의 기울기는

$f'(-1)=6+a$

이므로 $\quad (6+a)\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)=-1$

$6+a=4\quad \therefore a=-2$

$a=-2$를 ㉠에 대입하면

$-2-b=-6\quad \therefore b=4$

$\therefore ab=-8$ 답 -8

Q BOX

점 $(3,\ -8)$이 직선 $y=3x+b$ 위의 점임을 이용하여 b의 값을 구할 수도 있다.
즉 $-8=9+b$이므로 $b=-17$

x축과 평행한 직선의 기울기는 0이다.

두 직선 $y=mx+n$, $y=m'x+n'$이 평행하면 $m=m',\ n\neq n'$

$y=-4x+1$에 $x=-\frac{4}{3}$를 대입하면

$y=\frac{16}{3}+1=\frac{19}{3}$

1	1	-1	-1	1
		1	0	-1
	1	0	-1	0

$\therefore x^3-x^2-x+1$
$=(x-1)(x^2-1)$
$=(x+1)(x-1)^2$

좌표평면 위의 두 점 $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$ 사이의 거리는 $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

$f(2)=4\cdot1^2=4$

15 $f(x)=x^3-2x^2+3x-4$라 하면

$f'(x)=3x^2-4x+3$

점 $(2, 2)$에서의 접선의 기울기는

$f'(2)=12-8+3=7$

이므로 이 점에서의 접선과 수직인 직선의 기울기는

$-\frac{1}{7}$이다.

즉 점 $(2, 2)$를 지나고 기울기가 $-\frac{1}{7}$인 직선의 방정식은

$y-2=-\frac{1}{7}(x-2) \qquad \therefore y=-\frac{1}{7}x+\frac{16}{7}$

$-\frac{1}{7}x+\frac{16}{7}=0$에서 $\qquad x=16$

따라서 구하는 x절편은 16이다. 답 ③

16 점 $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$이 곡선 $y=ax^2-bx$ 위의 점이므로

$\frac{1}{4}=\frac{1}{4}a-\frac{1}{2}b$

$\therefore a-2b=1$ …… ㉠

$f(x)=2x^3$, $g(x)=ax^2-bx$라 하면

$f'(x)=6x^2$, $g'(x)=2ax-b$

점 $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$에서의 두 접선이 서로 수직이므로

$f'\left(\frac{1}{2}\right)g'\left(\frac{1}{2}\right)=-1, \qquad \frac{3}{2}(a-b)=-1$

$\therefore a-b=-\frac{2}{3}$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\qquad a=-\frac{7}{3}$, $b=-\frac{5}{3}$

$\therefore a+b=-4$ 답 ④

17 $g(x)=3x^2$이라 하면 $\qquad g'(x)=6x$

점 $P(t, 3t^2)$에서의 접선의 기울기는 $g'(t)=6t$이므로

이 점에서의 접선과 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{6t}$이다.

즉 점 P를 지나고 기울기가 $-\frac{1}{6t}$인 직선의 방정식은

$y-3t^2=-\frac{1}{6t}(x-t) \qquad \therefore y=-\frac{1}{6t}x+3t^2+\frac{1}{6}$

따라서 $f(t)=3t^2+\frac{1}{6}$이므로

$\lim_{t\to0}f(t)=\lim_{t\to0}\left(3t^2+\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{6}$ 답 ①

18 $g(x)=-x^3+6x^2-5x-2$라 하면

$g'(x)=-3x^2+12x-5$

접점의 좌표를 $(t, -t^3+6t^2-5t-2)$라 하면 접선의 기울기가 7이므로

$g'(t)=7, \qquad -3t^2+12t-5=7$

$t^2-4t+4=0, \qquad (t-2)^2=0 \qquad \therefore t=2$

즉 접점의 좌표가 $(2, 4)$이므로 접선의 방정식은

$y-4=7(x-2) \qquad \therefore y=7x-10$

따라서 $f(x)=7x-10$이므로

$f(3)=21-10=11$ 답 11

Q BOX

직선이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 $\theta(0°\le\theta<90°)$라 하면
(직선의 기울기) $=\tan\theta$

$f(-1)$
$=-\frac{1}{3}+1-3-1$
$=-\frac{10}{3}$

$g(2)$
$=-8+24-10-2$
$=4$

19 두 점 $(0, -2)$, $(1, -6)$을 지나는 직선의 기울기는

$\frac{-6-(-2)}{1-0}=-4$

$f(x)=2x^2-6$이라 하면 $\qquad f'(x)=4x$

접점의 좌표를 $(t, 2t^2-6)$이라 하면 접선의 기울기가 -4이므로

$f'(t)=-4, \qquad 4t=-4 \qquad \therefore t=-1$

즉 접점의 좌표가 $(-1, -4)$이므로 접선의 방정식은

$y-(-4)=-4\{x-(-1)\}$

$\therefore y=-4x-8$

따라서 구하는 y절편은 -8이다. 답 ①

20 $f(x)=x^2-7x+3$이라 하면

$f'(x)=2x-7$

접점의 좌표를 (t, t^2-7t+3)이라 하면 접선의 기울기는 $\tan 45°=1$이므로

$f'(t)=1, \qquad 2t-7=1 \qquad \therefore t=4$

따라서 접점의 좌표가 $(4, -9)$이므로 접선의 방정식은

$y-(-9)=x-4 \qquad \therefore y=x-13$

이 직선이 점 $(a, 2)$를 지나므로

$2=a-13 \qquad \therefore a=15$ 답 ⑤

21 직선 $x+2y+6=0$, 즉 $y=-\frac{1}{2}x-3$의 기울기가 $-\frac{1}{2}$이므로 이 직선과 수직인 직선의 기울기는 2이다.

$f(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2+3x-1$이라 하면

$f'(x)=x^2+2x+3$

접점의 좌표를 $\left(t, \frac{1}{3}t^3+t^2+3t-1\right)$이라 하면 접선의 기울기가 2이므로

$f'(t)=2, \qquad t^2+2t+3=2$

$t^2+2t+1=0, \qquad (t+1)^2=0$

$\therefore t=-1$

따라서 접점의 좌표가 $\left(-1, -\frac{10}{3}\right)$이므로 접선의 방정식은

$y-\left(-\frac{10}{3}\right)=2\{x-(-1)\}$

$\therefore 6x-3y-4=0$ 답 ③

22 $f(x)=x^3+3x^2+kx$라 하면

$f'(x)=3x^2+6x+k$

접점의 좌표를 (t, t^3+3t^2+kt)라 하면 접선의 기울기는 $f'(t)=3t^2+6t+k$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^3+3t^2+kt)=(3t^2+6t+k)(x-t)$

$\therefore y=(3t^2+6t+k)x-2t^3-3t^2$

이 직선이 직선 $y=2x+4$와 일치해야 하므로

$3t^2+6t+k=2$ …… ㉠

$-2t^3-3t^2=4$ …… ㉡

㉡에서

$2t^3+3t^2+4=0, \quad (t+2)(2t^2-t+2)=0$

$\therefore t=-2$ ($\because 2t^2-t+2>0$)

$t=-2$를 ㉠에 대입하면

$12-12+k=2 \quad \therefore k=2$ 　　답 2

$2t^2-t+2 = 2\left(t-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{15}{8}>0$

23 $f(x)=-x^3-\frac{3}{2}x^2+2$라 하면

$f'(x)=-3x^2-3x$

접점의 좌표를 $\left(t, -t^3-\frac{3}{2}t^2+2\right)$라 하면 접선의 기울기가 -6이므로

$f'(t)=-6, \quad -3t^2-3t=-6$

$t^2+t-2=0, \quad (t+2)(t-1)=0$

$\therefore t=-2$ 또는 $t=1$

(i) $t=-2$일 때, 접점의 좌표는 $(-2, 4)$

이 점은 직선 $y=-6x+a$ 위의 점이므로

$4=12+a \quad \therefore a=-8$

$f(-2)=8-6+2=4$

(ii) $t=1$일 때, 접점의 좌표는 $\left(1, -\frac{1}{2}\right)$

이 점은 직선 $y=-6x+a$ 위의 점이므로

$-\frac{1}{2}=-6+a \quad \therefore a=\frac{11}{2}$

$f(1)=-1-\frac{3}{2}+2=-\frac{1}{2}$

(i), (ii)에서 모든 a의 값의 합은

$-8+\frac{11}{2}=-\frac{5}{2}$ 　　답 ①

24 $f(x)=3x^3+k$라 하면 $\quad f'(x)=9x^2$

접점의 좌표를 $(t, 3t^3+k)$라 하면 접선의 기울기가 9이므로

$f'(t)=9, \quad 9t^2=9, \quad t^2=1$

$\therefore t=-1$ 또는 $t=1$

이때 주어진 곡선과 직선이 제3사분면에서 접하므로

$t=-1$

접점이 제3사분면 위에 있어야 하므로 $t<0$이어야 한다.

따라서 접점의 좌표가 $(-1, -9)$이고 이 점은 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로 $\quad f(-1)=-9$

$y=9x$에 $x=-1$을 대입하면 $y=-9$

$-3+k=-9 \quad \therefore k=-6$ 　　답 ②

25 $f(x)=2x^3-7x+a$라 하면 $\quad f'(x)=6x^2-7$

접점의 좌표를 $(t, 2t^3-7t+a)$라 하면 접선의 기울기가 5이므로

$f'(t)=5, \quad 6t^2-7=5, \quad t^2=2$

$\therefore t=-\sqrt{2}$ 또는 $t=\sqrt{2}$

(i) $t=-\sqrt{2}$일 때, 접점의 좌표는

$(-\sqrt{2}, 3\sqrt{2}+a)$

$f(-\sqrt{2}) = -4\sqrt{2}+7\sqrt{2}+a = 3\sqrt{2}+a$

이 점은 직선 $y=5x+b$ 위의 점이므로

$3\sqrt{2}+a=-5\sqrt{2}+b \quad \therefore a-b=-8\sqrt{2}$

(ii) $t=\sqrt{2}$일 때, 접점의 좌표는

$(\sqrt{2}, -3\sqrt{2}+a)$

$f(\sqrt{2}) = 4\sqrt{2}-7\sqrt{2}+a = -3\sqrt{2}+a$

이 점은 직선 $y=5x+b$ 위의 점이므로

$-3\sqrt{2}+a=5\sqrt{2}+b \quad \therefore a-b=8\sqrt{2}$

(i), (ii)에서 $\quad |a-b|=8\sqrt{2}$ 　　답 $8\sqrt{2}$

26 $f(x)=x^3+2$ $(x>0)$라 하면 $\quad f'(x)=3x^2$

곡선 $y=f(x)$의 접선 중에서 직선 $y=3x-5$와 평행한 접선의 접점의 좌표를 (t, t^3+2) $(t>0)$라 하면 접선의 기울기가 3이므로

$f'(t)=3, \quad 3t^2=3, \quad t^2=1$

$\therefore t=1$ ($\because t>0$)

따라서 접점의 좌표는 $(1, 3)$이고, 점 $(1, 3)$과 직선 $y=3x-5$, 즉 $3x-y-5=0$ 사이의 거리가 구하는 최솟값이므로

$\frac{|3-3-5|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\frac{\sqrt{10}}{2}$ 　　답 $\frac{\sqrt{10}}{2}$

27 두 점 $A(0, 3)$, $B(4, -1)$을 지나는 직선 AB의 방정식은

$y-3=\frac{-1-3}{4-0}x$

$\therefore y=-x+3$

$f(x)=-x^2+3x+3$이라 하면

$f'(x)=-2x+3$

곡선 $y=f(x)$의 접선 중에서 직선 $y=-x+3$과 평행한 접선의 접점의 좌표를 $(t, -t^2+3t+3)$ $(0<t<4)$이라 하면 접선의 기울기가 -1이므로

$f'(t)=-1, \quad -2t+3=-1$

$\therefore t=2$

따라서 접점의 좌표는 $(2, 5)$이고, 점 P의 좌표가 $(2, 5)$일 때 $\triangle ABP$의 넓이가 최대이다.

점 $P(2, 5)$와 직선 $y=-x+3$, 즉 $x+y-3=0$ 사이의 거리는

$\frac{|2+5-3|}{\sqrt{1^2+1^2}}=2\sqrt{2}$

$\overline{AB}=\sqrt{(4-0)^2+(-1-3)^2}=4\sqrt{2}$이므로 $\triangle ABP$의 넓이의 최댓값은

$\frac{1}{2}\cdot 4\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}=8$ 　　답 ④

28 $f(x)=x^3-5x+1$이라 하면

$f'(x)=3x^2-5$

접점의 좌표를 (t, t^3-5t+1)이라 하면 접선의 기울기는 $f'(t)=3t^2-5$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^3-5t+1)=(3t^2-5)(x-t)$

$\therefore y=(3t^2-5)x-2t^3+1$ ······ ㉠

직선 ㉠이 점 $(-1, 1)$을 지나므로

$1=-(3t^2-5)-2t^3+1, \quad 2t^3+3t^2-5=0$

$(t-1)(2t^2+5t+5)=0$

$\therefore t=1$ ($\because 2t^2+5t+5>0$)

$2t^2+5t+5 = 2\left(t+\frac{5}{4}\right)^2+\frac{15}{8} > 0$

$t=1$을 ㉠에 대입하면 접선의 방정식은

$y=-2x-1$

$0=-2x-1$에서 $\quad x=-\frac{1}{2}$

따라서 구하는 x절편은 $-\frac{1}{2}$이다. 　　답 ②

29 $f(x)=x^4+2$라 하면

$f'(x)=4x^3$

접점의 좌표를 $(t,\ t^4+2)$라 하면 접선의 기울기는 $f'(t)=4t^3$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^4+2)=4t^3(x-t)$

$\therefore y=4t^3x-3t^4+2$

이 직선이 점 $(0,\ -1)$을 지나므로

$-1=-3t^4+2,\qquad t^4-1=0$

$(t+1)(t-1)(t^2+1)=0$

$\therefore t=-1$ 또는 $t=1$ $(\because t^2+1>0)$

따라서 두 접점의 좌표는 $(-1,\ 3),\ (1,\ 3)$이므로 두 접점 사이의 거리는

$|1-(-1)|=2$

답 ④

30 $f(x)=-x^3+8x+16$이라 하면

$f'(x)=-3x^2+8$

접점의 좌표를 $(t,\ -t^3+8t+16)$이라 하면 접선의 기울기는 $f'(t)=-3t^2+8$이므로 접선의 방정식은

$y-(-t^3+8t+16)=(-3t^2+8)(x-t)$

$\therefore y=(-3t^2+8)x+2t^3+16$ ...... ㉠

직선 ㉠이 원점을 지나므로

$0=2t^3+16,\qquad t^3+8=0$

$(t+2)(t^2-2t+4)=0$

$\therefore t=-2$ $(\because t^2-2t+4>0)$

$t=-2$를 ㉠에 대입하면 접선의 방정식은

$y=-4x$

따라서 이 접선 위의 점의 좌표인 것은 ②이다.

답 ②

31 $f(x)=\frac{1}{4}x^2+a$라 하면

$f'(x)=\frac{1}{2}x$

접점의 좌표를 $\left(t,\ \frac{1}{4}t^2+a\right)$라 하면 접선의 기울기는 $f'(t)=\frac{1}{2}t$이므로 접선의 방정식은

$y-\left(\frac{1}{4}t^2+a\right)=\frac{1}{2}t(x-t)$

$\therefore y=\frac{1}{2}tx-\frac{1}{4}t^2+a$

이 직선이 점 $(-2,\ 0)$을 지나므로

$0=-t-\frac{1}{4}t^2+a$

$\therefore t^2+4t-4a=0$ ...... ㉠

t에 대한 이차방정식 ㉠의 두 근을 $t_1,\ t_2$라 하면 두 접선이 서로 수직이므로

$f'(t_1)f'(t_2)=-1,\qquad \frac{1}{2}t_1\cdot\frac{1}{2}t_2=-1$

$\therefore t_1t_2=-4$

이때 ㉠에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$t_1t_2=-4a$

이므로

$-4a=-4\qquad \therefore a=1$

답 1

Q BOX

$f(-2)=g(-2)$
$=-2$

t^2-2t+4
$=(t-1)^2+3>0$

$f(1)=g(1)=4$

32 (1) $f(x)=ax^3+2x,\ g(x)=x^2+bx$라 하면

$f'(x)=3ax^2+2,\ g'(x)=2x+b$

두 곡선이 $x=-2$인 점에서 공통인 접선을 가지므로

$f(-2)=g(-2)$에서

$-8a-4=4-2b$

$\therefore 4a-b=-4$ ...... ㉠

$f'(-2)=g'(-2)$에서

$12a+2=-4+b$

$\therefore 12a-b=-6$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-\frac{1}{4},\ b=3$

(2) 두 곡선 $y=-\frac{1}{4}x^3+2x,\ y=x^2+3x$는 점 $(-2,\ -2)$에서 공통인 접선을 갖고 접선의 기울기는 $f'(-2)=g'(-2)=-1$이므로 공통인 접선의 방정식은

$y-(-2)=-\{x-(-2)\}$

$\therefore y=-x-4$

답 (1) $a=-\frac{1}{4},\ b=3$ (2) $y=-x-4$

33 $f(x)=-2x^3+6,\ g(x)=-3x^2+7$이라 하면

$f'(x)=-6x^2,\ g'(x)=-6x$

두 곡선이 $x=t$인 점에서 공통인 접선을 가진다고 하면

$f(t)=g(t)$에서 $\quad -2t^3+6=-3t^2+7$

$2t^3-3t^2+1=0,\qquad (2t+1)(t-1)^2=0$

$\therefore t=-\frac{1}{2}$ 또는 $t=1$ ...... ㉠

$f'(t)=g'(t)$에서 $\quad -6t^2=-6t$

$t^2-t=0,\qquad t(t-1)=0$

$\therefore t=0$ 또는 $t=1$ ...... ㉡

㉠, ㉡에서 $\quad t=1$

따라서 점 $(1,\ 4)$에서 두 곡선은 공통인 접선을 갖고 접선의 기울기는 $f'(1)=g'(1)=-6$이므로 공통인 접선의 방정식은

$y-4=-6(x-1)\qquad \therefore y=-6x+10$

즉 $m=-6,\ n=10$이므로

$m-n=-16$

답 ②

34 $f(x)=x^3-8,\ g(x)=\frac{3}{2}x^3-6x$라 하면

$f'(x)=3x^2,\ g'(x)=\frac{9}{2}x^2-6$

두 곡선이 $x=t$인 점에서 공통인 접선을 가진다고 하면

$f(t)=g(t)$에서 $\quad t^3-8=\frac{3}{2}t^3-6t$

$t^3-12t+16=0,\qquad (t+4)(t-2)^2=0$

$\therefore t=-4$ 또는 $t=2$ ...... ㉠

$f'(t)=g'(t)$에서 $\quad 3t^2=\frac{9}{2}t^2-6$

$t^2=4\qquad \therefore t=-2$ 또는 $t=2$ ...... ㉡

㉠, ㉡에서 $\quad t=2$

W 04 도함수의 활용 (1)

즉 점 (2, 0)에서 두 곡선은 공통인 접선을 갖고 접선의 기울기는 $f'(2)=g'(2)=12$이므로 공통인 접선과 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{12}$이다.

$f(2)=g(2)=0$

따라서 점 (2, 0)을 지나고 기울기가 $-\frac{1}{12}$인 직선의 방정식은

$y=-\frac{1}{12}(x-2)\qquad \therefore x+12y-2=0$

즉 $a=1$, $b=12$이므로

$a+b=13$ 답 ⑤

35 $f(x)=x^2-8x+5$라 하면

$f'(x)=2x-8$

접점의 좌표를 $(t,\ t^2-8t+5)$라 하면 접선의 기울기가 -2이므로

$f'(t)=-2,\qquad 2t-8=-2$

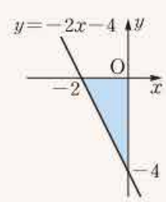
$\therefore t=3$

즉 접점의 좌표가 $(3,\ -10)$이므로 접선의 방정식은

$y-(-10)=-2(x-3)$

$\therefore y=-2x-4$

따라서 접선의 x절편이 -2, y절편이 -4이므로 구하는 도형의 넓이는



$\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 4=4$ 답 ④

36 $f(x)=\frac{1}{4}x^4-x^2+3$이라 하면

$f'(x)=x^3-2x$

점 $\mathrm{P}(-2,\ 3)$에서의 접선의 기울기는

$f'(-2)=-8+4=-4$

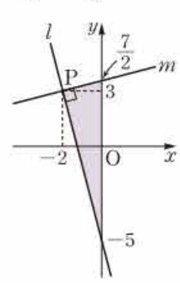
이므로 직선 l의 방정식은

$y-3=-4\{x-(-2)\}\qquad \therefore y=-4x-5$

직선 l에 수직인 직선의 기울기는 $\frac{1}{4}$이므로 점 P를 지나고 기울기가 $\frac{1}{4}$인 직선 m의 방정식은

$y-3=\frac{1}{4}\{x-(-2)\}\qquad \therefore y=\frac{1}{4}x+\frac{7}{2}$

따라서 오른쪽 그림에서 구하는 도형의 넓이는



$\frac{1}{2}\cdot\left\{\frac{7}{2}-(-5)\right\}\cdot 2=\frac{17}{2}$

답 $\frac{17}{2}$

37 $f(x)=-x^2+6x+k$라 하면

$f'(x)=-2x+6$

점 $(2,\ a)$에서의 접선의 기울기가

$f'(2)=-4+6=2$

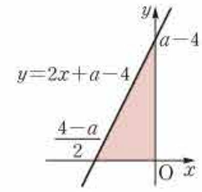
이므로 접선의 방정식은

$y-a=2(x-2)\qquad \therefore y=2x+a-4$

$a>4$이므로

$\frac{4-a}{2}<0,\ a-4>0$

따라서 접선의 x절편이 $\frac{4-a}{2}$, y절편이 $a-4$이고 오른쪽 그림에서 접선과 x축 및 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이가 16이므로



$\frac{1}{2}\cdot\frac{a-4}{2}\cdot(a-4)=16$

$(a-4)^2=64,\qquad a-4=8\ (\because a-4>0)$

$\therefore a=12$

점 $(2,\ 12)$가 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$12=-4+12+k\qquad \therefore k=4$

$\therefore a+k=16$ 답 ⑤

08 평균값 정리

31쪽

01 (1) 함수 $f(x)=-x^2+7x-9$는 닫힌구간 $[1,\ 6]$에서 연속이고 열린구간 $(1,\ 6)$에서 미분가능하며 $f(1)=f(6)=-3$이므로 롤의 정리에 의하여 $f'(c)=0$인 c가 열린구간 $(1,\ 6)$에 적어도 하나 존재한다.

이때 $f'(x)=-2x+7$이므로

$-2c+7=0\qquad \therefore c=\frac{7}{2}$

(2) 함수 $f(x)=x^3+3x^2+2$는 닫힌구간 $[-2,\ 1]$에서 연속이고 열린구간 $(-2,\ 1)$에서 미분가능하며 $f(-2)=f(1)=6$이므로 롤의 정리에 의하여 $f'(c)=0$인 c가 열린구간 $(-2,\ 1)$에 적어도 하나 존재한다.

이때 $f'(x)=3x^2+6x$이므로

$3c^2+6c=0,\qquad c(c+2)=0$

$\therefore c=0\ (\because -2<c<1)$

답 (1) $\frac{7}{2}$ (2) 0

02 (1) 함수 $f(x)=\frac{1}{2}x^2-6x$는 닫힌구간 $[-4,\ 2]$에서 연속이고 열린구간 $(-4,\ 2)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$\frac{f(2)-f(-4)}{2-(-4)}=f'(c)$

인 c가 열린구간 $(-4,\ 2)$에 적어도 하나 존재한다.

이때 $f'(x)=x-6$이므로

$f(2)=2-12=-10,$
$f(-4)=8+24=32$

$\frac{-10-32}{2-(-4)}=c-6\qquad \therefore c=-1$

(2) 함수 $f(x)=-x^3+5x^2-2$는 닫힌구간 $[-1,\ 3]$에서 연속이고 열린구간 $(-1,\ 3)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$\frac{f(3)-f(-1)}{3-(-1)}=f'(c)$

인 c가 열린구간 $(-1,\ 3)$에 적어도 하나 존재한다.

이때 $f'(x)=-3x^2+10x$이므로

$$\frac{16-4}{3-(-1)}=-3c^2+10c$$

$$3c^2-10c+3=0, \qquad (3c-1)(c-3)=0$$

$$\therefore c=\frac{1}{3}\ (\because -1<c<3)$$

답 (1) -1 (2) $\frac{1}{3}$

03 함수 $f(x)=x^4-4x^2+1$은 닫힌구간 $[-2, 2]$에서 연속이고 열린구간 $(-2, 2)$에서 미분가능하며 $f(-2)=f(2)=1$이므로 롤의 정리에 의하여 $f'(c)=0$인 c가 열린구간 $(-2, 2)$에 적어도 하나 존재한다.
이때 $f'(x)=4x^3-8x$이므로

$$4c^3-8c=0, \qquad c(c+\sqrt{2})(c-\sqrt{2})=0$$

$$\therefore c=-\sqrt{2} \text{ 또는 } c=0 \text{ 또는 } c=\sqrt{2}$$

따라서 상수 c의 개수는 3이다. 답 3

04 ② 열린구간 $(-1, 2)$에서 미분가능하지 않은 점이 존재하므로 롤의 정리를 적용할 수 없다.

답 ②

함수 $y=f(x)$의 그래프에서 $f(x)$가 닫힌구간 $[-1, 2]$에서 연속인지, 열린구간 $(-1, 2)$에서 미분가능한지, $f(-1)=f(2)$인지 확인한다.

05 $f(x)=0$에서 $\quad x^3-9x=0$

$$x(x+3)(x-3)=0$$

$$\therefore x=-3 \text{ 또는 } x=0 \text{ 또는 } x=3$$

$$\therefore \alpha=0, \beta=3$$

함수 $f(x)=x^3-9x$는 닫힌구간 $[0, 3]$에서 연속이고 열린구간 $(0, 3)$에서 미분가능하며 $f(0)=f(3)=0$이므로 롤의 정리에 의하여 $f'(c)=0$인 c가 열린구간 $(0, 3)$에 적어도 하나 존재한다.
이때 $f'(x)=3x^2-9$이므로

$$3c^2-9=0, \qquad c^2=3$$

$$\therefore c=\sqrt{3}\ (\because 0<c<3)$$

답 ⑤

06 함수 $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+kx$는 닫힌구간 $[-4, 0]$에서 연속이고 열린구간 $(-4, 0)$에서 미분가능하다.
이때 롤의 정리를 만족시키려면 $f(-4)=f(0)$이어야 하므로

$$-8-4k=0 \qquad \therefore k=-2$$

한편 $f'(c)=0$인 c가 열린구간 $(-4, 0)$에 적어도 하나 존재한다.
$f(x)=-\frac{1}{2}x^2-2x$에서 $f'(x)=-x-2$이므로

$$-c-2=0 \qquad \therefore c=-2$$

답 -2

07 답 ①

08 함수 $f(x)=2x^3-5x$는 닫힌구간 $[-2, 2]$에서 연속이고 열린구간 $(-2, 2)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$$\frac{f(2)-f(-2)}{2-(-2)}=f'(c)$$

인 c가 열린구간 $(-2, 2)$에 적어도 하나 존재한다.
이때 $f'(x)=6x^2-5$이므로

$$\frac{6-(-6)}{2-(-2)}=6c^2-5, \qquad c^2=\frac{4}{3}$$

$$\therefore c=-\frac{2\sqrt{3}}{3} \text{ 또는 } c=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$\sqrt{9}<\sqrt{12}<\sqrt{16}$이므로 $3<2\sqrt{3}<4$
$\therefore 1<\frac{2\sqrt{3}}{3}<\frac{4}{3}$, $-\frac{4}{3}<-\frac{2\sqrt{3}}{3}<-1$
따라서 $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$, $\frac{2\sqrt{3}}{3}$은 모두 열린구간 $(-2, 2)$에 속한다.

따라서 $\alpha=-\frac{2\sqrt{3}}{3}$, $\beta=\frac{2\sqrt{3}}{3}$이므로

$$\beta-\alpha=\frac{4\sqrt{3}}{3}$$

답 ③

09 닫힌구간 $[a, 2]$에서 평균값 정리를 만족시키는 상수가 $-\frac{1}{2}$이므로

$$\frac{f(2)-f(a)}{2-a}=f'\left(-\frac{1}{2}\right)$$

이때 $f'(x)=6x-8$이므로

$$\frac{0-(3a^2-8a+4)}{2-a}=-3-8$$

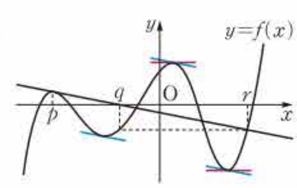
$$-3a^2+8a-4=-22+11a$$

$$a^2+a-6=0, \qquad (a+3)(a-2)=0$$

$$\therefore a=-3\ \left(\because a<-\frac{1}{2}\right)$$

답 ③

10



닫힌구간 $[q, r]$에서 롤의 정리를 만족시키는 상수 c_1은 x축과 평행한 접선을 갖는 점의 x좌표이다.
위의 그림과 같이 열린구간 (q, r)에서 x축과 평행한 접선을 2개 그을 수 있으므로

$$m=2$$

닫힌구간 $[p, r]$에서 평균값 정리를 만족시키는 상수 c_2는 두 점 $(p, f(p))$, $(r, f(r))$를 지나는 직선과 평행한 접선을 갖는 점의 x좌표이다.
위의 그림과 같이 열린구간 (p, r)에서 두 점 $(p, f(p))$, $(r, f(r))$를 지나는 직선과 평행한 접선을 3개 그을 수 있으므로

$$n=3$$

$$\therefore m+n=5$$

답 5

11 $f(2)-f(-1)=3f'(c)$에서

$$\frac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)}=f'(c)$$

이때 $f'(x)=3x^2+2$이므로

$$\frac{11-(-4)}{2-(-1)}=3c^2+2, \qquad c^2=1$$

$$\therefore c=1\ (\because -1<c<2)$$

답 ④

참고 함수 $f(x)=x^3+2x-1$은 닫힌구간 $[-1, 2]$에서 연속이고 열린구간 $(-1, 2)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$$\frac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)}=f'(c)$$

인 c가 열린구간 $(-1, 2)$에 적어도 하나 존재한다.

05 도함수의 활용(2)

09 함수의 증가와 감소 Ⓦ 33쪽

01 (1) $0 \le x_1 < x_2$인 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여

$$\begin{aligned} f(x_1)-f(x_2) &= -2x_1^2-(-2x_2^2) \\ &= -2(x_1^2-x_2^2) \\ &= -2(x_1+x_2)(x_1-x_2)>0 \end{aligned}$$

$x_1+x_2>0$, $x_1-x_2<0$

$\therefore f(x_1)>f(x_2)$

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $[0, \infty)$에서 감소한다.

(2) $-3 \le x_1 < x_2$인 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여

$$\begin{aligned} f(x_1)-f(x_2) &= (x_1^2+6x_1)-(x_2^2+6x_2) \\ &= (x_1^2-x_2^2)+6(x_1-x_2) \\ &= (x_1+x_2)(x_1-x_2)+6(x_1-x_2) \\ &= (x_1+x_2+6)(x_1-x_2)<0 \end{aligned}$$

$x_1 \ge -3$, $x_2 > -3$이므로 $x_1+x_2>-6$ $\therefore x_1+x_2+6>0$

$\therefore f(x_1)<f(x_2)$

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $[-3, \infty)$에서 증가한다.

(3) $x_1<x_2<1$인 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여

$$\begin{aligned} f(x_1)-f(x_2) &= \frac{1}{x_1-1}-\frac{1}{x_2-1} \\ &= \frac{x_2-x_1}{(x_1-1)(x_2-1)}>0 \end{aligned}$$

$x_2-x_1>0$, $x_1-1<0$, $x_2-1<0$

$\therefore f(x_1)>f(x_2)$

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty, 1)$에서 감소한다.

답 (1) 감소 (2) 증가 (3) 감소

02 (1) $f'(x)=2x-4$

$f'(x)=0$에서 $x=2$

x	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-5	↗

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $[2, \infty)$에서 증가하고, 구간 $(-\infty, 2]$에서 감소한다.

(2) $f'(x)=-3x^2+6x+9=-3(x+1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=3$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	-7	↗	25	↘

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $[-1, 3]$에서 증가하고, 구간 $(-\infty, -1]$, $[3, \infty)$에서 감소한다.

(3) $f'(x)=8x^3-8x=8x(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	1	↗	3	↘	1	↗

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $[-1, 0]$, $[1, \infty)$에서 증가하고, 구간 $(-\infty, -1]$, $[0, 1]$에서 감소한다.

답 풀이 참조

03 $f'(x)=x^2+2x-3=(x+3)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-3$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	10	↘	$-\frac{2}{3}$	↗

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $[-3, 1]$에서 감소하므로

$\alpha=-3$, $\beta=1$

$\therefore \alpha+\beta=-2$

답 ①

04 ① 구간 $(-4, -3)$에서 $f'(x)>0$이므로 $f(x)$는 증가한다.

② 구간 $(-2, 0)$에서 $f'(x)<0$이므로 $f(x)$는 감소한다.

③ 구간 $(0, 1)$에서 $f'(x)>0$이므로 $f(x)$는 증가한다.

④ 구간 $(1, 2)$에서 $f'(x)>0$이므로 $f(x)$는 증가한다.

⑤ 구간 $\left(\frac{10}{3}, 4\right)$에서 $f'(x)<0$이므로 $f(x)$는 감소한다.

답 ③

05 $f'(x)=-6x^2+2ax+6$

함수 $f(x)$가 감소하는 x의 값의 범위가 $x \le b$ 또는 $x \ge 2$이므로 이차부등식 $f'(x) \le 0$의 해가 $x \le b$ 또는 $x \ge 2$이다.

즉 이차방정식 $f'(x)=0$의 두 근이 b, 2이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$b+2=-\frac{2a}{-6}=\frac{a}{3}$, $b \cdot 2=\frac{6}{-6}=-1$

$\therefore a=\frac{9}{2}$, $b=-\frac{1}{2}$

$\therefore a+b=4$

답 4

06 ㄱ. $f'(x)=3x^2-12x+12=3(x-2)^2$

$f'(x)=0$에서 $x=2$

x	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	↗	9	↗

따라서 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가한다.

ㄴ. $g'(x)=x^2-4=(x+2)(x-2)$

$g'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	↗	$\frac{16}{3}$	↘	$-\frac{16}{3}$	↗

따라서 함수 $g(x)$는 구간 $(-\infty, -2]$, $[2, \infty)$에서 증가하고, 구간 $[-2, 2]$에서 감소한다.

ㄷ. $h'(x)=3x^2+18x+30=3(x+3)^2+3>0$

따라서 함수 $h(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가한다.

이상에서 실수 전체의 집합에서 증가하는 함수인 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ④

07 함수 $f(x)$가 구간 $(-\infty, \infty)$에서 증가하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x) \geq 0$이어야 한다.
$f'(x)=x^2+4x+2k$이므로 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=2^2-2k \leq 0 \qquad \therefore k \geq 2$

따라서 실수 k의 최솟값은 2이다. 답 ①

> 모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $ax^2+bx+c \geq 0\,(a>0)$이 성립하려면 $b^2-4ac \leq 0$

08 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 감소하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x) \leq 0$이어야 한다.
$f'(x)=-6x^2+2ax-1$이므로 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=a^2-(-6)\cdot(-1) \leq 0$

$a^2-6 \leq 0, \qquad (a+\sqrt{6})(a-\sqrt{6}) \leq 0$

$\therefore -\sqrt{6} \leq a \leq \sqrt{6}$

따라서 정수 a는 $-2, -1, 0, 1, 2$의 5개이다. 답 ⑤

> 모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $ax^2+bx+c \leq 0\,(a<0)$이 성립하려면 $b^2-4ac \leq 0$

> $\sqrt{6}=2.4\times\times\times$이므로 $-2.4\times\times\times \leq a \leq 2.4\times\times\times$

09 함수 $f(x)$의 역함수가 존재하려면 $f(x)$가 일대일대응이어야 한다.
이때 최고차항의 계수가 양수이므로 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가해야 한다.
즉 모든 실수 x에 대하여 $f'(x) \geq 0$이어야 한다.
$f'(x)=2x^2-6x-k$이므로 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

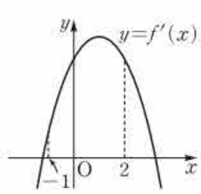
$\frac{D}{4}=(-3)^2-2\cdot(-k) \leq 0, \qquad 9+2k \leq 0$

$\therefore k \leq -\frac{9}{2}$

따라서 정수 k의 최댓값은 -5이다. 답 -5

> 역함수가 존재하는 삼차함수 $g(x)$의 최고차항의 계수가 양수이면 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가하고, 음수이면 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 감소한다.

10 함수 $f(x)$가 구간 $(-1, 2)$에서 증가하려면 이 구간에서 $f'(x) \geq 0$이어야 한다.
$f'(x)=-3x^2+6x+2a-3$이고, 오른쪽 그림에서



$f'(-1) \geq 0$이어야 하므로

$-3-6+2a-3 \geq 0$

$\therefore a \geq 6 \qquad \cdots\cdots ㉠$

$f'(2) \geq 0$이어야 하므로

$-12+12+2a-3 \geq 0$

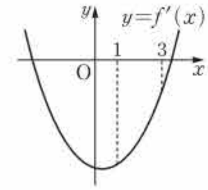
$\therefore a \geq \frac{3}{2} \qquad \cdots\cdots ㉡$

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $\quad a \geq 6$

따라서 a의 최솟값은 6이다. 답 ④

> $y=-3x^2+6x+2a-3$
> $=-3(x-1)^2+2a$
> 의 그래프는 위로 볼록하고 축의 방정식이 $x=1$인 포물선이다.

11 함수 $f(x)$가 $1<x<3$에서 감소하려면 $1<x<3$에서 $f'(x) \leq 0$이어야 한다.
$f'(x)=3x^2-2x+4a$이고, 오른쪽 그림에서



> $y=3x^2-2x+4a$
> $=3\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+4a-\frac{1}{3}$
> 의 그래프는 아래로 볼록하고 축의 방정식이 $x=\frac{1}{3}$인 포물선이다.

$f'(1) \leq 0$이어야 하므로

$3-2+4a \leq 0$

$\therefore a \leq -\frac{1}{4} \qquad \cdots\cdots ㉠$

$f'(3) \leq 0$이어야 하므로

$27-6+4a \leq 0$

$\therefore a \leq -\frac{21}{4} \qquad \cdots\cdots ㉡$

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

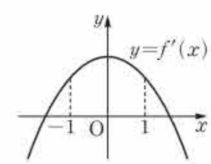
$a \leq -\frac{21}{4}$

따라서 정수 a의 최댓값은 -6이다. 답 -6

쌤 한마디

함수 $f'(x)$는 구간 $\left[\frac{1}{3}, \infty\right)$에서 증가하고 $\frac{1}{3}<1<3$이므로 $f'(3) \leq 0$이면 $f'(1) \leq 0$도 성립함을 알 수 있다. 즉 $f'(3) \leq 0$을 만족시키는 a의 값의 범위만 생각해도 된다.

12 함수 $f(x)$가 구간 $(-1, 1)$에서 증가하려면 이 구간에서 $f'(x) \geq 0$이어야 한다.
$f'(x)=-x^2+2ax+3$이고, 오른쪽 그림에서



$f'(-1) \geq 0$이어야 하므로

$-1-2a+3 \geq 0$

$\therefore a \leq 1 \qquad \cdots\cdots ㉠$

$f'(1) \geq 0$이어야 하므로

$-1+2a+3 \geq 0$

$\therefore a \geq -1 \qquad \cdots\cdots ㉡$

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$-1 \leq a \leq 1$

따라서 a의 값이 아닌 것은 ⑤이다. 답 ⑤

10 함수의 극대와 극소

35쪽

01 답 (1) 5 (2) 0

02 (1) $f'(x)=3x^2+12x=3x(x+4)$

$f'(x)=0$에서 $\qquad x=-4$ 또는 $x=0$

x	$\cdots$	-4	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	20	↘	-12	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-4$에서 극댓값 20, $x=0$에서 극솟값 -12를 갖는다.

(2) $f'(x)=-12x^2+6x+6=-6(2x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $\qquad x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	$\frac{13}{4}$	↗	10	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극댓값 10,

$x=-\frac{1}{2}$에서 극솟값 $\frac{13}{4}$을 갖는다.

(3) $f'(x)=4x^3-16x=4x(x+2)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-7	↗	9	↘	-7	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값 9, $x=-2$, $x=2$에서 극솟값 -7을 갖는다.

답 (1) 극댓값: 20, 극솟값: -12

(2) 극댓값: 10, 극솟값: $\frac{13}{4}$

(3) 극댓값: 9, 극솟값: -7

03 $f'(x)=12x^3-24x^2-36x$

$=12x(x+1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=3$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	3	↗	10	↘	-125	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$, $x=3$에서 극솟값을 가지므로 구하는 합은

$-1+3=2$ 답 ③

04 $f'(x)=-4x^3-6x^2+4x$

$=-2x(x+2)(2x-1)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=\frac{1}{2}$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	8	↘	0	↗	$\frac{3}{16}$	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 극댓값 8, $x=\frac{1}{2}$에서 극댓값 $\frac{3}{16}$을 가지므로 모든 극댓값의 곱은

함수의 극댓값은 여러 개 존재할 수 있다.

$8\cdot\frac{3}{16}=\frac{3}{2}$ 답 ②

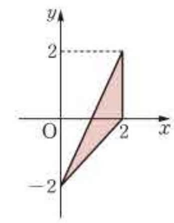
05 $f'(x)=-3x^2+6x=-3x(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=0$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	-2	↗	2	↘

Q BOX

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극댓값 2, $x=0$에서 극솟값 -2를 가지므로 오른쪽 그림에서 세 점 $(2,\ 2)$, $(0,\ -2)$, $(2,\ 0)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이는



$\frac{1}{2}\cdot2\cdot2=2$ 답 2

06 $f'(x)=-3x^2+4ax-b$

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극댓값을 갖고, $x=-2$에서 극솟값을 가지므로

$f'(1)=0,\ f'(-2)=0$

미분가능한 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극값을 가지면 $f'(a)=0$

$f'(1)=0$에서 $\quad -3+4a-b=0$

$\therefore\ 4a-b=3$ …… ㉠

$f'(-2)=0$에서 $\quad -12-8a-b=0$

$\therefore\ 8a+b=-12$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-\frac{3}{4},\ b=-6$

따라서 $f(x)=-x^3-\frac{3}{2}x^2+6x-4$이므로 함수 $f(x)$의 극솟값은

$f(-2)=8-6-12-4=-14$ 답 ①

07 $f'(x)=6x^2-6x-12=6(x+1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-1$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$k+7$	↘	$k-20$	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값 $k+7$, $x=2$에서 극솟값 $k-20$을 갖는다.

이때 극댓값과 극솟값의 절댓값이 같고 그 부호가 서로 다르므로

$(k+7)+(k-20)=0,\quad 2k-13=0$

절댓값이 같고 그 부호가 서로 다른 두 수의 합은 0이다.

$\therefore\ k=\frac{13}{2}$ 답 ⑤

08 함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 극솟값 6을 가지므로

$f(-1)=6,\ f'(-1)=0$

$f(-1)=6$에서 $\quad -a+b+c=6$

$\therefore\ a-b-c=-6$ …… ㉠

$f'(x)=3ax^2+2bx$이므로 $f'(-1)=0$에서

$3a-2b=0$ …… ㉡

또 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1,\ f(1))$에서의 접선의 기울기가 -12이므로 $f'(1)=-12$에서

$3a+2b=-12$ …… ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$a=-2,\ b=-3$

$a=-2,\ b=-3$을 ㉠에 대입하면

$-2+3-c=-6 \quad \therefore\ c=7$

$\therefore\ a+b+c=2$ 답 ④

09 $f'(x)=12x^2-6ax-6a^2=6(2x+a)(x-a)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-\dfrac{a}{2}$ 또는 $x=a$

a가 양수이므로
$-\dfrac{a}{2}<0,\ a>0$

x	$\cdots$	$-\dfrac{a}{2}$	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$\dfrac{7}{4}a^3+3$	↘	$-5a^3+3$	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-\dfrac{a}{2}$에서 극댓값 $\dfrac{7}{4}a^3+3$, $x=a$에서 극솟값 $-5a^3+3$을 갖는다.

이때 극댓값과 극솟값의 합이 $\dfrac{11}{4}$이므로

$$\left(\frac{7}{4}a^3+3\right)+(-5a^3+3)=\frac{11}{4}$$

$$a^3-1=0, \qquad (a-1)(a^2+a+1)=0$$

$$\therefore a=1\ (\because a^2+a+1>0)$$

답 1

10 $f'\left(-\dfrac{1}{2}\right)=0$, $f'(4)=0$이고 $x=-\dfrac{1}{2}$, $x=4$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 $f(x)$는 $x=-\dfrac{1}{2}$, $x=4$에서 극솟값을 갖는다.

따라서 구하는 x의 값의 곱은

$$-\frac{1}{2}\cdot 4=-2$$

답 -2

참고 $f'(-2)=0$, $f'(2)=0$이고 $x=-2$, $x=2$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 $f(x)$는 $x=-2$, $x=2$에서 극댓값을 갖는다.
또 $f'(1)=0$이지만 $x=1$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌지 않으므로 $f(x)$는 $x=1$에서 극값을 갖지 않는다.

11 $y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표가 0, 3이므로 $f'(x)=0$에서 $\quad x=0$ 또는 $x=3$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$이므로 $f'(0)=0$에서

$$c=0$$

$f'(3)=0$에서 $\quad 27a+6b+c=0$

$$\therefore 9a+2b=0 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$f(0)=-1$에서 $\quad d=-1$

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극솟값 -1을 갖는다.

따라서 $f(x)=ax^3+bx^2-1$이므로 $f(3)=8$에서

함수 $f(x)$는 $x=3$에서 극댓값 8을 갖는다.

$$27a+9b-1=8$$

$$\therefore 3a+b=1 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad a=-\dfrac{2}{3},\ b=3$

$$\therefore a+b+c+d=\frac{4}{3}$$

답 $\dfrac{4}{3}$

12 ㄱ. 구간 $(d,\ e)$에서 $f'(x)>0$이므로 $f(x)$는 증가한다.

주어진 그래프는 $f(x)$의 그래프가 아니라 $f'(x)$의 그래프임에 주의한다.

ㄴ. $x=c$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌지 않으므로 $f(x)$는 $x=c$에서 극값을 갖지 않는다.

ㄷ. $f'(b)=0$, $f'(e)=0$이고 $x=b$, $x=e$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 $f(x)$는 $x=b$, $x=e$에서 극댓값을 갖는다.
$f'(d)=0$, $f'(g)=0$이고 $x=d$, $x=g$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 $f(x)$는 $x=d$, $x=g$에서 극솟값을 갖는다.
따라서 구간 $(a,\ h)$에서 극댓값과 극솟값을 갖는 x의 값의 개수는 모두 2로 서로 같다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

11 함수의 그래프

W 37쪽

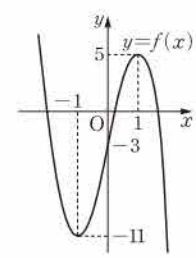
01 (1) $f'(x)=-12x^2+12=-12(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-1$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	-11	↗	5	↘

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

$f(0)=-3$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 점 $(0,\ -3)$을 지난다.

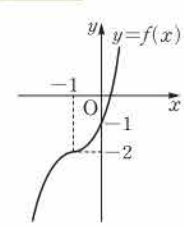


(2) $f'(x)=3x^2+6x+3=3(x+1)^2$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	↗	-2	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

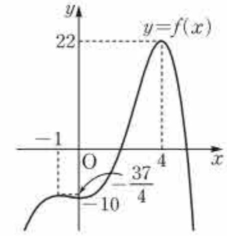


(3) $f'(x)=-x^3+3x^2+4x=-x(x+1)(x-4)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=4$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	$-\dfrac{37}{4}$	↘	-10	↗	22	↘

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



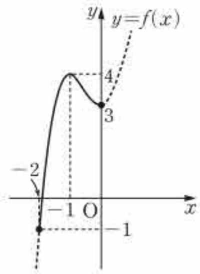
답 풀이 참조

02 (1) $f'(x)=6x^2+6x=6x(x+1)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-1$ 또는 $x=0$

x	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	0
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	-1	↗	4	↘	3

따라서 구간 $[-2, 0]$에서 함수 $f(x)$는 $x=-1$일 때 최댓값 4, $x=-2$일 때 최솟값 -1을 갖는다.

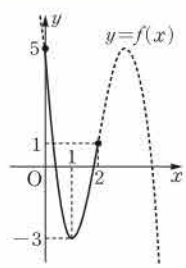


(2) $f'(x)=-6x^2+24x-18=-6(x-1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=1$ ($\because 0\le x\le 2$)

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	5	↘	-3	↗	1

따라서 구간 $[0, 2]$에서 함수 $f(x)$는 $x=0$일 때 최댓값 5, $x=1$일 때 최솟값 -3을 갖는다.

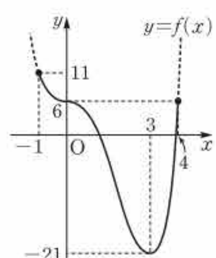


(3) $f'(x)=4x^3-12x^2=4x^2(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=0$ 또는 $x=3$

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	3	$\cdots$	4
$f'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	11	↘	6	↘	-21	↗	6

따라서 구간 $[-1, 4]$에서 함수 $f(x)$는 $x=-1$일 때 최댓값 11, $x=3$일 때 최솟값 -21을 갖는다.



답 (1) 최댓값: 4, 최솟값: -1

(2) 최댓값: 5, 최솟값: -3

(3) 최댓값: 11, 최솟값: -21

03 (1) 상자의 밑면은 한 변의 길이가 $6-2x$인 정사각형이다.

이때 $x>0$, $6-2x>0$이므로

$0<x<3$

(2) 상자의 부피를 $V(x)$라 하면

$V(x)=x(6-2x)^2=4x^3-24x^2+36x$

상자는 밑면이 한 변의 길이가 $6-2x$인 정사각형이고 높이가 x인 직육면체이므로 부피는 $(6-2x)^2\cdot x$

(3) $V'(x)=12x^2-48x+36=12(x-1)(x-3)$

$V'(x)=0$에서 $\quad x=1$ ($\because 0<x<3$)

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	3
$V'(x)$		$+$	0	$-$	
$V(x)$		↗	16	↘	

따라서 $0<x<3$에서 $V(x)$는 $x=1$일 때 최댓값 16을 가지므로 상자의 부피의 최댓값은 16이다.

답 (1) $0<x<3$ (2) $4x^3-24x^2+36x$ (3) 16

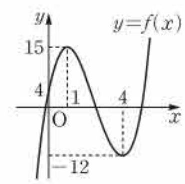
04 $f'(x)=6x^2-30x+24=6(x-1)(x-4)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=1$ 또는 $x=4$

x	$\cdots$	1	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	15	↘	-12	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

$f(0)=4$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 점 $(0, 4)$를 지난다.



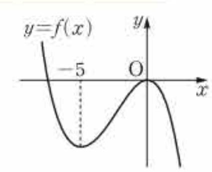
답 ③

05 $y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표가 -5, 0이므로 $f'(x)=0$에서 $\quad x=-5$ 또는 $x=0$

x	$\cdots$	-5	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

이때 $f(0)=0$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다.

$f(0)=0$이고 $x=0$에서 극대이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 원점에서 x축에 접한다.



ㄱ. 구간 $(-5, 0)$에서 $f'(x)>0$이므로 함수 $f(x)$는 증가하고 $f(0)=0$이므로 $f(-5)<0$이다.

ㄴ. $f(x)$는 $x=0$에서 극대이다.

ㄷ. 위의 그림과 같이 $y=f(x)$의 그래프는 x축과 서로 다른 두 점에서 만난다.

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

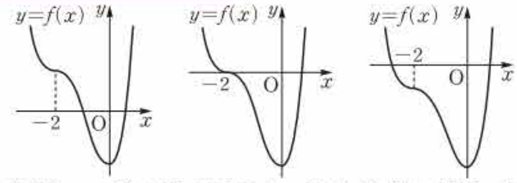
답 ⑤

06 $y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표가 -2, 0이므로 $f'(x)=0$에서 $\quad x=-2$ 또는 $x=0$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘		↘	극소	↗

이때 $f(0)<0$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형이 될 수 있는 것은 다음의 세 가지이다.

$f(-2)$의 값이 양수, 0, 음수인 경우의 세 가지이다.



따라서 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 개수는 2이다.

답 2

07 $f'(x)=x^2+2ax+9$

삼차함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 중근 또는 허근을 가져야 한다.

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=a^2-9\le 0,\quad (a+3)(a-3)\le 0$

$\therefore -3\le a\le 3$ 　답 ⑤

08 $f'(x)=-3x^2+2(a+1)x-(a+1)$

삼차함수 $f(x)$가 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(a+1)^2-(-3)\cdot\{-(a+1)\}>0$

$a^2-a-2>0,\quad (a+1)(a-2)>0$

$\therefore a<-1$ 또는 $a>2$

따라서 자연수 a의 최솟값은 3이다. 　답 3

09 $f(x)=x^3+ax^2+4x-4$에서

$f'(x)=3x^2+2ax+4$

삼차함수 $f(x)$가 극값을 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$\frac{D_1}{4}=a^2-3\cdot 4>0$

$a^2-12>0,\quad (a+2\sqrt{3})(a-2\sqrt{3})>0$

$\therefore a<-2\sqrt{3}$ 또는 $a>2\sqrt{3}$ 　…… ㉠

$g(x)=2x^3-ax^2-2ax+5$에서

$g'(x)=6x^2-2ax-2a$

삼차함수 $g(x)$가 극값을 갖지 않으려면 이차방정식 $g'(x)=0$이 중근 또는 허근을 가져야 한다.

이차방정식 $g'(x)=0$의 판별식을 D_2라 하면

$\frac{D_2}{4}=(-a)^2-6\cdot(-2a)\le 0$

$a^2+12a\le 0,\quad a(a+12)\le 0$

$\therefore -12\le a\le 0$ 　…… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

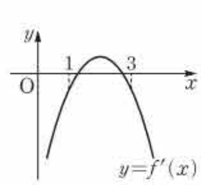
$-12\le a<-2\sqrt{3}$

따라서 정수 a는 $-12, -11, -10, \cdots, -4$의 9개이다. 　답 9

10 $f'(x)=-x^2+4x+a$

삼차함수 $f(x)$가 $1<x<3$에서 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 $1<x<3$에서 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

(i) 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면



$\frac{D}{4}=2^2-(-1)\cdot a>0$

$4+a>0$

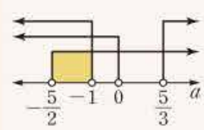
$\therefore a>-4$

Q BOX

$-x^2+4x+a$
$=-(x-2)^2+a+4$

삼차함수 $f(x)$가 극값을 갖는다.
$\Longleftrightarrow$ 삼차함수 $f(x)$가 극댓값과 극솟값을 모두 갖는다.

$3x^2+6ax+2a+5$
$=3(x+a)^2$
$-3a^2+2a+5$



$-3.4\times\times\times$

(ii) $f'(1)<0$에서

$-1+4+a<0\quad \therefore a<-3$

$f'(3)<0$에서

$-9+12+a<0\quad \therefore a<-3$

(iii) 이차함수 $y=f'(x)$의 그래프의 축의 방정식은 $x=2$이고 $1<2<3$이다.

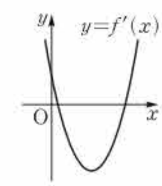
이상에서 a의 값의 범위는

$-4<a<-3$ 　답 ④

11 $f'(x)=3x^2+6ax+2a+5$

삼차함수 $f(x)$가 $x>0$에서 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 $x>0$에서 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

(i) 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면



$\frac{D}{4}=(3a)^2-3\cdot(2a+5)>0$

$9a^2-6a-15>0$

$(a+1)(3a-5)>0$

$\therefore a<-1$ 또는 $a>\frac{5}{3}$

(ii) $f'(0)>0$에서

$2a+5>0\quad \therefore a>-\frac{5}{2}$

(iii) 이차함수 $y=f'(x)$의 그래프의 축의 방정식은 $x=-a$이므로 $-a>0$에서

$a<0$

이상에서 a의 값의 범위는

$-\frac{5}{2}<a<-1$

따라서 a의 값이 될 수 없는 것은 ①이다. 　답 ①

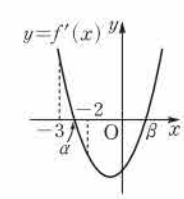
12 $f'(x)=9x^2+2ax-2a$

삼차함수 $f(x)$가 $-3<x<-2$에서 극댓값, $x>-2$에서 극솟값을 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$의 두 실근을 α, β $(\alpha<\beta)$라 할 때,

$-3<\alpha<-2,\ \beta>-2$

이어야 한다.

$f'(-3)>0$에서



$81-6a-2a>0$

$\therefore a<\frac{81}{8}$ 　…… ㉠

$f'(-2)<0$에서

$36-4a-2a<0$

$\therefore a>6$ 　…… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$6<a<\frac{81}{8}$

따라서 정수 a는 7, 8, 9, 10이므로 구하는 합은

$7+8+9+10=34$ 　답 34

13 $f'(x)=-4x^3+6x^2+2ax$

$=-2x(2x^2-3x-a)$

사차함수 $f(x)$가 극솟값을 가지려면 $f(x)$는 극댓값과 극솟값을 모두 가져야 하므로 삼차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.

그런데 $f'(x)=0$의 한 실근이 $x=0$이므로 이차방정식 $2x^2-3x-a=0$이 0이 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

이차방정식 $2x^2-3x-a=0$의 판별식을 D라 하면

$a\neq0,\ D=(-3)^2-4\cdot2\cdot(-a)>0$

에서

$a\neq0,\ a>-\frac{9}{8}$

$\therefore -\frac{9}{8}<a<0$ 또는 $a>0$

따라서 $\alpha=-\frac{9}{8}$, $\beta=0$이므로

$\beta-8\alpha=0-8\cdot\left(-\frac{9}{8}\right)=9$ 답 ④

14 사차함수 $f(x)$가 극댓값을 갖지 않으려면 삼차방정식 $f'(x)=0$이 한 실근과 두 허근 또는 한 실근과 중근 또는 삼중근을 가져야 한다.

(i) $f'(x)=0$이 한 실근과 두 허근을 갖는 경우

$f'(x)=0$의 한 실근이 $x=1$이므로 이차방정식 $x^2+2ax+3a-2=0$이 두 허근을 가져야 한다.

이차방정식 $x^2+2ax+3a-2=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=a^2-(3a-2)<0$

$(a-1)(a-2)<0$

$\therefore 1<a<2$

(ii) $f'(x)=0$이 한 실근과 중근을 갖는 경우

$f'(x)=0$의 한 실근이 $x=1$이므로 이차방정식 $x^2+2ax+3a-2=0$이 $x=1$을 근으로 갖거나 중근을 가져야 한다.

이차방정식 $x^2+2ax+3a-2=0$이 $x=1$을 근으로 가지면

$1+2a+3a-2=0$

$\therefore a=\frac{1}{5}$

이차방정식 $x^2+2ax+3a-2=0$이 중근을 가지면 판별식을 D라 할 때,

$\frac{D}{4}=a^2-(3a-2)=0$

$(a-1)(a-2)=0$

$\therefore a=1$ 또는 $a=2$

(i), (ii)에서

$a=\frac{1}{5}$ 또는 $1\le a\le2$

따라서 정수 a는 1, 2의 2개이다.

답 2

Q BOX

최고차항의 계수가 음수인 사차함수 $f(x)$는 항상 극댓값을 가지므로 $f(x)$가 극솟값을 가지면 $f(x)$는 극댓값과 극솟값을 모두 갖는다.

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 0 & 2a-1 & 2a \\ & & -1 & 1 & -2a \\ \hline & 1 & -1 & 2a & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore x^3+(2a-1)x+2a$
$=(x+1)(x^2-x+2a)$

$x=0$이 이차방정식 $2x^2-3x-a=0$의 근이 아니어야 하므로

$0-0-a\neq0$

$\therefore a\neq0$

$f'(x)$가 삼차함수이므로 $f(x)$는 사차함수이다.

구간 $[a,\ b]$에서 연속함수 $f(x)$의 극값이 오직 하나 존재할 때 극값이 극댓값이면

(극댓값) = (최댓값)

참고 $x^2+2ax+3a-2=0$이 중근을 갖는 경우 $a=1$ 또는 $a=2$이므로 $x^2+2x+1=0$ 또는 $x^2+4x+4=0$에서

$(x+1)^2=0$ 또는 $(x+2)^2=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=-2$

따라서 $x^2+2ax+3a-2=0$이 $x=1$을 중근으로 가질 수 없으므로 $f'(x)=0$은 삼중근을 가질 수 없다.

15 $f'(x)=-2x^3-2(2a-1)x-4a$

$=-2\{x^3+(2a-1)x+2a\}$

$=-2(x+1)(x^2-x+2a)$

사차함수 $f(x)$가 극솟값을 갖지 않으려면 삼차방정식 $f'(x)=0$이 한 실근과 두 허근 또는 한 실근과 중근 또는 삼중근을 가져야 한다.

(i) $f'(x)=0$이 한 실근과 두 허근을 갖는 경우

$f'(x)=0$의 한 실근이 $x=-1$이므로 이차방정식 $x^2-x+2a=0$이 두 허근을 가져야 한다.

이차방정식 $x^2-x+2a=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-1)^2-4\cdot2a<0$

$\therefore a>\frac{1}{8}$

(ii) $f'(x)=0$이 한 실근과 중근을 갖는 경우

$f'(x)=0$의 한 실근이 $x=-1$이므로 이차방정식 $x^2-x+2a=0$이 $x=-1$을 근으로 갖거나 중근을 가져야 한다.

이차방정식 $x^2-x+2a=0$이 $x=-1$을 근으로 가지면

$1+1+2a=0 \qquad \therefore a=-1$

이차방정식 $x^2-x+2a=0$이 중근을 가지면 판별식을 D라 할 때,

$D=(-1)^2-4\cdot2a=0$

$\therefore a=\frac{1}{8}$

(i), (ii)에서

$a=-1$ 또는 $a\ge\frac{1}{8}$

따라서 a의 최솟값은 -1이다. 답 ②

참고 $x^2-x+2a=0$이 중근을 갖는 경우 $a=\frac{1}{8}$이므로

$x^2-x+\frac{1}{4}=0$에서 $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2=0 \qquad \therefore x=\frac{1}{2}$

따라서 $x^2-x+2a=0$이 $x=-1$을 중근으로 가질 수 없으므로 $f'(x)=0$은 삼중근을 가질 수 없다.

16 $y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표가 -1, 4이므로 $f'(x)=0$에서

$x=-1$ ($\because -2\le x\le2$)

x	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	2
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$		↗	극대	↘	

따라서 구간 $[-2,\ 2]$에서 함수 $f(x)$는 $x=-1$일 때 극대이면서 최대이다. 답 -1

17 $f'(x)=-4x^3+16x=-4x(x+2)(x-2)$

$f'(x)=0$에서　　$x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$

x	-3	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-13	↗	12	↘	-4	↗	12

따라서 구간 $[-3, 2]$에서 함수 $f(x)$는 $x=-2$, $x=2$일 때 최댓값 12, $x=-3$일 때 최솟값 -13을 가지므로

$M=12$, $m=-13$

$\therefore M-m=25$　　답 ⑤

18 $x-1=t$로 놓으면 $-1\le x\le 3$에서

$-2\le x-1\le 2$　　$\therefore -2\le t\le 2$

$g(t)=t^3+6t^2-15t+2$로 놓으면

$g'(t)=3t^2+12t-15=3(t+5)(t-1)$

$g'(t)=0$에서　　$t=1$ ($\because -2\le t\le 2$)

t	-2	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$g'(t)$		$-$	0	$+$	
$g(t)$	48	↘	-6	↗	4

따라서 구간 $[-2, 2]$에서 함수 $g(t)$는 $t=-2$일 때 최댓값 48, $t=1$일 때 최솟값 -6을 가지므로

$M=48$, $m=-6$

$\therefore \dfrac{M}{m}=-8$　　답 -8

19 $f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

$f'(x)=0$에서　　$x=0$ 또는 $x=2$

x	-3	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$k-54$	↗	k	↘	$k-4$	↗	k

따라서 구간 $[-3, 3]$에서 함수 $f(x)$는 $x=0$, $x=3$일 때 최댓값 k, $x=-3$일 때 최솟값 $k-54$를 가지므로

$k-54<k-4<k$

$k-54=-24$　　$\therefore k=30$

즉 함수 $f(x)$의 최댓값은 30이다.　　답 ④

20 $f'(x)=-12x^2+12x=-12x(x-1)$

$f'(x)=0$에서　　$x=0$ 또는 $x=1$

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$k+10$	↘	k	↗	$k+2$

따라서 구간 $[-1, 1]$에서 함수 $f(x)$는 $x=-1$일 때 최댓값 $k+10$, $x=0$일 때 최솟값 k를 가지므로

$k<k+2<k+10$

$k+10=3k$　　$\therefore k=5$　　답 ③

21 $f'(x)=6ax^2+18ax=6ax(x+3)$

$f'(x)=0$에서　　$x=0$ ($\because -2\le x\le 1$)

x	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$20a+b$	↘	b	↗	$11a+b$

따라서 구간 $[-2, 1]$에서 함수 $f(x)$는 $x=-2$일 때 최댓값 $20a+b$, $x=0$일 때 최솟값 b를 가지므로

QBOX

$a>0$이므로

$b<11a+b<20a+b$

$20a+b=30$, $b=-10$

$\therefore a=2$, $b=-10$

$\therefore a-b=12$　　답 12

22 점 P의 좌표를 (t, t^2-1)이라 하면

$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$

$=(t-1)^2+(t^2+1)^2+(t-9)^2+(t^2+1)^2$

$=2t^4+6t^2-20t+84$

$f(t)=2t^4+6t^2-20t+84$라 하면

$f'(t)=8t^3+12t-20=4(2t^3+3t-5)$

$=4(t-1)(2t^2+2t+5)$

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 2 & 0 & 3 & -5 \\ & & 2 & 2 & 5 \\ \hline & 2 & 2 & 5 & 0 \end{array}$$

$\therefore 2t^3+3t-5$

$=(t-1)(2t^2+2t+5)$

$f'(t)=0$에서　　$t=1$ ($\because 2t^2+2t+5>0$)

$2t^2+2t+5$

$=2\left(t+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{9}{2}>0$

t	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(t)$	$-$	0	$+$
$f(t)$	↘	72	↗

따라서 $f(t)$는 $t=1$에서 최솟값 72를 갖는다.　　답 ④

23 점 P의 좌표를 $(t, -t^2+9t)$ $(0<t<9)$라 하면

$-x^2+9x=0$에서

$x(x-9)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=9$

따라서 곡선이 x축과 만나는 점의 x좌표는 0, 9이다.

H$(t, 0)$

△POH의 넓이를 $S(t)$라 하면

$S(t)=\dfrac{1}{2}\cdot t\cdot(-t^2+9t)=-\dfrac{1}{2}t^3+\dfrac{9}{2}t^2$

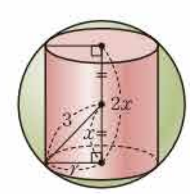
$\therefore S'(t)=-\dfrac{3}{2}t^2+9t=-\dfrac{3}{2}t(t-6)$

$S'(t)=0$에서　　$t=6$ ($\because 0<t<9$)

t	0	$\cdots$	6	$\cdots$	9
$S'(t)$		$+$	0	$-$	
$S(t)$		↗	54	↘	

따라서 $0<t<9$에서 $S(t)$는 $t=6$일 때 최댓값 54를 가지므로 △POH의 넓이의 최댓값은 54이다.　　답 54

24 오른쪽 그림과 같이 원기둥의 밑면의 반지름의 길이를 r, 높이를 $2x$라 하면



$r^2=9-x^2$

이때 구의 반지름의 길이가 3이므로

$0<x<3$

원기둥의 부피를 $V(x)$라 하면

$V(x)=\pi r^2\cdot 2x=\pi(9-x^2)\cdot 2x=-2\pi(x^3-9x)$

$\therefore V'(x)=-2\pi(3x^2-9)$

$=-6\pi(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$

$V'(x)=0$에서　　$x=\sqrt{3}$ ($\because 0<x<3$)

x	0	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$	3
$V'(x)$		$+$	0	$-$	
$V(x)$		↗	$12\sqrt{3}\pi$	↘	

$V(\sqrt{3})$

$=-2\pi(3\sqrt{3}-9\sqrt{3})$

$=12\sqrt{3}\pi$

따라서 $0<x<3$에서 $V(x)$는 $x=\sqrt{3}$일 때 최댓값 $12\sqrt{3}\pi$를 가지므로 원기둥의 부피의 최댓값은 $12\sqrt{3}\pi$이다.　　답 ③

06 도함수의 활용 (3)

12 방정식과 부등식에의 활용

W 41쪽

01 (1) $f(x)=x^3-12x+16$이라 하면

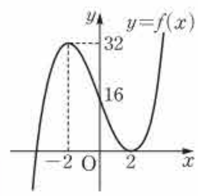
$f'(x)=3x^2-12=3(x+2)(x-2)$

$f'(x)=0$에서

$x=-2$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	32	↘	0	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 방정식은 서로 다른 두 실근을 갖는다.



> 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축의 교점의 개수와 같다.

> 방정식 $f(x)=0$은 $x=2$를 중근으로 갖고 다른 한 실근을 가지므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.

(2) $f(x)=3x^4-4x^3-12x^2+2$라 하면

$f'(x)=12x^3-12x^2-24x$

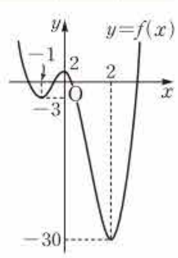
$=12x(x+1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서

$x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-3	↗	2	↘	-30	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 방정식은 서로 다른 네 실근을 갖는다.



(3) $2x^3+10x-2=9x^2-2x$에서

$2x^3-9x^2+12x-2=0$

> 우변을 좌변으로 이항하여 $f(x)=0$ 꼴로 만든다.

$f(x)=2x^3-9x^2+12x-2$라 하면

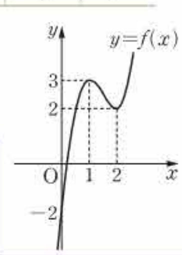
$f'(x)=6x^2-18x+12$

$=6(x-1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	3	↘	2	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 방정식은 한 개의 실근을 갖는다.



> 방정식 $f(x)=0$은 한 실근과 두 허근을 갖는다.

답 (1) 2 (2) 4 (3) 1

02 (1) $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+4$라 하면

$f'(x)=x^2-2x=x(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=2$ ($\because x>0$)

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	$\frac{8}{3}$	↗

$x>0$일 때, 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 최솟값 $\frac{8}{3}$을 가지므로 $f(x)>0$

따라서 $x>0$일 때, 부등식 $\frac{1}{3}x^3-x^2+4>0$이 성립한다.

(2) $f(x)=x^4-32x+48$이라 하면

$f'(x)=4x^3-32=4(x-2)(x^2+2x+4)$

$f'(x)=0$에서 $x=2$ ($\because x^2+2x+4>0$)

x	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	0	↗

함수 $f(x)$는 $x=2$에서 최솟값 0을 가지므로

$f(x)\geq 0$

따라서 모든 실수 x에 대하여 부등식

$x^4-32x+48\geq 0$이 성립한다.

(3) $2x^3-10x\leq -7x^2+2x+45$에서

> 우변을 좌변으로 이항하여 $f(x)\leq 0$ 꼴로 만든다.

$2x^3+7x^2-12x-45\leq 0$

$f(x)=2x^3+7x^2-12x-45$라 하면

$f'(x)=6x^2+14x-12$

$=2(x+3)(3x-2)$

$f'(x)=0$에서

$x=-3$ ($\because x\leq -1$)

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	-1
$f'(x)$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	↗	0	↘	-28

$x\leq -1$일 때, 함수 $f(x)$는 $x=-3$에서 최댓값 0을 가지므로 $f(x)\leq 0$

따라서 $x\leq -1$일 때, 부등식

$2x^3-10x\leq -7x^2+2x+45$가 성립한다.

답 풀이 참조

03 $4x^3-3x+1-k=0$에서

$4x^3-3x+1=k$

$f(x)=4x^3-3x+1$이라 하면

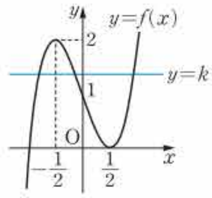
$f'(x)=12x^2-3=3(2x+1)(2x-1)$

$f'(x)=0$에서

$x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=\frac{1}{2}$

x	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	2	↘	0	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $0<k<2$일 때, 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$는 서로 다른 세 점에서 만난다.



즉 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

답 3

04 $\frac{3}{4}x^4-x^3-2-k=0$에서 $\quad \frac{3}{4}x^4-x^3-2=k$

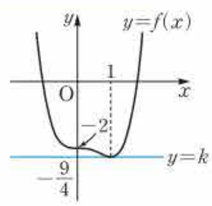
$f(x)=\frac{3}{4}x^4-x^3-2$라 하면

$f'(x)=3x^3-3x^2=3x^2(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=0$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-2	↘	$-\frac{9}{4}$	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



주어진 방정식이 한 중근과 두 허근을 가지려면 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 한 점에서 만나고 그 점에서 접해야 하므로

$k=-\frac{9}{4}$

답 ①

05 $3x^4+2x^3-6x^2-6x-k=0$에서

$3x^4+2x^3-6x^2-6x=k$

$f(x)=3x^4+2x^3-6x^2-6x$라 하면

$f'(x)=12x^3+6x^2-12x-6$

$=6(2x^3+x^2-2x-1)$

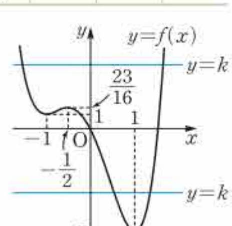
$=6(x+1)(2x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서

$x=-1$ 또는 $x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	1	↗	$\frac{23}{16}$	↘	-7	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



주어진 방정식이 서로 다른 두 실근과 두 허근을 가지려면 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 서로 다른 두 점에서 만나야 하므로

$-7<k<1$ 또는 $k>\frac{23}{16}$

즉 자연수 k의 최솟값은 2이다.

답 2

QBOX

삼차방정식의 근
① 서로 다른 세 실근
② 한 실근과 중근 (서로 다른 두 실근)
③ 한 실근과 두 허근
④ 삼중근 (서로 같은 세 실근)

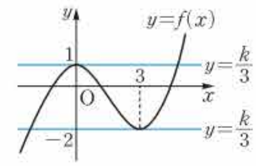
$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 2 & 1 & -2 & -1 \\ & & 2 & 3 & 1 \\ \hline & 2 & 3 & 1 & 0 \end{array}$$

$\therefore 2x^3+x^2-2x-1$
$=(x-1)(2x^2+3x+1)$
$=(x+1)(2x+1)(x-1)$

06 $y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표가 0, 3이므로 $f'(x)=0$에서 $\quad x=0$ 또는 $x=3$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	1	↘	-2	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다.



이때 $3f(x)-k=0$에서

$f(x)=\frac{k}{3}$

주어진 방정식이 서로 다른 두 실근, 즉 한 실근과 중근을 가지려면 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=\frac{k}{3}$가 한 점에서 접하고 다른 한 점에서 만나야 하므로

$\frac{k}{3}=-2$ 또는 $\frac{k}{3}=1$

$\therefore k=-6$ 또는 $k=3$

즉 모든 k의 값의 합은

$-6+3=-3$

답 ①

07 $2x^3+15x^2+24x-k=0$에서

$2x^3+15x^2+24x=k$

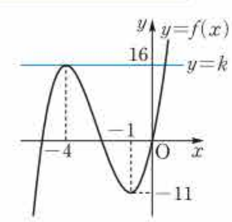
$f(x)=2x^3+15x^2+24x$라 하면

$f'(x)=6x^2+30x+24=6(x+4)(x+1)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-4$ 또는 $x=-1$

x	$\cdots$	-4	$\cdots$	-1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	16	↘	-11	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



주어진 방정식이 한 개의 양근과 음의 중근을 가지려면 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 한 점에서 만나고 다른 한 점에서 접해야 하며 교점의 x좌표가 양수, 접점의 x좌표가 음수이어야 하므로

$k=16$

답 ④

08 $\frac{2}{3}x^3+x^2=4x+a$에서

$\frac{2}{3}x^3+x^2-4x=a$

$f(x)=\frac{2}{3}x^3+x^2-4x$라 하면

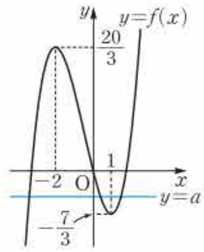
$f'(x)=2x^2+2x-4=2(x+2)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-2$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$\frac{20}{3}$	↘	$-\frac{7}{3}$	↗

W 06 도함수의 활용 (3)

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



주어진 방정식이 서로 다른 두 개의 양근과 한 개의 음근을 가지려면 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=a$가 서로 다른 세 점에서 만나고, 교점의 x좌표가 두 개는 양수이고 한 개는 음수이어야 하므로

$$-\frac{7}{3}<a<0$$

즉 a의 값이 될 수 없는 것은 ⑤이다. 답 ⑤

09 $x^3-3x^2+5+k=0$에서 $\quad x^3-3x^2+5=-k$

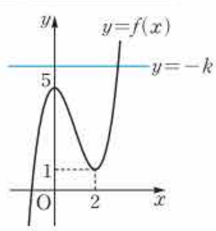
$f(x)=x^3-3x^2+5$라 하면

$\quad f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=0$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	5	↘	1	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



주어진 방정식이 한 개의 양근과 두 허근을 가지려면 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-k$가 한 점에서만 만나고, 교점의 x좌표가 양수이어야 하므로

$\quad -k>5 \quad \therefore k<-5$

즉 정수 k의 최댓값은 -6이다. 답 -6

Q BOX

$x^3-3x^2+5+k=0$에서

$\quad -x^3+3x^2-5=k$

이므로

$f(x)=-x^3+3x^2-5$의 그래프와 직선 $y=k$를 이용할 수도 있다.

10 $x^4+3x^3=\frac{1}{3}x^3+6x^2+k$에서

$$x^4+\frac{8}{3}x^3-6x^2=k$$

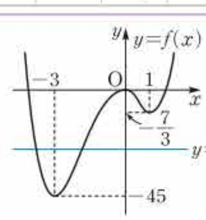
$f(x)=x^4+\frac{8}{3}x^3-6x^2$이라 하면

$\quad f'(x)=4x^3+8x^2-12x=4x(x+3)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-3$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	−	0	+	0	−	0	+
$f(x)$	↘	-45	↗	0	↘	$-\frac{7}{3}$	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



주어진 방정식이 서로 다른 두 개의 음근과 두 허근을 가지려면 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 서로 다른 두 점에서 만나고, 교점의 x좌표가 모두 음수이어야 하므로

$$-45<k<-\frac{7}{3}$$

즉 정수 k는 $-44, -43, -42, \cdots, -3$의 42개이다.

답 ③

주어진 방정식은

(i) $k>0$이면 서로 다른 두 실근과 두 허근

(ii) $-\frac{7}{3}<k<0$이면 서로 다른 네 실근

(iii) $k=0$ 또는 $k=-\frac{7}{3}$이면 서로 다른 두 실근과 중근

(iv) $k=-45$이면 중근과 두 허근

을 갖는다.

11 $f(x)=2x^3-9x^2+12x+k$라 하면

$\quad f'(x)=6x^2-18x+12$

$\quad\quad =6(x-1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=1$ 또는 $x=2$

(1) 삼차방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면 $f(1)f(2)<0$이어야 하므로

$\quad (k+5)(k+4)<0$

$\quad \therefore -5<k<-4$

(2) 삼차방정식 $f(x)=0$이 한 실근과 중근을 가지려면 $f(1)f(2)=0$이어야 하므로

$\quad (k+5)(k+4)=0$

$\quad \therefore k=-5$ 또는 $k=-4$

(3) 삼차방정식 $f(x)=0$이 한 실근과 두 허근을 가지려면 $f(1)f(2)>0$이어야 하므로

$\quad (k+5)(k+4)>0$

$\quad \therefore k<-5$ 또는 $k>-4$

답 (1) $-5<k<-4$ (2) -5, -4 (3) $k<-5$ 또는 $k>-4$

12 $f(x)=x^3+\frac{9}{2}x^2+6x+a$라 하면

$\quad f'(x)=3x^2+9x+6=3(x+2)(x+1)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-2$ 또는 $x=-1$

삼차방정식 $f(x)=0$이 오직 하나의 실근, 즉 한 실근과 두 허근을 가지려면 $f(-2)f(-1)>0$이어야 하므로

$$(a-2)\left(a-\frac{5}{2}\right)>0$$

$\quad \therefore a<2$ 또는 $a>\frac{5}{2}$ 답 ④

쌤 한마디

삼차방정식이 오직 하나의 실근을 갖는 경우

삼차함수 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\ (a>0)$에 대하여 삼차방정식 $f(x)=0$이 오직 하나의 실근, 즉 한 실근과 두 허근을 가질 때, 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.

[극값을 갖는 경우] [극값을 갖지 않는 경우]

13 $f(x)=3x^3-9x+k$라 하면

$\quad f'(x)=9x^2-9=9(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-1$ 또는 $x=1$

삼차방정식 $f(x)=0$이 한 실근과 중근을 가지려면 $f(-1)f(1)=0$이어야 하므로

$\quad (k+6)(k-6)=0$

$\quad \therefore k=-6$ 또는 $k=6$

따라서 모든 k의 값의 곱은

$\quad -6\cdot6=-36$ 답 -36

14 $f(x)=2x^3+5x^2-4x-a+1$이라 하면

$$f'(x)=6x^2+10x-4=2(x+2)(3x-1)$$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-2$ 또는 $x=\frac{1}{3}$

삼차방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면

$f(-2)f\left(\frac{1}{3}\right)<0$이어야 하므로

$$(-a+13)\left(-a+\frac{8}{27}\right)<0$$

$$\left(a-\frac{8}{27}\right)(a-13)<0$$

$$\therefore \frac{8}{27}<a<13$$

따라서 정수 a의 최댓값은 12, 최솟값은 1이므로 구하는 합은

$$12+1=13$$

답 ②

15 주어진 곡선과 직선이 오직 한 점에서 만나려면 방정식

$$x^3-6x^2-8x=7x+k,\ 즉\ x^3-6x^2-15x-k=0$$

이 오직 하나의 실근을 가져야 한다.

$f(x)=x^3-6x^2-15x-k$라 하면

$$f'(x)=3x^2-12x-15=3(x+1)(x-5)$$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-1$ 또는 $x=5$

삼차방정식 $f(x)=0$이 오직 하나의 실근, 즉 한 실근과 두 허근을 가지려면 $f(-1)f(5)>0$이어야 하므로

$$(-k+8)(-k-100)>0$$

$$(k+100)(k-8)>0$$

$$\therefore k<-100\ 또는\ k>8$$

따라서 자연수 k의 최솟값은 9이다.

답 ③

16 주어진 두 곡선이 한 점에서 만나고 다른 한 점에서 접하려면 방정식

$$x^3-x^2-x+5=2x^2-x+k,\ 즉$$

$$x^3-3x^2+5-k=0$$

이 한 실근과 중근을 가져야 한다.

$f(x)=x^3-3x^2+5-k$라 하면

$$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=0$ 또는 $x=2$

삼차방정식 $f(x)=0$이 한 실근과 중근을 가지려면

$f(0)f(2)=0$이어야 하므로

$$(-k+5)(-k+1)=0$$

$$\therefore k=1\ 또는\ k=5$$

따라서 모든 k의 값의 합은

$$1+5=6$$

답 6

17 주어진 두 곡선이 서로 다른 세 점에서 만나려면 방정식

$$2x^3-16x=3x^2+20x+k,\ 즉$$

$$2x^3-3x^2-36x-k=0$$

이 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.

$f(x)=2x^3-3x^2-36x-k$라 하면

$$f'(x)=6x^2-6x-36=6(x+2)(x-3)$$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-2$ 또는 $x=3$

삼차방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면

$f(-2)f(3)<0$이어야 하므로

$$(-k+44)(-k-81)<0$$

$$(k+81)(k-44)<0$$

$$\therefore -81<k<44$$

따라서 정수 k는 $-80,\ -79,\ -78,\ \cdots,\ 43$의 124개이다.

답 ④

18 $x^4+6x^3+a\geq 2x^3+16x$에서

$$x^4+4x^3-16x+a\geq 0$$

$f(x)=x^4+4x^3-16x+a$라 하면

$$f'(x)=4x^3+12x^2-16=4(x+2)^2(x-1)$$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-2$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$a+16$	↘	$a-11$	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 최솟값 $a-11$을 가지므로 모든 실수 x에 대하여 부등식 $f(x)\geq 0$이 성립하려면

$$a-11\geq 0 \qquad \therefore a\geq 11$$

답 ⑤

19 $f(x)=x^4+6ax^2+4(3a+1)x+2a^2-5$라 하면

$$f'(x)=4x^3+12ax+4(3a+1)$$
$$=4(x^3+3ax+3a+1)$$
$$=4(x+1)(x^2-x+3a+1)$$

$f'(x)=0$에서

$$x=-1\ (\because x^2-x+3a+1>0)$$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$2a^2-6a-8$	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 최솟값 $2a^2-6a-8$을 가지므로 모든 실수 x에 대하여 부등식 $f(x)\geq 0$이 성립하려면

$$2a^2-6a-8\geq 0, \qquad (a+1)(a-4)\geq 0$$

$$\therefore a\geq 4\ (\because a>0)$$

즉 양수 a의 최솟값은 4이다.

답 ④

Q BOX

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 0 & 3a & 3a+1 \\ & & -1 & 1 & -3a-1 \\ \hline & 1 & -1 & 3a+1 & 0 \end{array}$$

$\therefore x^3+3ax+3a+1$
$=(x+1)(x^2-x+3a+1)$

$x^2-x+3a+1$
$=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+3a+\frac{3}{4}$
$>0\ (\because a>0)$

$(a+1)(a-4)\geq 0$에서
$a\leq -1$ 또는 $a\geq 4$
이때 $a>0$이므로
$a\geq 4$

20 함수 $y=f(x)$의 그래프가 함수 $y=g(x)$의 그래프보다 항상 아래쪽에 있으려면 모든 실수 x에 대하여 부등식 $f(x)<g(x)$가 성립해야 한다.

$f(x)<g(x)$에서

$$4x^3-3x^2<\frac{3}{2}x^4-k$$

$$\therefore -\frac{3}{2}x^4+4x^3-3x^2+k<0$$

$h(x)=-\frac{3}{2}x^4+4x^3-3x^2+k$라 하면

$h'(x)=-6x^3+12x^2-6x$

$=-6x(x-1)^2$

$h'(x)=0$에서 $\quad x=0$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$h'(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$
$h(x)$	↗	k	↘	$k-\frac{1}{2}$	↘

따라서 함수 $h(x)$는 $x=0$에서 최댓값 k를 가지므로 모든 실수 x에 대하여 부등식 $h(x)<0$이 성립하려면

$k<0$ 답 $k<0$

21 $x^3+4x^2>x^2-k$에서 $\quad x^3+3x^2+k>0$

$f(x)=x^3+3x^2+k$라 하면

$f'(x)=3x^2+6x=3x(x+2)$

$x>1$일 때 $f'(x)>0$이므로 함수 $f(x)$는 구간 $(1, \infty)$에서 증가한다.

따라서 $x>1$일 때, 부등식 $f(x)>0$이 성립하려면

$f(1)\geq0, \quad 1+3+k\geq0$

$\therefore k\geq-4$ 답 ④

22 $f(x)=x^3+3x^2-9x+k$라 하면

$f'(x)=3x^2+6x-9=3(x+3)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-3$ ($\because x<0$)

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	0
$f'(x)$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	↗	$k+27$	↘	

따라서 $x<0$일 때, 함수 $f(x)$는 $x=-3$에서 최댓값 $k+27$을 가지므로 $x<0$일 때, 부등식 $f(x)\leq0$이 성립하려면

$k+27\leq0 \quad \therefore k\leq-27$

즉 k의 최댓값은 -27이다. 답 ①

쌤 한마디

구간 (a, b)에서 부등식 $f(x)+k>0$이 성립하도록 하는 실수 k의 값의 범위를 구할 때에는 먼저 $g(x)=f(x)+k$라 하고 구간 (a, b)에서 $g(x)$의 극값이 존재하는지 확인한다. 이때

① 극값이 존재하면

(함수 $g(x)$의 최솟값)>0

이어야 함을 이용한다.

② 극값이 존재하지 않고 구간 (a, b)에서 함수 $g(x)$가

증가하면 ⇨ $g(a)\geq0$

감소하면 ⇨ $g(b)\geq0$

이어야 함을 이용한다.

23 $f(x)>g(x)$에서

$3x^4-2x^3+5x^2+k>2x^3-7x^2+24x$

$\therefore 3x^4-4x^3+12x^2-24x+k>0$

$h(x)=3x^4-4x^3+12x^2-24x+k$라 하면

$h'(x)=12x^3-12x^2+24x-24$

$=12(x-1)(x^2+2)$

$h'(x)=0$에서

$x=1$ ($\because x^2+2>0$)

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	3
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$	k	↘	$k-13$	↗	$k+171$

따라서 $0\leq x\leq3$일 때, 함수 $h(x)$는 $x=1$에서 최솟값 $k-13$을 가지므로 $0\leq x\leq3$일 때, 부등식 $h(x)>0$이 성립하려면

$k-13<k<k+171$

$k-13>0 \quad \therefore k>13$

즉 k의 값이 될 수 있는 것은 ⑤이다. 답 ⑤

24 $-1<x<2$일 때, 함수 $y=x^3-6x^2$의 그래프가 직선 $y=15x-k$보다 항상 위쪽에 있으려면 $-1<x<2$일 때 부등식

$x^3-6x^2>15x-k$, 즉

$x^3-6x^2-15x+k>0$

이 성립해야 한다.

$f(x)=x^3-6x^2-15x+k$라 하면

$f'(x)=3x^2-12x-15$

$=3(x+1)(x-5)$

$-1<x<2$일 때 $f'(x)<0$이므로 함수 $f(x)$는 구간 $(-1, 2)$에서 감소한다.

따라서 $-1<x<2$일 때, 부등식 $f(x)>0$이 성립하려면

$f(2)\geq0, \quad 8-24-30+k\geq0$

$\therefore k\geq46$

즉 k의 최솟값은 46이다. 답 46

13 속도와 가속도

45쪽

위치 ⬇ 미분 속도 ⬇ 미분 가속도

01 (1) 시각 t에서의 점 P의 속도를 v라 하면

$v=\frac{dx}{dt}=-6t^2+12t$

따라서 $t=1$에서의 점 P의 속도는

$-6\cdot1^2+12\cdot1=6$

(2) 시각 t에서의 점 P의 가속도를 a라 하면

$a=\frac{dv}{dt}=-12t+12$

따라서 $t=3$에서의 점 P의 가속도는

$-12\cdot3+12=-24$

운동 방향을 바꿀 때 ➡ 속도가 0이다.

(3) 점 P가 운동 방향을 바꿀 때 $v=0$이므로

$-6t^2+12t=0, \quad t(t-2)=0$

$\therefore t=2$ ($\because t>0$)

따라서 $t=2$에서 점 P가 운동 방향을 바꾼다.

답 (1) 6 (2) -24 (3) 2

Q BOX

02 (1) $l=2t^2-t+5$에서

$$\frac{dl}{dt}=4t-1$$

따라서 $t=4$에서의 물체의 길이의 변화율은

$$4\cdot4-1=15$$

(2) $S=(t+4)(3t+1)$에서

$$\frac{dS}{dt}=1\cdot(3t+1)+(t+4)\cdot3=6t+13$$

따라서 $t=1$에서의 물체의 넓이의 변화율은

$$6\cdot1+13=19$$

(3) $V=\left(\frac{t}{6}+2\right)^3$에서

$$\frac{dV}{dt}=3\left(\frac{t}{6}+2\right)^2\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{2}\left(\frac{t}{6}+2\right)^2$$

$y=\{f(x)\}^3$
➡ $y'=3\{f(x)\}^2f'(x)$

따라서 $t=6$에서의 물체의 부피의 변화율은

$$\frac{1}{2}\cdot(1+2)^2=\frac{9}{2}$$

답 (1) 15 (2) 19 (3) $\frac{9}{2}$

03 시각 t에서의 점 P의 속도를 v, 가속도를 a라 하면

$$v=\frac{dx}{dt}=3t^2-2t+4,\ a=\frac{dv}{dt}=6t-2$$

가속도가 16일 때

$$6t-2=16 \qquad \therefore t=3$$

따라서 $t=3$에서의 점 P의 속도는

$$3\cdot3^2-2\cdot3+4=25$$

답 25

04 시각 t에서의 점 P의 속도를 v, 가속도를 a라 하면

$$v=\frac{dx}{dt}=3t^2+2pt+q,$$

$$a=\frac{dv}{dt}=6t+2p$$

$t=2$에서의 점 P의 속도가 10이므로

$$3\cdot2^2+2p\cdot2+q=10$$

$$\therefore 4p+q=-2 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$t=2$에서의 점 P의 가속도가 8이므로

$$6\cdot2+2p=8 \qquad \therefore p=-2$$

$p=-2$를 ㉠에 대입하면

$$-8+q=-2 \qquad \therefore q=6$$

$$\therefore p+q=4$$

답 ②

05 두 점 P, Q가 만나는 순간 두 점 P, Q의 위치는 같으므로

$$t^2-5t+10=2t, \qquad t^2-7t+10=0$$

$$(t-2)(t-5)=0 \qquad \therefore t=2 \text{ 또는 } t=5$$

따라서 두 점 P, Q가 두 번째로 만나는 것은 $t=5$일 때이고, 시각 t에서의 두 점 P, Q의 속도를 각각 v_P, v_Q라 하면

$$v_P=\frac{dx_P}{dt}=2t-5,\ v_Q=\frac{dx_Q}{dt}=2$$

이므로 $t=5$에서의 두 점 P, Q의 속도는 각각

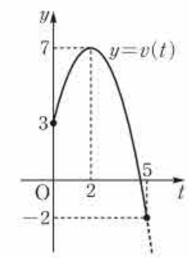
$$v_P=2\cdot5-5=5,\ v_Q=2$$

답 5, 2

06 시각 t에서의 점 P의 속도를 $v(t)$라 하면

$$v(t)=x'(t)=-t^2+4t+3$$
$$=-(t-2)^2+7$$

$0\le t\le5$에서 $y=v(t)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$$-2\le v(t)\le7$$

$$\therefore 0\le|v(t)|\le7$$

따라서 점 P의 속력의 최댓값은 7이고 이때의 시각은 $t=2$이므로

$$M=7,\ a=2$$

$$\therefore M-a=5$$

답 ①

07 시각 t에서의 점 P의 속도를 v라 하면

$$v=\frac{dx}{dt}=2t^2-6t+4$$

점 P가 운동 방향을 바꿀 때 $v=0$이므로

$$2t^2-6t+4=0, \qquad (t-1)(t-2)=0$$

$$\therefore t=1 \text{ 또는 } t=2$$

즉 점 P가 운동 방향을 바꾸는 것은 $t=1$, $t=2$일 때이고, $t=1$에서의 점 P의 위치는

$$\frac{2}{3}\cdot1^3-3\cdot1^2+4\cdot1=\frac{5}{3}$$

$t=2$에서의 점 P의 위치는

$$\frac{2}{3}\cdot2^3-3\cdot2^2+4\cdot2=\frac{4}{3}$$

따라서 두 지점 A, B 사이의 거리는

$$\frac{5}{3}-\frac{4}{3}=\frac{1}{3}$$

답 $\frac{1}{3}$

08 시각 t에서의 점 P의 속도를 v, 가속도를 a라 하면

$$v=\frac{dx}{dt}=6t^2+2mt+n,$$

$$a=\frac{dv}{dt}=12t+2m$$

점 P가 $t=1$에서 운동 방향을 바꾸므로

$t=1$에서 $v=0$이다.

$$6\cdot1^2+2m\cdot1+n=0$$

$$\therefore 2m+n=-6 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$t=3$에서의 점 P의 가속도가 0이므로

$$12\cdot3+2m=0 \qquad \therefore m=-18$$

$m=-18$을 ㉠에 대입하면

$$-36+n=-6 \qquad \therefore n=30$$

$$\therefore m+n=12$$

답 ③

09 시각 t에서의 점 P의 속도를 v라 하면

$$v=\frac{dx}{dt}=3t^2-8t+a$$

점 P의 운동 방향이 바뀌지 않으려면 실수 $t\ (t>0)$에 대하여 항상 $v\ge0$이어야 한다.

이때 $v=3t^2-8t+a=3\left(t-\frac{4}{3}\right)^2+a-\frac{16}{3}$이므로

$t>0$일 때, v의 최솟값은 $a-\frac{16}{3}$이다.
따라서 실수 $t\ (t>0)$에 대하여 항상 $v\ge0$이려면 (v의 최솟값)≥0, 즉 $a-\frac{16}{3}\ge0$ 이어야 한다.

$$a-\frac{16}{3}\ge0 \qquad \therefore a\ge\frac{16}{3}$$

따라서 자연수 a의 최솟값은 6이다.

답 ①

Ⓦ 06 도함수의 활용(3)

10 ㄱ. 점 P가 원점을 지나는 순간 $x=0$이므로

$t^3-6t^2+9t=0,\qquad t(t-3)^2=0$

$\therefore t=0$ 또는 $t=3$

따라서 점 P는 출발 후 $t=3$에서 다시 원점을 지난다.

ㄴ. 시각 t에서의 점 P의 속도를 v, 가속도를 a라 하면

$v=\dfrac{dx}{dt}=3t^2-12t+9,\ a=\dfrac{dv}{dt}=6t-12$

따라서 $t=2$에서의 점 P의 가속도는

$6\cdot2-12=0$

ㄷ. 점 P가 운동 방향을 바꿀 때 $v=0$이므로

$3t^2-12t+9=0,\qquad (t-1)(t-3)=0$

$\therefore t=1$ 또는 $t=3$

따라서 점 P가 첫 번째로 운동 방향을 바꾸는 것은 $t=1$일 때이고, $t=1$에서의 점 P의 위치는

$1^3-6\cdot1^2+9\cdot1=4$

이상에서 옳은 것은 ㄷ뿐이다. 답 ②

11 브레이크를 밟은 지 t초 후의 자동차의 속도를 v m/s라 하면 $\quad v=\dfrac{dx}{dt}=21-7t$

자동차가 정지할 때 $v=0$이므로

$21-7t=0\qquad \therefore t=3$

따라서 브레이크를 밟은 후 자동차가 정지할 때까지 걸린 시간은 3초이다. 답 ②

12 제동을 건 지 t초 후의 기차의 속도를 v m/s라 하면

$v=\dfrac{dx}{dt}=48-4t$

기차가 정지할 때 $v=0$이므로

$48-4t=0\qquad \therefore t=12$

제동을 건 후 기차가 12초 동안 움직인 거리는

$48\cdot12-2\cdot12^2=288\ (\mathrm{m})$

따라서 목적지로부터 288 m 떨어진 지점에서 제동을 걸어야 하므로 $\quad a=288$ 답 288

13 t초 후의 공의 속도를 v m/s라 하면

$v=\dfrac{dh}{dt}=25-10t$

공이 최고 높이에 도달할 때 $v=0$이므로

$25-10t=0\qquad \therefore t=\dfrac{5}{2}$

따라서 $\dfrac{5}{2}$초 후의 지면으로부터의 높이는

$25\cdot\dfrac{5}{2}-5\cdot\left(\dfrac{5}{2}\right)^2=\dfrac{125}{4}\ (\mathrm{m})$ 답 ⑤

14 t초 후의 물체의 속도를 v m/s라 하면

$v=\dfrac{dh}{dt}=40-2kt$

물체가 최고 높이에 도달할 때까지 걸린 시간이 4초이므로

$40-2k\cdot4=0\qquad \therefore k=5$

따라서 $v=40-10t$이므로 물체를 던진 후 2초 후의 속도는 $\quad 40-10\cdot2=20\ (\mathrm{m/s})$ 답 20 m/s

Q BOX

$v(5)=0$이고 $t=5$의 좌우에서 $v(t)$의 부호가 바뀐다.

$t=8$에서 점 P가 정지해 있으려면 $v(8)=0$이어야 한다.

한 변의 길이가 a인 정사각형의 대각선의 길이 ➡ $\sqrt{2}a$

반지름의 길이가 r인 구의 부피 ➡ $\dfrac{4}{3}\pi r^3$

$t=4$에서 $v=0$이다.

15 주어진 그래프에서 점 P가 원점을 지나는 것은 $t=1,\ t=3,\ t=6$일 때이므로 두 번째로 원점을 지나는 것은 $t=3$일 때이다.

따라서 점 P가 두 번째로 원점을 지나는 순간의 속도는 $x'(3)$의 값과 같다. 답 ③

16 ① $0<t<9$에서 점 P는 $t=5$일 때 운동 방향을 바꾸므로 한 번 바꾼다.

② $5<t<9$에서 $v(t)<0$이므로 점 P는 음의 방향으로 움직인다.

③ $2<t<4$에서 $v'(t)=0$이므로 점 P의 가속도는 0으로 일정하다.

④ $v(8)<0$이므로 $t=8$에서 점 P는 움직이고 있다.

⑤ $v(4)>0$이므로 $t=4$에서 점 P는 양의 방향으로 움직이고, $v(6)<0$이므로 $t=6$에서 점 P는 음의 방향으로 움직인다.

따라서 $t=4$에서와 $t=6$에서의 점 P의 운동 방향은 서로 반대이다.

답 ④

17 ㄱ. $x'(a)=0,\ x'(d)=0$이므로 $0<t<f$에서 점 P는 $t=a,\ t=d$일 때 속도가 0이 된다.

따라서 $0<t<f$에서 점 P의 속도가 0이 되는 순간은 두 번이다.

ㄴ. 점 P가 출발 후 처음으로 원점을 지나는 것은 $t=c$일 때이고, $x'(c)<0$이므로 이때의 속도는 음의 값이다.

ㄷ. $x'(b)<0$이므로 $t=b$에서 점 P는 음의 방향으로 움직이고, $x'(f)>0$이므로 $t=f$에서 점 P는 양의 방향으로 움직인다.

따라서 $t=b$에서와 $t=f$에서의 점 P의 운동 방향은 서로 반대이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ뿐이다. 답 ①

18 t초 후의 정사각형의 한 변의 길이는 $(3+5t)$ cm이므로 정사각형의 대각선의 길이를 l cm라 하면

$l=\sqrt{2}(3+5t)=3\sqrt{2}+5\sqrt{2}t$

따라서 정사각형의 대각선의 길이의 변화율은

$\dfrac{dl}{dt}=5\sqrt{2}$

즉 $5\sqrt{2}$ cm/s이다. 답 $5\sqrt{2}$ cm/s

19 시각 t에서의 구의 부피를 V라 하면

$V=\dfrac{4}{3}\pi(1.5t)^3=\dfrac{9}{2}\pi t^3$

따라서 구의 부피의 변화율은

$\dfrac{dV}{dt}=\dfrac{27}{2}\pi t^2$

이므로 $t=4$에서의 구의 부피의 변화율은

$\dfrac{27}{2}\pi\cdot4^2=216\pi$ 답 ⑤

20 t초 후의 정삼각형의 한 변의 길이는 $(8+2t)$ cm
이므로 정삼각형의 넓이를 S cm^2라 하면

$$S=\frac{\sqrt{3}}{4}(8+2t)^2=\frac{\sqrt{3}}{4}\{2(4+t)\}^2=\sqrt{3}(4+t)^2$$

정삼각형의 넓이가 $49\sqrt{3}$ cm^2일 때

$$\sqrt{3}(4+t)^2=49\sqrt{3}$$

$$(4+t)^2=49, \qquad 4+t=7\ (\because 4+t>0)$$

$$\therefore t=3$$

Q BOX: $t>0$이므로 $4+t>0$

한편 정삼각형의 넓이의 변화율은

$$\frac{dS}{dt}=2\sqrt{3}(4+t)$$

이므로 3초 후의 넓이의 변화율은

$2\sqrt{3}\cdot 7=14\sqrt{3}$ (cm^2/s) 답 ③

21 t초 후의 $\overline{\text{AP}}$, $\overline{\text{BP}}$의 길이는 각각 t, $9-t$이므로
두 정사각형의 넓이의 합을 S라 하면

$$S=t^2+(9-t)^2=2t^2-18t+81\ (0<t<9)$$

Q BOX: $t>0$, $9-t>0$이므로 $0<t<9$

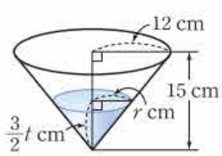
따라서 두 정사각형의 넓이의 합의 변화율은

$$\frac{dS}{dt}=4t-18$$

이므로 6초 후의 넓이의 합의 변화율은

$4\cdot 6-18=6$ 답 6

22 t초 후의 수면의 높이는 $\frac{3}{2}t$ cm
t초 후의 수면의 반지름의 길이를 r cm라 하면 오른쪽 그림에서



$$12 : r=15 : \frac{3}{2}t$$

$$15r=18t \qquad \therefore r=\frac{6}{5}t$$

t초 후의 물의 부피를 V cm^3라 하면

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2\cdot\frac{3}{2}t=\frac{1}{2}\pi r^2 t=\frac{1}{2}\pi\cdot\left(\frac{6}{5}t\right)^2 t=\frac{18}{25}\pi t^3$$

Q BOX: 밑면의 반지름의 길이가 r, 높이가 h인 원뿔의 부피는 $\frac{1}{3}\pi r^2 h$

따라서 물의 부피의 변화율은

$$\frac{dV}{dt}=\frac{54}{25}\pi t^2$$

이므로 5초 후의 물의 부피의 변화율은

$\frac{54}{25}\pi\cdot 5^2=54\pi$ (cm^3/s) 답 54π cm^3/s

23 t초 후의 두 점 A, B의 좌표는 각각

$$\left(\frac{1}{2}t,\ 0\right),\ \left(0,\ \frac{2}{3}t\right)$$

이므로 선분 AB를 $3:2$로 내분하는 점 P의 좌표는

$$\left(\frac{3\cdot 0+2\cdot\frac{1}{2}t}{3+2},\ \frac{3\cdot\frac{2}{3}t+2\cdot 0}{3+2}\right) \qquad \therefore \left(\frac{1}{5}t,\ \frac{2}{5}t\right)$$

Q BOX: 좌표평면 위의 두 점 $\text{A}(x_1, y_1)$, $\text{B}(x_2, y_2)$를 이은 선분 AB를 $m:n\ (m>0,\ n>0)$으로 내분하는 점의 좌표는 $\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n},\ \frac{my_2+ny_1}{m+n}\right)$

t초 후의 $\overline{\text{OP}}$의 길이를 l이라 하면

$$l=\sqrt{\left(\frac{1}{5}t\right)^2+\left(\frac{2}{5}t\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{5}t\ (\because t>0)$$

따라서 $\overline{\text{OP}}$의 길이의 변화율은

$$\frac{dl}{dt}=\frac{\sqrt{5}}{5}$$

답 ④

07 부정적분

14 부정적분

W 49쪽

01 (1) $f(x)=(8x+C)'=8$

(2) $f(x)=(-x^2+2x+C)'=-2x+2$

(3) $f(x)=\left(\frac{1}{3}x^3-9x+C\right)'=x^2-9$

답 (1) $f(x)=8$ (2) $f(x)=-2x+2$ (3) $f(x)=x^2-9$

02 (1) $\frac{d}{dx}\int f(x)\,dx=f(x)$이므로

$$\frac{d}{dx}\int(x^3-x^2+x)\,dx=x^3-x^2+x$$

(2) $\int\left\{\frac{d}{dx}f(x)\right\}dx=f(x)+C$이므로

$$\int\left\{\frac{d}{dx}(x^3-x^2+x)\right\}dx=x^3-x^2+x+C$$

답 (1) x^3-x^2+x (2) x^3-x^2+x+C

쌤 한마디

$f(x)$를 미분, 적분하는 순서에 따라 결과는 다음과 같이 적분상수 C만큼의 차이가 생긴다.

$f(x)$를 적분한 후 미분하면 ○ $f(x)$

$f(x)$를 미분한 후 적분하면 ○ $f(x)+C$

03 (1) $\int x^4\,dx=\frac{1}{4+1}x^{4+1}+C=\frac{1}{5}x^5+C$

(2) $\int t^{11}\,dt=\frac{1}{11+1}t^{11+1}+C=\frac{1}{12}t^{12}+C$

답 (1) $\frac{1}{5}x^5+C$ (2) $\frac{1}{12}t^{12}+C$

04 (1) $\int(-4x^3+2x-5)\,dx=-x^4+x^2-5x+C$

(2) $\int(3x+1)^2\,dx=\int(9x^2+6x+1)\,dx$

$$=3x^3+3x^2+x+C$$

(3) $\int\frac{x^3-8}{x-2}\,dx=\int\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2}\,dx$

$$=\int(x^2+2x+4)\,dx$$

$$=\frac{1}{3}x^3+x^2+4x+C$$

(4) $\int(3x^2-1)\,dx+\int(2x+5)\,dx$

$$=\int(3x^2-1+2x+5)\,dx$$

$$=\int(3x^2+2x+4)\,dx$$

$$=x^3+x^2+4x+C$$

(5) $\int(x^5+6x^3)\,dx-\int(7x^5-2x^3)\,dx$

$=\int\{x^5+6x^3-(7x^5-2x^3)\}\,dx$

$=\int(-6x^5+8x^3)\,dx$

$=-x^6+2x^4+C$

답 (1) $-x^4+x^2-5x+C$

(2) $3x^3+3x^2+x+C$

(3) $\frac{1}{3}x^3+x^2+4x+C$

(4) x^3+x^2+4x+C

(5) $-x^6+2x^4+C$

05 $f(x)=(3x^2-5x-4)'=6x-5$이므로

$f(3)=18-5=13$ 답 ⑤

06 $xf(x)=(x^4-3x^2+1)'=4x^3-6x$이므로

$f(x)=4x^2-6$

$\therefore f(-1)=4-6=-2$ 답 -2

07 $px^3+9x^2+4=(2x^4+qx^3+rx+C)'$

$=8x^3+3qx^2+r$

위의 등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로

$p=8,\ 9=3q,\ 4=r$

$\therefore p=8,\ q=3,\ r=4$

$\therefore p-q+r=9$ 답 9

08 $\frac{d}{dx}\int f(x)\,dx=7x^2-4x+1$에서

$f(x)=7x^2-4x+1$

$\therefore f(1)=7-4+1=4$ 답 ③

09 $g(x)=\frac{d}{dx}\int f(x)\,dx=f(x)=x^2-8x$이므로

$g(-1)=1+8=9$

$h(x)=\int\left\{\frac{d}{dx}f(x)\right\}dx=f(x)+C=x^2-8x+C$이고

$h(0)=3$이므로

$C=3$

따라서 $h(x)=x^2-8x+3$이므로

$h(3)=9-24+3=-12$

$\therefore g(-1)+h(3)=-3$ 답 -3

10 $f(x)=\int\left\{\frac{d}{dx}(x^2-2x)\right\}dx=x^2-2x+C$

$=(x-1)^2+C-1$

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 최솟값 $C-1$을 가지므로

$C-1=5\quad \therefore C=6$

따라서 $f(x)=x^2-2x+6$이므로

$f(4)=16-8+6=14$ 답 ②

Q BOX

이차함수의 최대·최소

$y=ax^2+bx+c$ 꼴의 최댓값 또는 최솟값은 $y=a(x-p)^2+q$ 꼴로 변형하여 구한다.

① $a>0$일 때, $x=p$에서 최솟값 q를 갖는다.

② $a<0$일 때, $x=p$에서 최댓값 q를 갖는다.

11 $\int\{2f(x)+x\}\,dx=2x^3-px^2+qx+C$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$2f(x)+x=6x^2-2px+q$

$\therefore f(x)=3x^2-\left(p+\frac{1}{2}\right)x+\frac{q}{2}$

$f(0)=1$이므로 $\frac{q}{2}=1\quad \therefore q=2$

$f(1)=3$이므로 $3-\left(p+\frac{1}{2}\right)+1=3\quad \therefore p=\frac{1}{2}$

$\therefore pq=1$ 답 1

12 $\frac{d}{dx}\{f(x)+g(x)\}=2$에서

$\int\left[\frac{d}{dx}\{f(x)+g(x)\}\right]dx=\int 2\,dx$

$\therefore f(x)+g(x)=2x+C_1$

위의 등식에 $x=0$을 대입하면 $f(0)+g(0)=C_1$

이때 $f(0)=-2,\ g(0)=1$이므로 $C_1=-1$

$\therefore f(x)+g(x)=2x-1$ …… ㉠

$\frac{d}{dx}\{f(x)g(x)\}=2x-1$에서

$\int\left[\frac{d}{dx}\{f(x)g(x)\}\right]dx=\int(2x-1)\,dx$

$\therefore f(x)g(x)=x^2-x+C_2$

위의 등식에 $x=0$을 대입하면 $f(0)g(0)=C_2$

이때 $f(0)=-2,\ g(0)=1$이므로 $C_2=-2$

$\therefore f(x)g(x)=x^2-x-2$

$=(x+1)(x-2)$ …… ㉡

$f(x),\ g(x)$가 일차함수이므로 ㉠, ㉡에서

$\begin{cases} f(x)=x+1 \\ g(x)=x-2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} f(x)=x-2 \\ g(x)=x+1 \end{cases}$

그런데 $f(0)=-2,\ g(0)=1$이므로

$f(x)=x-2,\ g(x)=x+1$

$\therefore f(3)-g(2)=1-3=-2$ 답 ①

13 $f(x)=\int(x-2)(x+2)(x^2+4)\,dx$

$(x-2)(x+2)(x^2+4)$
$=(x^2-4)(x^2+4)$
$=x^4-16$

$=\int(x^4-16)\,dx=\frac{1}{5}x^5-16x+C$

$f(0)=\frac{4}{5}$이므로 $C=\frac{4}{5}$

따라서 $f(x)=\frac{1}{5}x^5-16x+\frac{4}{5}$이므로

$f(1)=\frac{1}{5}-16+\frac{4}{5}=-15$ 답 ④

14 $f(x)=\int\frac{2x^2+9x}{x+4}\,dx-4\int\frac{x+3}{x+4}\,dx$

$=\int\frac{2x^2+9x-4x-12}{x+4}\,dx$

$=\int\frac{2x^2+5x-12}{x+4}\,dx$

$=\int\frac{(x+4)(2x-3)}{x+4}\,dx$

$=\int(2x-3)\,dx=x^2-3x+C$

$f(2)=0$이므로

$4-6+C=0 \qquad \therefore C=2$

따라서 $f(x)=x^2-3x+2$이므로

$f(3)=9-9+2=2$ 　　답 2

15 $f(x)=\int(\sqrt{x}-3)^2dx+\int(\sqrt{x}+3)^2dx$

$=\int(x-6\sqrt{x}+9)\,dx+\int(x+6\sqrt{x}+9)\,dx$

$=\int(x-6\sqrt{x}+9+x+6\sqrt{x}+9)\,dx$

$=\int(2x+18)\,dx$

$=x^2+18x+C$

$f(1)=20$이므로

$1+18+C=20 \qquad \therefore C=1$

$\therefore f(x)=x^2+18x+1$ 　　답 ⑤

16 $f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(3x^2-8x+5)\,dx$

$=x^3-4x^2+5x+C_1$

$f(1)=4$이므로

$1-4+5+C_1=4 \qquad \therefore C_1=2$

따라서 $f(x)=x^3-4x^2+5x+2$이므로

$\int f(x)\,dx=\int(x^3-4x^2+5x+2)\,dx$

$=\frac{1}{4}x^4-\frac{4}{3}x^3+\frac{5}{2}x^2+2x+C$

답 ③

17 $f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(6x^2-4x+1)\,dx$

$=2x^3-2x^2+x+C$

다항식 $f(x)$가 $x-1$로 나누어떨어지므로

$f(1)=0$

다항식 $f(x)$가 일차식 $x-a$로 나누어떨어지면 $f(a)=0$

$2-2+1+C=0 \qquad \therefore C=-1$

따라서 $f(x)=2x^3-2x^2+x-1$이므로

$f(-1)=-2-2-1-1=-6$ 　　답 -6

18 $f(x)=\int f'(x)\,dx=\int 10x(2x^2-3)\,dx$

$=\int(20x^3-30x)\,dx$

$=5x^4-15x^2+C_1$

$f(0)=1$이므로 　$C_1=1$

$\therefore f(x)=5x^4-15x^2+1$

$F(x)$가 함수 $f(x)$의 한 부정적분이므로

$F(x)=\int f(x)\,dx=\int(5x^4-15x^2+1)\,dx$

$=x^5-5x^3+x+C_2$

$F(-1)=3$이므로

$-1+5-1+C_2=3 \qquad \therefore C_2=0$

따라서 $F(x)=x^5-5x^3+x$이므로

$F(1)=1-5+1=-3$ 　　답 -3

19 $f(x)=\int f'(x)\,dx=\int\frac{x^3-1}{x^2+x+1}\,dx$

$=\int\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x^2+x+1}\,dx$

$=\int(x-1)\,dx$

$=\frac{1}{2}x^2-x+C$

곡선 $y=f(x)$가 점 $(-2,\ 2)$를 지나므로

$f(-2)=2$

$2=2+2+C \qquad \therefore C=-2$

따라서 $f(x)=\frac{1}{2}x^2-x-2$이고 곡선 $y=f(x)$가 점 $(6,\ a)$를 지나므로

$a=18-6-2=10$ 　　답 ④

20 $\int g(x)\,dx=x^3f(x)+x+C$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

$g(x)=3x^2f(x)+x^3f'(x)+1$

$\therefore g(2)=12f(2)+8f'(2)+1$

$=12\cdot3+8\cdot(-5)+1=-3$ 　　답 -3

21 $F(x)$는 함수 $f(x)$의 한 부정적분이므로

$F'(x)=f(x)$

$F(x)-xf(x)=3x^4-6x^2$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)-\{f(x)+xf'(x)\}=12x^3-12x$

$-xf'(x)=12x^3-12x$

$\therefore f'(x)=-12x^2+12$

$\therefore f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(-12x^2+12)\,dx$

$=-4x^3+12x+C$

$f(-1)=-7$이므로

$4-12+C=-7 \qquad \therefore C=1$

$\therefore f(x)=-4x^3+12x+1$

답 $f(x)=-4x^3+12x+1$

22 $2\int f(x)\,dx=xf(x)+f(x)-10x+C$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$2f(x)=f(x)+xf'(x)+f'(x)-10$

$\therefore f(x)=(x+1)f'(x)-10$ 　　⋯⋯ ㉠

$f(x)$가 일차함수이므로 $f(x)=ax+b$ (a, b는 상수, $a\neq0$)라 하면

$f'(x)=a$

$f(x)$, $f'(x)$를 ㉠에 대입하면

$ax+b=a(x+1)-10$

$\therefore a-b=10$ 　　⋯⋯ ㉡

$f(1)=2$이므로 　$a+b=2$ 　　⋯⋯ ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 　$a=6$, $b=-4$

따라서 $f(x)=6x-4$이므로

$f(3)=18-4=14$ 　　답 ④

23 $f(x)=\begin{cases} x^3-4x+C_1 & (x>3) \\ x^2+x+C_2 & (x<3) \end{cases}$

$f(2)=5$이므로 $\quad 4+2+C_2=5 \quad \therefore C_2=-1$

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이면 $x=3$에서 연속이므로 $\quad \lim_{x\to3+} f(x)=\lim_{x\to3-} f(x)=f(3)$

즉 $\lim_{x\to3+}(x^3-4x+C_1)=\lim_{x\to3-}(x^2+x-1)$에서

$\quad 27-12+C_1=9+3-1 \quad \therefore C_1=-4$

따라서 $f(x)=\begin{cases} x^3-4x-4 & (x\ge3) \\ x^2+x-1 & (x<3) \end{cases}$이므로

$$f(-3)+f(4)=(9-3-1)+(64-16-4)$$
$$=5+44=49$$

답 ⑤

24 $f'(x)=\begin{cases} x+1 & (x\ge0) \\ -x+1 & (x<0) \end{cases}$이므로

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}x^2+x+C_1 & (x\ge0) \\ -\frac{1}{2}x^2+x+C_2 & (x<0) \end{cases}$$

$f(4)=8$이므로 $\quad 8+4+C_1=8 \quad \therefore C_1=-4$

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이면 $x=0$에서 연속이므로 $\quad \lim_{x\to0+} f(x)=\lim_{x\to0-} f(x)=f(0)$

즉 $\lim_{x\to0+}\left(\frac{1}{2}x^2+x-4\right)=\lim_{x\to0-}\left(-\frac{1}{2}x^2+x+C_2\right)$에서

$\quad C_2=-4$

따라서 $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}x^2+x-4 & (x\ge0) \\ -\frac{1}{2}x^2+x-4 & (x<0) \end{cases}$이므로

$$f(-1)+f(1)=\left(-\frac{1}{2}-1-4\right)+\left(\frac{1}{2}+1-4\right)$$
$$=-\frac{11}{2}+\left(-\frac{5}{2}\right)=-8$$

답 -8

25 함수 $f'(x)$가 모든 실수 x에서 연속이면 $x=1$에서 연속이므로

$\quad \lim_{x\to1+} f'(x)=\lim_{x\to1-} f'(x)=f'(1)$

즉 $\lim_{x\to1+}(ax-5)=\lim_{x\to1-} b$에서

$\quad a-5=b \quad \therefore a-b=5 \quad \cdots\cdots$ ㉠

또 함수 $f'(x)$가 $x=-1$에서 연속이므로

$\quad \lim_{x\to-1+} f'(x)=\lim_{x\to-1-} f'(x)=f'(-1)$

즉 $\lim_{x\to-1+} b=\lim_{x\to-1-}(-x^2)$에서 $\quad b=-1$

$b=-1$을 ㉠에 대입하면

$\quad a+1=5 \quad \therefore a=4$

따라서 $f'(x)=\begin{cases} 4x-5 & (x\ge1) \\ -1 & (-1\le x<1) \\ -x^2 & (x<-1) \end{cases}$이므로

$$f(x)=\begin{cases} 2x^2-5x+C_1 & (x\ge1) \\ -x+C_2 & (-1\le x<1) \\ -\frac{1}{3}x^3+C_3 & (x<-1) \end{cases}$$

이때 $f(ab)=f(-4)$의 값을 구하려면 $x<-1$일 때 $f(x)$의 식을 구해야 한다.

$f(0)=0$이므로 $\quad C_2=0$

함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 연속이므로

$\quad \lim_{x\to-1+} f(x)=\lim_{x\to-1-} f(x)=f(-1)$

> QBOX
> 미분가능한 함수 $f(x)$
> ➡ 함수 $f(x)$는 모든 실수 x에서 연속이므로 $x=-1$에서 연속이다.

즉 $\lim_{x\to-1+}(-x)=\lim_{x\to-1-}\left(-\frac{1}{3}x^3+C_3\right)$에서

$\quad 1=\frac{1}{3}+C_3 \quad \therefore C_3=\frac{2}{3}$

따라서 $x<-1$일 때 $f(x)=-\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{3}$이므로

$$f(ab)=f(-4)=\frac{64}{3}+\frac{2}{3}=22$$

답 22

참고 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속임을 이용하여 다음과 같이 C_1의 값을 구할 수 있다.

$\lim_{x\to1+} f(x)=\lim_{x\to1-} f(x)=f(1)$이므로

$\quad \lim_{x\to1+}(2x^2-5x+C_1)=\lim_{x\to1-}(-x)$

$\quad 2-5+C_1=-1 \quad \therefore C_1=2$

26 $\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1-h)}{h}$

> $f'(a)$
> $=\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$
> $=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)+f(1)-f(1-h)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{\{f(1+h)-f(1)\}-\{f(1-h)-f(1)\}}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}-\lim_{h\to0}\frac{f(1-h)-f(1)}{-h}\cdot(-1)$

$=f'(1)+f'(1)=2f'(1)$

$f(x)=\int(4x^2-2x+3)\,dx$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\quad f'(x)=4x^2-2x+3$

$\quad \therefore f'(1)=4-2+3=5$

따라서 구하는 값은

$\quad 2f'(1)=2\cdot5=10$

답 ⑤

27 $\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x+5h)}{2h}$

> $f'(x)$
> $=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)+f(x)-f(x+5h)}{2h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{\{f(x+h)-f(x)\}-\{f(x+5h)-f(x)\}}{2h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\cdot\frac{1}{2}$

$\quad -\lim_{h\to0}\frac{f(x+5h)-f(x)}{5h}\cdot\frac{5}{2}$

$=\frac{1}{2}f'(x)-\frac{5}{2}f'(x)=-2f'(x)$

즉 $-2f'(x)=-8x^3+6x^2$이므로

$\quad f'(x)=4x^3-3x^2$

$\quad \therefore f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(4x^3-3x^2)\,dx$

$\quad\quad =x^4-x^3+C$

$f(-1)=4$이므로

$\quad 1+1+C=4 \quad \therefore C=2$

따라서 $f(x)=x^4-x^3+2$이므로

$\quad f(3)=81-27+2=56$

답 56

28 $f(x)=\int(6x^2-2x+a)\,dx$의 양변을 x에 대하여 미분하면 $\quad f'(x)=6x^2-2x+a$

$\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=3$에서 $f'(1)=3$이므로

$6-2+a=3 \qquad \therefore a=-1$

$\therefore f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(6x^2-2x-1)\,dx$

$=2x^3-x^2-x+C$

$f(0)=1$이므로 $\qquad C=1$

따라서 $f(x)=2x^3-x^2-x+1$이므로

$f(-2)=-16-4+2+1=-17$ 답 ①

29 $f'(x)=4x+8$이므로

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a,\ f(a))$에서의 접선의 기울기는 $x=a$에서의 미분계수 $f'(a)$와 같다.

$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(4x+8)\,dx$

$=2x^2+8x+C=2(x+2)^2+C-8$

함수 $f(x)$의 최솟값이 -6이므로

이차함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 최솟값 $C-8$을 갖는다.

$C-8=-6 \qquad \therefore C=2$

따라서 $f(x)=2x^2+8x+2$이므로

$f(3)=18+24+2=44$ 답 ③

30 $f'(x)=ax^2+1$이므로

$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(ax^2+1)\,dx$

$=\frac{a}{3}x^3+x+C$

곡선 $y=f(x)$가 점 $(1,\ 0)$을 지나므로

$f(1)=0$

$0=\frac{a}{3}+1+C \qquad \therefore a+3C=-3 \quad \cdots\cdots$ ㉠

곡선 $y=f(x)$가 점 $(2,\ -13)$을 지나므로

$f(2)=-13$

$-13=\frac{8}{3}a+2+C$

$\therefore 8a+3C=-45 \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\qquad a=-6,\ C=1$

따라서 $f(x)=-2x^3+x+1$이므로

$b=f(-2)=16-2+1=15$

$\therefore a+b=9$ 답 9

31 $f(x)=\int(-x+k)\,dx$의 양변을 x에 대하여 미분하면 $\quad f'(x)=-x+k$

점 $(3,\ 4)$에서의 접선의 기울기가 -1이므로

$f'(3)=-1$

$-3+k=-1 \qquad \therefore k=2$

$\therefore f'(x)=-x+2$

$\therefore f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(-x+2)\,dx$

$=-\frac{1}{2}x^2+2x+C$

곡선 $y=f(x)$가 점 $(3,\ 4)$를 지나므로

$4=-\frac{9}{2}+6+C \qquad \therefore C=\frac{5}{2}$

따라서 $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+2x+\frac{5}{2}$이므로

$f(5)=-\frac{25}{2}+10+\frac{5}{2}=0$ 답 ⑤

32 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=5x-3$의 접점의 x좌표를 $t\ (t>0)$라 하면 $f'(t)=5$이므로

제1사분면에서 접하므로 $t>0$

$3t^2+6t-4=5, \qquad t^2+2t-3=0$

$(t+3)(t-1)=0 \qquad \therefore t=1\ (\because t>0)$

즉 접점의 좌표는 $\qquad (1,\ 2)$

접점은 직선 $y=5x-3$ 위의 점이므로 접점의 y좌표는 $5\cdot1-3=2$

$f'(x)=3x^2+6x-4$이므로

$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(3x^2+6x-4)\,dx$

$=x^3+3x^2-4x+C$

곡선 $y=f(x)$가 점 $(1,\ 2)$를 지나므로

$2=1+3-4+C \qquad \therefore C=2$

따라서 곡선 $y=x^3+3x^2-4x+2$가 y축과 만나는 점의 좌표는 $\qquad (0,\ 2)$ 답 $(0,\ 2)$

33 $f(x)=3\int(x^2-x-6)\,dx$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=3(x^2-x-6)=3(x+2)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $\qquad x=-2$ 또는 $x=3$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 극댓값을 갖고, $x=3$에서 극솟값 -40을 갖는다. 이때

$f(x)=3\int(x^2-x-6)\,dx$

$=3\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-6x\right)+C$

$=x^3-\frac{3}{2}x^2-18x+C$

이고 $f(3)=-40$이므로

$27-\frac{27}{2}-54+C=-40 \qquad \therefore C=\frac{1}{2}$

즉 $f(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2-18x+\frac{1}{2}$이므로 $f(x)$의 극댓값은

$f(-2)=-8-6+36+\frac{1}{2}=\frac{45}{2}$ 답 ②

34 $\int\{1-f(x)\}\,dx=\frac{3}{5}x^5-x^4-4x^3+x+C$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$1-f(x)=3x^4-4x^3-12x^2+1$

$\therefore f(x)=-3x^4+4x^3+12x^2$

$\therefore f'(x)=-12x^3+12x^2+24x$

$=-12x(x+1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $\qquad x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	5	↘	0	↗	32	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$, $x=2$에서 각각 극댓값 5, 32를 갖고, $x=0$에서 극솟값 0을 가지므로 $f(x)$의 모든 극값의 합은 $\qquad 5+0+32=37$ 답 ④

35 $f(x)$의 최고차항이 x^3이므로 $f'(x)$의 최고차항은 $3x^2$이다.
이때 $f'(2)=f'(4)=0$이므로

$f'(x)=3(x-2)(x-4)$

$f'(x)=0$에서 $x=2$ 또는 $x=4$

x	$\cdots$	2	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극댓값 10을 갖고, $x=4$에서 극솟값을 갖는다. 이때

$$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int 3(x-2)(x-4)\,dx$$
$$=\int(3x^2-18x+24)\,dx$$
$$=x^3-9x^2+24x+C$$

이고 $f(2)=10$이므로

$8-36+48+C=10 \qquad \therefore C=-10$

즉 $f(x)=x^3-9x^2+24x-10$이므로 $f(x)$의 극솟값은

$f(4)=64-144+96-10=6$

답 6

36 $y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표가 -1, 3이므로 $f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=3$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값을 갖고, $x=3$에서 극솟값 -8을 갖는다.
$f'(x)=a(x+1)(x-3)\ (a>0)$이라 하면 $y=f'(x)$의 그래프가 점 $(1, -4)$를 지나므로

이차함수 $f'(x)$에 대하여 $f'(-1)=0$, $f'(3)=0$이므로 $f'(x)=a(x+1)(x-3)$이라 할 수 있다. 이때 주어진 $y=f'(x)$의 그래프는 아래로 볼록하므로 $a>0$이다.

$-4=a\cdot2\cdot(-2) \qquad \therefore a=1$

$$\therefore f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(x+1)(x-3)\,dx$$
$$=\int(x^2-2x-3)\,dx$$
$$=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x+C$$

$f(3)=-8$이므로

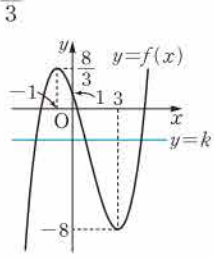
$9-9-9+C=-8 \qquad \therefore C=1$

$\therefore f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x+1$

즉 $f(x)$의 극댓값은

$f(-1)=-\frac{1}{3}-1+3+1=\frac{8}{3}$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



방정식 $f(x)=k$가 서로 다른 세 실근을 가지려면 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나야 하므로

$-8<k<\frac{8}{3}$

답 $-8<k<\frac{8}{3}$

08 정적분

15 정적분

55쪽

01 (1) $\int_1^3(3x^2-2)\,dx=\Big[x^3-2x\Big]_1^3$
$=(27-6)-(1-2)$
$=22$

(2) $\int_{-1}^2(-y^2-8y+5)\,dy$
$=\Big[-\frac{1}{3}y^3-4y^2+5y\Big]_{-1}^2$
$=\Big(-\frac{8}{3}-16+10\Big)-\Big(\frac{1}{3}-4-5\Big)=0$

(3) $\int_1^2(4x^3+2x)\,dx=\Big[x^4+x^2\Big]_1^2$
$=(16+4)-(1+1)$
$=18$

(4) $\int_0^{-1}(x+1)(3x-4)\,dx=\int_0^{-1}(3x^2-x-4)\,dx$
$=\Big[x^3-\frac{1}{2}x^2-4x\Big]_0^{-1}$
$=-1-\frac{1}{2}+4$
$=\frac{5}{2}$

답 (1) 22 (2) 0 (3) 18 (4) $\frac{5}{2}$

적분 구간이 같은 정적분의 계산은 하나의 정적분으로 나타낸 후 피적분함수를 간단히 정리하여 적분한다.

02 (1) $\int_0^1(x^2+7x)\,dx+\int_0^1(2x^2-x)\,dx$
$=\int_0^1(x^2+7x+2x^2-x)\,dx$
$=\int_0^1(3x^2+6x)\,dx$
$=\Big[x^3+3x^2\Big]_0^1$
$=1+3=4$

(2) $\int_{-1}^2(3x^3-2x^2+x)\,dx-\int_{-1}^2(x^3-5x^2-x)\,dx$
$=\int_{-1}^2\{3x^3-2x^2+x-(x^3-5x^2-x)\}\,dx$
$=\int_{-1}^2(2x^3+3x^2+2x)\,dx$
$=\Big[\frac{1}{2}x^4+x^3+x^2\Big]_{-1}^2$
$=(8+8+4)-\Big(\frac{1}{2}-1+1\Big)=\frac{39}{2}$

피적분함수가 같고, 한 정적분의 위끝과 다른 정적분의 아래끝이 같은 정적분의 계산은 적분 구간을 하나로 나타내어 적분한다.

(3) $\int_1^0(6x^2+4x+3)\,dx+\int_0^2(6x^2+4x+3)\,dx$
$=\int_1^2(6x^2+4x+3)\,dx$
$=\Big[2x^3+2x^2+3x\Big]_1^2$
$=(16+8+6)-(2+2+3)=23$

(4) $\int_{-2}^{-1}(5x^4-2)\,dx-\int_{1}^{-1}(5x^4-2)\,dx$

$=\int_{-2}^{-1}(5x^4-2)\,dx+\int_{-1}^{1}(5x^4-2)\,dx$

$=\int_{-2}^{1}(5x^4-2)\,dx$

$=\Big[x^5-2x\Big]_{-2}^{1}$

$=(1-2)-(-32+4)=27$

답 (1) 4 (2) $\frac{39}{2}$ (3) 23 (4) 27

Q BOX

$\int_{1}^{-1}(5x^4-2)\,dx$
$=-\int_{-1}^{1}(5x^4-2)\,dx$

03 (1) $\int_{-2}^{2}(x^3+9x^2+6x)\,dx$

$=\int_{-2}^{2}(x^3+6x)\,dx+\int_{-2}^{2}9x^2\,dx$

$=2\int_{0}^{2}9x^2\,dx=2\Big[3x^3\Big]_{0}^{2}$

$=2\cdot 24=48$

(2) $\int_{-1}^{1}(x^5+10x^4-3x^2+1)\,dx$

$=\int_{-1}^{1}x^5\,dx+\int_{-1}^{1}(10x^4-3x^2+1)\,dx$

$=2\int_{0}^{1}(10x^4-3x^2+1)\,dx$

$=2\Big[2x^5-x^3+x\Big]_{0}^{1}$

$=2\cdot(2-1+1)=4$

답 (1) 48 (2) 4

피적분함수가 다항함수일 때, 아래끝과 위끝의 절댓값이 같고 부호가 다른 경우 피적분함수를 우함수와 기함수로 나누어 적분하면 편리하다.

$\int_{-2}^{2}(x^3+6x)\,dx=0$

04 $\int_{1}^{2}x^2f(x)\,dx=\int_{1}^{2}x^2(-8x+3)\,dx$

$=\int_{1}^{2}(-8x^3+3x^2)\,dx$

$=\Big[-2x^4+x^3\Big]_{1}^{2}$

$=(-32+8)-(-2+1)$

$=-23$

답 ④

05 $\int_{4}^{4}(2x+1)(x-1)\,dx-\int_{3}^{1}(9y+1)(y+1)\,dy$

$=\int_{1}^{3}(9y+1)(y+1)\,dy$

$=\int_{1}^{3}(9y^2+10y+1)\,dy$

$=\Big[3y^3+5y^2+y\Big]_{1}^{3}$

$=(81+45+3)-(3+5+1)=120$

답 120

아래끝과 위끝이 같은 정적분의 값은 0이다.

06 $\int_{-1}^{0}(-3x^2+kx+6)\,dx=\Big[-x^3+\frac{k}{2}x^2+6x\Big]_{-1}^{0}$

$=-\left(1+\frac{k}{2}-6\right)$

$=-\frac{k}{2}+5$

따라서 $-\frac{k}{2}+5=3$이므로

$\frac{k}{2}=2\qquad\therefore k=4$

답 ②

07 $f'(x)=6x-1$이므로

$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(6x-1)\,dx$

$=3x^2-x+C$

$f(1)=4$이므로

$3-1+C=4\qquad\therefore C=2$

따라서 $f(x)=3x^2-x+2$이므로

$\int_{0}^{2}f(x)\,dx=\int_{0}^{2}(3x^2-x+2)\,dx$

$=\Big[x^3-\frac{1}{2}x^2+2x\Big]_{0}^{2}$

$=8-2+4=10$

답 ③

08 $\int_{-1}^{2}(x^3-2x)\,dx+3\int_{-1}^{2}(x^3+8x+1)\,dx$

$=\int_{-1}^{2}\{x^3-2x+3(x^3+8x+1)\}\,dx$

$=\int_{-1}^{2}(4x^3+22x+3)\,dx$

$=\Big[x^4+11x^2+3x\Big]_{-1}^{2}$

$=(16+44+6)-(1+11-3)=57$

답 57

$3\int_{-1}^{2}(x^3+8x+1)\,dx$
$=\int_{-1}^{2}3(x^3+8x+1)\,dx$

09 $\int_{0}^{1}1\,dx+\int_{0}^{1}2x\,dx+\int_{0}^{1}3x^2\,dx+\cdots+\int_{0}^{1}nx^{n-1}\,dx$

$=\int_{0}^{1}(1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1})\,dx$

$=\Big[x+x^2+x^3+\cdots+x^n\Big]_{0}^{1}$

$=1+1+1+\cdots+1=n$

$\therefore n=50$

답 ④

$\underbrace{1+1+1+\cdots+1}_{n\text{개}}=n$

10 $\int_{-4}^{4}\{f(x)+g(x)\}\,dx=8\qquad\cdots\cdots$ ㉠

$\int_{-4}^{4}\{f(x)-g(x)\}\,dx=2\qquad\cdots\cdots$ ㉡

㉠+㉡을 하면

$\int_{-4}^{4}\{f(x)+g(x)+f(x)-g(x)\}\,dx=10$

$\int_{-4}^{4}2f(x)\,dx=10,\qquad 2\int_{-4}^{4}f(x)\,dx=10$

$\therefore \int_{-4}^{4}f(x)\,dx=5$

㉠−㉡을 하면

$\int_{-4}^{4}\{f(x)+g(x)-f(x)+g(x)\}\,dx=6$

$\int_{-4}^{4}2g(x)\,dx=6,\qquad 2\int_{-4}^{4}g(x)\,dx=6$

$\therefore \int_{-4}^{4}g(x)\,dx=3$

$\therefore \int_{-4}^{4}\{3f(x)-2g(x)\}\,dx$

$=3\int_{-4}^{4}f(x)\,dx-2\int_{-4}^{4}g(x)\,dx$

$=3\cdot5-2\cdot3=9$

답 9

W 08 정적분

11 $\int_1^3 (x+k)^2\,dx - \int_1^3 (4x^2+kx)\,dx$

$=\int_1^3 \{x^2+2kx+k^2-(4x^2+kx)\}\,dx$

$=\int_1^3 (-3x^2+kx+k^2)\,dx$

$=\left[-x^3+\frac{k}{2}x^2+k^2x\right]_1^3$

$=\left(-27+\frac{9}{2}k+3k^2\right)-\left(-1+\frac{k}{2}+k^2\right)$

$=2k^2+4k-26$

$=2(k+1)^2-28$

따라서 주어진 정적분은 $k=-1$에서 최솟값 -28을 갖는다. 답 ②

12 $\int_1^2 (10x-5)\,dx - \int_a^2 (10x-5)\,dx$

$=\int_1^2 (10x-5)\,dx + \int_2^a (10x-5)\,dx$

$=\int_1^a (10x-5)\,dx$

$=\left[5x^2-5x\right]_1^a$

$=(5a^2-5a)-(5-5)$

$=5a^2-5a$

따라서 $5a^2-5a=60$이므로

$a^2-a-12=0$

$(a+3)(a-4)=0$

$\therefore a=4$ ($\because a>0$) 답 4

13 $\int_0^5 f(x)\,dx$

$=\int_0^3 f(x)\,dx+\int_3^5 f(x)\,dx$

$=\int_0^3 f(x)\,dx+\left\{\int_3^{-2} f(x)\,dx+\int_{-2}^5 f(x)\,dx\right\}$

$=\int_0^3 f(x)\,dx-\int_{-2}^3 f(x)\,dx+\int_{-2}^5 f(x)\,dx$

$=9-5+1=5$ 답 ②

14 $\int_{-3}^{-1} \frac{t^2}{t-1}\,dt-\int_0^{-1} \frac{x^2}{x-1}\,dx+\int_{-3}^0 \frac{x-2}{x-1}\,dx$

$=\int_{-3}^{-1} \frac{x^2}{x-1}\,dx+\int_{-1}^0 \frac{x^2}{x-1}\,dx+\int_{-3}^0 \frac{x-2}{x-1}\,dx$

$=\int_{-3}^0 \frac{x^2}{x-1}\,dx+\int_{-3}^0 \frac{x-2}{x-1}\,dx$

$=\int_{-3}^0 \frac{x^2+x-2}{x-1}\,dx$

$=\int_{-3}^0 \frac{(x+2)(x-1)}{x-1}\,dx$

$=\int_{-3}^0 (x+2)\,dx$

$=\left[\frac{1}{2}x^2+2x\right]_{-3}^0$

$=-\left(\frac{9}{2}-6\right)=\frac{3}{2}$ 답 $\frac{3}{2}$

Q BOX

$x=-1$을 경계로 함수식이 다르므로 이 값을 경계로 적분 구간을 나눈다.

$\int_a^2 (10x-5)\,dx$
$=-\int_2^a (10x-5)\,dx$

피적분함수가 같고, 한 정적분의 위끝과 다른 정적분의 아래끝이 같다.

적분 구간이 같다.

$x^2+6x=0$에서
$x(x+6)=0$
$\therefore x=-6$
또는 $x=0$
즉 $x=-6$, $x=0$을 경계로 x^2+6x의 값의 부호가 바뀐다.

15 $xf(x)=\begin{cases} -8x^3+3x^2 & (-1\le x\le 0) \\ x^2-10x & (-2\le x\le -1) \end{cases}$이므로

$\int_{-2}^0 xf(x)\,dx$

$=\int_{-2}^{-1} xf(x)\,dx+\int_{-1}^0 xf(x)\,dx$

$=\int_{-2}^{-1} (x^2-10x)\,dx+\int_{-1}^0 (-8x^3+3x^2)\,dx$

$=\left[\frac{1}{3}x^3-5x^2\right]_{-2}^{-1}+\left[-2x^4+x^3\right]_{-1}^0$

$=\left\{\left(-\frac{1}{3}-5\right)-\left(-\frac{8}{3}-20\right)\right\}-(-2-1)$

$=\frac{61}{3}$ 답 ①

16 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이면 $x=2$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 2+} f(x)=\lim_{x\to 2-} f(x)=f(2)$

즉 $\lim_{x\to 2+} (x^2+ax)=\lim_{x\to 2-} (-2x)$에서

$4+2a=-4$

$\therefore a=-4$

따라서 $f(x)=\begin{cases} x^2-4x & (x\ge 2) \\ -2x & (x\le 2) \end{cases}$이므로

$\int_1^3 f(x)\,dx$

$=\int_1^2 f(x)\,dx+\int_2^3 f(x)\,dx$

$=\int_1^2 (-2x)\,dx+\int_2^3 (x^2-4x)\,dx$

$=\left[-x^2\right]_1^2+\left[\frac{1}{3}x^3-2x^2\right]_2^3$

$=\{-4-(-1)\}+\left\{(9-18)-\left(\frac{8}{3}-8\right)\right\}$

$=-\frac{20}{3}$ 답 ⑤

17 $a>0$이므로

$\int_{-3}^a f(x)\,dx=\int_{-3}^0 f(x)\,dx+\int_0^a f(x)\,dx$

$=\int_{-3}^0 (x^2+1)\,dx+\int_0^a (-4x+1)\,dx$

$=\left[\frac{1}{3}x^3+x\right]_{-3}^0+\left[-2x^2+x\right]_0^a$

$=-(-9-3)+(-2a^2+a)$

$=-2a^2+a+12$

따라서 $-2a^2+a+12=6$이므로

$2a^2-a-6=0$

$(2a+3)(a-2)=0$

$\therefore a=2$ ($\because a>0$) 답 2

18 $|x^2+6x|=\begin{cases} x^2+6x & (x\le -6 \text{ 또는 } x\ge 0) \\ -x^2-6x & (-6\le x\le 0) \end{cases}$

이므로

$$\int_{-3}^{1}|x^2+6x|\,dx$$
$$=\int_{-3}^{0}(-x^2-6x)\,dx+\int_{0}^{1}(x^2+6x)\,dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3-3x^2\right]_{-3}^{0}+\left[\frac{1}{3}x^3+3x^2\right]_{0}^{1}$$
$$=-(9-27)+\left(\frac{1}{3}+3\right)=\frac{64}{3}$$

답 ①

19 $|x-2|=\begin{cases} x-2 & (x\ge 2) \\ -x+2 & (x\le 2)\end{cases}$이고, $a>2$이므로

$$\int_{0}^{a}|x-2|\,dx$$
$$=\int_{0}^{2}(-x+2)\,dx+\int_{2}^{a}(x-2)\,dx$$
$$=\left[-\frac{1}{2}x^2+2x\right]_{0}^{2}+\left[\frac{1}{2}x^2-2x\right]_{2}^{a}$$
$$=(-2+4)+\left\{\left(\frac{1}{2}a^2-2a\right)-(2-4)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}a^2-2a+4$$

따라서 $\frac{1}{2}a^2-2a+4=10$이므로

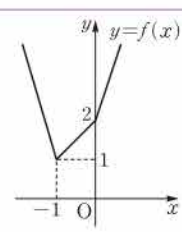
$a^2-4a-12=0,\qquad (a+2)(a-6)=0$

$\therefore a=6\ (\because a>2)$

답 6

20 $f(x)=\begin{cases} 3x+2 & (x\ge 0) \\ x+2 & (-1\le x\le 0) \\ -3x-2 & (x\le -1)\end{cases}$

함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $f(x)$는 $x=-1$에서 최솟값 1을 갖는다.



$\therefore a=-1,\ b=1$

$$\therefore \int_{a}^{b}f(x)\,dx$$
$$=\int_{-1}^{1}f(x)\,dx$$
$$=\int_{-1}^{0}f(x)\,dx+\int_{0}^{1}f(x)\,dx$$
$$=\int_{-1}^{0}(x+2)\,dx+\int_{0}^{1}(3x+2)\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{2}x^2+2x\right]_{-1}^{0}+\left[\frac{3}{2}x^2+2x\right]_{0}^{1}$$
$$=-\left(\frac{1}{2}-2\right)+\left(\frac{3}{2}+2\right)=5$$

답 ③

$|x|=\begin{cases} x & (x\ge 0) \\ -x & (x\le 0)\end{cases}$,

$|2x+2|$
$=\begin{cases} 2x+2 & (x\ge -1) \\ -2x-2 & (x\le -1)\end{cases}$

21 $\displaystyle\int_{-1}^{1}(x-3)(x^2-6x+2)\,dx$

$$=\int_{-1}^{1}(x^3-9x^2+20x-6)\,dx$$
$$=\int_{-1}^{1}(x^3+20x)\,dx+\int_{-1}^{1}(-9x^2-6)\,dx$$
$$=2\int_{0}^{1}(-9x^2-6)\,dx$$
$$=2\left[-3x^3-6x\right]_{0}^{1}$$
$$=2\cdot(-3-6)=-18$$

답 −18

22 $\displaystyle\int_{-a}^{a}(3x^2+4x+8)\,dx$

$$=\int_{-a}^{a}(3x^2+8)\,dx+\int_{-a}^{a}4x\,dx$$
$$=2\int_{0}^{a}(3x^2+8)\,dx=2\left[x^3+8x\right]_{0}^{a}$$
$$=2(a^3+8a)=2a^3+16a$$

따라서 $2a^3+16a=48$이므로

$a^3+8a-24=0,\qquad (a-2)(a^2+2a+12)=0$

$\therefore a=2\ (\because a^2+2a+12>0)$

답 ②

2	1	0	8	−24
		2	4	24
	1	2	12	0

$\therefore a^3+8a-24$
$=(a-2)(a^2+2a+12)$

$a^2+2a+12$
$=(a+1)^2+11>0$

23 $\displaystyle\int_{-2}^{2}f(x)\,dx=\int_{-2}^{2}(9x^2+ax+b)\,dx$

$$=\int_{-2}^{2}(9x^2+b)\,dx+\int_{-2}^{2}ax\,dx$$
$$=2\int_{0}^{2}(9x^2+b)\,dx$$
$$=2\left[3x^3+bx\right]_{0}^{2}$$
$$=2(24+2b)=4b+48$$

즉 $4b+48=8$이므로 $\quad b=-10$

$$\int_{-2}^{2}xf(x)\,dx=\int_{-2}^{2}x(9x^2+ax+b)\,dx$$
$$=\int_{-2}^{2}(9x^3+ax^2+bx)\,dx$$
$$=\int_{-2}^{2}(9x^3+bx)\,dx+\int_{-2}^{2}ax^2\,dx$$
$$=2\int_{0}^{2}ax^2\,dx=2\left[\frac{a}{3}x^3\right]_{0}^{2}$$
$$=2\cdot\frac{8}{3}a=\frac{16}{3}a$$

즉 $\frac{16}{3}a=16$이므로 $\quad a=3$

$\therefore a+b=-7$

답 ③

24 $f(x)=f(-x)$에서 $f(x)$는 우함수이고 $g(x)=-g(-x)$에서 $g(x)$는 기함수이다.

$$\therefore \int_{-3}^{3}\{f(x)+g(x)\}\,dx$$
$$=\int_{-3}^{3}f(x)\,dx+\int_{-3}^{3}g(x)\,dx$$
$$=2\int_{0}^{3}f(x)\,dx$$
$$=2\cdot 4=8$$

답 8

25 $f(-x)=f(x)$에서 $f(x)$는 우함수이고 $\displaystyle\int_{-6}^{6}f(x)\,dx=32$이므로

$2\displaystyle\int_{0}^{6}f(x)\,dx=32\qquad \therefore \int_{0}^{6}f(x)\,dx=16$

$$\therefore \int_{4}^{6}f(x)\,dx=\int_{4}^{0}f(x)\,dx+\int_{0}^{6}f(x)\,dx$$
$$=-\int_{0}^{4}f(x)\,dx+\int_{0}^{6}f(x)\,dx$$
$$=-6+16=10$$

답 ⑤

16 정적분으로 정의된 함수

W 59쪽

01 (3) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_x^{x+1}(3t+10)\,dt$

$=\{3(x+1)+10\}-(3x+10)=3$

(4) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_x^{x-2}(t^2-2t-3)\,dt$

$=\{(x-2)^2-2(x-2)-3\}-(x^2-2x-3)$

$=-4x+8$

답 (1) x^2+5x (2) $2x^3-4x+1$ (3) 3 (4) $-4x+8$

02 (1) 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{d}{dx}\int_1^x f(t)\,dt=\frac{d}{dx}(x^2-6x+5)$$

$\therefore f(x)=2x-6$

(2) 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{d}{dx}\int_0^x f(t)\,dt=\frac{d}{dx}(x^3+8x^2)$$

$\therefore f(x)=3x^2+16x$

답 (1) $f(x)=2x-6$ (2) $f(x)=3x^2+16x$

03 (1) $f(t)=4t^2+6t+1$, $F'(t)=f(t)$라 하면

$\displaystyle\lim_{x\to-3}\frac{1}{x+3}\int_{-3}^x(4t^2+6t+1)\,dt$

$=\displaystyle\lim_{x\to-3}\frac{1}{x+3}\int_{-3}^x f(t)\,dt$

$=\displaystyle\lim_{x\to-3}\frac{F(x)-F(-3)}{x-(-3)}$

$=F'(-3)=f(-3)$

$=36-18+1=19$

> 함수 $y=f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수는
> $f'(a)$
> $=\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$
> $=\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

(2) $f(t)=2t^3-t-9$, $F'(t)=f(t)$라 하면

$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\int_2^{x+2}(2t^3-t-9)\,dt$

$=\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\int_2^{x+2}f(t)\,dt$

$=\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{F(x+2)-F(2)}{x}$

$=F'(2)=f(2)$

$=16-2-9=5$

답 (1) 19 (2) 5

04 $\displaystyle\int_1^3 f(t)\,dt=k$ (k는 상수) …… ㉠

> 정적분의 아래끝과 위끝이 모두 상수이면 정적분의 결과도 상수이다.

로 놓으면 $f(x)=-3x^2+4x+k$

$f(t)=-3t^2+4t+k$를 ㉠의 좌변에 대입하면

$\displaystyle\int_1^3(-3t^2+4t+k)\,dt$

$=\Big[-t^3+2t^2+kt\Big]_1^3$

$=(-27+18+3k)-(-1+2+k)$

$=2k-10$

즉 ㉠에서 $2k-10=k$이므로 $k=10$

따라서 $f(x)=-3x^2+4x+10$이므로

$f(-1)=-3-4+10=3$

답 3

05 $\displaystyle\int_0^1 f'(t)\,dt=k$ (k는 상수) …… ㉠

로 놓으면 $f(x)=x^3-6x+2k$

$\therefore f'(x)=3x^2-6$

$f'(t)=3t^2-6$을 ㉠의 좌변에 대입하면

$\displaystyle\int_0^1(3t^2-6)\,dt=\Big[t^3-6t\Big]_0^1=1-6=-5$

즉 ㉠에서 $k=-5$

따라서 $f(x)=x^3-6x-10$이므로

$f(2)=8-12-10=-14$

답 -14

06 $f(x)=6x^2+\displaystyle\int_{-2}^0(x-1)f(t)\,dt$

> 정적분에서 변수가 t이므로 t 이외의 문자는 상수로 생각한다.

$=6x^2+(x-1)\displaystyle\int_{-2}^0 f(t)\,dt$

$\displaystyle\int_{-2}^0 f(t)\,dt=k$ (k는 상수) …… ㉠

로 놓으면

$f(x)=6x^2+k(x-1)$

$=6x^2+kx-k$

$f(t)=6t^2+kt-k$를 ㉠의 좌변에 대입하면

$\displaystyle\int_{-2}^0(6t^2+kt-k)\,dt=\Big[2t^3+\frac{k}{2}t^2-kt\Big]_{-2}^0$

$=-(-16+2k+2k)$

$=16-4k$

즉 ㉠에서 $16-4k=k$이므로

$k=\dfrac{16}{5}$

$\therefore \displaystyle\int_{-2}^0 f(t)\,dt=\frac{16}{5}$

답 ③

07 $f(-1)=\displaystyle\int_{-1}^{-1}(t^2+8t)\,dt=0$

$f(x)=\displaystyle\int_{-1}^x(t^2+8t)\,dt$에서

$f'(x)=x^2+8x$

> $f'(x)$
> $=\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_{-1}^x(t^2+8t)\,dt$
> $=x^2+8x$

$\therefore f'(-1)=1-8=-7$

$\therefore f(-1)+f'(-1)=-7$

답 -7

08 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=2kx+1$

또 $x=3$을 주어진 등식의 양변에 대입하면

$0=9k+3+6$

$\therefore k=-1$

따라서 $f(x)=-2x+1$이므로

$f(k)=f(-1)=2+1=3$

답 ②

09 $y=F(x)$의 그래프가 두 점 $(-1,\ 0)$, $(1,\ 0)$을 지나므로

$F(x)=a(x+1)(x-1)=ax^2-a$ $(a<0)$

라 하면

$\displaystyle\int_1^x f(t)\,dt=ax^2-a$

앞의 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=2ax$

$f(2)=-8$이므로

$4a=-8 \qquad \therefore a=-2$

따라서 $f(x)=-4x$이므로

$f(-3)=12$ 답 12

10 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)+xf'(x)=3x^2-8x+f(x)$

$xf'(x)=3x^2-8x$

$\therefore f'(x)=3x-8$

$\therefore f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(3x-8)\,dx$

$=\frac{3}{2}x^2-8x+C \qquad \cdots\cdots ㉠$

또 $x=2$를 주어진 등식의 양변에 대입하면

$2f(2)=8-16+0$

$\therefore f(2)=-4$

즉 ㉠에서

$6-16+C=-4$

$\therefore C=6$

따라서 $f(x)=\frac{3}{2}x^2-8x+6$이므로 $f(k)=-2$에서

$\frac{3}{2}k^2-8k+6=-2, \qquad 3k^2-16k+16=0$

$(3k-4)(k-4)=0$

$\therefore k=4$ ($\because k$는 정수) 답 ④

11 주어진 등식의 좌변을 변형하면

$x\int_1^x f(t)\,dt-\int_1^x tf(t)\,dt=x^3-5x^2+7x-3$

양변을 x에 대하여 미분하면

$\int_1^x f(t)\,dt+xf(x)-xf(x)=3x^2-10x+7$

$\therefore \int_1^x f(t)\,dt=3x^2-10x+7$

양변을 다시 x에 대하여 미분하면

$f(x)=6x-10$

$\therefore f(1)=6-10=-4$ 답 -4

12 주어진 등식의 좌변을 변형하면

$x\int_0^x f'(t)\,dt-\int_0^x tf'(t)\,dt=x^4$

양변을 x에 대하여 미분하면

$\int_0^x f'(t)\,dt+xf'(x)-xf'(x)=4x^3$

$\int_0^x f'(t)\,dt=4x^3$

$\Big[f(t)\Big]_0^x=4x^3$

$f(x)-f(0)=4x^3$

$\therefore f(x)=4x^3+f(0)=4x^3+5$

답 $f(x)=4x^3+5$

Q BOX

$\{f(x)g(x)\}'$
$=f'(x)g(x)$
$+f(x)g'(x)$

$f'(x)$가 이차함수이므로 $f(x)$는 삼차함수이다.

삼차함수 $f(x)$가 극값을 갖는다.
⟺ 삼차함수 $f(x)$가 극댓값과 극솟값을 모두 갖는다.

13 $\int_{-2}^x (x-t)f(t)\,dt=2x^3+ax^2+b \qquad \cdots\cdots ㉠$

㉠의 좌변을 변형하면

$x\int_{-2}^x f(t)\,dt-\int_{-2}^x tf(t)\,dt=2x^3+ax^2+b$

양변을 x에 대하여 미분하면

$\int_{-2}^x f(t)\,dt+xf(x)-xf(x)=6x^2+2ax$

$\therefore \int_{-2}^x f(t)\,dt=6x^2+2ax \qquad \cdots\cdots ㉡$

$x=-2$를 ㉡의 양변에 대입하면

$0=24-4a$

$\therefore a=6$

$x=-2$를 ㉠의 양변에 대입하면

$0=-16+24+b \qquad \therefore b=-8$

$\therefore a-b=14$ 답 ⑤

14 $f(x)=\int_0^x (t^2-t-2)\,dt$에서

$f'(x)=x^2-x-2=(x+1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $\qquad x=-1$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값 b를 가지므로

$a=-1$,

$b=f(-1)=\int_0^{-1}(t^2-t-2)\,dt$

$=\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{2}t^2-2t\right]_0^{-1}$

$=-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+2=\frac{7}{6}$

$\therefore a+b=\frac{1}{6}$ 답 ①

15 $f(x)=\int_0^x (3t^2-2at+a)\,dt$에서

$f'(x)=3x^2-2ax+a$

함수 $f(x)$가 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-a)^2-3a>0$

$a^2-3a>0, \qquad a(a-3)>0$

$\therefore a<0$ 또는 $a>3$

따라서 자연수 a의 최솟값은 4이다. 답 4

쌤 한마디

삼차함수 $f(x)$가 극값을 갖는다.
⟺ 이차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 갖는다.
⟺ 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면 $D>0$이다.

W 08 정적분

16 $f(x)=\int_0^x (4t-t^2)\,dt$에서

$$f'(x)=4x-x^2=-x(x-4)$$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=4$ ($\because 1\le x\le 6$)

x	1	$\cdots$	4	$\cdots$	6
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	극대	↘	

이때

$$f(1)=\int_0^1 (4t-t^2)\,dt=\left[2t^2-\frac{1}{3}t^3\right]_0^1$$
$$=2-\frac{1}{3}=\frac{5}{3},$$
$$f(4)=\int_0^4 (4t-t^2)\,dt=\left[2t^2-\frac{1}{3}t^3\right]_0^4$$
$$=32-\frac{64}{3}=\frac{32}{3},$$
$$f(6)=\int_0^6 (4t-t^2)\,dt=\left[2t^2-\frac{1}{3}t^3\right]_0^6$$
$$=72-72=0$$

이므로 $\quad M=\frac{32}{3},\ m=0$

$$\therefore M-m=\frac{32}{3}$$

답 ④

17 주어진 등식의 좌변을 변형하면

$$x\int_0^x f(t)\,dt-\int_0^x tf(t)\,dt=x^4-4x^3+2x^2$$

양변을 x에 대하여 미분하면

$$\int_0^x f(t)\,dt+xf(x)-xf(x)=4x^3-12x^2+4x$$
$$\therefore \int_0^x f(t)\,dt=4x^3-12x^2+4x$$

양변을 다시 x에 대하여 미분하면

$$f(x)=12x^2-24x+4=12(x-1)^2-8$$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 최솟값 -8을 갖는다.

답 ②

18 $y=f(x)$의 그래프가 두 점 $(-1,\ 0)$, $(3,\ 0)$을 지나므로

$$f(x)=a(x+1)(x-3)\ (a>0)$$

이라 하자.

$g(x)=\int_x^{x+4} f(t)\,dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$g'(x)=f(x+4)-f(x)$$
$$=a(x+5)(x+1)-a(x+1)(x-3)$$
$$=a(x+1)\{x+5-(x-3)\}$$
$$=8a(x+1)$$

$g'(x)=0$에서 $\quad x=-1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	↘	극소	↗

따라서 함수 $g(x)$는 $x=-1$에서 극소이면서 최소이므로 $\quad k=-1$

답 -1

Q BOX

$\lim_{x\to2}\frac{F(x)-F(2)}{x-2}$
$\times\lim_{x\to2}\frac{1}{x+2}$
$=F'(2)\cdot\frac{1}{4}$

$1\le x\le 6$에서 함수 $f(x)$는 $x=4$일 때 극대이면서 최대이므로 최댓값은 $f(4)$의 값이고, 최솟값은 $f(1)$, $f(6)$ 중 작은 값이다.

$\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$

$a>0$이므로
$x<-1$, 즉 $x+1<0$일 때,
$8a(x+1)<0$
$x>-1$, 즉 $x+1>0$일 때,
$8a(x+1)>0$

19 $F'(t)=f(t)$라 하면

$$\lim_{x\to2}\frac{1}{x^2-4}\int_2^x f(t)\,dt$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{F(x)-F(2)}{x^2-4}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{F(x)-F(2)}{x-2}\cdot\frac{1}{x+2}$$
$$=F'(2)\cdot\frac{1}{4}$$
$$=\frac{1}{4}f(2)$$
$$=\frac{1}{4}\cdot(4-4+8)=2$$

답 2

20 $F'(x)=f(x)$라 하면

$$\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\int_{3+h}^{3+4h} f(x)\,dx$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{F(3+4h)-F(3+h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{F(3+4h)-F(3)+F(3)-F(3+h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{\{F(3+4h)-F(3)\}-\{F(3+h)-F(3)\}}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{F(3+4h)-F(3)}{4h}\cdot4$$
$$-\lim_{h\to0}\frac{F(3+h)-F(3)}{h}$$
$$=4F'(3)-F'(3)$$
$$=3F'(3)=3f(3)$$
$$=3(27-12+a)$$
$$=3a+45$$

따라서 $3a+45=6$이므로

$$a=-13$$

답 ⑤

21 $f(t)=t(k-t)$, $F'(t)=f(t)$라 하면

$$\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\int_1^x t(k-t)\,dt=\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\int_1^x f(t)\,dt$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{F(x)-F(1)}{x-1}$$
$$=F'(1)=f(1)$$
$$=k-1$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{10}\left\{\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\int_1^x t(k-t)\,dt\right\}$$
$$=\sum_{k=1}^{10}(k-1)$$
$$=\frac{10\cdot11}{2}-10$$
$$=45$$

답 45

09 정적분의 활용

17 넓이

W 62쪽

01 (1) $\int_{-2}^{1} x^2\,dx=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_{-2}^{1}$

$=3$

(2) $\int_{-3}^{0}\{-(-x^2-2x-2)\}\,dx=\int_{-3}^{0}(x^2+2x+2)\,dx$

$=\left[\frac{1}{3}x^3+x^2+2x\right]_{-3}^{0}$

$=6$

(3) $\int_{-1}^{2}|-x^3+4x|\,dx$

$=\int_{-1}^{0}(x^3-4x)\,dx+\int_{0}^{2}(-x^3+4x)\,dx$

$=\left[\frac{1}{4}x^4-2x^2\right]_{-1}^{0}+\left[-\frac{1}{4}x^4+2x^2\right]_{0}^{2}$

$=\frac{7}{4}+4$

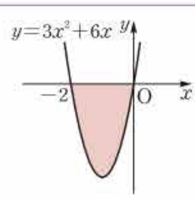
$=\frac{23}{4}$

닫힌구간 $[-1,\ 0]$에서 $y\le 0$, 닫힌구간 $[0,\ 2]$에서 $y\ge 0$이다.

답 (1) 3 (2) 6 (3) $\frac{23}{4}$

정적분을 이용하여 넓이를 구할 때에는 먼저 곡선의 개형을 그려 넓이를 구하는 부분을 나타낸다.

02 (1) 곡선 $y=3x^2+6x$와 x축의 교점의 x좌표는



$3x^2+6x=0$에서

$x(x+2)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=0$

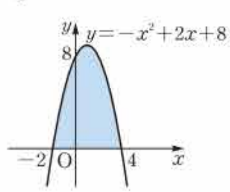
따라서 구하는 넓이는

$\int_{-2}^{0}\{-(3x^2+6x)\}\,dx=\int_{-2}^{0}(-3x^2-6x)\,dx$

$=\left[-x^3-3x^2\right]_{-2}^{0}$

$=4$

(2) 곡선 $y=-x^2+2x+8$과 x축의 교점의 x좌표는



$-x^2+2x+8=0$에서

$(x+2)(x-4)=0$

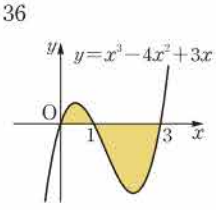
$\therefore x=-2$ 또는 $x=4$

따라서 구하는 넓이는

$\int_{-2}^{4}(-x^2+2x+8)\,dx=\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2+8x\right]_{-2}^{4}$

$=36$

(3) 곡선 $y=x^3-4x^2+3x$와 x축의 교점의 x좌표는



$x^3-4x^2+3x=0$에서

$x(x-1)(x-3)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=1$ 또는 $x=3$

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$에 대하여 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 $f(x)$와 $g(x)$의 대소 관계가 바뀔 때에는 $f(x)-g(x)$의 값이 양수인 구간과 음수인 구간으로 나누어 구한다.

W 61~62쪽

따라서 구하는 넓이는

$\int_{0}^{3}|x^3-4x^2+3x|\,dx$

$=\int_{0}^{1}(x^3-4x^2+3x)\,dx$

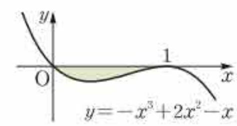
$+\int_{1}^{3}(-x^3+4x^2-3x)\,dx$

$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{4}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2\right]_{0}^{1}$

$+\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{4}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2\right]_{1}^{3}$

$=\frac{5}{12}+\frac{8}{3}=\frac{37}{12}$

(4) 곡선 $y=-x^3+2x^2-x$와 x축의 교점의 x좌표는



$-x^3+2x^2-x=0$에서

$x(x-1)^2=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=1$

따라서 구하는 넓이는

$\int_{0}^{1}\{-(-x^3+2x^2-x)\}\,dx$

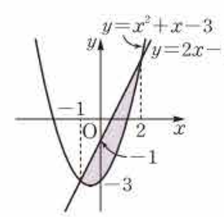
$=\int_{0}^{1}(x^3-2x^2+x)\,dx$

$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right]_{0}^{1}$

$=\frac{1}{12}$

답 (1) 4 (2) 36 (3) $\frac{37}{12}$ (4) $\frac{1}{12}$

03 (1) 곡선 $y=x^2+x-3$과 직선 $y=2x-1$의 교점의 x좌표는



$x^2+x-3=2x-1$에서

$x^2-x-2=0$

$(x+1)(x-2)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=2$

따라서 구하는 넓이는

$\int_{-1}^{2}\{2x-1-(x^2+x-3)\}\,dx$

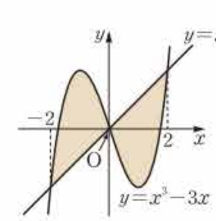
$=\int_{-1}^{2}(-x^2+x+2)\,dx$

$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+2x\right]_{-1}^{2}$

$=\frac{9}{2}$

닫힌구간 $[-1,\ 2]$에서 $2x-1\ge x^2+x-3$이다.

(2) 곡선 $y=x^3-3x$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표는



$x^3-3x=x$에서

$x^3-4x=0$

$x(x+2)(x-2)=0$

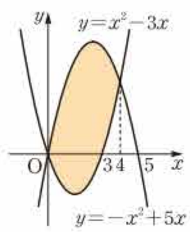
$\therefore x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-2}^{0}(x^3-3x-x)\,dx+\int_{0}^{2}\{x-(x^3-3x)\}\,dx$$
$$=\int_{-2}^{0}(x^3-4x)\,dx+\int_{0}^{2}(-x^3+4x)\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}x^4-2x^2\right]_{-2}^{0}+\left[-\frac{1}{4}x^4+2x^2\right]_{0}^{2}$$
$$=4+4=8$$

답 (1) $\frac{9}{2}$　(2) 8

04 (1) 두 곡선 $y=x^2-3x$, $y=-x^2+5x$의 교점의 x좌표는 $x^2-3x=-x^2+5x$에서



$2x^2-8x=0$

$x(x-4)=0$

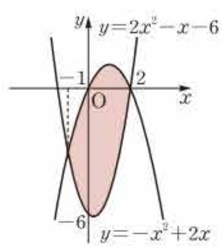
$\therefore x=0$ 또는 $x=4$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_{0}^{4}\{-x^2+5x-(x^2-3x)\}\,dx$$
$$=\int_{0}^{4}(-2x^2+8x)\,dx$$
$$=\left[-\frac{2}{3}x^3+4x^2\right]_{0}^{4}=\frac{64}{3}$$

닫힌구간 $[0,\ 4]$에서 $-x^2+5x\geq x^2-3x$이다.

(2) 두 곡선 $y=2x^2-x-6$, $y=-x^2+2x$의 교점의 x좌표는 $2x^2-x-6=-x^2+2x$에서



$3x^2-3x-6=0$

$(x+1)(x-2)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=2$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-1}^{2}\{-x^2+2x-(2x^2-x-6)\}\,dx$$
$$=\int_{-1}^{2}(-3x^2+3x+6)\,dx$$
$$=\left[-x^3+\frac{3}{2}x^2+6x\right]_{-1}^{2}=\frac{27}{2}$$

답 (1) $\frac{64}{3}$　(2) $\frac{27}{2}$

05 $y=|x^2-4|=\begin{cases} x^2-4 & (x\leq-2 \text{ 또는 } x\geq2) \\ -x^2+4 & (-2\leq x\leq2) \end{cases}$

이므로 구하는 넓이는

$$\int_{-2}^{2}|x^2-4|\,dx=\int_{-2}^{2}(-x^2+4)\,dx$$
$$=2\int_{0}^{2}(-x^2+4)\,dx$$
$$=2\left[-\frac{1}{3}x^3+4x\right]_{0}^{2}$$
$$=2\cdot\frac{16}{3}=\frac{32}{3}$$

답 ③

$f(x)$가 우함수이면
$$\int_{-a}^{a}f(x)\,dx=2\int_{0}^{a}f(x)\,dx$$

Q BOX

주어진 그래프에서 $f(0)=0$, $f'(0)=0$이므로 $f(x)$는 x^2을 인수로 갖는다.

06 $f(x)=ax^2(x-3)$ $(a>0)$이라 하면 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_{0}^{3}\{-ax^2(x-3)\}\,dx=-a\int_{0}^{3}(x^3-3x^2)\,dx$$
$$=-a\left[\frac{1}{4}x^4-x^3\right]_{0}^{3}=\frac{27}{4}a$$

즉 $\frac{27}{4}a=9$이므로　$a=\frac{4}{3}$

따라서 $f(x)=\frac{4}{3}x^2(x-3)$이므로

$$f(-3)=\frac{4}{3}\cdot9\cdot(-6)=-72$$

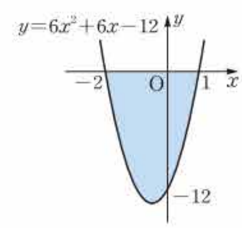
답 ①

$$\frac{d}{dx}\int_{a}^{x}f(t)\,dt=f(x)$$
(단, a는 실수)

07 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=6x^2+6x-12$

곡선 $y=f(x)$와 x축의 교점의 x좌표는



$6x^2+6x-12=0$에서

$(x+2)(x-1)=0$

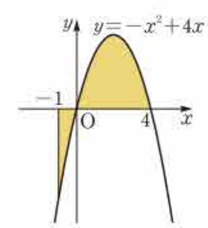
$\therefore x=-2$ 또는 $x=1$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-2}^{1}\{-(6x^2+6x-12)\}\,dx$$
$$=\int_{-2}^{1}(-6x^2-6x+12)\,dx$$
$$=\left[-2x^3-3x^2+12x\right]_{-2}^{1}=27$$

답 27

08 곡선 $y=-x^2+4x$와 x축의 교점의 x좌표는



$-x^2+4x=0$에서

$x(x-4)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=4$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-1}^{4}|-x^2+4x|\,dx$$
$$=\int_{-1}^{0}(x^2-4x)\,dx+\int_{0}^{4}(-x^2+4x)\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3-2x^2\right]_{-1}^{0}+\left[-\frac{1}{3}x^3+2x^2\right]_{0}^{4}$$
$$=\frac{7}{3}+\frac{32}{3}=13$$

답 13

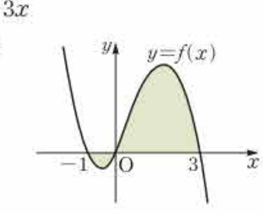
09 $f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(-3x^2+4x+3)\,dx$

$$=-x^3+2x^2+3x+C$$

$f(0)=0$이므로　$C=0$

$\therefore f(x)=-x^3+2x^2+3x$

곡선 $y=f(x)$와 x축의 교점의 x좌표는



$-x^3+2x^2+3x=0$에서

$x(x+1)(x-3)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=3$

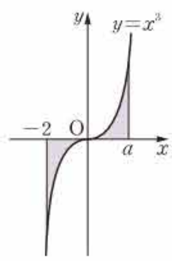
$-x^3+2x^2+3x=0$에서
$x^3-2x^2-3x=0$
$x(x^2-2x-3)=0$
$\therefore x(x+1)(x-3)=0$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-1}^{3}|-x^3+2x^2+3x|\,dx$$
$$=\int_{-1}^{0}(x^3-2x^2-3x)\,dx+\int_{0}^{3}(-x^3+2x^2+3x)\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2\right]_{-1}^{0}+\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2\right]_{0}^{3}$$
$$=\frac{7}{12}+\frac{45}{4}=\frac{71}{6}$$

답 ②

10 오른쪽 그림에서 색칠한 부분의 넓이는



$$\int_{-2}^{a}|x^3|\,dx$$
$$=\int_{-2}^{0}(-x^3)\,dx+\int_{0}^{a}x^3\,dx$$
$$=\left[-\frac{1}{4}x^4\right]_{-2}^{0}+\left[\frac{1}{4}x^4\right]_{0}^{a}$$
$$=4+\frac{1}{4}a^4$$

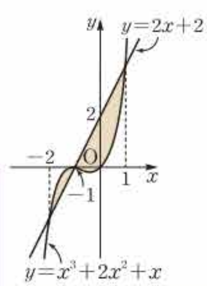
따라서 $4+\frac{1}{4}a^4=8$이므로

$a^4=16$ $\therefore\ a=2\ (\because\ a>0)$

답 2

$a^4=16$에서
$a^2=4\ (\because\ a^2>0)$
$\therefore\ a=2\ (\because\ a>0)$

11 곡선 $y=x^3+2x^2+x$와 직선 $y=2x+2$의 교점의 x좌표는 $x^3+2x^2+x=2x+2$에서



$x^3+2x^2-x-2=0$
$(x+2)(x+1)(x-1)=0$
$\therefore\ x=-2$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=1$

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 2 & -1 & -2 \\ & & 1 & 3 & 2 \\ \hline & 1 & 3 & 2 & \boxed{0} \end{array}$$

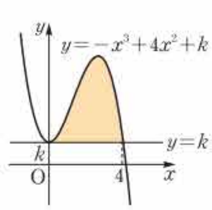
$\therefore\ x^3+2x^2-x-2$
$=(x-1)(x^2+3x+2)$
$=(x+2)(x+1)(x-1)$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-2}^{-1}\{x^3+2x^2+x-(2x+2)\}\,dx$$
$$+\int_{-1}^{1}\{2x+2-(x^3+2x^2+x)\}\,dx$$
$$=\int_{-2}^{-1}(x^3+2x^2-x-2)\,dx$$
$$+\int_{-1}^{1}(-x^3-2x^2+x+2)\,dx$$
$$=\int_{-2}^{-1}(x^3+2x^2-x-2)\,dx+2\int_{0}^{1}(-2x^2+2)\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x\right]_{-2}^{-1}+2\left[-\frac{2}{3}x^3+2x\right]_{0}^{1}$$
$$=\frac{5}{12}+2\cdot\frac{4}{3}=\frac{37}{12}$$

답 ⑤

12 곡선 $y=-x^3+4x^2+k$와 직선 $y=k$의 교점의 x좌표는 $-x^3+4x^2+k=k$에서



$x^3-4x^2=0$
$x^2(x-4)=0$
$\therefore\ x=0$ 또는 $x=4$

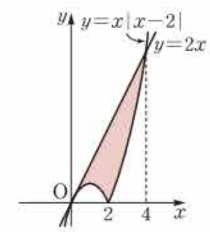
따라서 구하는 넓이는

$$\int_{0}^{4}(-x^3+4x^2+k-k)\,dx$$
$$=\int_{0}^{4}(-x^3+4x^2)\,dx$$
$$=\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{4}{3}x^3\right]_{0}^{4}=\frac{64}{3}$$

답 ④

13 $y=x|x-2|=\begin{cases} x^2-2x & (x\geq 2) \\ -x^2+2x & (x\leq 2)\end{cases}$

곡선 $y=x|x-2|$와 직선 $y=2x$의 교점의 x좌표는



(i) $x\geq 2$일 때,
$x^2-2x=2x$에서
$x^2-4x=0$
$x(x-4)=0$
$\therefore\ x=4\ (\because\ x\geq 2)$

(ii) $x\leq 2$일 때,
$-x^2+2x=2x$에서
$x^2=0$ $\therefore\ x=0$

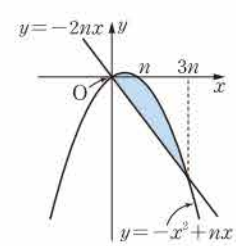
$x=0$에서 직선 $y=2x$는 곡선 $y=x|x-2|$에 접한다.

(i), (ii)에서 구하는 넓이는

$$\int_{0}^{2}\{2x-(-x^2+2x)\}\,dx+\int_{2}^{4}\{2x-(x^2-2x)\}\,dx$$
$$=\int_{0}^{2}x^2\,dx+\int_{2}^{4}(-x^2+4x)\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_{0}^{2}+\left[-\frac{1}{3}x^3+2x^2\right]_{2}^{4}$$
$$=\frac{8}{3}+\frac{16}{3}=8$$

답 8

14 곡선 $y=-x^2+nx$와 직선 $y=-2nx$의 교점의 x좌표는 $-x^2+nx=-2nx$에서



$x^2-3nx=0$
$x(x-3n)=0$
$\therefore\ x=0$ 또는 $x=3n$

n은 자연수이므로 $3n>0$

$$\therefore\ S_n=\int_{0}^{3n}\{-x^2+nx-(-2nx)\}\,dx$$
$$=\int_{0}^{3n}(-x^2+3nx)\,dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}nx^2\right]_{0}^{3n}$$
$$=\frac{9}{2}n^3$$

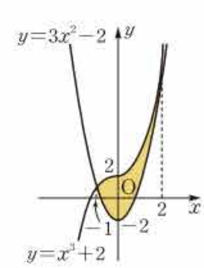
$\frac{9}{2}n^3>270$에서 $n^3>60$

따라서 자연수 n의 최솟값은 4이다.

$3^3=27,\ 4^3=64$

답 ②

15 두 곡선 $y=x^3+2$, $y=3x^2-2$의 교점의 x좌표는 $x^3+2=3x^2-2$에서



$x^3-3x^2+4=0$
$(x+1)(x-2)^2=0$
$\therefore\ x=-1$ 또는 $x=2$

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & -3 & 0 & 4 \\ & & -1 & 4 & -4 \\ \hline & 1 & -4 & 4 & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore\ x^3-3x^2+4$
$=(x+1)(x^2-4x+4)$
$=(x+1)(x-2)^2$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-1}^{2}\{x^3+2-(3x^2-2)\}\,dx$$
$$=\int_{-1}^{2}(x^3-3x^2+4)\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}x^4-x^3+4x\right]_{-1}^{2}$$
$$=\frac{27}{4}$$

답 $\frac{27}{4}$

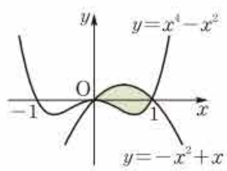
16 곡선 $y=x^4-ax^2$이 점 $(1,\ 0)$을 지나므로

$0=1-a \qquad \therefore a=1$

곡선 $y=-x^2+bx$가 점 $(1,\ 0)$을 지나므로

$0=-1+b \qquad \therefore b=1$

두 곡선 $y=x^4-x^2$, $y=-x^2+x$의 교점의 x좌표는 $x^4-x^2=-x^2+x$에서



$x^4-x=0$

$x(x-1)(x^2+x+1)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=1$ ($\because x^2+x+1>0$)

$x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_{0}^{1}\{-x^2+x-(x^4-x^2)\}\,dx$$
$$=\int_{0}^{1}(-x^4+x)\,dx$$
$$=\left[-\frac{1}{5}x^5+\frac{1}{2}x^2\right]_{0}^{1}$$
$$=\frac{3}{10}$$

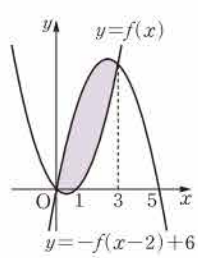
답 ③

17 $y=-f(x-2)+6$

$=-\{(x-2)^2-(x-2)\}+6$

$=-x^2+5x$

두 곡선 $y=f(x)$, $y=-f(x-2)+6$의 교점의 x좌표는 $x^2-x=-x^2+5x$에서



$2x^2-6x=0$

$x(x-3)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=3$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_{0}^{3}\{-x^2+5x-(x^2-x)\}\,dx$$
$$=\int_{0}^{3}(-2x^2+6x)\,dx$$
$$=\left[-\frac{2}{3}x^3+3x^2\right]_{0}^{3}$$
$$=9$$

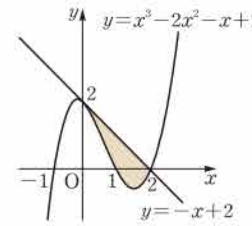
답 ④

18 $y=x^3-2x^2-x+2$에서 $\qquad y'=3x^2-4x-1$

곡선 위의 점 $(0,\ 2)$에서의 접선의 기울기는 -1이므로 접선의 방정식은

$y-2=-x \qquad \therefore y=-x+2$

곡선 $y=x^3-2x^2-x+2$와 직선 $y=-x+2$의 교점의 x좌표는



$x^3-2x^2-x+2=-x+2$

에서

$x^3-2x^2=0$

$x^2(x-2)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=2$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_{0}^{2}\{-x+2-(x^3-2x^2-x+2)\}\,dx$$
$$=\int_{0}^{2}(-x^3+2x^2)\,dx$$
$$=\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3\right]_{0}^{2}$$
$$=\frac{4}{3}$$

답 ③

19 $y=x^2-4x+5$에서

$y'=2x-4$

곡선 위의 점 $(1,\ 2)$에서의 접선의 기울기는

$2\cdot1-4=-2$

이므로 접선의 방정식은

$y-2=-2(x-1)$

$\therefore y=-2x+4$

곡선 위의 점 $(3,\ 2)$에서의 접선의 기울기는

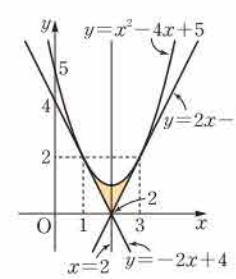
$2\cdot3-4=2$

이므로 접선의 방정식은

$y-2=2(x-3)$

$\therefore y=2x-4$

두 직선 $y=-2x+4$, $y=2x-4$의 교점의 x좌표는 $-2x+4=2x-4$에서



$x=2$

$y=2\cdot2-4=0$이므로 두 직선의 교점의 좌표는 $(2,\ 0)$이다.

따라서 구하는 넓이는

$$2\int_{1}^{2}\{x^2-4x+5-(-2x+4)\}\,dx$$

곡선 $y=x^2-4x+5$는 직선 $x=2$에 대하여 대칭이고, 두 직선 $y=-2x+4$, $y=2x-4$도 직선 $x=2$에 대하여 대칭이므로 구하는 넓이는 곡선 $y=x^2-4x+5$와 두 직선 $y=-2x+4$, $x=2$로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배와 같다.

$$=2\int_{1}^{2}(x^2-2x+1)\,dx$$
$$=2\left[\frac{1}{3}x^3-x^2+x\right]_{1}^{2}$$
$$=2\cdot\frac{1}{3}$$
$$=\frac{2}{3}$$

답 $\frac{2}{3}$

20 $y=-x^2+9$에서

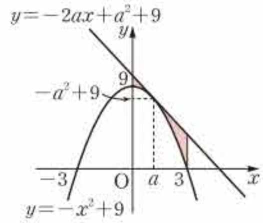
$y'=-2x$

곡선 위의 점 $(a,\ -a^2+9)$에서의 접선의 기울기는 $-2a$이므로 접선의 방정식은

$y-(-a^2+9)=-2a(x-a)$

$\therefore y=-2ax+a^2+9$

따라서 주어진 도형의 넓이는



$$\int_0^3\{-2ax+a^2+9-(-x^2+9)\}\,dx$$
$$=\int_0^3(x^2-2ax+a^2)\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3-ax^2+a^2x\right]_0^3=3a^2-9a+9$$
$$=3\left(a-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{9}{4}$$

이므로 구하는 최솟값은 $\frac{9}{4}$이다. 답 ②

21 (1) $y=x^2-3x+4$에서 $y'=2x-3$

접점의 좌표를 $(t,\ t^2-3t+4)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $2t-3$이므로 접선의 방정식은

$$y-(t^2-3t+4)=(2t-3)(x-t)$$
$$\therefore\ y=(2t-3)x-t^2+4 \quad \cdots\cdots\ ㉠$$

이 직선이 점 $(1,\ -2)$를 지나므로

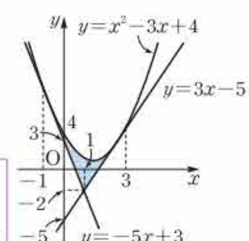
$$-2=2t-3-t^2+4$$
$$t^2-2t-3=0, \qquad (t+1)(t-3)=0$$
$$\therefore\ t=-1 \text{ 또는 } t=3$$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$t=-1$일 때, ㉠에서 $y=-5x+3$

$t=3$일 때, ㉠에서 $y=3x-5$

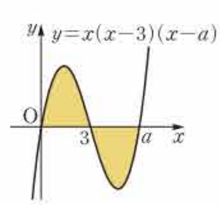
(2) 구하는 넓이는



$$\int_{-1}^1\{x^2-3x+4-(-5x+3)\}\,dx+\int_1^3\{x^2-3x+4-(3x-5)\}\,dx$$
$$=2\int_0^1(x^2+1)\,dx+\int_1^3(x^2-6x+9)\,dx$$
$$=2\left[\frac{1}{3}x^3+x\right]_0^1+\left[\frac{1}{3}x^3-3x^2+9x\right]_1^3$$
$$=\frac{8}{3}+\frac{8}{3}=\frac{16}{3}$$

답 (1) $y=-5x+3$, $y=3x-5$ (2) $\frac{16}{3}$

22 오른쪽 그림의 색칠한 두 부분의 넓이가 같으므로



$$\int_0^a x(x-3)(x-a)\,dx=0$$
$$\int_0^a\{x^3-(3+a)x^2+3ax\}\,dx=0$$
$$\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{3+a}{3}x^3+\frac{3a}{2}x^2\right]_0^a=0$$
$$-\frac{a^4}{12}+\frac{a^3}{2}=0$$
$$a^4-6a^3=0, \qquad a^3(a-6)=0$$
$$\therefore\ a=6\ (\because\ a>3)$$

답 ⑤

QBOX

곡선 $y=x^2(x-a)$와 x축 및 직선 $x=3$으로 둘러싸인 두 도형의 넓이가 같다.

$y=x^2+4x+k$
$=(x+2)^2+k-4$

$$\int_{-1}^1(x^2+2x+1)\,dx$$
$$=\int_{-1}^1(x^2+1)\,dx$$
$$=2\int_0^1(x^2+1)\,dx$$

23 색칠한 두 부분의 넓이가 같으므로

$$\int_0^2(-x^3+8-k)\,dx=0$$
$$\left[-\frac{1}{4}x^4+(8-k)x\right]_0^2=0$$
$$12-2k=0 \qquad \therefore\ k=6$$

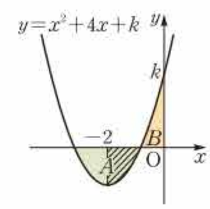
답 ③

24 $A=B$이므로

$$\int_0^3 x^2(x-a)\,dx=0$$
$$\int_0^3(x^3-ax^2)\,dx=0$$
$$\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{a}{3}x^3\right]_0^3=0, \qquad \frac{81}{4}-9a=0$$
$$\therefore\ a=\frac{9}{4}$$

답 $\frac{9}{4}$

25 $A:B=2:1$에서



$$B=\frac{1}{2}A$$

곡선 $y=x^2+4x+k$가 직선 $x=-2$에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림에서 빗금 친 부분의 넓이는 B와 같다.

따라서 곡선 $y=x^2+4x+k$와 x축, y축 및 직선 $x=-2$로 둘러싸인 두 도형의 넓이가 같으므로

$$\int_{-2}^0(x^2+4x+k)\,dx=0$$
$$\left[\frac{1}{3}x^3+2x^2+kx\right]_{-2}^0=0$$
$$-\frac{16}{3}+2k=0 \qquad \therefore\ k=\frac{8}{3}$$

답 ④

26 곡선 $y=x^2-x$와 직선 $y=ax$의 교점의 x좌표는 $x^2-x=ax$에서

$$x^2-(a+1)x=0$$
$$x\{x-(a+1)\}=0$$
$$\therefore\ x=0 \text{ 또는 } x=a+1$$

곡선 $y=x^2-x$와 직선 $y=ax$로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_0^{a+1}\{ax-(x^2-x)\}\,dx$$
$$=\int_0^{a+1}\{-x^2+(a+1)x\}\,dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{a+1}{2}x^2\right]_0^{a+1}$$
$$=-\frac{(a+1)^3}{3}+\frac{(a+1)^3}{2}=\frac{(a+1)^3}{6}$$

곡선 $y=x^2-x$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_0^1(-x^2+x)\,dx=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right]_0^1=\frac{1}{6}$$

따라서 $\frac{1}{6}=\frac{1}{2}\cdot\frac{(a+1)^3}{6}$이므로

$$(a+1)^3=2$$

답 2

27 두 곡선 $y=x^2-2x$, $y=ax^2$의 교점의 x좌표는 $x^2-2x=ax^2$에서

$(1-a)x^2-2x=0$, $\quad x\{(1-a)x-2\}=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=\dfrac{2}{1-a}$

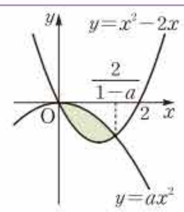
Q BOX

$a<0$이므로

$-a>0$, $\quad 1-a>1$

$\therefore 0<\dfrac{2}{1-a}<2$

오른쪽 그림에서 색칠한 부분의 넓이는



$$\int_0^{\frac{2}{1-a}} \{ax^2-(x^2-2x)\}\,dx$$

$$=\int_0^{\frac{2}{1-a}} \{(a-1)x^2+2x\}\,dx$$

$$=\left[\frac{a-1}{3}x^3+x^2\right]_0^{\frac{2}{1-a}}$$

$$=-\frac{8}{3(1-a)^2}+\frac{4}{(1-a)^2}=\frac{4}{3(1-a)^2}$$

곡선 $y=x^2-2x$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

곡선 $y=x^2-2x$와 x축의 교점의 x좌표는 $x^2-2x=0$에서

$x(x-2)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=2$

$$\int_0^2 (-x^2+2x)\,dx=\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_0^2=\frac{4}{3}$$

따라서 $\dfrac{4}{3(1-a)^2}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{4}{3}$이므로

$(1-a)^2=2$, $\quad a^2-2a-1=0$

$\therefore a=1-\sqrt{2}$ ($\because a<0$) 　　답 $1-\sqrt{2}$

28 두 곡선 $y=-x^4+8x$, $y=-ax(x-2)$로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_0^2 \{-x^4+8x+ax(x-2)\}\,dx$$

$$=\int_0^2 \{-x^4+ax^2+2(4-a)x\}\,dx$$

$$=\left[-\frac{1}{5}x^5+\frac{a}{3}x^3+(4-a)x^2\right]_0^2$$

$$=\frac{48}{5}-\frac{4}{3}a$$

두 곡선 $y=x^4-2x^3$, $y=-x^4+8x$로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_0^2 \{-x^4+8x-(x^4-2x^3)\}\,dx$$

$$=\int_0^2 (-2x^4+2x^3+8x)\,dx$$

$$=\left[-\frac{2}{5}x^5+\frac{1}{2}x^4+4x^2\right]_0^2=\frac{56}{5}$$

따라서 $\dfrac{48}{5}-\dfrac{4}{3}a=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{56}{5}$이므로

$\dfrac{4}{3}a=4$ $\quad\therefore a=3$ 　　답 ②

29 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$f(x)=f(x+3)$

이므로

$$\int_1^2 f(x)\,dx=\int_4^5 f(x)\,dx=\int_7^8 f(x)\,dx$$

$$=\cdots=\int_{100}^{101} f(x)\,dx$$

$100=1+3\cdot 33$,
$101=2+3\cdot 33$

$$=\int_{103}^{104} f(x)\,dx=\cdots$$ 　　답 ①

30 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$f(x+4)=f(x)$

이므로

$$\int_{-4}^0 f(x)\,dx=\int_0^4 f(x)\,dx=\int_4^8 f(x)\,dx$$

이때 $\displaystyle\int_{-4}^4 f(x)\,dx=8$이므로

$$\int_{-4}^4 f(x)\,dx=\int_{-4}^0 f(x)\,dx+\int_0^4 f(x)\,dx=2\int_0^4 f(x)\,dx$$

$2\displaystyle\int_0^4 f(x)\,dx=8$ $\quad\therefore \displaystyle\int_0^4 f(x)\,dx=4$

$$\therefore \int_{-4}^8 f(x)\,dx$$

$$=\int_{-4}^0 f(x)\,dx+\int_0^4 f(x)\,dx+\int_4^8 f(x)\,dx$$

$=3\cdot 4=12$ 　　답 ②

31 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$f(x)=f(x+2)$

이므로

$$\int_0^1 f(x)\,dx=\int_2^3 f(x)\,dx=\cdots=\int_8^9 f(x)\,dx,$$

$$\int_1^2 f(x)\,dx=\int_3^4 f(x)\,dx=\cdots=\int_9^{10} f(x)\,dx$$

$$\therefore \int_0^{10} f(x)\,dx$$

$$=\int_0^1 f(x)\,dx+\int_1^2 f(x)\,dx$$

$$+\cdots+\int_8^9 f(x)\,dx+\int_9^{10} f(x)\,dx$$

$$=5\int_0^1 f(x)\,dx+5\int_1^2 f(x)\,dx$$

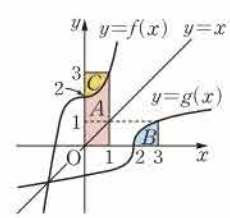
$$=5\int_0^1 (-x^2+2x)\,dx+5\int_1^2 (-x+2)\,dx$$

$$=5\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_0^1+5\left[-\frac{1}{2}x^2+2x\right]_1^2$$

$=5\cdot\dfrac{2}{3}+5\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{35}{6}$ 　　답 $\dfrac{35}{6}$

32 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림에서

함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.



(B의 넓이)$=$(C의 넓이)

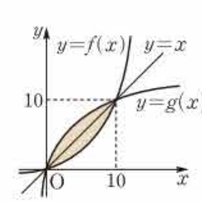
$$\therefore \int_0^1 f(x)\,dx+\int_2^3 g(x)\,dx$$

$=$(A의 넓이)$+$(B의 넓이)

$=$(A의 넓이)$+$(C의 넓이)

$=1\cdot 3=3$ 　　답 ⑤

33 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배와 같다.

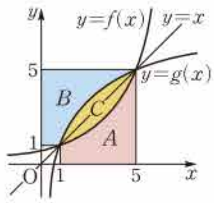


따라서 구하는 넓이는

$$2\int_0^{10}\{x-f(x)\}\,dx=\int_0^{10}2x\,dx-2\int_0^{10}f(x)\,dx$$
$$=\Big[x^2\Big]_0^{10}-2\cdot 40$$
$$=100-80=20$$

답 20

34 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림에서



(A의 넓이)=(B의 넓이)

$\therefore \int_1^5 g(x)\,dx$

=(A의 넓이)+(C의 넓이)

$=5^2-1^2-$(B의 넓이)$=24-$(A의 넓이)

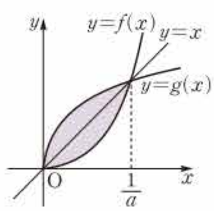
$=24-\int_1^5 f(x)\,dx=24-10=14$

답 14

35 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 교점의 x좌표는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표와 같다.

$ax^2=x$에서 $x(ax-1)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=\dfrac{1}{a}$



이때 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배와 같으므로

$$2\int_0^{\frac{1}{a}}\{x-f(x)\}dx=2\int_0^{\frac{1}{a}}(x-ax^2)\,dx$$
$$=2\Big[\frac{1}{2}x^2-\frac{a}{3}x^3\Big]_0^{\frac{1}{a}}$$
$$=2\cdot\frac{1}{6a^2}=\frac{1}{3a^2}$$

따라서 $\dfrac{1}{3a^2}=\dfrac{4}{27}$이므로 $a^2=\dfrac{9}{4}$

$\therefore a=\dfrac{3}{2}$ ($\because a>0$)

답 ③

18 속도와 거리

Ⓦ 68쪽

01 (1) $t=0$에서의 점 P의 위치가 0이므로 $t=1$에서의 점 P의 위치는

$$0+\int_0^1 v(t)\,dt=\int_0^1(-3t^2+9t)\,dt$$
$$=\Big[-t^3+\frac{9}{2}t^2\Big]_0^1=\frac{7}{2}$$

(2) $t=2$에서 $t=4$까지 점 P의 위치의 변화량은

$$\int_2^4 v(t)\,dt=\int_2^4(-3t^2+9t)\,dt$$
$$=\Big[-t^3+\frac{9}{2}t^2\Big]_2^4=-2$$

Q BOX

점 P는 $t=2$에서 $t=3$까지 양의 방향으로 움직이고 $t=3$에서 $t=4$까지 음의 방향으로 움직인다.

$a>0$이므로 $\dfrac{1}{a}>0$

(3) $2\le t\le 3$에서 $v(t)\ge 0$, $3\le t\le 4$에서 $v(t)\le 0$이므로 $t=2$에서 $t=4$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_2^4|v(t)|\,dt$$
$$=\int_2^3(-3t^2+9t)\,dt+\int_3^4(3t^2-9t)\,dt$$
$$=\Big[-t^3+\frac{9}{2}t^2\Big]_2^3+\Big[t^3-\frac{9}{2}t^2\Big]_3^4$$
$$=\frac{7}{2}+\frac{11}{2}=9$$

답 (1) $\dfrac{7}{2}$ (2) -2 (3) 9

02 $t=3$에서의 점 P의 위치는

$$0+\int_0^3 v(t)\,dt$$
$$=\int_0^2(t^2-2t)\,dt+\int_2^3(-t^2+6t-8)\,dt$$
$$=\Big[\frac{1}{3}t^3-t^2\Big]_0^2+\Big[-\frac{1}{3}t^3+3t^2-8t\Big]_2^3$$
$$=-\frac{4}{3}+\frac{2}{3}=-\frac{2}{3}$$

답 ④

03 $0\le t\le 1$에서 $v(t)\le 0$, $1\le t\le 2$에서 $v(t)\ge 0$이므로 $t=0$에서 $t=2$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^2|v(t)|\,dt$$
$$=\int_0^1(-t^2-4t+5)\,dt+\int_1^2(t^2+4t-5)\,dt$$
$$=\Big[-\frac{1}{3}t^3-2t^2+5t\Big]_0^1+\Big[\frac{1}{3}t^3+2t^2-5t\Big]_1^2$$
$$=\frac{8}{3}+\frac{10}{3}=6$$

답 6

04 $0\le t\le 2$에서 $v(t)\ge 0$, $2\le t\le 3$에서 $v(t)\le 0$이므로 공을 던진 후 3초 동안 공이 움직인 거리는

$$\int_0^3|v(t)|\,dt$$
$$=\int_0^2(20-10t)\,dt+\int_2^3(-20+10t)\,dt$$
$$=\Big[20t-5t^2\Big]_0^2+\Big[-20t+5t^2\Big]_2^3$$
$$=20+5=25\,(\mathrm{m})$$

답 ③

05 시각 t에서의 두 점 P, Q의 위치를 각각 x_{P}, x_{Q}라 하면

$$x_{\mathrm{P}}=0+\int_0^t v_{\mathrm{P}}\,dt=\int_0^t(2t+3)\,dt$$
$$=\Big[t^2+3t\Big]_0^t=t^2+3t,$$
$$x_{\mathrm{Q}}=0+\int_0^t v_{\mathrm{Q}}\,dt=\int_0^t(4t+1)\,dt$$
$$=\Big[2t^2+t\Big]_0^t=2t^2+t$$

두 점 P, Q가 만나려면 $x_{\mathrm{P}}=x_{\mathrm{Q}}$이어야 하므로

$t^2+3t=2t^2+t$, $t^2-2t=0$

$t(t-2)=0$

$\therefore t=0$ 또는 $t=2$

따라서 두 점 P, Q가 출발 후 다시 만나는 것은 $t=2$일 때이므로 구하는 위치는

$2^2+3\cdot2=10$ 답 10

Q BOX: $2\cdot2^2+2=10$으로 구할 수도 있다.

06 점 P가 운동 방향을 바꿀 때 $v(t)=0$이므로

$6t-18=0 \quad \therefore t=3$

따라서 $t=3$에서의 점 P의 위치는

$$0+\int_0^3 v(t)\,dt=\int_0^3 (6t-18)\,dt$$
$$=\Big[3t^2-18t\Big]_0^3=-27$$ 답 ②

07 물체가 최고 높이에 도달할 때 $v(t)=0$이므로

$16-8t=0 \quad \therefore t=2$

따라서 $t=2$에서의 물체의 지면으로부터의 높이는

$$0+\int_0^2 v(t)\,dt=\int_0^2 (16-8t)\,dt$$
$$=\Big[16t-4t^2\Big]_0^2=16\,(\mathrm{m})$$ 답 ④

08 자동차가 정지할 때 $v(t)=0$이므로

$a-2t=0 \quad \therefore t=\frac{a}{2}$

따라서 자동차가 제동을 건 지 $\frac{a}{2}$초 후에 정지하므로 정지할 때까지 움직인 거리는

$$\int_0^{\frac{a}{2}}|v(t)|\,dt=\int_0^{\frac{a}{2}}(a-2t)\,dt=\Big[at-t^2\Big]_0^{\frac{a}{2}}=\frac{a^2}{4}$$

Q BOX: $0\le t\le\frac{a}{2}$에서 $a-2t\ge0$

즉 $\frac{a^2}{4}=100$이므로 $\quad a^2=400$

$\therefore a=20\ (\because a>0)$ 답 20

09 $t=0$에서 $t=c$까지 물체의 위치의 변화량은 $\int_0^c v(t)\,dt$이므로

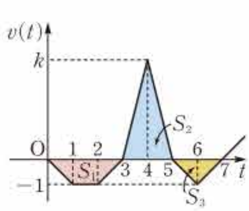
$$p=\int_0^a v(t)\,dt+\int_a^b v(t)\,dt+\int_b^c v(t)\,dt$$
$$=6+(-2)+3=7$$

또 움직인 거리는 $\int_0^c |v(t)|\,dt$이므로

$$q=\int_0^a v(t)\,dt-\int_a^b v(t)\,dt+\int_b^c v(t)\,dt$$
$$=6-(-2)+3=11$$

$\therefore p+q=18$ 답 ⑤

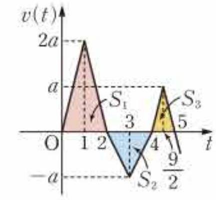
10 $t=7$에서의 점 P의 위치는 오른쪽 그림에서



$$0+\int_0^7 v(t)\,dt$$
$$=-S_1+S_2-S_3$$
$$=-\frac{1}{2}\cdot(1+3)\cdot1+\frac{1}{2}\cdot2\cdot k$$
$$-\frac{1}{2}\cdot2\cdot1$$
$$=k-3$$

따라서 $k-3=1$이므로 $\quad k=4$ 답 4

11 $t=4$에서의 점 P의 위치는 오른쪽 그림에서



$$0+\int_0^4 v(t)\,dt$$
$$=S_1-S_2$$
$$=\frac{1}{2}\cdot2\cdot2a-\frac{1}{2}\cdot2\cdot a=a$$

$\therefore a=2$

따라서 $t=0$에서 $t=5$까지 점 P가 움직인 거리는 위의 그림에서

$$\int_0^5 |v(t)|\,dt=S_1+S_2+S_3$$
$$=\frac{1}{2}\cdot2\cdot4+\frac{1}{2}\cdot2\cdot2+\frac{1}{2}\cdot1\cdot2$$
$$=7$$ 답 7

12 ㄱ. $t=3$, $t=6$에서 운동 방향을 바꾸므로 두 번 바꾼다.

Q BOX: 점 P는 $t=3$일 때 양의 방향에서 음의 방향으로, $t=6$일 때 음의 방향에서 양의 방향으로 운동 방향을 바꾼다.

ㄴ. $t=2$에서의 위치는

$$0+\int_0^2 v(t)\,dt=\frac{1}{2}\cdot2\cdot2=2$$

$t=6$에서의 위치는

$$0+\int_0^6 v(t)\,dt=\frac{1}{2}\cdot3\cdot2-\frac{1}{2}\cdot(1+3)\cdot1=1$$

따라서 $t=2$에서의 위치와 $t=6$에서의 위치는 같지 않다.

ㄷ. 출발 후 $t=4$까지 움직인 거리는

$$\int_0^4 |v(t)|\,dt=\frac{1}{2}\cdot3\cdot2+\frac{1}{2}\cdot1\cdot1=\frac{7}{2}$$

Q BOX: $\int_0^4|v(t)|\,dt=\int_0^3 v(t)\,dt+\int_3^4\{-v(t)\}\,dt$

ㄹ. (i) 출발 후 $t=3$까지 양의 방향으로 움직이고, $t=3$에서의 위치는

$$0+\int_0^3 v(t)\,dt=\frac{1}{2}\cdot3\cdot2=3$$

이므로 $t=3$일 때 원점에서 3만큼 떨어져 있다.

(ii) $t=3$에서 운동 방향을 바꾸어 $t=6$까지 음의 방향으로 움직이고, $t=6$에서의 위치는 1이므로 $t=6$일 때 원점에서 1만큼 떨어져 있다.

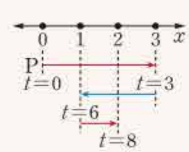
(iii) $t=6$에서 운동 방향을 바꾸어 $t=8$까지 양의 방향으로 움직이고 $t=8$에서의 위치는

$$0+\int_0^8 v(t)\,dt$$
$$=\frac{1}{2}\cdot3\cdot2-\frac{1}{2}\cdot(1+3)\cdot1+\frac{1}{2}\cdot2\cdot1=2$$

Q BOX: $0+\int_0^8 v(t)\,dt=\int_0^6 v(t)\,dt+\int_6^8 v(t)\,dt=1+\frac{1}{2}\cdot2\cdot1=2$와 같이 구할 수도 있다.

이므로 $t=8$일 때 원점에서 2만큼 떨어져 있다.

(i)~(iii)에서 점 P는 $t=3$일 때 원점에서 가장 멀리 떨어져 있다.



이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ②