정답과 해설

수학의 힘 유형 β

I 경우의 수

II 확률

III 통계

1 | 여러 가지 순열

본책 6쪽~16쪽

STEP 1 | 기초 Build

0001 답 120
$(6-1)!=5!=5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=120$

0002 답 24
$(5-1)!=4!=4\cdot3\cdot2\cdot1=24$

0003 답 12
A, B를 한 명으로 생각하여 4명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는
$(4-1)!=3!=3\cdot2\cdot1=6$
이때, 각 경우에 대하여 A, B 두 사람이 자리를 바꾸는 경우의 수가 $2!=2$이므로 구하는 경우의 수는
$6\cdot2=12$

0004 답 6
원탁에 4명이 둘러앉는 경우의 수와 같으므로
$(4-1)!=3!=3\cdot2\cdot1=6$

0005 답 81
${}_3\Pi_4=3^4=81$

0006 답 32
${}_2\Pi_5=2^5=32$

0007 답 256
${}_4\Pi_4=4^4=256$

0008 답 1
${}_5\Pi_0=5^0=1$

0009 답 $n=6$
${}_n\Pi_3=n^3$이므로 $n^3=216=6^3$
$\therefore n=6$

0010 답 $r=3$
${}_4\Pi_r=4^r$이므로 $4^r=64=4^3$
$\therefore r=3$

0011 답 $r=9$
${}_2\Pi_r=2^r$이므로 $2^r=512=2^9$
$\therefore r=9$

0012 답 9
1, 2, 3의 3개에서 2개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로
${}_3\Pi_2=3^2=9$

0013 답 8
서로 다른 2개의 우체통에서 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로
${}_2\Pi_3=2^3=8$

0014 답 30
5개의 숫자 중 2가 2개, 3이 2개 있으므로 구하는 경우의 수는
$\frac{5!}{2!2!}=\frac{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{2\cdot1\cdot2\cdot1}=30$

0015 답 60
6개의 문자 중 a가 3개, n이 2개 있으므로 구하는 경우의 수는
$\frac{6!}{3!2!}=\frac{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{3\cdot2\cdot1\cdot2\cdot1}=60$

0016 답 30
하나의 a를 제외한 5개의 문자를 일렬로 나열하면 된다. 이때, 5개의 문자 중 a가 2개, n이 2개 있으므로 구하는 경우의 수는
$\frac{5!}{2!2!}=\frac{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{2\cdot1\cdot2\cdot1}=30$

0017 답 35
최단 거리로 가려면 오른쪽으로 4칸, 아래쪽으로 3칸을 가야 한다. 오른쪽으로 가는 것을 a, 아래쪽으로 가는 것을 b로 나타내면 구하는 경우의 수는 a, a, a, a, b, b, b를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같다. 이때, 7개의 문자 중 a가 4개, b가 3개 있으므로 구하는 경우의 수는
$\frac{7!}{4!3!}=\frac{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{4\cdot3\cdot2\cdot1\cdot3\cdot2\cdot1}=35$

STEP 2 | 유형 Drill

유형 01 원탁에 둘러앉는 경우의 수

본책 8쪽

서로 다른 n개를 원형으로 배열하는 경우의 수는
⇨ $\frac{n!}{n}=(n-1)!$

0018 답 ④
여학생 3명을 한 명으로 생각하여 6명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는
$(6-1)!=5!=120$
여학생끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는 $3!=6$
따라서 구하는 경우의 수는
$120\cdot6=720$

0019 답 96
부부 2명을 한 명으로 생각하여 4명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는
$(4-1)!=3!=6$
부부끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는 각각
$2!=2$

따라서 구하는 경우의 수는

$6 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 96$

0020 답 12

어른 3명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$(3-1)! = 2! = 2$

어른들 사이사이의 3개의 자리에 아이 3명을 앉히는 경우의 수는

$3! = 6$

따라서 구하는 경우의 수는

$2 \cdot 6 = 12$

0021 답 ⑤

여자 5명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$(5-1)! = 4! = 24$

여자들 사이사이의 5개의 자리에 남자 3명을 앉히는 경우의 수는

${}_5P_3 = 60$

따라서 구하는 경우의 수는

$24 \cdot 60 = 1440$

0022 답 24

아버지의 자리가 결정되면 어머니의 자리는 마주 보는 자리로 고정되므로 구하는 경우의 수는 5명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수와 같다.

자식 4명과 아버지

$\therefore (5-1)! = 4! = 24$

다른 풀이 부모님이 마주 보도록 원탁에 앉은 다음 나머지 네 자리에 4명을 앉히면 되므로 구하는 경우의 수는

$4! = 24$

0023 답 1440

중학생 2명, 고등학생 3명을 각각 한 명으로 생각하여 6명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$(6-1)! = 5! = 120$

중학생끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는

$2! = 2$

고등학생끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는

$3! = 6$

따라서 구하는 경우의 수는

$120 \cdot 2 \cdot 6 = 1440$

유형 02 다각형 모양의 탁자에 둘러앉는 경우의 수 본책 8쪽

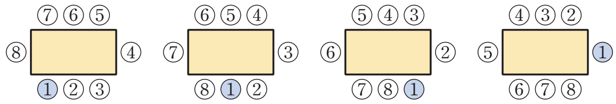
(i) 원형으로 배열하는 경우의 수를 구한다.
(ii) 주어진 다각형을 회전시켰을 때 겹치지 않는 자리의 수를 구한다.
(iii) (i), (ii)에서 구한 값을 곱한다.

0024 답 ②

8명을 원형으로 배열하는 경우의 수는

$(8-1)! = 7!$

이때, 원형으로 배열하는 한 가지 방법에 대하여 직사각형 모양의 탁자에서는 다음 그림과 같이 서로 다른 경우가 4가지씩 존재한다.



따라서 구하는 경우의 수는

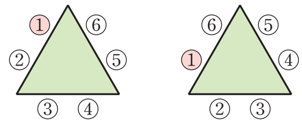
$4 \cdot 7!$

0025 답 240

6명을 원형으로 배열하는 경우의 수는

$(6-1)! = 5! = 120$

이때, 원형으로 배열하는 한 가지 방법에 대하여 정삼각형 모양의 탁자에서는 다음 그림과 같이 서로 다른 경우가 2가지씩 존재한다.



따라서 구하는 경우의 수는

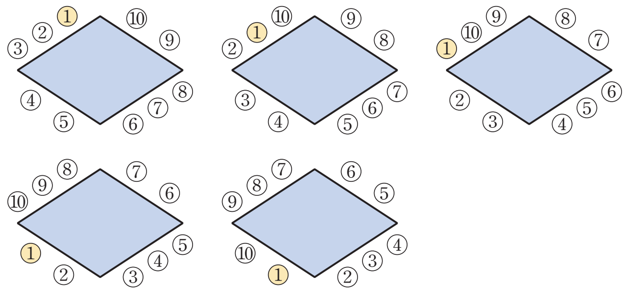
$120 \cdot 2 = 240$

0026 답 ②

10명을 원형으로 배열하는 경우의 수는

$(10-1)! = 9!$

이때, 원형으로 배열하는 한 가지 방법에 대하여 마름모 모양의 탁자에서는 다음 그림과 같이 서로 다른 경우가 5가지씩 존재한다.



따라서 구하는 경우의 수는

$9! \cdot 5 = 9! \cdot 10 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot 10!$

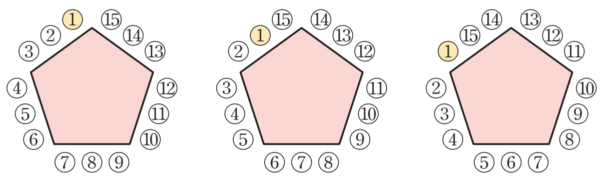
$\therefore a = \frac{1}{2}$

0027 답 ③

15명을 원형으로 배열하는 경우의 수는

$(15-1)! = 14!$

이때, 원형으로 배열하는 한 가지 방법에 대하여 정오각형 모양의 탁자에서는 다음 그림과 같이 서로 다른 경우가 3가지씩 존재한다.



따라서 구하는 경우의 수는

$3 \cdot 14!$

유형 03 도형에 색칠하는 경우의 수 ; 원순열
본책 9쪽

(ⅰ) 기준이 되는 영역에 색을 칠하는 경우의 수를 구한다.
(ⅱ) 원순열을 이용하여 나머지 부분에 색을 칠하는 경우의 수를 구한다.
(ⅲ) (ⅰ), (ⅱ)에서 구한 값을 곱한다.

0028 답 30

가운데 원을 칠하는 경우의 수는 5이고, 나머지 4개의 도형을 칠하는 경우의 수는

$(4-1)!=3!=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$5\cdot6=30$

0029 답 48

빨간색과 노란색을 한 가지 색으로 생각하여 5가지 색을 원판에 칠하는 경우의 수는

$(5-1)!=4!=24$

빨간색과 노란색으로 칠하는 영역을 바꾸는 경우의 수는

$2!=2$

따라서 구하는 경우의 수는

$24\cdot2=48$

0030 답 120

서로 다른 6가지 색 중에서 4가지 색을 고르는 경우의 수는

${}_6C_4={}_6C_2=15$

가운데 삼각형을 칠하는 경우의 수는 4이고, 나머지 3개의 도형을 칠하는 경우의 수는

$(3-1)!=2!=2$

따라서 구하는 경우의 수는

$15\cdot4\cdot2=120$

0031 답 20

두 밑면을 칠하는 경우의 수는 ${}_5C_2=10$

두 밑면에 칠한 색을 제외한 3가지 색을 옆면에 칠하는 경우의 수는

$(3-1)!=2!=2$

따라서 구하는 경우의 수는

$10\cdot2=20$

0032 답 ④

TIP 정사각형 모양의 탁자에 둘러앉는 방법의 수를 이용한다.

가운데 정사각형을 칠하는 경우의 수는 9이고, 나머지 8개의 정사각형을 칠하는 경우의 수는

$(8-1)!=7!$

이때, 8개의 정사각형을 칠하는 한 가지 방법에 대하여 다음 그림과 같이 서로 다른 경우가 2가지씩 존재한다.

③	②	⑨
④	①	⑧
⑤	⑥	⑦

②	⑨	⑧
③	①	⑦
④	⑤	⑥

따라서 구하는 경우의 수는

$9\cdot7!\cdot2=18\cdot7!$

유형 04 중복순열
본책 10쪽

서로 다른 n개에서 r개를 택하는 중복순열의 수는
⇨ ${}_n\Pi_r=n^r$

0033 답 243

서로 다른 3명의 학생에서 5명을 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_3\Pi_5=3^5=243$

0034 답 ②

구하는 경우의 수는 A와 B를 한 사람으로 생각하여 3명이 1동, 2동에 나누어 투숙하는 경우의 수와 같다.

즉, 서로 다른 2개의 동에서 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_2\Pi_3=2^3=8$

0035 답 112

주어진 기호를 4번 이용하여 만들 수 있는 신호의 개수는

${}_2\Pi_4=2^4=16$

기호를 5번 이용하여 만들 수 있는 신호의 개수는

${}_2\Pi_5=2^5=32$

기호를 6번 이용하여 만들 수 있는 신호의 개수는

${}_2\Pi_6=2^6=64$

따라서 구하는 신호의 개수는

$16+32+64=112$

0036 답 810

(ⅰ) 두 자리의 자연수가 적힌 공 중에서 숫자 0이 적혀 있지 않은 공의 개수는 1, 2, ⋯, 9의 9개에서 2개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로
${}_9\Pi_2=9^2=81$

(ⅱ) 세 자리의 자연수가 적힌 공 중에서 숫자 0이 적혀 있지 않은 공의 개수는 1, 2, ⋯, 9의 9개에서 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로
${}_9\Pi_3=9^3=729$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 공의 개수는

$81+729=810$

유형 05 중복순열 ; 정수의 개수
본책 10쪽

자연수 m, n에 대하여
(1) 1, 2, 3, ⋯, n의 n개의 숫자에서 중복을 허용하여 만들 수 있는 m자리 정수의 개수는 ⇨ ${}_n\Pi_m=n^m$
(2) 0, 1, 2, ⋯, n의 $n+1$개의 숫자에서 중복을 허용하여 만들 수 있는 m자리 정수의 개수는 ⇨ $n\cdot{}_{n+1}\Pi_{m-1}=n(n+1)^{m-1}$

0037 답 ④

일의 자리의 숫자가 될 수 있는 것은 1, 3, 5의 3개

백의 자리, 십의 자리의 숫자를 택하는 경우의 수는 1, 2, 3, 4, 5의 5개에서 2개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$_5\Pi_2=5^2=25$
따라서 구하는 세 자리 자연수의 개수는
$3\cdot25=75$

0038 답 ③
한 자리 자연수의 개수는 $_4\Pi_1=4$
두 자리 자연수의 개수는 $_4\Pi_2=4^2=16$
세 자리 자연수의 개수는 $_4\Pi_3=4^3=64$
따라서 구하는 자연수의 개수는
$4+16+64=84$

0039 답 31
백의 자리의 숫자가 될 수 있는 것은 2, 3의 2개
십의 자리, 일의 자리의 숫자를 택하는 경우의 수는 0, 1, 2, 3의 4개에서 2개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로
$_4\Pi_2=4^2=16$
이때, 200은 제외해야 하므로 구하는 자연수의 개수는
$2\cdot16-1=31$

0040 답 61
5개의 숫자에서 3개를 택하는 중복순열의 수는
$_5\Pi_3=5^3=125$
3을 제외한 나머지 4개의 숫자에서 3개를 택하는 중복순열의 수는
$_4\Pi_3=4^3=64$
따라서 구하는 세 자리 자연수의 개수는
$125-64=61$

0041 답 ③
3, 6, 9를 제외한 일곱 개의 숫자 0, 1, 2, 4, 5, 7, 8에서 중복을 허용하여 만들 수 있는 500 이하의 자연수의 개수는
(i) 한 자리 자연수 ⇨ 6
(ii) 두 자리 자연수 ⇨ $6\cdot{}_7\Pi_1=6\cdot7=42$
(iii) 세 자리 자연수 ⇨ $\underbrace{3\cdot{}_7\Pi_2}_{\text{백의 자리 숫자가 1, 2, 4인 세 자리 자연수의 개수}}+\overset{500}{1}=3\cdot7^2+1=148$
(i)~(iii)에서 1부터 500까지의 자연수 중에서 3, 6, 9가 들어 있지 않은 수의 개수는
$6+42+148=196$
따라서 3 또는 6 또는 9가 들어가는 수의 개수는
$500-196=304$
이므로 박수를 모두 304번 친다.

유형 06 중복순열 ; 함수의 개수 본책 11쪽

원소의 개수가 각각 m, n인 두 집합 X, Y에 대하여
(1) X에서 Y로의 함수의 개수는 ⇨ $_n\Pi_m=n^m$
(2) X에서 Y로의 일대일함수의 개수는 ⇨ $_nP_m$ (단, $n\ge m$)

0042 답 28
X에서 Y로의 함수의 개수는 Y의 원소 1, 2, 3, 4의 4개에서 2개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로
$a={}_4\Pi_2=4^2=16$
X에서 Y로의 일대일함수의 개수는 Y의 원소 1, 2, 3, 4의 4개에서 2개를 택하는 순열의 수와 같으므로
$b={}_4P_2=12$
$\therefore a+b=28$

0043 답 192
$X=\{2,\ 3,\ 5,\ 7\}$, $Y=\{1,\ 2,\ 5,\ 10\}$이고 X에서 Y로의 함수 f의 개수는 Y의 원소 1, 2, 5, 10의 4개에서 4개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로
$_4\Pi_4=4^4=256$
X에서 Y로의 함수 f 중에서 $f(2)=1$인 함수의 개수는 Y의 원소 1, 2, 5, 10의 4개에서 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로
$_4\Pi_3=4^3=64$
따라서 구하는 함수의 개수는
$256-64=192$

유형 07 같은 것이 있는 순열 ; 문자의 나열 본책 11쪽

n개 중에서 서로 같은 것이 각각 p개, q개, $\cdots$, r개씩 있을 때, n개를 일렬로 나열하는 경우의 수는
⇨ $\dfrac{n!}{p!q!\cdots r!}$ (단, $p+q+\cdots+r=n$)

0044 답 ⑤
모음 e, o, e를 한 문자 A로 생각하여 4개의 문자 A, p, p, l을 일렬로 나열하는 경우의 수는
$\dfrac{4!}{2!}=12$
모음끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는
$\dfrac{3!}{2!}=3$
따라서 구하는 경우의 수는
$12\cdot3=36$

0045 답 360
f와 t를 제외한 6개의 문자 o, o, b, a, l, l을 일렬로 나열하는 경우의 수는
$\dfrac{6!}{2!2!}=180$
양 끝에 f와 t를 나열하는 경우의 수는
$2!=2$
따라서 구하는 경우의 수는
$180\cdot2=360$

0046 답 900
7개의 문자 c, l, a, s, s, i, c를 일렬로 나열하는 경우의 수는
$\dfrac{7!}{2!2!}=1260$

s끼리 이웃하게 나열하는 경우의 수는 s, s를 한 문자 A로 생각하여 6개의 문자 A, c, l, a, i, c를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$\dfrac{6!}{2!}=360$

따라서 구하는 경우의 수는

$1260-360=900$

0047 답 ④

양 끝에 올 수 있는 것은 d, d, t, n이므로

(i) 양 끝에 모두 d가 오는 경우

a, i, t, i, o, n을 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$\dfrac{6!}{2!}=360$

(ii) 한쪽 끝에만 d가 오는 경우

다른 한쪽 끝의 문자가 될 수 있는 것은 t, n의 2개

양 끝의 문자가 자리를 바꾸는 경우의 수는 2!

$\underbrace{\text{나머지 6개의 문자}}_{\text{a, d, i, i, o, n 또는 a, d, i, t, i, o}}$를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $\dfrac{6!}{2!}$

$\therefore 2\cdot 2!\cdot \dfrac{6!}{2!}=1440$

(iii) 양 끝에 d가 오지 않는 경우, 즉 t, n이 오는 경우

양 끝의 문자가 자리를 바꾸는 경우의 수는 2!

6개의 문자 a, d, d, i, i, o를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\dfrac{6!}{2!2!}$

$\therefore 2!\cdot \dfrac{6!}{2!2!}=360$

(i)~(iii)에서 구하는 경우의 수는

$360+1440+360=2160$

유형 08 같은 것이 있는 순열 ; 정수의 개수 본책 12쪽

(i) 기준이 되는 n번째 자리 숫자를 정하는 경우의 수를 구한다.
(ii) 나머지 자리의 숫자를 정하는 경우의 수는 같은 것이 있는 순열의 수를 이용하여 구한다.
(iii) (i), (ii)에서 구한 값을 곱한다.

0048 답 ⑤

일의 자리의 숫자가 0 또는 2일 때 그 수는 짝수이다.

(i) 일의 자리의 숫자가 0인 경우

6개의 숫자 1, 1, 1, 2, 2, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\dfrac{6!}{3!2!}=60$

(ii) 일의 자리의 숫자가 2인 경우

6개의 숫자 0, 1, 1, 1, 2, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\dfrac{6!}{3!}=120$

이때, 맨 앞자리에 0이 오는 경우의 수는

$\dfrac{5!}{3!}=20$

이므로 $120-20=100$

(i), (ii)에서 구하는 짝수의 개수는

$60+100=160$

0049 답 12

5개의 숫자 1, 1, 1, 2, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\dfrac{5!}{3!}=20$

2와 3을 한 숫자로 생각하여 4개의 숫자를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $\dfrac{4!}{3!}$이고, 2와 3이 자리를 바꾸는 경우의 수는 2!이므로

$\dfrac{4!}{3!}\cdot 2!=8$

따라서 구하는 경우의 수는

$20-8=12$

다른 풀이 먼저 1, 1, 1을 일렬로 나열한 다음 그 사이사이와 양 끝에 2와 3을 나열하는 경우의 수와 같으므로 □1□1□1□

${}_4P_2=12$

0050 답 24

각 자리 숫자의 합이 3의 배수일 때 그 수는 3의 배수이다.

6개의 숫자 1, 1, 2, 3, 4, 4 중에서 4개를 택하여 그 합이 9가 되는 경우는 1, 1, 3, 4이고, 12가 되는 경우는 1, 3, 4, 4이다.

(i) 4개의 숫자 1, 1, 3, 4를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\dfrac{4!}{2!}=12$

(ii) 4개의 숫자 1, 3, 4, 4를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\dfrac{4!}{2!}=12$

(i), (ii)에서 구하는 3의 배수의 개수는

$12+12=24$

0051 답 20

TIP x_i $(i=1, 2, \cdots, 5)$ 중에서 $-1, 1, 2$를 값으로 갖는 것의 개수를 각각 a, b, c라 하고 주어진 조건을 방정식으로 나타낸다.

x_i $(i=1, 2, \cdots, 5)$ 중에서 $-1, 1, 2$를 값으로 갖는 것의 개수를 각각 a, b, c (a, b, c는 음이 아닌 정수)라 하면

$$\begin{cases} a+b+c=5 & \cdots\cdots ㉠ \\ -a+b+2c=0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠+㉡을 하면

$2b+3c=5$ ⋯⋯ ㉢

즉, $2b=5-3c\geq 0$에서 $c\leq \dfrac{5}{3}$

이때, c는 음이 아닌 정수이므로 $c=0$ 또는 $c=1$

$c=0$ 또는 $c=1$을 ㉢에 각각 대입하면

$b=\dfrac{5}{2}$, $c=0$ 또는 $b=1$, $c=1$

이때, b는 음이 아닌 정수이므로 $b=1$, $c=1$

$b=1$, $c=1$을 ㉠에 대입하면 $a=3$

따라서 x_i 중에서 그 값이 -1인 것이 3개, 1인 것이 1개, 2인 것이 1개 있고 이들을 일렬로 배열하는 경우의 수가 구하는 방정식의 근의 개수와 같으므로

$\dfrac{5!}{3!}=20$

유형 09 순서가 정해진 순열 본책 12쪽

서로 다른 n개의 문자를 일렬로 나열할 때, 특정한 $r(0<r\le n)$개를 미리 정해진 순서대로 나열하는 경우의 수는
⇨ 순서가 정해진 r개를 같은 것으로 생각하여 같은 것이 r개 포함된 n개를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같다.
⇨ $\dfrac{n!}{r!}$

0052 답 ③

success에서 모음 u, e의 순서가 정해져 있으므로 u, e를 모두 x로 생각하여 7개의 문자 s, x, c, c, x, s, s를 일렬로 나열한 후 첫 번째 x는 e, 두 번째 x는 u로 바꾸면 된다.
따라서 구하는 경우의 수는
$\dfrac{7!}{3!2!2!}=210$

0053 답 180

a, f와 b, e의 순서가 각각 정해져 있으므로 a, f를 모두 x로, b, e를 모두 y로 생각하여 6개의 문자 x, y, c, d, y, x를 일렬로 나열한 후 첫 번째 x는 a, 두 번째 x는 f로, 첫 번째 y는 b, 두 번째 y는 e로 바꾸면 된다.
따라서 구하는 경우의 수는
$\dfrac{6!}{2!2!}=180$

0054 답 140

a, b, c의 순서가 정해져 있으므로 a, b, c를 모두 x로 생각하여 7개의 문자 x, x, x, d, d, d, e를 일렬로 나열한 후 첫 번째 x는 a, 두 번째 x는 b, 세 번째 x는 c로 바꾸면 된다.
따라서 구하는 경우의 수는
$\dfrac{7!}{3!3!}=140$

0055 답 36

3과 5는 반드시 포함해야 하므로 1, 2, 4 중에서 숫자 2개를 뽑는 경우의 수는
${}_3C_2=3$
3, 5의 순서가 정해져 있으므로 3, 5를 모두 x로 생각하여 4개의 숫자를 일렬로 나열한 후 첫 번째 x는 3, 두 번째 x는 5로 바꾸면 되고 그 경우의 수는
$\dfrac{4!}{2!}=12$
따라서 구하는 경우의 수는
$3\cdot12=36$

유형 10 최단 거리로 가는 경우의 수 (1) 본책 13쪽

A에서 P를 거쳐 B까지 최단 거리로 가는 경우의 수는
⇨ (A에서 P까지 최단 거리로 가는 경우의 수)
×(P에서 B까지 최단 거리로 가는 경우의 수)

0056 답 60

A에서 P까지 최단 거리로 가는 경우의 수는
$\dfrac{4!}{2!2!}=6$
P에서 B까지 최단 거리로 가는 경우의 수는
$\dfrac{5!}{3!2!}=10$
따라서 A에서 P를 거쳐 B까지 최단 거리로 가는 경우의 수는
$6\cdot10=60$

0057 답 23

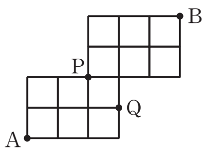
A에서 B까지 최단 거리로 가는 경우의 수는
$\dfrac{7!}{4!3!}=35$
A에서 $\overline{PQ}$를 거쳐 B까지 최단 거리로 가는 경우의 수는
$2\cdot1\cdot\dfrac{4!}{2!2!}=12$
따라서 구하는 경우의 수는
$35-12=23$

0058 답 87

A에서 P를 거쳐 B까지 최단 거리로 가는 경우의 수는
$\dfrac{4!}{2!2!}\cdot\dfrac{6!}{4!2!}=90$
A에서 Q를 거쳐 B까지 최단 거리로 가는 경우의 수는
$\dfrac{7!}{4!3!}\cdot\dfrac{3!}{2!}=105$
A에서 P, Q를 모두 거쳐 B까지 최단 거리로 가는 경우의 수는
$\dfrac{4!}{2!2!}\cdot\dfrac{3!}{2!}\cdot\dfrac{3!}{2!}=54$
따라서 구하는 경우의 수는
$90+105-2\cdot54=87$

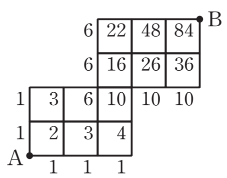
다른 풀이 A에서 P, Q를 모두 거쳐 B까지 최단 거리로 가는 경우는 A → P → B인 경우와 A → Q → B인 경우에 모두 포함되므로 두 가지 경우에서 각각 빼야 한다.

0059 답 84



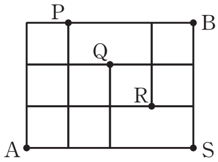
오른쪽 그림과 같이 두 지점 P, Q를 잡으면 A에서 B까지 최단 거리로 가는 방법은 A → P → B, A → Q → B이다.
(i) A → P → B의 경우
⇨ $\dfrac{4!}{2!2!}\cdot\dfrac{5!}{3!2!}=60$
(ii) A → Q → B의 경우
⇨ $\dfrac{4!}{3!}\cdot1\cdot\dfrac{4!}{2!2!}=24$
(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는
$60+24=84$

다른 풀이 오른쪽 그림과 같이 합의 법칙을 이용하면 A에서 B까지 최단 거리로 가는 경우의 수는 84이다.



0060 답 ③

오른쪽 그림과 같이 네 점 P, Q, R, S를 잡으면 A에서 B까지 최단 거리로 가는 방법은



A → P → B, A → Q → B,
A → R → B, A → S → B

(i) A → P → B의 경우 ⇨ $\frac{4!}{3!}\cdot 1=4$

(ii) A → Q → B의 경우 ⇨ $\frac{4!}{2!2!}\cdot 1\cdot 2=12$

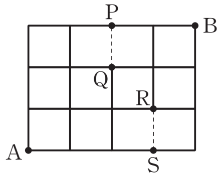
(iii) A → R → B의 경우 ⇨ $\frac{3!}{2!}\cdot 1\cdot \frac{3!}{2!}=9$

(iv) A → S → B의 경우 ⇨ $1\cdot 1=1$

(i)~(iv)에서 구하는 경우의 수는

$4+12+9+1=26$

다른 풀이 오른쪽 그림과 같이 지나갈 수 없는 길을 점선으로 연결하고 P, Q, R, S를 잡으면 구하는 경우의 수는 A에서 B까지 최단 거리로 가는 경우의 수에서 $\overline{QP}$를 거치거나 $\overline{SR}$를 거치는 경우의 수를 뺀 것과 같으므로



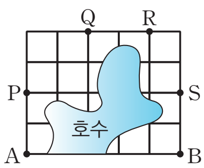
$$\frac{7!}{4!3!}-\underbrace{\frac{4!}{2!2!}\cdot 1\cdot 1}_{\text{A에서 }\overline{QP}\text{를 거쳐 B까지 최단 거리로 가는 경우의 수}}-\underbrace{1\cdot 1\cdot \frac{3!}{2!}}_{\text{A에서 }\overline{SR}\text{를 거쳐 B까지 최단 거리로 가는 경우의 수}}=35-6-3=26$$

유형 11 최단 거리로 가는 경우의 수 (2) 본책 13쪽

A에서 B까지 갈 때 장애물이 있는 경우에는 반드시 거쳐야 하는 지점을 잡아 최단 거리로 가는 경우의 수를 구한다.

0061 답 ④

오른쪽 그림과 같이 네 지점 P, Q, R, S를 잡으면 A에서 B까지 최단 거리로 가는 방법은



A → P → Q → R → S → B이다.

따라서 구하는 경우의 수는

$1\cdot \frac{4!}{2!2!}\cdot 1\cdot \frac{3!}{2!}\cdot 1=18$

0062 답 ③

꼭짓점 A에서 꼭짓점 B까지 최단 거리로 가려면 가로, 세로, 높이의 방향으로 각각 3번, 3번, 4번 이동해야 하므로 구하는 경우의 수는

$\frac{10!}{3!3!4!}=4200$

STEP 3 | 심화 Master

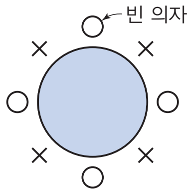
0063 답 864

TIP 먼저 남학생은 남학생끼리, 여학생은 여학생끼리 조를 만드는 경우의 수를 구한다.

조건 (가)에서 남학생 4명이 2명씩, 여학생 4명이 2명씩 짝을 지어 조를 만드는 경우의 수는

$_4C_2\cdot {_2C_2}\cdot \frac{1}{2!}\cdot {_4C_2}\cdot {_2C_2}\cdot \frac{1}{2!}=3\cdot 3=9$

조건 (나)에 의하여 같은 조의 학생끼리는 서로 이웃하여 앉아야 한다. 오른쪽 그림과 같이 빈 의자 4개를 고정시킨 후 한 조의 2명을 한 명으로 생각하여 의자 사이사이의 4개의 자리에 4명을 앉히는 경우의 수는



$(4-1)!=3!=6$

이때, 같은 조의 학생끼리 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는 각각 $2!=2$

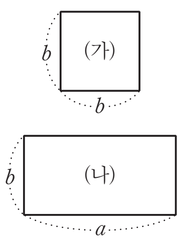
따라서 구하는 경우의 수는

$9\cdot 6\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2=864$

0064 답 90

TIP 같은 모양의 면의 개수를 생각해 본다.

주어진 직육면체는 오른쪽 그림과 같이 가로, 세로의 길이가 모두 b인 면 2개와 가로, 세로의 길이가 각각 a, b인 면 4개로 이루어져 있다.



서로 다른 6가지 색 중에서 (가) 모양의 면 2개에 칠할 2가지 색을 정하는 경우의 수는 $_6P_2$이고, 각 경우에 대하여 회전하여 같은 경우가 2가지씩 생기므로

$\frac{_6P_2}{2}=15$

또, 나머지 4가지 색으로 (나) 모양의 면 4개를 칠하는 경우의 수는 4가지 색을 원형으로 배열하는 경우의 수와 같으므로

$(4-1)!=3!=6$

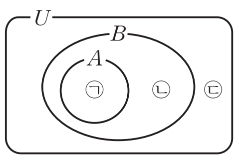
따라서 구하는 경우의 수는

$15\cdot 6=90$

0065 답 211

TIP 벤 다이어그램을 이용하여 $A\subset B$를 나타낸다.

벤 다이어그램을 이용하여 $A\subset B$를 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



$A\subset B$를 만족하는 순서쌍 $(A,\ B)$의 개수는 ㉠, ㉡, ㉢의 3개에서 5개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$_3\Pi_5=3^5=243$

이때, 집합 A가 공집합인 순서쌍 $(A,\ B)$의 개수는 ㉡, ㉢의 2개에서 5개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$_2\Pi_5=2^5=32$
따라서 구하는 순서쌍 $(A,\ B)$의 개수는
$243-32=211$

0066 답 ⑤

TIP 1을 택하는 횟수를 기준으로 경우를 나누어 생각한다.

1을 네 번 이상 택하면 반드시 1끼리 서로 이웃하게 되므로 1은 세 번 이하로 택해야 한다.

(i) 1을 택하지 않는 경우
첫 번째 자리의 숫자가 2이어야 하고 나머지 네 자리의 숫자를 택하는 경우의 수는 0, 2의 2개에서 4개를 택하는 중복순열의 수와 같다.
$\therefore\ _2\Pi_4=2^4=16$

(ii) 1을 한 번 택하는 경우
첫 번째 자리의 숫자가 1인 경우의 수는
$_2\Pi_4=2^4=16$ ─ 나머지 네 자리에 0, 2를 배열하는 경우의 수
첫 번째 자리의 숫자가 2인 경우는
21□□□, 2□1□□, 2□□1□, 2□□□1이므로 그 경우의 수는 $4\cdot{}_2\Pi_3=4\cdot2^3=32$
└ 나머지 세 자리에 0, 2를 배열하는 경우의 수
$\therefore\ 16+32=48$

(iii) 1을 두 번 택하는 경우
첫 번째 자리의 숫자가 1인 경우는
1□1□□, 1□□1□, 1□□□1이므로 그 경우의 수는
$3\cdot{}_2\Pi_3=3\cdot2^3=24$
└ 나머지 세 자리에 0, 2를 배열하는 경우의 수
첫 번째 자리의 숫자가 2인 경우는
21□1□, 21□□1, 2□1□1이므로 그 경우의 수는
$3\cdot{}_2\Pi_2=3\cdot2^2=12$
└ 나머지 두 자리에 0, 2를 배열하는 경우의 수
$\therefore\ 24+12=36$

(iv) 1을 세 번 택하는 경우
1□1□1이므로 나머지 두 자리의 숫자를 택하는 경우의 수는 0, 2의 2개에서 2개를 택하는 중복순열의 수와 같다.
$\therefore\ _2\Pi_2=2^2=4$

(i)~(iv)에서 구하는 자연수의 개수는
$16+48+36+4=104$

0067 답 294

TIP $f(1)$의 값을 기준으로 경우를 나누어 생각한다.

조건 (가)에서 $f(1)$의 값이 홀수이므로 $f(1)=1$ 또는 $f(1)=3$ 또는 $f(1)=5$ 또는 $f(1)=7$이다.

(i) $f(1)=1$인 경우
$f(2)$의 값이 될 수 있는 수는 2, 4, 6의 3개
$f(3)$, $f(4)$의 값이 될 수 있는 수는 1, 2, …, 7의 7개이므로 함수 f의 개수는
$3\cdot{}_7\Pi_2=3\cdot7^2=147$

(ii) $f(1)=3$인 경우
$f(2)$의 값이 될 수 있는 수는 4, 6의 2개
$f(3)$, $f(4)$의 값이 될 수 있는 수는 1, 2, …, 7의 7개이므로 함수 f의 개수는
$2\cdot{}_7\Pi_2=2\cdot7^2=98$

(iii) $f(1)=5$인 경우
$f(2)$의 값이 될 수 있는 수는 6의 1개
$f(3)$, $f(4)$의 값이 될 수 있는 수는 1, 2, …, 7의 7개이므로 함수 f의 개수는
$1\cdot{}_7\Pi_2=7^2=49$

(iv) $f(1)=7$인 경우
$f(1)<f(2)$인 $f(2)$의 값이 존재하지 않으므로 조건을 만족시키는 함수 f는 없다.

(i)~(iv)에서 구하는 함수 f의 개수는
$147+98+49=294$

0068 답 136

TIP $f(3)$의 값을 기준으로 경우를 나누어 생각한다.

조건 (가)에 의하여 $f(3)=2$ 또는 $f(3)=4$ 또는 $f(3)=6$이다.

(i) $f(3)=2$인 경우
$f(1)=1$, $f(2)=1$이고, $f(4)$, $f(5)$, $f(6)$의 값이 될 수 있는 수는 3, 4, 5, 6의 4개이므로 함수 f의 개수는
$_4\Pi_3=4^3=64$

(ii) $f(3)=4$인 경우
$f(1)$, $f(2)$의 값이 될 수 있는 수는 1, 2, 3의 3개
$f(4)$, $f(5)$, $f(6)$의 값이 될 수 있는 수는 5, 6의 2개이므로 함수 f의 개수는
$_3\Pi_2\cdot{}_2\Pi_3=3^2\cdot2^3=72$

(iii) $f(3)=6$인 경우
$f(4)$, $f(5)$, $f(6)$의 값이 존재하지 않으므로 조건을 만족시키는 함수 f는 없다.

(i)~(iii)에서 구하는 함수 f의 개수는
$64+72=136$

0069 답 600

TIP $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$임을 이용한다.

(i) 1끼리 이웃하는 경우
1, 1을 한 문자 A로 생각하여 6개의 문자 A, 2, 2, 3, 4, 5를 일렬로 나열하는 경우의 수는
$\dfrac{6!}{2!}=360$

(ii) 2끼리 이웃하는 경우
2, 2를 한 문자 B로 생각하여 6개의 문자 1, 1, B, 3, 4, 5를 일렬로 나열하는 경우의 수는
$\dfrac{6!}{2!}=360$

(iii) 1끼리, 2끼리 모두 이웃하는 경우

1, 1을 한 문자 A로, 2, 2를 한 문자 B로 생각하여 5개의 문자 A, B, 3, 4, 5를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$5!=120$

(i)~(iii)에서 구하는 경우의 수는

$360+360-120=600$

0070 답 100

TIP 좌표평면 위에서 오른쪽, 왼쪽, 위, 아래의 방향으로 움직인 횟수를 각각 a, b, c, d로 놓는다.

좌표평면 위에서 오른쪽, 왼쪽, 위, 아래의 방향으로 움직인 횟수를 각각 a, b, c, d라 하면

$0\le a\le 5,\ 0\le b\le 5,\ 0\le c\le 5,\ 0\le d\le 5$이고, $a+b+c+d=5$

점 P가 원점을 출발하여 5번 움직일 때 직선 $y=2x$ 위로 이동하려면 점 P의 좌표는 $(1,\ 2)$ 또는 $(-1,\ -2)$이어야 한다.

(i) 점 P의 좌표가 $(1,\ 2)$인 경우

$a=1, b=0, c=3, d=1$일 때, 즉 a, c, c, c, d를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{5!}{3!}=20$

$a=2, b=1, c=2, d=0$일 때, 즉 a, a, b, c, c를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{5!}{2!2!}=30$

(ii) 점 P의 좌표가 $(-1,\ -2)$인 경우

$a=0, b=1, c=1, d=3$일 때, 즉 b, c, d, d, d를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{5!}{3!}=20$

$a=1, b=2, c=0, d=2$일 때, 즉 a, b, b, d, d를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{5!}{2!2!}=30$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$20+30+20+30=100$

0071 답 180

TIP 세 개의 공에 적힌 수의 합이 5이려면 적힌 수는 1, 2, 2이어야 한다.

(i) 숫자 4, 5, 6이 적힌 칸에 흰 공 ①, ②, ②를 넣는 경우

흰 공 ①, ②, ②를 나열하는 경우의 수는

$\frac{3!}{2!}=3$

나머지 5개의 칸에 흰 공 ①, 검은 공 ❶, ❶, ❷, ❷를 넣는 경우의 수는

$\frac{5!}{2!2!}=30$

$\therefore 3\cdot 30=90$

(ii) 숫자 4, 5, 6이 적힌 칸에 검은 공 ❶, ❷, ❷를 넣는 경우

(i)과 마찬가지이므로 경우의 수는 90

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$90+90=180$

0072 답 90

TIP 같은 과목의 수준 Ⅰ, 수준 Ⅱ의 과제는 제출 순서가 정해져 있으므로 같은 과목은 같은 문자로 생각한다.

과목별로 A, B의 순서가 정해져 있으므로 국어 A, 국어 B를 모두 a로, 수학 A, 수학 B를 모두 b로, 영어 A, 영어 B를 모두 c로 생각하여 여섯 개의 문자 a, a, b, b, c, c를 일렬로 나열한 후 같은 문자의 첫 번째 문자는 수준 Ⅰ의 과제로, 두 번째 문자는 수준 Ⅱ의 과제로 바꾸면 된다.

따라서 구하는 경우의 수는

$\frac{6!}{2!2!2!}=90$

0073 답 420

TIP 순서가 정해진 문자는 같은 것으로 생각하여 같은 것이 있는 순열의 수를 이용한다.

모든 동네가 서로 직선 도로로 연결되어 있으므로 동네 A를 출발하여 나머지 7개의 동네를 방문한 후 다시 동네 A로 돌아오는 경우의 수는 B, C, D, E, F, G, H를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같다.

이때, B, C와 F, G, H의 순서가 각각 정해져 있으므로 B, C를 모두 X로, F, G, H를 모두 Y로 생각하여 7개의 문자 X, X, D, E, Y, Y, Y를 일렬로 나열한 후 첫 번째 X는 B, 두 번째 X는 C로, 첫 번째 Y는 G, 두 번째 Y는 F, 세 번째 Y는 H로 바꾸면 된다.

따라서 구하는 경우의 수는

$\frac{7!}{2!3!}=420$

0074 답 56

TIP 꼭짓점 A에서 모서리 CD를 거쳐 꼭짓점 B까지 최단 거리로 가는 경우의 수를 구하여 전체 경우의 수에서 뺀다.

꼭짓점 A에서 꼭짓점 B까지 최단 거리로 가려면 가로, 세로, 높이의 방향으로 각각 1번, 2번, 3번 이동해야 하므로 그 경우의 수는

$\frac{6!}{2!3!}=60$

꼭짓점 A에서 모서리 CD를 거쳐 꼭짓점 B까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$\frac{4!}{3!}\cdot 1\cdot 1=4$

따라서 구하는 경우의 수는

$60-4=56$

2 | 중복조합과 이항정리

본책 18쪽~30쪽

STEP 1 | 기초 Build

0075 답 6

${}_3H_2={}_{3+2-1}C_2={}_4C_2=6$

0076 답 7

${}_2H_6={}_{2+6-1}C_6={}_7C_6={}_7C_1=7$

0077 답 4

${}_4H_1={}_{4+1-1}C_1={}_4C_1=4$

0078 답 1

${}_6H_0={}_{6+0-1}C_0={}_5C_0=1$

0079 답 $n=4$

${}_2H_3={}_{2+3-1}C_3={}_4C_3={}_4C_1$

$\therefore n=4$

0080 답 $n=5$

${}_nH_2={}_{n+2-1}C_2={}_{n+1}C_2={}_6C_2$이므로

$n+1=6 \qquad \therefore n=5$

0081 답 $r=4$

${}_7H_r={}_{7+r-1}C_r={}_{6+r}C_r={}_{6+r}C_6$이고,

${}_{10}C_4={}_{10}C_6$이므로

$6+r=10 \qquad \therefore r=4$

0082 답 20

${}_4H_3={}_{4+3-1}C_3={}_6C_3=20$

0083 답 21

${}_3H_5={}_{3+5-1}C_5={}_7C_5={}_7C_2=21$

0084 답 $a^5-5a^4b+10a^3b^2-10a^2b^3+5ab^4-b^5$

$(a-b)^5$

$={}_5C_0\,a^5+{}_5C_1\,a^4(-b)+{}_5C_2\,a^3(-b)^2+{}_5C_3\,a^2(-b)^3$
$\qquad+{}_5C_4\,a(-b)^4+{}_5C_5(-b)^5$

$=a^5-5a^4b+10a^3b^2-10a^2b^3+5ab^4-b^5$

0085 답 $16x^4-32x^3+24x^2-8x+1$

$(2x-1)^4$

$={}_4C_0(2x)^4+{}_4C_1(2x)^3(-1)+{}_4C_2(2x)^2(-1)^2$
$\qquad+{}_4C_3(2x)(-1)^3+{}_4C_4(-1)^4$

$=16x^4-32x^3+24x^2-8x+1$

0086 답 $x^6+12x^5y+60x^4y^2+160x^3y^3+240x^2y^4+192xy^5+64y^6$

$(x+2y)^6$

$={}_6C_0\,x^6+{}_6C_1\,x^5(2y)+{}_6C_2\,x^4(2y)^2+{}_6C_3\,x^3(2y)^3$
$\qquad+{}_6C_4\,x^2(2y)^4+{}_6C_5\,x(2y)^5+{}_6C_6(2y)^6$

$=x^6+12x^5y+60x^4y^2+160x^3y^3+240x^2y^4+192xy^5+64y^6$

0087 답 $8a^3+12a+\frac{6}{a}+\frac{1}{a^3}$

$\left(2a+\frac{1}{a}\right)^3$

$={}_3C_0(2a)^3+{}_3C_1(2a)^2\left(\frac{1}{a}\right)+{}_3C_2(2a)\left(\frac{1}{a}\right)^2+{}_3C_3\left(\frac{1}{a}\right)^3$

$=8a^3+12a+\frac{6}{a}+\frac{1}{a^3}$

0088 답 15

$(x+y)^6$의 전개식의 일반항은 ${}_6C_r\,x^{6-r}y^r$

$x^{6-r}y^r=x^4y^2$에서 $r=2$

따라서 x^4y^2의 계수는 ${}_6C_2=15$

0089 답 -12

$(x-3)^4$의 전개식의 일반항은

${}_4C_r\,x^{4-r}(-3)^r={}_4C_r(-3)^rx^{4-r}$

$x^{4-r}=x^3$에서 $r=1$

따라서 x^3의 계수는 ${}_4C_1\cdot(-3)=-12$

0090 답 240

$(3x-2y)^5$의 전개식의 일반항은

${}_5C_r(3x)^{5-r}(-2y)^r={}_5C_r\,3^{5-r}(-2)^rx^{5-r}y^r$

$x^{5-r}y^r=xy^4$에서 $r=4$

따라서 xy^4의 계수는

${}_5C_4\cdot3\cdot(-2)^4={}_5C_1\cdot3\cdot(-2)^4=240$

0091 답 -160

$\left(x-\frac{2}{x}\right)^6$의 전개식의 일반항은

${}_6C_r\,x^{6-r}\left(-\frac{2}{x}\right)^r={}_6C_r(-2)^rx^{6-2r}$

상수항은 $6-2r=0$일 때이므로 $r=3$

따라서 상수항은 ${}_6C_3\cdot(-2)^3=-160$

0092 답 80

$\left(x^2+\frac{2}{x}\right)^5$의 전개식의 일반항은

${}_5C_r(x^2)^{5-r}\left(\frac{2}{x}\right)^r={}_5C_r\,2^rx^{10-3r}$

$x^{10-3r}=x$에서 $r=3$

따라서 x의 계수는 ${}_5C_3\cdot2^3={}_5C_2\cdot2^3=80$

0093 답 풀이 참조

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & \boxed{3} & & 1 & & \\
 & 1 & & \boxed{4} & & \boxed{6} & & 4 & & 1 & \\
1 & & \boxed{5} & & \boxed{10} & & \boxed{10} & & 5 & & 1
\end{array}$$

$\therefore (x-1)^5=x^5+5x^4(-1)+10x^3(-1)^2+10x^2(-1)^3$
$\qquad+5x(-1)^4+(-1)^5$

$\qquad=x^5-5x^4+10x^3-10x^2+5x-1$

0094 답 풀이 참조

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & \boxed{3} & & 1 & & & \\
 & & 1 & & \boxed{4} & & \boxed{6} & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & \boxed{5} & & \boxed{10} & & \boxed{10} & & 5 & & 1 & \\
1 & & \boxed{6} & & \boxed{15} & & \boxed{20} & & \boxed{15} & & 6 & & 1
\end{array}$$

$\therefore (a+b)^6=a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6$

0095 답 ${}_7C_3$

${}_6C_2+{}_6C_3={}_7C_3$

0096 답 ${}_9C_2$

${}_7C_0+{}_7C_1+{}_8C_2={}_8C_1+{}_8C_2={}_9C_2$

0097 답 ${}_6C_2$

$$\begin{aligned}{}_3C_1+{}_3C_1+{}_4C_1+{}_5C_1&={}_3C_1+{}_3C_2+{}_4C_1+{}_5C_1\\&={}_4C_2+{}_4C_1+{}_5C_1\\&={}_5C_2+{}_5C_1={}_6C_2\end{aligned}$$

0098 답 ${}_8C_3$

$$\begin{aligned}{}_4C_4+{}_5C_1+{}_6C_2+{}_7C_3&={}_5C_0+{}_5C_1+{}_6C_2+{}_7C_3\\&={}_6C_1+{}_6C_2+{}_7C_3\\&={}_7C_2+{}_7C_3={}_8C_3\end{aligned}$$

0099 답 ${}_9C_3$

$$\begin{array}{cccccc}
{}_1C_0 & {}_1C_1 & & & & \\
{}_2C_0 & {}_2C_1 & {}_2C_2 & & & \\
{}_3C_0 & {}_3C_1 & {}_3C_2 & {}_3C_3 & & \\
{}_4C_0 & {}_4C_1 & {}_4C_2 & {}_4C_3 & {}_4C_4 & \\
 & & \vdots & & & \\
{}_8C_0 & {}_8C_1 & {}_8C_2 & {}_8C_3 & \cdots & {}_8C_8 \\
{}_9C_0 & {}_9C_1 & {}_9C_2 & {}_9C_3 & \cdots & {}_9C_9
\end{array}$$

따라서 색칠한 부분에 있는 수의 합은 ${}_9C_3$

다른 풀이
$$\begin{aligned}&{}_2C_2+{}_3C_2+{}_4C_2+{}_5C_2+{}_6C_2+{}_7C_2+{}_8C_2\\&={}_3C_3+{}_3C_2+{}_4C_2+{}_5C_2+{}_6C_2+{}_7C_2+{}_8C_2\\&={}_4C_3+{}_4C_2+{}_5C_2+{}_6C_2+{}_7C_2+{}_8C_2\\&={}_5C_3+{}_5C_2+{}_6C_2+{}_7C_2+{}_8C_2\\&={}_6C_3+{}_6C_2+{}_7C_2+{}_8C_2\\&={}_7C_3+{}_7C_2+{}_8C_2\\&={}_8C_3+{}_8C_2\\&={}_9C_3\end{aligned}$$

0100 답 2^7

${}_7C_0+{}_7C_1+{}_7C_2+\cdots+{}_7C_7=2^7$

0101 답 0

${}_8C_0-{}_8C_1+{}_8C_2-\cdots+{}_8C_8=0$

0102 답 0

${}_9C_0-{}_9C_1+{}_9C_2-\cdots-{}_9C_9=0$

0103 답 2^9

${}_{10}C_0+{}_{10}C_2+{}_{10}C_4+{}_{10}C_6+{}_{10}C_8+{}_{10}C_{10}=2^{10-1}=2^9$

0104 답 2^{11}

${}_{12}C_1+{}_{12}C_3+{}_{12}C_5+{}_{12}C_7+{}_{12}C_9+{}_{12}C_{11}=2^{12-1}=2^{11}$

0105 답 7

${}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_n=2^n$이므로

${}_nC_1+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_n=2^n-1$

즉, $2^n-1=127$에서 $2^n=128=2^7$

$\therefore n=7$

0106 답 5

${}_{2n}C_0+{}_{2n}C_2+{}_{2n}C_4+\cdots+{}_{2n}C_{2n}=2^{2n-1}$이므로

$2^{2n-1}=512=2^9$

즉, $2n-1=9$에서 $n=5$

0107 답 (가) 1 (나) -1 (다) $-$

n이 홀수일 때,

$(1+x)^n={}_nC_0+{}_nC_1\,x+{}_nC_2\,x^2+\cdots+{}_nC_n\,x^n$ ⋯⋯ ㉠

㉠에 $x=$ $\boxed{\text{(가) } 1}$을 대입하면

$2^n={}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_n$ ⋯⋯ ㉡

㉠에 $x=$ $\boxed{\text{(나) } -1}$을 대입하면

$0={}_nC_0-{}_nC_1+{}_nC_2-\cdots-{}_nC_n$ ⋯⋯ ㉢

㉡ $\boxed{\text{(다) } -}$ ㉢을 하면 $2^n=2({}_nC_1+{}_nC_3+\cdots+{}_nC_n)$

위의 식의 양변을 2로 나누면

$2^{n-1}={}_nC_1+{}_nC_3+{}_nC_5+\cdots+{}_nC_n$

STEP 2 | 유형 Drill

유형 01 중복조합

본책 22쪽

서로 다른 n개에서 r개를 택하는 중복조합의 수

⇨ ${}_nH_r={}_{n+r-1}C_r$

0108 답 140

a의 값은 서로 다른 4개에서 7개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$a={}_4H_7={}_{4+7-1}C_7={}_{10}C_7={}_{10}C_3=120$

b의 값은 먼저 꽃병에 꽃을 한 송이씩 나누어 꽂고, 남은 꽃 3송이를 나누어 꽂는 경우의 수와 같으므로 서로 다른 4개에서 3개를 택하는 중복조합의 수와 같다. 따라서

$b={}_4H_3={}_{4+3-1}C_3={}_6C_3=20$

$\therefore a+b=140$

0109 답 45

구하는 항의 개수는 3개의 문자 a, b, $2c$ 중에서 8개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3H_8={}_{3+8-1}C_8={}_{10}C_8={}_{10}C_2=45$

0110 답 ④

3명의 학생들에게 똑같은 야구공 6개를 나누어 주는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 6개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3H_6={}_{3+6-1}C_6={}_8C_6={}_8C_2=28$

3명의 학생들에게 똑같은 농구공 4개를 나누어 주는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 4개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3H_4={}_{3+4-1}C_4={}_6C_4={}_6C_2=15$

따라서 구하는 경우의 수는 $28\cdot15=420$

0111 답 126

6개의 숫자 1, 2, 3, 4, 5, 6 중에서 4개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_6H_4={}_{6+4-1}C_4={}_9C_4=126$

0112 답 200

먼저 네 사람에게 우유와 빵을 각각 한 개씩 나누어 주면 우유 2개와 빵 3개가 남는다. 이때, 우유 2개를 네 사람에게 나누어 주는 경우의 수는 서로 다른 4개에서 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_4H_2={}_{4+2-1}C_2={}_5C_2=10$

빵 3개를 네 사람에게 나누어 주는 경우의 수는 서로 다른 4개에서 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_4H_3={}_{4+3-1}C_3={}_6C_3=20$

따라서 구하는 경우의 수는 $10\cdot20=200$

유형 02 중복조합 ; 방정식, 부등식의 해의 개수 본책 22쪽

방정식 $x_1+x_2+x_3+\cdots+x_m=n$ (m, n은 자연수)에 대하여

(1) 음이 아닌 정수인 해의 개수 ⇨ ${}_mH_n={}_{m+n-1}C_n$

(2) 자연수인 해의 개수 ⇨ ${}_mH_{n-m}={}_{n-1}C_{n-m}={}_{n-1}C_{m-1}$ (단, $n\ge m$)

0113 답 164

$x={}_4H_9={}_{12}C_9={}_{12}C_3=220$

한편, $a-1=A$, $b-1=B$, $c-1=C$, $d-1=D$로 놓으면

$a+b+c+d=9$에서

$(A+1)+(B+1)+(C+1)+(D+1)=9$

$\therefore A+B+C+D=5$

즉, y의 값은 방정식 $A+B+C+D=5$를 만족시키는 음이 아닌 정수 A, B, C, D의 순서쌍 (A, B, C, D)의 개수와 같으므로

$y={}_4H_5={}_8C_5={}_8C_3=56$

$\therefore x-y=164$

0114 답 ⑤

a, b, c, d가 음이 아닌 정수이므로 $a+b+c+d=0$ 또는 $a+b+c+d=1$ 또는 $a+b+c+d=2$ 또는 $a+b+c+d=3$

(i) $a+b+c+d=0$의 음이 아닌 정수인 해의 개수는

${}_4H_0={}_3C_0=1$

(ii) $a+b+c+d=1$의 음이 아닌 정수인 해의 개수는

${}_4H_1={}_4C_1=4$

(iii) $a+b+c+d=2$의 음이 아닌 정수인 해의 개수는

${}_4H_2={}_5C_2=10$

(iv) $a+b+c+d=3$의 음이 아닌 정수인 해의 개수는

${}_4H_3={}_6C_3=20$

(i)~(iv)에서 구하는 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는

$1+4+10+20=35$

0115 답 45

x, y, z가 각각 $x\ge-1$, $y\ge-1$, $z\ge-1$인 정수이므로

$x=X-1$, $y=Y-1$, $z=Z-1$로 놓으면

$x+y+z=5$에서 $(X-1)+(Y-1)+(Z-1)=5$

$\therefore X+Y+Z=8$

즉, 구하는 순서쌍의 개수는 방정식 $X+Y+Z=8$을 만족시키는 음이 아닌 정수 X, Y, Z의 순서쌍 (X, Y, Z)의 개수와 같으므로

${}_3H_8={}_{10}C_8={}_{10}C_2=45$

0116 답 28

$x=X+1$, $y=Y+2$, $z=-Z+1$로 놓으면

$x+y-z=8$에서 $(X+1)+(Y+2)-(-Z+1)=8$

$\therefore X+Y+Z=6$

즉, 구하는 순서쌍의 개수는 방정식 $X+Y+Z=6$을 만족시키는 음이 아닌 정수 X, Y, Z의 순서쌍 (X, Y, Z)의 개수와 같으므로

${}_3H_6={}_8C_6={}_8C_2=28$

0117 답 36

$x=2X+1$, $y=2Y+1$, $z=2Z+1$로 놓으면

$x+y+z=17$에서 $(2X+1)+(2Y+1)+(2Z+1)=17$

$2X+2Y+2Z=14$ $\quad\therefore X+Y+Z=7$

즉, 구하는 순서쌍의 개수는 방정식 $X+Y+Z=7$을 만족시키는 음이 아닌 정수 X, Y, Z의 순서쌍 (X, Y, Z)의 개수와 같으므로

${}_3H_7={}_9C_7={}_9C_2=36$

0118 답 46

a, b, c, d가 음이 아닌 정수이므로

(i) $d=0$일 때 $a+b+c\le4$에서

$a+b+c=0$의 음이 아닌 정수인 해의 개수는 ${}_3H_0={}_2C_0=1$

$a+b+c=1$의 음이 아닌 정수인 해의 개수는 ${}_3H_1={}_3C_1=3$

$a+b+c=2$의 음이 아닌 정수인 해의 개수는 ${}_3H_2={}_4C_2=6$

$a+b+c=3$의 음이 아닌 정수인 해의 개수는

${}_3H_3={}_5C_3={}_5C_2=10$

$a+b+c=4$의 음이 아닌 정수인 해의 개수는

${}_3H_4={}_6C_4={}_6C_2=15$

$\therefore 1+3+6+10+15=35$

(ii) $d=1$일 때 $a+b+c\le2$에서

$a+b+c=0$의 음이 아닌 정수인 해의 개수는 1

$a+b+c=1$의 음이 아닌 정수인 해의 개수는 3

$a+b+c=2$의 음이 아닌 정수인 해의 개수는 6

$\therefore 1+3+6=10$

(iii) $d=2$일 때 $a+b+c\le0$에서

$a+b+c=0$의 음이 아닌 정수인 해의 개수는 1

(i)~(iii)에서 구하는 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는

$35+10+1=46$

유형 03 **중복조합 ; 함수의 개수** 본책 23쪽

두 집합 $X=\{x_1, x_2, x_3, \cdots, x_m\}$, $Y=\{y_1, y_2, y_3, \cdots, y_n\}$에 대하여 함수 $f: X \longrightarrow Y$ 중에서 $x_i<x_j$이면 $f(x_i) \le f(x_j)$를 만족시키는 함수 f의 개수
⇨ ${}_n\mathrm{H}_m$

0119 답 ④
서로 다른 4개에서 4개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
${}_4\mathrm{H}_4={}_7\mathrm{C}_4={}_7\mathrm{C}_3=35$

0120 답 63
$f(1) \le f(2) \le f(3)=6$에서 $f(1)$, $f(2)$의 값을 정하는 경우의 수는 1, 2, 3, 4, 5, 6의 서로 다른 6개에서 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
${}_6\mathrm{H}_2={}_7\mathrm{C}_2=21$
$6=f(3) \le f(4)$에서 $f(4)$의 값이 될 수 있는 수는 6, 7, 8의 3개
따라서 구하는 함수의 개수는
$21 \cdot 3=63$

0121 답 378
조건 (가)에서 $f(1)$, $f(2)$의 값을 정하는 경우의 수는
$f(1)=1$, $f(2)=3$ 또는 $f(1)=2$, $f(2)=2$ 또는
$f(1)=3$, $f(2)=1$의 3개
조건 (나)에서 $f(3) \le f(4) \le f(5) \le f(6)$이므로 $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$, $f(6)$의 값을 정하는 경우의 수는 서로 다른 6개에서 4개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
${}_6\mathrm{H}_4={}_9\mathrm{C}_4=126$
따라서 구하는 함수의 개수는
$3 \cdot 126=378$

유형 04 **$(a+b)^n$의 전개식** 본책 24쪽

이항정리에서 계수를 구할 때는 일반항을 이용한다.
⇨ $(ax+by)^n$의 전개식에서
(1) 일반항 : ${}_n\mathrm{C}_r(ax)^{n-r}(by)^r={}_n\mathrm{C}_r a^{n-r}b^r x^{n-r}y^r$
(2) $x^{n-r}y^r$의 계수 : ${}_n\mathrm{C}_r a^{n-r}b^r$

0122 답 135
$\left(x^2+\frac{a}{x}\right)^6$의 전개식의 일반항은
${}_6\mathrm{C}_r(x^2)^{6-r}\left(\frac{a}{x}\right)^r={}_6\mathrm{C}_r a^r x^{12-3r}$
$x^{12-3r}=x^3$에서 $12-3r=3$ $\therefore r=3$
이때, x^3의 계수가 540이므로
${}_6\mathrm{C}_3 a^3=540$, $a^3=27$ $\therefore a=3$
한편, $x^{12-3r}=x^6$에서 $12-3r=6$ $\therefore r=2$
따라서 x^6의 계수는
${}_6\mathrm{C}_2 \cdot 3^2=135$

0123 답 3
$(1+x)^n$의 전개식의 일반항은 ${}_n\mathrm{C}_r x^r$
$x^r=x^2$에서 $r=2$
이때, x^2의 계수가 55이므로 ${}_n\mathrm{C}_2=55$
$\frac{n(n-1)}{2}=55$, $n(n-1)=110=11 \cdot 10$
$\therefore n=11$
따라서 x^8의 계수는 ${}_{11}\mathrm{C}_8={}_{11}\mathrm{C}_3$이므로 x^3의 계수와 같다.
$\therefore k=3$

0124 답 ④
$(2x-3)^7$의 전개식의 일반항은
${}_7\mathrm{C}_r(2x)^{7-r}(-3)^r={}_7\mathrm{C}_r 2^{7-r}(-3)^r x^{7-r}$
이때, a_3은 x^3의 계수이므로 $7-r=3$에서 $r=4$
$\therefore a_3={}_7\mathrm{C}_4 \cdot 2^3 \cdot (-3)^4=35 \cdot 8 \cdot 81$
또, a_5는 x^5의 계수이므로 $7-r=5$에서 $r=2$
$\therefore a_5={}_7\mathrm{C}_2 \cdot 2^5 \cdot (-3)^2=21 \cdot 32 \cdot 9$
따라서
$\frac{a_3}{a_5}=\frac{35 \cdot 8 \cdot 81}{21 \cdot 32 \cdot 9}=\frac{15}{4}$

0125 답 4
$\left(x^2+\frac{1}{x^n}\right)^{10}$의 전개식의 일반항은
${}_{10}\mathrm{C}_r(x^2)^{10-r}\left(\frac{1}{x^n}\right)^r={}_{10}\mathrm{C}_r x^{20-(n+2)r}$
상수항은 $20-(n+2)r=0$일 때이므로 $(n+2)r=20$
이를 만족시키는 r, n의 순서쌍 (r, n)은
$(1, 18)$, $(2, 8)$, $(4, 3)$, $(5, 2)$ ← r는 $0 \le r \le 10$인 정수, n은 자연수
따라서 구하는 자연수 n의 개수는 4

0126 답 11
$(\sqrt[3]{3x}+\sqrt{2})^{60}$의 전개식의 일반항은
${}_{60}\mathrm{C}_r(\sqrt[3]{3x})^{60-r}(\sqrt{2})^r={}_{60}\mathrm{C}_r 3^{20-\frac{r}{3}}2^{\frac{r}{2}}x^{60-r}$
이때, 항의 계수가 유리수이려면 3과 2의 지수 $20-\frac{r}{3}$, $\frac{r}{2}$가 모두 정수이어야 하므로 r는 0 또는 2와 3의 공배수, 즉 0 또는 6의 배수이어야 한다.
이때, $0 \le r \le 60$이므로 r의 값은
0, 6, 12, $\cdots$, 60의 11개
따라서 계수가 유리수인 항의 개수는 11

0127 답 7
$\left(x+\frac{1}{x}\right)^{2n}$의 전개식의 일반항은
${}_{2n}\mathrm{C}_r x^{2n-r}\left(\frac{1}{x}\right)^r={}_{2n}\mathrm{C}_r x^{2n-2r}={}_{2n}\mathrm{C}_r x^{2(n-r)}$
x^2은 $n-r=1$, 즉 $r=n-1$일 때이므로
$a={}_{2n}\mathrm{C}_{n-1}$
x^4은 $n-r=2$, 즉 $r=n-2$일 때이므로
$b={}_{2n}\mathrm{C}_{n-2}$
x^6은 $n-r=3$, 즉 $r=n-3$일 때이므로
$c={}_{2n}\mathrm{C}_{n-3}$

이때, $a+c=2b$이므로

${}_{2n}C_{n-1}+{}_{2n}C_{n-3}=2\cdot{}_{2n}C_{n-2}$

$$\frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!}+\frac{(2n)!}{(n-3)!(n+3)!}=2\cdot\frac{(2n)!}{(n-2)!(n+2)!}$$

양변에 $\frac{(n-1)!(n+3)!}{(2n)!}$을 곱하면

$(n+3)(n+2)+(n-1)(n-2)=2(n-1)(n+3)$

$2n^2+2n+8=2n^2+4n-6,\ 2n=14$

$\therefore n=7$

유형 05 $(1+x)^n$의 전개식의 활용 본책 24쪽

${}_nC_0+{}_nC_1x+{}_nC_2x^2+\cdots+{}_nC_nx^n=(1+x)^n$에서 x 대신 상수 a를 대입

⇨ ${}_nC_0+{}_nC_1a+{}_nC_2a^2+\cdots+{}_nC_na^n=(1+a)^n$

0128 답 20

${}_nC_0+3\cdot{}_nC_1+3^2\cdot{}_nC_2+\cdots+3^n\cdot{}_nC_n$

$={}_nC_0\cdot1^n+{}_nC_1\cdot1^{n-1}\cdot3+{}_nC_2\cdot1^{n-2}\cdot3^2+\cdots+{}_nC_n\cdot3^n$

$=(1+3)^n=4^n$

주어진 식에서 $4^n=2^{40}=(2^2)^{20}=4^{20}$

$\therefore n=20$

0129 답 ③

${}_{16}C_1\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{15}+{}_{16}C_2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{14}+\cdots+{}_{16}C_{15}\cdot\frac{1}{3}+{}_{16}C_{16}$

$={}_{16}C_1\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{15}\cdot1^1+{}_{16}C_2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{14}\cdot1^2+\cdots+{}_{16}C_{15}\cdot\frac{1}{3}\cdot1^{15}+{}_{16}C_{16}\cdot1^{16}$

$=\left(\frac{1}{3}+1\right)^{16}-{}_{16}C_0\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{16}$

$=\left(\frac{4}{3}\right)^{16}-\left(\frac{1}{3}\right)^{16}$

0130 답 13

0.99^{10}

$=(1-0.01)^{10}$

$={}_{10}C_0+{}_{10}C_1(-0.01)^1+{}_{10}C_2(-0.01)^2+\cdots+{}_{10}C_{10}(-0.01)^{10}$

$=1-0.1+0.0045-0.00012+\cdots+(0.01)^{10}$

$=0.90438\cdots$

따라서 $a=9,\ b=0,\ c=4$이므로 $a+b+c=13$

참고 ${}_{10}C_4(-0.01)^4<0.0001$이므로 소수점 아래 넷째 자리보다 작은 값이다. 따라서 소수점 아래 셋째 자리와는 관계가 없다.

0131 답 ③

$50^{17}=(1+49)^{17}$

$={}_{17}C_0+{}_{17}C_1\cdot49^1+{}_{17}C_2\cdot49^2+\cdots+{}_{17}C_{17}\cdot49^{17}$

$={}_{17}C_0+{}_{17}C_1\cdot7^2+{}_{17}C_2\cdot7^4+\cdots+{}_{17}C_{17}\cdot7^{34}$

$={}_{17}C_0+7({}_{17}C_1\cdot7+{}_{17}C_2\cdot7^3+\cdots+{}_{17}C_{17}\cdot7^{33})$

이때, $7({}_{17}C_1\cdot7+{}_{17}C_2\cdot7^3+\cdots+{}_{17}C_{17}\cdot7^{33})$은 7로 나누어떨어지므로 50^{17}을 7로 나누었을 때의 나머지는 ${}_{17}C_0=1$이다.

따라서 어느 일요일로부터 50^{17}일째 되는 날은 월요일이다.

0132 답 3

TIP $4^{50}=(1+3)^{50}=(5-1)^{50}$임을 이용한다.

$N={}_{50}C_0\cdot3+{}_{50}C_1\cdot3^2+{}_{50}C_2\cdot3^3+\cdots+{}_{50}C_{50}\cdot3^{51}$

$=3({}_{50}C_0+{}_{50}C_1\cdot3+{}_{50}C_2\cdot3^2+\cdots+{}_{50}C_{50}\cdot3^{50})$

$=3(1+3)^{50}=3\cdot4^{50}$

이므로

$N=3(5-1)^{50}$

$=3({}_{50}C_0\cdot5^{50}-{}_{50}C_1\cdot5^{49}+\cdots-{}_{50}C_{49}\cdot5+{}_{50}C_{50})$

$=3\cdot5({}_{50}C_0\cdot5^{49}-{}_{50}C_1\cdot5^{48}+\cdots-{}_{50}C_{49})+3\cdot{}_{50}C_{50}$

$=3\cdot5({}_{50}C_0\cdot5^{49}-{}_{50}C_1\cdot5^{48}+\cdots-{}_{50}C_{49})+3$

이때, $3\cdot5({}_{50}C_0\cdot5^{49}-{}_{50}C_1\cdot5^{48}+\cdots-{}_{50}C_{49})$는 5로 나누어떨어지므로 N을 5로 나누었을 때의 나머지는 3이다.

유형 06 $(a+b)(c+d)^p$의 전개식 본책 25쪽

$(a+b)(c+d)^p$의 전개식

⇨ $a(c+d)^p+b(c+d)^p$으로 바꾸어 생각한다.

0133 답 -15

$(x^3+2x)\left(x-\frac{1}{x}\right)^5=x^3\left(x-\frac{1}{x}\right)^5+2x\left(x-\frac{1}{x}\right)^5$

$\left(x-\frac{1}{x}\right)^5$의 전개식의 일반항은

${}_5C_r\,x^{5-r}\left(-\frac{1}{x}\right)^r={}_5C_r(-1)^rx^{5-2r}$ ······ ㉠

이때, $(x^3+2x)\left(x-\frac{1}{x}\right)^5$의 전개식에서 상수항은 x^3과 ㉠의 $\frac{1}{x^3}$항, $2x$와 ㉠의 $\frac{1}{x}$항이 곱해질 때 나타난다.

(i) $x^{5-2r}=\frac{1}{x^3}$에서 $5-2r=-3$ $\therefore r=4$

따라서 ㉠의 $\frac{1}{x^3}$항은 ${}_5C_4(-1)^4x^{-3}=\frac{5}{x^3}$

(ii) $x^{5-2r}=\frac{1}{x}$에서 $5-2r=-1$ $\therefore r=3$

따라서 ㉠의 $\frac{1}{x}$항은 ${}_5C_3(-1)^3x^{-1}=-\frac{10}{x}$

(i), (ii)에서 상수항은

$x^3\cdot\frac{5}{x^3}+2x\left(-\frac{10}{x}\right)=5-20=-15$

0134 답 ③

$\frac{(1+x)^{11}-x^2-1}{x}$의 전개식에서 x^6의 계수는 $(1+x)^{11}$의 전개식에서 x^7의 계수와 같다.

$(1+x)^{11}$의 전개식의 일반항은 ${}_{11}C_r\,x^r$이고, $x^r=x^7$에서 $r=7$이므로 x^7항의 계수는 ${}_{11}C_7={}_{11}C_4$

따라서 주어진 식의 전개식에서 x^6의 계수는 ${}_{11}C_4$

0135 답 -360

$(x^2-6x+3)\left(x+\frac{2}{x}\right)^6$

$=x^2\left(x+\frac{2}{x}\right)^6-6x\left(x+\frac{2}{x}\right)^6+3\left(x+\frac{2}{x}\right)^6$

2 중복조합과 이항정리

$\left(x+\frac{2}{x}\right)^6$의 전개식의 일반항은

${}_6C_r\,x^{6-r}\left(\frac{2}{x}\right)^r={}_6C_r\,2^r x^{6-2r}$ …… ㉠

이때, $(x^2-6x+3)\left(x+\frac{2}{x}\right)^6$의 전개식에서 x^3항은 x^2과 ㉠의 x항, $-6x$와 ㉠의 x^2항, 3과 ㉠의 x^3항이 곱해질 때 나타난다.

(ⅰ) $x^{6-2r}=x$에서 $6-2r=1$ $\quad\therefore r=\frac{5}{2}$

그런데 r는 $0\le r\le 6$인 정수이므로 ㉠의 x항은 존재하지 않는다.

(ⅱ) $x^{6-2r}=x^2$에서 $6-2r=2$ $\quad\therefore r=2$

따라서 ㉠의 x^2항은 ${}_6C_2\cdot 2^2\cdot x^2=60x^2$

(ⅲ) $x^{6-2r}=x^3$에서 $6-2r=3$ $\quad\therefore r=\frac{3}{2}$

그런데 r는 $0\le r\le 6$인 정수이므로 ㉠의 x^3항은 존재하지 않는다.

(ⅰ)~(ⅲ)에서 x^3항은 $-6x\cdot 60x^2=-360x^3$이므로 x^3의 계수는 -360

0136 답 14

$x^2(x+1)(x-1)^7=(x^3+x^2)(x-1)^7$

$=x^3(x-1)^7+x^2(x-1)^7$

$(x-1)^7$의 전개식의 일반항은

${}_7C_r\,x^{7-r}(-1)^r={}_7C_r(-1)^r x^{7-r}$ …… ㉠

이때, $x^2(x+1)(x-1)^7$의 전개식에서 x^5항은 x^3과 ㉠의 x^2항, x^2과 ㉠의 x^3항이 곱해질 때 나타난다.

(ⅰ) $x^{7-r}=x^2$에서 $7-r=2$ $\quad\therefore r=5$

따라서 ㉠의 x^2항은 ${}_7C_5(-1)^5x^2=-21x^2$

(ⅱ) $x^{7-r}=x^3$에서 $7-r=3$ $\quad\therefore r=4$

따라서 ㉠의 x^3항은 ${}_7C_4(-1)^4x^3=35x^3$

(ⅰ), (ⅱ)에서 x^5항은 $x^3\cdot(-21x^2)+x^2\cdot 35x^3=14x^5$이므로 x^5의 계수는 14

유형 07 $(a+b)^p(c+d)^q$의 전개식 본책 26쪽

두 다항식의 곱의 일반항은 각 다항식의 일반항을 구하여 서로 곱한다.

⇨ $(a+b)^p(c+d)^q$의 전개식의 일반항은 ${}_pC_r\cdot{}_qC_s\,a^{p-r}b^rc^{q-s}d^s$

0137 답 -1

$(1+ax)^3$의 전개식의 일반항은 ${}_3C_r(ax)^r$

$(2+x)^5$의 전개식의 일반항은 ${}_5C_s\,2^{5-s}x^s$

따라서 $(1+ax)^3(2+x)^5$의 전개식의 일반항은

${}_3C_r(ax)^r\cdot{}_5C_s\,2^{5-s}x^s={}_3C_r\cdot{}_5C_s\,a^r2^{5-s}x^{r+s}$

$r+s=1$을 만족시키는 r, s의 순서쌍 $(r,\ s)$는

$(0,\ 1)$, $(1,\ 0)$

이때, x의 계수가 -16이므로

${}_3C_0\cdot{}_5C_1\cdot 2^4+{}_3C_1\cdot{}_5C_0\cdot 2^5a=-16$

$80+96a=-16$, $96a=-96$

$\therefore a=-1$

0138 답 ⑤

$(x+1)^6$의 전개식의 일반항은 ${}_6C_r\,x^{6-r}$

$\left(x+\frac{1}{x}\right)^4$의 전개식의 일반항은 ${}_4C_s\,x^{4-s}\left(\frac{1}{x}\right)^s={}_4C_s\,x^{4-2s}$

따라서 $(x+1)^6\left(x+\frac{1}{x}\right)^4$의 전개식의 일반항은

${}_6C_r\,x^{6-r}\cdot{}_4C_s\,x^{4-2s}={}_6C_r\cdot{}_4C_s\,x^{10-r-2s}$

상수항은 $10-r-2s=0$, 즉 $r+2s=10$일 때이고

$r+2s=10$을 만족시키는 r, s의 순서쌍 $(r,\ s)$는

$(2,\ 4)$, $(4,\ 3)$, $(6,\ 2)$

이므로 상수항은

${}_6C_2\cdot{}_4C_4+{}_6C_4\cdot{}_4C_3+{}_6C_6\cdot{}_4C_2=15\cdot1+15\cdot4+1\cdot6$

$=81$

0139 답 5

$(1+x)^m$의 전개식의 일반항은 ${}_mC_r\,x^r$

$(1+x^2)^n$의 전개식의 일반항은 ${}_nC_s(x^2)^s={}_nC_s\,x^{2s}$

따라서 $(1+x)^m(1+x^2)^n$의 전개식의 일반항은

${}_mC_r\,x^r\cdot{}_nC_s\,x^{2s}={}_mC_r\cdot{}_nC_s\,x^{r+2s}$

$r+2s=2$를 만족시키는 r, s의 순서쌍 $(r,\ s)$는

$(0,\ 1)$, $(2,\ 0)$

이때, x^2의 계수가 11이므로

${}_mC_0\cdot{}_nC_1+{}_mC_2\cdot{}_nC_0=11$

$n+\frac{m(m-1)}{2}=11$, $2n+m(m-1)=22$

m, n이 자연수이므로

$0\le m(m-1)\le 20$ $\quad\therefore 1\le m\le 5$

한편, $r+2s=1$을 만족시키는 r, s의 순서쌍 $(r,\ s)$는 $(1,\ 0)$이므로 x의 계수는 ${}_mC_1\cdot{}_nC_0=m$

따라서 x의 계수의 최댓값은 5

참고 $0\le m(m-1)\le 20$의

$0\le m(m-1)$에서 $m\le 0$ 또는 $m\ge 1$ …… ㉠

$m(m-1)\le 20$에서 $m^2-m-20\le 0$

$(m+4)(m-5)\le 0$ $\quad\therefore -4\le m\le 5$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $1\le m\le 5$ ($\because$ m은 자연수)

유형 08 파스칼의 삼각형 본책 26쪽

(1) ${}_1C_0={}_2C_0={}_3C_0=\cdots={}_nC_0=1$

(2) ${}_1C_1={}_2C_2={}_3C_3=\cdots={}_nC_n=1$

(3) 파스칼의 삼각형에서

${}_nC_r={}_{n-1}C_{r-1}+{}_{n-1}C_r$ (단, $1\le r<n$)

0140 답 ④

${}_2C_0={}_3C_0$이므로

${}_2C_0+{}_3C_1+{}_4C_2+{}_5C_3+\cdots+{}_{15}C_{13}$

$={}_3C_0+{}_3C_1+{}_4C_2+{}_5C_3+\cdots+{}_{15}C_{13}$

$={}_4C_1+{}_4C_2+{}_5C_3+\cdots+{}_{15}C_{13}$

$={}_5C_2+{}_5C_3+\cdots+{}_{15}C_{13}$

$\vdots$

$={}_{15}C_{12}+{}_{15}C_{13}$

$={}_{16}C_{13}={}_{16}C_3$

0141 답 13

${}_{n-1}C_6+{}_{n-1}C_7={}_nC_7$이므로 ${}_nC_6={}_nC_7$

이때, ${}_nC_6={}_nC_{n-6}={}_nC_7$이므로

$n-6=7 \qquad \therefore n=13$

0142 답 ③

주어진 식을 A라 하면 ${}_4C_4={}_5C_5$이므로

$A+{}_5C_4+{}_4C_4$

$={}_4C_4+{}_5C_4+{}_6C_4+\cdots+{}_{18}C_4+{}_{19}C_4$

$={}_5C_5+{}_5C_4+{}_6C_4+\cdots+{}_{18}C_4+{}_{19}C_4$

$={}_6C_5+{}_6C_4+\cdots+{}_{18}C_4+{}_{19}C_4$

$\vdots$

$={}_{19}C_5+{}_{19}C_4$

$={}_{20}C_5$

$\therefore A={}_{20}C_5-{}_5C_4-{}_4C_4$

$\quad ={}_{20}C_5-5-1={}_{20}C_5-6$

0143 답 ④

${}_6C_0={}_6C_6,\ {}_7C_1={}_7C_6,\ {}_8C_2={}_8C_6,\ {}_9C_3={}_9C_6,\ {}_{10}C_4={}_{10}C_6,\ {}_{11}C_5={}_{11}C_6$

이므로

(주어진 식)$=2({}_6C_6+{}_7C_6+{}_8C_6+\cdots+{}_{12}C_6)$

$=2({}_7C_7+{}_7C_6+{}_8C_6+\cdots+{}_{12}C_6)$

$=2({}_8C_7+{}_8C_6+\cdots+{}_{12}C_6)$

$\vdots$

$=2({}_{12}C_7+{}_{12}C_6)$

$=2\cdot{}_{13}C_7={}_{13}C_6+{}_{13}C_7={}_{14}C_7$

다른 풀이

$({}_6C_0+{}_6C_6)+({}_7C_1+{}_7C_6)+({}_8C_2+{}_8C_6)$

$\quad +({}_9C_3+{}_9C_6)+({}_{10}C_4+{}_{10}C_6)+({}_{11}C_5+{}_{11}C_6)+2\cdot{}_{12}C_6$

$=({}_6C_0+{}_7C_1+{}_8C_2+{}_9C_3+{}_{10}C_4+{}_{11}C_5+{}_{12}C_6)$

$\quad +({}_6C_6+{}_7C_6+{}_8C_6+{}_9C_6+{}_{10}C_6+{}_{11}C_6+{}_{12}C_6)$

$=({}_7C_0+{}_7C_1+{}_8C_2+{}_9C_3+{}_{10}C_4+{}_{11}C_5+{}_{12}C_6)$

$\quad +({}_7C_7+{}_7C_6+{}_8C_6+{}_9C_6+{}_{10}C_6+{}_{11}C_6+{}_{12}C_6)$

$=({}_8C_1+{}_8C_2+{}_9C_3+{}_{10}C_4+{}_{11}C_5+{}_{12}C_6)$

$\quad +({}_8C_7+{}_8C_6+{}_9C_6+{}_{10}C_6+{}_{11}C_6+{}_{12}C_6)$

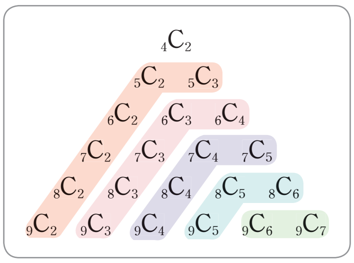
$\vdots$

$=({}_{12}C_5+{}_{12}C_6)+({}_{12}C_7+{}_{12}C_6)$

$={}_{13}C_6+{}_{13}C_7$

$={}_{14}C_7$

0144 답 918



${}_5C_3+{}_5C_2+{}_6C_2+{}_7C_2+{}_8C_2+{}_9C_2$

$={}_6C_3+{}_6C_2+{}_7C_2+{}_8C_2+{}_9C_2$

$\vdots$

$={}_9C_3+{}_9C_2$

$={}_{10}C_3$

같은 방법으로 나머지 부분을 계산하면

${}_6C_4+{}_6C_3+{}_7C_3+{}_8C_3+{}_9C_3={}_{10}C_4$,

${}_7C_5+{}_7C_4+{}_8C_4+{}_9C_4={}_{10}C_5$,

${}_8C_6+{}_8C_5+{}_9C_5={}_{10}C_6$,

${}_9C_6+{}_9C_7={}_{10}C_7$

따라서 구하는 합은

${}_4C_2+{}_{10}C_3+{}_{10}C_4+{}_{10}C_5+{}_{10}C_6+{}_{10}C_7$

$={}_4C_2+2({}_{10}C_3+{}_{10}C_4)+{}_{10}C_5$

$=6+2(120+210)+252$

$=918$

유형 09 파스칼의 삼각형의 활용

본책 27쪽

(i) $(1+x)^n$의 전개식의 일반항은 ${}_nC_r\,x^r$임을 이용하여 구하는 항의 계수를 ${}_nC_r$의 합으로 나타낸다.

(ii) 파스칼의 삼각형의 성질을 이용한다.

0145 답 ③

$(1+x)^n$의 전개식의 일반항은 ${}_nC_r\,x^r$이고,

$(1+x)$의 전개식에서 x항의 계수는 ${}_1C_1$

$(1+x)^2$의 전개식에서 x항의 계수는 ${}_2C_1$

$(1+x)^3$의 전개식에서 x항의 계수는 ${}_3C_1$

$\vdots$

$(1+x)^{20}$의 전개식에서 x항의 계수는 ${}_{20}C_1$

따라서 구하는 x의 계수는

${}_1C_1+{}_2C_1+{}_3C_1+\cdots+{}_{20}C_1$

$={}_2C_2+{}_2C_1+{}_3C_1+\cdots+{}_{20}C_1$

$={}_3C_2+{}_3C_1+\cdots+{}_{20}C_1$

$\vdots$

$={}_{20}C_2+{}_{20}C_1$

$={}_{21}C_2$

다른 풀이 수학Ⅰ 연계

$(1+x)+(1+x)^2+\cdots+(1+x)^{20}$ ······ ㉠

㉠은 첫째항이 $1+x$, 공비가 $1+x$, 항의 개수가 20인 등비수열의 합이므로

$\dfrac{(1+x)\{(1+x)^{20}-1\}}{(1+x)-1}=\dfrac{(1+x)^{21}-(1+x)}{x}$ ······ ㉡

㉠의 전개식에서 x의 계수는 ㉡의 $(1+x)^{21}$의 전개식에서 x^2의 계수와 같다.

$(1+x)^{21}$의 전개식의 일반항은 ${}_{21}C_r\,x^r$이므로

$x^r=x^2$에서 $r=2$

따라서 구하는 계수는 ${}_{21}C_2$

> **Lecture**
> **등비수열의 합**
> 첫째항이 a, 공비가 $r(r\neq1)$, 항의 개수가 n인 등비수열의 합은
> $r>1$일 때, $\dfrac{a(r^n-1)}{r-1}$
> $r<1$일 때, $\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$

0146 답 ⑤

$(1+2x)^n$의 전개식의 일반항은 ${}_nC_r(2x)^r={}_nC_r\,2^r x^r$이고,
$(1+2x)^4$의 전개식에서 x^4항의 계수는 ${}_4C_4\cdot2^4$
$(1+2x)^5$의 전개식에서 x^4항의 계수는 ${}_5C_4\cdot2^4$
$(1+2x)^6$의 전개식에서 x^4항의 계수는 ${}_6C_4\cdot2^4$
⋮
$(1+2x)^{12}$의 전개식에서 x^4항의 계수는 ${}_{12}C_4\cdot2^4$
따라서 구하는 x^4의 계수는
${}_4C_4\cdot2^4+{}_5C_4\cdot2^4+{}_6C_4\cdot2^4+\cdots+{}_{12}C_4\cdot2^4$
$=16({}_4C_4+{}_5C_4+{}_6C_4+\cdots+{}_{12}C_4)$
$=16({}_5C_5+{}_5C_4+{}_6C_4+\cdots+{}_{12}C_4)$
$=16({}_6C_5+{}_6C_4+\cdots+{}_{12}C_4)$
⋮
$=16({}_{12}C_5+{}_{12}C_4)$
$=16\cdot{}_{13}C_5$

참고 $(1+2x)$, $(1+2x)^2$, $(1+2x)^3$의 전개식에서 x^4항은 존재하지 않는다.

다른 풀이 수학 I 연계

$(1+2x)+(1+2x)^2+\cdots+(1+2x)^{12}$ …… ㉠
㉠은 첫째항이 $1+2x$, 공비가 $1+2x$, 항의 개수가 12인 등비수열의 합이므로
$\dfrac{(1+2x)\{(1+2x)^{12}-1\}}{(1+2x)-1}=\dfrac{(1+2x)^{13}-(1+2x)}{2x}$ …… ㉡
㉠의 전개식에서 x^4의 계수는 ㉡의 $\dfrac{(1+2x)^{13}}{2x}$의 전개식에서 x^4의 계수와 같다.
이때, $(1+2x)^{13}$의 전개식의 일반항은 ${}_{13}C_r(2x)^r={}_{13}C_r\,2^r x^r$이므로
$\dfrac{(1+2x)^{13}}{2x}$의 전개식의 일반항은
${}_{13}C_r\,2^r x^r\cdot(2x)^{-1}={}_{13}C_r\,2^{r-1}x^{r-1}$
$x^{r-1}=x^4$에서 $r-1=4$ $\quad\therefore r=5$
따라서 구하는 계수는
${}_{13}C_5\cdot2^4=16\cdot{}_{13}C_5$

0147 답 ④

$(1+x^2)^n$의 전개식의 일반항은
${}_nC_r(x^2)^r={}_nC_r\,x^{2r}$ …… ㉠
$x^2(1+x^2)^n$의 전개식에서 x^6항은 x^2과 ㉠의 x^4항이 곱해질 때 나타나고, 이때 $r=2$이므로 그 계수는 ${}_nC_2$이다. 즉,
$(1+x^2)^2$의 전개식에서 x^4항의 계수는 ${}_2C_2$
$(1+x^2)^3$의 전개식에서 x^4항의 계수는 ${}_3C_2$
$(1+x^2)^4$의 전개식에서 x^4항의 계수는 ${}_4C_2$
⋮
$(1+x^2)^{10}$의 전개식에서 x^4항의 계수는 ${}_{10}C_2$
따라서 구하는 x^6의 계수는
${}_2C_2+{}_3C_2+{}_4C_2+\cdots+{}_{10}C_2$
$={}_3C_3+{}_3C_2+{}_4C_2+\cdots+{}_{10}C_2$
$={}_4C_3+{}_4C_2+\cdots+{}_{10}C_2$
⋮
$={}_{10}C_3+{}_{10}C_2$
$={}_{11}C_3$

참고 $(1+x^2)$의 전개식에서 x^4항은 존재하지 않는다.

다른 풀이 수학 I 연계

$x^2(1+x^2)+x^2(1+x^2)^2+\cdots+x^2(1+x^2)^{10}$ …… ㉠
㉠은 첫째항이 $x^2(1+x^2)$, 공비가 $1+x^2$, 항의 개수가 10인 등비수열의 합이므로
$\dfrac{x^2(1+x^2)\{(1+x^2)^{10}-1\}}{(1+x^2)-1}=(1+x^2)^{11}-(1+x^2)$ …… ㉡
㉠의 전개식에서 x^6의 계수는 ㉡의 $(1+x^2)^{11}$의 전개식에서 x^6의 계수와 같다.
$(1+x^2)^{11}$의 전개식의 일반항은
${}_{11}C_r(x^2)^r={}_{11}C_r\,x^{2r}$
$x^{2r}=x^6$에서 $r=3$
따라서 구하는 계수는 ${}_{11}C_3$

유형 10 이항계수의 성질

본책 27쪽

> (1) ${}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_n=2^n$
> (2) ${}_nC_0-{}_nC_1+{}_nC_2-\cdots+(-1)^n{}_nC_n=0$
> (3) ${}_nC_0+{}_nC_2+{}_nC_4+\cdots={}_nC_1+{}_nC_3+{}_nC_5+\cdots=2^{n-1}$

0148 답 34

${}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+{}_nC_3+\cdots+{}_nC_n=2^n$이므로
${}_nC_1+{}_nC_2+{}_nC_3+\cdots+{}_nC_n=2^n-1$
따라서 주어진 식은
$100<2^n-1<2000$
$\therefore 101<2^n<2001$
이때, $2^7=128$, $2^8=256$, $2^9=512$, $2^{10}=1024$이므로 구하는 자연수 n의 값의 합은
$7+8+9+10=34$

참고 $2^6=64$, $2^{11}=2048$이므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

0149 답 ④

${}_{31}C_r={}_{31}C_{31-r}$이므로
${}_{31}C_0+{}_{31}C_1+{}_{31}C_2+\cdots+{}_{31}C_{15}={}_{31}C_{31}+{}_{31}C_{30}+{}_{31}C_{29}+\cdots+{}_{31}C_{16}$
한편, ${}_{31}C_0+{}_{31}C_1+{}_{31}C_2+\cdots+{}_{31}C_{31}=2^{31}$이므로
${}_{31}C_0+{}_{31}C_1+{}_{31}C_2+\cdots+{}_{31}C_{15}=\dfrac{1}{2}\cdot2^{31}=2^{30}$

0150 답 ②

ㄱ. ${}_{10}C_0-{}_{10}C_1+{}_{10}C_2-\cdots+{}_{10}C_{10}=0$이므로

${}_{10}C_0={}_{10}C_1-{}_{10}C_2+\cdots-{}_{10}C_{10}$

$\therefore {}_{10}C_1-{}_{10}C_2+{}_{10}C_3-\cdots+{}_{10}C_9-{}_{10}C_{10}=1$

ㄴ. ${}_{11}C_0-{}_{11}C_1+{}_{11}C_2-\cdots-{}_{11}C_{11}=0$이므로

${}_{11}C_1+{}_{11}C_3+\cdots+{}_{11}C_9+{}_{11}C_{11}={}_{11}C_0+{}_{11}C_2+{}_{11}C_4+\cdots+{}_{11}C_{10}$

즉, ${}_{11}C_1+{}_{11}C_3+\cdots+{}_{11}C_9+1=1+{}_{11}C_2+{}_{11}C_4+\cdots+{}_{11}C_{10}$

$\therefore {}_{11}C_1+{}_{11}C_3+\cdots+{}_{11}C_9={}_{11}C_2+{}_{11}C_4+\cdots+{}_{11}C_{10}$

ㄷ. ${}_{3n}C_0+{}_{3n}C_1+{}_{3n}C_2+\cdots+{}_{3n}C_{3n}=2^{3n}$

따라서 옳은 것은 ㄴ이다.

0151 답 682

$f(n)={}_{2n}C_1+{}_{2n}C_3+{}_{2n}C_5+\cdots+{}_{2n}C_{2n-1}=2^{2n-1}$이므로

$f(1)+f(2)+\cdots+f(5)=2^1+2^3+2^5+2^7+2^9$

$=2+8+32+128+512$

$=682$

0152 답 ①

원소의 개수가 2인 부분집합의 개수는 ${}_{50}C_2$

원소의 개수가 4인 부분집합의 개수는 ${}_{50}C_4$

⋮

원소의 개수가 50인 부분집합의 개수는 ${}_{50}C_{50}$

이므로 원소의 개수가 짝수인 부분집합의 개수는

${}_{50}C_2+{}_{50}C_4+{}_{50}C_6+\cdots+{}_{50}C_{50}$

이때, ${}_{50}C_0+{}_{50}C_2+{}_{50}C_4+{}_{50}C_6+\cdots+{}_{50}C_{50}=2^{49}$

$\therefore {}_{50}C_2+{}_{50}C_4+{}_{50}C_6+\cdots+{}_{50}C_{50}=2^{49}-1$

0153 답 968

10개의 점 중에서

3개의 점을 이어서 만들 수 있는 삼각형의 개수는 ${}_{10}C_3$

4개의 점을 이어서 만들 수 있는 사각형의 개수는 ${}_{10}C_4$

⋮

10개의 점을 이어서 만들 수 있는 십각형의 개수는 ${}_{10}C_{10}$

이때,

${}_{10}C_0+{}_{10}C_1+{}_{10}C_2+{}_{10}C_3+{}_{10}C_4+\cdots+{}_{10}C_{10}=2^{10}$

이므로

$a_3+a_4+\cdots+a_{10}={}_{10}C_3+{}_{10}C_4+\cdots+{}_{10}C_{10}$

$=({}_{10}C_0+{}_{10}C_1+\cdots+{}_{10}C_{10})-({}_{10}C_0+{}_{10}C_1+{}_{10}C_2)$

$=2^{10}-{}_{10}C_0-{}_{10}C_1-{}_{10}C_2$

$=1024-1-10-45$

$=968$

유형 11 이항계수의 성질 ; $(1+x)^{2n}$ 본책 28쪽

$(1+x)^{2n}=(1+x)^n(1+x)^n$이므로 $(1+x)^{2n}$의 전개식에서 x^n의 계수는

${}_nC_0\cdot{}_nC_n+{}_nC_1\cdot{}_nC_{n-1}+{}_nC_2\cdot{}_nC_{n-2}+\cdots+{}_nC_n\cdot{}_nC_0$

$=({}_nC_0)^2+({}_nC_1)^2+({}_nC_2)^2+\cdots+({}_nC_n)^2$ ($\because {}_nC_r={}_nC_{n-r}$)

0154 답 ⑤

$({}_7C_0)^2+({}_7C_1)^2+({}_7C_2)^2+\cdots+({}_7C_7)^2$

$={}_7C_0\cdot{}_7C_7+{}_7C_1\cdot{}_7C_6+{}_7C_2\cdot{}_7C_5+\cdots+{}_7C_7\cdot{}_7C_0$

이므로 주어진 식은 $(1+x)^7(1+x)^7$, 즉 $(1+x)^{14}$의 전개식에서 x^7의 계수와 같다.

따라서 구하는 값은 ${}_{14}C_7$

0155 답 10

주어진 식의 좌변은 $(1+x)^{10}(1+x)^{10}$, 즉 $(1+x)^{20}$의 전개식에서 x^{10}의 계수와 같으므로 ${}_{20}C_{10}$

즉, ${}_{20}C_{10}={}_{20}C_r$이므로 $r=10$

0156 답 ③

두 다항식의 곱

$(1+x)^m(1+x)^n$

$=({}_mC_0+{}_mC_1\,x+{}_mC_2\,x^2+\cdots+{}_mC_m\,x^m)$

$\times({}_nC_0+{}_nC_1\,x+{}_nC_2\,x^2+\cdots+{}_nC_n\,x^n)$

에서 $\boxed{(가)\ x^r}$의 계수는

${}_mC_0\cdot{}_nC_r+{}_mC_1\cdot{}_nC_{r-1}+{}_mC_2\cdot{}_nC_{r-2}+\cdots+{}_mC_r\cdot{}_nC_0$

이다.

한편, $(1+x)^m(1+x)^n=\boxed{(나)\ (1+x)^{m+n}}$이고,

$\boxed{(나)\ (1+x)^{m+n}}$의 전개식에서 x^r의 계수는 $\boxed{(다)\ {}_{m+n}C_r}$이다.

$\therefore {}_mC_0\cdot{}_nC_r+{}_mC_1\cdot{}_nC_{r-1}+\cdots+{}_mC_r\cdot{}_nC_0=\boxed{(다)\ {}_{m+n}C_r}$

STEP 3 | 심화 Master

0157 답 105

TIP 서로 다른 n개에서 r개를 택하는 중복조합의 수는 ${}_nH_r$이다.

$(a-b)^4(x+2y-3z)^5$의 전개식에서 $(a-b)^4$과 $(x+2y-3z)^5$이 동류항을 갖지 않으므로 서로 다른 항의 개수는 $(a-b)^4$의 서로 다른 항의 개수와 $(x+2y-3z)^5$의 서로 다른 항의 개수의 곱과 같다.

$(a-b)^4$의 전개식에서 서로 다른 항의 개수는 2개의 문자 a, $-b$ 중에서 4개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_2H_4={}_5C_4={}_5C_1=5$

또, $(x+2y-3z)^5$의 전개식에서 서로 다른 항의 개수는 3개의 문자 x, $2y$, $-3z$ 중에서 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3H_5={}_7C_5={}_7C_2=21$

따라서 구하는 서로 다른 항의 개수는

$5\cdot21=105$

0158 답 ①

TIP 한 가지 색의 공을 담는 경우가 결정되면 다른 색의 공을 담는 경우가 1가지로 결정됨을 이해한다.

빨간 공 5개 중 x개를 파란 상자, y개를 노란 상자에 담으면 $x+y=5$ (단, x, y는 음이 아닌 정수)이므로 그 경우의 수는

${}_2H_5={}_6C_5={}_6C_1=6$

이때, 각 상자에는 상자의 색과 다른 색의 공을 담아야 하므로 빨간 공을 담는 경우가 결정되면 다른 색의 공을 담는 경우는 1가지로 결정된다.

따라서 구하는 경우의 수는 6

다른 풀이 파란 상자에 빨간 공을 x개 담으면 각 상자에 담을 수 있는 공의 개수는 다음과 같다.

	빨간 공	파란 공	노란 공	계
빨간 상자		$5-x$	x	5
파란 상자	x		$5-x$	5
노란 상자	$5-x$	x		5
계	5	5	5	

이때, $x=0$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=3$ 또는 $x=4$ 또는 $x=5$이므로 구하는 경우의 수는 6

0159 답 35

TIP 60을 소인수분해하고, 2, 3, 5, 7이 소수임을 이용한다.

2, 3, 5, 7은 소수이고 $60=2^2\cdot3\cdot5$이므로 선택된 8개의 수의 곱이 60의 배수가 되려면 2, 2, 3, 5를 반드시 포함하여야 한다.

즉, 구하는 경우의 수는 네 개의 자연수 2, 3, 5, 7 중에서 중복을 허락하여 4개를 선택하는 경우의 수와 같으므로

${}_4H_4={}_7C_4={}_7C_3=35$

0160 답 68

TIP 전체 경우의 수에서 $x=u$인 경우의 수를 뺀다.

조건 (가)에서 $x+y+z+u=6$을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z, u의 순서쌍 $(x,\ y,\ z,\ u)$의 개수는

${}_4H_6={}_9C_6={}_9C_3=84$

이때, 조건 (나)를 만족시키지 않는 경우는 $x=u$일 때이므로

$x+y+z+u=6$, 즉 $2x+y+z=6$을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z의 순서쌍 $(x,\ y,\ z)$의 개수는

(i) $x=0$일 때, ${}_2H_6={}_7C_6={}_7C_1=7$

(ii) $x=1$일 때, ${}_2H_4={}_5C_4={}_5C_1=5$

(iii) $x=2$일 때, ${}_2H_2={}_3C_2={}_3C_1=3$

(iv) $x=3$일 때, ${}_2H_0={}_1C_0=1$

(i)~(iv)에서 $7+5+3+1=16$

따라서 구하는 경우의 수는

$84-16=68$

0161 답 ⑤

TIP 세 자연수의 합이 짝수이므로 세 수가 모두 짝수이거나 한 개만 짝수이다.

조건 (가)에서 $a+b+c$가 짝수이려면 세 수 a, b, c가 모두 짝수이거나 세 수 a, b, c 중 한 개만 짝수이어야 한다.

조건 (나)에서 a, b, c는 15 이하의 자연수이고, 이 중 짝수는 2, 4, $\cdots$, 14의 7개이다.

(i) a, b, c가 모두 짝수인 경우

구하는 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는 서로 다른 7개 중에서 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_7H_3={}_9C_3=84$

(ii) a, b, c 중 한 개만 짝수인 경우

짝수 7개 중에서 1개를 택하는 경우의 수는 ${}_7C_1=7$

홀수 8개 중에서 2개를 택하는 중복조합의 수는 ${}_8H_2={}_9C_2=36$

택한 세 수를 크기 순으로 나열하는 경우의 수는 1이므로

$7\cdot36\cdot1=252$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$84+252=336$

0162 답 33

TIP $(a+b)^n={}_nC_0\,a^nb^0+{}_nC_1\,a^{n-1}b^1+\cdots+{}_nC_n\,a^0b^n=\sum_{r=0}^{n}{}_nC_r\,a^{n-r}b^r$임을 이용한다.

$$\sum_{k=0}^{5}{}_5C_k\left(\frac{13}{4}\right)^{5-k}\left(\frac{3}{4}\right)^k=\left(\frac{13}{4}+\frac{3}{4}\right)^5=4^5=2^{10}$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{5}{}_5C_k\left(\frac{13}{4}\right)^{5-k}\left(\frac{3}{4}\right)^k=\sum_{k=0}^{5}{}_5C_k\left(\frac{13}{4}\right)^{5-k}\left(\frac{3}{4}\right)^k-{}_5C_0\left(\frac{13}{4}\right)^5\left(\frac{3}{4}\right)^0=2^{10}-\left(\frac{13}{4}\right)^5=\frac{2^{20}-13^5}{2^{10}}$$

따라서 $\dfrac{2^{20}-13^5}{2^{10}}=\dfrac{2^a-b^5}{2^{10}}$이므로

$a=20$, $b=13$ $\quad\therefore a+b=33$

> **Lecture**
>
> **합의 기호 $\sum$와 지수의 확장**
>
> (1) 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$을 합의 기호 $\sum$를 사용하여 $\sum_{k=1}^{n}a_k$로 나타낸다.
>
> ⇨ $\sum_{k=1}^{n}a_k=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$
>
> (2) $a\neq0$일 때 $a^0=1$

0163 답 12

TIP 두 다항식의 전개식에서 x^{n-1}의 계수를 구하여 두 자연수 a, n 사이의 관계식을 찾는다.

$2(x+a)^n$의 전개식의 일반항은

$2\cdot{}_nC_r\,x^{n-r}a^r$

$x^{n-r}=x^{n-1}$에서 $r=1$이므로

x^{n-1}의 계수는 $2\cdot{}_nC_1\cdot a=2na$ $\cdots\cdots$ ㉠

한편, $(x-1)(x+a)^n=x(x+a)^n-(x+a)^n$에서

$(x+a)^n$의 전개식의 일반항은

${}_nC_s\,x^{n-s}a^s$ $\cdots\cdots$ ㉡

이때, $(x-1)(x+a)^n$의 전개식에서 x^{n-1}항은 x와 ㉡의 x^{n-2}항, -1과 ㉡의 x^{n-1}항이 곱해질 때 나타나므로 x^{n-1}의 계수는

$${}_nC_2\cdot a^2-{}_nC_1\cdot a=\frac{n(n-1)}{2}a^2-na \quad \cdots\cdots ㉢$$

㉠, ㉢에서 $2na=\frac{n(n-1)}{2}a^2-na$

$4na=a^2n(n-1)-2na$, $6na=a^2n(n-1)$

$na\{6-a(n-1)\}=0$

$\therefore 6=a(n-1)$ ($\because n\geq 2, a>0$)

이를 만족시키는 순서쌍 (a, n)은 $(6, 2), (3, 3), (2, 4), (1, 7)$이므로 an의 최댓값은 (a, n)이 $(6, 2)$일 때 12이다.

0164 답 80

TIP 일의 자리의 숫자가 1 또는 3 또는 5인 경우로 나누어 생각한다.

네 자리의 자연수를 $a\times 10^3+b\times 10^2+c\times 10+d$ $(a\geq 1)$로 놓으면 조건 (나)에서 $a+b+c+d<8$이고 조건 (가)에서 $d=1$ 또는 $d=3$ 또는 $d=5$이다.

이때, $A=a-1$ $(A\geq 0)$로 놓으면 $a+b+c+d<8$에서

$A+b+c+d<7$

(i) $d=1$인 경우

부등식 $A+b+c<6$을 만족시키는 음이 아닌 정수의 순서쌍 (A, b, c)의 개수는

$A+b+c=5$일 때, ${}_3H_5$

$A+b+c=4$일 때, ${}_3H_4$

⋮

$A+b+c=0$일 때, ${}_3H_0$

에서

${}_3H_5+{}_3H_4+{}_3H_3+{}_3H_2+{}_3H_1+{}_3H_0$

$={}_7C_5+{}_6C_4+{}_5C_3+{}_4C_2+{}_3C_1+{}_2C_0$

$={}_7C_5+{}_6C_4+{}_5C_3+{}_4C_2+{}_3C_1+{}_3C_0$

$={}_7C_5+{}_6C_4+{}_5C_3+{}_4C_2+{}_4C_1$

⋮

$={}_7C_5+{}_7C_4$

$={}_8C_5={}_8C_3=56$

(ii) $d=3$인 경우

부등식 $A+b+c<4$를 만족시키는 음이 아닌 정수의 순서쌍 (A, b, c)의 개수는

$A+b+c=3$일 때, ${}_3H_3$

⋮

$A+b+c=0$일 때, ${}_3H_0$

에서

${}_3H_3+{}_3H_2+{}_3H_1+{}_3H_0$

$={}_5C_3+{}_4C_2+{}_3C_1+{}_2C_0$

$={}_6C_3=20$

(iii) $d=5$인 경우

부등식 $A+b+c<2$를 만족시키는 음이 아닌 정수의 순서쌍 (A, b, c)의 개수는

$A+b+c=1$일 때, ${}_3H_1$

$A+b+c=0$일 때, ${}_3H_0$

에서

${}_3H_1+{}_3H_0={}_3C_1+{}_2C_0={}_4C_1=4$

(i)~(iii)에서 구하는 모든 자연수의 개수는

$56+20+4=80$

0165 답 255

TIP 점선을 택하는 경우의 수로 생각한다.

주어진 숫자 카드를 2장 이상으로 분리하는 경우의 수는 점선 8개 중에서 r $(1\leq r\leq 8)$개를 택하는 모든 경우의 수의 합과 같다.

따라서 구하는 경우의 수는

$${}_8C_1+{}_8C_2+{}_8C_3+\cdots+{}_8C_8=({}_8C_0+{}_8C_1+\cdots+{}_8C_8)-{}_8C_0$$
$$=2^8-1=255$$

0166 답 64

TIP 연필은 모두 똑같으므로 B에게 주는 지우개의 개수가 정해지면 연필을 주는 경우의 수는 1이다.

B에게 주는 지우개의 개수를 r $(r=0, 1, 2, \cdots, 6)$라 하면 B에게 주는 연필의 개수는 $(6-r)$

서로 다른 지우개 6개 중에서 r개를 택하는 경우의 수는 ${}_6C_r$이고, 똑같은 연필 6개 중에서 $(6-r)$개를 택하는 경우의 수는 1

따라서 구하는 경우의 수는

${}_6C_0+{}_6C_1+{}_6C_2+\cdots+{}_6C_6=2^6=64$

0167 답 20

TIP ${}_nC_r={}_nC_{n-r}$이고, ${}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_n=2^n$임을 이용한다.

조건 (가)에서 집합 A는 1, 2, 3은 원소로 갖고, 4는 원소로 갖지 않는다.

조건 (나)에서 $n(A)\geq 14$이므로 구하는 부분집합 A의 개수는 $\{5, 6, 7, \cdots, 25\}$ 중 원소가 각각 11개, 12개, ⋯, 21개인 부분집합의 개수의 합과 같으므로

${}_{21}C_{11}+{}_{21}C_{12}+{}_{21}C_{13}+\cdots+{}_{21}C_{21}$

이때, ${}_{21}C_r={}_{21}C_{21-r}$이므로

${}_{21}C_{11}+{}_{21}C_{12}+{}_{21}C_{13}+\cdots+{}_{21}C_{21}={}_{21}C_{10}+{}_{21}C_9+{}_{21}C_8+\cdots+{}_{21}C_0$

또, ${}_{21}C_0+{}_{21}C_1+{}_{21}C_2+\cdots+{}_{21}C_{21}=2^{21}$이므로

${}_{21}C_{11}+{}_{21}C_{12}+{}_{21}C_{13}+\cdots+{}_{21}C_{21}=\frac{1}{2}\cdot 2^{21}=2^{20}$

$\therefore k=20$

3 | 확률의 뜻과 활용

본책 32쪽~48쪽

STEP 1 | 기초 Build

0168 답 $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$

0169 답 $\{1,\ 2,\ 3,\ 6\}$

0170 답 (1) $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 9,\ 10,\ 12\}$ (2) $\varnothing$
(3) $\{1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 7,\ 8,\ 10,\ 11\}$ (4) $\{3,\ 6,\ 9,\ 12\}$

$A=\{3,\ 6,\ 9,\ 12\}$, $B=\{1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 10\}$이므로
(1) $A\cup B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 9,\ 10,\ 12\}$
(2) $A\cap B=\varnothing$
(3) $A^C=\{1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 7,\ 8,\ 10,\ 11\}$
(4) $B^C=\{3,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 11,\ 12\}$이므로
$A\cap B^C=\{3,\ 6,\ 9,\ 12\}$

0171 답 (1) $\{1,\ 2,\ 5,\ 10\}$ (2) $\{5,\ 10\}$
(3) $\{3,\ 4,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$ (4) A와 B

$A=\{5,\ 10\}$, $B=\{1,\ 2\}$, $C=\{1,\ 2,\ 5,\ 10\}$이므로
(1) $A\cup B=\{1,\ 2,\ 5,\ 10\}$
(2) $A\cap C=\{5,\ 10\}$
(3) $C^C=\{3,\ 4,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$
(4) $A\cap B=\varnothing$이므로 A와 B는 서로 배반사건이다.

0172 답 $\frac{1}{6}$

서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던질 때, 모든 경우의 수는
$6\cdot6=36$
두 눈의 수가 같을 확률은
$(1,\ 1)$, $(2,\ 2)$, $(3,\ 3)$, $(4,\ 4)$, $(5,\ 5)$, $(6,\ 6)$의 6가지이므로
구하는 확률은 $\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$

0173 답 $\frac{1}{9}$

서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던질 때, 모든 경우의 수는
$6\cdot6=36$
두 눈의 수의 합이 5인 경우는
$(1,\ 4)$, $(2,\ 3)$, $(3,\ 2)$, $(4,\ 1)$의 4가지이므로 구하는 확률은
$\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$

0174 답 $\frac{1}{5}$

5명을 일렬로 세우는 경우의 수는 $5!=120$
A를 가장 앞에 세우는 경우의 수는 $4!=24$
따라서 구하는 확률은 $\frac{24}{120}=\frac{1}{5}$

0175 답 $\frac{2}{5}$

5명을 일렬로 세우는 경우의 수는 $5!=120$
A, B를 한 명으로 생각하여 4명을 일렬로 세우는 경우의 수는 $4!$이고, A, B가 서로 자리를 바꾸는 경우의 수가 $2!$이므로 A, B가 이웃하게 세우는 경우의 수는
$4!\cdot2!=48$
따라서 구하는 확률은 $\frac{48}{120}=\frac{2}{5}$

0176 답 $\frac{1}{12}$

9명 중에서 대표 2명을 뽑는 경우의 수는
${}_9\mathrm{C}_2=36$
중학생 3명 중에서 대표 2명을 뽑는 경우의 수는
${}_3\mathrm{C}_2=3$
따라서 구하는 확률은 $\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$

0177 답 $\frac{2}{9}$

9명 중에서 대표 2명을 뽑는 경우의 수는
${}_9\mathrm{C}_2=36$
고등학생 4명 중에서 대표 1명, 대학생 2명 중에서 대표 1명을 뽑는 경우의 수는
${}_4\mathrm{C}_1\cdot{}_2\mathrm{C}_1=8$
따라서 구하는 확률은 $\frac{8}{36}=\frac{2}{9}$

0178 답 $\frac{1}{4}$

임의로 택한 한 환자가 남성일 확률은
$\frac{2500}{10000}=\frac{1}{4}$

0179 답 $\frac{3}{5}$

주어진 수 중에서 4의 약수는 1, 2, 4이므로
$\frac{(\text{4의 약수가 적힌 영역의 넓이})}{(\text{전체 과녁의 넓이})}=\frac{3}{5}$

0180 답 1

눈의 수가 6 이하의 자연수인 사건은 반드시 일어나므로 구하는 확률은 1이다.

0181 답 0

눈의 수가 10인 사건은 절대로 일어날 수 없으므로 구하는 확률은 0이다.

0182 답 $\frac{1}{2}$

6 이하의 수는 $1,\ 2,\ \cdots,\ 6$의 6개이므로
$\mathrm{P}(A)=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$

0183 답 1

카드에 적힌 수가 6 이하이거나 7 이상인 사건은 반드시 일어나므로
$P(A\cup B)=1$

0184 답 0

$A\cap B=\varnothing$이므로 $P(A\cap B)=0$

0185 답 $\frac{5}{12}$

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$
$=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{6}=\frac{5}{12}$

0186 답 0.2

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$에서
$0.6=0.5+0.3-P(A\cap B)$
$\therefore P(A\cap B)=0.2$

0187 답 $\frac{1}{4}$

두 사건 A와 B는 서로 배반사건이므로
$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$에서
$\frac{1}{2}=\frac{1}{4}+P(B)$ $\quad\therefore P(B)=\frac{1}{4}$

0188 답 $\frac{23}{50}$

카드에 적힌 수가 3의 배수인 사건을 A, 5의 배수인 사건을 B라 하면
$P(A)=\frac{16}{50}$, $P(B)=\frac{10}{50}$, $P(\overbrace{A\cap B}^{\text{15의 배수인 사건}})=\frac{3}{50}$
$\therefore P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$
$=\frac{16}{50}+\frac{10}{50}-\frac{3}{50}=\frac{23}{50}$

0189 답 $\frac{6}{25}$

카드에 적힌 수가 7의 배수인 사건을 A, 9의 배수인 사건을 B라 하면
$P(A)=\frac{7}{50}$, $P(B)=\frac{5}{50}$
두 사건 A와 B는 서로 배반사건이므로
$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$
$=\frac{7}{50}+\frac{5}{50}=\frac{6}{25}$

0190 답 $\frac{7}{9}$

9명 중에서 뽑은 대표 한 명이 1학년인 사건을 A, 3학년인 사건을 B라 하면
$P(A)=\frac{3}{9}$, $P(B)=\frac{4}{9}$
두 사건 A와 B는 서로 배반사건이므로
$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$
$=\frac{3}{9}+\frac{4}{9}=\frac{7}{9}$

0191 답 $\frac{2}{3}$

$P(A)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$이므로
$P(A^C)=1-P(A)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

0192 답 $\frac{23}{30}$

4의 배수가 아닌 사건을 A라 하면 A^C는 4의 배수인 사건이므로
$P(A^C)=\frac{7}{30}$
$\therefore P(A)=1-P(A^C)=1-\frac{7}{30}=\frac{23}{30}$

0193 답 (1) $\frac{1}{4}$ (2) $\frac{3}{4}$

서로 다른 2개의 동전을 동시에 던질 때, 모든 경우의 수는
$2\cdot2=4$
모두 앞면이 나오는 사건을 A라 하면 A^C는 적어도 한 개는 뒷면이 나오는 사건이다.
(1) 모두 앞면이 나오는 경우의 수는 1이므로 구하는 확률은
$P(A)=\frac{1}{4}$
(2) 적어도 한 개는 뒷면이 나올 확률은 $P(A^C)$이므로
$P(A^C)=1-P(A)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

0194 답 $\frac{4}{5}$

6개의 구슬 중에서 2개를 동시에 꺼내는 경우의 수는
${}_6C_2=15$
적어도 한 개는 파란 구슬인 사건을 A라 하면 A^C는 모두 흰 구슬인 사건이므로
$P(A^C)=\frac{{}_3C_2}{15}=\frac{1}{5}$
$\therefore P(A)=1-P(A^C)=1-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$

STEP 2 | 유형 Drill

유형 01 시행과 사건 본책 36쪽

표본공간 S의 두 사건 A, B에 대하여
(1) A 또는 B가 일어나는 사건 ⇨ $A\cup B$
(2) A와 B가 동시에 일어나는 사건 ⇨ $A\cap B$
(3) 배반사건 : 동시에 일어나지 않는 두 사건 A, B ⇨ $A\cap B=\varnothing$
(4) 여사건 : 사건 A가 일어나지 않는 사건 ⇨ A^C

0195 답 ㄴ

$A=\{2,\ 4,\ \cdots,\ 20\}$, $B=\{5,\ 10,\ 15,\ 20\}$, $C=\{1,\ 3,\ \cdots,\ 19\}$이므로
$A\cap B=\{10,\ 20\}$, $A\cap C=\varnothing$, $B\cap C=\{5,\ 15\}$
따라서 두 사건 A와 C는 서로 배반사건이다.

3 확률의 뜻과 활용

0196 답 ⑤

표본공간을 S라 하면 $S=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$,
$A=\{2,\ 3,\ 5\}$, $B=\{1,\ 2,\ 3,\ 6\}$, $A^C=\{1,\ 4,\ 6\}$, $B^C=\{4,\ 5\}$
이므로
⑤ $A\cap B^C=\{5\}$

0197 답 ③

사건 A와 배반인 사건은 사건 A^C의 부분집합이고, 사건 B와 배반인 사건은 사건 B^C의 부분집합이므로 사건 A, B와 모두 배반인 사건은 $A^C\cap B^C$의 부분집합이다. 이때,
$A^C=\{3,\ 5,\ 7,\ 9\}$, $B^C=\{2,\ 7,\ 9\}$이므로
$A^C\cap B^C=\{7,\ 9\}$
따라서 구하는 사건의 개수는 $2^2=4$

> **Lecture**
> **부분집합의 개수**
> 원소의 개수가 n인 집합의 부분집합의 개수는 ⇨ 2^n

유형 02 수학적 확률 본책 36쪽

사건 A가 일어날 확률 $\mathrm{P}(A)$는
⇨ $\mathrm{P}(A)=\dfrac{n(A)}{n(S)}=\dfrac{(\text{사건 } A\text{가 일어나는 경우의 수})}{(\text{일어날 수 있는 모든 경우의 수})}$

0198 답 $\dfrac{11}{18}$

두 개의 주사위를 동시에 던질 때, 모든 경우의 수는
$6\cdot6=36$
(i) 두 눈의 수가 같은 경우
$(1,\ 1)$, $(2,\ 2)$, $(3,\ 3)$, $(4,\ 4)$, $(5,\ 5)$, $(6,\ 6)$의 6가지
(ii) 두 눈의 수가 다른 경우
$(1,\ 2)$, $(1,\ 3)$, $(1,\ 4)$, $(1,\ 5)$, $(1,\ 6)$, $(2,\ 4)$, $(2,\ 6)$, $(3,\ 6)$, $(2,\ 1)$, $(3,\ 1)$, $(4,\ 1)$, $(5,\ 1)$, $(6,\ 1)$, $(4,\ 2)$, $(6,\ 2)$, $(6,\ 3)$의 16가지
(i), (ii)에서 한 주사위의 눈의 수가 다른 주사위의 눈의 수의 배수가 되는 경우의 수는
$6+16=22$
따라서 구하는 확률은 $\dfrac{22}{36}=\dfrac{11}{18}$

0199 답 $\dfrac{2}{5}$

A에서 D로 가는 경우는 A → B → D 또는 A → C → D이므로 그 경우의 수는
$2\cdot3+2\cdot2=10$
이때, C를 거쳐서 가는 경우의 수는 $2\cdot2=4$
따라서 구하는 확률은 $\dfrac{4}{10}=\dfrac{2}{5}$

0200 답 $\dfrac{2}{15}$

6장의 카드에서 2장을 뽑는 경우의 수는 ${}_6\mathrm{C}_2=15$
(i) 1이 적힌 카드 두 장을 뽑는 경우의 수는 1
(ii) 3이 적힌 카드 두 장을 뽑는 경우의 수는 1
(i), (ii)에서 두 카드에 적힌 숫자가 같을 경우의 수는
$1+1=2$
따라서 구하는 확률은 $\dfrac{2}{15}$

0201 답 $\dfrac{10}{31}$

집합 A의 공집합이 아닌 부분집합의 개수는 $2^5-1=31$
(i) 가장 큰 원소가 5, 가장 작은 원소가 1인 경우
1과 5를 반드시 원소로 가지고, 2, 3, 4를 원소로 가질 수 있으므로 부분집합의 개수는 $2^3=8$
(ii) 가장 큰 원소가 4, 가장 작은 원소가 2인 경우
2와 4를 반드시 원소로 가지고, 3을 원소로 가질 수 있으므로 부분집합의 개수는 $2^1=2$
(i), (ii)에서 부분집합의 개수는 $8+2=10$
따라서 구하는 확률은 $\dfrac{10}{31}$

0202 답 ③

한 개의 주사위를 두 번 던질 때, 모든 경우의 수는
$6\cdot6=36$
이때,
$f(1)=-2<0$, $f(2)=-2<0$, $f(3)=0$,
$f(4)=4>0$, $f(5)=10>0$, $f(6)=18>0$
이므로 $f(a)f(b)<0$을 만족시키는 순서쌍 $(a,\ b)$는
$(1,\ 4)$, $(1,\ 5)$, $(1,\ 6)$, $(2,\ 4)$, $(2,\ 5)$, $(2,\ 6)$,
$(4,\ 1)$, $(5,\ 1)$, $(6,\ 1)$, $(4,\ 2)$, $(5,\ 2)$, $(6,\ 2)$의 12가지
따라서 구하는 확률은 $\dfrac{12}{36}=\dfrac{1}{3}$

유형 03 순열을 이용하는 확률 본책 37쪽

(1) 서로 다른 n개를 순서를 생각하여 일렬로 나열하는 방법의 수는
⇨ ${}_n\mathrm{P}_n=n!=n(n-1)(n-2)\cdot\cdots\cdot2\cdot1$
(2) 서로 다른 n개 중에서 r개를 뽑아 일렬로 나열하는 방법의 수는
⇨ ${}_n\mathrm{P}_r=n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$
$=\dfrac{n!}{(n-r)!}$ (단, $0<r\le n$)

0203 답 ③

5명을 일렬로 세우는 경우의 수는 $5!=120$
여학생 3명을 한 명으로 생각하여 3명을 일렬로 세우는 경우의 수는 $3!$이고, 여학생 3명의 자리를 바꾸는 경우의 수는 $3!$이므로 여학생끼리 이웃하는 경우의 수는
$3!\cdot3!=36$
따라서 구하는 확률은 $\dfrac{36}{120}=\dfrac{3}{10}$

0204 답 ④

7개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는
$\dfrac{7!}{3!2!2!}=210$
4개의 문자 b, b, c, c를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $\dfrac{4!}{2!2!}$이고,

b, b, c, c의 사이사이 및 양 끝의 5개의 자리에 a, a, a를 나열하는 경우의 수는 ${}_5C_3$이므로 문자 a끼리 이웃하지 않는 경우의 수는

$\frac{4!}{2!2!}\cdot{}_5C_3=60$

따라서 구하는 확률은 $\frac{60}{210}=\frac{2}{7}$

0205 답 $\frac{1}{10}$

6마리를 일렬로 세우는 경우의 수는 $6!=720$

(i) (강아지, 고양이, 강아지, 고양이, 강아지, 고양이)의 순서로 세우는 경우의 수는 $3!\cdot3!=36$

(ii) (고양이, 강아지, 고양이, 강아지, 고양이, 강아지)의 순서로 세우는 경우의 수는 $3!\cdot3!=36$

(i), (ii)에서 강아지와 고양이를 번갈아 세우는 경우의 수는

$36+36=72$

따라서 구하는 확률은 $\frac{72}{720}=\frac{1}{10}$

0206 답 $\frac{1}{5}$

5개를 일렬로 놓는 경우의 수는 $5!=120$

서로 다른 초콜릿 4개를 일렬로 놓고, 사탕을 중앙에 놓는 경우의 수는

$4!\cdot1=24$

따라서 구하는 확률은 $\frac{24}{120}=\frac{1}{5}$

0207 답 ③

3장의 카드를 뽑아 만들 수 있는 세 자리 자연수의 개수는

$8\cdot{}_8P_2=448$

이때, 홀수는 일의 자리의 수가 1, 3, 5, 7이어야 하므로 홀수의 개수는 $7\cdot7\cdot4=196$

따라서 구하는 확률은 $\frac{196}{448}=\frac{7}{16}$

0208 답 $\frac{1}{5}$

6명을 일렬로 세우는 경우의 수는 $6!=720$

(i) C와 D 사이에 세 명의 학생이 서는 경우

C와 D 사이에 세 명의 학생을 세우는 경우의 수는 ${}_4P_3$

C□□□D를 한 명으로 생각하여 2명을 일렬로 세우는 경우의 수는 $2!$

C와 D의 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!$

$\therefore {}_4P_3\cdot2!\cdot2!=96$

(ii) C와 D 사이에 네 명의 학생이 서는 경우

C와 D 사이에 네 명의 학생을 세우는 경우의 수는 ${}_4P_4$

C와 D의 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!$

$\therefore {}_4P_4\cdot2!=48$

(i), (ii)에서 C와 D 사이에 세 명 이상의 학생이 서는 경우의 수는

$96+48=144$

따라서 구하는 확률은 $\frac{144}{720}=\frac{1}{5}$

유형 04 원순열을 이용하는 확률 본책 38쪽

서로 다른 n개를 원형으로 배열하는 원순열의 수는

⇨ $\frac{n!}{n}=(n-1)!$

0209 답 ④

6명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는 $(6-1)!=5!=120$

부부 2명을 한 명으로 생각하여 3명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는 $(3-1)!$이고, 부부끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는 각각 $2!$이므로 부부끼리 이웃하여 앉는 경우의 수는

$(3-1)!\cdot2!\cdot2!\cdot2!=16$

따라서 구하는 확률은 $\frac{16}{120}=\frac{2}{15}$

0210 답 ②

7명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는 $(7-1)!=6!=720$

남자 4명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는 $(4-1)!$이고, 남자 사이사이의 4개의 자리에 여자 3명이 앉는 경우의 수는 ${}_4P_3$이므로 여자끼리 이웃하지 않게 앉는 경우의 수는

$(4-1)!\cdot{}_4P_3=144$

따라서 구하는 확률은 $\frac{144}{720}=\frac{1}{5}$

0211 답 $\frac{1}{5}$

6개의 숫자를 각 정삼각형에 하나씩 써넣는 경우의 수는

$(6-1)!=5!=120$

숫자 1을 써넣은 맞은편에 숫자 3을 써넣고 나머지 4개의 숫자를 4개의 정삼각형에 써넣는 경우의 수는

${}_4P_4=24$

따라서 구하는 확률은 $\frac{24}{120}=\frac{1}{5}$

유형 05 중복순열을 이용하는 확률 본책 38쪽

서로 다른 n개에서 r개를 택하는 중복순열의 수는

⇨ ${}_n\Pi_r=n^r$

0212 답 $\frac{1}{4}$

만들 수 있는 세 자리 자연수의 개수는 ${}_4\Pi_3=4^3=64$

이때, 백의 자리 숫자가 3인 세 자리 자연수의 개수는

${}_4\Pi_2=4^2=16$

따라서 구하는 확률은 $\frac{16}{64}=\frac{1}{4}$

0213 답 ②

집합 A에서 집합 A로의 함수 f의 개수는 ${}_5\Pi_5=5^5$

이때, $f(1)=f(2)=5$를 만족시키는 함수 f의 개수는

${}_5\Pi_3=5^3$

따라서 구하는 확률은 $\frac{5^3}{5^5}=\frac{1}{25}$

3 확률의 뜻과 활용

0214 답 $\frac{5}{9}$

펜션을 택하는 경우의 수는 ${}_6\Pi_3=6^3=216$

서로 다른 펜션을 택하는 경우의 수는 ${}_6P_3=120$

따라서 구하는 확률은 $\frac{120}{216}=\frac{5}{9}$

0215 답 $\frac{14}{27}$

메뉴를 주문하는 경우의 수는 ${}_3\Pi_4=3^4=81$

3개의 메뉴 중에서 2개의 메뉴를 선택하여 네 명의 학생이 주문하면 되므로 2개의 메뉴만 주문하는 경우의 수는

$\underbrace{{}_3C_2}_{\text{2개의 메뉴를 선택하는 경우의 수}}\cdot(\overbrace{{}_2\Pi_4-2}^{\text{선택한 2개의 메뉴를 네 명의 학생이 주문하는 경우의 수}})=42$

따라서 구하는 확률은 $\frac{42}{81}=\frac{14}{27}$

유형 06 같은 것이 있는 순열을 이용하는 확률 본책 39쪽

n개 중에서 같은 것이 각각 p개, q개, $\cdots$, r개씩 있을 때, n개를 일렬로 나열하는 순열의 수는

⇨ $\frac{n!}{p!q!\cdots r!}$ (단, $p+q+\cdots+r=n$)

0216 답 $\frac{3}{10}$

5개의 숫자 1, 1, 2, 2, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{5!}{2!2!}=30$

(i) 23□□□ 꼴인 정수의 개수는 $\frac{3!}{2!}=3$

(ii) 3□□□□ 꼴인 정수의 개수는 $\frac{4!}{2!2!}=6$

(i), (ii)에서 23000보다 큰 정수의 개수는

$3+6=9$

따라서 구하는 확률은 $\frac{9}{30}=\frac{3}{10}$

0217 답 ④

6개의 문자 a, b, b, c, c, c를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{6!}{2!3!}=60$

문자 a, b, c, c, c를 일렬로 나열하고, 가장 왼쪽에 b를 나열하는 경우의 수는

$\frac{5!}{3!}=20$

따라서 구하는 확률은 $\frac{20}{60}=\frac{1}{3}$

0218 답 $\frac{1}{2}$

5개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $5!=120$

a가 b보다 앞에 오는 경우의 수는 a, b를 모두 x로 생각하여 5개의 문자 t, x, x, l, e를 나열하는 경우의 수와 같으므로

$\frac{5!}{2!}=60$

따라서 구하는 확률은 $\frac{60}{120}=\frac{1}{2}$

0219 답 $\frac{5}{128}$

집합 X에서 집합 X로의 함수 f의 개수는 ${}_4\Pi_4=4^4=256$

$f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=6$을 만족시키는 함수 f의 개수는 1, 1, 1, 3 또는 1, 1, 2, 2를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$\underbrace{\frac{4!}{3!}}_{\text{1, 1, 1, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수}}+\overbrace{\frac{4!}{2!2!}}^{\text{1, 1, 2, 2를 일렬로 나열하는 경우의 수}}=10$

따라서 구하는 확률은 $\frac{10}{256}=\frac{5}{128}$

0220 답 $\frac{4}{7}$

A에서 출발하여 B까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$\frac{7!}{4!3!}=35$

A에서 출발하여 C를 거쳐 B까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$\frac{5!}{3!2!}\cdot2=20$

따라서 구하는 확률은 $\frac{20}{35}=\frac{4}{7}$

유형 07 조합을 이용하는 확률 본책 39쪽

서로 다른 n개에서 r개를 택하는 조합의 수는

⇨ ${}_nC_r=\frac{{}_nP_r}{r!}=\frac{n!}{r!(n-r)!}$ (단, $0\le r\le n$)

0221 답 $\frac{10}{21}$

9개의 구슬 중에서 4개의 구슬을 꺼내는 경우의 수는

${}_9C_4=126$

흰 구슬 6개 중에서 3개, 검은 구슬 3개 중에서 1개를 꺼내는 경우의 수는

${}_6C_3\cdot{}_3C_1=60$

따라서 구하는 확률은 $\frac{60}{126}=\frac{10}{21}$

0222 답 6

10명의 학생 중에서 2명을 뽑는 경우의 수는

${}_{10}C_2=45$

남학생의 수를 n이라 하면 n명의 남학생 중에서 2명을 뽑는 경우의 수는

${}_nC_2=\frac{n(n-1)}{2}$

즉, $\frac{{}_nC_2}{{}_{10}C_2}=\frac{1}{3}$이므로 $\frac{n(n-1)}{90}=\frac{1}{3}$

$n(n-1)=30=6\cdot5$ $\therefore n=6$

따라서 남학생의 수는 6이다.

0223 답 $\frac{5}{14}$

9개의 공 중에서 6개를 꺼내는 경우의 수는

${}_9C_6=84$

두 번째로 작은 수가 3인 경우의 수는 1, 2가 적힌 공 중에서 1개를 꺼내고 4, 5, ⋯, 9가 적힌 공 중에서 4개를 꺼내는 경우의 수와 같으므로

${}_{2}C_{1} \cdot {}_{6}C_{4}=30$

따라서 구하는 확률은 $\frac{30}{84}=\frac{5}{14}$

0224 답 8

n장의 카드 중에서 2장을 뽑는 경우의 수는

${}_{n}C_{2}=\frac{n(n-1)}{2}$

1이 적힌 카드는 뽑고 5가 적힌 카드는 뽑지 않는 경우의 수는 1과 5가 적힌 카드를 제외한 나머지 $(n-2)$장의 카드 중에서 1장을 뽑고 1이 적힌 카드를 포함시키는 경우의 수와 같으므로

${}_{n-2}C_{1}=n-2$

즉, $\frac{{}_{n-2}C_{1}}{{}_{n}C_{2}}=\frac{3}{14}$에서

$\frac{2(n-2)}{n(n-1)}=\frac{3}{14}$, $3n^2-31n+56=0$

$(n-8)(3n-7)=0 \qquad \therefore n=8$

0225 답 ⑤

9개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는

${}_{9}C_{3}=84$

한 직선 위에 있는 세 점으로는 삼각형을 만들 수 없으므로 반원의 지름 위의 점 4개 중에서 3개를 택한 경우에는 삼각형이 만들어지지 않는다. 즉, 삼각형이 만들어지는 경우의 수는

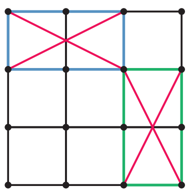
${}_{9}C_{3}-{}_{4}C_{3}=80$

따라서 구하는 확률은 $\frac{80}{84}=\frac{20}{21}$

0226 답 $\frac{1}{5}$

16개의 꼭짓점 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

${}_{16}C_{2}=120$



(i) 가로의 길이가 2, 세로의 길이가 1인 직사각형의 대각선의 개수는 12

(ii) 가로의 길이가 1, 세로의 길이가 2인 직사각형의 대각선의 개수는 12

(i), (ii)에서 선분의 길이가 $\sqrt{5}$인 경우의 수는 $12+12=24$

따라서 구하는 확률은 $\frac{24}{120}=\frac{1}{5}$

유형 08 중복조합을 이용하는 확률 (본책 40쪽)

서로 다른 n개에서 r개를 택하는 중복조합의 수는

⇨ ${}_{n}H_{r}={}_{n+r-1}C_{r}$

0227 답 $\frac{3}{35}$

방정식 $x+y+z=13$의 음이 아닌 정수해의 개수는

${}_{3}H_{13}={}_{15}C_{13}=105$

$x=5$를 만족시키는 정수해의 개수는 방정식 $y+z=8$의 음이 아닌 정수해의 개수와 같으므로

${}_{2}H_{8}={}_{9}C_{8}=9$

따라서 구하는 확률은 $\frac{9}{105}=\frac{3}{35}$

0228 답 185

연필 10자루를 네 명의 학생에게 나누어 주는 경우의 수는 서로 다른 4개에서 10개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_{4}H_{10}={}_{13}C_{10}=286$

모든 학생이 적어도 한 자루의 연필을 받는 경우의 수는 먼저 네 명의 학생에게 연필을 한 자루씩 나누어 주고 남은 연필 6자루를 네 명의 학생에게 나누어 주는 경우의 수와 같으므로

${}_{4}H_{6}={}_{9}C_{6}=84$

따라서 구하는 확률은 $\frac{84}{286}=\frac{42}{143}$이므로

$p=143$, $q=42 \qquad \therefore p+q=185$

0229 답 ③

TIP $f(1) \le f(3) \le f(5)$를 만족시키는 경우의 수는 중복조합의 수를 이용하여 구할 수 있다.

집합 A에서 집합 B로의 함수 f의 개수는 ${}_{4}\Pi_{5}=4^5=1024$

$f(1) \le f(3) \le f(5)$일 때 $f(1)$, $f(3)$, $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는 6, 7, 8, 9의 4개에서 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_{4}H_{3}={}_{6}C_{3}=20$

또, $f(2)$, $f(4)$의 값을 정하는 경우의 수는 6, 7, 8, 9의 4개에서 2개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_{4}\Pi_{2}=4^2=16$

따라서 $f(1) \le f(3) \le f(5)$인 함수 f의 개수는

$20 \cdot 16=320$

이므로 구하는 확률은 $\frac{320}{1024}=\frac{5}{16}$

유형 09 통계적 확률 (본책 41쪽)

(1) 사건 A가 n번 중에서 r번의 꼴로 일어날 때, 사건 A가 일어날 통계적 확률은 ⇨ $\frac{r}{n}$

(2) 시행 횟수가 충분히 클 때, 통계적 확률은 수학적 확률에 가까워진다.

0230 답 ⑤

A가 적힌 공이 나올 확률은 $\frac{400}{5000}=\frac{2}{25}$

따라서 $\frac{2}{25}=\frac{20}{20+n}$이므로 $20+n=250$

$\therefore n=230$

0231 답 $\frac{3}{8}$

총 학생 수는 200명이고, 일주일 동안의 독서 시간이 6시간 이상인 학생 수는 $47+28=75$이므로 구하는 확률은

$\frac{75}{200}=\frac{3}{8}$

0232 답 7

3개의 공을 꺼냈을 때 모두 흰 공일 확률은 $\frac{7}{24}$

따라서 흰 공의 개수를 n이라 하면 $\frac{{}_n\mathrm{C}_3}{{}_{10}\mathrm{C}_3}=\frac{7}{24}$이므로

$n(n-1)(n-2)=210=7\cdot6\cdot5 \qquad \therefore n=7$

따라서 주머니에 들어 있는 흰 공의 개수는 7이다.

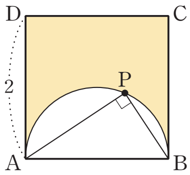
유형 10 기하적 확률 본책 41쪽

길이, 넓이, 부피 등 연속적으로 변하여 그 개수를 구할 수 없을 때, 길이, 넓이, 부피 등의 비율로 확률을 구한다.

⇨ $\mathrm{P}(A)=\frac{(\text{사건 } A\text{가 일어나는 영역의 크기})}{(\text{일어날 수 있는 모든 영역의 크기})}$

0233 답 $1-\frac{\pi}{8}$

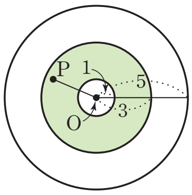
점 P가 $\overline{\mathrm{AB}}$를 지름으로 하는 반원 위에 있을 때, △ABP는 직각삼각형이 된다. 따라서 오른쪽 그림에서 색칠한 부분에 점 P를 잡으면 △ABP는 예각삼각형이 되므로 구하는 확률은



$$\frac{(\text{색칠한 부분의 넓이})}{(\square\mathrm{ABCD}\text{의 넓이})}=\frac{2^2-\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot1}{2^2}=1-\frac{\pi}{8}$$

0234 답 $\frac{8}{25}$

오른쪽 그림에서 색칠한 부분에 점 P를 잡으면 $1\le\overline{\mathrm{OP}}\le3$이므로 구하는 확률은



$$\frac{(\text{색칠한 부분의 넓이})}{(\text{원 O의 넓이})}=\frac{\pi\cdot3^2-\pi\cdot1}{\pi\cdot5^2}=\frac{8}{25}$$

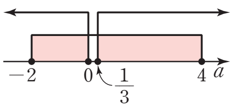
0235 답 $\frac{17}{18}$

이차방정식 $x^2-6ax+3a=0$의 판별식을 D라 할 때, 이 이차방정식이 실근을 가지려면

$\frac{D}{4}=(-3a)^2-3a\ge0,\ 3a(3a-1)\ge0$

$\therefore a\le0$ 또는 $a\ge\frac{1}{3}$

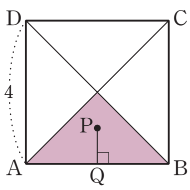
따라서 구하는 확률은



$$\frac{\{0-(-2)\}+\left(4-\frac{1}{3}\right)}{4-(-2)}=\frac{17}{18}$$

0236 답 ③

오른쪽 그림에서 색칠한 부분에 점 P를 잡으면 점 P에서 가장 가까운 변에 내린 수선의 발 Q가 $\overline{\mathrm{AB}}$ 위에 있으므로 구하는 확률은



$$\frac{(\text{색칠한 부분의 넓이})}{(\square\mathrm{ABCD}\text{의 넓이})}=\frac{\frac{1}{2}\cdot4\cdot2}{4^2}=\frac{1}{4}$$

유형 11 확률의 기본 성질 본책 42쪽

(1) 임의의 사건 A에 대하여 $0\le\mathrm{P}(A)\le1$

(2) $\mathrm{P}(S)=1,\ \mathrm{P}(\varnothing)=0$

0237 답 ㄱ, ㄴ

ㄴ. $\varnothing\subset A\subset S$이므로 $\mathrm{P}(\varnothing)\le\mathrm{P}(A)\le\mathrm{P}(S)$

$\therefore 0\le\mathrm{P}(A)\le1$

ㄷ. [반례] $S=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$, $A=\{1,\ 2\}$, $B=\{2\}$이면

$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2},\ \mathrm{P}(B)=\frac{1}{4}$이므로

$\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=\frac{3}{4}<1$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

0238 답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

ㄱ. $\mathrm{P}(\varnothing)=0,\ \mathrm{P}(S)=1$이므로 $1-\mathrm{P}(\varnothing)=\mathrm{P}(S)$

ㄴ. $0\le\mathrm{P}(A)\le1,\ 0\le\mathrm{P}(B)\le1$이므로

$0\le\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)\le2$

이때, A와 B는 서로 다른 사건이므로 $\mathrm{P}(A)$와 $\mathrm{P}(B)$는 동시에 0 또는 1이 될 수 없다.

$\therefore 0<\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)<2$

ㄷ. $\mathrm{P}(A)=0$이면 A는 공사건이고, A와 B는 서로 다른 사건이므로 $\mathrm{P}(B)\ne0$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

0239 답 ㄱ

ㄱ. $\varnothing\subset(A\cap B)\subset S$이므로 $\mathrm{P}(\varnothing)\le\mathrm{P}(A\cap B)\le\mathrm{P}(S)$

$\therefore 0\le\mathrm{P}(A\cap B)\le1$

ㄴ. [반례] $S=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$, $A=\{1,\ 2,\ 4\}$, $B=\{2,\ 3,\ 5\}$이면 $A\cup B=S$이지만

$\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=\frac{3}{5}+\frac{3}{5}=\frac{6}{5}\ne1$

ㄷ. [반례] $S=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$, $A=\{1,\ 2\}$, $B=\{2,\ 4\}$이면

$\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$이지만 $A\cap B=\{2\}$이므로 두 사건 A와 B는 서로 배반사건이 아니다.

따라서 옳은 것은 ㄱ이다.

유형 12 확률의 덧셈정리와 여사건의 확률 본책 42쪽

표본공간 S의 두 사건 A, B에 대하여

(1) $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

(2) $\mathrm{P}(A^C)=1-\mathrm{P}(A)$

0240 답 $\frac{1}{12}$

$A^C\cap B^C=(A\cup B)^C$이므로

$\mathrm{P}(A^C\cap B^C)=\mathrm{P}((A\cup B)^C)=1-\mathrm{P}(A\cup B)$에서

$\frac{1}{2}=1-\mathrm{P}(A\cup B) \qquad \therefore \mathrm{P}(A\cup B)=\frac{1}{2}$

또, $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$에서

$\frac{1}{2}=\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\mathrm{P}(A\cap B)$

$\therefore$ $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{12}$

0241 답 ⑤

$\mathrm{P}(A)=3\mathrm{P}(B)$에서 $\mathrm{P}(B)=\frac{1}{3}\mathrm{P}(A)$

$\mathrm{P}(S)=\mathrm{P}(A\cup B)$에서 두 사건 A와 B는 서로 배반사건이므로

$1=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A)+\frac{1}{3}\mathrm{P}(A)$

$=\frac{4}{3}\mathrm{P}(A)$

$\therefore$ $\mathrm{P}(A)=\frac{3}{4}$

0242 답 $\frac{1}{8}$

$\mathrm{P}(A^C)=1-\mathrm{P}(A)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{1}{8}$

이때, 두 사건 A^C와 B는 서로 배반사건이므로

$\mathrm{P}(A^C\cup B)=\mathrm{P}(A^C)+\mathrm{P}(B)=\frac{3}{4}+\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$

$\therefore$ $\mathrm{P}(A\cap B^C)=\mathrm{P}((A^C\cup B)^C)$

$=1-\mathrm{P}(A^C\cup B)$

$=1-\frac{7}{8}=\frac{1}{8}$

0243 답 $\frac{5}{18}$

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$에서

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cup B)$

$=\frac{2}{3}+\frac{3}{4}-\mathrm{P}(A\cup B)$

$=\frac{17}{12}-\mathrm{P}(A\cup B)$

즉, $\mathrm{P}(A\cup B)$가 최소일 때 $\mathrm{P}(A\cap B)$는 최대이고, $\mathrm{P}(A\cup B)$가 최대일 때 $\mathrm{P}(A\cap B)$는 최소이다.

이때, $\mathrm{P}(A\cup B)\ge\mathrm{P}(A)$, $\mathrm{P}(A\cup B)\ge\mathrm{P}(B)$, $\mathrm{P}(A\cup B)\le1$이므로

$\mathrm{P}(A\cup B)\ge\frac{2}{3}$, $\mathrm{P}(A\cup B)\ge\frac{3}{4}$, $\mathrm{P}(A\cup B)\le1$

따라서 $\frac{3}{4}\le\mathrm{P}(A\cup B)\le1$이므로

$-1\le-\mathrm{P}(A\cup B)\le-\frac{3}{4}$

$\therefore$ $\frac{5}{12}\le\frac{17}{12}-\mathrm{P}(A\cup B)\le\frac{2}{3}$

즉, $\frac{5}{12}\le\mathrm{P}(A\cap B)\le\frac{2}{3}$이므로

$M=\frac{2}{3}$, $m=\frac{5}{12}$ $\qquad\therefore$ $Mm=\frac{5}{18}$

유형 13 **확률의 덧셈정리 ; 배반사건이 아닌 경우** 본책 43쪽

> 표본공간 S의 두 사건 A, B에 대하여 $A\cap B\ne\varnothing$이면
> ⇨ $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

0244 답 ①

정사면체와 정육면체를 동시에 던질 때, 모든 경우의 수는

$4\cdot6=24$

바닥에 닿은 면에 적힌 정사면체와 정육면체의 수를 각각 a, b라 하고 순서쌍 $(a,\ b)$로 나타낼 때, 두 수의 곱이 8의 배수인 사건을 A, 20 이상인 사건을 B라 하면

$A=\{(2,\ 4), (4,\ 2), (4,\ 4), (4,\ 6)\}$

$B=\{(4,\ 5), (4,\ 6)\}$

$A\cap B=\{(4,\ 6)\}$

$\therefore$ $\mathrm{P}(A)=\frac{4}{24}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{2}{24}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{24}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=\frac{4}{24}+\frac{2}{24}-\frac{1}{24}=\frac{5}{24}$

0245 답 0.6

내일 눈이 오는 사건을 A, 모레 눈이 오는 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(A)=0.5$, $\mathrm{P}(A\cap B)=0.3$, $\mathrm{P}(A\cup B)=0.8$

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$에서

$0.8=0.5+\mathrm{P}(B)-0.3$ $\qquad\therefore$ $\mathrm{P}(B)=0.6$

따라서 구하는 확률은 0.6이다.

0246 답 $\frac{5}{11}$

3이 적힌 카드를 뽑는 사건을 A, 7이 적힌 카드를 뽑는 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{{}_{11}\mathrm{C}_2}{{}_{12}\mathrm{C}_3}=\frac{55}{220}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{{}_{11}\mathrm{C}_2}{{}_{12}\mathrm{C}_3}=\frac{55}{220}$,

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{{}_{10}\mathrm{C}_1}{{}_{12}\mathrm{C}_3}=\frac{10}{220}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=\frac{55}{220}+\frac{55}{220}-\frac{10}{220}=\frac{5}{11}$

0247 답 $\frac{7}{16}$

$f(1)=a$인 사건을 A, $f(2)=d$인 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{{}_4\Pi_3}{{}_4\Pi_4}=\frac{4^3}{4^4}=\frac{1}{4}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{{}_4\Pi_3}{{}_4\Pi_4}=\frac{4^3}{4^4}=\frac{1}{4}$,

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{{}_4\Pi_2}{{}_4\Pi_4}=\frac{4^2}{4^4}=\frac{1}{16}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{16}=\frac{7}{16}$

유형 14 **확률의 덧셈정리 ; 배반사건인 경우** 본책 43쪽

> 표본공간 S의 두 사건 A, B에 대하여 $A\cap B=\varnothing$, 즉 두 사건 A, B가 서로 배반사건이면
> ⇨ $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$

0248 답 ③

D를 맨 앞에 놓는 사건을 A, D를 맨 뒤에 놓는 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{5!}{6!}=\frac{1}{6}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{5!}{6!}=\frac{1}{6}$

이때, 두 사건 A, B는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$

$=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$

0249 답 $\frac{25}{286}$

13개의 공 중에서 3개를 꺼낼 때, 3개가 모두 흰 공인 사건을 A, 노란 공인 사건을 B, 검은 공인 사건을 C라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{{}_3\mathrm{C}_3}{{}_{13}\mathrm{C}_3}=\frac{1}{286}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{{}_4\mathrm{C}_3}{{}_{13}\mathrm{C}_3}=\frac{4}{286}$,

$\mathrm{P}(C)=\frac{{}_6\mathrm{C}_3}{{}_{13}\mathrm{C}_3}=\frac{20}{286}$

이때, 세 사건 A, B, C는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A\cup B\cup C)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(C)$

$=\frac{1}{286}+\frac{4}{286}+\frac{20}{286}=\frac{25}{286}$

0250 답 ⑤

노란 구슬의 개수가 2개 이하이려면 꺼낸 4개의 구슬 중에서 노란 구슬이 0개 또는 1개 또는 2개이어야 한다.

노란 구슬이 0개인 사건을 A, 1개인 사건을 B, 2개인 사건을 C라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{{}_5\mathrm{C}_4}{{}_{10}\mathrm{C}_4}=\frac{1}{42}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{{}_5\mathrm{C}_1\cdot{}_5\mathrm{C}_3}{{}_{10}\mathrm{C}_4}=\frac{5}{21}$,

$\mathrm{P}(C)=\frac{{}_5\mathrm{C}_2\cdot{}_5\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_4}=\frac{10}{21}$

이때, 세 사건 A, B, C는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A\cup B\cup C)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(C)$

$=\frac{1}{42}+\frac{5}{21}+\frac{10}{21}=\frac{31}{42}$

유형 15 여사건의 확률 ; '적어도~'라는 표현이 있는 경우 본책 44쪽

'적어도 ~일 사건'을 A라 하면 '모두 ~가 아닌 사건'이 A^C이므로 사건 A가 일어날 확률은 $\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)$임을 이용한다.

0251 답 ⑤

적어도 한 권이 수학책인 사건을 A라 하면 A^C는 3권이 모두 영어책인 사건이므로

$\mathrm{P}(A^C)=\frac{{}_3\mathrm{C}_3}{{}_6\mathrm{C}_3}=\frac{1}{20}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{1}{20}=\frac{19}{20}$

0252 답 ①

적어도 한쪽 끝에 모음이 오는 사건을 A라 하면 A^C는 양쪽 끝에 자음이 오는 사건이므로

$\mathrm{P}(A^C)=\frac{{}_6\mathrm{P}_2\cdot 7!}{9!}=\frac{5}{12}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{5}{12}=\frac{7}{12}$

0253 답 5

대표 3명 중 적어도 1명이 남학생일 확률은 $\frac{11}{12}$이므로 대표 3명이 모두 여학생일 확률은

$1-\frac{11}{12}=\frac{1}{12}$

남학생의 수를 n이라 하면

$\frac{{}_{10-n}\mathrm{C}_3}{{}_{10}\mathrm{C}_3}=\frac{1}{12}$이므로

$\frac{(10-n)(9-n)(8-n)}{10\cdot9\cdot8}=\frac{1}{12}$

$(10-n)(9-n)(8-n)=60=5\cdot4\cdot3$

즉, $10-n=5$이므로 $n=5$

따라서 남학생의 수는 5이다.

유형 16 여사건의 확률 ; '아닌', '이상', '이하'라는 표현이 있는 경우 본책 44쪽

'~가 아닌 사건', '~ 이상인 사건', '~ 이하인 사건'의 확률을 구할 때에는 여사건을 생각한다.

0254 답 $\frac{83}{84}$

빨간 공이 2개 이하인 사건을 A라 하면 A^C는 빨간 공이 3개인 사건이므로

$\mathrm{P}(A^C)=\frac{{}_3\mathrm{C}_3}{{}_9\mathrm{C}_3}=\frac{1}{84}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{1}{84}=\frac{83}{84}$

0255 답 $\frac{13}{16}$

뒷면이 2개 이상인 사건을 A라 하면 A^C는 뒷면이 1개이거나 모두 앞면인 사건이다.

(i) 뒷면이 1개일 확률은 $\frac{{}_5\mathrm{C}_1}{2^5}=\frac{5}{32}$

(ii) 모두 앞면일 확률은 $\frac{{}_5\mathrm{C}_5}{2^5}=\frac{1}{32}$

(i), (ii)에서 $\mathrm{P}(A^C)=\frac{5}{32}+\frac{1}{32}=\frac{3}{16}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{3}{16}=\frac{13}{16}$

0256 답 $\frac{4}{5}$

6개의 숫자로 세 자리 정수를 만들 때, 560 이하인 사건을 A라 하면 A^C는 561 이상인 사건이다. 이때, 561 이상인 정수는 56□ 꼴 또는 6□□ 꼴이다.

(i) 56□ 꼴일 확률은 $\frac{4}{{}_6\mathrm{P}_3}=\frac{1}{30}$

(ii) 6□□ 꼴일 확률은 $\frac{{}_5\mathrm{P}_2}{{}_6\mathrm{P}_3}=\frac{1}{6}$

(i), (ii)에서 $\mathrm{P}(A^C)=\frac{1}{30}+\frac{1}{6}=\frac{1}{5}$

따라서 구하는 확률은

$P(A)=1-P(A^C)=1-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$

0257 답 $\frac{5}{8}$

한 장의 카드를 두 번 이상 뽑는 사건을 A라 하면 A^C는 세 번 모두 다른 카드를 뽑는 사건이므로

$P(A^C)=\frac{{}_4P_3}{{}_4\Pi_3}=\frac{4\cdot3\cdot2}{4\cdot4\cdot4}=\frac{3}{8}$

따라서 구하는 확률은

$P(A)=1-P(A^C)=1-\frac{3}{8}=\frac{5}{8}$

STEP 3 | 심화 Master

0258 답 $\frac{3}{8}$

TIP 수형도를 그려서 경우의 수를 구해 본다.

4명의 수험생이 4개의 핸드폰을 임의로 하나씩 선택하는 경우의 수는

$4!=24$

수험생을 A, B, C, D라 하고, 각 수험생의 핸드폰을 a, b, c, d라 하면 수험생 A가 핸드폰 b를 선택하는 경우는 다음과 같다.

A	B	C	D
b	a	d	c
	c	d	a
	d	a	c

수험생 A가 핸드폰 c, d를 선택하는 경우도 마찬가지로 3가지씩이므로 4명 모두 다른 수험생의 핸드폰을 선택하는 경우의 수는

$3\cdot3=9$

따라서 구하는 확률은 $\frac{9}{24}=\frac{3}{8}$

0259 답 33

TIP 3^m, 8^n의 일의 자리의 숫자의 규칙성을 찾는다.

8개의 원소 중에서 서로 다른 두 원소 m, n을 택하는 경우의 수는

${}_8P_2=56$

3^m의 일의 자리의 숫자는 3, 9, 7, 1이 반복되고, 8^n의 일의 자리의 숫자는 8, 4, 2, 6이 반복되므로 3^m+8^n의 일의 자리의 숫자가 3인 경우는 다음과 같다.

(i) 3^m, 8^n의 일의 자리의 숫자가 각각 9, 4인 경우
m의 값은 2, 6의 2개, n의 값도 2, 6의 2개이고 $m\neq n$이므로
(m, n)의 순서쌍은 $(2, 6)$, $(6, 2)$의 2가지

(ii) 3^m, 8^n의 일의 자리의 숫자가 각각 7, 6인 경우
m의 값은 3, 7의 2개, n의 값은 4, 8의 2개이므로
(m, n)의 순서쌍은 $(3, 4)$, $(3, 8)$, $(7, 4)$, $(7, 8)$의 4가지

(iii) 3^m, 8^n의 일의 자리의 숫자가 각각 1, 2인 경우
m의 값은 4, 8의 2개, n의 값은 3, 7의 2개이므로
(m, n)의 순서쌍은 $(4, 3)$, $(4, 7)$, $(8, 3)$, $(8, 7)$의 4가지

(i)~(iii)에서 3^m+8^n의 일의 자리의 숫자가 3인 경우의 수는

$2+4+4=10$

따라서 구하는 확률은 $\frac{10}{56}=\frac{5}{28}$이므로

$p=28$, $q=5$ $\therefore p+q=33$

0260 답 $\frac{1}{10}$

TIP 각 가로줄에 써넣는 숫자가 1, 6, 8과 2, 4, 9일 때 세 수의 합이 서로 같다.

6개의 숫자를 여섯 칸에 써넣는 경우의 수는

$6!=720$

$1+2+4+6+8+9=30$이므로 각 가로줄에 있는 세 수의 합은 15로 같아야 한다. 즉, 각 가로줄에 써넣는 숫자는 1, 6, 8과 2, 4, 9로 나누어야 한다.

세 수 1, 6, 8을 윗줄에 써넣고, 세 수 2, 4, 9를 아랫줄에 써넣는 경우의 수는 $3!\cdot3!$이고, 윗줄과 아랫줄을 바꾸는 경우의 수는 2이므로

$3!\cdot3!\cdot2=72$

따라서 구하는 확률은 $\frac{72}{720}=\frac{1}{10}$

0261 답 $\frac{4}{45}$

TIP 공의 무게를 y로 놓고 함수 $y=-x^2+12x+1$의 그래프의 대칭성을 이용한다.

10개의 공 중에서 2개를 꺼내는 경우의 수는

${}_{10}C_2=45$

공의 무게를 y라 하면

$y=-x^2+12x+1=-(x-6)^2+37$

이므로 이 함수의 그래프는 $x=6$에 대하여 대칭이다. 따라서 꺼낸 두 공에 적힌 숫자의 합이 12일 때, 두 공의 무게가 같다.

이때, 두 공에 적힌 숫자의 합이 12가 되는 경우는 $(2, 10)$, $(3, 9)$, $(4, 8)$, $(5, 7)$의 4가지이므로 구하는 확률은 $\frac{4}{45}$이다.

0262 답 107

TIP 서로 다른 두 원소 a, b를 $a=2^m$, $b=2^n$ $(m\neq n)$으로 놓는다.

집합 A에서 서로 다른 두 원소 a, b를 임의로 택할 때, 모든 경우의 수는

${}_{10}P_2=90$

$a=2^m$, $b=2^n$ $(m\neq n)$이라 하면

$\log_a b=\log_{2^m}2^n=\frac{n}{m}$이 정수가 되는 경우의 수는

$m=1$일 때, $n=2, 3, \cdots, 10$의 9가지

$m=2$일 때, $n=4, 6, 8, 10$의 4가지

$m=3$일 때, $n=6, 9$의 2가지

$m=4$일 때, $n=8$의 1가지

$m=5$일 때, $n=10$의 1가지

이므로 $\log_a b$가 정수가 되는 경우의 수는

$9+4+2+1+1=17$

따라서 구하는 확률은 $\frac{17}{90}$이므로

$p=90$, $q=17$ $\therefore p+q=107$

Lecture
로그의 성질
$a>0, a\neq1, b>0$일 때, $\log_{a^m} b^n = \frac{n}{m}\log_a b$ (단, $m\neq0$)

0263 답 $\frac{1}{3}$

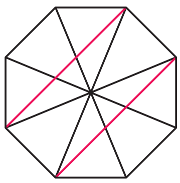
TIP 앞에서 3번째에 놓을 수 있는 컵은 물이 가장 많이 든 컵 또는 물이 두 번째로 많이 든 컵이다.

컵 4개를 일렬로 놓는 경우의 수는
$4!=24$
앞에서 3번째에 놓은 컵의 물의 양이 2번째와 4번째에 놓은 컵의 물의 양보다 많으므로 3번째에는 물이 가장 많이 든 컵 또는 물이 두 번째로 많이 든 컵을 놓을 수 있다.
(i) 물이 가장 많이 든 컵을 3번째에 놓는 경우
나머지 컵 3개를 일렬로 놓으면 되므로 경우의 수는
$3!=6$
(ii) 물이 두 번째로 많이 든 컵을 3번째에 놓는 경우
물이 가장 많이 든 컵을 1번째에 놓고 나머지 2개의 컵을 일렬로 놓으면 되므로 경우의 수는
$2!=2$
(i), (ii)에서 $6+2=8$
따라서 구하는 확률은 $\frac{8}{24}=\frac{1}{3}$

0264 답 $\frac{3}{35}$

TIP 정팔각형의 가장 긴 대각선 2개를 택하여 그것을 대각선으로 갖는 사각형을 그리면 직사각형이 된다.

8개의 꼭짓점 중에서 4개를 택하는 경우의 수는
${}_8C_4=70$
오른쪽 그림과 같이 정팔각형의 가장 긴 대각선 4개 중에서 2개를 택하여 그것을 대각선으로 갖는 사각형을 그리면 직사각형이 된다. 즉, 직사각형이 만들어지는 경우의 수는
${}_4C_2=6$



따라서 구하는 확률은 $\frac{6}{70}=\frac{3}{35}$

0265 답 103

TIP $a_1\neq0$이고 $a_1<a_2<a_3$이므로 $a_3=3$ 또는 $a_3=4$이다.

만들 수 있는 네 자리 자연수의 개수는
$4\cdot{}_5\Pi_3=4\cdot5^3=500$
$a_1\neq0$이고 $a_1<a_2<a_3$이므로 $a_3=3$ 또는 $a_3=4$이다.
(i) $a_3=3$인 경우
$a_1=1$, $a_2=2$이고, a_4는 0, 1, 2의 3가지이므로
$1\cdot3=3$
(ii) $a_3=4$인 경우
a_1, a_2를 정하는 경우의 수는 1, 2, 3 중에서 2개를 택하는 조합의 수와 같고, a_4는 0, 1, 2, 3의 4가지이므로
${}_3C_2\cdot4=12$
(i), (ii)에서 $3+12=15$
따라서 구하는 확률은 $\frac{15}{500}=\frac{3}{100}$이므로
$p=100$, $q=3$ $\quad\therefore p+q=103$

참고 다섯 개의 숫자 0, 1, 2, 3, 4를 중복 사용하여 네 자리의 자연수를 만들 때, 천의 자리에 올 수 있는 수는 1, 2, 3, 4의 4가지, 나머지 자리에 올 수 있는 수는 각각 0, 1, 2, 3, 4의 5가지이므로
$4\cdot{}_5\Pi_3=500$

0266 답 11

TIP 갑, 을이 각각 가진 두 장의 카드에 적힌 수의 합이 서로 같은 경우를 생각해 본다.

갑은 주머니 A에서, 을은 주머니 B에서 두 장의 카드를 꺼낼 때, 모든 경우의 수는
${}_4C_2\cdot{}_4C_2=36$
(i) 갑과 을이 꺼낸 카드에 적힌 숫자가 모두 같은 경우
${}_4C_2=6$
(ii) 갑과 을이 꺼낸 카드에 적힌 숫자는 다르지만 합이 같은 경우
갑이 1, 4가 적힌 카드, 을이 2, 3이 적힌 카드를 꺼내거나 갑이 2, 3이 적힌 카드, 을이 1, 4가 적힌 카드를 꺼내는 경우의 수는 2
(i), (ii)에서 $6+2=8$
따라서 구하는 확률은 $\frac{8}{36}=\frac{2}{9}$이므로
$p=9$, $q=2$ $\quad\therefore p+q=11$

0267 답 $\frac{5}{14}$

TIP 먼저 3명의 학생을 일렬로 앉히고 그 사이사이와 양 끝에 빈 의자를 놓는 경우의 수를 구한다.

8개의 의자 중에서 3개를 택하여 앉는 경우의 수는
${}_8P_3=336$
3명의 학생을 A, B, C라 하면 3명이 일렬로 앉는 경우의 수는 $3!$
어느 두 명도 이웃하지 않으려면 각 학생 사이에 빈 의자가 반드시 있어야 하므로 다음 그림과 같이 앉을 수 있다.

❶	A	❷	B	❸	C	❹

❶, ❷, ❸, ❹에 각각 a, b, c, d개의 빈 의자가 있다고 하면
$a+b+c+d=5$ (단, a, d는 음이 아닌 정수, b, c는 자연수)
이때, $b'=b-1$, $c'=c-1$이라 하면 $a+b'+c'+d=3$을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b', c', d의 순서쌍의 개수는 ${}_4H_3$이므로 구하는 경우의 수는
$3!\cdot{}_4H_3=6\cdot{}_6C_3=120$
따라서 구하는 확률은 $\frac{120}{336}=\frac{5}{14}$

다른 풀이 8개의 의자 중에서 3개를 택하여 앉는 경우의 수는
${}_8P_3=336$
3명이 어느 누구와도 서로 이웃하지 않게 앉는 경우의 수는 3명이 앉을 3개의 자리를 제외한 빈자리 5개의 사이사이 및 양끝의 6개의 자리에 3명이 앉는 경우의 수이므로

$_6P_3=120$

따라서 구하는 확률은 $\frac{120}{336}=\frac{5}{14}$

0268 답 $\frac{61}{216}$

TIP 나온 눈의 수를 a, b, c로 놓고 중복조합의 수를 이용한다.

한 개의 주사위를 세 번 던질 때, 모든 경우의 수는

$6\cdot6\cdot6=216$

나온 눈의 수를 차례로 a, b, c (a, b, c는 6 이하의 자연수)라 하면

(i) 나온 눈의 수의 합이 7인 경우의 수는 $a+b+c=7$을 만족시키는 자연수인 해의 개수와 같다. 즉, $A+B+C=4$를 만족시키는 음이 아닌 정수 A, B, C의 순서쌍의 개수와 같으므로
$_3H_4={}_6C_4=15$

(ii) 나온 눈의 수의 합이 8인 경우의 수는 $a+b+c=8$을 만족시키는 자연수인 해의 개수와 같다. 즉, $A+B+C=5$를 만족시키는 음이 아닌 정수 A, B, C의 순서쌍의 개수와 같으므로
$_3H_5={}_7C_5=21$

(iii) 나온 눈의 수의 합이 9인 경우의 수는 $a+b+c=9$를 만족시키는 자연수인 해의 개수와 같다. 즉, $A+B+C=6$을 만족시키는 음이 아닌 정수 A, B, C의 순서쌍의 개수와 같으므로
$_3H_6={}_8C_6=28$
이때, a, b, c는 6 이하의 자연수이므로 $a=1$, $b=1$, $c=7$ 또는 $a=1$, $b=7$, $c=1$ 또는 $a=7$, $b=1$, $c=1$인 경우는 존재하지 않는다.
즉, 구하는 순서쌍의 개수는 $28-3=25$

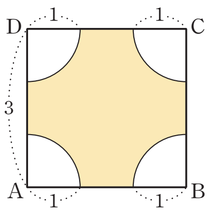
(i)~(iii)에서 나온 눈의 수의 합이 7 이상 9 이하인 경우의 수는

$15+21+25=61$

따라서 구하는 확률은 $\frac{61}{216}$

0269 답 $1-\frac{\pi}{9}$

TIP 주어진 조건을 만족시키는 영역을 나타내고 $\frac{\text{(구하는 영역의 넓이)}}{\text{(전체 넓이)}}$를 구한다.



점 P가 각 꼭짓점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 사분원의 외부에 있을 때, □ABCD의 네 꼭짓점과 점 P 사이의 거리가 1 이상이다. 따라서 오른쪽 그림에서 색칠한 부분에 점 P를 잡으면 되므로 구하는 확률은

$$\frac{\text{(색칠한 부분의 넓이)}}{\text{(□ABCD의 넓이)}}=\frac{3^2-\pi\cdot1}{3^2}$$
$$=1-\frac{\pi}{9}$$

0270 답 $\frac{5}{7}$

TIP 뽑은 3장의 카드에 적혀 있는 3개의 숫자가 모두 연속인 경우와 2개만 연속인 경우로 나누어 생각한다.

7장의 카드 중에서 임의로 3장을 뽑는 경우의 수는

$_7C_3=35$

뽑은 3장의 카드에 적혀 있는 3개의 숫자가 모두 연속인 사건을 A, 2개의 숫자만 연속인 사건을 B라 하자.

(i) 뽑은 3장의 카드에 적혀 있는 3개의 숫자가 모두 연속인 경우
$(1,\ 2,\ 3)$, $(2,\ 3,\ 4)$, $(3,\ 4,\ 5)$, $(4,\ 5,\ 6)$, $(5,\ 6,\ 7)$
의 5가지이므로
$\mathrm{P}(A)=\frac{5}{35}=\frac{1}{7}$

(ii) 뽑은 3장의 카드에 적혀 있는 3개의 숫자 중 2개의 숫자만 연속인 경우
$(1,\ 2,\ \square)$일 때, □는 4, 5, 6, 7의 4가지
$(2,\ 3,\ \square)$일 때, □는 5, 6, 7의 3가지
$(3,\ 4,\ \square)$일 때, □는 1, 6, 7의 3가지
$(4,\ 5,\ \square)$일 때, □는 1, 2, 7의 3가지
$(5,\ 6,\ \square)$일 때, □는 1, 2, 3의 3가지
$(6,\ 7,\ \square)$일 때, □는 1, 2, 3, 4의 4가지
즉, $4\cdot2+3\cdot4=20$이므로
$\mathrm{P}(B)=\frac{20}{35}=\frac{4}{7}$

두 사건 A, B는 서로 배반사건이므로 (i), (ii)에서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$$
$$=\frac{1}{7}+\frac{4}{7}=\frac{5}{7}$$

0271 답 19

TIP 두 사건 A, B가 서로 배반사건일 때, $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$임을 이용한다.

A, A, B의 순서로 칠하는 사건을 A, B, B, A의 순서로 칠하는 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{9}{64}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{64}$

이때, 두 사건 A, B는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$$
$$=\frac{9}{64}+\frac{3}{64}=\frac{3}{16}$$

즉, $p=16$, $q=3$이므로 $p+q=19$

0272 답 $\frac{3}{4}$

TIP $a^2-3ab+2b^2=0$일 확률을 구하여 여사건의 확률을 이용한다.

주사위를 두 번 던질 때, 모든 경우의 수는

$6\cdot6=36$

$a^2-3ab+2b^2\neq0$인 사건을 A라 하면 A^C는 $a^2-3ab+2b^2=0$인 사건이다. 즉, $a^2-3ab+2b^2=(a-b)(a-2b)=0$에서 $a=b$ 또는 $a=2b$이다.

(i) $a=b$인 경우
순서쌍 $(a,\ b)$는 $(1,\ 1)$, $(2,\ 2)$, $\cdots$, $(6,\ 6)$의 6가지

(ii) $a=2b$인 경우
순서쌍 $(a,\ b)$는 $(2,\ 1)$, $(4,\ 2)$, $(6,\ 3)$의 3가지

(i), (ii)에서 $6+3=9$이므로

$\mathrm{P}(A^C)=\frac{9}{36}=\frac{1}{4}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^{C})=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

0273 답 $\frac{7}{8}$

TIP $f(a)f(b)f(c)$의 값이 홀수인 확률을 구하여 여사건의 확률을 이용한다.

$f(a)f(b)f(c)$의 값이 짝수인 사건을 A라 하면 A^{C}는

$f(a)f(b)f(c)$의 값이 홀수인 사건이다.

$f(a)f(b)f(c)$의 값이 홀수이려면 $f(a)$, $f(b)$, $f(c)$의 값이 모두 홀수이어야 하므로

$\mathrm{P}(A^{C})=\frac{{}_{3}\Pi_{3}}{{}_{6}\Pi_{3}}=\frac{3^3}{6^3}=\frac{1}{8}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^{C})=1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$

0274 답 $\frac{9}{10}$

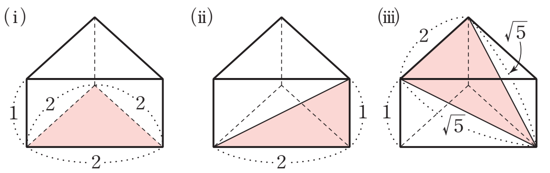
TIP 만들어진 삼각형의 넓이가 무리수인 확률을 구하여 여사건의 확률을 이용한다.

세 꼭짓점을 택하여 만들 수 있는 삼각형의 개수는

${}_{6}\mathrm{C}_{3}=20$

만들어진 삼각형의 넓이가 유리수인 사건을 A라 하면 A^{C}는 삼각형의 넓이가 무리수인 사건이다.

이때, 세 꼭짓점을 택하여 만들 수 있는 삼각형은 다음 그림과 같다.



(i)~(iii)에서 색칠한 삼각형의 넓이는 각각 $\sqrt{3}$, 1, 2이므로 넓이가 무리수인 경우는 (i)이고, 이 삼각형은 윗면과 밑면의 2개이다.

$\therefore \mathrm{P}(A^{C})=\frac{2}{20}=\frac{1}{10}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^{C})=1-\frac{1}{10}=\frac{9}{10}$

0275 답 $\frac{11}{36}$

TIP $(a_1-a_2)(a_3-a_4)\neq0$일 확률을 구하여 여사건의 확률을 이용한다.

한 개의 주사위를 5번 던질 때, 모든 경우의 수는

$6\cdot6\cdot6\cdot6\cdot6=6^5$

$(a_1-a_2)(a_3-a_4)=0$인 사건을 A라 하면 A^{C}는

$(a_1-a_2)(a_3-a_4)\neq0$인 사건이다. 즉, $(a_1-a_2)(a_3-a_4)\neq0$에서 $a_1\neq a_2$이고 $a_3\neq a_4$이다.

a_1, a_2를 정하는 경우의 수는 ${}_{6}\mathrm{P}_{2}$이고, a_3, a_4를 정하는 경우의 수도 ${}_{6}\mathrm{P}_{2}$, a_5는 1, 2, 3, 4, 5, 6의 6가지이므로

$\mathrm{P}(A^{C})=\frac{{}_{6}\mathrm{P}_{2}\cdot{}_{6}\mathrm{P}_{2}\cdot6}{6^5}=\frac{25}{36}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^{C})=1-\frac{25}{36}=\frac{11}{36}$

0276 답 19

TIP $(x-y)(y-z)(z-x)=0$일 확률을 구하여 여사건의 확률을 이용한다.

$x+y+z=10$의 음이 아닌 정수 x, y, z의 모든 순서쌍 $(x,\ y,\ z)$의 개수는

${}_{3}\mathrm{H}_{10}={}_{12}\mathrm{C}_{10}=66$

순서쌍 $(x,\ y,\ z)$가 $(x-y)(y-z)(z-x)\neq0$을 만족시키는 사건을 A라 하면 A^{C}는 $(x-y)(y-z)(z-x)=0$을 만족시키는 사건이다. 즉, $(x-y)(y-z)(z-x)=0$에서 $x=y$ 또는 $y=z$ 또는 $z=x$이다.

$x=y$인 경우에 순서쌍 $(x,\ y,\ z)$는

$(0,\ 0,\ 10)$, $(1,\ 1,\ 8)$, $(2,\ 2,\ 6)$, $(3,\ 3,\ 4)$, $(4,\ 4,\ 2)$, $(5,\ 5,\ 0)$의 6가지

이때, $y=z$ 또는 $z=x$인 경우도 각각 6가지이므로 구하는 순서쌍의 개수는

$6+6+6=18$

$\therefore \mathrm{P}(A^{C})=\frac{18}{66}=\frac{3}{11}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^{C})=1-\frac{3}{11}=\frac{8}{11}$

즉 $p=11$, $q=8$이므로 $p+q=19$

4 | 조건부확률

본책 50쪽~62쪽

STEP 1 | 기초 Build

0277 답 $\frac{1}{10}$

$A=\{2,\ 3,\ 5,\ 7\}$, $B=\{3,\ 6,\ 9\}$에서 $A\cap B=\{3\}$이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{10}$

0278 답 $\frac{1}{4}$

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{1}{10}}{\frac{4}{10}}=\frac{1}{4}$$

0279 답 $\frac{1}{3}$

$$\mathrm{P}(A|B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{\frac{1}{10}}{\frac{3}{10}}=\frac{1}{3}$$

0280 답 $\frac{1}{3}$

$A^C=\{1,\ 4,\ 6,\ 8,\ 9,\ 10\}$, $B=\{3,\ 6,\ 9\}$에서

$A^C\cap B=\{6,\ 9\}$이므로

$$\mathrm{P}(B|A^C)=\frac{\mathrm{P}(A^C\cap B)}{\mathrm{P}(A^C)}=\frac{\frac{2}{10}}{\frac{6}{10}}=\frac{1}{3}$$

0281 답 $\frac{2}{3}$

홀수의 눈이 나오는 사건을 A, 소수의 눈이 나오는 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{3}$

$$\therefore \mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}$$

0282 답 0.1

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=0.5\times0.2=0.1$

0283 답 0.25

$$\mathrm{P}(A|B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{0.1}{0.4}=0.25$$

0284 답 0.2

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cup B)&=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)\\&=0.5+0.4-0.1=0.8\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \mathrm{P}(A^C\cap B^C)&=\mathrm{P}((A\cup B)^C)\\&=1-\mathrm{P}(A\cup B)\\&=1-0.8=0.2\end{aligned}$$

0285 답 0.4

$$\mathrm{P}(B^C|A^C)=\frac{\mathrm{P}(A^C\cap B^C)}{\mathrm{P}(A^C)}=\frac{0.2}{1-0.5}=0.4$$

0286 답 종속

$A=\{2,\ 4,\ 6\}$, $B=\{1,\ 2,\ 3\}$, $A\cap B=\{2\}$에서

$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{6}$이므로

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}$$

$\therefore \mathrm{P}(B|A)\neq\mathrm{P}(B)$

따라서 두 사건 A, B는 서로 종속이다.

0287 답 독립

$A=\{2,\ 4,\ 6\}$, $C=\{3,\ 4\}$, $A\cap C=\{4\}$에서

$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(C)=\frac{1}{3}$, $\mathrm{P}(A\cap C)=\frac{1}{6}$이므로

$$\mathrm{P}(C|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap C)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}$$

$\therefore \mathrm{P}(C|A)=\mathrm{P}(C)$

따라서 두 사건 A, C는 서로 독립이다.

0288 답 $\frac{1}{6}$

두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$

0289 답 $\frac{1}{3}$

두 사건 A, B^C가 서로 독립이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cap B^C)&=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B^C)=\mathrm{P}(A)\{1-\mathrm{P}(B)\}\\&=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}\end{aligned}$$

0290 답 $\frac{1}{2}$

두 사건 A^C, B가 서로 독립이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A^C|B)&=\mathrm{P}(A^C)=1-\mathrm{P}(A)\\&=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

0291 답 $\frac{2}{3}$

두 사건 A^C, B^C가 서로 독립이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(B^C|A^C)&=\mathrm{P}(B^C)=1-\mathrm{P}(B)\\&=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}\end{aligned}$$

0292 답 $\frac{1}{4}$

100원짜리 동전의 앞면이 나오는 사건을 A, 10원짜리 동전의 뒷면이 나오는 사건을 B라 하면 A, B는 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

0293 답 0.42

두 선수 A, B가 승부차기를 성공하는 사건을 각각 A, B라 하면 A, B는 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=0.6\times0.7=0.42$

0294 답 (1) $\frac{1}{3}$ (2) $\frac{8}{27}$

(1) $\mathrm{P}(A)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

(2) $\mathrm{P}(A)=\frac{1}{3}$, $\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$이고, 각 시행은 서로 독립이므로 구하는 확률은

$_4\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{8}{27}$

0295 답 $\frac{5}{16}$

문제를 맞히는 사건을 A라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

각 시행은 서로 독립이므로 구하는 확률은

$_5\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{16}$

0296 답 $\frac{216}{625}$

자유투를 성공하는 사건을 A라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$, $\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$

각 시행은 서로 독립이므로 구하는 확률은

$_4\mathrm{C}_3\left(\frac{3}{5}\right)^3\left(\frac{2}{5}\right)^1=\frac{216}{625}$

STEP 2 | 유형 Drill

유형 01 조건부확률의 계산 본책 52쪽

사건 A가 일어났다고 가정할 때 사건 B의 조건부확률은

⇨ (i) $\mathrm{P}(A)$, $\mathrm{P}(A\cap B)$의 값을 구한다.

(ii) $\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}$의 값을 구한다. (단, $\mathrm{P}(A)>0$)

0297 답 0.8

$\mathrm{P}(A^C)=1-\mathrm{P}(A)=1-0.4=0.6$

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(A|B)=0.6\times0.2=0.12$이므로

$\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)=0.6-0.12=0.48$

$\therefore \mathrm{P}(B|A^C)=\frac{\mathrm{P}(A^C\cap B)}{\mathrm{P}(A^C)}=\frac{0.48}{0.6}=0.8$

0298 답 $\frac{1}{9}$

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$

0299 답 ②

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(B|A)-\mathrm{P}(A|B)&=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}-\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}\\&=\mathrm{P}(A\cap B)\left\{\frac{1}{\mathrm{P}(A)}-\frac{1}{\mathrm{P}(B)}\right\}\\&=\frac{2}{5}\cdot\frac{5}{21}=\frac{2}{21}\end{aligned}$$

0300 답 $\frac{5}{12}$

$\mathrm{P}(B^C)=1-\mathrm{P}(B)=1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$

두 사건 A, B가 서로 배반사건이므로

$A\cap B=\varnothing \quad \therefore A\subset B^C$

따라서 $A\cap B^C=A$이므로 $\mathrm{P}(A\cap B^C)=\mathrm{P}(A)=\frac{1}{4}$

$\therefore \mathrm{P}(A|B^C)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B^C)}{\mathrm{P}(B^C)}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{5}}=\frac{5}{12}$

0301 답 $\frac{2}{3}$

$\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A\cap B^C)$에서

$\frac{1}{3}=\frac{1}{9}+\mathrm{P}(A\cap B^C)$

$\therefore \mathrm{P}(A\cap B^C)=\frac{1}{3}-\frac{1}{9}=\frac{2}{9}$

$\therefore \mathrm{P}(B^C|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B^C)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{2}{9}}{\frac{1}{3}}=\frac{2}{3}$

유형 02 조건부확률 본책 52쪽

사건 A가 일어났다고 가정할 때 사건 B가 일어날 확률은

⇨ $\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}$

0302 답 ⑤

아동을 택하는 사건을 A, 내국인을 택하는 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{28}{192}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{21}{192}$

내국인인 아동을 택하는 사건

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{21}{192}}{\frac{28}{192}}=\frac{3}{4}$

0303 답 $\frac{8}{15}$

야구를 좋아하지 않는 학생을 택하는 사건을 A, 고등학생을 택하는 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{30}{50}$, $\underbrace{\mathrm{P}(A\cap B)}_{\text{야구를 좋아하지 않는 고등학생을 택하는 사건}}=\frac{16}{50}$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{16}{50}}{\frac{30}{50}}=\frac{8}{15}$$

0304 답 $\frac{3}{10}$

A가 선물을 받는 사건을 A, 빨간 공을 뽑는 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(A)=1-\frac{{}_6\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_2}=\frac{2}{3}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{{}_1\mathrm{C}_1\cdot{}_9\mathrm{C}_1}{{}_{10}\mathrm{C}_2}=\frac{1}{5}$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{1}{5}}{\frac{2}{3}}=\frac{3}{10}$$

0305 답 $\frac{55}{12}$

음식 A를 먹은 사람을 선택하는 사건을 A, 식중독에 걸린 사람을 선택하는 사건을 B라 하면 음식 A를 먹지 않은 사람을 선택하는 사건은 A^C이므로

$\mathrm{P}(A)=\frac{50}{300}$, $\mathrm{P}(A^C)=\frac{250}{300}$,

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{22}{300}$, $\mathrm{P}(A^C\cap B)=\frac{24}{300}$

즉,

$$p_1=\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{22}{300}}{\frac{50}{300}}=\frac{11}{25}$$

$$p_2=\mathrm{P}(B|A^C)=\frac{\mathrm{P}(A^C\cap B)}{\mathrm{P}(A^C)}=\frac{\frac{24}{300}}{\frac{250}{300}}=\frac{12}{125}$$

$$\therefore \frac{p_1}{p_2}=\frac{\frac{11}{25}}{\frac{12}{125}}=\frac{55}{12}$$

0306 답 4

운동 동호회의 전체 회원 수는 $x+32$이고, 여자 회원을 뽑는 사건을 A, 테니스를 선호하는 회원을 뽑는 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{x+12}{x+32}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{x}{x+32}$

$$\therefore \mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{x}{x+32}}{\frac{x+12}{x+32}}=\frac{x}{x+12}$$

따라서 $\frac{x}{x+12}=\frac{1}{4}$이므로 $4x=x+12$

$3x=12$ $\quad\therefore x=4$

유형 03 확률의 곱셈정리 ; $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)$ 본책 53쪽

두 사건 A, B에 대하여 A와 B가 동시에 일어날 확률은

⇨ $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(A|B)$

0307 답 $\frac{5}{12}$

첫 번째 꺼낸 바둑돌이 흰색인 사건을 A, 두 번째 꺼낸 바둑돌이 흰색인 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$, $\mathrm{P}(B|A)=\frac{5}{8}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{8}=\frac{5}{12}$

0308 답 $\frac{3}{20}$

A 상자를 택하는 사건을 A, 당첨 제비를 뽑는 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(B|A)=\frac{3}{10}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{10}=\frac{3}{20}$

0309 답 $\frac{5}{21}$

첫 번째 꺼낸 제품이 정상인 사건을 A, 두 번째 꺼낸 제품이 불량품인 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{10}{15}=\frac{2}{3}$, $\mathrm{P}(B|A)=\frac{5}{14}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{14}=\frac{5}{21}$

0310 답 13

첫 번째 꺼낸 과일이 오렌지인 사건을 A, 두 번째 꺼낸 과일이 한라봉인 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{n}{n+4}$, $\mathrm{P}(B|A)=\frac{4}{n+3}$

따라서 첫 번째는 오렌지, 두 번째는 한라봉을 꺼낼 확률은

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\frac{n}{n+4}\cdot\frac{4}{n+3}=\frac{4n}{(n+4)(n+3)}$$

즉, $\frac{4n}{(n+4)(n+3)}=\frac{1}{5}$이므로

$(n+4)(n+3)=20n$, $n^2-13n+12=0$

$(n-1)(n-12)=0$ $\quad\therefore n=1$ 또는 $n=12$

따라서 모든 n의 값의 합은 13이다.

유형 04 **확률의 곱셈정리**
; $\mathrm{P}(E)=\mathrm{P}(A\cap E)+\mathrm{P}(A^C\cap E)$ 본책 54쪽

두 사건 A, E에 대하여
$\mathrm{P}(E)=\mathrm{P}(A\cap E)+\mathrm{P}(A^C\cap E)$
$\quad=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(E|A)+\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(E|A^C)$

0311 답 $\frac{2}{5}$

A가 레몬 사탕을 꺼내는 사건을 A, B가 레몬 사탕을 꺼내는 사건을 E라 하면 A가 박하 사탕을 꺼내는 사건은 A^C이므로

$\mathrm{P}(A)=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$, $\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$,

$\mathrm{P}(E|A)=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$, $\mathrm{P}(E|A^C)=\frac{4}{9}$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(E)&=\mathrm{P}(A\cap E)+\mathrm{P}(A^C\cap E)\\&=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(E|A)+\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(E|A^C)\\&=\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{3}+\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{9}=\frac{2}{5}\end{aligned}$$

참고 확률이 0이 아닌 두 사건 A, E에 대하여 두 사건 $A\cap E$와 $A^C\cap E$는 서로 배반사건이다.
따라서 $E=(A\cap E)\cup(A^C\cap E)$와 확률의 덧셈정리에 의하여
$\mathrm{P}(E)=\mathrm{P}(A\cap E)+\mathrm{P}(A^C\cap E)$

0312 답 $\frac{3}{8}$

주사위를 던져서 5 이상의 눈이 나오는 사건을 A, 동전을 던져서 뒷면이 두 번 나오는 사건을 E라 하면 주사위를 던져서 4 이하의 눈이 나오는 사건은 A^C이므로

$\mathrm{P}(A)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$, $\mathrm{P}(A^C)=\frac{2}{3}$,

$\mathrm{P}(E|A)={}_4\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{8}$,

동전을 4번 던질 때 뒷면이 두 번 나오는 사건

$\mathrm{P}(E|A^C)={}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{3}{8}$

동전을 3번 던질 때 뒷면이 두 번 나오는 사건

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(E)&=\mathrm{P}(A\cap E)+\mathrm{P}(A^C\cap E)\\&=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(E|A)+\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(E|A^C)\\&=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{8}+\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{8}=\frac{3}{8}\end{aligned}$$

0313 답 ③

내일 비가 내리는 사건을 A, 내일 경기에서 지는 사건을 E라 하면 내일 비가 내리지 않는 사건은 A^C이므로

$\mathrm{P}(A)=0.3$, $\mathrm{P}(A^C)=0.7$, $\mathrm{P}(E|A)=0.6$, $\mathrm{P}(E|A^C)=0.4$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(E)&=\mathrm{P}(A\cap E)+\mathrm{P}(A^C\cap E)\\&=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(E|A)+\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(E|A^C)\\&=0.3\times0.6+0.7\times0.4=0.46\end{aligned}$$

0314 답 $\frac{11}{25}$

사과를 꺼내어 보여 주는 사건을 A, 사과라고 대답하는 사건을 E라 하면 배를 꺼내어 보여 주는 사건은 A^C이므로

$\mathrm{P}(A)=\frac{2}{5}$, $\mathrm{P}(A^C)=\frac{3}{5}$, $\mathrm{P}(E|A)=\frac{4}{5}$, $\mathrm{P}(E|A^C)=\frac{1}{5}$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(E)&=\mathrm{P}(A\cap E)+\mathrm{P}(A^C\cap E)\\&=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(E|A)+\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(E|A^C)\\&=\frac{2}{5}\cdot\frac{4}{5}+\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{5}=\frac{11}{25}\end{aligned}$$

유형 05 $\mathbf{P}(A|E)=\dfrac{\mathbf{P}(A\cap E)}{\mathbf{P}(A\cap E)+\mathbf{P}(A^C\cap E)}$ 본책 54쪽

사건 E가 일어났다고 가정할 때 사건 A의 조건부확률
$\Rightarrow \mathrm{P}(A|E)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap E)}{\mathrm{P}(E)}=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap E)}{\mathrm{P}(A\cap E)+\mathrm{P}(A^C\cap E)}$

0315 답 ①

첫 번째 호빵에 야채가 들어 있는 사건을 A, 두 번째 호빵에 팥이 들어 있는 사건을 E라 하면

$\mathrm{P}(A\cap E)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(E|A)=\frac{4}{6}\cdot\frac{2}{5}=\frac{4}{15}$

$\mathrm{P}(A^C\cap E)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(E|A^C)=\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{15}$

$\therefore \mathrm{P}(E)=\mathrm{P}(A\cap E)+\mathrm{P}(A^C\cap E)=\frac{4}{15}+\frac{1}{15}=\frac{1}{3}$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A|E)=\frac{\mathrm{P}(A\cap E)}{\mathrm{P}(E)}=\frac{\frac{4}{15}}{\frac{1}{3}}=\frac{4}{5}$$

0316 답 $\frac{9}{13}$

남학생을 택하는 사건을 A, 안경을 쓴 학생을 택하는 사건을 E라 하면

$\mathrm{P}(A\cap E)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(E|A)=\frac{60}{100}\cdot\frac{30}{100}=\frac{9}{50}$

$\mathrm{P}(A^C\cap E)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(E|A^C)=\frac{40}{100}\cdot\frac{20}{100}=\frac{2}{25}$

$\therefore \mathrm{P}(E)=\mathrm{P}(A\cap E)+\mathrm{P}(A^C\cap E)=\frac{9}{50}+\frac{2}{25}=\frac{13}{50}$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A|E)=\frac{\mathrm{P}(A\cap E)}{\mathrm{P}(E)}=\frac{\frac{9}{50}}{\frac{13}{50}}=\frac{9}{13}$$

0317 답 $\frac{56}{59}$

용의자가 말한 문항이 거짓말인 사건을 A, 거짓말 탐지기가 거짓이라고 판단하는 사건을 E라 하면

$\mathrm{P}(A\cap E)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(E|A)=\frac{7}{10}\cdot\frac{8}{10}=\frac{56}{100}$

$\mathrm{P}(A^C\cap E)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(E|A^C)=\frac{3}{10}\cdot\frac{1}{10}=\frac{3}{100}$

$\therefore \mathrm{P}(E)=\mathrm{P}(A\cap E)+\mathrm{P}(A^C\cap E)=\frac{56}{100}+\frac{3}{100}=\frac{59}{100}$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A|E)=\frac{\mathrm{P}(A\cap E)}{\mathrm{P}(E)}=\frac{\frac{56}{100}}{\frac{59}{100}}=\frac{56}{59}$$

0318 답 $\frac{2}{3}$

양면이 모두 노란색인 색종이, 양면이 모두 보라색인 색종이, 한쪽 면은 노란색, 다른 쪽 면은 보라색인 색종이를 꺼내는 사건을 각각 A, B, C, 탁자에 놓여 있는 색종이의 윗면이 노란색인 사건을 E라 하면

$$\mathrm{P}(A\cap E)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(E|A)=\frac{1}{3}\cdot 1=\frac{1}{3}$$

$$\mathrm{P}(B\cap E)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(E|B)=\frac{1}{3}\cdot 0=0$$

$$\mathrm{P}(C\cap E)=\mathrm{P}(C)\mathrm{P}(E|C)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$$

$$\therefore \mathrm{P}(E)=\mathrm{P}(A\cap E)+\mathrm{P}(B\cap E)+\mathrm{P}(C\cap E)$$
$$=\frac{1}{3}+0+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A|E)=\frac{\mathrm{P}(A\cap E)}{\mathrm{P}(E)}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}$$

0319 답 ④

갑이 붉은 공 1개, 흰 공 1개를 꺼내는 사건을 A, 붉은 공 2개를 꺼내는 사건을 B, 갑이 이기는 사건을 E라 하면

$$\mathrm{P}(A\cap E)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(E|A)$$
$$=\frac{{}_4\mathrm{C}_1\cdot{}_6\mathrm{C}_1}{{}_{10}\mathrm{C}_2}\cdot\frac{{}_5\mathrm{C}_2}{{}_8\mathrm{C}_2}=\frac{4}{21}$$

을이 흰 공 2개를 꺼낼 확률

$$\mathrm{P}(B\cap E)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(E|B)$$
$$=\frac{{}_4\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_2}\left(\frac{{}_6\mathrm{C}_2}{{}_8\mathrm{C}_2}+\frac{{}_2\mathrm{C}_1\cdot{}_6\mathrm{C}_1}{{}_8\mathrm{C}_2}\right)=\frac{9}{70}$$

을이 흰 공 2개 또는 붉은 공 1개, 흰 공 1개를 꺼낼 확률

$$\therefore \mathrm{P}(E)=\mathrm{P}(A\cap E)+\mathrm{P}(B\cap E)=\frac{4}{21}+\frac{9}{70}=\frac{67}{210}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|E)=\frac{\mathrm{P}(B\cap E)}{\mathrm{P}(E)}=\frac{\frac{9}{70}}{\frac{67}{210}}=\frac{27}{67}$$

유형 06 사건의 독립과 종속의 판정

본책 55쪽

두 사건 A, B에 대하여
(1) $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$이면 ⇨ 독립
(2) $\mathrm{P}(A\cap B)\neq\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$이면 ⇨ 종속

0320 답 ⑤

$$\mathrm{P}(A)=\frac{3\cdot 6}{6^2}=\frac{1}{2},\ \mathrm{P}(B)=\frac{6\cdot 3}{6^2}=\frac{1}{2},$$

$$\mathrm{P}(C)=\frac{3\cdot 3+3\cdot 3}{6^2}=\frac{1}{2}$$

ㄱ. $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{3\cdot 3}{6^2}=\frac{1}{4}$이므로
$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$
즉, A와 B는 서로 독립이다.

ㄴ. $\mathrm{P}(B\cap C)=\frac{3\cdot 3}{6^2}=\frac{1}{4}$이므로
$\mathrm{P}(B\cap C)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(C)$
즉, B와 C는 서로 독립이다.

ㄷ. $\mathrm{P}(A\cap C)=\frac{3\cdot 3}{6^2}=\frac{1}{4}$이므로
$\mathrm{P}(A\cap C)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(C)$
즉, A와 C는 서로 독립이다.

따라서 서로 독립인 사건은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

0321 답 ㄷ, ㄹ

$$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2},\ \mathrm{P}(B)=\frac{1}{3},\ \mathrm{P}(C)=\frac{2}{3},\ \mathrm{P}(D)=\frac{1}{2}$$

ㄱ. $A\cap D=\varnothing$이므로 $\mathrm{P}(A\cap D)=0$
$\therefore \mathrm{P}(A\cap D)\neq\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(D)$
즉, A와 B는 서로 종속이다.

ㄴ. $B\cap C=\varnothing$이므로 $\mathrm{P}(B\cap C)=0$
$\therefore \mathrm{P}(B\cap C)\neq\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(C)$
즉, B와 C는 서로 종속이다.

ㄷ. $\mathrm{P}(B^C)=\frac{2}{3}$이고,
$A\cap B^C=\{a,\ c\}$이므로 $\mathrm{P}(A\cap B^C)=\frac{1}{3}$
$\therefore \mathrm{P}(A\cap B^C)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B^C)$
즉, A와 B^C는 서로 독립이다.

ㄹ. $\mathrm{P}(C^C)=\frac{1}{3},\ \mathrm{P}(D^C)=\frac{1}{2}$이고,
$C^C\cap D^C=\{b\}$이므로 $\mathrm{P}(C^C\cap D^C)=\frac{1}{6}$
$\therefore \mathrm{P}(C^C\cap D^C)=\mathrm{P}(C^C)\mathrm{P}(D^C)$
즉, C^C와 D^C는 서로 독립이다.

따라서 서로 독립인 사건은 ㄷ, ㄹ이다.

0322 답 ㄷ

$$\mathrm{P}(A)=\frac{{}_5\mathrm{C}_2+{}_5\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_2}=\frac{4}{9},\ \mathrm{P}(B)=\frac{{}_5\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_2}=\frac{2}{9},$$

$$\mathrm{P}(C)=\frac{{}_4\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_2}=\frac{2}{15}$$

ㄱ. $A\cap B\neq\varnothing$이므로 A와 B는 서로 배반사건이 아니다.

ㄴ. $\mathrm{P}(B\cap C)=\frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_2}=\frac{1}{15}$이므로
$\mathrm{P}(B\cap C)\neq\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(C)$
즉, B와 C는 서로 종속이다.

ㄷ. $\mathrm{P}(A\cap C)=\frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_2}=\frac{1}{15}$이므로
$\mathrm{P}(A\cap C)\neq\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(C)$
즉, A와 C는 서로 종속이다.

따라서 옳은 것은 ㄷ이다.

유형 07 독립과 종속의 성질 본책 56쪽

두 사건 A, B가 서로
(1) 독립이면 ⇨ $\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(B|A^C)=\mathrm{P}(B)$,
$\mathrm{P}(A|B)=\mathrm{P}(A|B^C)=\mathrm{P}(A)$
(2) 종속이면 ⇨ $\mathrm{P}(B|A)\neq\mathrm{P}(B|A^C)$, $\mathrm{P}(A|B)\neq\mathrm{P}(A|B^C)$

0323 답 ⑤
ㄱ. $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\neq0$이므로 두 사건 A, B는 서로 배반사건이 아니다.
ㄴ. [반례] 표본공간 $S=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$에 대하여 두 사건 $A=\{1, 2, 3\}$, $B=\{1, 4\}$라 하면
$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$이므로 두 사건 A, B가 서로 독립이지만 $\mathrm{P}(A|B)=\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{1}{3}$이므로
$\mathrm{P}(A|B)\neq1-\mathrm{P}(B)$
ㄷ. 두 사건 A, B가 서로 독립이면 A^C, B^C도 서로 독립이므로
$\mathrm{P}(A^C|B^C)=\mathrm{P}(A^C)$
또, $1-\mathrm{P}(A|B)=1-\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(A^C)$
$\therefore \mathrm{P}(A^C|B^C)=1-\mathrm{P}(A|B)$
ㄹ. 두 사건 A, B가 서로 독립이면 A^C, B도 서로 독립이므로
$\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^C\cap B)$
$=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B)$
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다.

참고 두 사건 A, B가 서로 독립이면
$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$
이다. 이때, 여사건 A^C와 B^C의 관계를 알아보면
$\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B^C)=\{1-\mathrm{P}(A)\}\{1-\mathrm{P}(B)\}$
$=1-\{\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)\}+\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$
$=1-\{\mathrm{P}(A\cup B)+\mathrm{P}(A\cap B)\}+\mathrm{P}(A\cap B)$
$=1-\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}((A\cup B)^C)=\mathrm{P}(A^C\cap B^C)$
따라서 두 사건 A, B가 서로 독립이면 A^C, B^C도 서로 독립이다.

0324 답 ㄷ
ㄱ. [반례] 한 개의 주사위를 던질 때, 6의 약수의 눈이 나오는 사건을 A, 4 이상의 눈이 나오는 사건을 B라 하면 $\mathrm{P}(A\cup B)=1$이지만 $A\cap B=\{6\}$이므로 B는 A의 여사건이 아니다.
ㄴ. [반례] 표본공간 $S=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$에 대하여 두 사건 $A=\{1, 2, 3, 4\}$, $B=\{3, 4, 5\}$라 하면
$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$이므로 두 사건 A, B가 서로 독립이지만 $\mathrm{P}(A|B)=\mathrm{P}(A)=\frac{2}{3}$, $\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}$이므로
$\mathrm{P}(A|B)\neq\mathrm{P}(B|A)$
ㄷ. A와 B가 서로 배반사건이므로
$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$
이때, 확률의 성질에 의하여 $\mathrm{P}(A\cup B)\le1$
$\therefore \mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)\le1$
따라서 옳은 것은 ㄷ이다.

0325 답 ㄴ, ㄷ
ㄱ. $A\subset B$이면 $A\cap B=A$이므로
$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\mathrm{P}(A)}{\mathrm{P}(A)}=1$$
ㄴ. $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(A|B)$이므로
$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$
$=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(A|B)$
ㄷ. 두 사건 A, B가 서로 독립이면 $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$이므로
$\{1-\mathrm{P}(A)\}\{1-\mathrm{P}(B)\}$
$=1-\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$
$=1-\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(A\cap B)$
$=1-\{\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)\}$
$=1-\mathrm{P}(A\cup B)$
따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

유형 08 독립인 사건의 확률의 계산 본책 56쪽

두 사건 A, B가 서로 독립이다.
$\Longleftrightarrow \mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$ (단, $\mathrm{P}(A)>0$, $\mathrm{P}(B)>0$)

0326 답 $\frac{3}{4}$
두 사건 A, B가 서로 독립이므로
$\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(B)$ $\quad\therefore \mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(B)$
$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$
$=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$
$=\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(B)-\{\mathrm{P}(B)\}^2$
$=2\mathrm{P}(B)-\{\mathrm{P}(B)\}^2$
에서
$\frac{15}{16}=2\mathrm{P}(B)-\{\mathrm{P}(B)\}^2$
$16\{\mathrm{P}(B)\}^2-32\mathrm{P}(B)+15=0$
$\{4\mathrm{P}(B)-3\}\{4\mathrm{P}(B)-5\}=0$
$\therefore \mathrm{P}(B)=\frac{3}{4}$ ($\because 0<\mathrm{P}(B)<1$)

0327 답 $\frac{7}{15}$
두 사건 A, B가 서로 독립이므로
$\mathrm{P}((A-B)\cup(B-A))=\mathrm{P}(A\cup B)-\mathrm{P}(A\cap B)$
$=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-2\mathrm{P}(A\cap B)$
$=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-2\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$
$=\frac{1}{3}+\frac{2}{5}-2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5}=\frac{7}{15}$

0328 답 $\frac{1}{12}$
두 사건 A, C가 서로 독립이므로
$\mathrm{P}(A\cap C)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(C)$에서
$\frac{1}{3}=\mathrm{P}(A)\cdot\frac{1}{2}$ $\quad\therefore \mathrm{P}(A)=\frac{2}{3}$
또, 두 사건 A, B는 서로 배반사건이므로

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$에서

$\frac{3}{4}=\frac{2}{3}+\mathrm{P}(B)$ $\quad\therefore \mathrm{P}(B)=\frac{1}{12}$

0329 답 $\frac{1}{8}$

$\mathrm{P}(A)=a$, $\mathrm{P}(B)=b$ $(0\le a\le 1, 0\le b\le 1)$라 하면

$2\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=1$에서 $b=1-2a$이므로 $0\le a\le \frac{1}{2}$

두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cap B)&=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=ab\\&=a(1-2a)\\&=-2a^2+a\\&=-2\left(a-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{1}{8}\end{aligned}$$

따라서 두 사건 A, B가 동시에 일어날 확률의 최댓값은 $a=\frac{1}{4}$, 즉

$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{4}$일 때 $\frac{1}{8}$이다.

유형 09 독립인 사건의 곱셈정리 본책 57쪽

(1) 두 사건 A, B가 서로 독립이다. $\Longleftrightarrow \mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$
(2) 세 사건 A, B, C가 서로 독립이다.
$\Longleftrightarrow \mathrm{P}(A\cap B\cap C)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(C)$

0330 답 $\frac{5}{12}$

A가 정답을 맞히는 사건을 A, B가 정답을 맞히는 사건을 B라 하면 A, B는 서로 독립이므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cap B^C)+\mathrm{P}(A^C\cap B)&=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B^C)+\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B)\\&=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}=\frac{5}{12}\end{aligned}$$

0331 답 $\frac{1}{18}$

세 주머니 A, B, C에서 검은 공을 꺼내는 사건을 각각 A, B, C라 하면 A, B, C는 서로 독립이므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cap B\cap C)&=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(C)\\&=\frac{4}{6}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{18}\end{aligned}$$

0332 답 $\frac{3}{4}$

세 사람 A, B, C가 풍선을 맞히는 사건을 각각 A, B, C라 하면 세 사람 모두 풍선을 맞히지 못할 확률은 $1-\frac{23}{24}=\frac{1}{24}$

이때,

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A^C\cap B^C\cap C^C)&=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B^C)\mathrm{P}(C^C)\\&=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot(1-p)\\&=\frac{1-p}{6}\end{aligned}$$

즉, $\frac{1-p}{6}=\frac{1}{24}$이므로 $1-p=\frac{1}{4}$

$\therefore p=\frac{3}{4}$

0333 답 120

남자를 택하는 사건을 A, 미혼인 사람을 택하는 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{26}{62+x}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{20+x}{62+x}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{20}{62+x}$

두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$에서

$\frac{20}{62+x}=\frac{26}{62+x}\cdot\frac{20+x}{62+x}$, $20(62+x)=26(20+x)$

$3x=360$ $\quad\therefore x=120$

0334 답 $\frac{13}{36}$

영희의 공모전 점수가 7점이려면 1차 공모전에서 A, 2차 공모전에서 C를 받거나 1차, 2차 공모전에서 모두 B를 받거나 1차 공모전에서 C, 2차 공모전에서 A를 받아야 한다.

(i) 1차 공모전에서 A, 2차 공모전에서 C를 받을 확률은

$\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{18}$

(ii) 1차, 2차 공모전에서 모두 B를 받을 확률은

$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

(iii) 1차 공모전에서 C, 2차 공모전에서 A를 받을 확률은

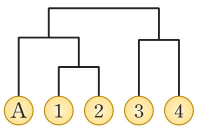
$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{18}$

(i)~(iii)에서 구하는 확률은

$\frac{1}{18}+\frac{1}{4}+\frac{1}{18}=\frac{13}{36}$

0335 답 ⑤

오른쪽 그림에서 B 팀이 1 또는 2의 위치에 배정되면 A 팀과 준결승에서 시합할 수 있고, B 팀이 3 또는 4의 위치에 배정되면 A 팀과 결승에서 시합할 수 있다.



(i) A 팀과 B 팀이 준결승에서 시합할 확률은

$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

(ii) A 팀과 B 팀이 결승에서 시합할 확률은

$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$

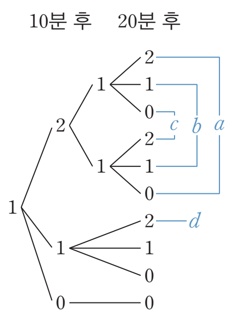
(i), (ii)에서 구하는 확률은

$\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$

0336 답 $\frac{11}{36}$

TIP 세균 1마리가 20분 후에 2마리가 되는 경우는 수형도를 그려 알아본다.

세균 1마리가 20분 후에 2마리가 되는 경우는 오른쪽 수형도에서 a, b, c, d이다.



(i) a일 확률은 $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{24}$

(ii) b일 확률은 $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{18}$

(iii) c일 확률은 $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{24}$

4 조건부확률

(iv) d일 확률은 $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$

(i)~(iv)에서 구하는 확률은

$\frac{1}{24}+\frac{1}{18}+\frac{1}{24}+\frac{1}{6}=\frac{11}{36}$

유형 10 독립시행의 확률

본책 58쪽

1회의 시행에서 사건 A가 일어날 확률이 p일 때, n회의 독립시행에서 사건 A가 r회 일어날 확률은

⇨ ${}_nC_r p^r(1-p)^{n-r}$ (단, $r=0, 1, 2, \cdots, n$)

0337 답 ②

시험에 합격하려면 4개의 문제를 맞히거나 5개의 문제를 맞혀야 한다.

(i) 4개의 문제를 맞히는 확률은

${}_5C_4\left(\frac{3}{4}\right)^4\left(\frac{1}{4}\right)^1=\frac{405}{1024}$

(ii) 5개의 문제를 맞히는 확률은

${}_5C_5\left(\frac{3}{4}\right)^5=\frac{243}{1024}$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$\frac{405}{1024}+\frac{243}{1024}=\frac{81}{128}$

0338 답 $\frac{2}{3}$

주사위를 한 번 던질 때 1의 눈이 나올 확률은 $\frac{2}{3}$, 2의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{3}$이므로

$p_1={}_4C_4\left(\frac{2}{3}\right)^4=\frac{16}{81}$

$p_2={}_4C_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{8}{27}$

$\therefore \frac{p_1}{p_2}=\frac{\frac{16}{81}}{\frac{8}{27}}=\frac{2}{3}$

0339 답 ④

표적에 한 발 이상 명중시키는 사건을 A라 하면 A^C는 한 발도 명중시키지 못하는 사건이므로

$\mathrm{P}(A^C)={}_4C_0\left(\frac{2}{5}\right)^4=\frac{16}{625}$

$\therefore \mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{16}{625}=\frac{609}{625}$

0340 답 $\frac{9}{80}$

(i) 4개의 예선 문제를 모두 맞힐 확률은

${}_4C_4\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}$

(ii) 3개의 예선 문제를 맞히고 찬스 문제를 맞힐 확률은

${}_4C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^1\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{20}$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$\frac{1}{16}+\frac{1}{20}=\frac{9}{80}$

0341 답 $\frac{3}{8}$

(i) 흰 공을 꺼내고, 동전을 3번 던져서 앞면이 2번 나올 확률은

$\frac{3}{4}\cdot{}_3C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{9}{32}$

(ii) 검은 공을 꺼내고, 동전을 4번 던져서 앞면이 2번 나올 확률은

$\frac{1}{4}\cdot{}_4C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{32}$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$\frac{9}{32}+\frac{3}{32}=\frac{3}{8}$

0342 답 ⑤

주사위를 4번 던져서 나오는 눈의 수의 곱이 3의 배수인 사건을 A라 하면 A^C는 눈의 수의 곱이 3의 배수가 아닌 사건이므로

$\mathrm{P}(A^C)={}_4C_4\left(\frac{2}{3}\right)^4=\frac{16}{81}$

$\therefore \mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{16}{81}=\frac{65}{81}$

유형 11 독립시행의 확률의 활용

본책 59쪽

(i) 방정식을 이용하여 사건의 시행 횟수를 구한다.

(ii) 독립시행의 확률을 이용한다.

0343 답 $\frac{80}{243}$

A가 가위바위보를 이기는 횟수를 x, 비기거나 지는 횟수를 y라 하면

$x+y=6,\ 2x+y=8$

위의 식을 연립하여 풀면 $x=2,\ y=4$

따라서 8칸을 올라가려면 A가 2번은 이기고, 4번은 비기거나 져야 하므로

${}_6C_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^4=\frac{80}{243}$

0344 답 ③

동전을 던져 앞면이 x번, 뒷면이 y번 나온다고 하면

$x+y=8,\ 20x+5y=100$

두 식을 연립하여 풀면 $x=4,\ y=4$

따라서 점수의 합이 100점이 되려면 앞면이 4번, 뒷면이 4번 나와야 하므로 구하는 확률은

${}_8C_4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{35}{128}$

0345 답 89

주사위를 던져 3의 배수의 눈이 x번, 3의 배수가 아닌 눈이 y번 나온다고 하면

$x+y=4$ …… ㉠

점 P는 한 방향으로 움직이므로 꼭짓점 A를 출발한 점 P가 다시 꼭짓점 A로 돌아올 때까지 이동한 총 거리는 $5m$ (m은 자연수), 즉

$x+2y=5m$ …… ㉡

㉡−㉠을 하면 $y=5m-4$

$\therefore m=1, y=1$ ($\because m$은 자연수, y는 음이 아닌 정수)

$y=1$을 ㉠에 대입하면 $x=3$

따라서 점 P가 다시 꼭짓점 A로 돌아오려면 3의 배수의 눈이 3번, 3의 배수가 아닌 눈이 1번 나와야 하므로 구하는 확률은

$${}_4C_3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^1=\frac{8}{81}$$

즉, $p=81, q=8$이므로 $p+q=89$

0346 답 $\frac{3}{8}$

동전을 던져 앞면이 x번, 뒷면이 y번 나온다고 하면

$x+y=3$ …… ㉠

주머니 속에 들어 있는 흰 구슬의 개수는 $3-x+y$, 검은 구슬의 개수는 $3+x-y$이므로

$3-x+y=4, 3+x-y=2$

$\therefore x-y=-1$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x=1, y=2$

따라서 주머니 속에 흰 구슬 4개와 검은 구슬 2개가 들어 있으려면 앞면이 1번, 뒷면이 2번 나와야 하므로 구하는 확률은

$${}_3C_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{8}$$

0347 답 $\frac{17}{81}$

(i) 3번째 게임에서 A팀이 우승할 확률은

$${}_3C_3\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{1}{27}$$

(ii) 4번째 게임에서 A팀이 우승하는 경우

3번째 경기까지 2승 1패를 기록하고 4번째 경기에서 이기는 경우이므로 그 확률은

$${}_3C_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^1\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{27}$$

(iii) 5번째 게임에서 A팀이 우승하는 경우

4번째 경기까지 2승 2패를 기록하고 5번째 경기에서 이기는 경우이므로 그 확률은

$${}_4C_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot\frac{1}{3}=\frac{8}{81}$$

(i)~(iii)에서 구하는 확률은

$$\frac{1}{27}+\frac{2}{27}+\frac{8}{81}=\frac{17}{81}$$

0348 답 $\frac{57}{64}$

주사위를 던져 홀수의 눈이 x번, 짝수의 눈이 y번 나온다고 하면

$x+y=6$ …… ㉠

$a>-2$인 사건을 A라 하면 A^C는 $a\le-2$인 사건이다.

즉, $-2x+4y\le-2$이므로 $x-2y\ge1$ …… ㉡

㉠에서 $y=-x+6$이므로 ㉡에 대입하면

$x-2(-x+6)\ge1 \qquad \therefore x\ge\frac{13}{3}$

$\therefore x=5$ 또는 $x=6$

(i) $x=5, y=1$, 즉 홀수의 눈이 5번, 짝수의 눈이 1번 나오는 경우

$${}_6C_5\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{3}{32}$$

(ii) $x=6, y=0$, 즉 홀수의 눈이 6번 나오는 경우

$${}_6C_6\left(\frac{1}{2}\right)^6=\frac{1}{64}$$

(i), (ii)에서

$$P(A^C)=\frac{3}{32}+\frac{1}{64}=\frac{7}{64}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A)=1-P(A^C)=1-\frac{7}{64}=\frac{57}{64}$$

STEP 3 | 심화 Master

0349 답 $\frac{4}{25}$

TIP $(a_1-a_2)(a_2-a_3)(a_3-a_4)\neq0$이려면 $a_1\neq a_2$, $a_2\neq a_3$, $a_3\neq a_4$이어야 한다.

$(a_1-a_2)(a_2-a_3)(a_3-a_4)\neq0$인 사건을 A, $a_1=a_4$인 사건을 B라 하면

$(a_1-a_2)(a_2-a_3)(a_3-a_4)\neq0$에서 $a_1\neq a_2$, $a_2\neq a_3$, $a_3\neq a_4$이어야 하므로

$$P(A)=\frac{6\cdot5\cdot5\cdot5}{6^4}=\frac{125}{216},\ P(A\cap B)=\frac{6\cdot5\cdot4\cdot1}{6^4}=\frac{5}{54}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{5}{54}}{\frac{125}{216}}=\frac{4}{25}$$

0350 답 72

TIP 사건 A가 일어났을 때 사건 B의 조건부확률은 $P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$이다.

도서관 이용자 300명 중에서 30대가 차지하는 비율이 12 %이므로

$(60-a)+b=300\times0.12$

$\therefore a-b=24$ …… ㉠

20대를 선택하는 사건을 A, 30대를 선택하는 사건을 B, 남성을 선택하는 사건을 E라 하면

$$P(A|E)=\frac{P(A\cap E)}{P(E)}=\frac{\frac{a}{300}}{\frac{200}{300}}=\frac{a}{200}$$

$$P(B|E^C)=\frac{P(B\cap E^C)}{P(E^C)}=\frac{\frac{b}{300}}{\frac{100}{300}}=\frac{b}{100}$$

이때, $P(A|E)=P(B|E^C)$이므로

$$\frac{a}{200}=\frac{b}{100}$$

$\therefore a=2b$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=48, b=24$이므로

$a+b=72$

4 조건부확률

0351 답 ②

TIP 주어진 영역에 있는 15개의 점 중에서 임의로 서로 다른 두 점을 선택하는 경우의 수는 ${}_{15}C_2$이다.

y좌표가 같은 두 점을 선택하는 사건을 A, y좌표가 2인 두 점을 선택하는 사건을 B라 하면

$$P(A)=\frac{{}_7C_2+{}_5C_2+{}_3C_2}{{}_{15}C_2}=\frac{34}{105},\ P(A\cap B)=\frac{{}_5C_2}{{}_{15}C_2}=\frac{10}{105}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{10}{105}}{\frac{34}{105}}=\frac{5}{17}$$

0352 답 43

TIP $m=0, 1, 2, 3$, $n=0, 1, 2, 3, 4$이므로 $m+n=3$, $2m\ge n$을 만족시키는 m과 n의 값을 먼저 구한다.

$2m\ge n$인 사건을 A, 꺼낸 흰 공의 개수가 2인 사건을 B라 하자.

(i) $m=1$, $n=2$일 확률은 $\frac{{}_3C_1\cdot{}_4C_2}{{}_7C_3}=\frac{18}{35}$

(ii) $m=2$, $n=1$일 확률은 $\frac{{}_3C_2\cdot{}_4C_1}{{}_7C_3}=\frac{12}{35}$

(iii) $m=3$, $n=0$일 확률은 $\frac{{}_3C_3\cdot{}_4C_0}{{}_7C_3}=\frac{1}{35}$

(i)~(iii)에서

$$P(A)=\frac{18}{35}+\frac{12}{35}+\frac{1}{35}=\frac{31}{35},\ P(A\cap B)=\frac{12}{35}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{12}{35}}{\frac{31}{35}}=\frac{12}{31}$$

즉, $p=31$, $q=12$이므로 $p+q=43$

0353 답 7

TIP 주머니 B에 처음 들어 있던 검은 구슬의 개수를 x로 놓는다.

주머니 B에 처음 들어 있던 검은 구슬의 개수를 x라 하면 흰 구슬의 개수는 $(10-x)$이다.

(i) 주머니 A에서 흰 구슬을 꺼내고, 주머니 B에서 검은 구슬을 꺼낼 확률은

$$\frac{3}{10}\cdot\frac{x}{11}=\frac{3x}{110}$$

(ii) 주머니 A에서 검은 구슬을 꺼내고, 주머니 B에서도 검은 구슬을 꺼낼 확률은

$$\frac{7}{10}\cdot\frac{x+1}{11}=\frac{7(x+1)}{110}$$

주머니 A에서 한 개의 구슬을 꺼내어 주머니 B에 넣은 다음 주머니 B에서 한 개의 구슬을 꺼낼 때, 그것이 검은 구슬일 확률이 $\frac{7}{10}$이므로 (i), (ii)에서

$$\frac{3x}{110}+\frac{7(x+1)}{110}=\frac{7}{10},\ 10x=70 \qquad \therefore x=7$$

따라서 주머니 B에 처음 들어 있던 검은 구슬의 개수는 7이다.

0354 답 ②

TIP $P(A\cap B)=P(A)P(B|A)$임을 이용한다.

조건 (가), (나)에 의하여

$P(S)=P(A)+P(B)+P(C)=1$ ······ ㉠

$P(A)=2P(B)=4P(C)$에서

$P(B)=\frac{1}{2}P(A)$, $P(C)=\frac{1}{4}P(A)$ ······ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$$P(A)+\frac{1}{2}P(A)+\frac{1}{4}P(A)=1,\ \frac{7}{4}P(A)=1$$

$$\therefore P(A)=\frac{4}{7},\ P(B)=\frac{2}{7},\ P(C)=\frac{1}{7}$$

$$P(D\cap A)=P(A)P(D|A)=\frac{4}{7}\cdot\frac{1}{10}=\frac{2}{35}$$

$$P(D\cap B)=P(B)P(D|B)=\frac{2}{7}\cdot\frac{1}{5}=\frac{2}{35}$$

$$P(D\cap C)=P(C)P(D|C)=\frac{1}{7}\cdot\frac{3}{10}=\frac{3}{70}$$

$$\therefore P(D)=P(D\cap A)+P(D\cap B)+P(D\cap C)$$
$$=\frac{2}{35}+\frac{2}{35}+\frac{3}{70}=\frac{11}{70}$$

0355 답 $\frac{9}{37}$

TIP 친구 A, B, C의 집에 우산을 두고 올 확률을 각각 구한다.

진실이가 우산을 잃어버리는 사건을 E, 친구 A, B, C의 집에 방문하는 사건을 각각 A, B, C라 하면

$$P(E\cap A)=\frac{1}{4}$$

$$P(E\cap B)=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{3}{16}$$

$$P(E\cap C)=\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{9}{64}$$

$$\therefore P(E)=P(E\cap A)+P(E\cap B)+P(E\cap C)$$
$$=\frac{1}{4}+\frac{3}{16}+\frac{9}{64}=\frac{37}{64}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(C|E)=\frac{P(E\cap C)}{P(E)}=\frac{\frac{9}{64}}{\frac{37}{64}}=\frac{9}{37}$$

0356 답 ④

TIP 두 사건의 포함 관계를 알아보고 $P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$임을 이용한다.

ㄱ. [반례] 한 개의 주사위를 던질 때, 3의 배수의 눈이 나오는 사건을 A, 홀수의 눈이 나오는 사건을 B, 짝수의 눈이 나오는 사건을 C라 하면

$$P(A)=\frac{1}{3},\ P(B)=\frac{1}{2},\ P(C)=\frac{1}{2}$$

$$P(A\cap C)=\frac{1}{6},\ P(B\cap C)=0$$

이때, $P(A)\le P(B)$이지만

$$\mathrm{P}(A|C)=\frac{\mathrm{P}(A\cap C)}{\mathrm{P}(C)}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}$$

$$\mathrm{P}(B|C)=\frac{\mathrm{P}(B\cap C)}{\mathrm{P}(C)}=0$$

이므로 $\mathrm{P}(A|C)>\mathrm{P}(B|C)$

ㄴ. $A\cup B=D$에서 $(A\cap C)\subset(D\cap C)$이므로

$\mathrm{P}(A\cap C)\le\mathrm{P}(D\cap C)$

이때, 양변을 $\mathrm{P}(C)$로 나누면

$$\frac{\mathrm{P}(A\cap C)}{\mathrm{P}(C)}\le\frac{\mathrm{P}(D\cap C)}{\mathrm{P}(C)}$$

$\therefore \mathrm{P}(A|C)\le\mathrm{P}(D|C)$

ㄷ. $A\cap B=E$에서 $(E\cap C)\subset(A\cap C)$이므로

$\mathrm{P}(E\cap C)\le\mathrm{P}(A\cap C)$

이때, 양변을 $\mathrm{P}(C)$로 나누면

$$\frac{\mathrm{P}(E\cap C)}{\mathrm{P}(C)}\le\frac{\mathrm{P}(A\cap C)}{\mathrm{P}(C)}$$

$\therefore \mathrm{P}(E|C)\le\mathrm{P}(A|C)$

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

0357 답 $\frac{5}{9}$

TIP $f(a)f(b)=0$이려면 $f(a)=0$ 또는 $f(b)=0$임을 이용한다.

$f(a)f(b)=0$이려면 $f(a)=0$ 또는 $f(b)=0$이어야 한다.

$x^2-8x+12=0$에서 $(x-2)(x-6)=0$

$\therefore x=2$ 또는 $x=6$

즉, $f(2)=0$ 또는 $f(6)=0$

$f(a)=0$인 사건을 A, $f(b)=0$인 사건을 B라 하면

(i) $a=2$ 또는 $a=6$일 때 $f(a)=0$이므로

$$\mathrm{P}(A)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

(ii) $b=2$ 또는 $b=6$일 때 $f(b)=0$이므로

$$\mathrm{P}(B)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

이때, 두 사건 A, B는 서로 독립이므로

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{9}=\frac{5}{9}$$

0358 답 9

TIP 두 사건 A, X가 서로 독립임을 이용하여 $\mathrm{P}(X)$의 값을 먼저 구한다.

$A=\{3,\ 6,\ 9,\ 12\}$이므로 $\mathrm{P}(A)=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$

$n(A\cap X)=3$이므로 $\mathrm{P}(A\cap X)=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$

이때, 두 사건 A, X는 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap X)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(X)$에서

$\frac{1}{4}=\frac{1}{3}\mathrm{P}(X)\qquad \therefore \mathrm{P}(X)=\frac{3}{4}$

$\therefore n(X)=12\cdot\frac{3}{4}=9$

0359 답 $\frac{4}{9}$

TIP 독립시행의 확률과 $\mathrm{P}(A|E)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap E)}{\mathrm{P}(A\cap E)+\mathrm{P}(A^C\cap E)}$임을 이용한다.

A가 동전을 3개 던져서 앞면이 1개 나오는 사건을 A_1, 2개 나오는 사건을 A_2, 3개 나오는 사건을 A_3, B가 동전을 던져서 뒷면이 1개 나오는 사건을 E라 하자.

(i) $\mathrm{P}(A_1\cap E)=\mathrm{P}(A_1)\mathrm{P}(E|A_1)$

$$={}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{16}$$

(ii) $\mathrm{P}(A_2\cap E)=\mathrm{P}(A_2)\mathrm{P}(E|A_2)$

$$={}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^1\cdot{}_2\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{3}{16}$$

(iii) $\mathrm{P}(A_3\cap E)=\mathrm{P}(A_3)\mathrm{P}(E|A_3)$

$$={}_3\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot{}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{64}$$

(i)~(iii)에서

$$\mathrm{P}(E)=\mathrm{P}(A_1\cap E)+\mathrm{P}(A_2\cap E)+\mathrm{P}(A_3\cap E)=\frac{3}{16}+\frac{3}{16}+\frac{3}{64}=\frac{27}{64}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A_2|E)=\frac{\mathrm{P}(A_2\cap E)}{\mathrm{P}(E)}=\frac{\frac{3}{16}}{\frac{27}{64}}=\frac{4}{9}$$

0360 답 ②

TIP 독립시행의 확률을 이용하여 $\mathrm{P}(k)$를 구한 후 이항정리를 이용한다.

$$\mathrm{P}(k)={}_{100}\mathrm{C}_k\left(\frac{1}{3}\right)^k\left(\frac{2}{3}\right)^{100-k}\ (k=0,\ 1,\ \cdots,\ 100)$$

이므로

$$\sum_{k=1}^{50}\{\mathrm{P}(2k-1)-\mathrm{P}(2k)\}$$
$$=\{\mathrm{P}(1)-\mathrm{P}(2)\}+\{\mathrm{P}(3)-\mathrm{P}(4)\}+\cdots+\{\mathrm{P}(99)-\mathrm{P}(100)\}$$
$$=\sum_{k=1}^{100}(-1)^{k+1}\mathrm{P}(k)$$
$$=\sum_{k=1}^{100}(-1)^{k+1}{}_{100}\mathrm{C}_k\left(\frac{1}{3}\right)^k\left(\frac{2}{3}\right)^{100-k}$$
$$=\sum_{k=1}^{100}\left\{-{}_{100}\mathrm{C}_k\left(-\frac{1}{3}\right)^k\left(\frac{2}{3}\right)^{100-k}\right\}$$
$$=-\left\{\sum_{k=0}^{100}{}_{100}\mathrm{C}_k\left(-\frac{1}{3}\right)^k\left(\frac{2}{3}\right)^{100-k}-{}_{100}\mathrm{C}_0\left(\frac{2}{3}\right)^{100}\right\}$$
$$=-\left\{\left(-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right)^{100}-\left(\frac{2}{3}\right)^{100}\right\}$$
$$=\left(\frac{2}{3}\right)^{100}-\left(\frac{1}{3}\right)^{100}$$

Lecture

이항정리

자연수 n에 대하여 $(a+b)^n=\sum_{r=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_r a^{n-r}b^r$

4 조건부확률

5 | 이산확률분포

본책 64쪽~78쪽

STEP 1 | 기초 Build

0361 답 ㄱ, ㄹ

이산확률변수는 확률변수가 가질 수 있는 값이 셀 수 있어야 하므로 이산확률변수인 것은 ㄱ, ㄹ이다.

참고 ㄴ. 어떤 사람이 비를 맞은 시간을 확률변수 X라 하면 X가 가질 수 있는 값은 $0\le X\le 10$인 모든 실수이므로 이산확률변수가 아니다.
ㄷ. 미세먼지의 농도를 확률변수 X라 하면 X가 가질 수 있는 값은 $X\ge 0$인 모든 실수이므로 이산확률변수가 아니다.

0362 답 풀이 참조

한 개의 주사위를 한 번 던질 때 홀수의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$, 짝수의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$이므로

$\mathrm{P}(X=0)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

$\mathrm{P}(X=1)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

$\mathrm{P}(X=2)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

따라서 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

0363 답 (1) 0, 1, 2 (2) 풀이 참조

(1) 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2

(2) $\mathrm{P}(X=0)=\frac{{}_3\mathrm{C}_0\cdot{}_2\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{1}{10}$

$\mathrm{P}(X=1)=\frac{{}_3\mathrm{C}_1\cdot{}_2\mathrm{C}_1}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{3}{5}$

$\mathrm{P}(X=2)=\frac{{}_3\mathrm{C}_2\cdot{}_2\mathrm{C}_0}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{3}{10}$

이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{10}$	1

0364 답 x, $4-x$, 9

9개의 과일 중에서 4개를 꺼내는 경우의 수는 ${}_9\mathrm{C}_4$

꺼낸 4개의 과일 중에서 사과가 x개 포함되는 경우의 수는 ${}_5\mathrm{C}_x\cdot{}_4\mathrm{C}_{4-x}$

따라서 X의 확률질량함수는

$\mathrm{P}(X=x)=\frac{{}_5\mathrm{C}_{\boxed{x}}\cdot{}_4\mathrm{C}_{\boxed{4-x}}}{{}_{\boxed{9}}\mathrm{C}_4}$ $(x=0, 1, 2, 3, 4)$

0365 답 $\frac{1}{12}$

확률의 총합은 1이므로 $\frac{5}{12}+\frac{1}{3}+a+2a=1$

$3a=\frac{1}{4}$ $\quad\therefore a=\frac{1}{12}$

0366 답 $\frac{3}{4}$

$\mathrm{P}(X=0$ 또는 $X=2)=\mathrm{P}(X=0)+\mathrm{P}(X=2)$

$=\frac{5}{12}+\frac{1}{3}=\frac{3}{4}$

0367 답 $\frac{7}{12}$

$\mathrm{P}(2\le X\le 6)=1-\mathrm{P}(X=0)$

$=1-\frac{5}{12}=\frac{7}{12}$

0368 답 (1) $\frac{10}{3}$ (2) $\frac{14}{9}$ (3) $\frac{\sqrt{14}}{3}$

(1) $\mathrm{E}(X)=2\cdot\frac{1}{3}+3\cdot\frac{1}{3}+5\cdot\frac{1}{3}=\frac{10}{3}$

(2) $\mathrm{E}(X^2)=2^2\cdot\frac{1}{3}+3^2\cdot\frac{1}{3}+5^2\cdot\frac{1}{3}=\frac{38}{3}$이므로

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=\frac{38}{3}-\left(\frac{10}{3}\right)^2=\frac{14}{9}$

(3) $\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=\sqrt{\frac{14}{9}}=\frac{\sqrt{14}}{3}$

0369 답 (1) 풀이 참조
(2) $\mathrm{E}(X)=\frac{3}{2}$, $\mathrm{V}(X)=\frac{3}{4}$, $\sigma(X)=\frac{\sqrt{3}}{2}$

(1) 동전의 앞면을 H, 뒷면을 T라 하면

$X=0$인 경우는 TTT의 1가지이므로 $\mathrm{P}(X=0)=\frac{1}{8}$

$X=1$인 경우는 HTT, THT, TTH의 3가지이므로

$\mathrm{P}(X=1)=\frac{3}{8}$

$X=2$인 경우는 THH, HTH, HHT의 3가지이므로

$\mathrm{P}(X=2)=\frac{3}{8}$

$X=3$인 경우는 HHH의 1가지이므로 $\mathrm{P}(X=3)=\frac{1}{8}$

따라서 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

(2) $\mathrm{E}(X)=0\cdot\frac{1}{8}+1\cdot\frac{3}{8}+2\cdot\frac{3}{8}+3\cdot\frac{1}{8}=\frac{3}{2}$

$\mathrm{E}(X^2)=0\cdot\frac{1}{8}+1^2\cdot\frac{3}{8}+2^2\cdot\frac{3}{8}+3^2\cdot\frac{1}{8}=3$이므로

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=3-\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{3}{4}$

$\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

0370 답 500원

확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 500, 1000이고, 그 확률은 각각

$P(X=0)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

$P(X=500)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

$P(X=1000)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	500	1000	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

$\therefore E(X)=0\cdot\frac{1}{4}+500\cdot\frac{1}{2}+1000\cdot\frac{1}{4}=500$

따라서 구하는 기댓값은 500원이다.

0371 답 평균 : 8, 분산 : 18, 표준편차 : $3\sqrt{2}$

$E(6X+2)=6E(X)+2=6\cdot1+2=8$

$V(6X+2)=6^2V(X)=36\cdot\frac{1}{2}=18$

$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\frac{\sqrt{2}}{2}$이므로

$\sigma(6X+2)=6\sigma(X)=6\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=3\sqrt{2}$

0372 답 평균 : $\frac{11}{4}$, 분산 : $\frac{1}{32}$, 표준편차 : $\frac{\sqrt{2}}{8}$

$E\left(-\frac{1}{4}X+3\right)=-\frac{1}{4}E(X)+3=-\frac{1}{4}\cdot1+3=\frac{11}{4}$

$V\left(-\frac{1}{4}X+3\right)=\left(-\frac{1}{4}\right)^2V(X)=\frac{1}{16}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{32}$

$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\frac{\sqrt{2}}{2}$이므로

$\sigma\left(-\frac{1}{4}X+3\right)=\left|-\frac{1}{4}\right|\sigma(X)=\frac{1}{4}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{8}$

0373 답 (1) 3 (2) $\frac{7}{50}$ (3) $2\sqrt{14}$

$E(X)=0\cdot\frac{1}{6}+1\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\frac{3}{10}+3\cdot\frac{1}{30}=\frac{6}{5}$

$E(X^2)=0\cdot\frac{1}{6}+1^2\cdot\frac{1}{2}+2^2\cdot\frac{3}{10}+3^2\cdot\frac{1}{30}=2$이므로

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=2-\left(\frac{6}{5}\right)^2=\frac{14}{25}$

$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\frac{\sqrt{14}}{5}$

(1) $E(5X-3)=5E(X)-3=5\cdot\frac{6}{5}-3=3$

(2) $V\left(\frac{X+1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^2V(X)=\frac{1}{4}\cdot\frac{14}{25}=\frac{7}{50}$

(3) $\sigma(-10X+2)=|-10|\sigma(X)=10\cdot\frac{\sqrt{14}}{5}=2\sqrt{14}$

0374 답 $B\left(10,\ \frac{1}{3}\right)$

3의 배수의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{3}$이므로 3의 배수의 눈이 나오는 주사위의 개수 X는 이항분포 $B\left(10,\ \frac{1}{3}\right)$을 따른다.

0375 답 이항분포를 따르지 않는다.

2개를 꺼낼 때, 처음 1개를 꺼내는 시행과 다음에 1개를 꺼내는 시행은 서로 독립이 아니므로 이항분포를 따르지 않는다.

0376 답 $B\left(20,\ \frac{4}{5}\right)$

자유투를 성공할 확률이 $\frac{4}{5}$이므로 자유투를 성공하는 횟수 X는 이항분포 $B\left(20,\ \frac{4}{5}\right)$를 따른다.

0377 답 (1) 풀이 참조 (2) $\frac{15}{64}$

(1) $P(X=x)=\begin{cases} {}_6C_0\left(\frac{1}{2}\right)^6 & (x=0) \\ {}_6C_x\left(\frac{1}{2}\right)^6 & (x=1,\ 2,\ \cdots,\ 5) \\ {}_6C_6\left(\frac{1}{2}\right)^6 & (x=6) \end{cases}$

(2) $P(X=2)={}_6C_2\left(\frac{1}{2}\right)^6=\frac{15}{64}$

0378 답 (1) $B\left(5,\ \frac{3}{4}\right)$ (2) 풀이 참조 (3) $\frac{135}{512}$

(1) 확률변수 X는 이항분포 $B\left(5,\ \frac{3}{4}\right)$을 따른다.

(2) $P(X=x)=\begin{cases} {}_5C_0\left(\frac{1}{4}\right)^5 & (x=0) \\ {}_5C_x\left(\frac{3}{4}\right)^x\left(\frac{1}{4}\right)^{5-x} & (x=1,\ 2,\ 3,\ 4) \\ {}_5C_5\left(\frac{3}{4}\right)^5 & (x=5) \end{cases}$

(3) $P(X=3)={}_5C_3\left(\frac{3}{4}\right)^3\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{135}{512}$

0379 답 평균 : 3, 분산 : 2.1, 표준편차 : $\sqrt{2.1}$

$E(X)=10\times0.3=3$

$V(X)=10\times0.3\times0.7=2.1$

$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{2.1}$

0380 답 평균 : 6, 분산 : 5, 표준편차 : $\sqrt{5}$

$E(X)=36\cdot\frac{1}{6}=6,\ V(X)=36\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}=5$

$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{5}$

0381 답 (1) 10 (2) 8 (3) $2\sqrt{2}$

확률변수 X는 이항분포 $B\left(50,\ \frac{1}{5}\right)$을 따르므로

(1) $E(X)=50\cdot\frac{1}{5}=10$

(2) $V(X)=50\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5}=8$

(3) $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

STEP 2 | 유형 Drill

유형 01 확률질량함수의 성질 ; $p_1+p_2+\cdots+p_n=1$ 본책 68쪽

확률변수 X의 확률질량함수 $\mathrm{P}(X=x_i)=p_i(i=1, 2, \cdots, n)$에 대하여 $p_1+p_2+\cdots+p_n=1$

0382 답 $\frac{2}{25}$

확률의 총합은 1이므로

$$\mathrm{P}(X=-2)+\mathrm{P}(X=-1)+\mathrm{P}(X=0)+\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)=1$$

$$\left(k+\frac{2}{10}\right)+\left(k+\frac{1}{10}\right)+k+\left(k+\frac{1}{10}\right)+\left(k+\frac{2}{10}\right)=1$$

$$5k+\frac{3}{5}=1,\ 5k=\frac{2}{5} \qquad \therefore k=\frac{2}{25}$$

0383 답 ④

확률의 총합은 1이므로

$$\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)+\cdots+\mathrm{P}(X=10)=1$$

$$\frac{k}{1\cdot2}+\frac{k}{2\cdot3}+\cdots+\frac{k}{10\cdot11}=1$$

$$k\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{11}\right)\right\}=1$$

$$k\left(1-\frac{1}{11}\right)=1,\ \frac{10}{11}k=1 \qquad \therefore k=\frac{11}{10}$$

$$\therefore \mathrm{P}(X=1)=\frac{11}{10}\cdot\frac{1}{1\cdot2}=\frac{11}{20}$$

0384 답 $\frac{1}{4}$

$$\mathrm{P}(X=x)=\frac{k}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$$
$$=\frac{k(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})}$$
$$=k(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$$

확률의 총합은 1이므로

$$\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)+\cdots+\mathrm{P}(X=24)=1$$

$$k\{(\sqrt{2}-\sqrt{1})+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\cdots+(\sqrt{25}-\sqrt{24})\}=1$$

$$k(-1+\sqrt{25})=1,\ 4k=1 \qquad \therefore k=\frac{1}{4}$$

$$\therefore \mathrm{P}(X=16)+\mathrm{P}(X=17)+\cdots+\mathrm{P}(X=24)$$
$$=\frac{1}{4}\{(\sqrt{17}-\sqrt{16})+(\sqrt{18}-\sqrt{17})+\cdots+(\sqrt{25}-\sqrt{24})\}$$
$$=\frac{1}{4}(-\sqrt{16}+\sqrt{25})=\frac{1}{4}$$

유형 02 확률질량함수의 성질 ; $\mathrm{P}(X=a$ 또는 $X=b)$ 본책 68쪽

확률변수 X의 확률질량함수 $\mathrm{P}(X=x)$에서

(1) $\mathrm{P}(X=a$ 또는 $X=b)=\mathrm{P}(X=a)+\mathrm{P}(X=b)$

(2) $\mathrm{P}(x_i\le X\le x_j)=\mathrm{P}(X=x_i)+\mathrm{P}(X=x_{i+1})+\cdots+\mathrm{P}(X=x_j)$

(단, $j=1,\ 2,\ \cdots,\ n,\ i\le j$)

0385 답 $\frac{3}{5}$

확률의 총합은 1이므로

$$10k^2+20k^2+\frac{2}{5}+3k=1$$

$$30k^2+3k-\frac{3}{5}=0,\ 50k^2+5k-1=0$$

$$(5k+1)(10k-1)=0 \qquad \therefore k=-\frac{1}{5} \text{ 또는 } k=\frac{1}{10}$$

이때, $0\le\mathrm{P}(X=x)\le1$이므로 $k=\frac{1}{10}$

한편, $X^2-4X+3=0$에서

$(X-1)(X-3)=0 \qquad \therefore X=1$ 또는 $X=3$

$$\therefore \mathrm{P}(X^2-4X+3=0)=\mathrm{P}(X=1 \text{ 또는 } X=3)$$
$$=\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=3)$$
$$=20k^2+\frac{2}{5}=20\cdot\frac{1}{100}+\frac{2}{5}$$
$$=\frac{3}{5}$$

0386 답 $\frac{1}{2}$

확률의 총합은 1이므로

$$\frac{3}{8}+2k+\frac{1}{4}+k=1,\ 3k=\frac{3}{8} \qquad \therefore k=\frac{1}{8}$$

한편, $|X-1|<3$에서 $-3<X-1<3 \qquad \therefore -2<X<4$

$$\therefore \mathrm{P}(|X-1|<3)=\mathrm{P}(-2<X<4)$$
$$=\mathrm{P}(X=0)+\mathrm{P}(X=2)$$
$$=2k+\frac{1}{4}=2\cdot\frac{1}{8}+\frac{1}{4}$$
$$=\frac{1}{2}$$

0387 답 $\frac{1}{14}$

확률의 총합은 1이므로

$$\frac{1}{14}+a+\frac{3}{14}+\frac{1}{14}+b=1$$

$$\therefore a+b=\frac{9}{14} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$A\cap B$는 $-1\le X\le0$인 사건이므로

$$\mathrm{P}(A|B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{\mathrm{P}(-1\le X\le0)}{\mathrm{P}(X\le0)}$$
$$=\frac{\mathrm{P}(X=-1)+\mathrm{P}(X=0)}{\mathrm{P}(X=-2)+\mathrm{P}(X=-1)+\mathrm{P}(X=0)}$$
$$=\frac{a+\frac{3}{14}}{\frac{1}{14}+a+\frac{3}{14}}=\frac{14a+3}{14a+4}$$

따라서 $\frac{5}{6}=\frac{14a+3}{14a+4}$이므로

$$84a+18=70a+20,\ 14a=2 \qquad \therefore a=\frac{1}{7}$$

$a=\frac{1}{7}$을 ㉠에 대입하면 $b=\frac{1}{2}$

$$\therefore ab=\frac{1}{14}$$

유형 03 확률분포와 확률 본책 69쪽

확률변수 X가 가질 수 있는 값을 모두 찾고, 그 값에 대한 각각의 확률을 구한다.

0388 답 $\frac{3}{7}$

확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2이고, 그 확률은 각각

$P(X=0)=\frac{{}_4C_0\cdot{}_3C_2}{{}_7C_2}=\frac{1}{7}$, $P(X=1)=\frac{{}_4C_1\cdot{}_3C_1}{{}_7C_2}=\frac{4}{7}$

$P(X=2)=\frac{{}_4C_2\cdot{}_3C_0}{{}_7C_2}=\frac{2}{7}$

이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{2}{7}$	1

한편, $X^2\ge 2X$에서 $X^2-2X\ge 0$

$X(X-2)\ge 0$ $\quad\therefore X\le 0$ 또는 $X\ge 2$

$\therefore P(X^2\ge 2X)=P(X\le 0$ 또는 $X\ge 2)$

$=P(X=0)+P(X=2)$

$=\frac{1}{7}+\frac{2}{7}=\frac{3}{7}$

0389 답 $\frac{2}{5}$

6장의 카드 중에서 두 장을 뽑는 방법의 수는 ${}_6C_2=15$

카드에 적힌 두 수를 a, $b(a<b)$라 하면 순서쌍 $(a,\ b)$에 대하여 두 수 중 큰 수가

1인 경우는 $(0,\ 1)$의 1가지

2인 경우는 $(0,\ 2)$, $(1,\ 2)$의 2가지

3인 경우는 $(0,\ 3)$, $(1,\ 3)$, $(2,\ 3)$의 3가지

$\therefore P(X=1)=\frac{1}{15}$, $P(X=2)=\frac{2}{15}$, $P(X=3)=\frac{1}{5}$

따라서 구하는 확률은

$P(X\le 3)=P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)$

$=\frac{1}{15}+\frac{2}{15}+\frac{1}{5}=\frac{2}{5}$

참고 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	5	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{3}$	1

0390 답 $\frac{1}{3}$

확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3이고, 그 확률은 각각

$P(X=0)=\frac{{}_4C_0\cdot{}_6C_3}{{}_{10}C_3}=\frac{1}{6}$, $P(X=1)=\frac{{}_4C_1\cdot{}_6C_2}{{}_{10}C_3}=\frac{1}{2}$

$P(X=2)=\frac{{}_4C_2\cdot{}_6C_1}{{}_{10}C_3}=\frac{3}{10}$, $P(X=3)=\frac{{}_4C_3\cdot{}_6C_0}{{}_{10}C_3}=\frac{1}{30}$

이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{30}$	1

한편, $X^2-5X+6\le 0$에서 $(X-2)(X-3)\le 0$

$\therefore 2\le X\le 3$

$\therefore P(X^2-5X+6\le 0)=P(2\le X\le 3)$

$=P(X=2)+P(X=3)$

$=\frac{3}{10}+\frac{1}{30}=\frac{1}{3}$

0391 답 3

확률변수 X가 가질 수 있는 값은 1, 2, 3, 4이고, 그 확률은 각각

$P(X=1)=\frac{{}_7C_1\cdot{}_3C_3}{{}_{10}C_4}=\frac{1}{30}$, $P(X=2)=\frac{{}_7C_2\cdot{}_3C_2}{{}_{10}C_4}=\frac{3}{10}$

$P(X=3)=\frac{{}_7C_3\cdot{}_3C_1}{{}_{10}C_4}=\frac{1}{2}$, $P(X=4)=\frac{{}_7C_4\cdot{}_3C_0}{{}_{10}C_4}=\frac{1}{6}$

이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{30}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	1

위의 표에서 $P(X=3)+P(X=4)=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$

이므로 $P(X\ge 3)=\frac{2}{3}$ $\quad\therefore k=3$

유형 04 이산확률변수의 평균, 분산, 표준편차 ; 확률분포가 주어진 경우 본책 69쪽

확률변수 X의 확률질량함수가 $P(X=x_i)=p_i(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$일 때

(1) 평균 ⇨ $E(X)=x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_np_n$

(2) 분산 ⇨ $V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$

(3) 표준편차 ⇨ $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$

0392 답 평균 : 2, 분산 : $\frac{5}{4}$

확률의 총합은 1이므로

$\frac{1}{2}+2k^2+k+\frac{1}{8}=1$, $16k^2+8k-3=0$

$(4k+3)(4k-1)=0$ $\quad\therefore k=-\frac{3}{4}$ 또는 $k=\frac{1}{4}$

이때, $0\le P(X=x)\le 1$이므로 $k=\frac{1}{4}$

따라서 확률변수 X에 대하여

$E(X)=1\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{8}+3\cdot\frac{1}{4}+4\cdot\frac{1}{8}=2$

$E(X^2)=1^2\cdot\frac{1}{2}+2^2\cdot\frac{1}{8}+3^2\cdot\frac{1}{4}+4^2\cdot\frac{1}{8}=\frac{21}{4}$

이므로

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=\frac{21}{4}-2^2=\frac{5}{4}$

따라서 X의 평균은 2, 분산은 $\frac{5}{4}$이다.

0393 답 $\frac{\sqrt{14}}{3}$

확률의 총합은 1이므로

$k+2k+3k+4k+5k=1$

$15k=1$ $\quad\therefore k=\frac{1}{15}$

따라서 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	5	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{3}$	1

확률변수 X에 대하여

$\mathrm{E}(X)=1\cdot\frac{1}{15}+2\cdot\frac{2}{15}+3\cdot\frac{1}{5}+4\cdot\frac{4}{15}+5\cdot\frac{1}{3}=\frac{11}{3}$

$\mathrm{E}(X^2)=1^2\cdot\frac{1}{15}+2^2\cdot\frac{2}{15}+3^2\cdot\frac{1}{5}+4^2\cdot\frac{4}{15}+5^2\cdot\frac{1}{3}=15$

이므로

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=15-\left(\frac{11}{3}\right)^2=\frac{14}{9}$

$\therefore \sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=\frac{\sqrt{14}}{3}$

0394 답 $\frac{5}{24}$

확률의 총합은 1이므로

$\frac{1}{24}+\frac{1}{8}+a+\frac{1}{3}+b+\frac{1}{12}=1$

$\therefore a+b=\frac{5}{12}$ …… ㉠

확률변수 X에 대하여 $\mathrm{E}(X)=\frac{67}{24}$이므로

$0\cdot\frac{1}{24}+1\cdot\frac{1}{8}+2a+3\cdot\frac{1}{3}+4b+5\cdot\frac{1}{12}=\frac{67}{24}$

$\therefore a+2b=\frac{5}{8}$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=\frac{5}{24}$, $b=\frac{5}{24}$

$\therefore \mathrm{P}(X=4)=b=\frac{5}{24}$

0395 답 5

확률변수 X에 대하여 $\mathrm{E}(X)=5$이므로

$k\cdot\frac{1}{2}+2k\cdot\frac{1}{3}+3k\cdot\frac{1}{6}=5$

$\frac{5}{3}k=5 \qquad \therefore k=3$

$\therefore \mathrm{E}(X^2)=3^2\cdot\frac{1}{2}+6^2\cdot\frac{1}{3}+9^2\cdot\frac{1}{6}=30$

$\therefore \mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=30-5^2=5$

유형 05 이산확률변수의 평균, 분산, 표준편차 ; 확률분포가 주어지지 않은 경우 본책 70쪽

(i) 확률변수 X가 가질 수 있는 값을 모두 찾고, 그 값에 대한 각각의 확률을 구한다.
(ii) 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타낸다.
(iii) 확률변수 X의 평균, 분산, 표준편차를 구한다.

0396 답 ②

확률변수 X가 가질 수 있는 값은 1, 2, 3이고, 그 확률은 각각

$\mathrm{P}(X=1)=\frac{{}_3\mathrm{C}_1\cdot{}_2\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_3}=\frac{3}{10}$, $\mathrm{P}(X=2)=\frac{{}_3\mathrm{C}_2\cdot{}_2\mathrm{C}_1}{{}_5\mathrm{C}_3}=\frac{3}{5}$

$\mathrm{P}(X=3)=\frac{{}_3\mathrm{C}_3\cdot{}_2\mathrm{C}_0}{{}_5\mathrm{C}_3}=\frac{1}{10}$

이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{10}$	1

따라서 확률변수 X에 대하여

$\mathrm{E}(X)=1\cdot\frac{3}{10}+2\cdot\frac{3}{5}+3\cdot\frac{1}{10}=\frac{9}{5}$

$\mathrm{E}(X^2)=1^2\cdot\frac{3}{10}+2^2\cdot\frac{3}{5}+3^2\cdot\frac{1}{10}=\frac{18}{5}$

이므로

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=\frac{18}{5}-\left(\frac{9}{5}\right)^2=\frac{9}{25}$

$\therefore \sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=\frac{3}{5}$

0397 답 $\frac{10}{9}$

나오는 두 수를 a, b라 하면 순서쌍 $(a,\ b)$에 대하여 두 수의 합이

2인 경우는 $(1,\ 1)$의 1가지

3인 경우는 $(1,\ 2)$, $(2,\ 1)$의 2가지

4인 경우는 $(1,\ 3)$, $(2,\ 2)$, $(3,\ 1)$의 3가지

5인 경우는 $(2,\ 3)$, $(3,\ 2)$의 2가지

6인 경우는 $(3,\ 3)$의 1가지

이므로 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 2, 3, 4, 5, 6이고, 그 확률은 각각

$\mathrm{P}(X=2)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

$\mathrm{P}(X=3)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$

$\mathrm{P}(X=4)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}=\frac{5}{18}$

$\mathrm{P}(X=5)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$

$\mathrm{P}(X=6)=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$

따라서 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	2	3	4	5	6	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{36}$	1

확률변수 X에 대하여

$\mathrm{E}(X)=2\cdot\frac{1}{4}+3\cdot\frac{1}{3}+4\cdot\frac{5}{18}+5\cdot\frac{1}{9}+6\cdot\frac{1}{36}=\frac{10}{3}$

$\mathrm{E}(X^2)=2^2\cdot\frac{1}{4}+3^2\cdot\frac{1}{3}+4^2\cdot\frac{5}{18}+5^2\cdot\frac{1}{9}+6^2\cdot\frac{1}{36}=\frac{110}{9}$

$\therefore \mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=\frac{110}{9}-\left(\frac{10}{3}\right)^2=\frac{10}{9}$

0398 답 $\frac{11}{3}$

10개의 자연수 중에서 두 개를 뽑는 경우의 수는 ${}_{10}\mathrm{C}_2=45$

뽑은 두 수를 a, b $(a<b)$라 하면 순서쌍 $(a,\ b)$에 대하여 두 수의 차가

1인 경우는 $(1,\ 2)$, $(2,\ 3)$, $(3,\ 4)$, $\cdots$, $(9,\ 10)$의 9가지

2인 경우는 $(1,\ 3)$, $(2,\ 4)$, $(3,\ 5)$, $\cdots$, $(8,\ 10)$의 8가지

⋮
9인 경우는 $(1,\ 10)$의 1가지
이므로 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 $1,\ 2,\ \cdots,\ 9$이고, 그 확률은 각각

$$\mathrm{P}(X=1)=\frac{1}{5},\ \mathrm{P}(X=2)=\frac{8}{45},\ \mathrm{P}(X=3)=\frac{7}{45}$$

$$\mathrm{P}(X=4)=\frac{2}{15},\ \mathrm{P}(X=5)=\frac{1}{9},\ \mathrm{P}(X=6)=\frac{4}{45}$$

$$\mathrm{P}(X=7)=\frac{1}{15},\ \mathrm{P}(X=8)=\frac{2}{45},\ \mathrm{P}(X=9)=\frac{1}{45}$$

따라서 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{8}{45}$	$\frac{7}{45}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{45}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{45}$	$\frac{1}{45}$	1

$$\therefore \mathrm{E}(X)=1\cdot\frac{1}{5}+2\cdot\frac{8}{45}+3\cdot\frac{7}{45}+4\cdot\frac{2}{15}+5\cdot\frac{1}{9}$$
$$+6\cdot\frac{4}{45}+7\cdot\frac{1}{15}+8\cdot\frac{2}{45}+9\cdot\frac{1}{45}$$
$$=\frac{11}{3}$$

다른 풀이 수학Ⅰ 연계

$\mathrm{P}(X=x)=\frac{10-x}{45}\ (x=1,\ 2,\ \cdots,\ 9)$이므로

$$\mathrm{E}(X)=\sum_{x=1}^{9}x\cdot\frac{10-x}{45}=\frac{1}{45}\sum_{x=1}^{9}(10x-x^2)$$
$$=\frac{1}{45}\left(10\cdot\frac{9\cdot 10}{2}-\frac{9\cdot 10\cdot 19}{6}\right)$$
$$=\frac{11}{3}$$

Lecture

합의 기호 $\sum$와 자연수의 거듭제곱의 합

(1) 합의 기호 $\sum$

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$을 합의 기호 $\sum$를 사용하여 $\sum_{k=1}^{n}a_k$로 나타낸다.

⇨ $\sum_{k=1}^{n}a_k=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$

(2) 자연수의 거듭제곱의 합

① $\sum_{x=1}^{n}k=1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

② $\sum_{x=1}^{n}k^2=1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

0399 답 1

1, 2, 3의 숫자가 적힌 깃발 아래 세 장의 카드 $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$을 놓는 경우는 오른쪽 표와 같으므로 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 3이고, 그 확률은 각각

경우 \ 깃발	1	2	3
경우1	$\boxed{1}$	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$
경우2	$\boxed{1}$	$\boxed{3}$	$\boxed{2}$
경우3	$\boxed{2}$	$\boxed{1}$	$\boxed{3}$
경우4	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$	$\boxed{1}$
경우5	$\boxed{3}$	$\boxed{1}$	$\boxed{2}$
경우6	$\boxed{3}$	$\boxed{2}$	$\boxed{1}$

$$\mathrm{P}(X=0)=\frac{1}{3}$$

$$\mathrm{P}(X=1)=\frac{1}{2}$$

$$\mathrm{P}(X=3)=\frac{1}{6}$$

따라서 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	1

확률변수 X에 대하여

$$\mathrm{E}(X)=0\cdot\frac{1}{3}+1\cdot\frac{1}{2}+3\cdot\frac{1}{6}=1$$

$$\mathrm{E}(X^2)=0\cdot\frac{1}{3}+1^2\cdot\frac{1}{2}+3^2\cdot\frac{1}{6}=2$$

$$\therefore \mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=2-1^2=1$$

유형 06 기댓값

본책 70쪽

확률변수 X의 확률질량함수가 $\mathrm{P}(X=x_i)=p_i\,(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$일 때,
X의 기댓값은 ⇨ $\mathrm{E}(X)=x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_np_n$

0400 답 ④

동전의 앞면을 H, 뒷면을 T라 하고, 100원짜리 동전 2개와 50원짜리 동전 1개를 던져서 나오는 결과를 표로 나타내면 다음과 같다.

100원	100원	50원	받는 금액(원)
H	H	H	250
H	H	T	200
H	T	H	150
H	T	T	100
T	H	H	150
T	H	T	100
T	T	H	50
T	T	T	0

한 번의 게임으로 받을 수 있는 금액을 확률변수 X라 하면 X가 가질 수 있는 값은 0, 50, 100, 150, 200, 250이고, 그 확률은 각각

$$\mathrm{P}(X=0)=\frac{1}{8},\ \mathrm{P}(X=50)=\frac{1}{8},\ \mathrm{P}(X=100)=\frac{1}{4}$$

$$\mathrm{P}(X=150)=\frac{1}{4},\ \mathrm{P}(X=200)=\frac{1}{8},\ \mathrm{P}(X=250)=\frac{1}{8}$$

이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	50	100	150	200	250	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

$$\therefore \mathrm{E}(X)=0\cdot\frac{1}{8}+50\cdot\frac{1}{8}+100\cdot\frac{1}{4}+150\cdot\frac{1}{4}+200\cdot\frac{1}{8}+250\cdot\frac{1}{8}$$
$$=125$$

따라서 구하는 기댓값은 125원이다.

0401 답 19250원

꺼낸 지폐의 금액을 확률변수 X라 할 때, X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1000	5000	10000	50000	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{7}{20}$	$\frac{3}{10}$	1

$\therefore \mathrm{E}(X)=1000\cdot\frac{1}{4}+5000\cdot\frac{1}{10}+10000\cdot\frac{7}{20}+50000\cdot\frac{3}{10}$
$=19250$

따라서 구하는 기댓값은 19250원이다.

0402 답 15

상자에 들어 있는 만두의 개수를 확률변수 X라 할 때, X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	10	k	20	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{2}$	1

확률변수 X의 기댓값이 16이므로

$10\cdot\frac{3}{10}+k\cdot\frac{1}{5}+20\cdot\frac{1}{2}=16$

$\frac{k}{5}=3 \qquad \therefore k=15$

0403 답 ③

꺼낸 공에 적힌 숫자를 확률변수 X라 할 때, X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	5	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{3}$	1

$\therefore \mathrm{E}(X)=1\cdot\frac{1}{15}+2\cdot\frac{2}{15}+3\cdot\frac{1}{5}+4\cdot\frac{4}{15}+5\cdot\frac{1}{3}$
$=\frac{11}{3}$

따라서 구하는 기댓값은 $\frac{11}{3}$이다.

0404 답 $\frac{13}{2}$회

0, 1, 2, 3 중에서 서로 다른 두 숫자로 비밀번호를 만들 수 있는 경우의 수는 $4\cdot3=12$

접속하기까지 시도한 횟수를 확률변수 X라 하면 X가 가질 수 있는 값은 1, 2, 3, …, 12이고, 그 확률은 각각

$\mathrm{P}(X=1)=\frac{1}{12}$

$\mathrm{P}(X=2)=\frac{11}{12}\cdot\frac{1}{11}=\frac{1}{12}$

$\mathrm{P}(X=3)=\frac{11}{12}\cdot\frac{10}{11}\cdot\frac{1}{10}=\frac{1}{12}$

⋮

$\mathrm{P}(X=12)=\frac{11}{12}\cdot\frac{10}{11}\cdot\frac{9}{10}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{2}\cdot1=\frac{1}{12}$

이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	…	12	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	…	$\frac{1}{12}$	1

$\therefore \mathrm{E}(X)=1\cdot\frac{1}{12}+2\cdot\frac{1}{12}+3\cdot\frac{1}{12}+\cdots+12\cdot\frac{1}{12}$
$=\frac{13}{2}$

따라서 구하는 기댓값은 $\frac{13}{2}$회이다.

유형 07 이산확률변수 $aX+b$의 평균, 분산, 표준편차 ; 평균, 분산, 확률분포가 주어진 경우

본책 71쪽

확률변수 X와 두 상수 $a, b(a\neq0)$에 대하여
(1) $\mathrm{E}(aX+b)=a\mathrm{E}(X)+b$
(2) $\mathrm{V}(aX+b)=a^2\mathrm{V}(X)$
(3) $\sigma(aX+b)=|a|\sigma(X)$

0405 답 125

확률의 총합은 1이므로

$2k+3k+3k+2k=1,\ 10k=1 \qquad \therefore k=\frac{1}{10}$

따라서 확률변수 X에 대하여

$\mathrm{E}(X)=0\cdot\frac{1}{5}+1\cdot\frac{3}{10}+2\cdot\frac{3}{10}+3\cdot\frac{1}{5}=\frac{3}{2}$

$\therefore \mathrm{E}(10X+5)=10\mathrm{E}(X)+5=20$

또,

$\mathrm{E}(X^2)=0\cdot\frac{1}{5}+1^2\cdot\frac{3}{10}+2^2\cdot\frac{3}{10}+3^2\cdot\frac{1}{5}=\frac{33}{10}$

이므로

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=\frac{33}{10}-\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{21}{20}$

$\therefore \mathrm{V}(10X+5)=10^2\mathrm{V}(X)=105$

$\therefore \mathrm{E}(10X+5)+\mathrm{V}(10X+5)=125$

0406 답 평균 : 50점, 표준편차 : 10점

$\mathrm{E}(X)=m,\ \sigma(X)=\sigma$이므로

$\mathrm{E}(T)=\mathrm{E}\left(10\left(\frac{X-m}{\sigma}\right)+50\right)=\frac{10}{\sigma}\mathrm{E}(X)-\frac{10m}{\sigma}+50$
$=\frac{10m}{\sigma}-\frac{10m}{\sigma}+50=50$

$\sigma(T)=\sigma\left(10\left(\frac{X-m}{\sigma}\right)+50\right)=\left|\frac{10}{\sigma}\right|\sigma(X)$
$=\frac{10}{\sigma}\cdot\sigma=10$

따라서 표준 점수 T의 평균은 50점, 표준편차는 10점이다.

0407 답 $\frac{\sqrt{11}}{2}$

확률의 총합은 1이므로

$k+\frac{k}{2}+k^2=1,\ 2k^2+3k-2=0$

$(k+2)(2k-1)=0 \qquad \therefore k=-2$ 또는 $k=\frac{1}{2}$

이때, $0\le\mathrm{P}(X=x)\le1$이므로 $k=\frac{1}{2}$

따라서 확률변수 X에 대하여

$\mathrm{E}(X)=-1\cdot\frac{1}{2}+0\cdot\frac{1}{4}+1\cdot\frac{1}{4}=-\frac{1}{4}$

$\mathrm{E}(X^2)=(-1)^2\cdot\frac{1}{2}+0\cdot\frac{1}{4}+1^2\cdot\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

$\therefore \mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=\frac{3}{4}-\left(-\frac{1}{4}\right)^2=\frac{11}{16}$

따라서 $\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=\frac{\sqrt{11}}{4}$이므로

$\sigma\left(\frac{1}{k}X\right)=\sigma(2X)=2\sigma(X)=\frac{\sqrt{11}}{2}$

0408 답 6

$E(X)=k$, $E(X^2)=2k+3$이므로

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=2k+3-k^2$

$\therefore V(3X+1)=9V(X)=9(2k+3-k^2)$

$=-9(k-1)^2+36$

따라서 $V(3X+1)$은 $k=1$일 때 최댓값 36을 가지므로

$\sigma(3X+1)$의 최댓값은 $\sqrt{36}=6$

유형 08 이산확률변수 $aX+b$의 평균, 분산, 표준편차 ; 확률분포가 주어지지 않은 경우 본책 72쪽

(i) 확률변수 X가 가질 수 있는 값을 모두 찾고, 그 값에 대한 각각의 확률을 구한다.
(ii) 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타낸다.
(iii) 확률변수 X의 평균, 분산, 표준편차를 구한다.
(iv) $E(aX+b)=aE(X)+b$, $V(aX+b)=a^2V(X)$, $\sigma(aX+b)=|a|\sigma(X)$ (a, b는 상수, $a\neq0$)임을 이용하여 확률변수 $aX+b$의 평균, 분산, 표준편차를 구한다.

0409 답 ③

확률변수 X가 가질 수 있는 값은 1, 2, 3이고, 그 확률은 각각

$P(X=1)=\frac{{}_4C_2}{{}_5C_3}=\frac{3}{5}$, $P(X=2)=\frac{{}_3C_2}{{}_5C_3}=\frac{3}{10}$

$P(X=3)=\frac{{}_2C_2}{{}_5C_3}=\frac{1}{10}$

이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$	1

따라서 확률변수 X에 대하여

$E(X)=1\cdot\frac{3}{5}+2\cdot\frac{3}{10}+3\cdot\frac{1}{10}=\frac{3}{2}$

$E(X^2)=1^2\cdot\frac{3}{5}+2^2\cdot\frac{3}{10}+3^2\cdot\frac{1}{10}=\frac{27}{10}$

이므로

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=\frac{27}{10}-\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{20}$

$\therefore V(Y)=V(10X-3)=10^2V(X)=45$

0410 답 25

두 수의 합은 오른쪽 표와 같으므로 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 2, 3, $\cdots$, 8이고, 그 확률은 각각

	1	2	3	4
1	2	3	4	5
2	3	4	5	6
3	4	5	6	7
4	5	6	7	8

$P(X=2)=\frac{1}{16}$, $P(X=3)=\frac{1}{8}$

$P(X=4)=\frac{3}{16}$, $P(X=5)=\frac{1}{4}$

$P(X=6)=\frac{3}{16}$, $P(X=7)=\frac{1}{8}$, $P(X=8)=\frac{1}{16}$

따라서 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	2	3	4	5	6	7	8	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	1

확률변수 X에 대하여

$E(X)=2\cdot\frac{1}{16}+3\cdot\frac{1}{8}+4\cdot\frac{3}{16}+5\cdot\frac{1}{4}+6\cdot\frac{3}{16}+7\cdot\frac{1}{8}+8\cdot\frac{1}{16}$

$=5$

$\therefore E(4X+5)=4E(X)+5=25$

0411 답 ④

확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2이고, 그 확률은 각각

$P(X=0)=\frac{3!\cdot2}{4!}=\frac{1}{2}$, $P(X=1)=\frac{{}_2C_1\cdot2!\cdot2}{4!}=\frac{1}{3}$

$P(X=2)=\frac{2\cdot2}{4!}=\frac{1}{6}$

이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	1

따라서 확률변수 X에 대하여

$E(X)=0\cdot\frac{1}{2}+1\cdot\frac{1}{3}+2\cdot\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$

$E(X^2)=0\cdot\frac{1}{2}+1^2\cdot\frac{1}{3}+2^2\cdot\frac{1}{6}=1$

$\therefore V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=1-\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{5}{9}$

따라서 $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\frac{\sqrt{5}}{3}$이므로

$\sigma(6X-1)=6\sigma(X)=2\sqrt{5}$

유형 09 이항분포에서 확률 구하기 본책 72쪽

확률변수 X가 이항분포 $B(n,\ p)$를 따를 때 X의 확률질량함수는

$\Rightarrow P(X=x)=\begin{cases} {}_nC_0(1-p)^n & (x=0) \\ {}_nC_x p^x(1-p)^{n-x} & (x=1, 2, \cdots, n-1) \\ {}_nC_n p^n & (x=n) \end{cases}$

0412 답 ②

주사위를 한 번 던질 때 1의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{6}$이므로 확률변수 X는 이항분포 $B\left(12,\ \frac{1}{6}\right)$을 따른다.

따라서 X의 확률질량함수는

$$P(X=x)=\begin{cases} {}_{12}C_0\left(\frac{5}{6}\right)^{12} & (x=0) \\ {}_{12}C_x\left(\frac{1}{6}\right)^x\left(\frac{5}{6}\right)^{12-x} & (x=1,\ 2,\ \cdots,\ 11) \\ {}_{12}C_{12}\left(\frac{1}{6}\right)^{12} & (x=12) \end{cases}$$

$\therefore P(X\le11)=1-P(X=12)=1-{}_{12}C_{12}\left(\frac{1}{6}\right)^{12}$

$=1-\left(\frac{1}{6}\right)^{12}$

0413 답 $\frac{8}{27}$

주머니에서 한 개의 공을 꺼낼 때 흰 공이 나올 확률은 $\frac{2}{3}$이므로 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(4,\ \frac{2}{3}\right)$를 따른다.

따라서 X의 확률질량함수는

$$\mathrm{P}(X=x)=\begin{cases} {}_4\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{3}\right)^4 & (x=0) \\ {}_4\mathrm{C}_x\left(\frac{2}{3}\right)^x\left(\frac{1}{3}\right)^{4-x} & (x=1,2,3) \\ {}_4\mathrm{C}_4\left(\frac{2}{3}\right)^4 & (x=4)\end{cases}$$

$\therefore \mathrm{P}(X=2)={}_4\mathrm{C}_2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{8}{27}$

0414 답 $\frac{3}{7}$

갑과 을이 가위바위보를 한 번 할 때 비길 확률은 $\frac{1}{3}$이므로 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(9,\ \frac{1}{3}\right)$을 따른다.

따라서 X의 확률질량함수는

$$\mathrm{P}(X=x)=\begin{cases} {}_9\mathrm{C}_0\left(\frac{2}{3}\right)^9 & (x=0) \\ {}_9\mathrm{C}_x\left(\frac{1}{3}\right)^x\left(\frac{2}{3}\right)^{9-x} & (x=1,2,\cdots,8) \\ {}_9\mathrm{C}_9\left(\frac{1}{3}\right)^9 & (x=9)\end{cases}$$

$$\therefore \frac{\mathrm{P}(X=1)}{\mathrm{P}(X=3)}=\frac{{}_9\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^8}{{}_9\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^6}=\frac{3}{7}$$

0415 답 0.249

실제로 버스에 탑승하는 사람의 수를 확률변수 X라 하면 예약한 한 사람이 버스에 탑승할 확률은 0.9이므로 X는 이항분포 $\mathrm{B}(27,\ 0.9)$를 따른다.

따라서 X의 확률질량함수는

$$\mathrm{P}(X=x)=\begin{cases} {}_{27}\mathrm{C}_0\ 0.1^{27} & (x=0) \\ {}_{27}\mathrm{C}_x\ 0.9^x\times 0.1^{27-x} & (x=1,2,\cdots,26) \\ {}_{27}\mathrm{C}_{27}\ 0.9^{27} & (x=27)\end{cases}$$

한편, 좌석이 부족한 경우는 $X\geq 26$이므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\geq 26)&=\mathrm{P}(X=26)+\mathrm{P}(X=27)\\&={}_{27}\mathrm{C}_{26}\ 0.9^{26}\times 0.1+{}_{27}\mathrm{C}_{27}\ 0.9^{27}\\&=27\times 0.07\times 0.1+0.06\\&=0.249\end{aligned}$$

유형 10 이항분포의 평균, 분산, 표준편차 ; 이항분포가 주어진 경우 본책 73쪽

확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(n,\ p)$를 따를 때
(1) $\mathrm{E}(X)=np$
(2) $\mathrm{V}(X)=np(1-p)$
(3) $\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=\sqrt{np(1-p)}$

0416 답 20

$\mathrm{E}(X)=8,\ \mathrm{V}(X)=4$이므로

$\mathrm{E}(X)=np=8$ ······ ㉠

$\mathrm{V}(X)=np(1-p)=4$ ······ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $8(1-p)=4$

$1-p=\frac{1}{2}\qquad \therefore p=\frac{1}{2}$

$p=\frac{1}{2}$을 ㉠에 대입하면 $\frac{1}{2}n=8\qquad \therefore n=16$

$\therefore n+8p=20$

0417 답 36

$\mathrm{P}(X=x)={}_{100}\mathrm{C}_x\frac{4^{100-x}}{5^{100}}\ (x=1,2,\cdots,99)$에서

$\mathrm{P}(X=x)={}_{100}\mathrm{C}_x\left(\frac{1}{5}\right)^x\left(\frac{4}{5}\right)^{100-x}\ (x=1,2,\cdots,99)$

따라서 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(100,\ \frac{1}{5}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=100\cdot\frac{1}{5}=20$

$\mathrm{V}(X)=100\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5}=16$

$\therefore \mathrm{E}(X)+\mathrm{V}(X)=36$

0418 답 $\frac{1}{3}$

$\mathrm{E}(X)=18p,\ \mathrm{V}(X)=18p(1-p)$이고

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$에서

$18p(1-p)=40-(18p)^2$

$153p^2+9p-20=0,\ (3p-1)(51p+20)=0$

$\therefore p=\frac{1}{3}\ (\because 0\leq p\leq 1)$

0419 답 ②

$\mathrm{V}(X)=64p(1-p)=-64\left(p-\frac{1}{2}\right)^2+16$

이므로 $\mathrm{V}(X)$는 $p=\frac{1}{2}$일 때 최댓값 16을 가진다.

이때, $\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}$이므로

$t=\frac{1}{2},\ M=\sqrt{16}=4$

$\therefore tM=2$

0420 답 235

X의 확률질량함수는

$$\mathrm{P}(X=x)=\begin{cases} {}_{45}\mathrm{C}_0(1-p)^{45} & (x=0) \\ {}_{45}\mathrm{C}_x\,p^x(1-p)^{45-x} & (x=1,2,\cdots,44) \\ {}_{45}\mathrm{C}_{45}\,p^{45} & (x=45)\end{cases}$$

이므로

$\mathrm{P}(X=22)=2\mathrm{P}(X=23)$에서

${}_{45}\mathrm{C}_{22}\,p^{22}(1-p)^{23}=2\cdot{}_{45}\mathrm{C}_{23}\,p^{23}(1-p)^{22}$

$1-p=2p\qquad \therefore p=\frac{1}{3}$

따라서 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(45,\ \frac{1}{3}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=45\cdot\frac{1}{3}=15$, $\mathrm{V}(X)=45\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=10$

$\therefore \mathrm{E}(X^2)=\mathrm{V}(X)+\{\mathrm{E}(X)\}^2=10+15^2=235$

0421 답 22

X의 확률질량함수는

$$\mathrm{P}(X=x)=\begin{cases} {}_3\mathrm{C}_0(1-p)^3 & (x=0) \\ {}_3\mathrm{C}_x p^x(1-p)^{3-x} & (x=1, 2) \\ {}_3\mathrm{C}_3 p^3 & (x=3) \end{cases}$$

이고, Y의 확률질량함수는

$$\mathrm{P}(Y=x)=\begin{cases} {}_4\mathrm{C}_0(1-2p)^4 & (x=0) \\ {}_4\mathrm{C}_x(2p)^x(1-2p)^{4-x} & (x=1, 2, 3) \\ {}_4\mathrm{C}_4(2p)^4 & (x=4) \end{cases}$$

이므로

$10\mathrm{P}(X=3)=\mathrm{P}(Y\geq 3)$에서

$10\cdot{}_3\mathrm{C}_3 p^3={}_4\mathrm{C}_3(2p)^3(1-2p)+{}_4\mathrm{C}_4(2p)^4$

$24p^4-11p^3=0$, $24p^3\left(p-\frac{11}{24}\right)=0$

$\therefore p=\frac{11}{24}$ ($\because 0<p\leq 1$)

따라서 $\mathrm{E}(X)=3\cdot\frac{11}{24}=\frac{11}{8}$, $\mathrm{E}(Y)=4\cdot\frac{11}{12}=\frac{11}{3}$이므로

$8\mathrm{E}(X)+3\mathrm{E}(Y)=8\cdot\frac{11}{8}+3\cdot\frac{11}{3}=22$

유형 11 **이항분포의 평균, 분산, 표준편차 ; 이항분포가 주어지지 않은 경우** 본책 73쪽

확률변수 X의 확률이 독립시행의 확률로 나타내어지면 X는 이항분포를 따른다. 이때, 시행 횟수 n과 한 번의 시행에서 어떤 사건이 일어날 확률 p를 구하여 $\mathrm{B}(n,\ p)$로 나타낸다.

0422 답 9

한 조에서 임의로 2명을 선택할 때, 여학생들만 선택될 확률은

$\frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{3}{10}$

따라서 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(30,\ \frac{3}{10}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=30\cdot\frac{3}{10}=9$

0423 답 152

한 개의 주사위를 던져 3의 배수의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{3}$이므로 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(36,\ \frac{1}{3}\right)$을 따른다.

따라서 $\mathrm{E}(X)=36\cdot\frac{1}{3}=12$, $\mathrm{V}(X)=36\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=8$이므로

$\mathrm{E}(X^2)=\mathrm{V}(X)+\{\mathrm{E}(X)\}^2$
$=8+12^2=152$

0424 답 5

$(x+5)$개의 구슬이 들어 있는 주머니에서 한 개의 구슬을 꺼낼 때 빨간 구슬이 나올 확률은 $\frac{x}{x+5}$이다.

따라서 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(n,\ \frac{x}{x+5}\right)$를 따르므로

$\mathrm{E}(X)=n\cdot\frac{x}{x+5}=20$ ...... ㉠

$\mathrm{V}(X)=n\cdot\frac{x}{x+5}\cdot\frac{5}{x+5}=4$ ...... ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$20\cdot\frac{5}{x+5}=4$, $x+5=25$ $\quad\therefore x=20$

$x=20$을 ㉠에 대입하면

$n\cdot\frac{4}{5}=20$ $\quad\therefore n=25$

$\therefore n-x=5$

0425 답 ②

로봇이 불량품이 아닐 확률은

$1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$

상자가 불량품이 아닐 확률은

$1-\frac{1}{25}=\frac{24}{25}$

따라서 로봇과 상자가 모두 불량품이 아닐 확률은

$\frac{5}{6}\cdot\frac{24}{25}=\frac{4}{5}$

이므로 확률변수X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(200,\ \frac{4}{5}\right)$를 따른다.

$\therefore \mathrm{V}(X)=200\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{5}=32$

0426 답 100

TIP 곡선과 직선이 만나는 점의 개수는 곡선과 직선의 방정식을 연립하여 얻은 이차방정식의 실근의 개수와 같다.

직선 $y=2ax$와 곡선 $y=x^2+6x+1$이 서로 만나지 않으려면 방정식 $x^2+6x+1=2ax$, 즉 $x^2+2(3-a)x+1=0$의 판별식을 D라 할 때

$\frac{D}{4}=(3-a)^2-1<0$, $a^2-6a+8<0$

$(a-2)(a-4)<0$ $\quad\therefore 2<a<4$

이때, $a=3$이므로 사건 A가 일어날 확률은 $\frac{1}{6}$이고, 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(600,\ \frac{1}{6}\right)$을 따른다.

$\therefore \mathrm{E}(X)=600\cdot\frac{1}{6}=100$

Lecture

이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계

이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=g(x)$의 위치 관계는 이차방정식 $f(x)=g(x)$, 즉 $f(x)-g(x)=0$의 판별식 D를 이용하여 구한다.

(1) $D>0$ ⇨ 서로 다른 두 점에서 만난다.
(2) $D=0$ ⇨ 한 점에서 만난다.(접한다.)
(3) $D<0$ ⇨ 만나지 않는다.

유형 12 이산확률변수 $aX+b$의 평균, 분산, 표준편차 ; 이항분포를 따르는 경우 본책 74쪽

(i) 확률변수 X가 따르는 이항분포를 구한다. ⇨ $\mathrm{B}(n,\ p)$
(ii) 확률변수 X의 평균, 분산, 표준편차를 구한다.
⇨ $\mathrm{E}(X)=np$, $\mathrm{V}(X)=np(1-p)$, $\sigma(X)=\sqrt{np(1-p)}$
(iii) $aX+b$(a, b는 상수, $a\neq0$)의 평균, 분산, 표준편차를 구한다.
⇨ $\mathrm{E}(aX+b)=a\mathrm{E}(X)+b$, $\mathrm{V}(aX+b)=a^2\mathrm{V}(X)$
$\sigma(aX+b)=|a|\sigma(X)$

0427 답 ⑤

주머니에서 한 개의 공을 꺼낼 때 흰 공이 나올 확률은 $\frac{3}{5}$이므로 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(10,\ \frac{3}{5}\right)$을 따른다.

$\mathrm{V}(X)=10\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{5}=\frac{12}{5}$이므로

$\mathrm{V}(5X+3)=5^2\mathrm{V}(X)=25\cdot\frac{12}{5}=60$

0428 답 16

4개의 동전을 한 번 던질 때, 1개는 앞면, 3개는 뒷면이 나올 확률은

${}_4\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{4}$

이므로 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(20,\ \frac{1}{4}\right)$을 따르고

$\mathrm{E}(X)=20\cdot\frac{1}{4}=5$

$\therefore \mathrm{E}(3X+1)=3\mathrm{E}(X)+1=16$

따라서 구하는 기댓값은 16이다.

0429 답 -6

TIP 점 P가 움직이는 횟수를 확률변수 Y로 놓고 X와 Y의 관계식을 찾는다.

주사위를 12번 던질 때 점 P가 양의 방향으로 2만큼 움직이는 횟수를 확률변수 Y라 하면 음의 방향으로 1만큼 움직이는 횟수는 $12-Y$이므로

$X=2Y-(12-Y)=3Y-12$

한편, 두 개의 주사위를 동시에 던져서 나오는 눈의 수를 a, b라 하면 순서쌍 $(a,\ b)$에 대하여 두 수의 합이 4 이하인 경우는 $(1,\ 1)$, $(1,\ 2)$, $(1,\ 3)$, $(2,\ 1)$, $(2,\ 2)$, $(3,\ 1)$의 6가지이므로 그 확률은

$\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$

따라서 점 P가 양의 방향으로 2만큼 움직일 확률은 $\frac{1}{6}$이므로 Y는 이항분포 $\mathrm{B}\left(12,\ \frac{1}{6}\right)$을 따른다.

$\therefore \mathrm{E}(Y)=12\cdot\frac{1}{6}=2$

$\therefore \mathrm{E}(X)=\mathrm{E}(3Y-12)=3\mathrm{E}(Y)-12$
$=3\cdot2-12=-6$

STEP 3 | 심화 Master

0430 답 28

TIP 확률변수 X의 확률질량함수가 $\mathrm{P}(X=x_i)=p_i(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$일 때 $\mathrm{E}(X)=x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_np_n$임을 이용한다.

$\mathrm{P}(X=k)=p_k\,(k=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$인 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	5	합계
$\mathrm{P}(X=k)$	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	1

$\mathrm{E}(X)=p_1+2p_2+3p_3+4p_4+5p_5=4$

한편, $\mathrm{P}(Y=k)=\frac{1}{2}\mathrm{P}(X=k)+\frac{1}{10}\,(k=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$이므로

$$\mathrm{E}(Y)=\left(\frac{1}{2}p_1+\frac{1}{10}\right)+2\left(\frac{1}{2}p_2+\frac{1}{10}\right)+3\left(\frac{1}{2}p_3+\frac{1}{10}\right)+4\left(\frac{1}{2}p_4+\frac{1}{10}\right)+5\left(\frac{1}{2}p_5+\frac{1}{10}\right)$$
$$=\frac{1}{2}(p_1+2p_2+3p_3+4p_4+5p_5)+\frac{1+2+3+4+5}{10}$$
$$=\frac{1}{2}\cdot4+\frac{3}{2}=\frac{7}{2}$$

따라서 $a=\frac{7}{2}$이므로 $8a=28$

참고 Y의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

Y	1	2	3	4	5	합계
$\mathrm{P}(Y=k)$	$\frac{1}{2}p_1+\frac{1}{10}$	$\frac{1}{2}p_2+\frac{1}{10}$	$\frac{1}{2}p_3+\frac{1}{10}$	$\frac{1}{2}p_4+\frac{1}{10}$	$\frac{1}{2}p_5+\frac{1}{10}$	1

0431 답 2

TIP 확률의 총합은 1임을 이용하여 a의 값을 먼저 구한다.

확률의 총합은 1이므로

$a\left(\log\frac{2}{1}+\log\frac{3}{2}+\log\frac{4}{3}+\cdots+\log\frac{100}{99}\right)=1$

$a\log\left(\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\cdots\cdot\frac{100}{99}\right)=1$

$a\log100=1$, $2a=1$ $\quad\therefore a=\frac{1}{2}$

$\therefore \mathrm{P}(X=4)=\frac{1}{2}\log\frac{5}{4}=\frac{1}{2}(\log5-2\log2)$
$=\frac{1}{2}(1-3\log2)=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\log2$

따라서 $p=\frac{1}{2}$, $q=-\frac{3}{2}$이므로 $p-q=2$

Lecture

로그의 기본 성질과 상용로그

(1) $a>0$, $a\neq1$, $M>0$, $N>0$일 때
① $\log_a1=0$, $\log_aa=1$
② $\log_aMN=\log_aM+\log_aN$
③ $\log_a\frac{M}{N}=\log_aM-\log_aN$
④ $\log_aN^k=k\log_aN$ (단, k는 실수)
(2) 상용로그 : 10을 밑으로 하는 로그를 상용로그라 하며 상용로그 $\log_{10}N$은 보통 밑 10을 생략하여 $\log N$과 같이 나타낸다.

0432 답 83

TIP $\sum_{k=0}^{4} \mathrm{P}(X=k)=1$, $\sum_{k=0}^{4} k\mathrm{P}(X=k)=\mathrm{E}(X)$임을 이용한다.

확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	4	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{70}$	$\frac{8}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{8}{35}$	$\frac{1}{70}$	1

$$\mathrm{E}(X)=0\cdot\frac{1}{70}+1\cdot\frac{8}{35}+2\cdot\frac{18}{35}+3\cdot\frac{8}{35}+4\cdot\frac{1}{70}$$
$$=2$$

한편,

$$\sum_{x=1}^{4}\{(7x+70)\mathrm{P}(X=x)\}$$
$$=\sum_{x=1}^{4}\{7x\mathrm{P}(X=x)+70\mathrm{P}(X=x)\}$$
$$=7\sum_{x=1}^{4}x\mathrm{P}(X=x)+70\sum_{x=1}^{4}\mathrm{P}(X=x)$$

이때,

$$\sum_{x=1}^{4}x\mathrm{P}(X=x)=\sum_{x=0}^{4}x\mathrm{P}(X=x)=\mathrm{E}(X)=2$$
$$\sum_{x=1}^{4}\mathrm{P}(X=x)=\sum_{x=0}^{4}\mathrm{P}(X=x)-\mathrm{P}(X=0)=1-\mathrm{P}(X=0)$$
$$=1-\frac{1}{70}=\frac{69}{70}$$

이므로

$$(\text{주어진 식})=7\cdot2+70\cdot\frac{69}{70}=14+69$$
$$=83$$

Lecture

합의 기호 $\sum$의 뜻과 성질

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$을 합의 기호 $\sum$를 사용하여 $\sum_{k=1}^{n}$로 나타낸다.

(1) $\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=(a_1+b_1)+(a_2+b_2)+\cdots+(a_n+b_n)$
$=(a_1+a_2+\cdots+a_n)+(b_1+b_2+\cdots+b_n)$
$=\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k$

(2) $\sum_{k=1}^{n}(a_k-b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k-\sum_{k=1}^{n}b_k$

(3) $\sum_{k=1}^{n}ca_k=ca_1+ca_2+\cdots+ca_n=c(a_1+a_2+\cdots+a_n)$
$=c\sum_{k=1}^{n}a_k$ (단, c는 상수)

0433 답 27

TIP $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$임을 이용한다.

$$\mathrm{E}(X)=\frac{1}{5}(a-2b)+\frac{1}{5}(a-b)+\frac{1}{5}a+\frac{1}{5}(a+b)+\frac{1}{5}(a+2b)$$
$$=a$$
$$\therefore a=24$$
$$\mathrm{E}(X^2)=\frac{1}{5}(a-2b)^2+\frac{1}{5}(a-b)^2+\frac{1}{5}a^2+\frac{1}{5}(a+b)^2+\frac{1}{5}(a+2b)^2$$
$$=a^2+2b^2=24^2+2b^2$$
$$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$$
$$=(24^2+2b^2)-24^2=2b^2$$

따라서 $2b^2=18$이므로 $b^2=9$ $\quad\therefore b=3\ (\because b>0)$

$\therefore a+b=27$

0434 답 $\frac{17}{5}$

TIP 확률변수 X가 가질 수 있는 값들을 먼저 구해본다.

두 장의 종이를 꺼내어 얻을 수 있는 점수의 합은 오른쪽 표와 같으므로 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 2, 3, 4, 5, 6이고, 그 확률은 각각

	○	☆	△
○	2	3	4
☆	3	4	5
△	4	5	6

$$\mathrm{P}(X=2)=\frac{{}_5\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_2}=\frac{2}{9}$$
$$\mathrm{P}(X=3)=\frac{{}_5\mathrm{C}_1\cdot{}_3\mathrm{C}_1}{{}_{10}\mathrm{C}_2}=\frac{1}{3}$$
$$\mathrm{P}(X=4)=\frac{{}_5\mathrm{C}_1\cdot{}_2\mathrm{C}_1+{}_3\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_2}=\frac{13}{45}$$
$$\mathrm{P}(X=5)=\frac{{}_3\mathrm{C}_1\cdot{}_2\mathrm{C}_1}{{}_{10}\mathrm{C}_2}=\frac{2}{15}$$
$$\mathrm{P}(X=6)=\frac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_2}=\frac{1}{45}$$

따라서 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	2	3	4	5	6	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{13}{45}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{45}$	1

$$\therefore \mathrm{E}(X)=2\cdot\frac{2}{9}+3\cdot\frac{1}{3}+4\cdot\frac{13}{45}+5\cdot\frac{2}{15}+6\cdot\frac{1}{45}=\frac{17}{5}$$

0435 답 1600원

TIP 수형도를 이용하여 수요일에 이용할 교통수단과 그 확률을 먼저 구한다.

월요일, 화요일, 수요일에 이용할 교통수단과 각각의 확률은 다음과 같다.

월요일	화요일	수요일		확률
버스	지하철	버스	⇨	$\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{8}$
		택시	⇨	$\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{8}$
	택시	버스	⇨	$\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{12}$
		지하철	⇨	$\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{6}$

따라서 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	900	1200	2400	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{8}+\frac{1}{12}=\frac{11}{24}$	$\frac{3}{8}$	1

$$\therefore \mathrm{E}(X)=900\cdot\frac{1}{6}+1200\cdot\frac{11}{24}+2400\cdot\frac{3}{8}=1600$$

따라서 구하는 기댓값은 1600원이다.

0436 답 19점

TIP 좌표평면에서 원점과 점 $(p,\ q)$ 사이의 거리는 $\sqrt{p^2+q^2}$임을 이용한다.

원점을 O라 하면

$\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{(a+b)^2+(a-b)^2}=\sqrt{2(a^2+b^2)}$

$\overline{\mathrm{OP}}\le 4$에서 $\sqrt{2(a^2+b^2)}\le 4$

$\therefore\ a^2+b^2\le 8$

두 개의 주사위를 동시에 던져서 나오는 눈의 수 $a,\ b$의 순서쌍 $(a,\ b)$에 대하여 $a^2+b^2\le 8$을 만족시키는 경우는 $(1,\ 1)$, $(1,\ 2)$, $(2,\ 1)$, $(2,\ 2)$의 4가지이므로 그 확률은 $\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$

이때, 두 개의 주사위를 한 번 던져 얻을 수 있는 점수를 확률변수 X라 하면 X가 가질 수 있는 값은 27, 18이고 그 확률은 각각

$\mathrm{P}(X=27)=\frac{1}{9}$

$\mathrm{P}(X=18)=1-\mathrm{P}(X=27)=\frac{8}{9}$

$\therefore\ \mathrm{E}(X)=27\cdot\frac{1}{9}+18\cdot\frac{8}{9}=19$

따라서 구하는 기댓값은 19점이다.

참고 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	18	27	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{8}{9}$	$\frac{1}{9}$	1

0437 답 ①

TIP 순열을 이용하여 $\mathrm{P}(X=1)=a$를 먼저 구하고 확률의 총합이 1임을 이용한다.

세 개의 주사위를 던져서 나온 눈의 수들 중에서 두 수의 차의 최댓값이 1이 되는 경우는 세 개 중 두 주사위의 눈의 차가 1이고, 나머지 한 주사위의 수는 중복된 경우이다.

즉, $(1,\ 2)$, $(2,\ 3)$, $(3,\ 4)$, $(4,\ 5)$, $(5,\ 6)$에 대하여

$(1,\ 1,\ 2)$, $(2,\ 2,\ 3)$, $(3,\ 3,\ 4)$, $(4,\ 4,\ 5)$, $(5,\ 5,\ 6)$,

$(1,\ 2,\ 2)$, $(2,\ 3,\ 3)$, $(3,\ 4,\ 4)$, $(4,\ 5,\ 5)$, $(5,\ 6,\ 6)$

의 10가지이므로 두 수의 차의 최댓값이 1인 경우의 수는

$\frac{3!}{2!}\cdot 10=30$

$\therefore\ a=\mathrm{P}(X=1)=\frac{30}{6^3}=\frac{5}{36}$

확률의 총합은 1이므로

$\frac{1}{36}+a+\frac{2}{9}+b+\frac{2}{9}+\frac{5}{36}=1$에서

$b+\frac{3}{4}=1\qquad\therefore\ b=\frac{1}{4}$

확률변수 X에 대하여

$\mathrm{E}(X)=0\cdot\frac{1}{36}+1\cdot\frac{5}{36}+2\cdot\frac{2}{9}+3\cdot\frac{1}{4}+4\cdot\frac{2}{9}+5\cdot\frac{5}{36}$

$=\frac{35}{12}$

$\therefore\ \mathrm{E}(Y)=\mathrm{E}(12X+5)=12\mathrm{E}(X)+5=40$

0438 답 ③

TIP 확률변수 X가 가질 수 있는 값들을 먼저 구하고, 두 상수 $a,\ b\,(a\ne 0)$에 대하여 $\mathrm{E}(aX+b)=a\mathrm{E}(X)+b$임을 이용한다.

8개의 지점 A, B, C, D, E, F, G, H에 각각 연결된 도로의 개수는 2, 4, 4, 2, 3, 5, 2, 2이므로 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 2, 3, 4, 5이고 그 확률은 각각

$\mathrm{P}(X=2)=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(X=3)=\frac{1}{8}$

$\mathrm{P}(X=4)=\frac{1}{4}$, $\mathrm{P}(X=5)=\frac{1}{8}$

이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	2	3	4	5	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	1

확률변수 X에 대하여

$\mathrm{E}(X)=2\cdot\frac{1}{2}+3\cdot\frac{1}{8}+4\cdot\frac{1}{4}+5\cdot\frac{1}{8}=3$

$\therefore\ \mathrm{E}(3X+1)=3\mathrm{E}(X)+1=10$

0439 답 105

TIP 확률변수 X와 Y 사이의 관계식을 찾는다.

확률변수 X가 가질 수 있는 값은 1, 2, 3, 4, 5, 6이고 그 확률은 각각 $\frac{1}{6}$이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	5	6	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

$\mathrm{E}(X)=1\cdot\frac{1}{6}+2\cdot\frac{1}{6}+3\cdot\frac{1}{6}+4\cdot\frac{1}{6}+5\cdot\frac{1}{6}+6\cdot\frac{1}{6}$

$=\frac{7}{2}$

$\mathrm{E}(X^2)=1^2\cdot\frac{1}{6}+2^2\cdot\frac{1}{6}+3^2\cdot\frac{1}{6}+4^2\cdot\frac{1}{6}+5^2\cdot\frac{1}{6}+6^2\cdot\frac{1}{6}$

$=\frac{91}{6}$

$\therefore\ \mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=\frac{91}{6}-\left(\frac{7}{2}\right)^2=\frac{35}{12}$

한편, $10Y=10(aX+9)-300$이므로 $Y=aX-21$

$\mathrm{E}(Y)=\mathrm{E}(aX-21)=a\mathrm{E}(X)-21=\frac{7}{2}a-21$

즉, $\frac{7}{2}a-21=0$이므로 $a=6$

$\therefore\ \mathrm{V}(Y)=\mathrm{V}(6X-21)=6^2\mathrm{V}(X)=36\cdot\frac{35}{12}=105$

0440 답 5

TIP 갑이 얻는 점수를 확률변수 X, 을이 얻는 점수를 확률변수 Y로 놓고 $\mathrm{E}(X)$, $\mathrm{E}(Y)$의 값을 각각 구한다.

두 개의 주사위를 동시에 던져서 나오는 눈의 수를 $a,\ b$라 하면 순서쌍 $(a,\ b)$에 대하여 두 수의 차가

0인 경우는 $(1,\ 1)$, $(2,\ 2)$, $\cdots$, $(6,\ 6)$의 6가지

1인 경우는 $(1,\ 2)$, $(2,\ 3)$, $\cdots$, $(5,\ 6)$,

$(2,\ 1)$, $(3,\ 2)$, $\cdots$, $(6,\ 5)$의 10가지

이므로 두 주사위의 눈의 수의 차가 2보다 작은 경우의 수는 16이고 그 확률은 $\frac{16}{36}=\frac{4}{9}$

따라서 갑이 1점을 얻을 확률은 $\frac{4}{9}$이고, 을이 1점을 얻을 확률은 $\frac{5}{9}$이다. 갑이 얻는 점수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(45, \frac{4}{9}\right)$를 따르고, 을이 얻는 점수를 확률변수 Y라 하면 Y는 이항분포 $\mathrm{B}\left(45, \frac{5}{9}\right)$를 따른다.

$\therefore \mathrm{E}(X)=45\cdot\frac{4}{9}=20,\ \mathrm{E}(Y)=45\cdot\frac{5}{9}=25$

즉, $a=20$, $b=25$이므로 $b-a=5$

0441 답 -6000원

TIP 풍선을 맞히는 횟수를 확률변수 X, 얻을 수 있는 금액을 확률변수 Y로 놓고 X와 Y 사이의 관계식을 찾는다.

풍선을 맞히는 횟수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(24, \frac{1}{6}\right)$을 따른다.

$\therefore \mathrm{E}(X)=24\cdot\frac{1}{6}=4$

한편, 얻을 수 있는 금액을 확률변수 Y라 하면

$Y=1000X-500(24-X)=1500X-12000$

이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(Y)&=\mathrm{E}(1500X-12000)=1500\mathrm{E}(X)-12000\\&=-6000\end{aligned}$$

따라서 구하는 기댓값은 -6000원이다.

다른 풀이 풍선을 맞힐 확률은 $\frac{1}{6}$, 맞히지 못할 확률은 $\frac{5}{6}$이므로 한 번의 게임에서 얻을 수 있는 금액의 기댓값은 $1000\cdot\frac{1}{6}-500\cdot\frac{5}{6}=-250$(원)

이다.

따라서 24번의 게임에서 얻을 수 있는 금액의 기댓값은

$-250\cdot 24=-6000$(원)

0442 답 47

TIP m, n이 6 이하의 자연수임을 이용하여 사건 $\mathrm{P}(E)$를 먼저 구한다.

$1\le m\le 6$, $1\le n\le 6$인 자연수이고 $m^2+n^2\le 25$이어야 하므로

(i) $m=1$일 때

$n^2\le 24$이므로 $n=1, 2, 3, 4$의 4가지

(ii) $m=2$일 때

$n^2\le 21$이므로 $n=1, 2, 3, 4$의 4가지

(iii) $m=3$일 때

$n^2\le 16$이므로 $n=1, 2, 3, 4$의 4가지

(iv) $m=4$일 때

$n^2\le 9$이므로 $n=1, 2, 3$의 3가지

(i)~(iv)에서 사건 E가 일어나는 경우의 수는

$4+4+4+3=15$

따라서 $\mathrm{P}(E)=\frac{15}{36}=\frac{5}{12}$이므로 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(12, \frac{5}{12}\right)$를 따른다.

$\therefore \mathrm{V}(X)=12\cdot\frac{5}{12}\cdot\frac{7}{12}=\frac{35}{12}$

따라서 $p=12$, $q=35$이므로 $p+q=47$

0443 답 1024원

TIP $(a+b)^n={}_n\mathrm{C}_0 b^n+{}_n\mathrm{C}_1 ab^{n-1}+\cdots+{}_n\mathrm{C}_n a^n$임을 이용한다.

받을 수 있는 상금을 확률변수 X라 할 때, X가 가질 수 있는 값은 $7^0, 7^1, 7^2, \cdots, 7^{10}$이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	7^0	7^1	7^2	$\cdots$	7^9	7^{10}	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	${}_{10}\mathrm{C}_0\left(\frac{5}{6}\right)^{10}$	${}_{10}\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{5}{6}\right)^9$	${}_{10}\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^8$	$\cdots$	${}_{10}\mathrm{C}_9\left(\frac{1}{6}\right)^9\left(\frac{5}{6}\right)^1$	${}_{10}\mathrm{C}_{10}\left(\frac{1}{6}\right)^{10}$	1

$\therefore \mathrm{E}(X)$

$$\begin{aligned}&=7^0\cdot{}_{10}\mathrm{C}_0\left(\frac{5}{6}\right)^{10}+7^1\cdot{}_{10}\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{5}{6}\right)^9+7^2\cdot{}_{10}\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^8\\&\qquad+\cdots+7^9\cdot{}_{10}\mathrm{C}_9\left(\frac{1}{6}\right)^9\left(\frac{5}{6}\right)^1+7^{10}\cdot{}_{10}\mathrm{C}_{10}\left(\frac{1}{6}\right)^{10}\\&={}_{10}\mathrm{C}_0\left(\frac{5}{6}\right)^{10}+{}_{10}\mathrm{C}_1\left(\frac{7}{6}\right)^1\left(\frac{5}{6}\right)^9+{}_{10}\mathrm{C}_2\left(\frac{7}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^8\\&\qquad+\cdots+{}_{10}\mathrm{C}_9\left(\frac{7}{6}\right)^9\left(\frac{5}{6}\right)^1+{}_{10}\mathrm{C}_{10}\left(\frac{7}{6}\right)^{10}\\&=\left(\frac{7}{6}+\frac{5}{6}\right)^{10}\\&=2^{10}\end{aligned}$$

따라서 구하는 기댓값은 1024원이다.

Lecture

지수의 확장

$a\ne 0$일 때 $a^0=1$

0444 답 412

TIP $\sum_{k=0}^{50} k^2\mathrm{P}(X=k)=\mathrm{E}(X^2)$임을 이용한다.

확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(50, \frac{2}{5}\right)$를 따르므로

$\mathrm{E}(X)=50\cdot\frac{2}{5}=20$, $\mathrm{V}(X)=50\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5}=12$이고, X의 확률질량함수는

$\mathrm{P}(X=k)={}_{50}\mathrm{C}_k\left(\frac{2}{5}\right)^k\left(\frac{3}{5}\right)^{50-k}\ (k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 50)$

이때,

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{50} k^2\mathrm{P}(X=k)\\&=0\cdot\mathrm{P}(X=0)+1^2\cdot\mathrm{P}(X=1)+2^2\cdot\mathrm{P}(X=2)\\&\qquad+3^2\cdot\mathrm{P}(X=3)+\cdots+50^2\cdot\mathrm{P}(X=50)\\&=\mathrm{E}(X^2)\end{aligned}$$

이므로

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$에서

$12=\mathrm{E}(X^2)-20^2$

$\therefore \mathrm{E}(X^2)=412$

0445 답 340

TIP $\sum_{k=0}^{100} \mathrm{P}(X=k)=1$, $\sum_{k=0}^{100} k\mathrm{P}(X=k)=\mathrm{E}(X)$,
$\sum_{k=0}^{100} k^2\mathrm{P}(X=k)=\mathrm{E}(X^2)$임을 이용한다.

확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(100,\ \frac{1}{5}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=100\cdot\frac{1}{5}=20$, $\mathrm{V}(X)=100\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5}=16$

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$에서

$16=\mathrm{E}(X^2)-20^2 \qquad \therefore \mathrm{E}(X^2)=416$

$$\mathrm{P}(X=k)={}_{100}\mathrm{C}_k\left(\frac{1}{5}\right)^k\left(\frac{4}{5}\right)^{100-k}$$
$$={}_{100}\mathrm{C}_k\frac{4^{100-k}}{5^{100}}\ (k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 100)$$

이므로

$$\sum_{k=0}^{100}(k-2)^2\,{}_{100}\mathrm{C}_k\frac{4^{100-k}}{5^{100}}$$
$$=\sum_{k=0}^{100}(k^2-4k+4)\mathrm{P}(X=k)$$
$$=\sum_{k=0}^{100}k^2\mathrm{P}(X=k)-4\sum_{k=0}^{100}k\mathrm{P}(X=k)+4\sum_{k=0}^{100}\mathrm{P}(X=k)$$
$$=\mathrm{E}(X^2)-4\mathrm{E}(X)+4=416-4\cdot20+4$$
$$=340$$

0446 답 5

TIP $\sum_{k=0}^{36} \mathrm{P}(X=k)=1$, $\sum_{k=0}^{36} k\mathrm{P}(X=k)=\mathrm{E}(X)$,
$\sum_{k=0}^{36} k^2\mathrm{P}(X=k)=\mathrm{E}(X^2)$임을 이용한다.

확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(36,\ \frac{1}{6}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=36\cdot\frac{1}{6}=6$, $\mathrm{V}(X)=36\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}=5$

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$에서

$5=\mathrm{E}(X^2)-6^2 \qquad \therefore \mathrm{E}(X^2)=41$

이때,

$$f(x)=\sum_{k=0}^{36}(x-k)^2\mathrm{P}(X=k)$$
$$=\sum_{k=0}^{36}(x^2-2kx+k^2)\mathrm{P}(X=k)$$
$$=x^2\sum_{k=0}^{36}\mathrm{P}(X=k)-2x\sum_{k=0}^{36}k\mathrm{P}(X=k)+\sum_{k=0}^{36}k^2\mathrm{P}(X=k)$$
$$=x^2-2x\mathrm{E}(X)+\mathrm{E}(X^2)$$
$$=x^2-12x+41$$
$$=(x-6)^2+5$$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=6$일 때 최솟값 5를 갖는다.

6 | 연속확률분포

본책 80쪽~96쪽

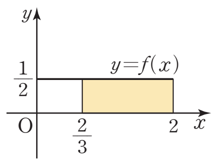
STEP 1 | 기초 Build

0447 답 ㄱ, ㄷ, ㄹ

연속확률변수는 어떤 범위에 속하는 모든 실수의 값을 가지므로 연속확률변수인 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다.

0448 답 $\frac{2}{3}$

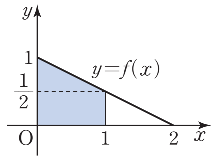
확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 이때, $\mathrm{P}\left(X\ge\frac{2}{3}\right)$는 오른쪽 그림의 색칠한 직사각형의 넓이와 같으므로



$\mathrm{P}\left(X\ge\frac{2}{3}\right)=\left(2-\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{1}{2}=\frac{2}{3}$

0449 답 $\frac{3}{4}$

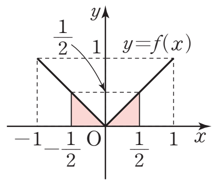
확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 이때, $\mathrm{P}(X\le1)$은 오른쪽 그림의 색칠한 사다리꼴의 넓이와 같으므로



$\mathrm{P}(X\le1)=\frac{1}{2}\cdot\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot1=\frac{3}{4}$

0450 답 $\frac{1}{4}$

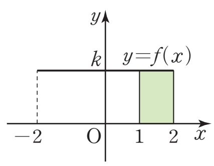
확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 이때, $\mathrm{P}\left(-\frac{1}{2}\le X\le\frac{1}{2}\right)$은 오른쪽 그림의 색칠한 도형의 넓이와 같으므로



$\mathrm{P}\left(-\frac{1}{2}\le X\le\frac{1}{2}\right)=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

0451 답 (1) $\frac{1}{4}$ (2) $\frac{1}{4}$

(1) 확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 이때, $f(x)=k$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=-2$, $x=2$로 둘러싸인 직사각형의 넓이가 1이므로



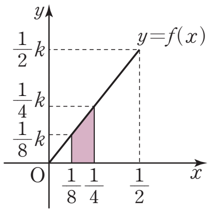
$4\cdot k=1 \qquad \therefore k=\frac{1}{4}$

(2) $\mathrm{P}(X\ge1)$은 위의 그림의 색칠한 직사각형의 넓이와 같으므로

$\mathrm{P}(X\ge1)=(2-1)\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$

0452 답 (1) 8 (2) $\frac{3}{16}$

(1) 확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 이때, $f(x)=kx$의 그래프와 x축 및 직선 $x=\frac{1}{2}$로 둘러싸인 삼각형의 넓이가 1이므로



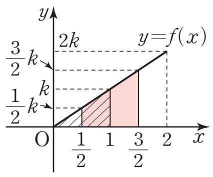
$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}k=1,\ \frac{1}{8}k=1 \qquad \therefore k=8$

(2) $\mathrm{P}\left(\frac{1}{8}\le X\le\frac{1}{4}\right)$은 위의 그림의 색칠한 사다리꼴의 넓이와 같으므로

$\mathrm{P}\left(\frac{1}{8}\le X\le\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2}\cdot(1+2)\cdot\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{8}\right)=\frac{3}{16}$

0453 답 (1) $f(x)=\frac{1}{2}x\ (0\le x\le 2)$ (2) $\frac{1}{2}$ (3) $\frac{1}{4}$

(1) $f(x)=kx$라 하면 $f(x)=kx$의 그래프와 x축 및 직선 $x=2$로 둘러싸인 삼각형의 넓이가 1이므로



$\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2k=1 \qquad \therefore k=\frac{1}{2}$

$\therefore f(x)=\frac{1}{2}x\ (0\le x\le 2)$

(2) $\mathrm{P}\left(\frac{1}{2}< X<\frac{3}{2}\right)$은 위의 그림의 색칠한 사다리꼴의 넓이와 같으므로

$\mathrm{P}\left(\frac{1}{2}< X<\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\right)\cdot\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$

(3) $\mathrm{P}(X<1)$은 위의 그림의 빗금친 삼각형의 넓이와 같으므로

$\mathrm{P}(X<1)=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

0454 답 $\mathrm{N}(2,\ 2^2)$

평균이 2, 분산이 $4=2^2$이므로 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(2,\ 2^2)$을 따른다.

0455 답 $\mathrm{N}(5,\ 3^2)$

평균이 5, 표준편차가 3이므로 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(5,\ 3^2)$을 따른다.

0456 답 (1) $\mathrm{E}(Y)=25,\ \sigma(Y)=12$ (2) $\mathrm{N}(25,\ 12^2)$

확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(12,\ 6^2)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=12,\ \sigma(X)=6$

(1) $\mathrm{E}(Y)=\mathrm{E}(2X+1)=2\mathrm{E}(X)+1=25$

$\sigma(Y)=\sigma(2X+1)=2\sigma(X)=2\cdot 6=12$

(2) $\mathrm{E}(Y)=25,\ \sigma(Y)=12$이므로 확률변수 Y는 정규분포 $\mathrm{N}(25,\ 12^2)$을 따른다.

0457 답 ㄱ, ㄴ

ㄷ. x축을 점근선으로 하며 $x=m$일 때 최댓값을 갖는다.

ㄹ. σ의 값이 커지면 곡선은 낮아지면서 양쪽으로 퍼지고, σ의 값이 작아지면 곡선은 높아지면서 뾰족해진다.

0458 답 0.6826

$\mathrm{P}(-1\le Z\le 1)=\mathrm{P}(-1\le Z\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z\le 1)$

$=\mathrm{P}(0\le Z\le 1)+\mathrm{P}(0\le Z\le 1)$

$=0.3413+0.3413=0.6826$

0459 답 0.9332

$\mathrm{P}(Z\le 1.5)=\mathrm{P}(Z\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)$

$=0.5+0.4332=0.9332$

0460 답 0.3085

$\mathrm{P}(Z\le -0.5)=\mathrm{P}(Z\ge 0.5)$

$=\mathrm{P}(Z\ge 0)-\mathrm{P}(0\le Z\le 0.5)$

$=0.5-0.1915=0.3085$

0461 답 0.0919

$\mathrm{P}(1\le Z\le 1.5)=\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)-\mathrm{P}(0\le Z\le 1)$

$=0.4332-0.3413=0.0919$

0462 답 0.2857

$\mathrm{P}(-2\le Z\le -0.5)=\mathrm{P}(0.5\le Z\le 2)$

$=\mathrm{P}(0\le Z\le 2)-\mathrm{P}(0\le Z\le 0.5)$

$=0.4772-0.1915=0.2857$

0463 답 $m_{\mathrm{A}}=m_{\mathrm{B}}<m_{\mathrm{C}},\ \sigma_{\mathrm{B}}=\sigma_{\mathrm{C}}<\sigma_{\mathrm{A}}$

정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르는 확률변수 X의 확률밀도함수의 그래프는 직선 $x=m$에 대하여 대칭이므로

$m_{\mathrm{A}}=m_{\mathrm{B}}<m_{\mathrm{C}}$

한편, σ의 값이 커지면 곡선은 낮아지면서 양쪽으로 퍼지고, σ의 값이 작아지면 곡선은 높아지면서 뾰족해지므로

$\sigma_{\mathrm{B}}=\sigma_{\mathrm{C}}<\sigma_{\mathrm{A}}$

0464 답 $Z=\frac{X-3}{2}$

X의 평균이 3, 표준편차가 2이므로

$Z=\frac{X-3}{2}$

0465 답 $Z=\frac{X-6}{3}$

X의 평균이 6, 표준편차가 3이므로

$Z=\frac{X-6}{3}$

6 연속확률분포

0466 답 $Z=\dfrac{X-20}{5}$

X의 평균이 20, 표준편차가 5이므로

$Z=\dfrac{X-20}{5}$

0467 답 $Z=\dfrac{X+10}{9}$

X의 평균이 -10, 표준편차가 9이므로

$Z=\dfrac{X+10}{9}$

0468 답 (1) $Z=\dfrac{X-10}{2}$ (2) 0.8185

(1) X의 평균이 10, 표준편차가 2이므로

$Z=\dfrac{X-10}{2}$

(2) $\mathrm{P}(6\le X\le 12)=\mathrm{P}\left(\dfrac{6-10}{2}\le Z\le \dfrac{12-10}{2}\right)$

$=\mathrm{P}(-2\le Z\le 1)$

$=\mathrm{P}(-2\le Z\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z\le 1)$

$=\mathrm{P}(0\le Z\le 2)+\mathrm{P}(0\le Z\le 1)$

$=0.4772+0.3413=0.8185$

0469 답 $\mathrm{N}(24,\ 4^2)$

$\mathrm{E}(X)=72\cdot\dfrac{1}{3}=24$

$\sigma(X)=\sqrt{72\cdot\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{2}{3}}=4$

따라서 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(24,\ 4^2)$을 따른다.

0470 답 $\mathrm{N}(80,\ 8^2)$

$\mathrm{E}(X)=400\cdot\dfrac{1}{5}=80$

$\sigma(X)=\sqrt{400\cdot\dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{4}{5}}=8$

따라서 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(80,\ 8^2)$을 따른다.

0471 답 $\mathrm{N}(30,\ 5^2)$

$\mathrm{E}(X)=180\cdot\dfrac{1}{6}=30$

$\sigma(X)=\sqrt{180\cdot\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{5}{6}}=5$

따라서 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(30,\ 5^2)$을 따른다.

0472 답 $\mathrm{N}(300,\ 10^2)$

$\mathrm{E}(X)=450\cdot\dfrac{2}{3}=300$

$\sigma(X)=\sqrt{450\cdot\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{3}}=10$

따라서 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(300,\ 10^2)$을 따른다.

0473 답 (1) $\mathrm{N}(360,\ 12^2)$ (2) $Z=\dfrac{X-360}{12}$ (3) 0.8413

(1) $\mathrm{E}(X)=600\cdot\dfrac{3}{5}=360$

$\sigma(X)=\sqrt{600\cdot\dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{2}{5}}=12$

따라서 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(360,\ 12^2)$을 따른다.

(2) X를 확률변수 Z로 표준화하면 $Z=\dfrac{X-360}{12}$

(3) $\mathrm{P}(X\le 372)=\mathrm{P}\left(Z\le\dfrac{372-360}{12}\right)$

$=\mathrm{P}(Z\le 1)$

$=\mathrm{P}(Z\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z\le 1)$

$=0.5+0.3413=0.8413$

STEP 2 | 유형 Drill

유형 01 연속확률변수와 확률밀도함수 본책 84쪽

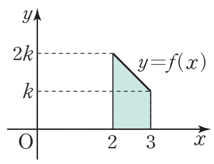
확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)(\alpha\le x\le\beta)$에 대하여

(1) $f(x)\ge 0$

(2) 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=\alpha$, $x=\beta$로 둘러싸인 부분의 넓이는 1이다.

0474 답 ④

함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=2$, $x=3$으로 둘러싸인 사다리꼴의 넓이가 1이므로



$\dfrac{1}{2}\cdot(2k+k)\cdot 1=1$, $\dfrac{3}{2}k=1$

$\therefore k=\dfrac{2}{3}$

0475 답 $\dfrac{1}{3}$

함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이가 1이므로

$\dfrac{1}{2}\cdot 6\cdot k=1$, $3k=1$ $\quad\therefore k=\dfrac{1}{3}$

0476 답 ㄱ, ㄷ

ㄱ. $-1\le x\le 1$에서 $f(x)\ge 0$이고, 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이가 $2\cdot\dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot 1=1$이므로 확률밀도함수이다.

ㄴ. $-1<x<1$에서 $f(x)<0$이므로 확률밀도함수가 아니다.

ㄷ. $-1\le x\le 1$에서 $f(x)\ge 0$이고, 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이가 $\dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot 1=1$이므로 확률밀도함수이다.

ㄹ. 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이가 $\dfrac{1}{2}\cdot\pi\cdot 1=\dfrac{\pi}{2}$, 즉 1이 아니므로 확률밀도함수가 아니다.

따라서 확률밀도함수 $f(x)$의 그래프가 될 수 있는 것은 ㄱ, ㄷ이다.

유형 02 확률밀도함수를 이용한 확률 구하기 본책 84쪽

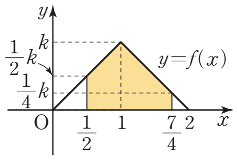
확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)(\alpha\le x\le\beta)$에 대하여

(1) 확률 $\mathrm{P}(a\le X\le b)$는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 부분의 넓이와 같다.

(2) $\mathrm{P}(a\le X\le b)=\mathrm{P}(\alpha\le X\le b)-\mathrm{P}(\alpha\le X\le a)$

(단, $\alpha\le a\le b\le\beta$)

0477 답 $\frac{27}{32}$



함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이가 1이므로

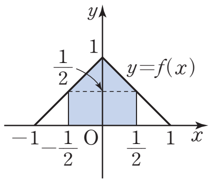
$\frac{1}{2}\cdot 2\cdot k=1 \quad \therefore k=1$

이때, $\mathrm{P}\left(\frac{1}{2}\le X\le\frac{7}{4}\right)$은 오른쪽 그림에서 색칠한 도형의 넓이와 같으므로

$\mathrm{P}\left(\frac{1}{2}\le X\le\frac{7}{4}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}+1\right)\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{3}{4}$

$=\frac{27}{32}$

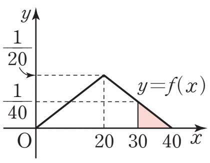
0478 답 $\frac{3}{4}$



확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 이때, $\mathrm{P}\left(|X|\le\frac{1}{2}\right)=\mathrm{P}\left(-\frac{1}{2}\le X\le\frac{1}{2}\right)$은 오른쪽 그림의 색칠한 도형의 넓이와 같으므로

$\mathrm{P}\left(|X|\le\frac{1}{2}\right)=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}+1\right)\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$

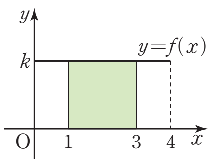
0479 답 $\frac{1}{8}$



확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 이때, 도착 예정 시각과 실제 도착 시각의 차가 30분 이상일 확률, 즉 $\mathrm{P}(X\ge 30)$은 오른쪽 그림의 색칠한 삼각형의 넓이와 같으므로

$\mathrm{P}(X\ge 30)=\frac{1}{2}\cdot 10\cdot\frac{1}{40}=\frac{1}{8}$

0480 답 $\frac{1}{2}$



함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=0$, $x=4$로 둘러싸인 직사각형의 넓이가 1이므로

$4k=1 \quad \therefore k=\frac{1}{4}$

한편, 이차방정식 $t^2-2Xt+2X^2-4X+3=0$의 판별식을 D라 할 때, 이 이차방정식이 실근을 가지려면

$\frac{D}{4}=X^2-(2X^2-4X+3)\ge 0$, $(X-1)(X-3)\le 0$

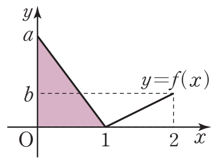
$\therefore 1\le X\le 3$

이때, $\mathrm{P}(1\le X\le 3)$은 위의 그림의 색칠한 직사각형의 넓이와 같으므로

$\mathrm{P}(1\le X\le 3)=\frac{1}{4}\cdot 2=\frac{1}{2}$

따라서 주어진 이차방정식이 실근을 가질 확률은 $\frac{1}{2}$이다.

0481 답 3



함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=0$, $x=2$로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로

$\frac{1}{2}\cdot 1\cdot a+\frac{1}{2}\cdot 1\cdot b=1$

$\frac{a}{2}+\frac{b}{2}=1$

$\therefore a+b=2 \quad \cdots\cdots$ ㉠

이때, $\mathrm{P}(0\le X\le 1)$는 위의 그림의 색칠한 삼각형의 넓이와 같으므로

$\mathrm{P}(0\le X\le 1)=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot a=\frac{a}{2}$

즉, $\frac{a}{2}=\frac{3}{2}b$에서 $a=3b$

$a=3b$를 ㉠에 대입하면 $4b=2 \quad \therefore b=\frac{1}{2}$

따라서 $a=\frac{3}{2}$, $b=\frac{1}{2}$이므로 $4ab=3$

유형 03 정규분포의 확률밀도함수의 그래프의 성질 본책 85쪽

정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르는 확률변수 X의 확률밀도함수의 그래프는

(1) 직선 $x=m$에 대하여 대칭이고 종 모양의 곡선이다.

(2) 곡선과 x축 사이의 넓이는 1이다.

(3) σ의 값은 일정하고, m의 값이 달라지면 대칭축의 위치가 바뀐다.

(4) m의 값은 일정하고, σ의 값이 커지면 곡선은 낮아지면서 양쪽으로 퍼진다.

0482 답 ㄱ, ㄹ

ㄱ. 확률변수 X_1, X_2의 확률밀도함수의 그래프는 각각 직선 $x=x_1$, $x=x_2$에 대하여 대칭이므로

$\mathrm{E}(X_1)=x_1$, $\mathrm{E}(X_2)=x_2$

이때, $x_1<x_2$이므로 $\mathrm{E}(X_1)<\mathrm{E}(X_2)$

ㄴ. $\mathrm{E}(X_1)=x_1$, $\mathrm{E}(X_2)=x_2$이고 $f(x_1)>g(x_2)$이므로

$f(\mathrm{E}(X_1))>g(\mathrm{E}(X_2))$

ㄷ. 확률변수 X_1의 확률밀도함수의 그래프의 가운데 부분의 높이가 확률변수 X_2의 확률밀도함수의 그래프보다 더 높으므로

$\sigma(X_1)<\sigma(X_2)$, 즉 $\mathrm{V}(X_1)<\mathrm{V}(X_2)$

ㄹ. 평균이 m인 정규분포의 확률밀도함수의 그래프는 직선 $x=m$에 대하여 대칭이므로

$\mathrm{P}(X_1\ge x_1)=\mathrm{P}(X_2\le x_2)=0.5$

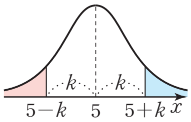
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄹ이다.

0483 답 ㄱ, ㄷ

ㄱ. 평균이 5인 정규분포의 확률밀도함수의 그래프는 직선 $x=5$에 대하여 대칭이므로 $\mathrm{P}(X\le 5)=0.5$

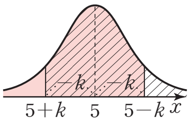
ㄴ. $2\mathrm{P}(5\le X\le 5+\sigma)=\mathrm{P}(5-\sigma\le X\le 5+\sigma)$이므로
$\mathrm{P}(5\le X\le 5+2\sigma)\ne 2\mathrm{P}(5\le X\le 5+\sigma)$

ㄷ. (ⅰ) $k>0$일 때
확률변수 X의 확률밀도함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



(ⅱ) $k=0$일 때
$\mathrm{P}(X\le 5)=\mathrm{P}(X\ge 5)=0.5$

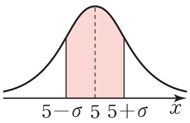
(ⅲ) $k<0$일 때
확률변수 X의 확률밀도함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



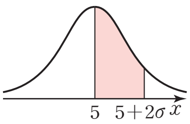
(ⅰ)~(ⅲ)에서 임의의 상수 k에 대하여
$\mathrm{P}(X\le 5-k)=\mathrm{P}(X\ge 5+k)$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

참고 ㄴ. $2\mathrm{P}(5\le X\le 5+\sigma)$와 $\mathrm{P}(5\le X\le 5+2\sigma)$는 각각 다음 그림의 색칠한 부분과 같다.



$2\mathrm{P}(5\le X\le 5+\sigma)$



$\mathrm{P}(5\le X\le 5+2\sigma)$

0484 답 16

정규분포의 확률밀도함수의 그래프는 직선 $x=m$에 대하여 대칭이고, $\mathrm{P}(X\le 6)=\mathrm{P}(X\ge 14)$이므로

$m=\dfrac{6+14}{2}=10$

또, $\mathrm{V}\left(\dfrac{1}{2}X\right)=9$에서 $\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\mathrm{V}(X)=9$

$\therefore \mathrm{V}(X)=36$

즉, $\sigma^2=36$이므로 $\sigma=6$

$\therefore m+\sigma=16$

0485 답 6

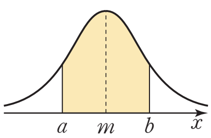
확률변수 X의 평균이 10이므로 X의 확률밀도함수는 $x=10$에서 최댓값을 갖고, 정규분포의 확률밀도함수의 그래프는 직선 $x=10$에 대하여 대칭이다.

따라서 $\mathrm{P}(7-2k\le X\le 7+3k)$의 값이 최대가 되려면

$\dfrac{(7-2k)+(7+3k)}{2}=10$, $14+k=20$

$\therefore k=6$

참고 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따를 때, X의 확률밀도함수는 $x=m$에 대하여 대칭이다. 따라서 $b-a$의 값이 일정할 때 $\mathrm{P}(a\le X\le b)$의 값이 최대이려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$\dfrac{a+b}{2}=m$ (단, a, b는 상수)

0486 답 29

정규분포의 확률밀도함수의 그래프는 직선 $x=m$에 대하여 대칭이고, $\mathrm{P}(X\le 3)=\mathrm{P}(X\ge 7)$이므로

$m=\dfrac{3+7}{2}=5$

따라서 $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$에서

$2^2=\mathrm{E}(X^2)-5^2$

$\therefore \mathrm{E}(X^2)=29$

유형 04 정규분포에서 확률 구하기 본책 86쪽

확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따를 때, 확률밀도함수 $f(x)$의 그래프는 직선 $x=m$에 대하여 대칭이므로

(1) $\mathrm{P}(X\ge m)=\mathrm{P}(X\le m)=0.5$

(2) $\mathrm{P}(m-\sigma\le X\le m)=\mathrm{P}(m\le X\le m+\sigma)$

0487 답 0.6826

확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(15,\ 3^2)$을 따르므로

$m=15$, $\sigma=3$

$$\begin{aligned}\therefore \mathrm{P}(12\le X\le 18)&=\mathrm{P}(15-3\le X\le 15+3)\\&=\mathrm{P}(m-\sigma\le X\le m+\sigma)\\&=2\mathrm{P}(m\le X\le m+\sigma)\\&=2\times 0.3413\\&=0.6826\end{aligned}$$

0488 답 ②

$\mathrm{P}(m-\sigma\le X\le m+\sigma)=a$에서

$2\mathrm{P}(m\le X\le m+\sigma)=a$

$\therefore \mathrm{P}(m\le X\le m+\sigma)=\dfrac{a}{2}$

또, $\mathrm{P}(m-2\sigma\le X\le m+2\sigma)=b$에서

$2\mathrm{P}(m\le X\le m+2\sigma)=b$

$\therefore \mathrm{P}(m\le X\le m+2\sigma)=\dfrac{b}{2}$

$$\begin{aligned}\therefore &\ \mathrm{P}(m+\sigma\le X\le m+2\sigma)\\&=\mathrm{P}(m\le X\le m+2\sigma)-\mathrm{P}(m\le X\le m+\sigma)\\&=\frac{b-a}{2}\end{aligned}$$

0489 답 0.6915

확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(60,\ 4^2)$을 따르므로

$m=60$, $\sigma=4$

$$\begin{aligned}\therefore \mathrm{P}(X\ge 58)&=\mathrm{P}(X\ge 60-2)\\&=\mathrm{P}(X\ge m-0.5\sigma)\\&=\mathrm{P}(X\le m+0.5\sigma)\\&=\mathrm{P}(X\le m)+\mathrm{P}(m\le X\le m+0.5\sigma)\\&=0.5+0.1915\\&=0.6915\end{aligned}$$

유형 05 정규분포의 표준화 본책 86쪽

확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따를 때

(1) 확률변수 $Z=\frac{X-m}{\sigma}$은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

(2) $\mathrm{P}(a\le X\le b)=\mathrm{P}\left(\frac{a-m}{\sigma}\le Z\le \frac{b-m}{\sigma}\right)$

0490 답 -18

확률변수 X, Y가 각각 정규분포 $\mathrm{N}(12,\ 5^2)$, $\mathrm{N}(6,\ 2^2)$을 따르므로 $Z_X=\frac{X-12}{5}$, $Z_Y=\frac{Y-6}{2}$으로 놓으면 Z_X, Z_Y는 모두 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}(X\ge k)=\mathrm{P}(Y\le -k)$에서

$\mathrm{P}\left(Z_X\ge \frac{k-12}{5}\right)=\mathrm{P}\left(Z_Y\le \frac{-k-6}{2}\right)$이므로

$\frac{k-12}{5}=-\frac{-k-6}{2}$, $2(k-12)=5(k+6)$

$3k=-54$ $\quad\therefore k=-18$

0491 답 ①

확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 3^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-m}{3}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$$\begin{aligned}\therefore \mathrm{P}(4\le X\le 2m-4)&=\mathrm{P}\left(\frac{4-m}{3}\le Z\le \frac{m-4}{3}\right)\\&=\mathrm{P}\left(-\frac{m-4}{3}\le Z\le \frac{m-4}{3}\right)\\&=2\mathrm{P}\left(0\le Z\le \frac{m-4}{3}\right)\end{aligned}$$

따라서 $\frac{m-4}{3}=2$에서 $m=10$

0492 답 36

$\mathrm{P}(X\ge 24)=\mathrm{P}(X\le 36)$이므로 $m=\frac{24+36}{2}=30$

이때, 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-m}{\sigma}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\therefore \mathrm{P}(X\ge 24)=\mathrm{P}\left(Z\ge \frac{24-30}{\sigma}\right)=\mathrm{P}\left(Z\ge \frac{-6}{\sigma}\right)$

따라서 $\frac{-6}{\sigma}=-1$이므로 $\sigma=6$

$\therefore m+\sigma=36$

다른 풀이 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-m}{\sigma}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}(X\ge 24)=\mathrm{P}\left(Z\ge \frac{24-m}{\sigma}\right)=\mathrm{P}(Z\ge -1)$에서

$\frac{24-m}{\sigma}=-1$ ······ ㉠

한편, $\mathrm{P}(Z\ge -1)=\mathrm{P}(Z\le 1)$이고

$\mathrm{P}(X\le 36)=\mathrm{P}\left(Z\le \frac{36-m}{\sigma}\right)=\mathrm{P}(Z\le 1)$에서

$\frac{36-m}{\sigma}=1$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$m=30$, $\sigma=6$ $\quad\therefore m+\sigma=36$

유형 06 표준화하여 확률 구하기 본책 87쪽

확률변수 Z가 표준정규분포를 따를 때, $a<b$인 두 양수 a, b에 대하여

(1) $\mathrm{P}(a\le Z\le b)=\mathrm{P}(0\le Z\le b)-\mathrm{P}(0\le Z\le a)$

(2) $\mathrm{P}(-a\le Z\le 0)=\mathrm{P}(0\le Z\le a)$

(3) $\mathrm{P}(Z\le a)=0.5+\mathrm{P}(0\le Z\le a)$

(4) $\mathrm{P}(Z\ge a)=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le a)$

0493 답 0.6247

$Z=\frac{X-20}{6}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(17\le X\le 29)&=\mathrm{P}\left(\frac{17-20}{6}\le Z\le \frac{29-20}{6}\right)\\&=\mathrm{P}(-0.5\le Z\le 1.5)\\&=\mathrm{P}(-0.5\le Z\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)\\&=\mathrm{P}(0\le Z\le 0.5)+\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)\\&=0.1915+0.4332\\&=0.6247\end{aligned}$$

0494 답 ③

$Z=\frac{X-5}{2}$로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

① $\mathrm{P}(3\le X\le 5)=\mathrm{P}\left(\frac{3-5}{2}\le Z\le \frac{5-5}{2}\right)$
$=\mathrm{P}(-1\le Z\le 0)$
$=\mathrm{P}(0\le Z\le 1)$

② $\mathrm{P}(3\le X\le 7)=\mathrm{P}\left(\frac{3-5}{2}\le Z\le \frac{7-5}{2}\right)$
$=\mathrm{P}(-1\le Z\le 1)$
$=2\mathrm{P}(0\le Z\le 1)$

③ $\mathrm{P}(X\ge 3)=\mathrm{P}\left(Z\ge \frac{3-5}{2}\right)$
$=\mathrm{P}(Z\ge -1)$
$=\mathrm{P}(Z\le 1)$
$=0.5+\mathrm{P}(0\le Z\le 1)$

④ $\mathrm{P}(5\le X\le 7)=\mathrm{P}\left(\frac{5-5}{2}\le Z\le \frac{7-5}{2}\right)$
$=\mathrm{P}(0\le Z\le 1)$

⑤ $\mathrm{P}(X\le 5)=\mathrm{P}\left(Z\le \frac{5-5}{2}\right)=\mathrm{P}(Z\le 0)$
$=0.5$

따라서 가장 큰 값은 ③이다.

0495 답 0.5762

$Z=\frac{X-28}{5}$로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$\mathrm{P}(28\le X\le 32)=0.2881$에서

$\mathrm{P}\left(\frac{28-28}{5}\le Z\le \frac{32-28}{5}\right)=0.2881$

$\mathrm{P}(0\le Z\le 0.8)=0.2881$

6 연속확률분포

$\therefore \mathrm{P}(|X-28|<4)=\mathrm{P}(-4<X-28<4)$
$=\mathrm{P}(24<X<32)$
$=\mathrm{P}\left(\frac{24-28}{5}<Z<\frac{32-28}{5}\right)$
$=\mathrm{P}(-0.8<Z<0.8)$
$=2\mathrm{P}(0<Z<0.8)$
$=2\times0.2881=0.5762$

다른 풀이 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(28,\ 5^2)$을 따르므로
$Z=\frac{X-28}{5}$로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.
$\therefore \mathrm{P}(|X-28|<4)=\mathrm{P}\left(\frac{|X-28|}{5}<0.8\right)=\mathrm{P}(-0.8<Z<0.8)$
$=2\mathrm{P}(0<Z<0.8)=0.5762$

0496 답 0.0228
이차방정식 $(1-X)x^2-x-1=0$의 두 실근의 부호가 서로 다르려면 두 실근의 곱이 음수이어야 한다.
즉, $\frac{-1}{1-X}<0$, $1-X>0$
$\therefore X<1$
이때, 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(3,\ 1)$을 따르므로
$Z=X-3$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.
$\therefore \mathrm{P}(X<1)=\mathrm{P}(Z<1-3)=\mathrm{P}(Z<-2)$
$=\mathrm{P}(Z>2)$
$=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le 2)$
$=0.5-0.4772=0.0228$

Lecture
이차방정식의 실근의 부호
이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ (a, b, c는 실수)의 두 실근을 α, β라 하면
(1) 두 근이 모두 양 $\Longleftrightarrow D=b^2-4ac\ge0$, $\alpha+\beta>0$, $\alpha\beta>0$
(2) 두 근이 모두 음 $\Longleftrightarrow D=b^2-4ac\ge0$, $\alpha+\beta<0$, $\alpha\beta>0$
(3) 두 근이 서로 다른 부호 $\Longleftrightarrow \alpha\beta<0$

유형 07 표준화하여 미지수의 값 구하기
본책 87쪽

정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르는 확률변수 X에 대하여 $\mathrm{P}(m\le X\le a)=k$를 만족시키는 a의 값을 구할 때에는 확률변수 X를 $Z=\frac{X-m}{\sigma}$으로 표준화한 $\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{a-m}{\sigma}\right)=k$에서 표준정규분포표를 이용한다.

0497 답 4
$Z=\frac{X-10}{2}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로
$\mathrm{P}(-a\le X-10\le a)=0.95$에서
$\mathrm{P}(10-a\le X\le 10+a)=0.95$
$\mathrm{P}\left(\frac{10-a-10}{2}\le Z\le\frac{10+a-10}{2}\right)=0.95$
$\mathrm{P}\left(-\frac{a}{2}\le Z\le\frac{a}{2}\right)=0.95$
$2\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{a}{2}\right)=0.95$
$\therefore \mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{a}{2}\right)=0.475$
이때, $\mathrm{P}(0\le Z\le 2)=0.475$이므로
$\frac{a}{2}=2 \qquad \therefore a=4$

0498 답 ②
$Z=\frac{X-36}{4}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로
$\mathrm{P}(X\le a)=0.0228$에서
$\mathrm{P}\left(Z\le\frac{a-36}{4}\right)=0.0228$
$\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{36-a}{4}\right)=0.0228$
$\mathrm{P}(Z\ge0)-\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{36-a}{4}\right)=0.0228$
$0.5-\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{36-a}{4}\right)=0.0228$
$\therefore \mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{36-a}{4}\right)=0.4772$
이때, $\mathrm{P}(0\le Z\le 2)=0.4772$이므로
$\frac{36-a}{4}=2 \qquad \therefore a=28$

0499 답 0.67
$Z=\frac{X-m}{\sigma}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로
$\mathrm{P}(m-2k\sigma\le X\le m+k\sigma)=0.6585$에서
$\mathrm{P}\left(\frac{m-2k\sigma-m}{\sigma}\le Z\le\frac{m+k\sigma-m}{\sigma}\right)=0.6585$
$\mathrm{P}(-2k\le Z\le k)=0.6585$
$\mathrm{P}(-2k\le Z\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z\le k)=0.6585$
$\mathrm{P}(0\le Z\le 2k)+\mathrm{P}(0\le Z\le k)=0.6585$
이때, $\mathrm{P}(0\le Z\le 1.34)+\mathrm{P}(0\le Z\le 0.67)=0.6585$이므로
$k=0.67$

0500 답 0.0013
$Z=\frac{X-m}{\sigma}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로
$\mathrm{P}(m\le X\le 4)=0.4772$에서
$\mathrm{P}\left(\frac{m-m}{\sigma}\le Z\le\frac{4-m}{\sigma}\right)=0.4772$
$\therefore \mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{4-m}{\sigma}\right)=0.4772$
이때, $\mathrm{P}(0\le Z\le 2)=0.4772$이므로 $\frac{4-m}{\sigma}=2$
$\therefore m+2\sigma=4$ ······ ㉠
한편, $\mathrm{P}(-2\le X\le 4)=0.8185$에서
$\mathrm{P}\left(\frac{-2-m}{\sigma}\le Z\le\frac{4-m}{\sigma}\right)=0.8185$
$\mathrm{P}\left(\frac{-2-m}{\sigma}\le Z\le 2\right)=0.8185$

$\mathrm{P}\left(\frac{-2-m}{\sigma}\le Z\le 0\right)+\mathrm{P}(0\le Z\le 2)=0.8185$

$\mathrm{P}\left(\frac{-2-m}{\sigma}\le Z\le 0\right)+0.4772=0.8185$

$\therefore \mathrm{P}\left(0\le Z\le \frac{2+m}{\sigma}\right)=0.3413$

이때, $\mathrm{P}(0\le Z\le 1)=0.3413$이므로 $\frac{2+m}{\sigma}=1$

$\therefore m-\sigma=-2$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $m=0, \sigma=2$

따라서 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 2^2)$을 따르므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\ge 6)&=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{6-0}{2}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\ge 3)\\&=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le 3)\\&=0.5-0.4987=0.0013\end{aligned}$$

참고 $\mathrm{P}(-2\le X\le 4)=0.8185$에서

$\mathrm{P}(-2\le X\le 4)=\mathrm{P}(-2\le X\le m)+\mathrm{P}(m\le X\le 4)$

$0.8185=\mathrm{P}(-2\le X\le m)+0.4772$

$\therefore \mathrm{P}(-2\le X\le m)=0.3413$

이를 이용하여 ㉡을 구할 수도 있다.

0501 답 0.6247

TIP $f(x)=f(2a-x)$이면 $f(x)$의 그래프는 직선 $x=a$에 대하여 대칭이다.

$f(x)=f(8-x)$에서 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=4$에 대하여 대칭이므로 $m=4$

$Z=\frac{X-4}{2}$로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(3\le X\le 7)&=\mathrm{P}\left(\frac{3-4}{2}\le Z\le\frac{7-4}{2}\right)\\&=\mathrm{P}(-0.5\le Z\le 1.5)\\&=\mathrm{P}(-0.5\le Z\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)\\&=\mathrm{P}(0\le Z\le 0.5)+\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)\\&=0.1915+0.4332\\&=0.6247\end{aligned}$$

참고 $f(x)=f(8-x)$에 x대신 $4-x$를 대입하면 $f(4-x)=f(4+x)$이므로 $f(x)$의 그래프는 직선 $x=4$에 대하여 대칭이다.

유형 08 표준화하여 자료 분석하기 본책 88쪽

두 확률변수 X, Y가 각각 정규분포 $\mathrm{N}(m_X,\ \sigma_X{}^2)$, $\mathrm{N}(m_Y,\ \sigma_Y{}^2)$을 따를 때, 확률변수 X와 Y를 각각 $Z_X=\frac{X-m_X}{\sigma_X}$, $Z_Y=\frac{Y-m_Y}{\sigma_Y}$로 표준화하여 확률을 비교한다.

0502 답 수학, 국어, 영어

전체 학생의 국어, 수학, 영어 점수를 각각 확률변수 X_A, X_B, X_C라 하면 X_A, X_B, X_C는 각각 정규분포 $\mathrm{N}(72,\ 4^2)$, $\mathrm{N}(60,\ 3^2)$, $\mathrm{N}(75,\ 5^2)$을 따르므로

$Z_A=\frac{X_A-72}{4}$, $Z_B=\frac{X_B-60}{3}$, $Z_C=\frac{X_C-75}{5}$

로 놓으면 Z_A, Z_B, Z_C는 모두 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

다른 학생들이 현수보다 국어, 수학, 영어 점수가 높을 확률은 각각

$\mathrm{P}(X_A>78)=\mathrm{P}\left(Z_A>\frac{78-72}{4}\right)=\mathrm{P}(Z_A>1.5)$

$\mathrm{P}(X_B>66)=\mathrm{P}\left(Z_B>\frac{66-60}{3}\right)=\mathrm{P}(Z_B>2)$

$\mathrm{P}(X_C>80)=\mathrm{P}\left(Z_C>\frac{80-75}{5}\right)=\mathrm{P}(Z_C>1)$

이때, $\mathrm{P}(Z_B>2)<\mathrm{P}(Z_A>1.5)<\mathrm{P}(Z_C>1)$이므로

$\mathrm{P}(X_B>66)<\mathrm{P}(X_A>78)<\mathrm{P}(X_C>80)$

따라서 현수가 상대적으로 점수가 높은 과목부터 순서대로 나열하면 수학, 국어, 영어이다.

0503 답 ③

$Z_W=\frac{W-54}{4}$, $Z_X=\frac{X-60}{5}$, $Z_Y=\frac{Y-62}{6}$로 놓으면

Z_W, Z_X, Z_Y는 모두 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$a=\mathrm{P}(W\ge 60)=\mathrm{P}\left(Z_W\ge\frac{60-54}{4}\right)=\mathrm{P}\left(Z_W\ge\frac{3}{2}\right)$

$$\begin{aligned}b=\mathrm{P}(X\le 52)&=\mathrm{P}\left(Z_X\le\frac{52-60}{5}\right)=\mathrm{P}\left(Z_X\le-\frac{8}{5}\right)\\&=\mathrm{P}\left(Z_X\ge\frac{8}{5}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}c=\mathrm{P}(Y\ge 58)&=\mathrm{P}\left(Z_Y\ge\frac{58-62}{6}\right)=\mathrm{P}\left(Z_Y\ge-\frac{2}{3}\right)\\&=\mathrm{P}\left(Z_Y\le\frac{2}{3}\right)\end{aligned}$$

이때, $\mathrm{P}\left(Z_X\ge\frac{8}{5}\right)<\mathrm{P}\left(Z_W\ge\frac{3}{2}\right)<\mathrm{P}\left(Z_Y\le\frac{2}{3}\right)$이므로

$b<a<c$

0504 답 C, A, B

1학년, 2학년, 3학년 학생들이 하루에 푸는 수학 문제의 개수를 각각 확률변수 X_A, X_B, X_C라 하면 X_A, X_B, X_C는 각각 정규분포 $\mathrm{N}(15,\ 10^2)$, $\mathrm{N}(30,\ 15^2)$, $\mathrm{N}(40,\ 20^2)$을 따르므로

$Z_A=\frac{X_A-15}{10}$, $Z_B=\frac{X_B-30}{15}$, $Z_C=\frac{X_C-40}{20}$으로 놓으면

Z_A, Z_B, Z_C는 모두 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

1학년, 2학년, 3학년 학생들이 하루에 푸는 수학 문제의 개수가 각각 A, B, C보다 많을 확률은

$\mathrm{P}(X_A>20)=\mathrm{P}\left(Z_A>\frac{20-15}{10}\right)=\mathrm{P}\left(Z_A>\frac{1}{2}\right)$

$\mathrm{P}(X_B>35)=\mathrm{P}\left(Z_B>\frac{35-30}{15}\right)=\mathrm{P}\left(Z_B>\frac{1}{3}\right)$

$\mathrm{P}(X_C>60)=\mathrm{P}\left(Z_C>\frac{60-40}{20}\right)=\mathrm{P}(Z_C>1)$

이때, $\mathrm{P}(Z_C>1)<\mathrm{P}\left(Z_A>\frac{1}{2}\right)<\mathrm{P}\left(Z_B>\frac{1}{3}\right)$이므로

$\mathrm{P}(X_C>60)<\mathrm{P}(X_A>20)<\mathrm{P}(X_B>35)$

따라서 각각 자기 학년에서 상대적으로 하루에 푸는 수학 문제의 개수가 많은 학생부터 순서대로 나열하면 C, A, B이다.

유형 09 정규분포의 활용 ; 확률 구하기 본책 89쪽

(i) 확률변수 X가 따르는 정규분포 $N(m,\ \sigma^2)$을 구한다.

(ii) 확률변수 X를 $Z=\frac{X-m}{\sigma}$으로 표준화한다.

(iii) 표준정규분포표를 이용하여 확률을 구한다.

0505 답 0.0668

응시자의 점수를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $N(44,\ 8^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-44}{8}$로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다. 따라서 구하는 확률은

$$P(X\ge56)=P\left(Z\ge\frac{56-44}{8}\right)=P(Z\ge1.5)$$
$$=P(Z\ge0)-P(0\le Z\le1.5)$$
$$=0.5-0.4332=0.0668$$

0506 답 0.1574

과자 한 개의 무게를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $N(12,\ 2^2)$을 따른다.

이때, 과자 한 상자의 무게를 확률변수 Y라 하면

$E(Y)=E(6X)=6E(X)=6\cdot12=72$

$\sigma(Y)=\sigma(6X)=6\sigma(X)=6\cdot2=12$

이므로 Y는 정규분포 $N(72,\ 12^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{Y-72}{12}$로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$$P(84\le Y\le108)=P\left(\frac{84-72}{12}\le Z\le\frac{108-72}{12}\right)$$
$$=P(1\le Z\le3)$$
$$=P(0\le Z\le3)-P(0\le Z\le1)$$
$$=0.4987-0.3413=0.1574$$

다른 풀이 $Z=\frac{X-12}{2}$로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$$P(84\le6X\le108)=P(14\le X\le18)$$
$$=P\left(\frac{14-12}{2}\le Z\le\frac{18-12}{2}\right)$$
$$=P(1\le Z\le3)=0.1574$$

0507 답 ②

주스 한 잔의 양을 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $N(900,\ 50^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-900}{50}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다. 따라서 구하는 확률은

$$P(X\le880)=P\left(Z\le\frac{880-900}{50}\right)=P(Z\le-0.4)$$
$$=P(Z\ge0.4)$$
$$=P(Z\ge0)-P(0\le Z\le0.4)$$
$$=0.5-0.1554=0.3446$$

0508 답 0.1587

수하물의 무게를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $N(18,\ 2^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-18}{2}$로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다. 수하물의 무게가 20 kg 이상, 즉 $X\ge20$이면 추가 요금이 부과되므로 구하는 확률은

$$P(X\ge20)=P\left(Z\ge\frac{20-18}{2}\right)=P(Z\ge1)$$
$$=P(Z\ge0)-P(0\le Z\le1)$$
$$=0.5-0.3413$$
$$=0.1587$$

0509 답 ②

학생들의 몸무게를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $N(65,\ 3^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-65}{3}$로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

$$\therefore P(68\le X\le71)=P\left(\frac{68-65}{3}\le Z\le\frac{71-65}{3}\right)$$
$$=P(1\le Z\le2)$$
$$=P(0\le Z\le2)-P(0\le Z\le1)$$
$$=0.48-0.34=0.14$$

따라서 몸무게가 68 kg 이상 71 kg 이하인 학생은 전체의 14 %이다.

0510 답 4

과일의 무게를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $N(400,\ 20^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-400}{20}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다. '상' 등급으로 분류되려면 $X\ge440$이어야 하므로

$$P(X\ge440)=P\left(Z\ge\frac{440-400}{20}\right)=P(Z\ge2)$$
$$=P(Z\ge0)-P(0\le Z\le2)$$
$$=0.5-0.48=0.02$$

이때, 두 과일 A, B의 무게는 서로 독립이므로 구하는 확률은

$(0.02)^2=4\cdot10^{-4}$

$\therefore k=4$

유형 10 정규분포의 활용 ; 도수 구하기 본책 90쪽

(i) 학생들의 키, 몸무게, 성적 등을 확률변수 X로 놓는다.

(ii) 확률변수 X가 따르는 정규분포 $N(m,\ \sigma^2)$을 구한다.

(iii) 확률변수 X를 표준화한 다음 표준정규분포표를 이용하여 X가 특정 범위에 포함될 확률을 구한다.

(iv) 구한 확률과 전체 학생 수를 곱한다.

0511 답 533

계란의 무게를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $N(53,\ 8^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-53}{8}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

$\therefore \mathrm{P}(45 \le X \le 57) = \mathrm{P}\left(\frac{45-53}{8} \le Z \le \frac{57-53}{8}\right)$
$= \mathrm{P}(-1 \le Z \le 0.5)$
$= \mathrm{P}(-1 \le Z \le 0) + \mathrm{P}(0 \le Z \le 0.5)$
$= \mathrm{P}(0 \le Z \le 1) + \mathrm{P}(0 \le Z \le 0.5)$
$= 0.341 + 0.192$
$= 0.533$

따라서 구하는 계란의 개수는
$1000 \times 0.533 = 533$(개)

0512 답 15

학생들의 키를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(172,\ 4^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-172}{4}$로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\therefore \mathrm{P}(X \ge 182) = \mathrm{P}\left(Z \ge \frac{182-172}{4}\right) = \mathrm{P}(Z \ge 2.5)$
$= \mathrm{P}(Z \ge 0) - \mathrm{P}(0 \le Z \le 2.5)$
$= 0.5 - 0.49$
$= 0.01$

따라서 구하는 학생의 수는
$1500 \times 0.01 = 15$(명)

0513 답 ①

놀이기구의 운행 시간을 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(40,\ 5^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-40}{5}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\therefore \mathrm{P}(X \le 30) = \mathrm{P}\left(Z \le \frac{30-40}{5}\right) = \mathrm{P}(Z \le -2)$
$= \mathrm{P}(Z \ge 2) = \mathrm{P}(Z \ge 0) - \mathrm{P}(0 \le Z \le 2)$
$= 0.5 - 0.48$
$= 0.02$

따라서 구하는 횟수는
$100 \times 0.02 = 2$(번)

0514 답 1637

배터리가 충전한 후 완전히 방전되는 데까지 걸리는 시간을 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(120,\ 10^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-120}{10}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\therefore \mathrm{P}(100 \le X \le 130) = \mathrm{P}\left(\frac{100-120}{10} \le Z \le \frac{130-120}{10}\right)$
$= \mathrm{P}(-2 \le Z \le 1)$
$= \mathrm{P}(-2 \le Z \le 0) + \mathrm{P}(0 \le Z \le 1)$
$= \mathrm{P}(0 \le Z \le 2) + \mathrm{P}(0 \le Z \le 1)$
$= 0.4772 + 0.3413$
$= 0.8185$

따라서 구하는 배터리의 개수는
$2000 \times 0.8185 = 1637$(개)

0515 답 35

기말고사 점수를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-m}{\sigma}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}(m \le X \le 70) = \frac{170}{500} = 0.34$에서

$\mathrm{P}\left(\frac{m-m}{\sigma} \le Z \le \frac{70-m}{\sigma}\right) = 0.34$

$\therefore \mathrm{P}\left(0 \le Z \le \frac{70-m}{\sigma}\right) = 0.34$

이때, $\mathrm{P}(0 \le Z \le 1) = 0.34$이므로 $\frac{70-m}{\sigma} = 1$

$\therefore m + \sigma = 70$ …… ㉠

한편, $\mathrm{P}(40 \le X \le 70) = \frac{410}{500} = 0.82$에서

$\mathrm{P}\left(\frac{40-m}{\sigma} \le Z \le \frac{70-m}{\sigma}\right) = 0.82$

$\mathrm{P}\left(\frac{40-m}{\sigma} \le Z \le 1\right) = 0.82$

$\mathrm{P}\left(\frac{40-m}{\sigma} \le Z \le 0\right) + \mathrm{P}(0 \le Z \le 1) = 0.82$

$\therefore \mathrm{P}\left(0 \le Z \le \frac{m-40}{\sigma}\right) = 0.82 - 0.34 = 0.48$

이때, $\mathrm{P}(0 \le Z \le 2) = 0.48$이므로 $\frac{m-40}{\sigma} = 2$

$\therefore m - 2\sigma = 40$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $m=60$, $\sigma=10$

$\therefore \mathrm{P}(X \ge 75) = \mathrm{P}\left(Z \ge \frac{75-60}{10}\right) = \mathrm{P}(Z \ge 1.5)$
$= \mathrm{P}(Z \ge 0) - \mathrm{P}(0 \le Z \le 1.5)$
$= 0.5 - 0.43$
$= 0.07$

따라서 구하는 학생의 수는
$500 \times 0.07 = 35$(명)

유형 11 정규분포의 활용 ; 최대·최소를 만족시키는 값 구하기 본책 90쪽

(i) 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따를 때, 상위 k % 안에 드는 X의 최솟값을 a라 하면 $\mathrm{P}(X \ge a) = \frac{k}{100}$

(ii) 확률변수 $Z=\frac{X-m}{\sigma}$에 대한 식으로 변형하면
$\mathrm{P}\left(Z \ge \frac{a-m}{\sigma}\right) = \frac{k}{100}$

(iii) 이를 만족시키는 a의 값을 찾는다.

0516 답 86점

응시자의 점수를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(74,\ 10^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-74}{10}$로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

합격자의 최저 점수를 a점이라 하면

$P(X \ge a)=\frac{60}{500}=0.12$에서

$P\left(Z \ge \frac{a-74}{10}\right)=0.12$

$P(Z \ge 0)-P\left(0 \le Z \le \frac{a-74}{10}\right)=0.12$

$\therefore P\left(0 \le Z \le \frac{a-74}{10}\right)=0.5-0.12=0.38$

이때, $P(0 \le Z \le 1.2)=0.38$이므로

$\frac{a-74}{10}=1.2$, $a-74=12$ $\quad \therefore a=86$

따라서 합격자의 최저 점수는 86점이다.

0517 답 620.8점

응시자의 점수를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $N(600,\ 20^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-600}{20}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

상위 15 % 이내에 속하는 사람의 최저 점수를 a점이라 하면

$P(X \ge a)=0.15$에서 $P\left(Z \ge \frac{a-600}{20}\right)=0.15$

$P(Z \ge 0)-P\left(0 \le Z \le \frac{a-600}{20}\right)=0.15$

$\therefore P\left(0 \le Z \le \frac{a-600}{20}\right)=0.5-0.15=0.35$

이때, $P(0 \le Z \le 1.04)=0.35$이므로

$\frac{a-600}{20}=1.04$, $a-600=20.8$ $\quad \therefore a=620.8$

따라서 상위 15 % 이내에 속하는 사람의 최저 점수는 620.8점이다.

0518 답 321

사과 나무의 높이를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $N(360,\ 30^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-360}{30}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

50번째로 높이가 낮은 나무의 높이를 a라 하면

$P(X \le a)=\frac{50}{500}=0.1$에서

$P\left(Z \le \frac{a-360}{30}\right)=0.1$

$P\left(Z \ge \frac{360-a}{30}\right)=0.1$

$P(Z \ge 0)-P\left(0 \le Z \le \frac{360-a}{30}\right)=0.1$

$\therefore P\left(0 \le Z \le \frac{360-a}{30}\right)=0.5-0.1=0.4$

이때, $P(0 \le Z \le 1.3)=0.4$이므로

$\frac{360-a}{30}=1.3$, $360-a=39$ $\quad \therefore a=321$

따라서 영양분을 공급받을 나무의 높이의 최댓값은 321이다.

0519 답 ②

A 농장에서 생산하는 귤의 무게를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $N(84,\ 10^2)$을 따르므로 $Z_X=\frac{X-84}{10}$로 놓으면 Z_X는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

A 농장에서 생산하는 귤의 무게가 98 이상일 확률은

$P(X \ge 98)=P\left(Z_X \ge \frac{98-84}{10}\right)=P(Z_X \ge 1.4)$

$=P(Z_X \ge 0)-P(0 \le Z_X \le 1.4)$

$=0.5-0.42=0.08$

한편, B 농장에서 생산하는 귤의 무게를 확률변수 Y라 하면 Y는 정규분포 $N(79,\ 20^2)$을 따르므로 $Z_Y=\frac{Y-79}{20}$로 놓으면 Z_Y는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

이때, B 농장에서 무게가 a 이하인 귤의 개수는 A 농장에서 무게가 98 이상인 귤의 개수의 2배이므로 B 농장에서 생산하는 귤의 무게가 a 이하일 확률은 A 농장에서 생산하는 귤의 무게가 98 이상일 확률의 2배이다. 즉,

$P(Y \le a)=2P(X \ge 98)$

$P\left(Z_Y \le \frac{a-79}{20}\right)=2 \times 0.08=0.16$

$P\left(Z_Y \ge \frac{79-a}{20}\right)=0.16$

$P(Z_Y \ge 0)-P\left(0 \le Z_Y \le \frac{79-a}{20}\right)=0.16$

$\therefore P\left(0 \le Z_Y \le \frac{79-a}{20}\right)=0.5-0.16=0.34$

이때, $P(0 \le Z_Y \le 1)=0.34$이므로

$\frac{79-a}{20}=1$, $79-a=20$ $\quad \therefore a=59$

유형 12 이항분포와 정규분포의 관계 본책 91쪽

확률변수 X가 이항분포 $B(n,\ p)$를 따를 때,
⇨ n이 충분히 크면 X는 근사적으로 정규분포 $N(np,\ npq)$를 따른다. (단, $q=1-p$)

0520 답 0.8413

확률변수 X에 대하여

$E(X)=162 \cdot \frac{1}{3}=54$, $V(X)=162 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}=36$

따라서 X는 근사적으로 정규분포 $N(54,\ 6^2)$을 따르므로

$Z=\frac{X-54}{6}$로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

$\therefore P(X \ge 48)=P\left(Z \ge \frac{48-54}{6}\right)=P(Z \ge -1)$

$=P(-1 \le Z \le 0)+P(Z \ge 0)$

$=P(0 \le Z \le 1)+0.5$

$=0.3413+0.5$

$=0.8413$

0521 답 ④

확률변수 X는 이항분포 $B\left(100,\ \frac{9}{10}\right)$를 따르므로

$E(X)=100\cdot\frac{9}{10}=90$, $V(X)=100\cdot\frac{9}{10}\cdot\frac{1}{10}=9$

따라서 X는 근사적으로 정규분포 $N(90,\ 3^2)$을 따르므로

$Z=\frac{X-90}{3}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

$$\begin{aligned}\therefore P(81\le X\le 99)&=P\left(\frac{81-90}{3}\le Z\le\frac{99-90}{3}\right)\\&=P(-3\le Z\le 3)\\&=2P(0\le Z\le 3)\\&=2\times 0.4987=0.9974\end{aligned}$$

0522 답 0.1587

$$P(X=x)=\begin{cases}{}_{192}C_0\left(\frac{3}{4}\right)^{192} & (x=0)\\ {}_{192}C_x\left(\frac{1}{4}\right)^x\left(\frac{3}{4}\right)^{192-x} & (x=1,\ 2,\ \cdots,\ 191)\\ {}_{192}C_{192}\left(\frac{1}{4}\right)^{192} & (x=192)\end{cases}$$

확률변수 X는 이항분포 $B\left(192,\ \frac{1}{4}\right)$을 따르므로

$E(X)=192\cdot\frac{1}{4}=48$, $V(X)=192\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}=36$

따라서 X는 근사적으로 정규분포 $N(48,\ 6^2)$을 따르므로

$Z=\frac{X-48}{6}$로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

$$\begin{aligned}\therefore\ &{}_{192}C_{192}\left(\frac{1}{4}\right)^{192}+{}_{192}C_{191}\left(\frac{1}{4}\right)^{191}\left(\frac{3}{4}\right)^1+\cdots\\&\qquad+{}_{192}C_{55}\left(\frac{1}{4}\right)^{55}\left(\frac{3}{4}\right)^{137}+{}_{192}C_{54}\left(\frac{1}{4}\right)^{54}\left(\frac{3}{4}\right)^{138}\\&=P(X\ge 54)\\&=P\left(Z\ge\frac{54-48}{6}\right)=P(Z\ge 1)\\&=P(Z\ge 0)-P(0\le Z\le 1)\\&=0.5-0.3413=0.1587\end{aligned}$$

유형 13 이항분포와 정규분포의 관계의 활용 ; 확률 구하기 본책 92쪽

n번의 독립시행에서 사건 A가 a번 이상 b번 이하로 일어날 확률은

(i) 사건 A가 일어나는 횟수를 확률변수 X라 하고, 주어진 상황을 이항분포 $B(n,\ p)$로 나타낸다.

(ii) 확률변수 X의 평균과 분산을 구한다.

(iii) 확률변수 X가 근사적으로 정규분포를 따름을 이용하여 X를 표준화한다.

(iv) 표준정규분포표를 이용하여 $P(a\le X\le b)$의 값을 구한다.

0523 답 0.8413

시험에 합격할 확률은 $\frac{9000}{10000}=\frac{9}{10}$이므로 시험에 합격한 사람의 수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $B\left(900,\ \frac{9}{10}\right)$를 따른다.

$\therefore E(X)=900\cdot\frac{9}{10}=810$, $V(X)=900\cdot\frac{9}{10}\cdot\frac{1}{10}=81$

따라서 X는 근사적으로 정규분포 $N(810,\ 9^2)$을 따르므로

$Z=\frac{X-810}{9}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

$$\begin{aligned}\therefore P(X\le 819)&=P\left(Z\le\frac{819-810}{9}\right)=P(Z\le 1)\\&=P(Z\le 0)+P(0\le Z\le 1)\\&=0.5+P(0\le Z\le 1)\\&=0.5+0.3413=0.8413\end{aligned}$$

0524 답 0.6826

기숙사에 살 확률은 $\frac{25}{100}=\frac{1}{4}$이므로 기숙사에 사는 학생의 수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $B\left(432,\ \frac{1}{4}\right)$을 따른다.

$\therefore E(X)=432\cdot\frac{1}{4}=108$, $V(X)=432\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}=81$

따라서 X는 근사적으로 정규분포 $N(108,\ 9^2)$을 따르므로

$Z=\frac{X-108}{9}$로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

$$\begin{aligned}\therefore P(99\le X\le 117)&=P\left(\frac{99-108}{9}\le Z\le\frac{117-108}{9}\right)\\&=P(-1\le Z\le 1)\\&=2P(0\le Z\le 1)\\&=2\times 0.3413=0.6826\end{aligned}$$

0525 답 ①

입장하지 않을 확률은 $\frac{125}{1000}=\frac{1}{8}$이므로 입장하는 사람의 수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $B\left(448,\ \frac{7}{8}\right)$을 따른다.

$\therefore E(X)=448\cdot\frac{7}{8}=392$, $V(X)=448\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{1}{8}=49$

따라서 X는 근사적으로 정규분포 $N(392,\ 7^2)$을 따르므로

$Z=\frac{X-392}{7}$로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

좌석이 부족한 경우는 입장하는 사람의 수가 406명 이상일 때이므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}P(X\ge 406)&=P\left(Z\ge\frac{406-392}{7}\right)=P(Z\ge 2)\\&=P(Z\ge 0)-P(0\le Z\le 2)\\&=0.5-0.4772\\&=0.0228\end{aligned}$$

0526 답 0.3085

TIP 435점 이상을 얻으려면 3 이상의 눈이 몇 번 이상 나와야 하는지를 먼저 구한다.

3 이상의 눈이 나오는 확률은 $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$이므로 3 이상의 눈이 나오는 횟수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $B\left(162,\ \frac{2}{3}\right)$를 따른다.

$\therefore E(X)=162\cdot\frac{2}{3}=108$, $V(X)=162\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}=36$

즉, X는 근사적으로 정규분포 $N(108,\ 6^2)$을 따르므로

$Z=\frac{X-108}{6}$로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

한편, 2 이하의 눈이 나오는 횟수는 $162-X$이므로
$2(162-X)+3X\geq435,\ 324+X\geq435$
$\therefore X\geq111$
따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}P(X\geq111)&=P\left(Z\geq\frac{111-108}{6}\right)=P(Z\geq0.5)\\&=P(Z\geq0)-P(0\leq Z\leq0.5)\\&=0.5-0.1915\\&=0.3085\end{aligned}$$

유형 14 이항분포와 정규분포의 관계의 활용 ; 미지수의 값 구하기 본책 92쪽

확률변수 X가 이항분포 $B(n,\ p)$를 따를 때, $P(X\geq a)=k$ (k는 상수)를 만족시키는 a의 값을 구할 때에는
⇨ X가 근사적으로 정규분포 $N(np,\ np(1-p))$를 따름을 이용하여 X를 표준화하고 표준정규분포표를 이용한다.

0527 답 18

두 개의 동전이 모두 앞면이 나올 확률은 $\frac{1}{4}$이므로 두 개 모두 앞면이 나온 횟수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $B\left(48,\ \frac{1}{4}\right)$을 따른다.
$\therefore E(X)=48\cdot\frac{1}{4}=12,\ V(X)=48\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}=9$
따라서 X는 근사적으로 정규분포 $N(12,\ 3^2)$을 따르므로
$Z=\frac{X-12}{3}$로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.
$P(X\geq a)=0.0228$에서 $P\left(Z\geq\frac{a-12}{3}\right)=0.0228$
$P(Z\geq0)-P\left(0\leq Z\leq\frac{a-12}{3}\right)=0.0228$
$\therefore P\left(0\leq Z\leq\frac{a-12}{3}\right)=0.5-0.0228=0.4772$
이때, $P(0\leq Z\leq2)=0.4772$이므로
$\frac{a-12}{3}=2,\ a-12=6 \qquad \therefore a=18$

0528 답 22

확률변수 X가 이항분포 $B\left(100,\ \frac{1}{5}\right)$을 따르므로
$E(X)=100\cdot\frac{1}{5}=20,\ V(X)=100\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5}=16$
따라서 X는 근사적으로 정규분포 $N(20,\ 4^2)$을 따르므로
$Z=\frac{X-20}{4}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.
$P(X\leq a)=0.6915$에서 $P\left(Z\leq\frac{a-20}{4}\right)=0.6915$
$P(Z\leq0)+P\left(0\leq Z\leq\frac{a-20}{4}\right)=0.6915$
$\therefore P\left(0\leq Z\leq\frac{a-20}{4}\right)=0.6915-0.5=0.1915$
이때, $P(0\leq Z\leq0.5)=0.1915$이므로
$\frac{a-20}{4}=0.5,\ a-20=2 \qquad \therefore a=22$

STEP 3 | 심화 Master

0529 답 10

TIP $P(0\leq X\leq3)=1$임을 이용하여 a의 값을 먼저 구한다.
확률변수 X가 $0\leq x\leq3$에서 모든 실수 값을 가지므로
$P(0\leq X\leq3)=1$이어야 한다.
$P(x\leq X\leq3)=a(3-x)\ (0\leq x\leq3)$에 $x=0$을 대입하면
$P(0\leq X\leq3)=3a=1 \qquad \therefore a=\frac{1}{3}$

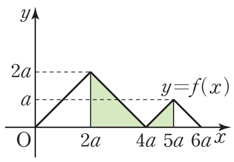
$$\begin{aligned}\therefore P\left(0\leq X\leq\frac{1}{3}\right)&=P(0\leq X\leq3)-P\left(\frac{1}{3}\leq X\leq3\right)\\&=1-\frac{1}{3}\left(3-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{9}\end{aligned}$$

따라서 $p=9,\ q=1$이므로 $p+q=10$

참고 $P(x\leq X\leq3)=\frac{1}{3}(3-x)$이므로
$P\left(\frac{1}{3}\leq X\leq3\right)=\frac{1}{3}\left(3-\frac{1}{3}\right)=\frac{8}{9}$

0530 답 $\frac{1}{2}$

TIP $y=f(x)$의 그래프를 그려 a의 값을 먼저 구한다.
확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 이때, $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이므로

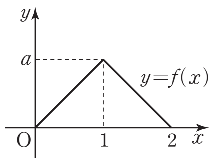


$\frac{1}{2}\cdot4a\cdot2a+\frac{1}{2}\cdot2a\cdot a=1,\ 5a^2=1$
$\therefore a=\frac{1}{\sqrt{5}}\ (\because a>0)$
$P(2a\leq X\leq5a)$는 위의 그림의 색칠한 도형의 넓이와 같으므로

$$\begin{aligned}P(2a\leq X\leq5a)&=\frac{1}{2}\cdot2a\cdot2a+\frac{1}{2}\cdot a\cdot a\\&=\frac{5}{2}a^2\\&=\frac{5}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

0531 답 ④

TIP $y=f(x)$의 그래프를 그려 a의 값을 먼저 구한다.
확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 이때, $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이므로

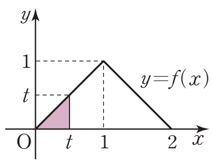


$\frac{1}{2}\cdot2\cdot a=1 \qquad \therefore a=1$

$$\therefore f(x)=\begin{cases}x & (0\leq x\leq1)\\-x+2 & (1\leq x\leq2)\\0 & (x\leq0\text{ 또는 }x\geq2)\end{cases}$$

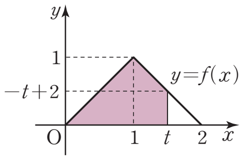
(i) $0\leq t\leq1$일 때

$$\begin{aligned}F(t)&=P(X\leq t)\\&=\frac{1}{2}\cdot t\cdot t=\frac{1}{2}t^2\end{aligned}$$



(ii) $1 \le t \le 2$일 때

$$F(t)=\mathrm{P}(X \le t)$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(1-t+2)\cdot(t-1)$$
$$=-\frac{1}{2}t^2+2t-1$$



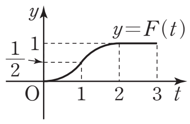
(iii) $2 \le t \le 3$일 때

$$F(t)=\mathrm{P}(X \le t)=1$$

(i)~(iii)에서

$$F(t)=\begin{cases} \frac{1}{2}t^2 & (0 \le t \le 1) \\ -\frac{1}{2}t^2+2t-1 & (1 \le t \le 2) \\ 1 & (2 \le t \le 3) \end{cases}$$

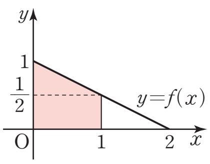
이므로 $y=F(t)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 따라서 구하는 그래프는 ④이다.



0532 답 $\frac{1023}{1024}$

TIP $y=f(x)$의 그래프를 그려 $\mathrm{P}(A)$의 값을 먼저 구한다.

확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 이때, 사건 A가 일어날 확률은 오른쪽 그림의 색칠한 사다리꼴의 넓이와 같으므로



$$\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(0 \le X \le 1)$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot 1=\frac{3}{4}$$

이므로 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(5,\ \frac{3}{4}\right)$을 따른다.

따라서 사건 A가 1회 이상 일어날 확률은

$$1-\mathrm{P}(X=0)=1-{}_5\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{4}\right)^5=1-\left(\frac{1}{4}\right)^5$$
$$=1-\frac{1}{1024}=\frac{1023}{1024}$$

0533 답 $\frac{3}{4}$

TIP 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따를 때, $\mathrm{P}(X \le a)=\mathrm{P}(X \ge b)$이면 $m=\frac{a+b}{2}$임을 이용한다.

확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따른다고 하면

$\mathrm{P}(X \le 20)=\mathrm{P}(X \ge 30)$이므로

$$m=\frac{20+30}{2}=25$$

$m=25$이므로 $\mathrm{P}(20 \le X \le 25)=\mathrm{P}(25 \le X \le 30)$이고,

$$\mathrm{P}(X \le 20)=\mathrm{P}(X \ge 30)=\mathrm{P}(20 \le X \le 25)$$
$$=\mathrm{P}(25 \le X \le 30)=\frac{1}{4}$$

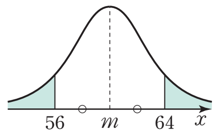
$$\therefore \mathrm{P}(X \ge 20)=\mathrm{P}(20 \le X \le 25)+\mathrm{P}(X \ge 25)$$
$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$$

0534 답 ④

TIP 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르는 확률변수 X의 확률밀도함수의 그래프는 직선 $x=m$에 대하여 대칭임을 이용하여 m의 값을 먼저 구한다.

조건 (가)에서 $\mathrm{P}(X \ge 64)=\mathrm{P}(X \le 56)$이므로

$$m=\mathrm{E}(X)=\frac{64+56}{2}=60$$



조건 (나)에서 $\mathrm{E}(X^2)=3616$이므로

$$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$$
$$=3616-60^2=16$$

$$\therefore \sigma(X)=\sqrt{16}=4$$

즉, 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(60,\ 4^2)$을 따르므로

$$\mathrm{P}(X \le 68)=\mathrm{P}(X \le 60+8)$$
$$=\mathrm{P}(X \le m+2\sigma)$$
$$=\mathrm{P}(X \le m)+\mathrm{P}(m \le X \le m+2\sigma)$$
$$=0.5+0.4772$$
$$=0.9772$$

참고 주어진 표를 표준화하면

$\mathrm{P}(m \le X \le m+2\sigma)=\mathrm{P}(0 \le Z \le 2)=0.4772$이고,

확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(60,\ 4^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-60}{4}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

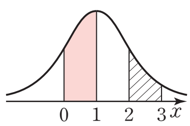
$$\therefore \mathrm{P}(X \le 68)=\mathrm{P}\left(Z \le \frac{68-60}{4}\right)=\mathrm{P}(Z \le 2)$$
$$=\mathrm{P}(Z \le 0)+\mathrm{P}(0 \le Z \le 2)=0.9772$$

0535 답 ④

TIP 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따를 때 확률변수 $Z=\frac{X-m}{\sigma}$은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따름을 이용한다.

확률변수 X, Y가 각각 정규분포 $\mathrm{N}(1,\ a^2)$, $\mathrm{N}(1,\ b^2)$을 따르므로 $Z_X=\frac{X-1}{a}$, $Z_Y=\frac{Y-1}{b}$로 놓으면 Z_X, Z_Y는 모두 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

ㄱ. 확률변수 X의 평균이 1이므로 확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



$\therefore \mathrm{P}(0 \le X \le 1) > \mathrm{P}(2 \le X \le 3)$

ㄴ. $\mathrm{P}(-a+1 \le X \le 1)=\mathrm{P}\left(\frac{-a+1-1}{a} \le Z_X \le \frac{1-1}{a}\right)$

$$=\mathrm{P}(-1 \le Z_X \le 0)$$
$$=\mathrm{P}(0 \le Z_X \le 1)$$

$\mathrm{P}(1 \le Y \le b+1)=\mathrm{P}\left(\frac{1-1}{b} \le Z_Y \le \frac{b+1-1}{b}\right)$

$$=\mathrm{P}(0 \le Z_Y \le 1)$$

$\therefore \mathrm{P}(-a+1 \le X \le 1)=\mathrm{P}(1 \le Y \le b+1)$

ㄷ. $\mathrm{P}(0 \le X \le 2)=\mathrm{P}\left(\frac{0-1}{a} \le Z_X \le \frac{2-1}{a}\right)$

$$=\mathrm{P}\left(-\frac{1}{a} \le Z_X \le \frac{1}{a}\right)$$
$$=2\mathrm{P}\left(0 \le Z_X \le \frac{1}{a}\right)$$

$$\begin{aligned}P(-1\le Y\le 3)&=P\left(\frac{-1-1}{b}\le Z_Y\le\frac{3-1}{b}\right)\\&=P\left(-\frac{2}{b}\le Z_Y\le\frac{2}{b}\right)\\&=2P\left(0\le Z_Y\le\frac{2}{b}\right)\end{aligned}$$

이므로 $\frac{1}{a}=\frac{2}{b}$, 즉 $2a=b$ $\qquad\therefore a<b$

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

참고 ㄷ. a와 b는 표준편차이므로 모두 양수이다.

0536 답 ③

TIP $P(|X|\le a)=P(|Y|\le b)$를 표준화하여 a와 b의 관계식을 구한다.

확률변수 X와 Y가 각각 정규분포 $N(0,\ \sigma^2)$, $N\left(0,\ \left(\frac{\sigma}{2}\right)^2\right)$을 따르므로 $Z_X=\frac{X}{\sigma}$, $Z_Y=\frac{Y}{\frac{\sigma}{2}}=\frac{2Y}{\sigma}$로 놓으면 Z_X, Z_Y는 모두 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

이때, $P(|X|\le a)=P(|Y|\le b)$에서

$P\left(|Z_X|\le\frac{a}{\sigma}\right)=P\left(|Z_Y|\le\frac{2b}{\sigma}\right)$이므로 $a=2b$

ㄱ. a와 b 모두 양수이고 $a=2b$이므로 $a>b$

ㄴ. $\frac{a}{2}=b$이므로 $P\left(Y>\frac{a}{2}\right)=P(Y>b)$

이때, $P(Y>b)=P\left(Z_Y>\frac{2b}{\sigma}\right)$이므로

$P\left(Z>\frac{2b}{\sigma}\right)=P\left(Y>\frac{a}{2}\right)$

ㄷ. $P(0\le Y\le b)=P(Y\le b)-P(Y\le 0)$

$=0.7-0.5=0.2$

이므로

$P(|Y|\le b)=P(-b\le Y\le b)=2P(0\le Y\le b)$

$=0.4$

$\therefore P(|X|\le a)=P(|Y|\le b)=0.4$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

0537 답 0.1359

TIP 두 곡선과 x축 및 두 직선 $x=30$, $x=m$으로 둘러싸인 도형의 넓이를 이용하여 S_1, S_2를 나타낸다.

$E(X)=30$, $\sigma(X)=10$이고, $Y=aX-10$이므로

$E(Y)=E(aX-10)=aE(X)-10=30a-10$

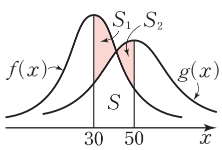
$\sigma(Y)=\sigma(aX-10)=a\sigma(X)=10a$

이때, $10a=20$이므로 $a=2$

$\therefore E(Y)=30\cdot 2-10=50$, $\sigma(Y)=20$

따라서 확률변수 X와 Y는 각각 정규분포 $N(30,\ 10^2)$, $N(50,\ 20^2)$을 따르므로 $Z_X=\frac{X-30}{10}$, $Z_Y=\frac{Y-50}{20}$으로 놓으면 Z_X, Z_Y는 모두 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

오른쪽 그림과 같이 두 곡선과 x축 및 두 직선 $x=30$, $x=m$, 즉 $x=50$으로 둘러싸인 도형의 넓이를 S라 하면



$S_1=P(30\le X\le 50)-S$

$S_2=P(30\le Y\le 50)-S$

$\therefore S_1-S_2$

$=P(30\le X\le 50)-P(30\le Y\le 50)$

$=P\left(\frac{30-30}{10}\le Z_X\le\frac{50-30}{10}\right)-P\left(\frac{30-50}{20}\le Z_Y\le\frac{50-50}{20}\right)$

$=P(0\le Z_X\le 2)-P(-1\le Z_Y\le 0)$

$=P(0\le Z_X\le 2)-P(0\le Z_Y\le 1)$

$=0.4772-0.3413$

$=0.1359$

0538 답 8

TIP 확률변수 X가 정규분포 $N(m,\ \sigma^2)$을 따를 때 확률변수 $Z=\frac{X-m}{\sigma}$는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따름을 이용하여 $F(x)$를 정리한다.

확률변수 X가 정규분포 $N(m,\ \sigma^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-m}{\sigma}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

$\therefore F(x)=P(X\le x)=P\left(Z\le\frac{x-m}{\sigma}\right)$

이때,

$$\begin{aligned}F\left(\frac{13}{2}\right)&=P\left(X\le\frac{13}{2}\right)=P\left(Z\le\frac{\frac{13}{2}-m}{\sigma}\right)\\&=P(Z\le 0)+P\left(0\le Z\le\frac{\frac{13}{2}-m}{\sigma}\right)\end{aligned}$$

$$\therefore P\left(0\le Z\le\frac{\frac{13}{2}-m}{\sigma}\right)=F\left(\frac{13}{2}\right)-P(Z\le 0)$$

$=0.8413-0.5=0.3413$

이때, $P(0\le Z\le 1)=0.3413$이므로

$\frac{\frac{13}{2}-m}{\sigma}=1 \qquad \therefore \sigma=\frac{13}{2}-m$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

또, $0.5\le F\left(\frac{11}{2}\right)\le \underbrace{0.6915}_{=0.5+0.1915=P(Z\le 0.5)}$에서

$P(Z\le 0)\le P\left(Z\le\frac{\frac{11}{2}-m}{\sigma}\right)\le P(Z\le 0.5)$

이므로

$0\le\frac{\frac{11}{2}-m}{\sigma}\le 0.5$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하여 정리하면

$\frac{9}{2}\le m\le\frac{11}{2}$이고 m은 자연수이므로 $m=5$, $\sigma=\frac{3}{2}$

한편,

$$\begin{aligned}F(k)&=P(X\le k)=P\left(Z\le\frac{k-5}{\frac{3}{2}}\right)\\&=P(Z\le 0)+P\left(0\le Z\le\frac{k-5}{\frac{3}{2}}\right)\end{aligned}$$

$\therefore \mathrm{P}\left(0\le Z\le \frac{k-5}{\frac{3}{2}}\right)=F(k)-\mathrm{P}(Z\le 0)$

$=0.9772-0.5=0.4772$

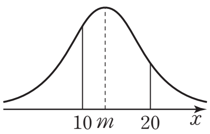
이때, $\mathrm{P}(0\le Z\le 2)=0.4772$이므로

$\frac{k-5}{\frac{3}{2}}=2$, $k-5=3$ $\quad\therefore k=8$

0539 답 ③

TIP 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르는 확률변수 X의 확률밀도함수의 그래프는 직선 $x=m$에 대하여 대칭임을 이용하여 m의 값을 먼저 구한다.

확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 5^2)$을 따르므로 확률밀도함수 $f(x)$의 그래프는 $x=m$에 대하여 대칭이고 m의 값에서 멀어질수록 함숫값은 더 작아진다. 조건 ㈎에서 $f(10)>f(20)$이므로 오른쪽 그림에서

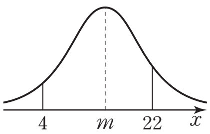


$|m-10|<|m-20|$

$m-10<20-m$, $2m<30$

$\therefore m<15$ ...... ㉠

조건 ㈏에서 $f(4)<f(22)$이므로 오른쪽 그림에서 $|m-4|>|m-22|$



$m-4>22-m$, $2m>26$

$\therefore m>13$ ......㉡

㉠, ㉡에서 $13<m<15$이고, m은 자연수이므로 $m=14$

이때, $Z=\frac{X-14}{5}$로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$\mathrm{P}(17\le X\le 18)=\mathrm{P}\left(\frac{17-14}{5}\le Z\le \frac{18-14}{5}\right)$

$=\mathrm{P}(0.6\le Z\le 0.8)$

$=\mathrm{P}(0\le Z\le 0.8)-\mathrm{P}(0\le Z\le 0.6)$

$=0.288-0.226=0.062$

0540 답 $\frac{2}{3}$

TIP 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르는 확률변수 Z에 대하여 $\mathrm{P}(Z\le -a)=\mathrm{P}(Z\ge a)$임을 이용한다.

형광등 A, B의 길이를 각각 확률변수 X, Y라 하면 X, Y는 각각 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma_1{}^2)$, $\mathrm{N}(m+25,\ \sigma_2{}^2)$을 따르므로

$Z_X=\frac{X-m}{\sigma_1}$, $Z_Y=\frac{Y-(m+25)}{\sigma_2}$로 놓으면 Z_X, Z_Y는 모두 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

이때, $\mathrm{P}(X\ge m+10)=\mathrm{P}(Y\le m+10)$이므로

$\mathrm{P}\left(Z_X\ge \frac{m+10-m}{\sigma_1}\right)=\mathrm{P}\left(Z_Y\le \frac{m+10-(m+25)}{\sigma_2}\right)$

$\mathrm{P}\left(Z_X\ge \frac{10}{\sigma_1}\right)=\mathrm{P}\left(Z_Y\le -\frac{15}{\sigma_2}\right)=\mathrm{P}\left(Z_Y\ge \frac{15}{\sigma_2}\right)$

즉, $\frac{10}{\sigma_1}=\frac{15}{\sigma_2}$이므로 $10\sigma_2=15\sigma_1$

$\therefore \frac{\sigma_1}{\sigma_2}=\frac{2}{3}$

0541 답 64

TIP 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(n,\ p)$를 따를 때, n이 충분히 크면 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(np,\ npq)$를 따름을 이용한다. (단, $q=1-p$)

한 학생의 통학 시간을 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(25,\ 5^2)$을 따르므로 $Z_X=\frac{X-25}{5}$로 놓으면 Z_X는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\therefore p_1=\mathrm{P}(X\ge 35)$

$=\mathrm{P}\left(Z_X\ge \frac{35-25}{5}\right)=\mathrm{P}(Z_X\ge 2)$

$=\mathrm{P}(Z_X\ge 0)-\mathrm{P}(0\le Z_X\le 2)$

$=0.5-0.48=0.02=\frac{1}{50}$

한편, 2500명의 학생 중에서 통학 시간이 35분 이상인 학생의 수를 확률변수 Y라 하면 Y는 이항분포 $\mathrm{B}\left(2500,\ \frac{1}{50}\right)$을 따른다.

$\therefore \mathrm{E}(Y)=2500\cdot\frac{1}{50}=50$, $\mathrm{V}(Y)=2500\cdot\frac{1}{50}\cdot\frac{49}{50}=49$

따라서 Y는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(50,\ 7^2)$을 따르므로

$Z_Y=\frac{Y-50}{7}$으로 놓으면 Z_Y는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

즉, $p_2=\mathrm{P}(Y\ge n)=\mathrm{P}\left(Z_Y\ge \frac{n-50}{7}\right)$이고, $p_1=p_2$이므로

$\mathrm{P}(Z_X\ge 2)=\mathrm{P}\left(Z_Y\ge \frac{n-50}{7}\right)$에서

$\frac{n-50}{7}=2$, $n-50=14$ $\quad\therefore n=64$

0542 답 1820원

TIP 배 한 개의 무게가 400 미만, 400 이상 430 미만, 430 이상일 확률을 각각 구해 본다.

배 한 개의 무게를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(400,\ 20^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-400}{20}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

이때,

$\mathrm{P}(X<400)=\mathrm{P}\left(Z<\frac{400-400}{20}\right)=\mathrm{P}(Z<0)=0.5$

$\mathrm{P}(400\le X<430)=\mathrm{P}\left(\frac{400-400}{20}\le Z<\frac{430-400}{20}\right)$

$=\mathrm{P}(0\le Z<1.5)=0.43$

$\mathrm{P}(X\ge 430)=\mathrm{P}\left(Z\ge \frac{430-400}{20}\right)=\mathrm{P}(Z\ge 1.5)$

$=\mathrm{P}(Z\ge 0)-\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)$

$=0.5-0.43=0.07$

한편, 배 한 개의 가격을 확률변수 Y라 하면 Y가 가질 수 있는 값은 1500, 2000, 3000이고, 그 확률은 각각

$\mathrm{P}(Y=1500)=0.5$, $\mathrm{P}(Y=2000)=0.43$, $\mathrm{P}(Y=3000)=0.07$

이므로 Y의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

Y	1500	2000	3000	합계
$\mathrm{P}(Y)$	0.5	0.43	0.07	1

$\therefore$ E$(Y)=1500\times0.5+2000\times0.43+3000\times0.07=1820$
따라서 구하는 기댓값은 1820원이다.

0543 답 ③

TIP P$(Z\le a)$의 값은 a의 값이 커질수록 크다.

확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}\left(t,\ \left(\frac{1}{t^2}\right)^2\right)$을 따르므로

$Z=\dfrac{X-t}{\frac{1}{t^2}}$로 놓으면 Z는 표준정규분포 N$(0,\ 1)$을 따른다.

$$\therefore \mathrm{G}(t)=\mathrm{P}\left(X\le\frac{3}{2}\right)=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{\frac{3}{2}-t}{\frac{1}{t^2}}\right)$$
$$=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{3}{2}t^2-t^3\right)$$

이때, $f(t)=\frac{3}{2}t^2-t^3\ (t>0)$이라 하면 $\mathrm{G}(t)=\mathrm{P}(Z\le f(t))$이고 $f(t)$의 값이 커질수록 함수 $\mathrm{G}(t)$의 값도 커지므로 함수 $f(t)$가 최대일 때, 함수 $\mathrm{G}(t)$도 최댓값을 갖는다.
$f'(t)=3t-3t^2=3t(1-t)\ (t>0)$
$f'(t)=0$에서 $t=1$

	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(t)$		$+$	0	$-$
$f(t)$		↗	$\frac{1}{2}$	↘

따라서 함수 $f(t)$는 $t=1$일 때, 최댓값 $\frac{1}{2}$을 가지므로 함수 $\mathrm{G}(t)$도 $t=1$일 때 최댓값을 갖는다.

$$\therefore \mathrm{G}(1)=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{1}{2}\right)$$
$$=\mathrm{P}(Z\le0)+\mathrm{P}(0\le Z\le0.5)$$
$$=0.5+0.1915=0.6915$$

Lecture

미분법과 함수의 최대·최소

(1) 함수 $f(x)=cx^n$(c는 상수, n은 자연수)를 미분하면
⇨ $f'(x)=ncx^{n-1}$
(2) 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 미분가능할 때, $y=f(x)+g(x)$를 미분하면
⇨ $y'=f'(x)+g'(x)$
(3) 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(a)=0$을 만족시키는 a의 값의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌면 $f(a)$를 극값이라고 한다. 이때, $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌면 극대, 음에서 양으로 바뀌면 극소이다.
(4) $a\le x\le b$에서 미분가능한 함수 $f(x)$의 최댓값은 다음과 같이 구한다.
(i) $a<x<b$에서 $f(x)$의 극값을 구한다.
(ii) 함숫값 $f(a)$, $f(b)$를 구한다.
(iii) (i), (ii)에서 구한 극값, $f(a)$, $f(b)$ 중에서 가장 큰 값이 최댓값, 가장 작은 값이 최솟값이다.

7 | 통계적 추정

본책 98쪽~110쪽

STEP 1 | 기초 Build

0544 답 ㄱ, ㄷ

ㄱ, ㄷ. 전수조사가 어려우므로 표본조사가 적합하다.
ㄴ, ㄹ. 전수조사가 가능하다.
따라서 표본조사가 적합한 것은 ㄱ, ㄷ이다.

0545 답 (1) 25 (2) 20

(1) 5장의 카드 중에서 2장의 카드를 꺼내는 중복순열의 수와 같으므로 ${}_5\Pi_2=5^2=25$
(2) 5장의 카드 중에서 2장의 카드를 꺼내는 순열의 수와 같으므로
${}_5\mathrm{P}_2=5\cdot4=20$

0546 답 (1) 풀이 참조
(2) 평균 : 4, 분산 : $\frac{4}{3}$, 표준편차 : $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

(1) 모집단의 숫자 2, 4, 6 중에서 크기가 2인 표본을 복원추출하는 경우의 수는
${}_3\Pi_2=3^2=9$
카드에 적힌 숫자의 합은 오른쪽 표와 같으므로

$+$	2	4	6
2	4	6	8
4	6	8	10
6	8	10	12

$\overline{X}=2$인 경우는 $(2,\ 2)$의 1가지
$\therefore \mathrm{P}(\overline{X}=2)=\frac{1}{9}$
$\overline{X}=4$인 경우는 $(2,\ 6)$, $(4,\ 4)$, $(6,\ 2)$의 3가지
$\therefore \mathrm{P}(\overline{X}=4)=\frac{1}{3}$
$\overline{X}=5$인 경우는 $(4,\ 6)$, $(6,\ 4)$의 2가지
$\therefore \mathrm{P}(\overline{X}=5)=\frac{2}{9}$
따라서 표를 완성하면 다음과 같다.

$\overline{X}$	2	3	4	5	6	합계
$\mathrm{P}(\overline{X}=\overline{x})$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	1

(2) $\mathrm{E}(\overline{X})=2\cdot\frac{1}{9}+3\cdot\frac{2}{9}+4\cdot\frac{1}{3}+5\cdot\frac{2}{9}+6\cdot\frac{1}{9}=4$
$$\mathrm{V}(\overline{X})=\mathrm{E}(\overline{X}^2)-\{\mathrm{E}(\overline{X})\}^2$$
$$=\left(2^2\cdot\frac{1}{9}+3^2\cdot\frac{2}{9}+4^2\cdot\frac{1}{3}+5^2\cdot\frac{2}{9}+6^2\cdot\frac{1}{9}\right)-4^2$$
$$=\frac{52}{3}-16=\frac{4}{3}$$
$$\sigma(\overline{X})=\sqrt{\frac{4}{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

0547 답 (1) 50 (2) 4 (3) 2

모평균이 50, 모분산이 64, 표본의 크기가 16이므로

(1) $\mathrm{E}(\overline{X})=50$

(2) $\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{64}{16}=4$

(3) $\sigma(\overline{X})=\sqrt{4}=2$

0548 답 (1) 30 (2) $\frac{1}{9}$ (3) $\frac{1}{3}$

모평균이 30, 모분산이 1, 표본의 크기가 9이므로

(1) $\mathrm{E}(\overline{X})=30$

(2) $\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{1}{9}$

(3) $\sigma(\overline{X})=\sqrt{\frac{1}{9}}=\frac{1}{3}$

0549 답 (1) 평균 : 84, 분산 : 4 (2) $\mathrm{N}(84,\ 2^2)$

(3) $Z=\frac{\overline{X}-84}{2}$ (4) 0.8413

모평균이 84, 모분산이 100, 표본의 크기가 25이므로

(1) $\mathrm{E}(\overline{X})=84$, $\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{100}{25}=4$

(2) $\overline{X}$의 표준편차는 $\sqrt{4}=2$이므로 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}(84,\ 2^2)$을 따른다.

(3) $Z=\frac{\overline{X}-84}{2}$

(4) $$\begin{aligned}\mathrm{P}(\overline{X}\ge 82)&=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{82-84}{2}\right)=\mathrm{P}(Z\ge -1)\\&=\mathrm{P}(-1\le Z\le 0)+\mathrm{P}(Z\ge 0)\\&=\mathrm{P}(0\le Z\le 1)+\mathrm{P}(Z\ge 0)\\&=0.3413+0.5\\&=0.8413\end{aligned}$$

0550 답 (1) $49.608\le m\le 50.392$

(2) $49.484\le m\le 50.516$

(1) 모평균 m의 신뢰도 95 %인 신뢰구간은

$$50-1.96\times\frac{2}{\sqrt{100}}\le m\le 50+1.96\times\frac{2}{\sqrt{100}}$$

$\therefore$ $49.608\le m\le 50.392$

(2) 모평균 m의 신뢰도 99 %인 신뢰구간은

$$50-2.58\times\frac{2}{\sqrt{100}}\le m\le 50+2.58\times\frac{2}{\sqrt{100}}$$

$\therefore$ $49.484\le m\le 50.516$

0551 답 (1) $59.02\le m\le 60.98$

(2) $58.71\le m\le 61.29$

(1) 모평균 m의 신뢰도 95 %인 신뢰구간은

$$60-1.96\times\frac{5}{\sqrt{100}}\le m\le 60+1.96\times\frac{5}{\sqrt{100}}$$

$\therefore$ $59.02\le m\le 60.98$

(2) 모평균 m의 신뢰도 99 %인 신뢰구간은

$$60-2.58\times\frac{5}{\sqrt{100}}\le m\le 60+2.58\times\frac{5}{\sqrt{100}}$$

$\therefore$ $58.71\le m\le 61.29$

STEP 2 | 유형 Drill

유형 01 표본평균의 평균, 분산, 표준편차 ; 모평균, 모표준편차가 주어진 경우

본책 100쪽

(1) (표본평균의 평균)=(모평균)

(2) (표본평균의 분산)$=\frac{(\text{모분산})}{(\text{표본의 크기})}$

(3) (표본평균의 표준편차)$=\frac{(\text{모표준편차})}{\sqrt{(\text{표본의 크기})}}$

0552 답 103

모평균이 10, 모분산이 6, 표본의 크기가 2이므로

$\mathrm{E}(\overline{X})=10$, $\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{6}{2}=3$

이때, $\mathrm{V}(\overline{X})=\mathrm{E}(\overline{X}^2)-\{\mathrm{E}(\overline{X})\}^2$이므로

$\mathrm{E}(\overline{X}^2)=\mathrm{V}(\overline{X})+\{\mathrm{E}(\overline{X})\}^2=3+10^2=103$

0553 답 64

모평균이 36, 모표준편차가 2, 표본의 크기가 n이므로

$\mathrm{E}(\overline{X})=36$, $\sigma(\overline{X})=\frac{2}{\sqrt{n}}$

이때, $\frac{2}{\sqrt{n}}=\frac{1}{4}$에서 $\sqrt{n}=8$

$\therefore$ $n=64$

0554 답 4

$\sigma(\overline{X_1})=\frac{\sigma}{\sqrt{n_1}}$, $\sigma(\overline{X_2})=\frac{\sigma}{\sqrt{n_2}}$이고

$\sigma(\overline{X_1})=2\cdot\sigma(\overline{X_2})$이므로 $\frac{\sigma}{\sqrt{n_1}}=2\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n_2}}$에서

$\frac{1}{\sqrt{n_1}}=\frac{2}{\sqrt{n_2}}$

위의 식의 양변을 제곱하면 $\frac{1}{n_1}=\frac{4}{n_2}$

$\therefore$ $\frac{n_2}{n_1}=4$

0555 답 ③

모평균이 5이므로 $\mathrm{E}(\overline{X})=5$

이때, $\overline{X}=\frac{X_1+X_2+\cdots+X_{10}}{10}$이므로

$X_1+X_2+\cdots+X_{10}=10\overline{X}$

$\therefore$ $\mathrm{E}(X_1+X_2+\cdots+X_{10})=\mathrm{E}(10\overline{X})=10\mathrm{E}(\overline{X})=50$

유형 02 표본평균의 평균, 분산, 표준편차 ; 모집단의 확률분포가 주어진 경우

본책 100쪽

(i) 모집단의 확률분포로부터 모평균 m, 모분산 σ^2을 구한다.

⇨ $m=\mathrm{E}(X)=\sum_{i=1}^{n}x_ip_i$, $\sigma^2=\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$

(ii) 크기가 n인 표본을 임의추출할 때, 표본평균 $\overline{X}$의 평균, 분산, 표준편차를 구한다. ⇨ $\mathrm{E}(\overline{X})=m$, $\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{\sigma^2}{n}$, $\sigma(\overline{X})=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

0556 답 $\frac{\sqrt{6}}{4}$

확률의 총합은 1이므로

$\frac{1}{4}+a+\frac{1}{2}=1 \qquad \therefore a=\frac{1}{4}$

따라서 확률변수 X에 대하여

$\mathrm{E}(X)=-2\cdot\frac{1}{4}+0\cdot\frac{1}{4}+1\cdot\frac{1}{2}=0$

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$

$=(-2)^2\cdot\frac{1}{4}+0\cdot\frac{1}{4}+1\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

$\therefore \sigma(X)=\sqrt{\frac{3}{2}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$

이때, 표본의 크기가 4이므로 표본평균 $\overline{X}$의 표준편차는

$\sigma(\overline{X})=\frac{\frac{\sqrt{6}}{2}}{\sqrt{4}}=\frac{\sqrt{6}}{4}$

0557 답 80

확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(180, \frac{2}{3}\right)$를 따르므로

$\mathrm{E}(X)=180\cdot\frac{2}{3}=120$

$\mathrm{V}(X)=180\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}=40$

이때, 표본의 크기가 60이므로 표본평균 $\overline{X}$의 평균과 분산은

$\mathrm{E}(\overline{X})=120,\ \mathrm{V}(\overline{X})=\frac{40}{60}=\frac{2}{3}$

$\therefore \mathrm{E}(\overline{X})\mathrm{V}(\overline{X})=120\cdot\frac{2}{3}=80$

0558 답 5

확률의 총합은 1이므로

$\frac{1}{8}+\frac{3}{8}+a+\frac{1}{8}=1 \qquad \therefore a=\frac{3}{8}$

따라서 확률변수 X에 대하여

$\mathrm{E}(X)=-1\cdot\frac{1}{8}+0\cdot\frac{3}{8}+1\cdot\frac{3}{8}+2\cdot\frac{1}{8}=\frac{1}{2}$

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$

$=(-1)^2\cdot\frac{1}{8}+0\cdot\frac{3}{8}+1\cdot\frac{3}{8}+2^2\cdot\frac{1}{8}-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{4}$

$\therefore \sigma(X)=\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

표본의 크기가 n일 때 $\sigma(\overline{X})=\frac{\sqrt{15}}{10}$이므로

$\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{n}}=\frac{\sqrt{15}}{10},\ \sqrt{15n}=5\sqrt{3}$

양변을 제곱하면 $15n=75$

$\therefore n=5$

유형 03 **표본평균의 평균, 분산, 표준편차 ; 모집단이 주어진 경우** 본책 101쪽

(ⅰ) 확률변수 X가 취할 수 있는 값과 그 각각의 확률을 구하여 확률분포를 표로 나타낸다.
(ⅱ) 모평균 m, 모분산 σ^2을 구한다.
(ⅲ) 크기가 n인 표본을 임의추출할 때, 표본평균 $\overline{X}$의 평균, 분산, 표준편차를 구한다. ⇨ $\mathrm{E}(\overline{X})=m,\ \mathrm{V}(\overline{X})=\frac{\sigma^2}{n},\ \sigma(\overline{X})=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

0559 답 4

꺼낸 구슬에 적힌 숫자를 확률변수 X라 할 때, X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	5	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	1

$\therefore \mathrm{E}(X)=1\cdot\frac{1}{5}+2\cdot\frac{1}{5}+3\cdot\frac{1}{5}+4\cdot\frac{1}{5}+5\cdot\frac{1}{5}=3$

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$

$=1\cdot\frac{1}{5}+2^2\cdot\frac{1}{5}+3^2\cdot\frac{1}{5}+4^2\cdot\frac{1}{5}+5^2\cdot\frac{1}{5}-3^2$

$=2$

이때, 표본의 크기가 2이므로

$\mathrm{E}(\overline{X})=3,\ \mathrm{V}(\overline{X})=\frac{2}{2}=1$

$\therefore \mathrm{E}(\overline{X})+\mathrm{V}(\overline{X})=3+1=4$

0560 답 ④

꺼낸 공에 적힌 숫자를 확률변수 X라 할 때, X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	1

$\therefore \mathrm{E}(X)=1\cdot\frac{3}{5}+2\cdot\frac{1}{5}+3\cdot\frac{1}{5}=\frac{8}{5}$

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$

$=1\cdot\frac{3}{5}+2^2\cdot\frac{1}{5}+3^2\cdot\frac{1}{5}-\left(\frac{8}{5}\right)^2=\frac{16}{25}$

표본의 크기가 n일 때 $\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{1}{50}$이므로

$\frac{\frac{16}{25}}{n}=\frac{1}{50},\ \frac{16}{25}=\frac{1}{50}n$

$\therefore n=32$

0561 답 ③

꺼낸 공에 적힌 숫자를 확률변수 X라 할 때, X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	3	5	7	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{5}$	1

$\therefore \mathrm{E}(X)=1\cdot\frac{1}{10}+3\cdot\frac{1}{5}+5\cdot\frac{3}{10}+7\cdot\frac{2}{5}=5$

$$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$$
$$=1\cdot\frac{1}{10}+3^2\cdot\frac{1}{5}+5^2\cdot\frac{3}{10}+7^2\cdot\frac{2}{5}-5^2=4$$

이때, 표본의 크기가 3이므로 $\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{4}{3}$

$\therefore 27\mathrm{V}(\overline{X})=27\cdot\frac{4}{3}=36$

유형 04 표본평균의 확률 구하기 본책 101쪽

(i) 표본평균 $\overline{X}$가 따르는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m, \frac{\sigma^2}{n}\right)$을 구한다.

(ii) 표본평균 $\overline{X}$를 $Z=\frac{\overline{X}-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$으로 표준화한다.

(iii) 표준정규분포표를 이용하여 확률을 구한다.

0562 답 0.8185

모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(65,\ 12^2)$을 따르고 표본의 크기가 16이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(65,\ \frac{12^2}{16}\right)$, 즉 $\mathrm{N}(65,\ 3^2)$을 따른다. 이때, $Z=\frac{\overline{X}-65}{3}$로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(62\le\overline{X}\le71)=\mathrm{P}\left(\frac{62-65}{3}\le Z\le\frac{71-65}{3}\right)$$
$$=\mathrm{P}(-1\le Z\le2)$$
$$=\mathrm{P}(0\le Z\le1)+\mathrm{P}(0\le Z\le2)$$
$$=0.3413+0.4772=0.8185$$

0563 답 0.68

모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(40,\ 6^2)$을 따르고 표본의 크기가 9이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(40,\ \frac{6^2}{9}\right)$, 즉 $\mathrm{N}(40,\ 2^2)$을 따른다. 이때, $Z=\frac{\overline{X}-40}{2}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(38\le\overline{X}\le42)=\mathrm{P}\left(\frac{38-40}{2}\le Z\le\frac{42-40}{2}\right)$$
$$=\mathrm{P}(-1\le Z\le1)$$
$$=2\mathrm{P}(0\le Z\le1)$$
$$=2\times0.34=0.68$$

0564 답 0.1587

모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(172,\ 8^2)$을 따르고 표본의 크기가 4이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(172,\ \frac{8^2}{4}\right)$, 즉 $\mathrm{N}(172,\ 4^2)$을 따른다. 이때, $Z=\frac{\overline{X}-172}{4}$로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(\overline{X}\ge176)=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{176-172}{4}\right)=\mathrm{P}(Z\ge1)$$
$$=\mathrm{P}(Z\ge0)-\mathrm{P}(0\le Z\le1)$$
$$=0.5-0.3413$$
$$=0.1587$$

0565 답 0.02

모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(100,\ 10^2)$을 따르고 표본의 크기가 100이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(100,\ \frac{10^2}{100}\right)$, 즉 $\mathrm{N}(100,\ 1)$을 따른다. 이때, $Z=\overline{X}-100$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 표본평균이 모평균보다 2 % 이상 크게 나타날 확률은

$$\mathrm{P}\left(\overline{X}\ge100+100\cdot\frac{2}{100}\right)=\mathrm{P}(\overline{X}\ge102)$$
$$=\mathrm{P}(Z\ge102-100)$$
$$=\mathrm{P}(Z\ge2)$$
$$=\mathrm{P}(Z\ge0)-\mathrm{P}(0\le Z\le2)$$
$$=0.5-0.48$$
$$=0.02$$

0566 답 0.2885

모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르고 표본의 크기가 n이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m,\ \frac{\sigma^2}{n}\right)$을 따른다. 이때, $Z=\frac{\overline{X}-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

따라서

$$f(\sigma)=\mathrm{P}\left(\overline{X}\ge m+\frac{1.92}{\sqrt{n}}\right)=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{1.92}{\sigma}\right)$$

이므로

$$f(1)+f(3)=\mathrm{P}(Z\ge1.92)+\mathrm{P}(Z\ge0.64)$$
$$=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le1.92)+0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le0.64)$$
$$=1-0.4726-0.2389$$
$$=0.2885$$

0567 답 ③

TIP $\overline{X}=\frac{X_1+X_2+\cdots+X_9}{9}$임을 이용하여 불량품으로 판정될 확률을 구한다.

모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(90,\ 6^2)$을 따르고 표본의 크기가 9이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(90,\ \frac{6^2}{9}\right)$, 즉 $\mathrm{N}(90,\ 2^2)$을 따른다. 이때, $Z=\frac{\overline{X}-90}{2}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르고, 소화제 9개의 총 무게가 765 mg 이하이거나 855 mg 이상이면 $\overline{X}\le\frac{765}{9}=85$ 또는 $\overline{X}\ge\frac{855}{9}=95$이므로 불량품일 확률은

$$\mathrm{P}(\overline{X}\le85)+\mathrm{P}(\overline{X}\ge95)$$
$$=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{85-90}{2}\right)+\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{95-90}{2}\right)$$
$$=\mathrm{P}(Z\le-2.5)+\mathrm{P}(Z\ge2.5)$$
$$=2\mathrm{P}(Z\ge2.5)$$
$$=2\{\mathrm{P}(Z\ge0)-\mathrm{P}(0\le Z\le2.5)\}$$
$$=2(0.5-0.4938)=0.0124$$

따라서 불량품의 개수는

$10000\times0.0124=124$

유형 05 표본평균의 확률 ; 표본의 크기 구하기 본책 102쪽

정규분포 $N\left(m, \frac{\sigma^2}{n}\right)$을 따르는 표본평균 $\overline{X}$에 대하여
$P(m \le \overline{X} \le a) = k$를 만족시키는 표본의 크기 n을 구할 때에는 확률변수 $\overline{X}$를 $Z = \frac{\overline{X}-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$으로 표준화한 $P\left(0 \le Z \le \frac{a-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) = k$에서 표준정규분포표를 이용한다.

0568 답 25

모집단이 정규분포 $N(50,\ 10^2)$을 따르고 표본의 크기가 n이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(50,\ \frac{10^2}{n}\right)$을 따른다. 이때,
$Z = \frac{\overline{X}-50}{\frac{10}{\sqrt{n}}}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로

$P(\overline{X} \le 55) = 0.99$에서

$P\left(Z \le \frac{55-50}{\frac{10}{\sqrt{n}}}\right) = 0.99$

$P\left(Z \le \frac{\sqrt{n}}{2}\right) = 0.99$

$P(Z \le 0) + P\left(0 \le Z \le \frac{\sqrt{n}}{2}\right) = 0.99$

$\therefore P\left(0 \le Z \le \frac{\sqrt{n}}{2}\right) = 0.99 - 0.5 = 0.49$

이때, $P(0 \le Z \le 2.5) = 0.49$이므로

$\frac{\sqrt{n}}{2} = 2.5,\ \sqrt{n} = 5$

$\therefore n = 25$

0569 답 4

모집단이 정규분포 $N(36,\ 3^2)$을 따르고 표본의 크기가 n이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(36,\ \frac{3^2}{n}\right)$을 따른다.

이때, $Z = \frac{\overline{X}-36}{\frac{3}{\sqrt{n}}}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로 $P\left(\overline{X} \le 33 + \frac{3}{\sqrt{n}}\right) = 0.16$에서

$P\left(Z \le \frac{33 + \frac{3}{\sqrt{n}} - 36}{\frac{3}{\sqrt{n}}}\right) = 0.16$

$P(Z \le -\sqrt{n}+1) = 0.16$

$P(Z \ge \sqrt{n}-1) = 0.16$

$P(Z \ge 0) - P(0 \le Z \le \sqrt{n}-1) = 0.16$

$\therefore P(0 \le Z \le \sqrt{n}-1) = 0.5 - 0.16 = 0.34$

이때, $P(0 \le Z \le 1) = 0.34$이므로

$\sqrt{n}-1 = 1,\ \sqrt{n} = 2$

$\therefore n = 4$

0570 답 ③

모집단이 정규분포 $N(m,\ 2^2)$을 따르고 표본의 크기가 n이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(m,\ \frac{2^2}{n}\right)$을 따른다. 이때, $Z = \frac{\overline{X}-m}{\frac{2}{\sqrt{n}}}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로

$P\left(|\overline{X}-m| \le \frac{2}{3}\right) \ge 0.96$에서

$P\left(|Z| \le \frac{\frac{2}{3}}{\frac{2}{\sqrt{n}}}\right) \ge 0.96$

$P\left(|Z| \le \frac{\sqrt{n}}{3}\right) \ge 0.96$

$P\left(-\frac{\sqrt{n}}{3} \le Z \le \frac{\sqrt{n}}{3}\right) \ge 0.96$

$2P\left(0 \le Z \le \frac{\sqrt{n}}{3}\right) \ge 0.96$

$\therefore P\left(0 \le Z \le \frac{\sqrt{n}}{3}\right) \ge 0.48$

이때, $P(0 \le Z \le 2) = 0.48$이므로

$\frac{\sqrt{n}}{3} \ge 2,\ \sqrt{n} \ge 6$

$\therefore n \ge 36$

따라서 구하는 n의 최솟값은 36이다.

유형 06 표본평균의 확률 ; 미지수의 값 구하기 본책 103쪽

정규분포 $N\left(m, \frac{\sigma^2}{n}\right)$을 따르는 표본평균 $\overline{X}$에 대하여
$P(m \le \overline{X} \le a) = k$를 만족시키는 a의 값을 구할 때에는 확률변수 $\overline{X}$를 $Z = \frac{\overline{X}-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$으로 표준화한 $P\left(0 \le Z \le \frac{a-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) = k$에서 표준정규분포표를 이용한다.

0571 답 ④

모집단이 정규분포 $N(70,\ 6^2)$을 따르고 표본의 크기가 9이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(70,\ \frac{6^2}{9}\right)$, 즉 $N(70,\ 2^2)$을 따른다. 이때,
$Z = \frac{\overline{X}-70}{2}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로

$P(\overline{X} \ge k) \le 0.0139$에서

$P\left(Z \ge \frac{k-70}{2}\right) \le 0.0139$

$P(Z \ge 0) - P\left(0 \le Z \le \frac{k-70}{2}\right) \le 0.0139$

$\therefore P\left(0 \le Z \le \frac{k-70}{2}\right) \ge 0.4861$

이때, $P(0 \le Z \le 2.2) = 0.4861$이므로

$\frac{k-70}{2} \ge 2.2$

$\therefore k \ge 74.4$

따라서 자연수 k의 최솟값은 75이다.

0572 답 -1.96

모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(20,\ 4^2)$을 따르고 표본의 크기가 16이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(20,\ \frac{4^2}{16}\right)$, 즉 $\mathrm{N}(20,\ 1)$을 따른다. 이때, $Z=\overline{X}-20$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$$\begin{aligned}f(k)&=\mathrm{P}(\overline{X}\le 20+k)\\&=\mathrm{P}(Z\le 20+k-20)\\&=\mathrm{P}(Z\le k)\end{aligned}$$

$f(k)\le 0.025$에서 $\mathrm{P}(Z\le k)\le 0.025$

$\mathrm{P}(Z\le 0)-\mathrm{P}(k\le Z\le 0)\le 0.025$

$\mathrm{P}(Z\le 0)-\mathrm{P}(0\le Z\le -k)\le 0.025$

$\therefore \mathrm{P}(0\le Z\le -k)\ge 0.475$

이때, $\mathrm{P}(0\le Z\le 1.96)=0.475$이므로

$-k\ge 1.96 \qquad \therefore k\le -1.96$

따라서 k의 최댓값은 -1.96이다.

0573 답 3

모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르고 표본의 크기가 각각 36, 49이므로 표본평균 $\overline{X}$, $\overline{Y}$는 각각 정규분포 $\mathrm{N}\left(m,\ \left(\frac{\sigma}{6}\right)^2\right)$, $\mathrm{N}\left(m,\ \left(\frac{\sigma}{7}\right)^2\right)$을 따른다. 이때, $Z_X=\dfrac{\overline{X}-m}{\frac{\sigma}{6}}$으로 놓으면 Z_X는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}\left(m-\frac{\sigma}{6}\le\overline{X}\le m+\frac{\sigma}{6}\right)\\&=\mathrm{P}\left(\frac{m-\frac{\sigma}{6}-m}{\frac{\sigma}{6}}\le Z\le\frac{m+\frac{\sigma}{6}-m}{\frac{\sigma}{6}}\right)\\&=\mathrm{P}(-1\le Z\le 1)\end{aligned}$$

또, $Z_Y=\dfrac{\overline{Y}-m}{\frac{\sigma}{7}}$으로 놓으면 Z_Y는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}\left(m-\frac{k\sigma}{21}\le\overline{Y}\le m+\frac{k\sigma}{21}\right)\\&=\mathrm{P}\left(\frac{m-\frac{k\sigma}{21}-m}{\frac{\sigma}{7}}\le Z\le\frac{m+\frac{k\sigma}{21}-m}{\frac{\sigma}{7}}\right)\\&=\mathrm{P}\left(-\frac{k}{3}\le Z\le\frac{k}{3}\right)\end{aligned}$$

이때,

$\mathrm{P}\left(m-\frac{\sigma}{6}\le\overline{X}\le m+\frac{\sigma}{6}\right)=\mathrm{P}\left(m-\frac{k\sigma}{21}\le\overline{Y}\le m+\frac{k\sigma}{21}\right)$이므로

$\mathrm{P}(-1\le Z\le 1)=\mathrm{P}\left(-\frac{k}{3}\le Z\le\frac{k}{3}\right)$

따라서 $\frac{k}{3}=1$이므로 $k=3$

0574 답 20

TIP $f(a-x)=f(a+x)$이면 $f(x)$의 그래프는 $x=a$에 대하여 대칭이다.

확률밀도함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(15-x)=f(15+x)$를 만족시키므로 모평균은 15이다.

모평균이 15, 표본의 크기가 25이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(15,\ \frac{\sigma^2}{25}\right)$, 즉 $\mathrm{N}\left(15,\ \left(\frac{\sigma}{5}\right)^2\right)$을 따른다. 이때, $Z=\dfrac{\overline{X}-15}{\frac{\sigma}{5}}$로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$\mathrm{P}(11\le\overline{X}\le 27)=0.84$에서

$$\mathrm{P}\left(\frac{11-15}{\frac{\sigma}{5}}\le Z\le\frac{27-15}{\frac{\sigma}{5}}\right)=0.84$$

$$\mathrm{P}\left(-\frac{20}{\sigma}\le Z\le\frac{60}{\sigma}\right)=0.84$$

$$\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{20}{\sigma}\right)+\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{60}{\sigma}\right)=0.84$$

$$\therefore \mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{20}{\sigma}\right)+\mathrm{P}\left(0\le Z\le 3\cdot\frac{20}{\sigma}\right)=0.84$$

이때, 주어진 확률밀도함수의 그래프에서

$\mathrm{P}(0\le Z\le 1)=0.3413$, $\mathrm{P}(0\le Z\le 3)=0.4987$이고

$\mathrm{P}(0\le Z\le 1)+\mathrm{P}(0\le Z\le 3)=0.84$이므로

$\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{20}{\sigma}\right)=0.3413$, $\mathrm{P}\left(0\le Z\le 3\cdot\frac{20}{\sigma}\right)=0.4987$

따라서 $\frac{20}{\sigma}=1$이므로 $\sigma=20$

유형 07 **모평균의 추정 ; 모표준편차가 주어진 경우** 본책 103쪽

정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출할 때, 표본평균 $\overline{X}$의 값이 $\overline{x}$이면 모평균 m의 신뢰도 a %인 신뢰구간은

⇨ $\overline{x}-k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{x}+k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ $\left(\text{단, } \mathrm{P}(|Z|\le k)=\frac{a}{100}\right)$

0575 답 $79.55\le m\le 84.45$

표본평균이 82, 모표준편차가 5, 표본의 크기가 16이므로 모평균 m의 신뢰도 95 %인 신뢰구간은

$$82-1.96\times\frac{5}{\sqrt{16}}\le m\le 82+1.96\times\frac{5}{\sqrt{16}}$$

$\therefore 79.55\le m\le 84.45$

0576 답 $137.1\le m\le 162.9$

표본평균이 150, 모표준편차가 15, 표본의 크기가 9이므로 모평균 m의 신뢰도 99 %인 신뢰구간은

$$150-2.58\times\frac{15}{\sqrt{9}}\le m\le 150+2.58\times\frac{15}{\sqrt{9}}$$

$\therefore 137.1\le m\le 162.9$

0577 답 $31\le m\le 33$

표본평균이 32, 모표준편차가 3, 표본의 크기가 36이므로 모평균 m의 신뢰도 95 %인 신뢰구간은

$$32-2\times\frac{3}{\sqrt{36}}\le m\le 32+2\times\frac{3}{\sqrt{36}}$$

$\therefore 31\le m\le 33$

0578 답 ③
표본평균이 230, 모표준편차가 20, 표본의 크기가 25이므로 모평균 m의 신뢰도 99 %인 신뢰구간은

$$230-2.58\times\frac{20}{\sqrt{25}}\le m\le 230+2.58\times\frac{20}{\sqrt{25}}$$

$\therefore 219.68\le m\le 240.32$

0579 답 ③
표본평균이 180, 모표준편차가 10, 표본의 크기가 400이므로 모평균 m의 신뢰도 99 %인 신뢰구간은

$$180-2.58\times\frac{10}{\sqrt{400}}\le m\le 180+2.58\times\frac{10}{\sqrt{400}}$$

$\therefore 178.71\le m\le 181.29$
따라서 신뢰구간에 속하는 자연수는 179, 180, 181로 그 개수는 3이다.

유형 08 모평균의 추정 ; 표본표준편차가 주어진 경우
본책 104쪽

정규분포를 따르는 모집단에서 크기가 $n(n\ge 30)$인 표본을 임의추출할 때, 표본평균 $\overline{X}$의 값이 $\overline{x}$, 표본표준편차 S의 값이 s이면 모평균 m의 신뢰도 α %인 신뢰구간은
⇨ $\overline{x}-k\frac{s}{\sqrt{n}}\le m\le \overline{x}+k\frac{s}{\sqrt{n}}$ $\left(\text{단, } \mathrm{P}(|Z|\le k)=\frac{\alpha}{100}\right)$

0580 답 $47.42\le m\le 52.58$
표본의 크기 49가 충분히 크므로 모표준편차 대신 표본표준편차 7을 사용할 수 있고, 표본평균이 50이므로 모평균 m의 신뢰도 99 %인 신뢰구간은

$$50-2.58\times\frac{7}{\sqrt{49}}\le m\le 50+2.58\times\frac{7}{\sqrt{49}}$$

$\therefore 47.42\le m\le 52.58$

0581 답 11
표본의 크기 64가 충분히 크므로 모표준편차 대신 표본표준편차 16을 사용할 수 있고, 표본평균이 172이므로 모평균 m의 신뢰도 99 %인 신뢰구간은

$$172-2.58\times\frac{16}{\sqrt{64}}\le m\le 172+2.58\times\frac{16}{\sqrt{64}}$$

$\therefore 166.84\le m\le 177.16$
따라서 신뢰구간에 속하는 정수는 167, 168, …177로 그 개수는 11이다.

0582 답 ②
조건 (가)에서 표본평균 $\overline{X}$는

$$\overline{X}=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{100}}{100}=\frac{500}{100}=5$$

조건 (나)에서 표본분산 s^2은

$$s^2=\frac{{x_1}^2+{x_2}^2+\cdots+{x_{100}}^2}{100}-5^2=26-25=1$$

이때, 표본의 크기 100이 충분히 크므로 모표준편차 대신 표본표준편차 1을 사용할 수 있고, 표본평균이 5이므로 모평균 m의 신뢰도 95 %인 신뢰구간은

$$5-1.96\times\frac{1}{\sqrt{100}}\le m\le 5+1.96\times\frac{1}{\sqrt{100}}$$

$\therefore 4.804\le m\le 5.196$
따라서 $\alpha=4.804$, $\beta=5.196$이므로
$\beta-\alpha=0.392$

다른 풀이 $\overline{x}-1.96\times\frac{s}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{x}+1.96\times\frac{s}{\sqrt{n}}$이므로

$$\alpha=\overline{x}-1.96\times\frac{s}{\sqrt{n}}$$

$$\beta=\overline{x}+1.96\times\frac{s}{\sqrt{n}}$$

$$\therefore \beta-\alpha=2\times1.96\times\frac{s}{\sqrt{n}}=2\times1.96\times\frac{1}{\sqrt{100}}=0.392$$

유형 09 모평균의 추정 ; 표본의 크기 구하기
본책 105쪽

정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균 $\overline{X}$의 값이 $\overline{x}$일 때
(1) 신뢰도 α %로 추정한 모평균 m의 신뢰구간이 $p\le m\le q$이면
⇨ $p=\overline{x}-k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, $q=\overline{x}+k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ $\left(\text{단, } \mathrm{P}(|Z|\le k)=\frac{\alpha}{100}\right)$
(2) 모평균 m을 특정한 신뢰도로 추정한 신뢰구간이 $\alpha\le m\le\beta$이면
⇨ $\alpha=\overline{x}-k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, $\beta=\overline{x}+k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$임을 이용하여 표본의 크기 n의 값을 구한다.

0583 답 36
표본평균이 30, 모표준편차가 3이므로 모평균 m을 신뢰도 95 %로 추정한 신뢰구간은

$$30-1.96\times\frac{3}{\sqrt{n}}\le m\le 30+1.96\times\frac{3}{\sqrt{n}}$$

이때, $29.02\le m\le 30.98$이므로

$$30-1.96\times\frac{3}{\sqrt{n}}=29.02$$

$$30+1.96\times\frac{3}{\sqrt{n}}=30.98$$

따라서 $1.96\times\frac{3}{\sqrt{n}}=0.98$이므로
$\sqrt{n}=6$
$\therefore n=36$

0584 답 ⑤
표본평균이 3000, 모표준편차가 200이므로 모평균 m을 신뢰도 99 %로 추정한 신뢰구간은

$$3000-2.58\times\frac{200}{\sqrt{n}}\le m\le 3000+2.58\times\frac{200}{\sqrt{n}}$$

이때, $2974.2\le m\le 3025.8$이므로

$$3000-2.58\times\frac{200}{\sqrt{n}}=2974.2$$

$3000+2.58\times\frac{200}{\sqrt{n}}=3025.8$

따라서 $2.58\times\frac{200}{\sqrt{n}}=25.8$이므로

$\sqrt{n}=20$

$\therefore n=400$

0585 답 100

표본평균이 6.6, 모표준편차가 4이므로 모평균 m을 신뢰도 95 %로 추정한 신뢰구간은

$6.6-2\times\frac{4}{\sqrt{n}}\le m\le 6.6+2\times\frac{4}{\sqrt{n}}$

이때, $5.8\le m\le 7.4$이므로

$6.6-2\times\frac{4}{\sqrt{n}}=5.8$

$6.6+2\times\frac{4}{\sqrt{n}}=7.4$

따라서 $2\times\frac{4}{\sqrt{n}}=0.8$이므로

$\sqrt{n}=10$

$\therefore n=100$

유형 10 표본의 크기와 신뢰구간의 길이

본책 105쪽

정규분포 $N(m, \sigma^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출할 때, 표본평균 $\overline{X}$의 값 $\overline{x}$에 대하여 신뢰도 α %로 모평균 m을 추정하면 $\left(\text{단, } P(|Z|\le k)=\frac{\alpha}{100}\right)$

(1) 신뢰구간 ⇨ $|m-\overline{x}|\le k\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

(2) 신뢰구간의 길이 ⇨ $2\times k\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

0586 답 62

모표준편차가 4이고 신뢰도 95 %로 모평균을 추정할 때 신뢰구간의 길이가 2 이하이어야 하므로

$2\times 1.96\times\frac{4}{\sqrt{n}}\le 2$, $\sqrt{n}\ge 7.84$

$\therefore n\ge 61.4656$

n은 자연수이므로 n의 최솟값은 62이다.

0587 답 8

모표준편차를 σ, $P(-k\le Z\le k)=\frac{\alpha}{100}$라 하고 신뢰도 α %로 모평균을 추정할 때, 표본의 크기가 100, 신뢰구간의 길이가 4이므로

$2\times k\times\frac{\sigma}{\sqrt{100}}=4\qquad\therefore k\sigma=20$

따라서 표본의 크기가 25일 때 신뢰구간의 길이는

$2\times k\times\frac{\sigma}{\sqrt{25}}=2\times\frac{20}{\sqrt{25}}=8$

0588 답 144

$P(-k\le Z\le k)=\frac{\alpha}{100}$라 하고 신뢰도 α %로 모평균을 추정할 때, 모표준편차가 1, 표본의 크기가 4, 신뢰구간의 길이가 3이므로

$2\times k\times\frac{1}{\sqrt{4}}=3\qquad\therefore k=3$

또, 표본의 크기를 n이라 하고 같은 신뢰도로 모평균을 추정할 때, 신뢰구간의 길이가 0.5가 되려면

$2\times 3\times\frac{1}{\sqrt{n}}=0.5$, $\sqrt{n}=12$

$\therefore n=144$

0589 답 36

표본의 크기가 16일 때, 신뢰도 95 %로 추정한 m의 신뢰구간의 길이는

$2\times 2\times\frac{\sigma}{\sqrt{16}}=\sigma$

표본의 크기가 n일 때, 신뢰도 99 %로 추정한 m의 신뢰구간의 길이는

$2\times 3\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=\frac{6\sigma}{\sqrt{n}}$

두 신뢰구간의 길이가 같으므로

$\sigma=\frac{6\sigma}{\sqrt{n}}$, $\sqrt{n}=6$

$\therefore n=36$

0590 답 4

$P(-k\le Z\le k)=0.95$라 하고 신뢰도 95 %로 모평균을 추정할 때, 모표준편차가 5, 표본의 크기가 n_1이므로 신뢰구간의 길이는

$2\times 1.96\times\frac{5}{\sqrt{n_1}}$

표본의 크기가 n_2이므로 신뢰구간의 길이는

$2\times 1.96\times\frac{5}{\sqrt{n_2}}$

이때, $\left(2\times 1.96\times\frac{5}{\sqrt{n_1}}\right):\left(2\times 1.96\times\frac{5}{\sqrt{n_2}}\right)=1:2$에서

$\frac{1}{\sqrt{n_1}}:\frac{1}{\sqrt{n_2}}=1:2$, $\frac{2}{\sqrt{n_1}}=\frac{1}{\sqrt{n_2}}$, $\frac{4}{n_1}=\frac{1}{n_2}$

$n_1=4n_2\qquad\therefore\frac{n_1}{n_2}=4$

0591 답 ④

$P(-k\le Z\le k)=\frac{\alpha}{100}$라 하고 신뢰도 α %로 모평균을 추정할 때, 모표준편차가 2, 표본의 크기가 n이므로 신뢰구간의 길이 h는

$h=2\times k\times\frac{2}{\sqrt{n}}$ ...... ㉠

한편, 신뢰구간의 길이가 $\frac{1}{3}h$가 되도록 하는 표본의 크기를 n'이라 하면

$\frac{1}{3}h=2\times k\times\frac{2}{\sqrt{n'}}$

㉠을 위의 식에 대입하면

$\frac{1}{3}\times 2\times k\times\frac{2}{\sqrt{n}}=2\times k\times\frac{2}{\sqrt{n'}}$, $\frac{1}{3\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{n'}}$

$\sqrt{n'}=3\sqrt{n}\qquad\therefore n'=9n$

따라서 구하는 표본의 크기는 $9n$이다.

유형 11 신뢰도와 신뢰구간의 길이 본책 106쪽

정규분포 $N(m, \sigma^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출할 때, 표본평균 $\overline{X}$의 값 $\overline{x}$에 대하여 신뢰도 α %로 모평균 m을 추정하면 신뢰구간의 길이는

⇨ $2\times k\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ $\left(\text{단, } P(|Z|\le k)=\frac{\alpha}{100}\right)$

0592 답 2.4

$P(-k\le Z\le k)=\frac{\alpha}{100}$라 하고 신뢰도 α %로 모평균을 추정할 때, 모표준편차가 10, 표본의 크기가 225이므로 신뢰구간의 길이는

$2\times k\times\frac{10}{\sqrt{225}}=\frac{4}{3}k$

즉, $\frac{4}{3}k=0.8$이므로 $k=0.6$

$P(-0.6\le Z\le 0.6)=\frac{\alpha}{100}$에서

$\alpha=100P(-0.6\le Z\le 0.6)=200P(0\le Z\le 0.6)$

$=200\times0.23=46$

$P(-k'\le Z\le k')=\frac{2\alpha}{100}=\frac{92}{100}$라 하면

$2P(0\le Z\le k')=0.92$

$\therefore P(0\le Z\le k')=0.46$

이때, $P(0\le Z\le 1.8)=0.46$이므로

$k'=1.8$

따라서 신뢰도 2α %로 모평균을 추정할 때 신뢰구간의 길이는

$2\times1.8\times\frac{10}{\sqrt{225}}=2.4$

0593 답 3.92

모표준편차를 σ라 하면 표본의 크기가 25일 때 신뢰도 99 %인 신뢰구간의 길이는

$2\times2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{25}}=205.16-194.84=10.32$

즉, $1.032\sigma=10.32$에서 $\sigma=10$

따라서 모표준편차가 10, 표본의 크기가 100일 때 신뢰도 95 %인 신뢰구간의 길이는

$2\times1.96\times\frac{10}{\sqrt{100}}=3.92$

0594 답 ④

$P(-2\le Z\le 2)=2\times0.48=0.96$이므로 모평균 m을 신뢰도 96 %로 추정할 때 신뢰구간의 길이 l은

$l=2\times2\times\frac{5}{\sqrt{100}}=2$

또, $P(-k\le Z\le k)=\frac{\alpha}{100}$라 하면 신뢰도 α %로 모평균을 추정할 때 신뢰구간의 길이는

$2\times k\times\frac{5}{\sqrt{100}}=k$

즉, $k=\frac{l}{2}$이므로 $k=1$

이때, $P(-1\le Z\le 1)=\frac{\alpha}{100}$이므로

$\alpha=100P(-1\le Z\le 1)=200P(0\le Z\le 1)$

$=200\times0.34=68$

유형 12 신뢰구간의 성질 본책 107쪽

모평균 m의 신뢰구간 $\overline{x}-k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{x}+k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$에서

(1) 표본의 크기가 일정할 때 신뢰도가 높아지면 신뢰구간의 길이는 길어진다.

(2) 신뢰도가 일정할 때 표본의 크기가 커지면 신뢰구간의 길이는 짧아진다.

0595 답 ④

모평균 m을 신뢰도 α %로 추정한 신뢰구간이 $a\le m\le b$이므로

$P(|Z|\le k)=\frac{\alpha}{100}$라 하면

$b-a=2k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

ㄱ. α의 값이 커지면 k의 값이 커지므로 $b-a$의 값은 커진다.

ㄴ. n의 값이 작아지면 $b-a$의 값은 커진다.

ㄷ. σ의 값이 커지면 $b-a$의 값은 커진다.

ㄹ. 표본평균 $\overline{X}$의 값은 $b-a$의 값과 관계가 없다.

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

0596 답 ⑤

$P(|Z|\le a)=0.95$, $P(|Z|\le b)=0.99$라 하면 각각의 신뢰구간의 길이는

① $2a\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{100}}=\frac{a\sigma}{5}$ ② $2b\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{144}}=\frac{b\sigma}{6}$

③ $2a\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{144}}=\frac{a\sigma}{6}$ ④ $2b\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{225}}=\frac{2}{15}b\sigma$

⑤ $2a\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{225}}=\frac{2}{15}a\sigma$

이므로 $\frac{2}{15}a\sigma<\frac{a\sigma}{6}<\frac{a\sigma}{5}$, $\frac{2}{15}b\sigma<\frac{b\sigma}{6}$

이때, $a<b$이므로 $\frac{2}{15}a\sigma<\frac{2}{15}b\sigma$

따라서 가장 작은 것은 ⑤이다.

0597 답 ㄱ

모평균 m을 신뢰도 α %로 추정한 신뢰구간이 $a\le m\le b$이므로

$P(|Z|\le k)=\frac{\alpha}{100}$라 하면

$b-a=2k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

ㄱ. 표본의 크기가 $8n$이면 $b-a$의 값은

$2k\frac{\sigma}{\sqrt{8n}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\times2k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

즉, $b-a$의 값은 $\frac{1}{2\sqrt{2}}$배가 된다.

ㄴ. [반례] 신뢰도 $\alpha=40$이면 $P(|Z|\le0.53)=0.4$에서

$b-a=2\times0.53\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

한편, 신뢰도 $\alpha=80$이면 $\mathrm{P}(|Z|\le 1.28)=0.8$에서

$b-a=2\times1.28\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ne2\times2\times0.53\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

ㄷ. $\overline{X}$의 값은 $b-a$의 값과 관계가 없다.
따라서 옳은 것은 ㄱ이다.

참고 신뢰도가 2α %가 되면 $\mathrm{P}(|Z|\le k')=\frac{2\alpha}{100}$를 만족시키는 k'의 값에 대하여 $b-a=2k'\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
이때, $k'\ne2k$이므로 신뢰도가 2배가 되면 $b-a$의 값은 2배가 된다고 할 수 없다.

0598 답 ③

정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출할 때, 표본평균 $\overline{X}$의 값이 $\overline{x}$이고 $\mathrm{P}(|Z|\le k)=\frac{\alpha}{100}$라 하면 모평균 m의 신뢰도 α %인 신뢰구간은 $\overline{x}-k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{x}+k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ 이고, 신뢰구간의 길이는 $2k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$이다.

① 표본평균 $\overline{X}$의 분산은 $\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{\mathrm{V}(X)}{n}$이므로 표본의 크기에 반비례한다.
② 동일한 표본을 사용할 때, 신뢰도 99 %인 신뢰구간은 신뢰도 95 %인 신뢰구간을 포함한다.
③ n의 값이 작을수록 $2k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$의 값은 커지므로 신뢰구간의 길이는 길어진다.
④ 같은 신뢰도에서 크기가 n인 표본을 임의추출하여 모평균 m을 추정하면 신뢰구간의 길이는 항상 일정하다.
⑤ 신뢰도를 낮추면 k의 값이 작아지고, 표본의 크기를 크게 하면 n의 값이 커지므로 $2k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$의 값은 작아진다. 즉, 신뢰구간의 길이는 짧아진다.

따라서 옳지 않은 것은 ③이다.

유형 13 모평균과 표본평균의 차 본책 107쪽

정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르는 모집단에서 임의추출한 크기가 n인 표본의 표본평균 $\overline{X}$에 대하여 신뢰도 α %로 모평균 m을 추정하면
(1) 신뢰구간 ⇨ $|m-\overline{x}|\le k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
(2) 모평균과 표본평균의 차 ⇨ $k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ $\left(\text{단, }\mathrm{P}(|Z|\le k)=\frac{\alpha}{100}\right)$

0599 답 385

모표준편차가 50이므로 표본의 크기가 n일 때 모평균 m의 신뢰도 95 %인 신뢰구간은

$\overline{x}-1.96\times\frac{50}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{x}+1.96\times\frac{50}{\sqrt{n}}$

$\therefore |m-\overline{x}|\le1.96\times\frac{50}{\sqrt{n}}$

모평균 m과 표본평균 $\overline{x}$의 차가 5 이하이어야 하므로

$1.96\times\frac{50}{\sqrt{n}}\le5,\ \frac{19.6}{\sqrt{n}}\le1,\ \sqrt{n}\ge19.6$

$\therefore n\ge384.16$

따라서 구하는 n의 최솟값은 385이다.

0600 답 225개

모표준편차가 0.5이므로 표본의 크기를 n이라 하면 모평균 m의 신뢰도 99 %인 신뢰구간은

$\overline{x}-3\times\frac{0.5}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{x}+3\times\frac{0.5}{\sqrt{n}}$

$\therefore |m-\overline{x}|\le3\times\frac{0.5}{\sqrt{n}}$

모평균 m과 표본평균 $\overline{x}$의 차가 0.1 이하이어야 하므로

$3\times\frac{0.5}{\sqrt{n}}\le0.1,\ \frac{15}{\sqrt{n}}\le1,\ \sqrt{n}\ge15$

$\therefore n\ge225$

따라서 적어도 225개의 표본을 조사해야 한다.

STEP 3 | 심화 Master

0601 답 ②

TIP 임의추출한 2개의 표본을 각각 $X_1,\ X_2$라 하면 $\overline{X}=\frac{X_1+X_2}{2}$임을 이용한다.

확률의 총합은 1이므로

$a+b=\frac{3}{4}$ ······ ㉠

또, 2개의 표본 $X_1,\ X_2$의 평균은 $\overline{X}=\frac{X_1+X_2}{2}$이고, $\overline{X}=2$일 때는 $\overline{X}=\frac{X_1+X_2}{2}=2$에서 $X_1+X_2=4$, 즉 $X_1=2,\ X_2=2$

$\therefore \mathrm{P}(\overline{X}=2)=a^2$

이때, $\mathrm{P}(\overline{X}=2)=\frac{1}{9}$이므로 $a^2=\frac{1}{9}$에서 $a=\frac{1}{3}$ $(\because a>0)$

이 값을 ㉠에 대입하면 $b=\frac{5}{12}$

한편, $\overline{X}=3$일 때는 $\overline{X}=\frac{X_1+X_2}{2}=3$에서 $X_1+X_2=6$,
즉 $X_1=2,\ X_2=4$ 또는 $X_1=4,\ X_2=2$

$\therefore \mathrm{P}(\overline{X}=3)=ab+ba=2ab=\frac{5}{18}$

7 통계적 추정

0602 답 26

TIP 임의추출한 2개의 표본을 각각 X_1, X_2라 하면 $\overline{X}=\frac{X_1+X_2}{2}$임을 이용하여 $\overline{X}$의 확률분포표를 그린다.

첫 번째 시행에서 나온 숫자를 X_1, 두 번째 시행에서 나온 숫자를 X_2라 하면

$\overline{X}=\frac{X_1+X_2}{2}$

이때, $\overline{X}$의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

$\overline{X}$	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(\overline{X}=\overline{x})$	$\frac{1}{(n+1)^2}$	$\frac{2n}{(n+1)^2}$	$\frac{n^2}{(n+1)^2}$	1

이때, $\mathrm{P}(\overline{X}=1)=\frac{1}{49}$에서

$\frac{1}{(n+1)^2}=\frac{1}{49}$, $(n+1)^2=49$

$\therefore n=6$ ($\because n$은 자연수)

한편, $\mathrm{E}(\overline{X})$는 모평균과 같으므로 1의 숫자가 적혀 있는 공 1개, 3의 숫자가 적혀 있는 공 6개에 적힌 숫자의 평균과 같다.

$\therefore \mathrm{E}(\overline{X})=\frac{1\cdot1+3\cdot6}{7}=\frac{19}{7}$

따라서 $p=7$, $q=19$이므로 $p+q=26$

다른 풀이 $\overline{X}$의 확률분포표를 완성해 보면 다음과 같다.

$\overline{X}$	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(\overline{X}=\overline{x})$	$\frac{1}{49}$	$\frac{12}{49}$	$\frac{36}{49}$	1

$\therefore \mathrm{E}(\overline{X})=1\cdot\frac{1}{49}+2\cdot\frac{12}{49}+3\cdot\frac{36}{49}=\frac{19}{7}$

0603 답 ①

TIP 전체 학생의 발의 크기를 확률변수 X, 표본으로 추출된 학생들의 발의 크기의 평균을 확률변수 $\overline{X}$로 놓는다.

학생들의 발의 크기를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(250,\ 10^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-250}{10}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\therefore p_1=\mathrm{P}(X\geq240)=\mathrm{P}\left(Z\geq\frac{240-250}{10}\right)=\mathrm{P}(Z\geq-1)$

$=\mathrm{P}(Z\leq1)=\mathrm{P}(Z\leq0)+\mathrm{P}(0\leq Z\leq1)$

$=0.5+0.34=0.84$

한편, 크기가 25인 표본의 표본평균을 $\overline{X}$라 하면 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(250,\ \frac{10^2}{25}\right)$, 즉 $\mathrm{N}(250,\ 2^2)$을 따르므로 $Z'=\frac{\overline{X}-250}{2}$으로 놓으면 Z'은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\therefore p_2=\mathrm{P}(\overline{X}\leq245)=\mathrm{P}\left(Z'\leq\frac{245-250}{2}\right)=\mathrm{P}(Z'\leq-2.5)$

$=\mathrm{P}(Z'\geq2.5)=\mathrm{P}(Z'\geq0)-\mathrm{P}(0\leq Z'\leq2.5)$

$=0.5-0.49=0.01$

$\therefore p_1-p_2=0.83$

0604 답 ②

TIP A와 B가 각각 추출한 표본의 표본평균을 $\overline{X}$, $\overline{Y}$로 놓으면 $10\leq\overline{X}\leq14$일 사건과 $10\leq\overline{Y}\leq14$일 사건은 서로 독립임을 이용한다.

제품의 무게를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(11,\ 2^2)$을 따르고, A와 B가 각각 추출한 크기가 4인 표본의 표본평균을 $\overline{X}$, $\overline{Y}$라 하면 $\overline{X}$, $\overline{Y}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(11,\ \frac{2^2}{4}\right)$, 즉 $\mathrm{N}(11,\ 1)$을 따른다.

이때, $Z_X=\overline{X}-11$, $Z_Y=\overline{Y}-11$로 놓으면 Z_X, Z_Y는 각각 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\therefore \mathrm{P}(10\leq\overline{X}\leq14)=\mathrm{P}(10-11\leq Z_X\leq14-11)$

$=\mathrm{P}(-1\leq Z_X\leq3)$

$=\mathrm{P}(0\leq Z_X\leq1)+\mathrm{P}(0\leq Z_X\leq3)$

$=0.3413+0.4987=0.84$

$=\mathrm{P}(10\leq\overline{Y}\leq14)$

한편, A와 B 두 사람은 각각 독립적으로 표본을 추출하였으므로 두 사건은 서로 독립이다.

따라서 구하는 확률은

$0.84\times0.84=0.7056$

0605 답 0.9408

TIP 표준정규분포표를 이용하여 각각의 확률을 구한 후 확률의 곱셈정리를 이용한다.

A 상자에 들어 있는 과자의 무게를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(16.2,\ 6^2)$을 따르고 표본의 크기가 9이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(16.2,\ \frac{6^2}{9}\right)$, 즉 $\mathrm{N}(16.2,\ 2^2)$을 따른다.

B 상자에 들어 있는 과자의 무게를 확률변수 Y라 하면 Y는 정규분포 $\mathrm{N}(8.6,\ 6^2)$을 따르고 표본의 크기가 9이므로 표본평균 $\overline{Y}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(8.6,\ \frac{6^2}{9}\right)$, 즉 $\mathrm{N}(8.6,\ 2^2)$을 따른다.

이때, $Z_X=\frac{\overline{X}-16.2}{2}$, $Z_Y=\frac{\overline{Y}-8.6}{2}$으로 놓으면 Z_X, Z_Y는 각각 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$\mathrm{P}(\overline{X}\geq12.6)=\mathrm{P}\left(Z_X\geq\frac{12.6-16.2}{2}\right)$

$=\mathrm{P}(Z_X\geq-1.8)=\mathrm{P}(Z_X\leq1.8)$

$=\mathrm{P}(Z_X\leq0)+\mathrm{P}(0\leq Z_X\leq1.8)$

$=0.5+0.46=0.96$

$\mathrm{P}(\overline{Y}<12.6)=\mathrm{P}\left(Z_Y<\frac{12.6-8.6}{2}\right)$

$=\mathrm{P}(Z_Y<2)=\mathrm{P}(Z_Y\leq2)$

$=\mathrm{P}(Z_Y\leq0)+\mathrm{P}(0\leq Z_Y\leq2)$

$=0.5+0.48=0.98$

따라서 A 상자는 정상 판매되고, B 상자는 할인 판매될 확률은

$0.96\times0.98=0.9408$

0606 답 ⑤

TIP 정규분포 $N(m,\ \sigma^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출할 때, 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(m,\ \left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$을 따름을 이용한다.

모집단이 정규분포 $N(10,\ 2^2)$을 따르고 표본의 크기가 n이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(10,\ \frac{2^2}{n}\right)$, 즉 $N\left(10,\ \left(\frac{2}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$을 따른다.

이때, $Z=\dfrac{\overline{X}-10}{\frac{2}{\sqrt{n}}}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

ㄱ. $V(\overline{X})=\dfrac{2^2}{n}=\dfrac{4}{n}$

ㄴ. $P(\overline{X}\le 10-a)=P\left(Z\le\dfrac{-a}{\frac{2}{\sqrt{n}}}\right)=P\left(Z\le\dfrac{-a\sqrt{n}}{2}\right)$

$P(\overline{X}\ge 10+a)=P\left(Z\ge\dfrac{a}{\frac{2}{\sqrt{n}}}\right)=P\left(Z\ge\dfrac{a\sqrt{n}}{2}\right)$

이때, $P\left(Z\le\dfrac{-a\sqrt{n}}{2}\right)=P\left(Z\ge\dfrac{a\sqrt{n}}{2}\right)$이므로

$P(\overline{X}\le 10-a)=P(\overline{X}\ge 10+a)$

ㄷ. $P(\overline{X}\ge a)=P\left(Z\ge\dfrac{a-10}{\frac{2}{\sqrt{n}}}\right)=P\left(Z\ge\dfrac{(a-10)\sqrt{n}}{2}\right)$

$=P\left(Z\le\dfrac{(10-a)\sqrt{n}}{2}\right)$

$P(\overline{X}\ge a)=P(Z\le b)$이려면

$\dfrac{(10-a)\sqrt{n}}{2}=b,\ 10-a=\dfrac{2b}{\sqrt{n}}$

$\therefore a+\dfrac{2}{\sqrt{n}}b=10$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

0607 답 100

TIP 표본평균 $\overline{X}$가 따르는 정규분포를 구하여 표준화한다.

모집단이 정규분포 $N(m,\ \sigma^2)$을 따르고 표본의 크기가 n이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(m,\ \frac{\sigma^2}{n}\right)$을 따른다.

이때, $Z=\dfrac{\overline{X}-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$, 즉 $Z=\dfrac{\sqrt{n}(\overline{X}-m)}{\sigma}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로 $P\left(\left|\dfrac{\overline{X}-m}{2\sigma}\right|\le 0.098\right)\ge 0.95$에서

$P\left(\left|\dfrac{\overline{X}-m}{\sigma}\right|\le 0.196\right)\ge 0.95$

$P\left(\left|\dfrac{\sqrt{n}(\overline{X}-m)}{\sigma}\right|\le 0.196\sqrt{n}\right)\ge 0.95$

$P(|Z|\le 0.196\sqrt{n})\ge 0.95$

$P(-0.196\sqrt{n}\le Z\le 0.196\sqrt{n})\ge 0.95$

$2P(0\le Z\le 0.196\sqrt{n})\ge 0.95$

$\therefore P(0\le Z\le 0.196\sqrt{n})\ge 0.475$

이때, $P(0\le Z\le 1.96)=0.475$이므로

$0.196\sqrt{n}\ge 1.96,\ \sqrt{n}\ge 10\qquad\therefore n\ge 100$

따라서 자연수 n의 최솟값은 100이다.

0608 답 25

TIP 표본평균 $\overline{x}$로 추정한 모평균 m의 신뢰도 a %인 신뢰구간은 $\overline{x}-k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{x}+k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ $\left(\text{단, } P(|Z|\le k)=\frac{a}{100}\right)$이다.

표본평균이 $\overline{x}$, 모표준편차가 σ, 표본의 크기가 49이므로 모평균 m의 신뢰도 95 %인 신뢰구간은

$\overline{x}-1.96\times\dfrac{\sigma}{\sqrt{49}}\le m\le\overline{x}+1.96\times\dfrac{\sigma}{\sqrt{49}}$

이때, $1.73\le m\le 1.87$이므로

$\overline{x}-1.96\times\dfrac{\sigma}{\sqrt{49}}=1.73$ …… ㉠

$\overline{x}+1.96\times\dfrac{\sigma}{\sqrt{49}}=1.87$ …… ㉡

㉠+㉡에서

$2\overline{x}=3.6\qquad\therefore\overline{x}=1.8$

㉡−㉠에서

$2\times 1.96\times\dfrac{\sigma}{7}=0.14\qquad\therefore\sigma=0.25$

따라서 $k=\dfrac{\sigma}{\overline{x}}=\dfrac{0.25}{1.8}=\dfrac{5}{36}$이므로 $180k=25$

0609 답 $19.64\le m\le 29.96$

TIP 표본평균 $\overline{X}$의 값 $\overline{x}$를 먼저 구한다.

임의로 추출한 표본 25명의 평균은

$\overline{x}=\dfrac{15\cdot 4+20\cdot 5+25\cdot 4+30\cdot 12}{25}=\dfrac{620}{25}=24.8$

즉, 표본평균이 24.8, 모표준편차가 10, 표본의 크기가 25이므로 모평균 m의 신뢰도 99 %인 신뢰구간은

$24.8-2.58\times\dfrac{10}{\sqrt{25}}\le m\le 24.8+2.58\times\dfrac{10}{\sqrt{25}}$

$\therefore 19.64\le m\le 29.96$

0610 답 ③

TIP 표본평균 $\overline{X}$를 이용하여 c의 값을 먼저 구하고 $P(X\le m+c)$의 값을 구한다.

모표준편차를 σ라 하면 표본평균이 $\overline{x}$, 표본의 크기가 16이므로 모평균 m의 신뢰도 95 %인 신뢰구간은

$\overline{x}-1.96\times\dfrac{\sigma}{\sqrt{16}}\le m\le\overline{x}+1.96\times\dfrac{\sigma}{\sqrt{16}}$

$\overline{x}-0.49\sigma\le m\le\overline{x}+0.49\sigma$

$\therefore c=0.49\sigma$

한편, 작년에 운행된 택시의 연간 주행거리를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $N(m,\ \sigma^2)$을 따르므로 $Z=\dfrac{X-m}{\sigma}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

7 통계적 추정

$\therefore P(X \le m+c) = P\left(Z \le \frac{m+c-m}{\sigma}\right)$

$= P\left(Z \le \frac{c}{\sigma}\right)$

$= P\left(Z \le \frac{0.49\sigma}{\sigma}\right)$

$= P(Z \le 0.49)$

$= P(Z \le 0) + P(0 \le Z \le 0.49)$

$= 0.5 + 0.1879$

$= 0.6879$

0611 답 $x^2-20x+100=0$

TIP 두 수 α, β를 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은 $x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$이다.

표본평균이 117, 모표준편차가 σ_A, 표본의 크기가 100이므로 모평균 m_A의 신뢰도 95 %인 신뢰구간은

$117-2\times\frac{\sigma_A}{\sqrt{100}} \le m_A \le 117+2\times\frac{\sigma_A}{\sqrt{100}}$

$\therefore a=117-\frac{\sigma_A}{5}$, $b=117+\frac{\sigma_A}{5}$

표본평균이 135, 모표준편차가 σ_B, 표본의 크기가 100이므로 모평균 m_B의 신뢰도 95 %인 신뢰구간은

$135-2\times\frac{\sigma_B}{\sqrt{100}} \le m_B \le 135+2\times\frac{\sigma_B}{\sqrt{100}}$

$\therefore c=135-\frac{\sigma_B}{5}$, $d=135+\frac{\sigma_B}{5}$

이때, $a-c=-18$에서

$117-\frac{\sigma_A}{5}-\left(135-\frac{\sigma_B}{5}\right)=-18$

$-18-\frac{1}{5}(\sigma_A-\sigma_B)=-18$

$\therefore \sigma_A=\sigma_B$ …… ㉠

또, $b+d=256$에서

$117+\frac{\sigma_A}{5}+\left(135+\frac{\sigma_B}{5}\right)=256$

$252+\frac{1}{5}(\sigma_A+\sigma_B)=256$

$\therefore \sigma_A+\sigma_B=20$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\sigma_A=10$, $\sigma_B=10$

따라서 σ_A, σ_B를 두 근으로 하는 최고차항의 계수가 1인 이차방정식은 $x^2-(10+10)x+10\cdot10=0$, 즉

$x^2-20x+100=0$

0612 답 ③

TIP $\overline{X_A}$, $\overline{X_B}$가 각각 정규분포를 따름을 이용한다.

ㄱ. $E(\overline{X_A})=m_1$, $E(\overline{X_B})=m_2$이므로 $m_1=m_2$이면 $E(\overline{X_A})=E(\overline{X_B})$이다.

ㄴ. 모집단 B는 정규분포 $N\left(m_2, \left(\frac{\sigma}{2}\right)^2\right)$을 따르고 표본의 크기가 n_2이므로 표본평균 $\overline{X_B}$는 정규분포 $N\left(m_2, \left(\frac{\sigma}{2\sqrt{n_2}}\right)^2\right)$, 즉 $N\left(m_2, \frac{\sigma^2}{4n_2}\right)$을 따른다.

ㄷ. $P(|Z| \le k)=0.95$라 하면 모표준편차가 σ, 표본의 크기가 n_1일 때 모평균 m_1의 신뢰도 95 %인 신뢰구간의 길이는

$b-a=2k\frac{\sigma}{\sqrt{n_1}}$

모표준편차가 σ, 표본의 크기가 n_2일 때 모평균 m_2의 신뢰도 95 %인 신뢰구간의 길이는

$d-c=2k\frac{\sigma}{2\sqrt{n_2}}=k\frac{\sigma}{\sqrt{n_2}}$

이때, $n_1=4n_2$이므로

$b-a=2k\frac{\sigma}{\sqrt{n_1}}=2k\frac{\sigma}{\sqrt{4n_2}}=k\frac{\sigma}{\sqrt{n_2}}=d-c$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.