일품 미적분 Ⅱ

정답 및 풀이

I 지수함수와 로그함수

01 지수함수와 로그함수

개념 & 기출 유형 본책 8쪽 ~ 9쪽

001 ㄱ, ㄷ 002 ① 003 1 004 ④ 005 81
006 ③ 007 999 008 ③ 009 $\frac{1}{2}$ 010 ①
011 8 012 ②

내신 1등급 도전하기 본책 10쪽 ~ 12쪽

013 14 014 ② 015 2 016 $\frac{3\sqrt[3]{4}}{2}$
017 ㄴ, ㄷ 018 $A<B<C$ 019 ⑤ 020 ⑤
021 52 022 ⑤ 023 18 024 193 025 ②
026 ② 027 8 028 ④ 029 ② 030 2
031 27 032 ② 033 ④

수능 따라잡기 본책 13쪽

034 ③ 035 14 036 ③ 037 ② 038 27

02 지수함수와 로그함수의 활용

개념 & 기출 유형 본책 14쪽 ~ 15쪽

039 ③ 040 2 041 449 042 ③ 043 ③
044 4 045 $x=6$ 046 ② 047 ① 048 ①
049 $\frac{1}{27}$ 050 89

내신 1등급 도전하기 본책 16쪽 ~ 18쪽

051 ③ 052 9 053 ③ 054 3 055 ①
056 ③ 057 9 058 $x\geq1$ 059 ④ 060 17
061 ④ 062 $0<a<1$일 때 $x>2$, $a>1$일 때 $x<2$
063 $x=10$ 064 ④ 065 $-\frac{1}{4}$ 066 ④
067 ⑤ 068 9 069 ③ 070 100 071 $\frac{1}{4}$
072 ④ 073 ①

수능 따라잡기 본책 19쪽

074 ② 075 ② 076 3 077 45 078 7
079 ②

03 지수함수와 로그함수의 미분

개념 & 기출 유형 본책 20쪽 ~ 21쪽

080 ③ 081 ④ 082 4 083 ④ 084 e^2
085 1 086 ⑤ 087 $\frac{1}{4}$ 088 ① 089 80
090 ④ 091 ⑤

내신 1등급 도전하기 본책 22쪽 ~ 24쪽

092 ④ 093 1 094 $\frac{5}{4}$ 095 $\frac{3}{2}$ 096 ④
097 ③ 098 2 099 ② 100 $\frac{10}{3}$ 101 ⑤
102 -7 103 4 104 ⑤ 105 18 106 ③
107 18 108 $10\ln 2$ 109 ① 110 7 111 ③

수능 따라잡기 본책 25쪽

112 4 113 ① 114 ④ 115 ② 116 ③
117 ⑤

1등급 완성하기 본책 26쪽 ~ 29쪽

118 ② 119 ① 120 7 121 ② 122 ⑤
123 5 124 ③ 125 187 126 ⑤ 127 7
128 ② 129 0 130 ③ 131 15
132 $0<x<\frac{1}{2}$ 또는 $1<x<\frac{3}{2}$ 133 11 134 2
135 ② 136 4 137 ③ 138 ② 139 9
140 $-e$ 141 ⑤ 142 ② 143 42 144 ③

Ⅱ 삼각함수

04 삼각함수

개념 & 기출 유형 본책 32쪽 ~ 34쪽

145 ㄱ, ㄷ **146** ④ **147** ⑤ **148** ③ **149** $540°$
150 ④ **151** $12+\frac{32}{3}\pi$ **152** 8 **153** $6\sqrt{2}$
154 ② **155** $2\sqrt{10}$ **156** ② **157** ② **158** 50
159 ② **160** $-\frac{8}{3}$

내신 1등급 도전하기 본책 35쪽 ~ 37쪽

161 ③ **162** 36 **163** $120°$ **164** ⑤ **165** 110
166 ④ **167** ④ **168** $20\sqrt{5}\pi$ **169** ③ **170** 0
171 ⑤ **172** ④ **173** ② **174** 16 **175** $-\frac{1}{4}$
176 $\frac{3\sqrt{41}}{25}$ **177** ③ **178** $-\frac{3}{8}$

수능 따라잡기 본책 38쪽

179 9 **180** ⑤ **181** 23 **182** 169 **183** 50
184 ②

05 삼각함수의 그래프

개념 & 기출 유형 본책 39쪽 ~ 41쪽

185 ③ **186** π **187** -2 **188** ③ **189** ④
190 3 **191** -1 **192** ④ **193** ① **194** 3
195 $\frac{\pi}{6}$ **196** ④ **197** ④ **198** ③
199 $\frac{\pi}{6}\le x\le\frac{5}{6}\pi$ **200** ④

내신 1등급 도전하기 본책 42쪽 ~ 45쪽

201 16 **202** ① **203** ③ **204** 33 **205** ④
206 3 **207** 3 **208** 3 **209** ③ **210** ②
211 ① **212** $\frac{4}{5}$ **213** ② **214** 0 **215** $\frac{1}{4}$
216 -2 **217** ⑤ **218** $\frac{\sqrt{3}}{3}$ **219** ④ **220** 2π
221 ③ **222** ③ **223** $\frac{2}{3}\pi<\theta<\pi$ **224** ③

수능 따라잡기 본책 46쪽 ~ 47쪽

225 ④ **226** 6 **227** ② **228** ② **229** 2
230 ② **231** ③ **232** 2 **233** ② **234** ①
235 ③ **236** 3

06 삼각함수의 미분

개념 & 기출 유형 본책 48쪽 ~ 50쪽

237 6 **238** ⑤ **239** $\frac{1}{3}$ **240** -4 **241** ①
242 ⑤ **243** ④ **244** $\frac{1}{2}$ **245** ② **246** ④
247 $\frac{3}{5}$ **248** ④ **249** ⑤ **250** ⑤ **251** -4
252 ⑤ **253** ② **254** 2

내신 1등급 도전하기 본책 51쪽 ~ 53쪽

255 ⑤ **256** $\frac{1}{3}$ **257** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **258** ③
259 $9+4\sqrt{3}$ **260** $10\sqrt{5}$ **261** $-\frac{\pi}{12}$ **262** ①
263 $14+4\sqrt{10}$ **264** $\frac{1}{4}$ **265** ② **266** 5
267 ③ **268** ③ **269** 2 **270** ② **271** ②
272 ②

수능 따라잡기 본책 54쪽

273 ④	**274** 9	**275** ⑤	**276** ④	**277** ①
278 3				

1등급 완성하기 본책 55쪽 ~ 59쪽

279 $\frac{\sqrt{3}}{2}$	**280** $36\pi-27$		**281** ④	**282** ①
283 ③	**284** $-\frac{3}{4}$	**285** ④	**286** $\frac{2}{3}$	**287** ④
288 $\frac{1}{2}$	**289** $\frac{3}{2}$	**290** ②	**291** 0	**292** ④
293 $\frac{5}{4}$	**294** ④	**295** ③	**296** ⑤	**297** 50
298 ①	**299** $\frac{9}{4}+\sqrt{2}$		**300** ④	
301 $\frac{7}{9}$, 1	**302** $\frac{16\sqrt{2}-8}{7}$		**303** ①	**304** $\frac{\pi}{2}$
305 6	**306** $-2e^{\pi}$	**307** ④	**308** ③	**309** ②
310 20				

Ⅲ 미분법

07 여러 가지 미분법

개념 & 기출 유형 본책 62쪽 ~ 63쪽

311 $\frac{1}{2}$	**312** (가) mx^{m-1} (나) $-m-1$			**313** ④
314 -5	**315** ①	**316** ④		
317 (가) y^4 (나) $4y^3$ (다) $\frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$			**318** ①	**319** ⑤
320 ③	**321** ②	**322** ③	**323** 12	**324** ③
325 ⑤	**326** 2	**327** ④	**328** 4	
329 ③	**330** $\frac{4}{5}$	**331** ④	**332** ④	

내신1등급 도전하기 본책 64쪽 ~ 66쪽

333 1024	**334** ③	**335** 7	**336** $4e^2$	**337** $\frac{4}{11}$
338 ②	**339** 1	**340** $-\frac{1}{5}$	**341** ④	**342** ③
343 9	**344** ②	**345** $15e^3$		

수능 따라잡기 본책 67쪽

346 55	**347** ③	**348** ④	**349** ④	**350** 5
351 1				

08 도함수의 활용

개념 & 기출 유형 본책 68쪽 ~ 71쪽

352 ④	**353** $-e^2-e-1$		**354** ②	**355** ④
356 ①	**357** $\frac{1}{4}$	**358** ③	**359** ⑤	
360 $a\geq 2$	**361** ②	**362** $\frac{9}{2}$	**363** ②	**364** ①
365 $\frac{\pi}{4}$	**366** ②	**367** ①	**368** 2π	**369** ③
370 16	**371** ⑤	**372** ③	**373** ⑤	

내신1등급 도전하기 본책 72쪽 ~ 74쪽

374 ⑤	**375** 2	**376** $\frac{\sqrt{5}}{5}e$	**377** $\sqrt{2}(e^2-1)$	
378 ③	**379** ④	**380** ③	**381** ④	**382** 6
383 ④	**384** $e^{\frac{\pi}{2}}$	**385** $-1<a<1$		**386** ④
387 ⑤	**388** $\frac{1}{e}$	**389** ③	**390** $\frac{\sqrt{2}}{2}$	
391 $16\sqrt{2}$	**392** ③	**393** ①	**394** $0<k<e$	

수능 따라잡기 본책 75쪽

395 ②	**396** ⑤	**397** ③	**398** ③	**399** 20

1등급 완성하기

본책 76쪽 ~ 79쪽

400 7	401 55	402 ②	403 ①	404 16
405 $\pi\ln\pi$	406 ④	407 ③	408 ②	409 8
410 6	411 ③	412 ③	413 ③	414 $-\frac{1}{3}$
415 $\frac{4}{5}$	416 6	417 ⑤	418 15	419 ⑤
420 ②	421 $\frac{1}{e^{2\pi}-1}$		422 ⑤	423 8
424 ③	425 7	426 ②	427 $\frac{11}{9}$	428 15
429 ①				

Ⅳ 적분법

09 여러 가지 적분법

개념 & 기출 유형

본책 82쪽 ~ 85쪽

430 ⑤	431 ④	432 $\frac{5}{2}$	433 $\frac{1}{6}$	434 ④
435 $\frac{\pi}{2}-2$	436 $\frac{1}{12}$	437 $\frac{1}{2}(e-1)$		438 ②
439 ⑤	440 1	441 ②	442 ①	443 ④
444 7	445 $\frac{428}{15}$	446 ④	447 ①	448 ①
449 ④	450 5	451 ②	452 $\ln 2$	453 ③

내신 1등급 도전하기

본책 86쪽 ~ 88쪽

454 ②	455 $\frac{1}{2}$	456 ③	457 ③	458 0
459 $4\sqrt{3}$	460 ③	461 19	462 ①	
463 $20\ln 2$		464 ④	465 ③	
466 $13+2\pi$		467 $\frac{9}{2}$	468 ③	469 $\frac{2}{3}$
470 ⑤	471 19	472 ⑤	473 ⑤	474 4

수능 따라잡기

본책 89쪽

475 ③	476 ②	477 160	478 ⑤	479 ③
480 17				

10 정적분의 활용

개념 & 기출 유형

본책 90쪽 ~ 91쪽

481 ④	482 ④	483 π	484 9	485 ②
486 ①	487 $\frac{2}{\pi}$	488 $\ln 2$	489 ①	490 ②
491 ②				

내신 1등급 도전하기

본책 92쪽 ~ 94쪽

492 ④	493 $\frac{1}{2\ln 2}$	494 $\frac{5}{8}$	495 ④	496 4
497 ③	498 $\frac{\sqrt{3}}{3}$	499 -2	500 ①	501 ④
502 8	503 ④	504 ⑤	505 $\frac{1}{e}$	506 ②
507 ③	508 ④	509 $\frac{2000}{3}$		

수능 따라잡기

본책 95쪽

510 ②	511 ③	512 ④	513 ④	

1등급 완성하기

본책 96쪽 ~ 100쪽

514 27	515 ④	516 ⑤	517 $\frac{5}{2}$	518 ④
519 $\frac{31}{35}$	520 ②	521 ②	522 4	523 3
524 8	525 8	526 ②	527 ④	528 ②
529 ②	530 0	531 $\frac{3}{2}$	532 ①	533 ③
534 1	535 1	536 ①	537 ③	538 2
539 3	540 ③	541 42	542 ②	543 ④
544 40	545 4			

Ⅰ 지수함수와 로그함수

01 지수함수와 로그함수 본책 8쪽

001 ㄱ. $f(3x)=3^{3x}=(3^x)^3=\{f(x)\}^3$

ㄴ. [반례] $x=3$일 때,

$f(x^2)=f(9)=3^9$,

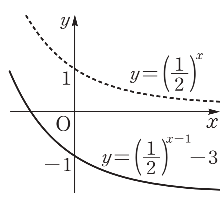
$\{f(x)\}^2=\{f(3)\}^2=(3^3)^2=3^6$

$\therefore f(x^2)\neq\{f(x)\}^2$

ㄷ. $3f(x)=3\cdot 3^x=3^{x+1}=f(x+1)$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ㄱ, ㄷ

002 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}-3$의 그래프는 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



따라서 그래프가 지나지 않는 사분면은 제1사분면이다.

답 ①

003 $y=16\cdot 2^{2x}+3=4^2\cdot 4^x+3=4^{x+2}+3$

따라서 $y=16\cdot 2^{2x}+3$의 그래프는 $y=4^x$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이므로

$m=-2,\ n=3$

$\therefore m+n=1$ 답 1

004 $\sqrt{\sqrt{2}}=2^{\frac{1}{4}}$

$\sqrt[3]{4}=(2^2)^{\frac{1}{3}}=2^{\frac{2}{3}}$

$0.5^{-\frac{3}{4}}=(2^{-1})^{-\frac{3}{4}}=2^{\frac{3}{4}}$

$\left(\frac{1}{8}\right)^{0.1}=(2^{-3})^{0.1}=2^{-0.3}$

이때 $-0.3<\frac{1}{4}<\frac{2}{3}<\frac{3}{4}$이고 밑이 1보다 크므로

$2^{-0.3}<2^{\frac{1}{4}}<2^{\frac{2}{3}}<2^{\frac{3}{4}}$

따라서 가장 큰 수는 $2^{\frac{3}{4}}$, 세 번째로 큰 수는 $2^{\frac{1}{4}}$이므로 구하는 곱은

$2^{\frac{3}{4}}\cdot 2^{\frac{1}{4}}=2^{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}}=2$ 답 ④

005 $g(x)=x^2-2x+2$라 하면

$g(x)=(x-1)^2+1$

$0\le x\le 3$에서 $g(0)=2,\ g(1)=1,\ g(3)=5$이므로

$1\le g(x)\le 5$

이때 $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-2x+2}=\left(\frac{1}{3}\right)^{g(x)}$에서 밑이 1보다 작으므로

$\left(\frac{1}{3}\right)^5\le f(x)\le\left(\frac{1}{3}\right)^1$

따라서 $M=\frac{1}{3},\ m=\left(\frac{1}{3}\right)^5$이므로

$\frac{M}{m}=\frac{1}{3}\cdot 3^5=81$ 답 81

006 $y=2^{x+2}-4^x+16$에서

$y=4\cdot 2^x-(2^x)^2+16$

$2^x=t\ (t>0)$로 놓으면

$y=-t^2+4t+16$

$=-(t-2)^2+20$

이때 $x\le 3$이므로 $0<t\le 8$

따라서 주어진 함수는 $t=2$일 때 최댓값 20, $t=8$일 때 최솟값 -16을 갖는다.

따라서 $M=20,\ m=-16$이므로

$M+m=4$ 답 ③

007 $y=-3+\log 10(x+3)$이라 하면

$y=-3+\log 10+\log(x+3)$

$y=\log(x+3)-2$

$\log(x+3)=y+2,\quad x+3=10^{y+2}$

$\therefore x=10^{y+2}-3$

x와 y를 서로 바꾸면

$y=10^{x+2}-3$

즉 $g(x)=10^{x+2}-3$이므로

$g(1)-g(-2)=(10^3-3)-(10^0-3)$

$=999$ 답 999

008 $y=\log_k(2x-5)+2$에서 $2x-5=1$, 즉 $x=3$일 때

$y=\log_k 1+2=2$

따라서 $y=\log_k(2x-5)+2$의 그래프는 항상 점 $(3,\ 2)$를 지나므로

$a=3,\ b=2$

$\therefore a+b=5$ 답 ③

009 $y=\log_2\sqrt{2}(x-1)=\log_2(x-1)+\log_2\sqrt{2}$

$=\log_2(x-1)+\log_2 2^{\frac{1}{2}}$

$=\log_2(x-1)+\frac{1}{2}$

따라서 $y=\log_2\sqrt{2}(x-1)$의 그래프는 $y=\log_2 x$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 $\frac{1}{2}$만큼 평행이동한 것이므로

$m=1,\ n=\frac{1}{2}$

$\therefore mn=\frac{1}{2}$ 답 $\frac{1}{2}$

일품 BOX

a^x 꼴이 반복되는 함수는 $a^x=t\,(t>0)$로 치환하여 t에 대한 함수로 나타낸다. 이때 t의 값의 범위에 유의한다.

$a>0,\ a\neq1$이고 $M>0,\ N>0$일 때
$\log_a MN=\log_a M+\log_a N$

지수를 포함한 수의 대소를 비교할 때에는 주어진 수의 밑을 같게 한 후 지수함수의 성질을 이용한다.

$a>0,\ a\neq1$일 때
① $\log_a 1=0$
② $\log_a a=1$

함수 $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{g(x)}$에서 $0<\frac{1}{3}<1$이므로 $f(x)$는 $g(x)$가 최대일 때 최솟값, $g(x)$가 최소일 때 최댓값을 갖는다.

010 $f(x)=x^2-4x+29$라 하면

$f(x)=(x-2)^2+25$

따라서 $f(x)$는 $x=2$일 때 최솟값 25를 갖는다.
이때 $y=\log_{0.2}f(x)$에서 밑이 1보다 작으므로 y의 최댓값은

$\log_{0.2}25=\log_{5^{-1}}5^2=-2$

답 ①

011 $y=(\log_3 x)^2+a\log_3 x^2+b$

$=(\log_3 x)^2+2a\log_3 x+b$

$\log_3 x=t$로 놓으면

$y=t^2+2at+b$

$=(t+a)^2+b-a^2$

따라서 y는 $t=-a$일 때, 최솟값 $b-a^2$을 갖는다.
$x=\frac{1}{9}$, 즉 $t=\log_3\frac{1}{9}=-2$일 때 최솟값 2를 가지므로

$-a=-2$, $b-a^2=2$

$\therefore a=2$, $b=6$

$\therefore a+b=8$

답 8

012 $y=\log_2 x+\log_2(8-x)$

$=\log_2(-x^2+8x)$

$=\log_2\{-(x-4)^2+16\}$

$f(x)=-(x-4)^2+16$이라 하면 $1\le x\le 5$에서

$f(1)=7$, $f(4)=16$, $f(5)=15$

이므로

$7\le f(x)\le 16$

이때 $y=\log_2 f(x)$에서 밑이 1보다 크므로 $f(x)$가 최소일 때 y도 최소이다.
즉 주어진 함수는 $x=1$일 때 최솟값 $\log_2 7$을 가지므로

$a=1$, $b=\log_2 7$

$\therefore ab=\log_2 7$

답 ②

013 $f(1)+f(-1)=a+a^{-1}=4$

$\therefore f(2)+f(-2)=a^2+a^{-2}$

$=(a+a^{-1})^2-2$

$=4^2-2=14$

답 14

$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$

014 $(a,\ b)\in A$이면 $b=\left(\frac{1}{4}\right)^a$

이때

$\frac{1}{\sqrt{b}}=b^{-\frac{1}{2}}=\left\{\left(\frac{1}{4}\right)^a\right\}^{-\frac{1}{2}}=\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{a}{2}}$

이므로

$\left(-\frac{a}{2},\ \frac{1}{\sqrt{b}}\right)\in A$

따라서 □ 안에 알맞은 것은 $-\frac{a}{2}$이다.

답 ②

일품 BOX

도형의 대칭이동
방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형을 x축, y축, 원점에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은
① x축: $f(x,\ -y)=0$
② y축: $f(-x,\ y)=0$
③ 원점: $f(-x,\ -y)=0$

015 해결 과정 함수 $y=2^{2x+a}+b$의 그래프의 점근선의 방정식이 $y=3$이므로 $b=3$ ● 30%

함수 $y=2^{2x+a}+3$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은 $y=2^{-2x+a}+3$

$\therefore f(x)=2^{-2x+a}+3$ ● 20%

함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(-2,\ 11)$을 지나므로

$11=2^{4+a}+3$, $2^{4+a}=8=2^3$

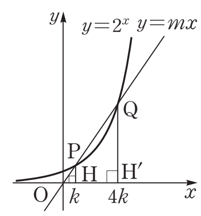
$4+a=3$

$\therefore a=-1$ ● 30%

답 구하기 $\therefore a+b=2$ ● 20%

답 2

016 오른쪽 그림과 같이 두 점 P, Q에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 H, H′이라 하면
△POH∽△QOH′이고, 닮음비는



∠POH는 공통, ∠PHO=∠QH′O=90°
∴ △POH∽△QOH′ (AA 닮음)

$\overline{OP}:\overline{OQ}=1:4$

두 점 H, H′의 x좌표를 각각 k, $4k$ $(k>0)$라 하면

$\overline{PH}=2^k$, $\overline{QH'}=2^{4k}$

$\overline{PH}:\overline{QH'}=1:4$이므로 $2^k:2^{4k}=1:4$

$4\cdot 2^k=2^{4k}$, $2^{2+k}=2^{4k}$

$2+k=4k$

$\therefore k=\frac{2}{3}$

$\therefore m=\frac{\overline{PH}}{\overline{OH}}=\frac{2^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}}=\frac{3\sqrt[3]{4}}{2}$

답 $\frac{3\sqrt[3]{4}}{2}$

017 ㄱ. [반례] $a=2$, $p=\frac{1}{2}$, $q=1$일 때,

$\frac{a^p}{p}=2\cdot 2^{\frac{1}{2}}=2^{\frac{3}{2}}$, $\frac{a^q}{q}=2$

$\therefore \frac{a^p}{p}>\frac{a^q}{q}$

ㄴ. $\mathrm{A}(0,\ 1)$이라 하면 직선 AQ의 기울기가 직선 AP의 기울기보다 크므로

$\frac{a^p-1}{p}<\frac{a^q-1}{q}$

$\therefore q(a^p-1)<p(a^q-1)$

ㄷ. $a>2$, $q>p+1$이면 $a^q>a^{p+1}$

$\therefore a^q-a^p>a^{p+1}-a^p$

$=a^p(a-1)>a^p>1$ ($\because a>2$)

$p>0$이므로 $a^p>1$

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ㄴ, ㄷ

018 해결 과정 $A=\sqrt{a\sqrt[3]{a\sqrt[4]{a}}}$

$=a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}}\cdot a^{\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}}$

$=a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}}=a^{\frac{12+4+1}{24}}$

$=a^{\frac{17}{24}}$ ● 30%

$B=\sqrt[3]{a\sqrt[4]{a\sqrt{a}}}$

$=a^{\frac{1}{3}}\cdot a^{\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}}\cdot a^{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}}$

$=a^{\frac{1}{3}+\frac{1}{12}+\frac{1}{24}}=a^{\frac{8+2+1}{24}}$

$=a^{\frac{11}{24}}$ ● 30%

$C=\sqrt[4]{a\sqrt{a\sqrt[3]{a}}}$

$=a^{\frac{1}{4}}\cdot a^{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}}\cdot a^{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}}$

$=a^{\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{24}}=a^{\frac{6+3+1}{24}}$

$=a^{\frac{5}{12}}$ ● 30%

답 구하기 $\frac{5}{12}<\frac{11}{24}<\frac{17}{24}$이고 $0<a<1$이므로

$a^{\frac{17}{24}}<a^{\frac{11}{24}}<a^{\frac{5}{12}}$

$\therefore A<B<C$ ● 10%

답 $A<B<C$

019 (i) $f(5)=g(5)$에서

$(1+a)^5=\left(1+\frac{b}{2}\right)^{10}=\left\{\left(1+\frac{b}{2}\right)^2\right\}^5$

즉 $1+a=\left(1+\frac{b}{2}\right)^2=1+b+\left(\frac{b}{2}\right)^2$이므로

$a>b$

(ii) $g(5)=h(5)$에서

$\left(1+\frac{b}{2}\right)^{10}=\left(1+\frac{c}{4}\right)^{20}=\left\{\left(1+\frac{c}{4}\right)^2\right\}^{10}$

즉 $1+\frac{b}{2}=\left(1+\frac{c}{4}\right)^2=1+\frac{c}{2}+\left(\frac{c}{4}\right)^2$이므로

$b>c$

(i), (ii)에서 $c<b<a$

답 ⑤

020 $y=2^{x-2}\cdot3^{3-x}=2^x\cdot2^{-2}\cdot3^3\cdot3^{-x}$

$=\frac{2^x\cdot3^3}{2^2\cdot3^x}=\frac{27}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^x$

이때 밑이 1보다 작으므로 $x=2$일 때 y는 최솟값을 갖는다.

따라서 구하는 최솟값은

$\frac{27}{4}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2=3$

답 ⑤

021 해결 과정 $f(x)=x^2-4x+b$라 하면

$f(x)=(x-2)^2+b-4$

이때 $2\le x\le3$에서

$b-4\le f(x)\le b-3$ ● 20%

$0<a<1$이므로 함수 $y=a^{x^2-4x+b}$은 $x=2$일 때 최댓값 a^{b-4}을 갖고, $x=3$일 때 최솟값 a^{b-3}을 갖는다. 즉

$a^{b-4}=8$ …… ㉠

$a^{b-3}=\frac{1}{2}$ …… ㉡ ● 20%

㉡÷㉠을 하면

$a=\frac{1}{16}$ ● 20%

일품 BOX

산술평균과 기하평균의 관계

$a>0$, $b>0$일 때

$\frac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}$

(단, 등호는 $a=b$일 때 성립)

$2^x=2^{-x}$에서

$2^{2x}=1$ $\therefore x=0$

$1+a=1+b+\left(\frac{b}{2}\right)^2$에서

$a-b=\left(\frac{b}{2}\right)^2>0$

$\therefore a>b$

$1+\frac{b}{2}=1+\frac{c}{2}+\left(\frac{c}{4}\right)^2$에서

$\frac{b}{2}-\frac{c}{2}=\left(\frac{c}{4}\right)^2$

$b-c=2\left(\frac{c}{4}\right)^2>0$

$\therefore b>c$

$\frac{a^{b-3}}{a^{b-4}}=\frac{\frac{1}{2}}{8}$

$a^{(b-3)-(b-4)}=\frac{1}{16}$

$\therefore a=\frac{1}{16}$

㉡에 $a=\frac{1}{16}$을 대입하면

$\left(\frac{1}{16}\right)^{b-3}=\frac{1}{2}$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{4b-12}=\frac{1}{2}$

$4b-12=1$ $\therefore b=\frac{13}{4}$ ● 20%

답 구하기 $\therefore \frac{b}{a}=\frac{\frac{13}{4}}{\frac{1}{16}}=52$ ● 20%

답 52

022 $2^x+2^{-x}=t$로 놓으면 $2^x>0$, $2^{-x}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$t=2^x+2^{-x}\ge2\sqrt{2^x\cdot2^{-x}}=2$

(단, 등호는 $x=0$일 때 성립)

$\therefore t\ge2$

$4^x+4^{-x}=(2^x+2^{-x})^2-2=t^2-2$이므로

$y=4^x+4^{-x}+2(2^x+2^{-x})-1$

$=t^2-2+2t-1$

$=(t+1)^2-4$

따라서 y는 $t=2$일 때 최솟값 5를 갖는다.

답 ⑤

1등급 비|밀|노|트

a^x+a^{-x} 꼴이 반복되는 지수함수의 최대 · 최소

a^x+a^{-x} 꼴이 반복되면 $a^x+a^{-x}=t$로 치환한다. 이때 $a^x>0$, $a^{-x}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\frac{a^x+a^{-x}}{2}\ge\sqrt{a^xa^{-x}}=1$ (단, 등호는 $a^x=a^{-x}$일 때 성립)

즉 $a^x+a^{-x}\ge2$이므로

$t\ge2$

023 해결 과정 $5^x>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$y=5^{x+2}+\frac{9}{5^x}\ge2\sqrt{5^{x+2}\cdot\frac{9}{5^x}}=30$

$\therefore b=30$ ● 40%

이때 등호는 $5^{x+2}=\frac{9}{5^x}$일 때 성립하므로

$25\cdot5^x=\frac{9}{5^x}$

$(5^x)^2=\frac{9}{25}$, $5^x=\frac{3}{5}$

$\therefore 5^a=\frac{3}{5}$ ● 40%

답 구하기 $\therefore 5^a\cdot b=18$ ● 20%

답 18

024 $3^x+4^y=1$에서

$3^x=1-4^y=1-(2^y)^2$ …… ㉠

㉠을 $3^{x+1}+2^{y-1}$에 대입하면

$$3^{x+1}+2^{y-1}=3\cdot3^x+\frac{1}{2}\cdot2^y$$
$$=3\{1-(2^y)^2\}+\frac{1}{2}\cdot2^y \quad \cdots\cdots ㉡$$

$2^y=t\ (t>0)$로 놓으면 ㉠에서 $1-t^2=3^x>0$이므로

$-1<t<1$

$\therefore 0<t<1$

㉡에서

$$3(1-t^2)+\frac{1}{2}t=-3\left(t^2-\frac{1}{6}t\right)+3$$
$$=-3\left(t-\frac{1}{12}\right)^2+\frac{145}{48}$$

따라서 $t=\frac{1}{12}$일 때 최댓값 $\frac{145}{48}$를 가지므로

$p=48,\ q=145$

$\therefore p+q=193$

답 193

025 두 함수 $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{-x}$과 $g(x)=-\log_{\frac{1}{2}}x$는 서로 역함수 관계이므로

$f(a)=d \Longleftrightarrow g(d)=a,$

$f(b)=e \Longleftrightarrow g(e)=b,$

$g(b)=d \Longleftrightarrow f(d)=b,$

$g(c)=e \Longleftrightarrow f(e)=c$

$\therefore (g\circ g\circ f)(d)=g(g(f(d)))$

$=g(g(b))$

$=g(d)=a$

$(g\circ g\circ g)(c)=g(g(g(c)))$

$=g(g(e))$

$=g(b)=d$

$\therefore (g\circ g\circ f)(d)+(g\circ g\circ g)(c)=a+d$

답 ②

$(g\circ g\circ f)(d)$
$=(g\circ I)(d)$
$=g(d)=a$
(단, I는 항등함수)

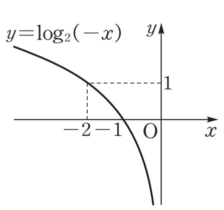
1등급 비밀노트

역함수의 그래프가 주어지고 합성함수의 함숫값을 구하는 문제에서는

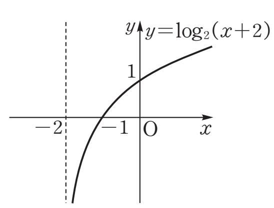
$f(a)=b \Longleftrightarrow f^{-1}(b)=a$

임을 이용한다. 이때 직선 $y=x$가 주어진 경우에는 직선 $y=x$ 위의 점의 x좌표와 y좌표는 서로 같음을 이용한다.

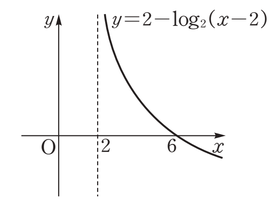
026 ㄱ. 오른쪽 그림에서 $y=\log_2(-x)$의 그래프는 y축을 점근선으로 하므로 직선 $x=0$과 만나지 않는다.



ㄴ. $y=\log_2(x+2)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 원점을 지나는 임의의 직선과 항상 만난다.



ㄷ. 오른쪽 그림에서 $y=2-\log_2(x-2)$의 그래프는 직선 $x=2$를 점근선으로 하므로 직선 $x=0$과 만나지 않는다.



이상에서 원점을 지나는 임의의 직선과 항상 만나는 것은 ㄴ뿐이다.

답 ②

027 점 A의 좌표를 $(k,\ k)\ (k>0)$라 하면 □COBA의 넓이가 16이므로

$k^2=16$

$\therefore k=4\ (\because k>0)$

따라서 $A(4,\ 4)$이고 함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 A를 지나므로

$\log_a 5=4,\qquad a^4=5$

$\therefore a=\sqrt[4]{5}$

따라서 $f(x)=\log_{\sqrt[4]{5}}(x+1)$이므로

$f(24)=\log_{\sqrt[4]{5}}25=8\log_5 5=8$

답 8

점 A는 직선 $y=x$ 위의 점이므로 x좌표와 y좌표가 같다.

$\log_{5^{\frac{1}{4}}}5^2$
$=\dfrac{2}{\frac{1}{4}}\log_5 5=8\log_5 5$

028 (i) $\log_3 x\geq0$, 즉 $x\geq1$일 때,

$\log_3 y=2\log_3 x$

$\log_3 y=\log_3 x^2$

$\therefore y=x^2$

(ii) $\log_3 x<0$, 즉 $0<x<1$일 때,

$\log_3 y=-\log_3 x$

$\log_3 y=\log_3\frac{1}{x}$

$\therefore y=\frac{1}{x}$

(i), (ii)에서 x와 y 사이의 관계를 나타내는 그래프의 개형으로 알맞은 것은 ④이다.

답 ④

1등급 비밀노트

$\log_3 x$와 $\log_3 y$ 사이의 관계식은 다음과 같이 치환을 이용하면 쉽게 찾을 수 있다.

$\log_3 x=X,\ \log_3 y=Y$로 놓으면

$X\geq0$일 때, $\quad Y=2X$

$X<0$일 때, $\quad Y=-X$

029 진수의 조건에서 $2^x-1>0,\ 5-2^x>0$이므로

$2^x>1,\ 2^x<5$

$\therefore 1<2^x<5$

$y=\log_3(2^x-1)+\log_3(5-2^x)$

$=\log_3(2^x-1)(5-2^x)$

에서 $f(x)=(2^x-1)(5-2^x)$으로 놓으면

$f(x)=-(2^x)^2+6\cdot2^x-5$

$=-(2^x-3)^2+4$

즉 $f(x)$는 $2^x=3$일 때 최댓값 4를 갖는다.

$2^x=t\ (1<t<5)$로 놓으면
$-t^2+6t-5$
$=-(t^2-6t)-5$
$=-(t-3)^2+4$

따라서 y는 $x=\log_2 3$일 때 최댓값 $\log_3 4$를 가지므로

$a=\log_2 3,\ b=\log_3 4$

$\therefore ab=\log_2 3\cdot\log_3 4=\log_2 4=2$

답 ②

030 문제 이해 $f(x)=\dfrac{x}{x+2}$로 놓으면

$f(x)=-\dfrac{2}{x+2}+1$이므로 $\dfrac{2}{7}\le x\le 2$에서 x의 값이 증가하면 $f(x)$의 값도 증가한다. ● 30%

해결 과정 이때 함수 $y=\log_2 f(x)$에서 밑이 1보다 크므로 $x=2$일 때 최댓값, $x=\dfrac{2}{7}$일 때 최솟값을 갖는다.

따라서 $x=2$일 때, y의 최댓값은

$M=\log_2\dfrac{2}{2+2}=\log_2\dfrac{1}{2}=-1$ ● 30%

$x=\dfrac{2}{7}$일 때, y의 최솟값은

$m=\log_2\dfrac{\frac{2}{7}}{\frac{2}{7}+2}=\log_2\dfrac{1}{8}=-3$ ● 30%

답 구하기 $\therefore M-m=2$ ● 10%

답 2

031 해결 과정 $y=ax^{2-\log_3 x}$의 양변에 밑이 3인 로그를 취하면

$\log_3 y=\log_3 a+(2-\log_3 x)\log_3 x$

$\log_3 x=t$로 놓으면 $1\le x\le 27$에서 $0\le t\le 3$이고

$\log_3 y=-t^2+2t+\log_3 a$

$=-(t-1)^2+1+\log_3 a$ ● 30%

$t=1$일 때 $\log_3 y$의 최댓값이 $1+\log_3 a$이므로

$1+\log_3 a=\log_3 81=4,\qquad \log_3 a=3$

$\therefore a=27$ ● 30%

$t=3$일 때 $\log_3 y$의 최솟값은

$-3+\log_3 27=-3+3=0$

이므로 y의 최솟값은 $\quad y=3^0=1$

$\therefore m=1$ ● 30%

답 구하기 $\therefore am=27$ ● 10%

답 27

032 $\log_2(2^{x-2}+2^{-x-1})=\log_2\dfrac{2^x+2\cdot 2^{-x}}{4}$

$=\log_2(2^x+2\cdot 2^{-x})-2$

이므로 $\log_2(2^x+2\cdot 2^{-x})=t$로 놓으면

$y=(t-2)^2+2t+6=t^2-2t+10$

$=(t-1)^2+9$ …… ㉠

이때 $2^x>0,\ 2\cdot 2^{-x}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$2^x+2\cdot 2^{-x}\ge 2\sqrt{2^x\cdot 2\cdot 2^{-x}}$

$=2\sqrt{2}\left(\text{단, 등호는 } x=\dfrac{1}{2}\text{일 때 성립}\right)$

일품 BOX

$\log_2 3\cdot\log_3 4$
$=\dfrac{\log 3}{\log 2}\cdot\dfrac{\log 4}{\log 3}$
$=\dfrac{\log 4}{\log 2}$
$=\log_2 4$
$=2$

$f(x)=\dfrac{x}{x+2}$
$=\dfrac{x+2-2}{x+2}$
$=1-\dfrac{2}{x+2}$

$\log_2 2=1$

$\log_2\dfrac{2^x+2\cdot 2^{-x}}{4}$
$=\log_2(2^x+2\cdot 2^{-x})$
$\quad-\log_2 4$
$=\log_2(2^x+2\cdot 2^{-x})-2$

$2^x=2\cdot 2^{-x}$에서
$2^{2x}=2,\quad 2x=1$
$\therefore x=\dfrac{1}{2}$

$\therefore t=\log_2(2^x+2\cdot 2^{-x})$

$\ge\log_2 2\sqrt{2}=\log_2 2^{\frac{3}{2}}=\dfrac{3}{2}$

즉 $t\ge\dfrac{3}{2}$이므로 ㉠에서 y는 $t=\dfrac{3}{2}$일 때 최솟값 $\dfrac{37}{4}$을 갖는다.

답 ②

033 $y=2^{3+2\log_2 x}\cdot x^{2+\log_2 x}$의 양변에 밑이 2인 로그를 취하면

$\log_2 y=(3+2\log_2 x)\log_2 2+(2+\log_2 x)\log_2 x$

$=3+2\log_2 x+(2+\log_2 x)\log_2 x$

$=(\log_2 x)^2+4\log_2 x+3$

$\log_2 x=t$로 놓으면

$\log_2 y=t^2+4t+3$

$=(t+2)^2-1$

$t=-2$일 때 $\log_2 y$는 최솟값 -1을 갖고, 밑이 1보다 크므로 y도 최솟값을 갖는다.

따라서 y의 최솟값은 $\log_2 y=-1$에서

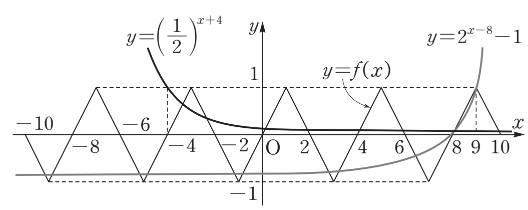
$y=2^{-1}=\dfrac{1}{2}$

답 ④

034 ㄱ, ㄴ. 함수 $y=f(x)$의 그래프와 곡선

$y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x+4},\ y=2^{x-8}-1$은 다음과 같으므로

$a_2=8,\ b_4=11$



ㄷ.

n	a_n	b_n
1	6	7
2	8	9
3	8	9
4	10	11
5	10	11

$\therefore b_n=a_n+1$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

1등급 비밀노트

곡선 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x+2n}$은 점 $(-2n,\ 1)$을 지나고 직선 $y=0$을 점근선으로 가지므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 $x>0$일 때 6개의 점에서 만나고, $x<0$일 때 $\begin{cases} n-1 & (n=1,\ 3,\ 5) \\ n & (n=2,\ 4)\end{cases}$개의 점에서 만난다.

또 곡선 $y=2^{x-2n}-1$은 두 점 $(2n,\ 0)$, $(2n+1,\ 1)$을 지나고 직선 $y=-1$을 점근선으로 가지므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 $x<0$일 때 6개의 점에서 만나고, $x>0$일 때

$\begin{cases} n & (n=1,\ 3,\ 5) \\ n+1 & (n=2,\ 4)\end{cases}$개의 점에서 만난다.

일품 BOX

035 $\mathrm{H}(k,\ a^k)\ (k>0)$이라 하면 $\overline{\mathrm{EH}}=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{AD}}$이므로

$\mathrm{D}(2k,\ a^{2k})$

$\therefore \square\mathrm{ABCD}=2\cdot 2k(a^{2k}-a^{-2k})=4k(a^{2k}-a^{-2k})$

$\square\mathrm{EFGH}=2\cdot k(a^k-a^{-k})=2k(a^k-a^{-k})$

이때 직사각형 EFGH의 넓이는 직사각형 ABCD의 넓이의 $\frac{1}{8}$이므로

$2k(a^k-a^{-k})=4k(a^{2k}-a^{-2k})\cdot\frac{1}{8}$

$2(a^k-a^{-k})=\frac{1}{2}(a^k+a^{-k})(a^k-a^{-k})$

$\therefore a^k+a^{-k}=4$

$\therefore \overline{\mathrm{ID}}+\overline{\mathrm{IC}}=a^{2k}+a^{-2k}$

$=(a^k+a^{-k})^2-2$

$=4^2-2=14$

답 14

- $\mathrm{C}(2k,\ a^{-2k})$이므로 $\overline{\mathrm{CD}}=a^{2k}-a^{-2k}$
- $\mathrm{G}(k,\ a^{-k})$이므로 $\overline{\mathrm{HG}}=a^k-a^{-k}$

036 $\log_a x=t$로 놓고 $1<x<a$의 각 변에 밑이 a인 로그를 취하면

$\log_a 1<\log_a x<\log_a a$

$\therefore 0<t<1$

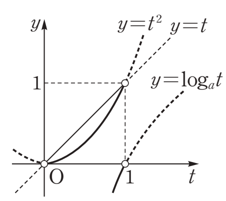
$A=\log_a x=t$

$B=\log_a(\log_a x)=\log_a t$

$C=(\log_a x)^2=t^2$

이때 $0<t<1$에서 세 함수 $y=t,\ y=\log_a t,\ y=t^2$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

$B<C<A$

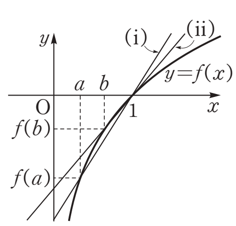


답 ③

$a>1$일 때,
$m<n$
$\Longleftrightarrow \log_a m<\log_a n$
$0<a<1$일 때,
$m<n$
$\Longleftrightarrow \log_a m>\log_a n$

037 ㄱ. 오른쪽 그림에서 직선 (i)의 기울기가 직선 (ii)의 기울기보다 크므로

$\frac{f(a)}{a-1}>\frac{f(b)}{b-1}$

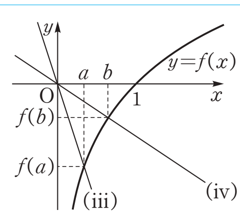


- 직선 (i)은 두 점 $(a,\ f(a)),\ (1,\ 0)$을 지나고 직선 (ii)는 두 점 $(b,\ f(b)),\ (1,\ 0)$을 지난다.

ㄴ. 오른쪽 그림에서 직선 (iii)의 기울기가 직선 (iv)의 기울기보다 작으므로

$\frac{f(a)}{a}<\frac{f(b)}{b}$

$\therefore bf(a)<af(b)$



- 직선 (iii)은 두 점 $(a,\ f(a)),\ (0,\ 0)$을 지나고 직선 (iv)는 두 점 $(b,\ f(b)),\ (0,\ 0)$을 지난다.

ㄷ. $\frac{f(a)-f(b)}{f(a)}-\frac{f(b)-f(a)}{f(b)}$

$=\frac{f(b)\{f(a)-f(b)\}-f(a)\{f(b)-f(a)\}}{f(a)f(b)}$

$=\frac{\{f(a)\}^2-\{f(b)\}^2}{f(a)f(b)}$

$=\frac{\{f(a)+f(b)\}\{f(a)-f(b)\}}{f(a)f(b)}$

이때 $f(a)<f(b)<0$이므로

$\frac{\{f(a)+f(b)\}\{f(a)-f(b)\}}{f(a)f(b)}>0$

$\therefore \frac{f(a)-f(b)}{f(a)}>\frac{f(b)-f(a)}{f(b)}$

- $f(a)+f(b)<0,$ $f(a)-f(b)<0,$ $f(a)f(b)>0$

이상에서 옳은 것은 ㄴ뿐이다.

답 ②

1등급 비밀노트

함수 $f(x)$에 대하여 $\frac{f(a)-q}{a-p}$의 값은 점 $(p,\ q)$와 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $(a,\ f(a))$를 지나는 직선의 기울기와 같다.

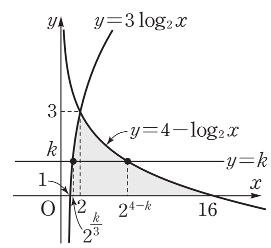
038 곡선 $y=3\log_2 x$와 $y=4-\log_2 x$의 교점의 x좌표는 $3\log_2 x=4-\log_2 x$에서

$\log_2 x=1$

$\therefore x=2$

따라서 곡선 $y=3\log_2 x$와 $y=4-\log_2 x$의 교점의 좌표는 $(2,\ 3)$

오른쪽 그림에서 직선 $y=k\ (0\le k\le 3)$와 $y=3\log_2 x$, $y=4-\log_2 x$의 그래프의 교점의 x좌표는 각각 $2^{\frac{k}{3}}$, 2^{4-k}이므로



- $3\log_2 x=k$에서 $\log_2 x=\frac{k}{3}$ $\therefore x=2^{\frac{k}{3}}$
- 또 $4-\log_2 x=k$에서 $\log_2 x=4-k$ $\therefore x=2^{4-k}$

(i) $k=0$일 때,

x의 값의 범위는 $2^0\le x\le 2^4$

$\therefore 1\le x\le 16$

따라서 정수 x는 $1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 16$의 16개이다.

(ii) $k=1$일 때,

x의 값의 범위는 $2^{\frac{1}{3}}\le x\le 2^3$

$\therefore \sqrt[3]{2}\le x\le 8$

따라서 정수 x는 $2,\ 3,\ 4,\ \cdots,\ 8$의 7개이다.

(iii) $k=2$일 때,

x의 값의 범위는 $2^{\frac{2}{3}}\le x\le 2^2$

$\therefore \sqrt[3]{4}\le x\le 4$

따라서 정수 x는 $2,\ 3,\ 4$의 3개이다.

(iv) $k=3$일 때, 정수 x는 2의 1개이다.

이상에서 구하는 점의 개수는

$16+7+3+1=27$

답 27

02 지수함수와 로그함수의 활용 본책 14쪽

039 $8^{5-2x}=4\sqrt[3]{2}$에서

$(2^3)^{5-2x}=2^2\cdot 2^{\frac{1}{3}}$, $\quad 2^{15-6x}=2^{\frac{7}{3}}$

$15-6x=\frac{7}{3}$ $\quad \therefore x=\frac{19}{9}$ 답 ③

> **일품 BOX**
>
> 밑을 같게 할 수 있는 지수방정식
> 밑을 같게 한 후
> $a^x=a^p \iff x=p$
> 임을 이용한다.

040 (ⅰ) $x^2+4x+4=x+8$일 때,

$x^2+3x-4=0$, $\quad (x+4)(x-1)=0$

$\therefore x=-4$ 또는 $x=1$

> 밑이 같은 경우

(ⅱ) $x-5=0$, 즉 $x=5$일 때,

$49^0=13^0=1$이므로 등식이 성립한다.

> 지수가 0인 경우

(ⅰ), (ⅱ)에서 모든 근의 합은

$-4+1+5=2$ 답 2

041 $9^x-3^{x+3}+140=0$에서 $3^x=t\ (t>0)$로 놓으면

> $(3^x)^2-3^3\cdot 3^x+140=0$

$t^2-27t+140=0$

이 방정식의 근은 3^α, 3^β이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$3^\alpha+3^\beta=27$, $3^\alpha\cdot 3^\beta=140$

$\therefore 9^\alpha+9^\beta=(3^\alpha+3^\beta)^2-2\cdot 3^\alpha\cdot 3^\beta$

$=27^2-2\cdot 140$

$=449$ 답 449

다른 풀이 $3^x=t\ (t>0)$로 놓으면 주어진 방정식은

$t^2-27t+140=0$, $\quad (t-7)(t-20)=0$

$\therefore t=7$ 또는 $t=20$

따라서 $3^\alpha=7$, $3^\beta=20$이라 하면

$9^\alpha+9^\beta=3^{2\alpha}+3^{2\beta}$

$=7^2+20^2=449$

042 $\left(\frac{1}{9}\right)^{2x-1}<3\sqrt{3}<\left(\frac{1}{3}\right)^{x-5}$에서

$(3^{-2})^{2x-1}<3^{\frac{3}{2}}<(3^{-1})^{x-5}$

$\therefore 3^{-4x+2}<3^{\frac{3}{2}}<3^{-x+5}$

이때 밑이 1보다 크므로 $\quad -4x+2<\frac{3}{2}<-x+5$

(ⅰ) $-4x+2<\frac{3}{2}$에서 $\quad x>\frac{1}{8}$

(ⅱ) $\frac{3}{2}<-x+5$에서 $\quad x<\frac{7}{2}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $\quad \frac{1}{8}<x<\frac{7}{2}$

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 정수 x는 1, 2, 3의 3개이다. 답 ③

043 $3^{2x+1}-28\cdot 3^x+9\le 0$에서 $3^x=t\ (t>0)$로 놓으면

$3t^2-28t+9\le 0$, $\quad (3t-1)(t-9)\le 0$

$\therefore \frac{1}{3}\le t\le 9$

즉 $3^{-1}\le 3^x\le 3^2$이고 밑이 1보다 크므로

$-1\le x\le 2$

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 모든 정수 x의 값의 합은

$-1+0+1+2=2$ 답 ③

044 $\left(\frac{1}{4}\right)^{x-1}+\left(\frac{1}{2}\right)^{x-3}+4-k\ge 0$에서

$4\left(\frac{1}{2}\right)^{2x}+8\left(\frac{1}{2}\right)^{x}+4-k\ge 0$

$\left(\frac{1}{2}\right)^x=t\ (t>0)$로 놓으면

$4t^2+8t+4-k\ge 0$

이때 $f(t)=4t^2+8t+4-k$라 하면

$f(t)=4(t+1)^2-k$

따라서 $t>0$인 모든 실수 t에 대하여 $f(t)\ge 0$이기 위해서는 $f(0)\ge 0$이어야 하므로

$f(0)=4-k\ge 0$

$\therefore k\le 4$

따라서 실수 k의 최댓값은 4이다. 답 4

045 진수의 조건에서

$x^2-3>0$, $\ x>0$, $\ x+5>0$

> (ⅰ) $x^2-3>0$에서
> $(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})>0$
> $\therefore x<-\sqrt{3}$ 또는 $x>\sqrt{3}$
> (ⅱ) $x>0$
> (ⅲ) $x+5>0$에서
> $x>-5$
> 이상에서 $\ x>\sqrt{3}$

$\therefore x>\sqrt{3}$ $\quad$ …… ㉠

$1+\log_2(x^2-3)=\log_2 x+\log_2(x+5)$에서

$\log_2 2(x^2-3)=\log_2 x(x+5)$

$2x^2-6=x^2+5x$

$x^2-5x-6=0$, $\quad (x+1)(x-6)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=6$

㉠에 의하여 구하는 해는 $x=6$이다. 답 $x=6$

046 $\log_3 x\cdot\log_3\frac{x}{9}+\log_3 x-6=0$에서

$\log_3 x(\log_3 x-\log_3 9)+\log_3 x-6=0$

$\log_3 x=t$로 놓으면

$t(t-2)+t-6=0$, $\quad t^2-t-6=0$

이 방정식의 근은 $\log_3\alpha$, $\log_3\beta$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\log_3\alpha+\log_3\beta=1$, $\quad \log_3\alpha\beta=1$

$\therefore \alpha\beta=3$ 답 ②

다른 풀이 $\log_3 x=t$로 놓으면 주어진 방정식은

$t(t-2)+t-6=0$, $\quad t^2-t-6=0$

$(t+2)(t-3)=0$

$\therefore t=-2$ 또는 $t=3$

따라서 $\log_3\alpha=-2$, $\log_3\beta=3$이라 하면

$\alpha=\frac{1}{9}$, $\ \beta=27$

$\therefore \alpha\beta=\frac{1}{9}\cdot 27=3$

047 $x^{\log_3 x}=x^3$의 양변에 밑이 3인 로그를 취하면

$\log_3 x^{\log_3 x}=\log_3 x^3, \qquad (\log_3 x)^2=3\log_3 x$

$(\log_3 x)^2-3\log_3 x=0$

$\log_3 x=t$로 놓으면

$t^2-3t=0, \qquad t(t-3)=0$

$\therefore t=0$ 또는 $t=3$

즉 $\log_3 x=0$ 또는 $\log_3 x=3$이므로

$x=1$ 또는 $x=27$

따라서 주어진 방정식의 모든 근의 합은

$1+27=28$ 답 ①

048 진수의 조건에서

$25-x>0,\ x>0$

$\therefore 0<x<25$ …… ㉠

$\log(25-x)\le 2-\log x$에서

$\log x+\log(25-x)\le 2$

$\log x(25-x)\le \log 100$

밑이 1보다 크므로

$x(25-x)\le 100, \qquad x^2-25x+100\ge 0$

$(x-5)(x-20)\ge 0$

$\therefore x\le 5$ 또는 $x\ge 20$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$0<x\le 5$ 또는 $20\le x<25$

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 정수 x는

1, 2, 3, 4, 5, 20, 21, 22, 23, 24

의 10개이다. 답 ①

049 $(\log_{\frac{1}{3}} x)^2<\log_{\frac{1}{3}} x^3+4$에서

$(\log_{\frac{1}{3}} x)^2<3\log_{\frac{1}{3}} x+4$

$\log_{\frac{1}{3}} x=t$로 놓으면

$t^2<3t+4, \qquad t^2-3t-4<0$

$(t+1)(t-4)<0$

$\therefore -1<t<4$

즉 $-1<\log_{\frac{1}{3}} x<4$이므로 $\qquad \frac{1}{81}<x<3$

따라서 $\alpha=\frac{1}{81}$, $\beta=3$이므로 $\qquad \alpha\beta=\frac{1}{27}$ 답 $\frac{1}{27}$

> 일품 BOX
>
> $\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}<\log_{\frac{1}{3}} x<\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^4$
>
> 에서 밑이 1보다 작으므로
>
> $\left(\frac{1}{3}\right)^4<x<\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$,
>
> 즉 $\frac{1}{81}<x<3$

050 $x^{\log x}<\frac{x^3}{100}$의 양변에 상용로그를 취하면

$\log x^{\log x}<\log\frac{x^3}{100}, \qquad (\log x)^2<3\log x-2$

$(\log x)^2-3\log x+2<0$

$\log x=t$로 놓으면 $\qquad t^2-3t+2<0$

$(t-1)(t-2)<0 \qquad \therefore 1<t<2$

즉 $1<\log x<2$이므로 $\qquad 10<x<100$

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 정수 x의 개수는

$100-10-1=89$ 답 89

> $\log 10<\log x<\log 10^2$
>
> 에서 밑이 1보다 크므로
>
> $10<x<10^2$

1등급 비밀노트

정수 a, b $(a<b)$에 대하여 각 부등식을 만족시키는 정수 x의 개수는 다음과 같다.

① $a\le x\le b$ ➡ $b-a+1$
② $a\le x<b$ ➡ $b-a$
③ $a<x\le b$ ➡ $b-a$
④ $a<x<b$ ➡ $b-a-1$

051 $x\cdot\sqrt[3]{x^x}=x^{1+\frac{x}{3}}$, $x^x\cdot\sqrt[3]{x^2}=x^{x+\frac{2}{3}}$이므로

$x^{1+\frac{x}{3}}=x^{x+\frac{2}{3}}$

(i) $x=1$일 때, $1^{\frac{4}{3}}=1^{\frac{5}{3}}$이므로 등식이 성립한다.

(ii) $x\ne 1$일 때,

$1+\frac{x}{3}=x+\frac{2}{3}$에서 $\qquad \frac{2}{3}x=\frac{1}{3}$

$\therefore x=\frac{1}{2}$

(i), (ii)에서 모든 근의 합은

$1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$ 답 ③

052 해결 과정 $2^x=X$, $2^y=Y$ $(X>0,\ Y>0)$로 놓으면 주어진 방정식은

$\begin{cases} X+Y=9 \\ \frac{X^2}{Y}=\frac{1}{8} \end{cases}$, 즉 $\begin{cases} X+Y=9 & \cdots\cdots ㉠ \\ Y=8X^2 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$ ● 30%

> $2^{2x-y}=\frac{1}{8}$에서
>
> $2^{2x}\cdot 2^{-y}=\frac{1}{8}$
>
> $\frac{(2^x)^2}{2^y}=\frac{1}{8}$
>
> $\therefore \frac{X^2}{Y}=\frac{1}{8}$

㉡을 ㉠에 대입하면

$8X^2+X-9=0, \qquad (8X+9)(X-1)=0$

$\therefore X=1\ (\because X>0)$ ● 30%

$X=1$을 ㉡에 대입하면 $\qquad Y=8$ ● 10%

답 구하기 즉 $2^x=1$, $2^y=8$이므로

$x=0,\ y=3$

$\therefore x^2+y^2=9$ ● 30%

답 9

053 두 점 A, B의 x좌표는 $2^{x+2}=-2^{3-x}+33$에서

$2^{x+2}+2^{3-x}-33=0$

양변에 2^x을 곱하면

$2^{2x+2}-33\cdot 2^x+8=0$

$2^x=t\ (t>0)$로 놓으면

$4t^2-33t+8=0, \qquad (4t-1)(t-8)=0$

$\therefore t=\frac{1}{4}$ 또는 $t=8$

즉 $2^x=\frac{1}{4}$ 또는 $2^x=8$이므로

$x=-2$ 또는 $x=3$

따라서 주어진 두 곡선의 교점의 좌표는 $(-2,\ 1)$, $(3,\ 32)$이므로 두 점 A, B를 지나는 직선의 방정식은

> $y=2^{x+2}$에 $x=-2$를 대입하면 $y=1$
>
> $\therefore (-2,\ 1)$
>
> 또 $y=2^{x+2}$에 $x=3$을 대입하면 $y=2^5$
>
> $\therefore (3,\ 32)$

$y-1=\frac{32-1}{3-(-2)}\{x-(-2)\}$,

즉 $y=\frac{31}{5}x+\frac{67}{5}$

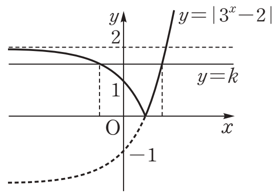
따라서 $a=\frac{67}{5}$이므로

$5a=67$

답 ③

054 문제 이해 방정식 $|3^x-2|=k$의 실근은 함수 $y=|3^x-2|$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 x좌표와 같다. ● 30%

해결 과정 오른쪽 그림에서 함수 $y=|3^x-2|$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 x좌표가 서로 다른 부호이려면



$1<k<2$ ● 50%

답 구하기 따라서 $\alpha=1$, $\beta=2$이므로

$\alpha+\beta=3$ ● 20%

답 3

055 $a^{2x}-18a^x+64=0$에서 $a^x=t\ (t>0)$로 놓으면

$t^2-18t+64=0$ …… ㉠

주어진 방정식의 두 근을 α, β라 하면 방정식 ㉠의 두 근은 a^α, a^β이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$a^\alpha\cdot a^\beta=64,\quad a^{\alpha+\beta}=64$

이때 $\alpha+\beta=4$이므로

$a^4=64$

$\therefore a=\sqrt[4]{64}=2\sqrt{2}\ (\because a>0)$

답 ①

$a=(2^6)^{\frac{1}{4}}=2^{\frac{3}{2}}$
$=2\sqrt{2}$

056 번식을 시작한 지 n시간 후 세균 A, B의 수는 각각

$2\cdot2^n,\ 4^n$

이므로 그 수의 차가 960마리라 하면

$4^n-2\cdot2^n=960$

$2^n=t\,(t>0)$로 놓으면 $\quad t^2-2t-960=0$

$(t+30)(t-32)=0 \qquad \therefore t=32\ (\because t>0)$

즉 $2^n=32$이므로 $\qquad n=5$

따라서 세균 A, B의 수의 차가 960마리가 되는 것은 번식을 시작한 지 5시간 후이다.

답 ③

057 $2^{x+1}\cdot9^{x-2}\le4^{x-4}\cdot3^{x+5}$의 양변을 $4^{x-4}\cdot3^{x+5}$으로 나누면

$\frac{2^{x+1}\cdot9^{x-2}}{4^{x-4}\cdot3^{x+5}}\le1,\qquad \frac{2^{x+1}\cdot3^{2x-4}}{2^{2x-8}\cdot3^{x+5}}\le1$

$2^{-x+9}\cdot3^{x-9}\le1,\qquad \left(\frac{3}{2}\right)^{x-9}\le1$

$\left(\frac{3}{2}\right)^{x-9}\le\left(\frac{3}{2}\right)^0$

밑이 1보다 크므로 $\qquad x-9\le0 \qquad \therefore x\le9$

따라서 정수 x의 최댓값은 9이다.

답 9

일품 BOX

058 $(f\circ g)(x)=2^{2x+1}+1=2\cdot2^{2x}+1$,

$\{f(x)\}^2=(2^x+1)^2=2^{2x}+2\cdot2^x+1$

$(f\circ g)(x)\ge\{f(x)\}^2$에서

$2\cdot2^{2x}+1\ge2^{2x}+2\cdot2^x+1$

$2^{2x}-2\cdot2^x\ge0,\qquad 2^x(2^x-2)\ge0$

이때 $2^x>0$이므로 $\qquad 2^x-2\ge0,\qquad 2^x\ge2$

$\therefore x\ge1$

답 $x\ge1$

059 $\begin{cases} x^2-(2^{3a}+1)x+8^a<0 & \cdots\cdots ㉠\\ x^2-(2^{2b}+5^b)x+20^b<0 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$

㉠에서

$x^2-(2^{3a}+1)x+2^{3a}<0,\qquad (x-1)(x-2^{3a})<0$

$\therefore 1<x<2^{3a}\ (\because a>0)$

$a>0$에서 $3a>0$이므로
$2^{3a}>2^0=1$

㉡에서

$x^2-(2^{2b}+5^b)x+2^{2b}\cdot5^b<0$

$(x-2^{2b})(x-5^b)<0$

$\therefore 2^{2b}<x<5^b\ (\because b>0)$

$2^{2b}=4^b$이고 $b>0$이므로
$4^b<5^b$

이때 주어진 연립부등식의 해가 존재하지 않으므로

$2^{3a}\le2^{2b}$

따라서 $3a\le2b$, 즉 $\frac{b}{a}\ge\frac{3}{2}$이므로 $\frac{b}{a}$의 최솟값은 $\frac{3}{2}$이다.

답 ④

1등급 비밀노트

$1<x<2^{3a}$과 $2^{2b}<x<5^b$의 공통 범위가 존재하지 않으려면 $2^{3a}\le2^{2b}$ 또는 $5^b\le1$이어야 한다.
그런데 $b>0$이므로 $5^b>1$이다. 따라서 $2^{3a}\le2^{2b}$이어야 한다.

060 $9^x\ge k\cdot3^x-3k-7$에서

$(3^x)^2-k\cdot3^x+3k+7\ge0$

$3^x=t\ (t>0)$로 놓으면

$t^2-kt+3k+7\ge0$

$a>0$, $a\ne1$일 때, 모든 실수 x에 대하여 부등식
$pa^{2x}+qa^x+r>0$
(p, q, r는 상수)
이 성립한다.
➡ $a^x=t$로 놓으면 $t>0$인 모든 실수 t에 대하여 부등식
$pt^2+qt+r>0$
이 성립한다.

이때 $f(t)=t^2-kt+3k+7$이라 하면

$f(t)=t^2-kt+3k+7$

$=\left(t-\frac{k}{2}\right)^2-\frac{1}{4}k^2+3k+7$

(i) $\frac{k}{2}>0$, 즉 $k>0$일 때

$t>0$에서 $f(t)$의 최솟값은 $-\frac{1}{4}k^2+3k+7$이므로

$-\frac{1}{4}k^2+3k+7\ge0,\qquad k^2-12k-28\le0$

$(k+2)(k-14)\le0$

$\therefore -2\le k\le14$

이때 $k>0$이므로 $\qquad 0<k\le14$

(ii) $\frac{k}{2}\le0$, 즉 $k\le0$일 때

$t>0$에서 $f(t)>f(0)$이므로

$f(0)=3k+7\ge0 \qquad \therefore k\ge-\frac{7}{3}$

이때 $k\le0$이므로 $\qquad -\frac{7}{3}\le k\le0$

(i), (ii)에서 $\quad -\frac{7}{3} \le k \le 14$

따라서 정수 k는

$-2,\ -1,\ 0,\ \cdots,\ 14$

의 17개이다. 답 17

061 $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+2} < \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2}$에서 밑이 1보다 작으므로

$x+2 > x^2, \quad x^2 - x - 2 < 0$

$(x+1)(x-2) < 0 \quad \therefore -1 < x < 2$

$\therefore A = \{x \mid -1 < x < 2\}$

또 $3^{|x-3|} \le 3^a$에서 밑이 1보다 크므로 $\quad |x-3| \le a$

$-a \le x-3 \le a \quad \therefore 3-a \le x \le 3+a$

$\therefore B = \{x \mid 3-a \le x \le 3+a\}$

$A \cap B = A$에서 $\quad A \subset B$

(i) $3-a \le -1$이므로 $\quad a \ge 4$

(ii) $2 \le 3+a$이므로 $\quad a \ge -1$

그런데 $a>0$이므로 $\quad a>0$

(i), (ii)에서 $a \ge 4$이므로 a의 최솟값은 4이다. 답 ④

062 해결 과정 $a^{2x} + 2a^{x+2} < 3a^4$에서

$(a^x)^2 + 2a^2 \cdot a^x - 3a^4 < 0$

$a^x = t\ (t>0)$로 놓으면

$t^2 + 2a^2 t - 3a^4 < 0, \quad (t+3a^2)(t-a^2) < 0$ ● 30%

$t>0$에서 $t+3a^2>0$이므로

$t - a^2 < 0, \quad t < a^2$

$\therefore a^x < a^2$ ● 40%

답 구하기 (i) $0<a<1$일 때, $\quad x>2$

(ii) $a>1$일 때, $\quad x<2$ ● 30%

답 풀이 참조

063 진수의 조건에서

$x+2>0,\ x+8>0$

$x>-2,\ x>-8 \quad \therefore x>-2 \quad \cdots\cdots$ ㉠

$\log_2(x+2) - \log_4(x+8) = \frac{3}{2}$에서

$\log_2(x+2) - \frac{1}{2}\log_2(x+8) = \frac{3}{2}$

$2\log_2(x+2) = \log_2(x+8) + 3$

$\log_2(x+2)^2 = \log_2 8(x+8)$

$(x+2)^2 = 8(x+8)$

$x^2 - 4x - 60 = 0, \quad (x+6)(x-10) = 0$

$\therefore x=-6$ 또는 $x=10$

㉠에 의하여 구하는 해는 $x=10$이다. 답 $x=10$

064 $4^{\log x} = x^{\log 4}$이므로 주어진 방정식은

$(4^{\log x})^2 - 6 \cdot 4^{\log x} + 8 = 0$

$4^{\log x} = t\ (t>0)$로 놓으면

$t^2 - 6t + 8 = 0, \quad (t-2)(t-4) = 0$

$\therefore t=2$ 또는 $t=4$

$4^{\log x} = 2$에서 $\quad \log x = \frac{1}{2} \quad \therefore x = \sqrt{10}$

$4^{\log x} = 4$에서 $\quad \log x = 1 \quad \therefore x = 10$

$\therefore \alpha^2 + \beta^2 = (\sqrt{10})^2 + 10^2 = 110$ 답 ④

065 해결 과정 $\log x = t$로 놓으면 주어진 방정식은

$t(t-1) = k$

$\therefore t^2 - t - k = 0 \quad \cdots\cdots$ ㉠ ● 10%

방정식 ㉠의 두 근은 $\log\alpha,\ \log\beta$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\log\alpha + \log\beta = 1, \quad \log\alpha\beta = 1$

$\therefore \alpha\beta = 10$ ● 20%

$\alpha>0,\ \beta>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\alpha + \beta \ge 2\sqrt{\alpha\beta} = 2\sqrt{10}$

(단, 등호는 $\alpha=\beta$일 때 성립) ● 30%

답 구하기 $\alpha=\beta=\sqrt{10}$일 때 $\alpha+\beta$의 값이 최소이므로

$-k = \log\alpha \cdot \log\beta$

$= \log\sqrt{10} \cdot \log\sqrt{10}$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

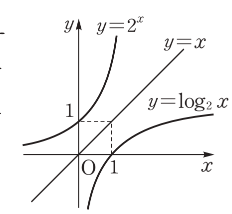
$\therefore k = -\frac{1}{4}$ ● 40%

답 $-\frac{1}{4}$

참고 $\log\alpha,\ \log\beta$에 대하여 진수의 조건에서 $\alpha,\ \beta$는 양수이므로 $\alpha>0,\ \beta>0$이라는 조건이 주어지지 않아도 산술평균과 기하평균의 관계를 이용할 수 있다.

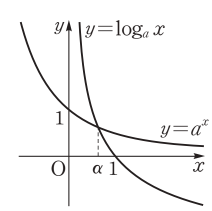
066 ㄱ. [반례] $a=2$일 때, 오른쪽 그림과 같이 두 함수 $y=2^x,\ y=\log_2 x$의 그래프는 만나지 않으므로

$n(a) = 0$



ㄴ. $0<a<1$일 때, 오른쪽 그림과 같이 두 함수 $y=a^x$, $y=\log_a x$의 그래프는 반드시 한 점에서 만나므로

$n(a) = 1$



[그림 1]

따라서 $n(a)=0$이면

$a>1$

(i) $0<x\le1$일 때,

$a^{2x}>0,\ \log_{a^2} x \le 0$

이므로 $a^{2x} = \log_{a^2} x$의 근은 없다.

(ii) $x>1$일 때,

$a^{2x} > a^x > \log_a x > \log_{a^2} x$

이므로 $a^{2x} = \log_{a^2} x$의 근은 없다.

(i), (ii)에서 $\quad n(a^2) = 0$

일품 BOX

$a>0$이므로 $|x-3| \le a$에서

$-a \le x-3 \le a$

두 집합 $A,\ B$에 대하여

① $A \cap B = A$이면

$A \subset B$

② $A \cup B = A$이면

$B \subset A$

$2\log_2(x+2)$

$= \log_2(x+8) + 3$

에서

$\log_2(x+2)^2$

$= \log_2(x+8) + \log_2 2^3$

$\therefore \log_2(x+2)^2$

$= \log_2 8(x+8)$

로그의 성질

$a>0,\ a\ne1$이고 $b>0$일 때

① $\log_{a^m} b^n = \frac{n}{m}\log_a b$

(단, $m \ne 0$)

② $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$

(단, $c>0,\ c\ne1$)

③ $a^{\log_a b} = b$

ㄷ. [그림 1]에서 두 함수의 그래프의 교점의 x좌표를 α라 하면

$0<\alpha<1$

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ④

067 $\log d_1=0.855-k(8+\log 10)^3$

$=0.855-k\cdot 9^3$ …… ㉠

$\log d_2=0.855-k(8+\log 100)^3$

$=0.855-k\cdot 10^3$ …… ㉡

㉠$-$㉡을 하면

$\log \dfrac{d_1}{d_2}=k\cdot(10^3-9^3)=271k$

$\therefore \dfrac{d_1}{d_2}=10^{271k}$

답 ⑤

068 $x^{\log x}\geq(100x)^k$의 양변에 상용로그를 취하면

$\log x^{\log x}\geq \log(100x)^k$

$\log x\cdot\log x\geq k(\log 100+\log x)$

$(\log x)^2-k\log x-2k\geq 0$

$\log x=t$로 놓으면

$t^2-kt-2k\geq 0$

모든 실수 t에 대하여 위의 부등식이 성립해야 하므로 이차방정식 $t^2-kt-2k=0$의 판별식을 D라 하면

$D=k^2+8k\leq 0,\quad k(k+8)\leq 0$

$\therefore -8\leq k\leq 0$

따라서 정수 k는 $-8,\ -7,\ -6,\ \cdots,\ 0$의 9개이다.

답 9

069 진수의 조건에서

$-2+\log_{\frac{1}{2}}(x-1)>0,\ x-1>0$

$-2+\log_{\frac{1}{2}}(x-1)>0$에서

$\log_{\frac{1}{2}}(x-1)>2$

밑이 1보다 작으므로

$x-1<\dfrac{1}{4}\qquad \therefore x<\dfrac{5}{4}$

$\therefore 1<x<\dfrac{5}{4}$ …… ㉠

$\log_{\frac{1}{3}}\{-2+\log_{\frac{1}{2}}(x-1)\}\geq -1$에서

$\log_{\frac{1}{3}}\{-2+\log_{\frac{1}{2}}(x-1)\}\geq\log_{\frac{1}{3}}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-1}$

밑이 1보다 작으므로

$-2+\log_{\frac{1}{2}}(x-1)\leq 3,\quad \log_{\frac{1}{2}}(x-1)\leq 5$

$\log_{\frac{1}{2}}(x-1)\leq\log_{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{1}{2}\right)^5$

밑이 1보다 작으므로

$x-1\geq\left(\dfrac{1}{2}\right)^5$

$\therefore x\geq\dfrac{33}{32}$ …… ㉡

일품 BOX

㉠에서 $1<x<\dfrac{5}{4}$는 $\dfrac{32}{32}<x<\dfrac{40}{32}$이므로 ㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$\dfrac{33}{32}\leq x<\dfrac{5}{4}$

• 지수에 상용로그가 있으면 양변에 상용로그를 취한다.

• $\log_{\frac{1}{2}}(x-1)>\log_{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{1}{2}\right)^2$

• 진수의 조건에서 $x>0$이므로 양변을 x로 나누면

$4x<1\quad\therefore x<\dfrac{1}{4}$

• 진수의 조건에서 $x>0$이므로 양변을 x로 나누면

$x<2$

• 전체집합이 $\{x\,|\,x>0\}$이므로

$A^C=\left\{x\,\middle|\,x\geq\dfrac{1}{4}\right\}$

$\therefore A^C\cap B$

$=\left\{x\,\middle|\,\dfrac{1}{4}\leq x<2\right\}$

• 구하는 영역은 제1사분면 위에 있다.

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $\dfrac{33}{32}\leq x<\dfrac{5}{4}$

따라서 $\dfrac{33}{32}\leq\dfrac{n}{32}<\dfrac{40}{32}$에서 자연수 n은

$33,\ 34,\ 35,\ 36,\ 37,\ 38,\ 39$

의 7개이다.

답 ③

070 해결 과정 $\log ax\cdot\log a^3x+4>0$에서

$(\log a+\log x)(3\log a+\log x)+4>0$

$(\log x)^2+4\log a\cdot\log x+3(\log a)^2+4>0$ ● 20%

$\log x=t$로 놓으면

$t^2+(4\log a)t+3(\log a)^2+4>0$

모든 실수 t에 대하여 위의 부등식이 성립해야 하므로 이차방정식 $t^2+(4\log a)t+3(\log a)^2+4=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=4(\log a)^2-3(\log a)^2-4<0$ ● 30%

$(\log a)^2-4<0,\qquad(\log a+2)(\log a-2)<0$

$\therefore -2<\log a<2$

$\therefore \dfrac{1}{100}<a<100$ ● 30%

답 구하기 따라서 자연수 a의 최댓값은 99, 최솟값은 1이므로 구하는 합은 $99+1=100$ ● 20%

답 100

071 해결 과정 집합 A에서 $2\log 2x<\log x$

$\log(2x)^2<\log x$

밑이 1보다 크므로 $4x^2<x$

$\therefore x<\dfrac{1}{4}$

이때 진수의 조건에서 $x>0$이므로

$A=\left\{x\,\middle|\,0<x<\dfrac{1}{4}\right\}$ ● 40%

집합 B에서 $\log x^2<\log 2x$

밑이 1보다 크므로 $x^2<2x$

$\therefore x<2$

이때 진수의 조건에서 $x>0$이므로

$B=\{x\,|\,0<x<2\}$ ● 40%

$\therefore A^C\cap B=\left\{x\,\middle|\,\dfrac{1}{4}\leq x<2\right\}$ ● 10%

답 구하기 따라서 구하는 원소의 최솟값은 $\dfrac{1}{4}$이다. ● 10%

답 $\dfrac{1}{4}$

072 진수의 조건에서 $x>0,\ y>0$ …㉠

$(\log x)^2>(\log y)^2$에서

$(\log x)^2-(\log y)^2>0$

$(\log x+\log y)(\log x-\log y)>0$

$\log xy\cdot\log\dfrac{x}{y}>0$

(i) $\log xy>0$, $\log\frac{x}{y}>0$일 때,

$xy>1$, $\frac{x}{y}>1$이고, ㉠에 의하여

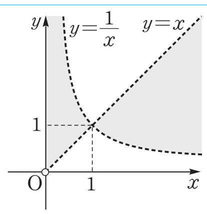
$y>\frac{1}{x}$, $y<x$

(ii) $\log xy<0$, $\log\frac{x}{y}<0$일 때,

$0<xy<1$, $0<\frac{x}{y}<1$이고, ㉠에 의하여

$y<\frac{1}{x}$, $y>x$

㉠과 (i), (ii)에서 주어진 부등식을 만족시키는 영역은 오른쪽 그림의 어두운 부분(경계선 제외)과 같다. 답 ④

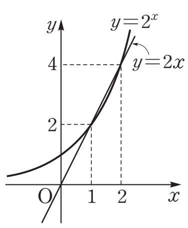


1등급 비밀노트

부등식 $f(x, y)g(x, y)>0$의 영역

➡ 연립부등식 $\begin{cases} f(x, y)>0 \\ g(x, y)>0 \end{cases}$의 영역과 연립부등식 $\begin{cases} f(x, y)<0 \\ g(x, y)<0 \end{cases}$의 영역을 합한 영역

073 $2^x=2x$의 해가 $x=1$ 또는 $x=2$이므로 $y=2^x$, $y=2x$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



$\log_2(x-1)+1>x-1$에서

$x-1=t$로 놓으면

$\log_2 t+1>t$, $\log_2 2t>t$

$2t>2^t$

위의 그래프에서 $1<t<2$

즉 $1<x-1<2$이므로 $2<x<3$

따라서 $a=2$, $b=3$이므로

$a+b=5$ 답 ①

참고 $2t>2^t$에서 $t>2^{t-1}>0$이므로 $2t>2^t$의 해는 진수의 조건 $t>0$을 만족시킨다.

074 직사각형의 가로의 길이는 1, 세로의 길이는 4^n-2^{n+1}이므로 $4^n-2^{n+1}=24$

$4^n-2^{n+1}-24=0$, $(2^n)^2-2\cdot 2^n-24=0$

$2^n=t\ (t>0)$로 놓으면

$t^2-2t-24=0$, $(t+4)(t-6)=0$

$\therefore t=6\ (\because t>0)$

즉 $2^n=6$이므로 $n=\log_2 6$ 답 ②

075 $2^x>0$, $2^y>0$이고, $[2^x]$, $[2^y]$의 값은 정수이므로 $[2^x]+[2^y]=1$에서

$[2^x]=1$, $[2^y]=0$ 또는 $[2^x]=0$, $[2^y]=1$

(i) $[2^x]=1$, $[2^y]=0$일 때,

$1\le 2^x<2$, $0<2^y<1$이므로

$0\le x<1$, $y<0$

일품 BOX

곡선 $y=\frac{1}{x}$의 윗부분(경계선 제외), 직선 $y=x$의 아랫부분(경계선 제외)

곡선 $y=\frac{1}{x}$의 아랫부분(경계선 제외), 직선 $y=x$의 윗부분(경계선 제외)

주어진 방정식의 서로 다른 두 실근을 α, β라 하면 $\alpha>0$, $\beta>0$이어야 하므로

$3^\alpha>1$, $3^\beta>1$

$f(t)=t^2-6t+k$
$=(t-3)^2+k-9$

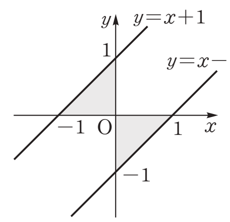
$\log_{\frac{1}{4}}k=\log_{2^{-2}}k$
$=-\frac{1}{2}\log_2 k$

(ii) $[2^x]=0$, $[2^y]=1$일 때,

$0<2^x<1$, $1\le 2^y<2$이므로

$x<0$, $0\le y<1$

또 부등식 $x-1\le y\le x+1$이 나타내는 영역은 직선 $y=x-1$의 윗부분(경계선 포함)과 직선 $y=x+1$의 아랫부분(경계선 포함)의 공통부분이므로 주어진 방정식과 부등식을 동시에 만족시키는 영역은 위의 그림의 어두운 부분과 같다.



따라서 구하는 넓이는 $2\cdot\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1=1$ 답 ②

1등급 비밀노트

방정식 $[x]+[y]=n$ (n은 정수)을 만족시키는 x, y의 값의 범위를 찾을 때,

(i) $[x]$, $[y]$의 값은 정수이므로 두 정수의 합이 n이 되는 순서쌍 (X, Y)를 찾는다. (단, X, Y는 정수)

(ii) $[x]=X$ (X는 정수)이면 $X\le x<X+1$임을 이용하여 x, y의 값의 범위를 찾는다.

076 $9^x-2\cdot 3^{x+1}+k=0$에서

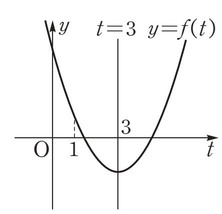
$(3^x)^2-6\cdot 3^x+k=0$

$3^x=t(t>0)$로 놓으면

$t^2-6t+k=0$ …… ㉠

이때 주어진 방정식의 서로 다른 두 근이 모두 양의 실수가 되려면 방정식 ㉠은 1보다 큰 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

$f(t)=t^2-6t+k$라 하면 함수 $y=f(t)$의 그래프는 직선 $t=3$에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림과 같이 $y=f(t)$의 그래프와 t축이 $1<t<3$인 점에서 만나면 된다.



$f(1)=k-5>0$, $f(3)=k-9<0$

$\therefore 5<k<9$

따라서 정수 k는 6, 7, 8의 3개이다. 답 3

077 $\mathrm{A}(k, \log_2 k)$, $\mathrm{B}(k, \log_{\frac{1}{4}}k)$이므로

$\overline{\mathrm{AB}}=\log_2 k-\log_{\frac{1}{4}}k$

$=\log_2 k+\frac{1}{2}\log_2 k$

$=\frac{3}{2}\log_2 k$

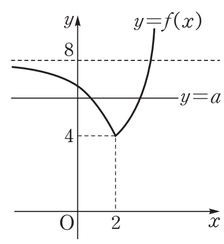
따라서 $\frac{3}{2}\log_2 k=6$에서

$\log_2 k=4$ $\therefore k=16$

이때 점 P의 좌표는 $(1, 0)$이므로

$\triangle\mathrm{PAB}=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot(16-1)=45$ 답 45

078 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=a$가 서로 다른 두 점에서 만나기 위해서는 $4<a<8$이어야 한다.



$y=-2^x+8\ (x<2)$의 그래프와 직선 $y=a$의 교점의 x좌표는 $a=-2^x+8$에서

$2^x=8-a \qquad \therefore x=\log_2(8-a)$

$y=4^{x-2}+3\ (x\ge 2)$의 그래프와 직선 $y=a$의 교점의 x좌표는 $a=4^{x-2}+3$에서

$4^{x-2}=a-3, \qquad x-2=\log_4(a-3)$

$\therefore x=\log_4(a-3)+2$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=a$의 교점의 좌표는

$(\log_2(8-a),\ a),\ (\log_4(a-3)+2,\ a)$

따라서 $\overline{AB}=\log_4(a-3)+2-\log_2(8-a)=3$이므로

$\log_4(a-3)-\log_2(8-a)=1$

$\log_4(a-3)=\log_2 2(8-a)$

$\log_4(a-3)=\log_4\{2(8-a)\}^2$

$a-3=4(8-a)^2$

$4a^2-65a+259=0$

$(a-7)(4a-37)=0$

$\therefore a=7\ (\because 4<a<8)$ 답 7

079 현재 용액에 녹아 있는 두 기체 A, B의 양을 각각 $5a$, a라 하면 n시간 후의 두 기체 A, B의 양은 각각

$5a(1-0.1)^n,\ a(1+0.2)^n$

이므로 기체 B의 양이 기체 A의 양보다 많아지려면

$5a(1-0.1)^n<a(1+0.2)^n$

$5\times0.9^n<1.2^n$

양변에 상용로그를 취하면

$\log 5+n\log 0.9<n\log 1.2$

$n(\log 1.2-\log 0.9)>\log 5$

$n\log\frac{1.2}{0.9}>\log 5, \qquad n\log\frac{4}{3}>\log 5$

$\therefore n>\frac{\log 5}{\log 4-\log 3}=\frac{1-\log 2}{2\log 2-\log 3}$

$=\frac{1-0.30}{2\times0.30-0.48}$

$=5.\times\times\times$

따라서 5시간에서 6시간 사이에 기체 B의 양이 기체 A의 양보다 많아지기 시작하므로

$m=5$ 답 ②

일품 BOX

$\frac{1}{x}=t$로 놓으면
$x\to0-$일 때
$t\to-\infty$이므로
$\lim_{x\to0-}2^{\frac{1}{x}}=\lim_{t\to-\infty}2^t$
$=0$

$\lim_{x\to0-}2^x=\lim_{x\to0-}2^{-x}=1$

함수의 극한값의 계산
① $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴: 분모에서 밑이 가장 큰 항으로 분자, 분모를 각각 나눈다.
② $\infty-\infty$ 꼴: 밑이 가장 큰 항으로 묶는다.

진수의 조건에서
$a-3>0,\ 8-a>0$
$\therefore 3<a<8$
따라서 $a=7$은 진수의 조건을 만족시킨다.

두 기체 A, B가 5 : 1의 비율로 녹아 있다.

$\log 5=\log\frac{10}{2}$
$=1-\log 2$

03 지수함수와 로그함수의 미분 본책 20쪽

080 $\lim_{x\to0-}\frac{1}{x}=-\infty$이므로

$\lim_{x\to0-}2^{\frac{1}{x}}=0$

$\therefore \lim_{x\to0-}\frac{2^x}{2+2^{-x}-2^{\frac{1}{x}}}=\frac{1}{2+1-0}=\frac{1}{3}$ 답 ③

081 $-x=t$로 놓으면 $x\to-\infty$일 때 $t\to\infty$이므로

$\lim_{x\to-\infty}\frac{4^{x+1}-3^{x+a}}{4^x-3^x}=\lim_{t\to\infty}\frac{4^{-t+1}-3^{-t+a}}{4^{-t}-3^{-t}}$

$=\lim_{t\to\infty}\frac{\frac{4}{4^t}-\frac{3^a}{3^t}}{\frac{1}{4^t}-\frac{1}{3^t}}$

$=\lim_{t\to\infty}\frac{\frac{4\cdot3^t-3^a\cdot4^t}{4^t\cdot3^t}}{\frac{3^t-4^t}{4^t\cdot3^t}}$

$=\lim_{t\to\infty}\frac{4\cdot3^t-3^a\cdot4^t}{3^t-4^t}$

$=\lim_{t\to\infty}\frac{4\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^t-3^a\cdot1}{\left(\frac{3}{4}\right)^t-1}$

$=3^a$

즉 $3^a=9$이므로 $\quad a=2$ 답 ④

082 $\lim_{x\to\infty}\{\log_4(2^{2x+a}-2^x)-\log_4(2^{2x+1}+2^x)\}$

$=\lim_{x\to\infty}\log_4\frac{2^{2x+a}-2^x}{2^{2x+1}+2^x}$

$=\lim_{x\to\infty}\log_4\frac{2^a\cdot4^x-2^x}{2\cdot4^x+2^x}$

$=\log_4\lim_{x\to\infty}\frac{2^a-\left(\frac{2}{4}\right)^x}{2+\left(\frac{2}{4}\right)^x}$

$=\log_4\frac{2^a}{2}$

$=\log_{2^2}2^{a-1}=\frac{a-1}{2}$

즉 $\frac{a-1}{2}=\frac{3}{2}$이므로 $\quad a=4$ 답 4

083 $x-2=t$로 놓으면 $x\to2$일 때 $t\to0$이므로

$\lim_{x\to2}\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2-x}}=\lim_{t\to0}\left(\frac{t+2}{2}\right)^{-\frac{1}{t}}$

$=\lim_{t\to0}\left\{\left(1+\frac{t}{2}\right)^{\frac{2}{t}}\right\}^{-\frac{1}{2}}$

$=e^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e}}$ 답 ④

084 $\frac{x+1}{2}=t$로 놓으면 $x=2t-1$이고, $x\to\infty$일 때 $t\to\infty$이므로

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x+1}\right)^{x}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{2t-1}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\right\}^{2}\cdot\left(1+\frac{1}{t}\right)^{-1}$$
$$=e^2\cdot1=e^2$$

답 e^2

다른 풀이 $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x+1}\right)^{x}$
$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x+1}\right)^{x+1}\cdot\left(1+\frac{2}{x+1}\right)^{-1}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1+\frac{2}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{2}}\right\}^{2}\cdot\left(1+\frac{2}{x+1}\right)^{-1}$$
$$=e^2\cdot1=e^2$$

085 $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{2x+1}\right)^{ax}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1-\frac{1}{2x}}{1+\frac{1}{2x}}\right)^{ax}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left\{\left(1-\frac{1}{2x}\right)^{-2x}\right\}^{-\frac{a}{2}}}{\left\{\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{2x}\right\}^{\frac{a}{2}}}$$
$$=\frac{e^{-\frac{a}{2}}}{e^{\frac{a}{2}}}=e^{-a}$$

0이 아닌 상수 a에 대하여 $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{ax}\right)^{ax}=e$

즉 $e^{-a}=\frac{1}{e}$이므로 $a=1$

답 1

086 $\frac{2}{e^x}=t$로 놓으면 $x\to\infty$일 때 $t\to0$이므로

$$\lim_{x\to\infty}e^x\ln\left(1+\frac{2}{e^x}\right)=\lim_{t\to0}\frac{2}{t}\ln(1+t)$$
$$=\lim_{t\to0}2\cdot\frac{\ln(1+t)}{t}$$
$$=2\cdot1=2$$

답 ⑤

087 $y=\ln(2x+1)$로 놓으면

$2x+1=e^y$, $x=\frac{e^y-1}{2}$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=\frac{e^x-1}{2}$

따라서 $g(x)=\frac{e^x-1}{2}$이므로

$a=\ln b \iff b=e^a$

$$\lim_{x\to0}\frac{g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{2\ln(2x+1)}$$
$$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{1}{2}\cdot\frac{e^x-1}{x}\cdot\frac{2x}{\ln(2x+1)}\cdot\frac{1}{2}\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\cdot1\cdot1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

답 $\frac{1}{4}$

088 $$\lim_{x\to0}\frac{(\ln9)^x-(\ln3)^x}{x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{(2\ln3)^x-(\ln3)^x}{x}$$
$$=\lim_{x\to0}(\ln3)^x\cdot\frac{2^x-1}{x}$$
$$=1\cdot\ln2=\ln2$$

$(2\ln3)^x-(\ln3)^x$
$=2^x\cdot(\ln3)^x-(\ln3)^x$
$=(\ln3)^x(2^x-1)$

답 ①

089 $f(x)=(x^2-1)2^{3x-2}=\frac{1}{4}(x^2-1)8^x$에서

$(x^2-1)2^{3x-2}$
$=(x^2-1)(2^3)^x\cdot2^{-2}$
$=\frac{1}{4}(x^2-1)8^x$

$$f'(x)=\frac{1}{4}\{2x\cdot8^x+(x^2-1)\cdot8^x\ln8\}$$
$$=\frac{8^x}{4}\{2x+(x^2-1)\ln8\}$$

$\therefore f'(2)=16(4+3\ln8)$
$=64+144\ln2$

따라서 $a=64$, $b=144$이므로

$b-a=80$

답 80

090 $f(x)=x\ln ex=x(1+\ln x)$에서

$$f'(x)=1+\ln x+x\cdot\frac{1}{x}$$
$$=\ln x+2$$

$\therefore f'(e^2)=4$

답 ④

091 $f(x)=6\log_2x$에서 $f(1)=0$이므로

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$
$$=f'(1)$$

이때 $f'(x)=\frac{6}{x\ln2}$이므로

$$f'(1)=\frac{6}{\ln2}$$

답 ⑤

092 $x\to0+$일 때 $\frac{1}{x}\to\infty$이므로

$$a=\lim_{x\to0+}5^{-\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0+}\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{x}}=0$$

$$c=\lim_{x\to0+}\frac{5^x-5^{\frac{1}{x}}}{5^x+5^{\frac{1}{x}}}=\lim_{x\to0+}\frac{\frac{5^x}{5^{\frac{1}{x}}}-1}{\frac{5^x}{5^{\frac{1}{x}}}+1}$$

$\lim_{x\to0+}5^{\frac{1}{x}}=\infty$

$$=\frac{0-1}{0+1}=-1$$

$x\to0-$일 때 $\frac{1}{x}\to-\infty$이므로

$$b=\lim_{x\to0-}\frac{5^x}{1+5^{\frac{1}{x}}}=\frac{1}{1+0}=1$$

$\lim_{x\to0-}5^{\frac{1}{x}}=0$

$\therefore c<a<b$

답 ④

일품 BOX

093 문제 이해 $\frac{1}{x}=t$로 놓으면 $x\to0+$일 때 $t\to\infty$이고, $x\to0-$일 때 $t\to-\infty$이므로

$$\lim_{x\to0+}3^{\frac{1}{x}}=\lim_{t\to\infty}3^t=\infty,$$

$$\lim_{x\to0-}3^{\frac{1}{x}}=\lim_{t\to-\infty}3^t=0$$ ● 30%

해결 과정 $\displaystyle\lim_{x\to0+}\frac{3^{\frac{1}{x}}+3^a}{3^{\frac{1}{x}}+3^b}=\lim_{x\to0+}\frac{1+\frac{3^a}{3^{\frac{1}{x}}}}{1+\frac{3^b}{3^{\frac{1}{x}}}}=1,$

$\displaystyle\lim_{x\to0-}\frac{3^{\frac{1}{x}}+3^a}{3^{\frac{1}{x}}+3^b}=\frac{3^a}{3^b}=3^{a-b}$에서 $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{3^{\frac{1}{x}}+3^a}{3^{\frac{1}{x}}+3^b}$의 값이 존재하려면

$c=1=3^{a-b}$

$a-b=0$에서 $a=b$ ● 50%

답 구하기 $\therefore \frac{ac}{b}=\frac{b\cdot1}{b}=1$ ● 20%

답 1

094 $a_n=128\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=2^{-n+8}$

$$a_n=128\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=2^7\cdot(2^{-1})^{n-1}=2^7\cdot2^{-n+1}=2^{-n+8}$$

(i) $a_n>1$일 때, 즉 $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 7$일 때

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}(a_n)^x=\infty$이므로 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+(a_n)^x}=0$

$\therefore b_n=0$

(ii) $a_n=1$일 때, 즉 $n=8$일 때

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}(a_n)^x=1$이므로 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+(a_n)^x}=\frac{1}{2}$

$\therefore b_n=\frac{1}{2}$

(iii) $0<a_n<1$일 때, 즉 $n=9,\ 10,\ 11,\ \cdots$일 때

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}(a_n)^x=0$이므로 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+(a_n)^x}=1$

$\therefore b_n=1$

$$\therefore \sum_{n=1}^{10}a_nb_n=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_{10}b_{10}$$
$$=a_8b_8+a_9b_9+a_{10}b_{10}$$
$$=1\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot1+\frac{1}{4}\cdot1$$
$$=\frac{5}{4}$$

답 $\frac{5}{4}$

095 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log_2(7^x+8^x)}{\log_3(8^x+9^x)}$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\log_2\left[8^x\left\{\left(\frac{7}{8}\right)^x+1\right\}\right]}{\log_3\left[9^x\left\{\left(\frac{8}{9}\right)^x+1\right\}\right]}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\log_2 8^x+\log_2\left\{\left(\frac{7}{8}\right)^x+1\right\}}{\log_3 9^x+\log_3\left\{\left(\frac{8}{9}\right)^x+1\right\}}$$

$\log_2 8^x=x\log_2 2^3=3x$

$\log_3 9^x=x\log_3 3^2=2x$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{3x+\log_2\left\{\left(\frac{7}{8}\right)^x+1\right\}}{2x+\log_3\left\{\left(\frac{8}{9}\right)^x+1\right\}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\frac{1}{x}\log_2\left\{\left(\frac{7}{8}\right)^x+1\right\}}{2+\frac{1}{x}\log_3\left\{\left(\frac{8}{9}\right)^x+1\right\}}=\frac{3}{2}$$

답 $\frac{3}{2}$

096 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+\frac{a}{x}}{1-\frac{a}{x}}\right)^x$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left\{\left(1+\frac{a}{x}\right)^{\frac{x}{a}}\right\}^a}{\left\{\left(1-\frac{a}{x}\right)^{-\frac{x}{a}}\right\}^{-a}}$$

$$=\frac{e^a}{e^{-a}}=e^{2a}$$

즉 $e^{2a}=e^{20}$이므로 $a=10$

답 ④

097 ㄱ. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{e^x+2^x}{e^x-2^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\left(\frac{2}{e}\right)^x}{1-\left(\frac{2}{e}\right)^x}=1$

ㄴ. $\displaystyle\lim_{x\to0-}\frac{1}{x}=-\infty$이므로 $\displaystyle\lim_{x\to0-}e^{\frac{1}{x}}=0$

$\displaystyle\therefore \lim_{x\to0-}\frac{e^x}{e-e^{\frac{1}{x}}}=\frac{1}{e-0}=\frac{1}{e}$

ㄷ. $x-1=t$로 놓으면 $x\to\infty$일 때 $t\to\infty$이므로

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x-1}\right)^x=\lim_{t\to\infty}\left(\frac{t+1}{t}\right)^{t+1}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\cdot\left(1+\frac{1}{t}\right)$$
$$=e\cdot1=e$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

098 문제 이해 $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\ln(1+nx)$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+nx)}{nx}\cdot n$$
$$=1\cdot n=n$$ ● 30%

① $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$

② $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1$

해결 과정 S_n

$$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{1}{x}\ln(1+x)(1+2x)\cdots(1+nx)\right\}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\{\ln(1+x)+\ln(1+2x)+\cdots+\ln(1+nx)\}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}+\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+2x)}{2x}\cdot2+\cdots+\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+nx)}{nx}\cdot n$$
$$=1+2+\cdots+n$$
$$=\frac{n(n+1)}{2}$$ ● 40%

답 구하기 $\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{S_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n(n+1)}$

$$=2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=2\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$

$$=2\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$$

$$=2\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=2$$ ● 30%

답 2

일품 BOX

$\frac{1}{AB}=\frac{1}{B-A}\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{B}\right)$ (단, $A\neq B$)

099 $S(x)$는 첫째항이 $\frac{\ln(1+2x)}{1+4x}$, 공비가 $\frac{1}{1+4x}$인 등비급수이고, $x>0$에서 $0<\frac{1}{1+4x}<1$이므로 $S(x)$는 수렴한다.

따라서

$$S(x)=\frac{\frac{\ln(1+2x)}{1+4x}}{1-\frac{1}{1+4x}}=\frac{\ln(1+2x)}{4x}$$

이므로

$$\lim_{x\to0+}S(x)=\lim_{x\to0+}\frac{\ln(1+2x)}{2x}\cdot\frac{1}{2}$$

$$=1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

답 ②

등비급수

$\sum_{n=1}^{\infty}ar^{n-1}$ $(a\neq0)$은

① $|r|<1$일 때 수렴하고

그 합은 $\frac{a}{1-r}$이다.

② $|r|\geq1$일 때 발산한다.

100 $\lim_{x\to0}f(x)\ln(1+2x)$

$$=\lim_{x\to0}\left\{f(x)\ln(1+3x)\cdot\frac{\ln(1+2x)}{\ln(1+3x)}\right\}$$

$$=\lim_{x\to0}\left\{f(x)\ln(1+3x)\cdot\frac{\frac{\ln(1+2x)}{x}}{\frac{\ln(1+3x)}{x}}\right\}$$

$$=\lim_{x\to0}\left\{f(x)\ln(1+3x)\cdot\frac{\frac{\ln(1+2x)}{2x}\cdot2}{\frac{\ln(1+3x)}{3x}\cdot3}\right\}$$

$$=5\cdot\frac{1\cdot2}{1\cdot3}=\frac{10}{3}$$

답 $\frac{10}{3}$

함수의 극한의 대소 관계

$f(x)\leq h(x)\leq g(x)$이고

$\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(x)=\alpha$

(α는 실수)이면

$\lim_{x\to a}h(x)=\alpha$

101 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $x=1$에서 연속이어야 하므로

$$\lim_{x\to1}f(x)=f(1)$$

$$\therefore \lim_{x\to1}\frac{e^{x-1}-ax^2}{1-x}=b \quad \cdots\cdots ㉠$$

$x\to1$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이다.

$x\neq a$에서 연속인 함수 $g(x)$에 대하여 함수

$$f(x)=\begin{cases}g(x) & (x\neq a)\\ k & (x=a)\end{cases}$$

가 모든 실수 x에서 연속이면

$\lim_{x\to a}g(x)=k$

(단, k는 상수)

즉 $\lim_{x\to1}(e^{x-1}-ax^2)=0$이므로 $e^0-a=0$

$\therefore a=1$

$a=1$을 ㉠에 대입하면

$$\lim_{x\to1}\frac{e^{x-1}-x^2}{1-x}=b$$

$x-1=t$로 놓으면 $x\to1$일 때 $t\to0$이므로

$$\lim_{x\to1}\frac{e^{x-1}-x^2}{1-x}=\lim_{t\to0}\frac{e^t-(t+1)^2}{-t}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{e^t-(t^2+2t+1)}{-t}$$

$$=\lim_{t\to0}\left(-\frac{e^t-1}{t}+t+2\right)$$

$$=-1+2=1$$

$\therefore b=1$

$\therefore a+b=2$

답 ⑤

102 해결 과정 $x\to0$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이다.

즉 $\lim_{x\to0}(1-e^{ax+b})=0$이므로 $1-e^b=0$

$e^b=1$ $\quad\therefore b=0$ ● 30%

$b=0$을 주어진 식에 대입하면

$$\lim_{x\to0}\frac{1-e^{ax}}{\ln(1+x)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x}{\ln(1+x)}\cdot\frac{e^{ax}-1}{ax}\cdot(-a)$$

$$=1\cdot1\cdot(-a)=-a$$

즉 $-a=7$이므로 $a=-7$ ● 50%

답 구하기 $\therefore a+b=-7$ ● 20%

답 -7

103 해결 과정 $x\neq0$일 때, 주어진 부등식의 각 변을 x^2으로 나누면

$$\frac{\ln(1+x^2)}{x^2}\leq\frac{f(x)}{x^2}\leq\frac{e^{x^2}-1}{x^2}$$ ● 20%

이때 $\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x^2)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{e^{x^2}-1}{x^2}=1$이므로

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2}=1$$ ● 30%

답 구하기 $2x=t$로 놓으면 $x\to0$일 때 $t\to0$이므로

$$\lim_{x\to0}\frac{f(2x)}{x^2}=\lim_{t\to0}\frac{f(t)}{\left(\frac{t}{2}\right)^2}=\lim_{t\to0}\frac{f(t)}{t^2}\cdot4$$

$$=1\cdot4=4$$ ● 50%

답 4

104 점 A의 x좌표는 $3^{x-1}=a$에서

$x-1=\log_3 a$ $\quad\therefore x=\log_3 a+1$

점 B의 x좌표는 $9^{x-1}=a$에서

$x-1=\log_9 a$ $\quad\therefore x=\log_9 a+1$

이때 $0<a<1$이므로 $\quad \log_9 a+1>\log_3 a+1$

$$\begin{aligned}\therefore \overline{\mathrm{AB}}&=(\log_9 a+1)-(\log_3 a+1)\\&=\log_9 a-\log_3 a\\&=\frac{1}{2}\log_3 a-\log_3 a\\&=-\frac{1}{2}\log_3 a\end{aligned}$$

따라서 $\lim_{a\to1-}\frac{\overline{\mathrm{AB}}}{a-1}=\lim_{a\to1-}\frac{-\frac{1}{2}\log_3 a}{a-1}$에서

$a-1=t$로 놓으면 $a\to1-$일 때 $t\to0-$이므로

$$\begin{aligned}\lim_{a\to1-}\frac{-\frac{1}{2}\log_3 a}{a-1}&=\lim_{t\to0-}\frac{-\frac{1}{2}\log_3(t+1)}{t}\\&=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\ln 3}=-\frac{1}{2\ln 3}\end{aligned}$$

답 ⑤

105 해결 과정 $\log_a x=t$로 놓으면 $a>1$, $x>1$, $a\neq x$에서

$t>0,\ t\neq1$ ● 10%

$$\begin{aligned}\therefore f(x)&=\lim_{h\to0}\frac{(\log_a x)^h-1}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{t^h-1}{h}\\&=\ln t=\ln(\log_a x)\end{aligned}$$

● 30%

일품 BOX: $a>0$, $a\neq1$일 때 $\lim_{x\to0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$

답 구하기 따라서 $f(x^n)-f(x^2)=2\ln 3$에서

$\ln(\log_a x^n)-\ln(\log_a x^2)=2\ln 3$

$\ln(n\log_a x)-\ln(2\log_a x)=2\ln 3$

$\ln\frac{n\log_a x}{2\log_a x}=\ln 9$

$\frac{n}{2}=9 \quad \therefore n=18$ ● 60%

답 18

106 $\lim_{x\to0}\frac{e^{ax^2}-1}{f(x)}=2$에서

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{e^{ax^2}-1}{f(x)}&=\lim_{x\to0}\frac{e^{ax^2}-1}{ax^2}\cdot\frac{ax^2}{f(x)}\\&=\lim_{x\to0}\frac{e^{ax^2}-1}{ax^2}\cdot\lim_{x\to0}\frac{ax^2}{f(x)}\\&=\lim_{x\to0}\frac{ax^2}{f(x)}=2\end{aligned}$$

일품 BOX: $\lim_{x\to0}\frac{e^{ax^2}-1}{ax^2}=1$

$\therefore \lim_{x\to0}\frac{x^2}{f(x)}=\frac{2}{a}$

또 $\lim_{x\to0}\frac{8^{x^2}-1}{f(x)}=b$에서

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{8^{x^2}-1}{f(x)}&=\lim_{x\to0}\frac{8^{x^2}-1}{x^2}\cdot\frac{x^2}{f(x)}\\&=\lim_{x\to0}\frac{8^{x^2}-1}{x^2}\cdot\lim_{x\to0}\frac{x^2}{f(x)}\\&=(\ln 8)\cdot\frac{2}{a}=b\end{aligned}$$

이므로

$ab=2\ln 8=6\ln 2$

$\therefore k=6$

답 ③

107 $\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(-2h)}{h}$

$$\begin{aligned}&=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)+f(0)-f(-2h)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h}+\lim_{h\to0}\frac{f(-2h)-f(0)}{-2h}\cdot2\\&=f'(0)+2f'(0)\\&=3f'(0)\end{aligned}$$

이때 $f(x)=(e^x+x)(e^{2x}+2x)$에서

$$\begin{aligned}f'(x)&=(e^x+1)(e^{2x}+2x)+(e^x+x)\{(e^2)^x\ln e^2+2\}\\&=(e^x+1)(e^{2x}+2x)+(e^x+x)(2e^{2x}+2)\end{aligned}$$

$\therefore 3f'(0)=3\cdot(2\cdot1+1\cdot4)=18$

답 18

108 $f(x)=2^x+(2\sqrt{2})^x+4^x+(4\sqrt{2})^x+8^x$이라 하면 $f(0)=5$이므로

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to0}\frac{2^x+(2\sqrt{2})^x+4^x+(4\sqrt{2})^x+8^x-5}{x}\\&=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)\end{aligned}$$

한편

$$\begin{aligned}f'(x)=&\,2^x\ln 2+(2\sqrt{2})^x\ln 2\sqrt{2}+4^x\ln 4\\&+(4\sqrt{2})^x\ln 4\sqrt{2}+8^x\ln 8\end{aligned}$$

이므로 구하는 값은 $\quad f'(0)=10\ln 2$

답 $10\ln 2$

일품 BOX:

$$\begin{aligned}f'(0)&=\ln 2+\ln 2\sqrt{2}+\ln 4+\ln 4\sqrt{2}+\ln 8\\&=\ln 2+\frac{3}{2}\ln 2+2\ln 2+\frac{5}{2}\ln 2+3\ln 2\\&=10\ln 2\end{aligned}$$

109 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하려면 $x=1$에서 연속이어야 하므로

$\lim_{x\to1+}(bx+3)=\lim_{x\to1-}(2+a\ln x)=f(1)$

$b+3=2 \qquad \therefore b=-1$

또 $f'(1)$이 존재해야 하므로

$$f'(x)=\begin{cases}b & (x>1)\\ \frac{a}{x} & (0<x<1)\end{cases}$$

에서 $\quad \lim_{x\to1+}b=\lim_{x\to1-}\frac{a}{x}$

$\therefore a=b=-1$

$\therefore a+b=-2$

답 ①

110 해결 과정 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)-4}{x-1}=3$에서 $x\to1$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이다.

즉 $\lim_{x\to1}\{f(x)-4\}=0$이므로 $\quad f(1)=4$

$\therefore a=4$ ● 40%

$f(x)=4+b\ln x$에서 $f(1)=4$이므로

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-4}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=3$

일품 BOX: $x\to a$일 때,
① (분모)$\to0$이고 극한값이 존재
➡ (분자)$\to0$
② (분자)$\to0$이고 0이 아닌 극한값이 존재
➡ (분모)$\to0$

이때 $f'(x)=\frac{b}{x}$이므로

$f'(1)=b$

$\therefore b=3$ ● 50%

답 구하기 따라서 $f(x)=4+3\ln x$이므로

$f(e)=7$ ● 10%

답 7

111 $f(x)=x^2\ln x^3=3x^2\ln x$에서

$$f'(x)=6x\ln x+3x^2\cdot\frac{1}{x}=6x\ln x+3x$$

$$\therefore \lim_{x\to0}\left\{\frac{f'(e^x)}{3e^x}\right\}^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0}\left(\frac{6xe^x+3e^x}{3e^x}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0}(2x+1)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0}\{(2x+1)^{\frac{1}{2x}}\}^2=e^2$$

답 ③

112 $3ax=t$로 놓으면 $a\to0$일 때 $t\to0$이므로

$$f(x)=\lim_{a\to0}(1+3ax)^{\frac{2x}{a}}=\lim_{t\to0}(1+t)^{\frac{6x^2}{t}}=\lim_{t\to0}\{(1+t)^{\frac{1}{t}}\}^{6x^2}=e^{6x^2}$$

즉 $\ln f(x)=\ln e^{6x^2}=6x^2$이므로 $6x^2\le100$에서

$$x^2\le\frac{50}{3}=16.\times\times\times$$

따라서 주어진 조건을 만족시키는 자연수 x는 1, 2, 3, 4의 4개이다.

답 4

일품 BOX

• $3ax=t$에서 $a=\frac{t}{3x}$

$\lim_{a\to0}(1+3ax)^{\frac{2x}{a}}$

$=\lim_{t\to0}(1+t)^{2x\cdot\frac{3x}{t}}$

$=\lim_{t\to0}(1+t)^{\frac{6x^2}{t}}$

113 1회 이율이 $\frac{r}{n}\%=\frac{r}{100n}$이므로

$$f(n)=10^6\left(1+\frac{r}{100n}\right)^n$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}f(n)=\lim_{n\to\infty}10^6\left(1+\frac{r}{100n}\right)^n=10^6\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1+\frac{r}{100n}\right)^{\frac{100n}{r}}\right\}^{\frac{r}{100}}=10^6e^{\frac{r}{100}}$$

답 ①

A원을 연이율 $r\%$로 n년 동안 복리로 예금할 때 원리합계

➡ $A\left(1+\frac{r}{100}\right)^n$원

$a>0$, $a\ne1$일 때

$\lim_{x\to0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\frac{1}{\ln a}$

114 $f(x)=nx^n(x-1)=nx^{n+1}-nx^n$에서

$$f'(x)=n(n+1)x^n-n^2x^{n-1}=n(n+1)x^{n-1}\left(x-\frac{n}{n+1}\right)$$

• n은 자연수이므로 $n(n+1)>0$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=\frac{n}{n+1}$

x	0	…	$\frac{n}{n+1}$	…	1
$f'(x)$		−	0	+	
$f(x)$	0	↘	극소	↗	0

따라서 $0\le x\le1$에서 $f(x)$는 $x=\frac{n}{n+1}$일 때 극소이면서 최소이다.

이때

$$g(n)=f\left(\frac{n}{n+1}\right)=n\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\left(\frac{n}{n+1}-1\right)=-\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}$$

이므로

$$\lim_{n\to\infty}g(n)=\lim_{n\to\infty}\left\{-\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}\right\}=\lim_{n\to\infty}\left\{-\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}\right\}=\lim_{n\to\infty}\left\{-\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)}\right\}=-\frac{1}{e\cdot1}=-\frac{1}{e}$$

답 ④

115 $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=b$이므로

$$\lim_{x\to0+}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0-}\frac{f(x)}{x}=b$$

가 성립해야 한다.

$$\lim_{x\to0+}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0+}\frac{\log_2(x+4)-2}{x}=\lim_{x\to0+}\frac{\log_2(x+4)-\log_2 4}{x}=\lim_{x\to0+}\frac{\log_2\left(1+\frac{x}{4}\right)}{x}=\lim_{x\to0+}\frac{\log_2\left(1+\frac{x}{4}\right)}{\frac{x}{4}}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{4\ln2}$$

$$\therefore b=\frac{1}{4\ln2}$$

$$\lim_{x\to0-}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0-}\frac{a^x-1}{2x}=\frac{1}{2}\ln a$$

즉 $\frac{1}{4\ln2}=\frac{1}{2}\ln a$이므로 $\ln a=\frac{1}{2\ln2}$

$$\therefore \frac{1}{b\ln a}=4\ln2\cdot2\ln2=8(\ln2)^2$$

답 ②

116 점 P의 좌표를 $(t,\ \ln\sqrt{t})$라 하면

Q$(t,\ 0)$

$\therefore \overline{PQ}=\ln\sqrt{t}$, $\overline{AQ}=t-1$

점 P가 점 A(1, 0)에 한없이 가까워질 때 $t\to1+$이므로

$$\lim_{t\to1+}\frac{\overline{PQ}}{\overline{AQ}}=\lim_{t\to1+}\frac{\ln\sqrt{t}}{t-1}$$

$t-1=h$로 놓으면 $t\to1+$일 때 $h\to0+$이므로

$$\lim_{t\to1+}\frac{\ln\sqrt{t}}{t-1}=\lim_{h\to0+}\frac{\frac{1}{2}\ln(1+h)}{h}=\frac{1}{2}\cdot1=\frac{1}{2}$$

답 ③

117 $g(x)=e^xf(x)$로 놓으면

$$\lim_{x\to3}\frac{e^xf(x)-e^2}{x^2-9}=\lim_{x\to3}\frac{g(x)-e^2}{x^2-9}=\frac{e-e^2}{6}$$

에서 $x\to3$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이다.

즉 $\lim_{x\to3}\{g(x)-e^2\}=0$이므로 $g(3)=e^2$

$$\therefore f(3)=\frac{1}{e}$$

따라서

$$\lim_{x\to3}\frac{g(x)-e^2}{x^2-9}=\lim_{x\to3}\frac{g(x)-g(3)}{x-3}\cdot\frac{1}{x+3}$$
$$=\frac{1}{6}g'(3)$$

$\frac{1}{6}g'(3)=\frac{e-e^2}{6}$이므로 $g'(3)=e-e^2$

한편 $g(x)=e^xf(x)$에서 $g'(x)=e^xf(x)+e^xf'(x)$이므로

$$g'(3)=e^3f(3)+e^3f'(3)$$
$$=e^3\cdot\frac{1}{e}+e^3f'(3)=e^2+e^3f'(3)$$

즉 $e^2+e^3f'(3)=e-e^2$이므로

$$f'(3)=\frac{e-2e^2}{e^3}=\frac{1-2e}{e^2}$$

답 ⑤

1등급 완성하기

▶ 본책 26쪽

118 ㄱ. $(a,\ b)\in A$에서 $5^a=b$이므로

$$5^{\frac{a}{2}}=b^{\frac{1}{2}}=\sqrt{b}\qquad\therefore\left(\frac{a}{2},\ \sqrt{b}\right)\in A$$

ㄴ. $(-a,\ b)\in A$에서 $5^{-a}=b$이므로

$$5^a=b^{-1}=\frac{1}{b}\qquad\therefore\left(a,\ \frac{1}{b}\right)\in A$$

ㄷ. [반례] $a=1$, $b=-5$일 때, $5^2=25$에서 $(2,\ 25)\in A$이지만 $5^1\neq-5$에서 $(1,\ -5)\notin A$이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ②

참고 ㄷ. $(2a,\ b^2)\in A$에서 $5^{2a}=b^2$이므로

$(5^a)^2=b^2\qquad\therefore 5^a=\pm b$

$\therefore (a,\ b)\in A$ 또는 $(a,\ -b)\in A$

일품 BOX

지수함수 $y=a^x$에서 x의 값이 증가할 때 y의 값이 감소하면
$0<a<1$

$g(3)=e^3f(3)=e^2$
이므로
$f(3)=\frac{1}{e}$

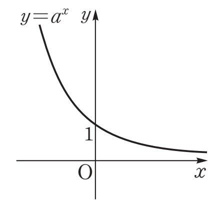
$6^b=9$에서 $(6^b)^2=9^2$
$\therefore 6^{2b}=9^2$
$6^c=12$에서 $(6^c)^3=12^3$
$\therefore 6^{3c}=12^3$

$\lim_{x\to a+}f(x)=\pm\infty$
또는 $\lim_{x\to a-}f(x)=\pm\infty$
➡ $y=f(x)$의 그래프의 점근선은 직선 $x=a$

$\log_3 a=1-\log_3 2$
$\log_3 a=\log_3 3-\log_3 2$
$\log_3 a=\log_3\frac{3}{2}$

$a=1$, $b=-5$이면
$(2a,\ b^2)=(2,\ 25)$
즉 $5^2=25$

119 $y=-\left(\frac{1}{a}\right)^x=-a^{-x}$의 그래프는 $y=a^x$의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 것이다.



즉 $y=a^x$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

$$0<a<1$$

이때 $f(a)=-a^2+a+\frac{1}{2}$이라 하면

$f(a)=-\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$이므로 $0<a<1$에서

$$\frac{1}{2}<f(a)\le\frac{3}{4}$$

따라서 $y=\{f(a)\}^{-x+1}=\{f(a)\}^{-(x-1)}$의 그래프는 $y=\{f(a)\}^x$의 그래프, 즉 밑이 0보다 크고 1보다 작은 지수함수의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 그래프의 개형으로 알맞은 것은 ①이다.

답 ①

120 문제 이해 주어진 함수의 그래프가 세 점 $(a,\ 2)$, $(b,\ 9)$, $(c,\ 12)$를 지나므로

$$6^a=2,\ 6^b=9,\ 6^c=12$$ ● 30%

해결 과정 이때 $6^{2b}=9^2$, $6^{3c}=12^3$이므로

$$6^{a+2b+3c}=6^a6^{2b}6^{3c}=2\cdot9^2\cdot12^3$$
$$=2\cdot(3^2)^2\cdot(2^2\cdot3)^3$$
$$=2^7\cdot3^7=6^7$$ ● 50%

답 구하기 $\therefore a+2b+3c=7$ ● 20%

답 7

121 $A=\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{3}{4}}=(2^{-1})^{-\frac{3}{4}}=2^{\frac{3}{4}}$

$B=(0.25)^{-\frac{2}{3}}=\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{2}{3}}=(2^{-2})^{-\frac{2}{3}}=2^{\frac{4}{3}}$

$C=(\sqrt{8})^{\frac{3}{4}}=\left(2^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{3}{4}}=2^{\frac{9}{8}}$

이때 $\frac{3}{4}<\frac{9}{8}<\frac{4}{3}$이고 밑이 1보다 크므로

$$2^{\frac{3}{4}}<2^{\frac{9}{8}}<2^{\frac{4}{3}}\qquad\therefore A<C<B$$

답 ②

122 $y=\log_3 a(b-x)=\log_3 a+\log_3(b-x)$에서 주어진 함수의 그래프의 점근선의 방정식이 $x=2$이므로

$$b=2$$

또 이 그래프가 점 $(0,\ 1)$을 지나므로

$$1=\log_3 a+\log_3 2,\qquad \log_3 a=\log_3\frac{3}{2}$$

$$\therefore a=\frac{3}{2}\qquad\therefore y=\log_3\frac{3}{2}+\log_3(2-x)$$

이때

$$y=\log_3(2-x)+\log_3\frac{3}{2}$$
$$=\log_3\{-(x-2)\}+\log_3\frac{3}{2}$$

이므로 주어진 함수의 그래프는 $y=\log_3 x$의 그래프를 $\boxed{y축}$에 대하여 대칭이동한 후, x축의 방향으로 $\boxed{2}$만큼, y축의 방향으로 $\boxed{\log_3 \frac{3}{2}}$만큼 평행이동한 것이다.

$\therefore$ (가) y축 (나) 2 (다) $\log_3 \frac{3}{2}$

답 ⑤

123 해결 과정 $\overline{AB}=\log_2 a-\log_5 a$,
$\overline{CD}=\log_2 b-\log_5 b$이고 $\overline{AB}:\overline{CD}=1:2$에서

$\overline{CD}=2\overline{AB}$ ● 30%

$$\begin{aligned}\therefore\ \overline{EF}&=\log_2 ab^2-\log_5 ab^2\\&=\log_2 a+2\log_2 b-\log_5 a-2\log_5 b\\&=\log_2 a-\log_5 a+2(\log_2 b-\log_5 b)\\&=\overline{AB}+2\overline{CD}\\&=\overline{AB}+4\overline{AB}\\&=5\overline{AB}\end{aligned}$$ ● 50%

답 구하기 $\therefore \dfrac{\overline{EF}}{\overline{AB}}=5$ ● 20%

답 5

124 점 M의 좌표를 $(m,\ n)$이라 하면

$$m=\frac{3+12}{2}=\frac{15}{2}$$

$$n=\frac{\log_2 3+\log_2 12}{2}=\frac{1}{2}\log_2 36=\log_2 6$$

두 점 $A(x_1,\ y_1)$, $B(x_2,\ y_2)$에 대하여 선분 AB의 중점의 좌표는 $\left(\dfrac{x_1+x_2}{2},\ \dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$

주어진 그림에서

$\log_2 a=n=\log_2 6$ $\quad\therefore a=6$

$b=\log_2 m=\log_2 \dfrac{15}{2}=\log_2 15-1$

$$\begin{aligned}\therefore\ a+b&=6+\log_2 15-1\\&=5+\log_2 15\end{aligned}$$

답 ③

125 문제 이해 $y=|\log_2 x|$에서

절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 x의 값을 경계로 범위를 나누어 각각의 함수식을 구한다.

$x\geq 1$일 때, $\quad y=\log_2 x$

$x<1$일 때, $\quad y=-\log_2 x$ ● 10%

해결 과정 $A(3,\ \log_2 3)$이고 점 C의 x좌표를 a라 하면 $C(a,\ -\log_2 a)$이므로

$-\log_2 a=\log_2 3,\qquad \log_2 a=\log_2 \dfrac{1}{3}$

$\therefore a=\dfrac{1}{3}$ ● 30%

또 $B(12,\ \log_2 12)$이고 점 D의 x좌표를 b라 하면 $D(b,\ -\log_2 b)$이므로

$-\log_2 b=\log_2 12,\qquad \log_2 b=\log_2 \dfrac{1}{12}$

$\therefore b=\dfrac{1}{12}$ ● 30%

따라서 사각형 ABDC의 넓이는

□ABDC는 사다리꼴이다.

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\left\{\left(3-\frac{1}{3}\right)+\left(12-\frac{1}{12}\right)\right\}\cdot(\log_2 12-\log_2 3)\\&=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{8}{3}+\frac{143}{12}\right)\cdot\log_2 4\\&=\frac{175}{12}\end{aligned}$$ ● 20%

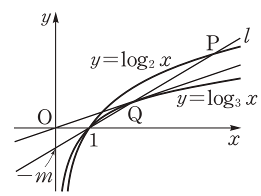
답 구하기 따라서 $p=12,\ q=175$이므로

$p+q=187$ ● 10%

답 187

126 ㄱ. 오른쪽 그림에서

$\log_2 p>\log_3 q$



ㄴ. 두 점 $(1,\ 0)$, $(0,\ -m)$을 지나는 직선 l의 기울기는 직선 PQ의 기울기와 같으므로

$$m=\frac{\log_2 p-\log_3 q}{p-q}$$

ㄷ. 위의 그림에서 두 점 $(1,\ 0)$, $(0,\ -m)$을 지나는 직선 l의 기울기는 직선 OQ의 기울기보다 크므로

$Q(q,\ \log_3 q)$이므로 (직선 OQ의 기울기) $=\dfrac{\log_3 q-0}{q-0}=\dfrac{\log_3 q}{q}$

$$m>\frac{\log_3 q}{q}$$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

127 문제 이해 $(g\circ f)(x)=g(f(x))$
$\qquad=\log_a(x^2-4x+a^5+4)$

이때 밑이 1보다 크므로 함수 $(g\circ f)(x)$는 $f(x)$가 최소일 때 최솟값을 갖는다. ● 30%

해결 과정 $f(x)=x^2-4x+a^5+4=(x-2)^2+a^5$이므로 $f(x)$는 $x=2$에서 최솟값 a^5을 갖는다.

따라서 함수 $(g\circ f)(x)$는 $x=2$에서 최솟값 $\log_a a^5=5$를 가지므로

$\alpha=2,\ \beta=5$ ● 50%

답 구하기 $\therefore \alpha+\beta=7$ ● 20%

답 7

128 $2^{x+y}+2^x+2^y=296$에서

$2^x2^y+2^x+2^y+1=297,\qquad (2^x+1)(2^y+1)=297$

이때 $297=3^3\cdot 11$이고 $2^x+1,\ 2^y+1$은 모두 3 이상인 홀수이다.

(i) $2^x+1=3,\ 2^y+1=3^2\cdot 11=99$일 때,
$2^y=98$을 만족시키는 자연수 y가 존재하지 않는다.

(ii) $2^x+1=3^2=9,\ 2^y+1=3\cdot 11=33$일 때,
$2^x=8,\ 2^y=32$에서 $\quad x=3,\ y=5$

(iii) $2^x+1=11,\ 2^y+1=3^3=27$일 때,
$2^x=10,\ 2^y=26$을 만족시키는 자연수 $x,\ y$가 존재하지 않는다.

이상에서 $\alpha=3,\ \beta=5$이므로 $\quad \alpha\beta=15$

답 ②

129 문제 이해 $2^x+2^{-x}=X$로 놓으면

$4^x+4^{-x}=(2^x+2^{-x})^2-2=X^2-2$

$2^x>0$, $2^{-x}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$X=2^x+2^{-x}\ge 2\sqrt{2^x\cdot 2^{-x}}=2$

(단, 등호는 $x=0$일 때 성립) ● 30%

해결 과정 따라서 주어진 방정식은

$2(X^2-2)-3X-1=0$, $2X^2-3X-5=0$

$(X+1)(2X-5)=0$

$\therefore X=\frac{5}{2}$ ($\because X\ge 2$) ● 20%

즉 $2^x+2^{-x}=\frac{5}{2}$이므로 $2^x=t$ $(t>0)$로 놓으면

$t+\frac{1}{t}=\frac{5}{2}$

양변에 $2t$를 곱하여 정리하면

$2t^2-5t+2=0$, $(2t-1)(t-2)=0$

$\therefore t=\frac{1}{2}$ 또는 $t=2$ ● 30%

답 구하기 즉 $2^x=\frac{1}{2}$ 또는 $2^x=2$이므로

$x=-1$ 또는 $x=1$

따라서 구하는 모든 근의 합은 0이다. ● 20%

답 0

130 $x^2+3x>3^a(x-1)$에서

$x^2+(3-3^a)x+3^a>0$

모든 실수 x에 대하여 위의 부등식이 성립하므로 이차방정식 $x^2+(3-3^a)x+3^a=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(3-3^a)^2-4\cdot 3^a<0$

$(3^a)^2-10\cdot 3^a+9<0$, $(3^a-1)(3^a-9)<0$

$\therefore 1<3^a<9$

$\therefore 0<a<2$

답 ③

131 $(x^2-4x+6)^{2x-11}<1$에서

$x^2-4x+6=(x-2)^2+2\ge 2$

즉 밑이 1보다 크므로

$2x-11<0$ $\therefore x<\frac{11}{2}$

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 자연수 x는 1, 2, 3, 4, 5이므로 구하는 합은 15

답 15

132 문제 이해 임의의 두 실수 p, q에 대하여 주어진 명제가 참이 되려면

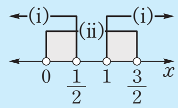
$0<2x^2-3x+1<1$ ● 30%

해결 과정 (i) $0<2x^2-3x+1$에서

$(2x-1)(x-1)>0$

$\therefore x<\frac{1}{2}$ 또는 $x>1$ ● 30%

일품 BOX



로그의 성질

$a>0$, $a\ne 1$이고 $b>0$일 때

① $\log_{a^m} b^n=\frac{n}{m}\log_a b$ (단, $m\ne 0$)

② $a^{\log_c b}=b^{\log_c a}$ (단, $c>0$, $c\ne 1$)

③ $a^{\log_a b}=b$

밑이 1보다 크므로 a의 값이 커지면 3^a의 값도 커진다.

$1=(x^2-4x+6)^0$

$2^{2x}=(2^2)^x=4^x$

$a^{f(x)}>a^{g(x)}$에서

① $a>1$이면 $f(x)>g(x)$

② $0<a<1$이면 $f(x)<g(x)$

(ii) $2x^2-3x+1<1$에서

$2x^2-3x<0$, $x(2x-3)<0$

$\therefore 0<x<\frac{3}{2}$ ● 30%

답 구하기 (i), (ii)에서

$0<x<\frac{1}{2}$ 또는 $1<x<\frac{3}{2}$ ● 10%

답 $0<x<\frac{1}{2}$ 또는 $1<x<\frac{3}{2}$

133 $2^x=t$ $(t>0)$로 놓으면

$t^2+2at+b\le 0$ ⋯⋯ ㉠

$1\le x\le 3$에서 $2\le t\le 8$

해가 $2\le t\le 8$이고 t^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(t-2)(t-8)\le 0$ $\therefore t^2-10t+16\le 0$

이것이 ㉠과 일치하므로

$a=-5$, $b=16$

$\therefore a+b=11$

답 11

134 해결 과정 $\log_2(x-1)^2-3\log_8|x-1|=2$에서

$2\log_2|x-1|-\log_2|x-1|=2$

$\log_2|x-1|=2$ $\therefore |x-1|=4$

즉 $x-1=-4$ 또는 $x-1=4$이므로

$x=-3$ 또는 $x=5$ ● 80%

답 구하기 따라서 구하는 모든 근의 합은

$-3+5=2$ ● 20%

답 2

135 모든 실수 x에 대하여 주어진 부등식이 성립하므로 이차방정식 $x^2-2x\log_2 a+\frac{4}{\log_a 2}=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(\log_2 a)^2-\frac{4}{\log_a 2}<0$

$\log_2 a=t$로 놓으면 위의 부등식은

$t^2-4t<0$, $t(t-4)<0$

$\therefore 0<t<4$

즉 $0<\log_2 a<4$이므로 $1<a<16$

따라서 정수 a는 2, 3, ⋯, 15의 14개이다. 답 ②

136 해결 과정 부등식 $0<3^x<4^x$의 각 변에 4^x을 더하면

$4^x<3^x+4^x<2\cdot 4^x$

$(4^x)^{\frac{1}{x}}<(3^x+4^x)^{\frac{1}{x}}<(2\cdot 4^x)^{\frac{1}{x}}$

$\therefore 4<(3^x+4^x)^{\frac{1}{x}}<4\cdot 2^{\frac{1}{x}}$ ● 50%

이때 $\lim_{x\to\infty}2^{\frac{1}{x}}=2^0=1$이므로

$\lim_{x\to\infty}4\cdot 2^{\frac{1}{x}}=4\cdot 1=4$ ● 30%

답 구하기 $\therefore \lim_{x\to\infty}(2^{2x}+3^x)^{\frac{1}{x}}=4$ ● 20%

답 4

137 $\lim_{x\to\infty}\{\ln(ex^2+x)-2\ln(ex+1)\}$

$=\lim_{x\to\infty}\ln\frac{ex^2+x}{(ex+1)^2}$

$=\ln\left(\lim_{x\to\infty}\frac{ex^2+x}{e^2x^2+2ex+1}\right)$

$=\ln\frac{1}{e}=-1$

답 ③

일품 BOX

$\lim_{x\to\infty}\frac{ex^2+x}{e^2x^2+2ex+1}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{e+\frac{1}{x}}{e^2+\frac{2e}{x}+\frac{1}{x^2}}$

$=\frac{e}{e^2}=\frac{1}{e}$

138 $x-1=t$로 놓으면 $x\to1$일 때 $t\to0$이므로

$a=\lim_{x\to1}x^{\frac{1}{1-x}}=\lim_{t\to0}(1+t)^{-\frac{1}{t}}$

$=\lim_{t\to0}\{(1+t)^{\frac{1}{t}}\}^{-1}$

$=e^{-1}=\frac{1}{e}$

$\frac{x}{2}=t$로 놓으면 $x\to\infty$일 때 $t\to\infty$이므로

$b=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{2t}$

$=\lim_{t\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right\}^2$

$=e^2$

$c=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+ex)}{x}$

$=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+ex)}{ex}\cdot e$

$=1\cdot e=e$

0이 아닌 상수 a에 대하여
$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+ax)}{ax}=1$

이상에서 $a<c<b$

답 ②

1등급 비밀노트

함수의 극한에 대한 성질에서 $\lim_{x\to a}f(x)=\alpha$, $\lim_{x\to a}g(x)=\beta$ (α, β는 실수)일 때, $\lim_{x\to a}f(x)g(x)=\lim_{x\to a}f(x)\cdot\lim_{x\to a}g(x)$이므로

$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x=\lim_{t\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right\}^2$

$=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\cdot\left(1+\frac{1}{t}\right)^t$

$=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\cdot\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t$

$=e^2$

139 해결 과정 $x\to a$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이다.

즉 $\lim_{x\to a}b\ln x=0$이므로 $b\ln a=0$

$\therefore a=1\ (\because b\neq0)$ ● 40%

$x\to a$일 때, 0이 아닌 극한값이 존재하므로 $b\neq0$

$a=1$을 주어진 식에 대입하면

$\lim_{x\to1}\frac{b\ln x}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{b\ln x}{x-1}\cdot\frac{1}{x+1}$ …… ㉠

$x-1=t$로 놓으면 $x\to1$일 때 $t\to0$이므로 ㉠은

$\lim_{t\to0}\frac{b\ln(t+1)}{t}\cdot\frac{1}{t+2}=b\cdot1\cdot\frac{1}{2}=\frac{b}{2}$

즉 $\frac{b}{2}=4$이므로 $b=8$ ● 50%

답 구하기 $\therefore a+b=9$ ● 10%

답 9

다른 풀이 $a=1$을 주어진 식에 대입하면

$\lim_{x\to1}\frac{b\ln x}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{b\ln x}{(x+1)(x-1)}$

이때 $f(x)=b\ln x$라 하면 $f(1)=0$이므로

$\lim_{x\to1}\frac{b\ln x}{(x+1)(x-1)}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\cdot\frac{1}{x+1}$

$=\frac{1}{2}f'(1)$

즉 $\frac{1}{2}f'(1)=4$이므로 $f'(1)=8$

$f'(x)=\frac{b}{x}$이므로 $b=8$

$\therefore a+b=9$

140 $f(x)=xe^{2x+a}=x(e^{2x}\cdot e^a)$에서

$f'(x)=e^{2x}\cdot e^a+x\{e^a\cdot(e^2)^x\ln e^2\}$

$=e^{2x+a}+2xe^{2x+a}$

$=(1+2x)e^{2x+a}$

$f'(0)=e^3$이므로 $e^a=e^3$

$\therefore a=3$

따라서 $f'(x)=(1+2x)e^{2x+3}$이므로

$f'(-1)=-e$

답 $-e$

141 $f(x)=x\log_2 ax^3$에서 $f(1)=\log_2 a$이므로

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-\log_2 a}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$

$=f'(1)$

또 $f(x)=x\log_2 ax^3=x(\log_2 a+3\log_2 x)$이므로

$f'(x)=(\log_2 a+3\log_2 x)+x\cdot\frac{3}{x\ln2}$

$=\log_2 ax^3+\frac{3}{\ln2}$

함수의 곱의 미분법
미분가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여
$\{f(x)g(x)\}'$
$=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

따라서 $f'(1)=2$이므로

$\log_2 a+\frac{3}{\ln2}=2$

$\frac{3}{\ln2}=3\cdot\frac{1}{\log_e 2}$
$=3\log_2 e$

$\log_2 a+3\log_2 e=2$

$\log_2 ae^3=\log_2 4$, $ae^3=4$

$\therefore a=\frac{4}{e^3}$

답 ⑤

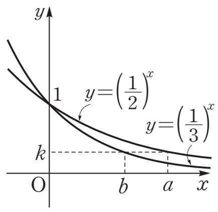
142 전략 두 함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$, $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$의 그래프를 그려 본다.

Step ① ㄱ. 오른쪽 그림에서

$\left(\frac{1}{3}\right)^b=\left(\frac{1}{2}\right)^a=k$

$(0<k<1)$

일 때, $a>b$이다.



Step ② ㄴ. $\left(\frac{1}{2}\right)^b>\left(\frac{1}{3}\right)^b$

$=\left(\frac{1}{2}\right)^a>\left(\frac{1}{3}\right)^a$

$\therefore \left(\frac{1}{2}\right)^b>\left(\frac{1}{3}\right)^a$

Step ③ ㄷ. $\left(\frac{1}{2}\right)^a=\left(\frac{1}{3}\right)^b=k\ (0<k<1)$라 하면

$\left(\frac{1}{2}\right)^{a-1}=2\left(\frac{1}{2}\right)^a=2k,\ \left(\frac{1}{3}\right)^{b-1}=3\left(\frac{1}{3}\right)^b=3k$이므로

$\left(\frac{1}{2}\right)^{a-1}<\left(\frac{1}{3}\right)^{b-1}$

이상에서 옳은 것은 ㄴ뿐이다. 답 ②

1등급 비밀노트

$\left(\frac{1}{2}\right)^a=\left(\frac{1}{3}\right)^b=k\ (0<k<1)$를 만족시키는 a, b는 두 함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$, $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$의 그래프가 각각 직선 $y=k$와 만나는 점의 x좌표이다.
이와 같은 유형의 문제에서 $a>0$, $b>0$인 경우와 $a<0$, $b<0$인 경우 a, b의 대소 관계가 달라지므로 조건에 주의하도록 한다.

143

전략 x가 두 자리 자연수일 때, $[\log_4 x]$의 값이 될 수 있는 정수를 찾아 경우를 나눈다.

Step ① $10\le x<100$이므로

$\log_4 10\le \log_4 x<\log_4 100$

$\therefore [\log_4 x]=1$ 또는 $[\log_4 x]=2$ 또는 $[\log_4 x]=3$

Step ② (i) $[\log_4 x]=1$일 때,

$1\le \log_4 x<2$이므로 $\quad 10\le x<16 \quad \cdots\cdots$ ㉠

$f(x)=0$에서 $\quad \left[\log_2 \frac{20}{x}\right]=-1$

$-1\le \log_2 \frac{20}{x}<0,\quad \frac{1}{2}\le \frac{20}{x}<1$

$\therefore 20<x\le 40 \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 x는 존재하지 않는다.

(ii) $[\log_4 x]=2$일 때,

$2\le \log_4 x<3$이므로 $\quad 16\le x<64 \quad \cdots\cdots$ ㉢

$f(x)=0$에서 $\quad \left[\log_2 \frac{20}{x}\right]=-2$

$-2\le \log_2 \frac{20}{x}<-1,\quad \frac{1}{4}\le \frac{20}{x}<\frac{1}{2}$

$\therefore 40<x\le 80 \quad \cdots\cdots$ ㉣

㉢, ㉣에서 $\quad 40<x<64$

(iii) $[\log_4 x]=3$일 때,

$3\le \log_4 x<4$이므로 $\quad 64\le x<100 \quad \cdots\cdots$ ㉤

$f(x)=0$에서 $\quad \left[\log_2 \frac{20}{x}\right]=-3$

일품 BOX

$\frac{1}{8}\le \frac{20}{x}<\frac{1}{4}$에서
$80<x\le 160$
이때 x는 두 자리 자연수이므로
$80<x<100$

주어진 조건에서
$a>0$, $b>0$이므로
$0<k<1$

$\lim_{t\to 0+}\frac{e^{kt}-1}{kt}=1$

$\log_4 4<\log_4 10<\log_4 4^2$
에서 $\log_4 10=1.\times\times\times$
$\log_4 4^3<\log_4 100$
$<\log_4 4^4$
에서 $\log_4 100=3.\times\times\times$

$\log_4 4\le \log_4 x<\log_4 4^2$
$\therefore 4\le x<16$
이때 x는 두 자리 자연수이므로
$10\le x<16$

$\sum_{k=1}^{n} k=\frac{n(n+1)}{2}$

$\log_4 4^3\le \log_4 x<\log_4 4^4$
$\therefore 64\le x<256$
이때 x는 두 자리 자연수이므로
$64\le x<100$

$-3\le \log_2 \frac{20}{x}<-2,\quad \frac{1}{8}\le \frac{20}{x}<\frac{1}{4}$

$\therefore 80<x<100 \quad \cdots\cdots$ ㉥

㉤, ㉥에서 $\quad 80<x<100$

이상에서 $\quad 40<x<64$ 또는 $80<x<100$

Step ③ 따라서 구하는 자연수 x의 개수는

$23+19=42$ 답 42

1등급 비밀노트

$[f(x)]$를 포함한 식이 주어지면
(i) $f(x)$의 값의 범위를 찾는다.
(ii) (i)의 범위에서 $[f(x)]$의 값을 구한다.
(iii) $[f(x)]$의 값을 대입하여 주어진 조건을 만족시키는 x의 값을 구한다.

144

전략 $\frac{1}{x}=t$로 놓고 주어진 식을 변형하여 극한값을 구한다.

Step ① $\frac{1}{x}=t$로 놓으면 $x\to\infty$일 때 $t\to 0+$이므로

$\lim_{x\to\infty} f(x)(e^{\frac{k}{x}}-1)=\lim_{t\to 0+} f\left(\frac{1}{t}\right)(e^{kt}-1)$

$=\lim_{t\to 0+} f\left(\frac{1}{t}\right)\cdot\frac{e^{kt}-1}{kt}\cdot kt$

$=\lim_{t\to 0+} ktf\left(\frac{1}{t}\right)$

$=k\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$

Step ② $g(x)=\sum_{k=1}^{20}(e^{\frac{k}{x}}-1)$이므로

$\lim_{x\to\infty} f(x)g(x)$

$=\lim_{x\to\infty} f(x)\{(e^{\frac{1}{x}}-1)+(e^{\frac{2}{x}}-1)+\cdots+(e^{\frac{20}{x}}-1)\}$

$=\lim_{x\to\infty}\{f(x)(e^{\frac{1}{x}}-1)+f(x)(e^{\frac{2}{x}}-1)$

$+\cdots+f(x)(e^{\frac{20}{x}}-1)\}$

$=\lim_{x\to\infty} f(x)(e^{\frac{1}{x}}-1)+\lim_{x\to\infty} f(x)(e^{\frac{2}{x}}-1)$

$+\cdots+\lim_{x\to\infty} f(x)(e^{\frac{20}{x}}-1)$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}+2\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}+\cdots+20\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$

$=(1+2+\cdots+20)\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$

$=\frac{20\cdot 21}{2}\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=210\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$

Step ③ 즉 $210\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=21$이므로

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\frac{1}{10}$

$\therefore \lim_{x\to\infty}\frac{x}{f(x)}=10$ 답 ③

Ⅱ 삼각함수

04 삼각함수 본책 32쪽

145 ㄱ. $830^\circ=360^\circ\times2+110^\circ$이므로

$360^\circ\times n+110^\circ$ (n은 정수)

ㄴ. $-210^\circ=360^\circ\times(-1)+150^\circ$이므로 -210°는 제2사분면의 각이다.

ㄷ. $410^\circ=360^\circ\times1+50^\circ$,

$-670^\circ=360^\circ\times(-2)+50^\circ$

이므로 50°, 410°, -670°를 나타내는 동경은 모두 일치한다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ㄱ, ㄷ

146 θ가 제1사분면의 각이므로

$360^\circ\times n<\theta<360^\circ\times n+90^\circ$ (n은 정수)

$\therefore 120^\circ\times n<\dfrac{\theta}{3}<120^\circ\times n+30^\circ$

(i) $n=3k$ (k는 정수)일 때,

$360^\circ\times k<\dfrac{\theta}{3}<360^\circ\times k+30^\circ$

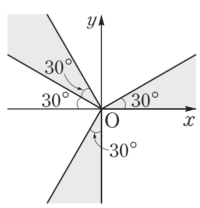
(ii) $n=3k+1$ (k는 정수)일 때,

$360^\circ\times k+120^\circ<\dfrac{\theta}{3}<360^\circ\times k+150^\circ$

(iii) $n=3k+2$ (k는 정수)일 때,

$360^\circ\times k+240^\circ<\dfrac{\theta}{3}<360^\circ\times k+270^\circ$

이상에서 $\dfrac{\theta}{3}$를 나타내는 동경이 속하는 영역은 오른쪽 그림의 어두운 부분(경계선 제외)과 같다.



답 ④

1등급 비밀노트

임의의 정수는 양의 정수 k로 나누었을 때의 나머지에 의하여

$kn,\ kn+1,\ kn+2,\ \cdots,\ kn+(k-1)$ (n은 정수)

로 분류되고, 모든 정수는 이 중 하나의 꼴로 나타낼 수 있다.

147 각 θ를 나타내는 동경과 각 5θ를 나타내는 동경이 원점에 대하여 대칭이므로

$5\theta-\theta=360^\circ\times n+180^\circ$ (n은 정수)

$4\theta=360^\circ\times n+180^\circ$

$\therefore \theta=90^\circ\times n+45^\circ$ …… ㉠

$-180^\circ<\theta<180^\circ$에서 $-180^\circ<90^\circ\times n+45^\circ<180^\circ$이므로

$-225^\circ<90^\circ\times n<135^\circ$

$-\dfrac{5}{2}<n<\dfrac{3}{2}$

$\therefore n=-2,\ -1,\ 0,\ 1$

일품 BOX

θ가 어느 사분면의 각인지 구할 때에는

$\theta=360^\circ\times n+\alpha^\circ$

(n은 정수, $0^\circ\le\alpha^\circ<360^\circ$)

로 나타낸 후

① $0^\circ<\alpha^\circ<90^\circ$ ➡ 제1사분면의 각

② $90^\circ<\alpha^\circ<180^\circ$ ➡ 제2사분면의 각

③ $180^\circ<\alpha^\circ<270^\circ$ ➡ 제3사분면의 각

④ $270^\circ<\alpha^\circ<360^\circ$ ➡ 제4사분면의 각

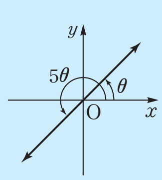
임을 이용한다.

원에서 한 호에 대한 원주각의 크기는 그 호에 대한 중심각의 크기의 $\dfrac{1}{2}$배이다.

호도법과 육십분법의 관계

1 라디안$=\dfrac{180^\circ}{\pi}$

$1^\circ=\dfrac{\pi}{180}$ 라디안



이것을 ㉠에 대입하면

$\theta=-135^\circ,\ -45^\circ,\ 45^\circ,\ 135^\circ$

따라서 θ의 최댓값과 최솟값의 차는

$135^\circ-(-135^\circ)=270^\circ$ 답 ⑤

148 각 θ를 나타내는 동경과 각 4θ를 나타내는 동경이 x축에 대하여 대칭이므로

$\theta+4\theta=360^\circ\times n$ (n은 정수)

$5\theta=360^\circ\times n$ $\therefore \theta=72^\circ\times n$ …… ㉠

$90^\circ<\theta<180^\circ$에서 $90^\circ<72^\circ\times n<180^\circ$이므로

$\dfrac{5}{4}<n<\dfrac{5}{2}$ $\therefore n=2$

이것을 ㉠에 대입하면

$\theta=144^\circ$ 답 ③

149 각 2θ를 나타내는 동경과 각 3θ를 나타내는 동경이 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로

$2\theta+3\theta=360^\circ\times n+90^\circ$ (n은 정수)

$5\theta=360^\circ\times n+90^\circ$

$\therefore \theta=72^\circ\times n+18^\circ$ …… ㉠

$180^\circ<\theta<360^\circ$에서 $180^\circ<72^\circ\times n+18^\circ<360^\circ$이므로

$162^\circ<72^\circ\times n<342^\circ$, $\dfrac{9}{4}<n<\dfrac{19}{4}$

$\therefore n=3$ 또는 $n=4$

이것을 ㉠에 대입하면

$\theta=234^\circ$ 또는 $\theta=306^\circ$

따라서 구하는 모든 θ의 값의 합은

$234^\circ+306^\circ=540^\circ$ 답 540°

150 $\angle$ABC는 호 AC에 대한 원주각이고 $\angle$AOC는 호 AC에 대한 중심각이므로 $\angle AOC=2\theta$

반지름의 길이가 1이므로 부채꼴 AOC의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\cdot1^2\cdot2\theta=\theta$ 답 ④

151 부채꼴의 중심각의 크기는 320°이므로

$320\times\dfrac{\pi}{180}=\dfrac{16}{9}\pi$

부채꼴의 반지름의 길이를 r라 하면

$\dfrac{1}{2}r^2\cdot\dfrac{16}{9}\pi=32\pi,\quad r^2=36$

$\therefore r=6$ ($\because r>0$)

또 부채꼴의 호의 길이를 l이라 하면

$l=6\cdot\dfrac{16}{9}\pi=\dfrac{32}{3}\pi$

따라서 부채꼴의 둘레의 길이는

$2\cdot6+\dfrac{32}{3}\pi=12+\dfrac{32}{3}\pi$ 답 $12+\dfrac{32}{3}\pi$

152 부채꼴의 반지름의 길이를 r, 호의 길이를 l이라 하면 둘레의 길이가 24이므로

$2r+l=24 \qquad \therefore l=24-2r$

이때 $24-2r>0$, $r>0$이므로 $\quad 0<r<12$

부채꼴의 넓이를 S라 하면

$$S=\frac{1}{2}rl=\frac{1}{2}r(24-2r)$$
$$=-r^2+12r=-(r-6)^2+36\ (0<r<12)$$

따라서 $r=6$일 때 S는 최댓값 36을 갖는다.

이때 부채꼴의 중심각의 크기를 θ라 하면

$$36=\frac{1}{2}\cdot 6^2\cdot\theta \qquad \therefore \theta=2$$

따라서 $a=6$, $b=2$이므로 $\quad a+b=8$

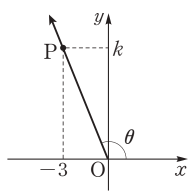
답 8

일품 BOX

(부채꼴의 둘레의 길이)
=(반지름의 길이)×2
+(호의 길이)

153 $\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{(-3)^2+k^2}$

$=\sqrt{k^2+9}$



이므로 $\quad \cos\theta=-\dfrac{3}{\sqrt{k^2+9}}$

$\cos\theta=-\dfrac{1}{3}$에서

$$-\frac{3}{\sqrt{k^2+9}}=-\frac{1}{3}$$

$\sqrt{k^2+9}=9, \qquad k^2+9=81$

$k^2=72 \qquad \therefore k=6\sqrt{2}\ (\because k>0)$

답 $6\sqrt{2}$

154 점 P는 원 $x^2+y^2=25$와 직선 $y=-\dfrac{3}{4}x$의 교점이므로

$x^2+\left(-\dfrac{3}{4}x\right)^2=25, \qquad x^2=16$

$\therefore x=-4\ (\because x<0)$

따라서 점 P의 좌표는 $(-4,\ 3)$이고 $\overline{\mathrm{OP}}=5$이므로

$\csc\theta=\dfrac{5}{3}$, $\cot\theta=-\dfrac{4}{3}$

$\therefore \csc\theta+\cot\theta=\dfrac{1}{3}$

답 ②

• $\tan\theta$는 직선 $y=-\dfrac{3}{4}x$의 기울기와 같으므로 $\tan\theta=-\dfrac{3}{4}$

$\overline{\mathrm{OP}}=r$인 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$에 대하여 동경 OP가 나타내는 일반각을 θ라 할 때

$\csc\theta=\dfrac{r}{y}\ (y\neq 0)$

$\cot\theta=\dfrac{x}{y}\ (y\neq 0)$

155 $\dfrac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}=2$에서

$1-\tan\theta=2(1+\tan\theta)$

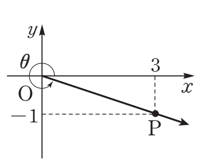
$3\tan\theta=-1 \qquad \therefore \tan\theta=-\dfrac{1}{3}$

$\sin\theta<0$이고 $\tan\theta=-\dfrac{1}{3}<0$이므로 θ는 제4사분면의 각이다.

오른쪽 그림에서

$\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{3^2+(-1)^2}$

$=\sqrt{10}$



이므로

$\sin\theta=-\dfrac{1}{\sqrt{10}}$, $\cos\theta=\dfrac{3}{\sqrt{10}}$

$\therefore 10(\sin\theta+\cos\theta)=10\left(-\dfrac{1}{\sqrt{10}}+\dfrac{3}{\sqrt{10}}\right)$

$=10\cdot\dfrac{2}{\sqrt{10}}$

$=2\sqrt{10}$

답 $2\sqrt{10}$

156 θ가 제3사분면의 각이므로

$\sin\theta<0,\ \cos\theta<0,\ \tan\theta>0$

$\therefore |\sin\theta|+|\tan\theta|-\sqrt{(\tan\theta-\cos\theta)^2}$
$+\sqrt{(\sin\theta+\cos\theta)^2}$
$=|\sin\theta|+|\tan\theta|-|\tan\theta-\cos\theta|$
$+|\sin\theta+\cos\theta|$
$=-\sin\theta+\tan\theta-(\tan\theta-\cos\theta)-(\sin\theta+\cos\theta)$
$=-2\sin\theta$

답 ②

$\sqrt{a^2}=|a|$
$=\begin{cases} a\ (a\geq 0) \\ -a\ (a<0)\end{cases}$

157 (i) $\sin\theta\sec\theta<0$일 때,

$\sin\theta$와 $\sec\theta$의 값의 부호가 서로 다르므로 θ는 제2사분면 또는 제4사분면의 각이다.

(ii) $\sec\theta\tan\theta>0$일 때,

$\sec\theta$와 $\tan\theta$의 값의 부호가 서로 같으므로 θ는 제1사분면 또는 제2사분면의 각이다.

(i), (ii)에서 θ는 제2사분면의 각이다.

답 ②

158 $\dfrac{4\sin x-\cos x}{\sin x+2\cos x}=\dfrac{\dfrac{4\sin x}{\cos x}-\dfrac{\cos x}{\cos x}}{\dfrac{\sin x}{\cos x}+\dfrac{2\cos x}{\cos x}}$

$=\dfrac{4\tan x-1}{\tan x+2}$

이므로 $\dfrac{4\tan x-1}{\tan x+2}=3$에서

$4\tan x-1=3(\tan x+2) \qquad \therefore \tan x=7$

$\therefore \sec^2 x=1+\tan^2 x=50$

답 50

159 $x^2-x+k=0$의 두 근이 $\sin\theta+\cos\theta$, $\sin\theta-\cos\theta$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(\sin\theta+\cos\theta)+(\sin\theta-\cos\theta)$
$=2\sin\theta=1 \qquad \cdots\cdots ㉠$

$(\sin\theta+\cos\theta)(\sin\theta-\cos\theta)$
$=\sin^2\theta-\cos^2\theta=k \qquad \cdots\cdots ㉡$

㉠에서 $\sin\theta=\dfrac{1}{2}$이므로 ㉡에서

$k=\sin^2\theta-(1-\sin^2\theta)$

$=2\sin^2\theta-1=2\cdot\dfrac{1}{4}-1=-\dfrac{1}{2}$

답 ②

이차방정식의 근과 계수의 관계

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라 하면

$\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$,

$\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$

160 $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{2}$의 양변을 제곱하면

$(\sin\theta+\cos\theta)^2=\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta$

$=1+2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{4}$

$\therefore \sin\theta\cos\theta=-\dfrac{3}{8}$

$\therefore \tan\theta+\cot\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}+\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$

$=\dfrac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$

$=\dfrac{1}{\sin\theta\cos\theta}=-\dfrac{8}{3}$ 답 $-\dfrac{8}{3}$

161 색칠한 부분을 일반각으로 나타내면

$360^\circ\times n+300^\circ\le\theta\le360^\circ\times n+330^\circ$ (n은 정수)

$360^\circ\times3n+900^\circ\le3\theta\le360^\circ\times3n+990^\circ$

$\therefore 360^\circ\times(3n+2)+180^\circ\le3\theta$

$\le360^\circ\times(3n+2)+270^\circ$

따라서 3θ를 나타내는 동경이 속하는 영역을 좌표평면 위에 나타낸 것은 ③이다. 답 ③

162 $170^\circ\times n+10^\circ$가 나타내는 서로 다른 동경의 개수는

$170^\circ\times n=360^\circ\times m$ (m은 정수)

을 만족시키는 최소의 자연수 n의 값과 같다.

$\therefore n=\dfrac{36}{17}m$

이때 m, n이 정수이므로 자연수 n의 최솟값은 36

따라서 구하는 서로 다른 동경의 개수는 36이다. 답 36

163 문제 이해 θ는 둔각이므로

$90^\circ<\theta<180^\circ$ ● 20%

해결 과정 θ와 7θ의 동경이 일치하므로

$7\theta-\theta=360^\circ\times n$ (n은 정수)

$6\theta=360^\circ\times n$ $\quad\therefore \theta=60^\circ\times n$ ● 50%

답 구하기 $90^\circ<60^\circ\times n<180^\circ$이므로

$\dfrac{3}{2}<n<3$ $\quad\therefore n=2$

$\therefore \theta=120^\circ$ ● 30%

답 120°

164 ㄱ. 두 동경 OP, OQ가 x축에 대하여 대칭이므로 $\alpha=360^\circ\times k+\theta$ (k는 정수)라 하면

$\beta=360^\circ\times l-\theta$ (l은 정수)

$\therefore \alpha+\beta=360^\circ\times(k+l)$

이때 $k+l=n$ (n은 정수)으로 놓으면

$\alpha+\beta=360^\circ\times n$

ㄴ. 두 동경 OP, OQ가 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 $\alpha=360^\circ\times k+\theta$ (k는 정수)라 하면

$\beta=360^\circ\times l+90^\circ-\theta$ (l은 정수)

$\therefore \alpha+\beta=360^\circ\times(k+l)+90^\circ$

이때 $k+l=n$ (n은 정수)으로 놓으면

$\alpha+\beta=360^\circ\times n+90^\circ$

일품 BOX

두 각 α, β를 나타내는 동경이 원점에 대하여 대칭
➡ $\alpha-\beta$
$=360^\circ\times n+180^\circ$
(단, n은 정수)

$n=1$인 경우
$170^\circ\times1+10^\circ=180^\circ$
$n=37$인 경우
$170^\circ\times37+10^\circ$
$=6300^\circ$
$6300^\circ=360^\circ\times17+180^\circ$
이므로 두 경우의 동경이 같다.

점 $(x_1,\ y_1)$과 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리는
$\dfrac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$\triangle ABC$는 이등변삼각형이므로
$\angle ACB$
$=\pi-\left(\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi}{6}\right)$
$=\dfrac{2}{3}\pi$

ㄷ. $\alpha=855^\circ$, $\beta=-405^\circ$에서

$\alpha-\beta=855^\circ-(-405^\circ)=1260^\circ$

$\therefore \alpha-\beta=1260^\circ=360^\circ\times3+180^\circ$

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ⑤

165 문제 이해 부채꼴의 반지름의 길이를 r, 호의 길이를 l이라 하면 둘레의 길이가 40이므로

$2r+l=40$

$\therefore l=40-2r$

이때 $40-2r>0$, $r>0$이므로

$0<r<20$ ● 40%

해결 과정 부채꼴의 넓이를 S라 하면

$S=\dfrac{1}{2}rl=\dfrac{1}{2}r(40-2r)$

$=-r^2+20r$

$=-(r-10)^2+100$ $(0<r<20)$ ● 40%

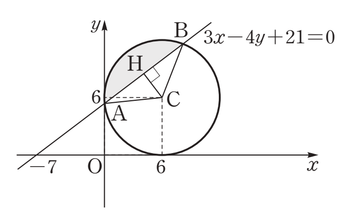
답 구하기 따라서 $r=10$일 때 S는 최댓값 100을 가지므로

$a=10,\ b=100$

$\therefore a+b=10+100=110$ ● 20%

답 110

166 원 $(x-6)^2+(y-6)^2=36$과 직선 $3x-4y+21=0$의 교점을 A, B라 하고 원의 중심을 C, 점 C에서 직선 $3x-4y+21=0$에 내린 수선의 발을 H라 하면 주어진 연립부등식의 영역은 다음 그림의 어두운 부분(경계선 포함)과 같다.



이때 $\overline{CA}=6$, $\overline{CH}=\dfrac{|3\cdot6-4\cdot6+21|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=3$이므로

$\angle CAH=\theta$라 하면

$\sin\theta=\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}$

$\therefore \theta=\dfrac{\pi}{6}$

따라서 $\angle ACB=\dfrac{2}{3}\pi$이므로 부채꼴 CAB의 호 AB의 길이는

$\overset{\frown}{AB}=6\cdot\dfrac{2}{3}\pi=4\pi$

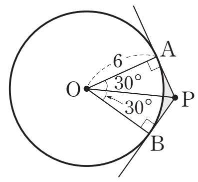
또 $\overline{AH}=\sqrt{6^2-3^2}=3\sqrt{3}$이므로

$\overline{AB}=6\sqrt{3}$

따라서 구하는 둘레의 길이는

$4\pi+6\sqrt{3}$ 답 ④

167 직각삼각형 OAP에서



$\tan 30° = \dfrac{\overline{AP}}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

이고 $\overline{AP}=\overline{BP}$이므로

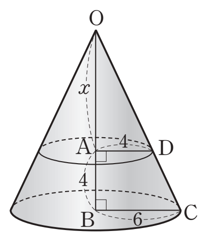
$\overline{AP}=\overline{BP}=2\sqrt{3}$

따라서 어두운 부분의 넓이는 사각형 AOBP의 넓이에서 부채꼴 AOB의 넓이를 뺀 것과 같으므로

$2\cdot\dfrac{1}{2}\cdot 6\cdot 2\sqrt{3}-\dfrac{1}{2}\cdot 6^2\cdot\dfrac{\pi}{3}=12\sqrt{3}-6\pi$

답 ④

168 (해결 과정) 오른쪽 그림에서 모선의 연장선이 만나는 점을 O, $\overline{OA}=x$라 하면



$x:4=(x+4):6$

$6x=4(x+4)$, $\quad 2x=16$

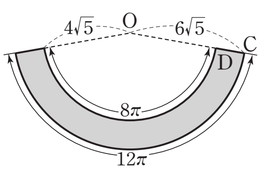
$\therefore x=8$ ● 40%

한편 두 직각삼각형 OAD, OBC에서

$\overline{OD}=\sqrt{8^2+4^2}=4\sqrt{5}$,

$\overline{OC}=\sqrt{12^2+6^2}=6\sqrt{5}$ ● 40%

(답 구하기) 따라서 오른쪽 그림에서 직원뿔대의 옆면의 넓이는



$\dfrac{1}{2}\cdot 6\sqrt{5}\cdot 12\pi$

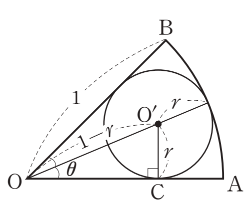
$-\dfrac{1}{2}\cdot 4\sqrt{5}\cdot 8\pi$

$=36\sqrt{5}\pi-16\sqrt{5}\pi$

$=20\sqrt{5}\pi$ ● 20%

답 $20\sqrt{5}\pi$

169 오른쪽 그림과 같이 부채꼴 OAB의 중심각의 이등분선은 내접원의 중심 O′을 지나므로



$\overline{OO'}=1-r$

또 점 O′에서 $\overline{OA}$에 내린 수선의 발을 C라 하면 직각삼각형 O′OC에서

$\sin\theta=\dfrac{r}{1-r}$, $\quad (1-r)\sin\theta=r$

$\sin\theta-r\sin\theta=r$, $\quad (1+\sin\theta)r=\sin\theta$

$\therefore r=\dfrac{\sin\theta}{1+\sin\theta}$

답 ③

170 (해결 과정) $\overline{OP}=\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=2$이므로

$\overline{PQ}=\overline{PR}=2$ ● 20%

이때 점 P의 좌표가 $(1, \sqrt{3})$이므로 점 Q의 좌표는

$(1+2, \sqrt{3})$, 즉 $(3, \sqrt{3})$

일품 BOX

• $60\cdot\dfrac{\pi}{180}=\dfrac{\pi}{3}$

부채꼴의 호의 길이
반지름의 길이가 r, 중심각의 크기가 θ인 부채꼴의 호의 길이 l은
$l=r\theta$

• 삼각형의 닮음을 이용하여 x의 값을 구한다.

• $\sin\theta+\cos\theta>0$에서 $\cos\theta\neq 0$이므로 양변을 $\cos\theta$로 나누면
$\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}+1>0$

• 사각형 OAQP, OPRB가 모두 마름모이므로 네 변의 길이가 모두 같다.

음수의 제곱근의 성질
0이 아닌 두 실수 a, b에 대하여
① $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$
$\Rightarrow a<0$, $b<0$
② $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\dfrac{a}{b}}$
$\Rightarrow a>0$, $b<0$

이고, 점 R의 좌표는

$(1-2, \sqrt{3})$, 즉 $(-1, \sqrt{3})$ ● 30%

따라서

$\overline{OQ}=\sqrt{3^2+(\sqrt{3})^2}=2\sqrt{3}$

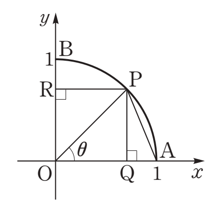
$\overline{OR}=\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}=2$ ● 20%

(답 구하기) $\therefore \sin\alpha+\cos\beta=\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}+\dfrac{-1}{2}$

$=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}=0$ ● 30%

답 0

171 ㄱ. 오른쪽 그림의 삼각형 POQ에서 $\overline{OP}=1$이므로



$\overline{PQ}=\sin\theta$

호 AP의 길이는 $1\cdot\theta=\theta$이고, $\overline{PQ}<\widehat{AP}$이므로

$\sin\theta<\theta$

ㄴ. 호 AB의 길이는 $\dfrac{\pi}{2}$이므로 호 BP의 길이는

$\dfrac{\pi}{2}-\theta$

$\overline{PR}=\overline{OQ}=\cos\theta$이고, $\overline{PR}<\widehat{BP}$이므로

$\cos\theta<\dfrac{\pi}{2}-\theta \qquad \therefore \theta+\cos\theta<\dfrac{\pi}{2}$

ㄷ. $A(1, 0)$, $P(\cos\theta, \sin\theta)$이므로

$\overline{AP}=\sqrt{(\cos\theta-1)^2+\sin^2\theta}$

$=\sqrt{\cos^2\theta-2\cos\theta+1+\sin^2\theta}$

$=\sqrt{2(1-\cos\theta)}$

이때 $\overline{PQ}<\overline{AP}$이므로 $\quad \sin\theta<\sqrt{2(1-\cos\theta)}$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

1등급 비밀노트

주어진 원의 반지름의 길이가 1이므로 부채꼴의 호의 길이를 θ, 원 위의 한 점에서 x축, y축에 내린 수선의 길이를 각각 $\sin\theta$, $\cos\theta$로 나타낼 수 있다.
즉 비교하는 값을 선분 또는 호의 길이로 바꾸어 생각해 본다.

172 $\sin\theta<0$, $\cos\theta>0$에서 θ는 제4사분면의 각이므로

$\tan\theta<0$, $\tan\theta-1<0$

또 $\cos\theta>0$, $\sin\theta+\cos\theta>0$이므로

$\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}+1>0 \qquad \therefore \tan\theta+1>0$

$\therefore \sqrt{\tan^2\theta}+\sqrt{(\tan\theta-1)^2}+\sqrt{(\tan\theta+1)^2}$

$=-\tan\theta-(\tan\theta-1)+(\tan\theta+1)$

$=2-\tan\theta$

답 ④

173 $\sqrt{\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}}=-\dfrac{\sqrt{\sin\theta}}{\sqrt{\cos\theta}}$에서

$\sin\theta>0$, $\cos\theta<0$

따라서 θ가 제 2 사분면의 각이므로

$$2n\pi+\frac{\pi}{2}<\theta<2n\pi+\pi \ (n\text{은 정수})$$

$$\therefore n\pi+\frac{\pi}{4}<\frac{\theta}{2}<n\pi+\frac{\pi}{2}$$

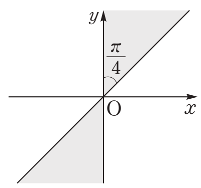
(i) $n=2k$ (k는 정수) 일 때,

$$2k\pi+\frac{\pi}{4}<\frac{\theta}{2}<2k\pi+\frac{\pi}{2}$$

(ii) $n=2k+1$ (k는 정수) 일 때,

$$2k\pi+\frac{5}{4}\pi<\frac{\theta}{2}<2k\pi+\frac{3}{2}\pi$$

따라서 $\frac{\theta}{2}$가 나타내는 동경이 속하는 영역은 오른쪽 그림의 어두운 부분(경계선 제외)과 같다.



답 ②

174 $\frac{1}{1+\sin\theta}+\frac{1}{1+\cos\theta}+\frac{1}{1-\sin\theta}+\frac{1}{1-\cos\theta}$

$=\left(\frac{1}{1+\sin\theta}+\frac{1}{1-\sin\theta}\right)+\left(\frac{1}{1+\cos\theta}+\frac{1}{1-\cos\theta}\right)$

$=\frac{2}{1-\sin^2\theta}+\frac{2}{1-\cos^2\theta}$

$=\frac{2}{\cos^2\theta}+\frac{2}{\sin^2\theta}$

$=2\sec^2\theta+2\csc^2\theta$

$=2(1+\tan^2\theta)+2(1+\cot^2\theta)$

$=2(4-2\sqrt{2})+2(4+2\sqrt{2})$

$=(8-4\sqrt{2})+(8+4\sqrt{2})=16$

답 16

175 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로 주어진 등식은

$5\sin^2\theta-3\sin\theta\cos\theta-(\sin^2\theta+\cos^2\theta)=0$

$4\sin^2\theta-3\sin\theta\cos\theta-\cos^2\theta=0$

양변을 $\cos^2\theta$로 나누면

$4\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)^2-3\cdot\frac{\sin\theta}{\cos\theta}-1=0$

$4\tan^2\theta-3\tan\theta-1=0$

$(4\tan\theta+1)(\tan\theta-1)=0$

$\tan\theta<0$이므로 $\tan\theta=-\frac{1}{4}$

답 $-\frac{1}{4}$

176 해결 과정 $\sin\theta-\cos\theta=\frac{3}{5}$에서 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{9}{25}$

$1-2\sin\theta\cos\theta=\frac{9}{25}$

$\therefore \sin\theta\cos\theta=\frac{8}{25}$ ● 30%

$\therefore (\sin\theta+\cos\theta)^2=1+2\sin\theta\cos\theta$

$=1+\frac{16}{25}=\frac{41}{25}$

이때 θ가 제 1 사분면의 각이므로 $\sin\theta+\cos\theta>0$

$\therefore \sin\theta+\cos\theta=\frac{\sqrt{41}}{5}$ ● 30%

답 구하기 $\therefore \sin^4\theta-\cos^4\theta$

$=(\sin^2\theta+\cos^2\theta)(\sin^2\theta-\cos^2\theta)$

$=\sin^2\theta-\cos^2\theta$

$=(\sin\theta+\cos\theta)(\sin\theta-\cos\theta)$

$=\frac{\sqrt{41}}{5}\cdot\frac{3}{5}$

$=\frac{3\sqrt{41}}{25}$ ● 40%

답 $\frac{3\sqrt{41}}{25}$

177 $\frac{\cos^2x-\sin^2x}{1-2\sin x\cos x}$

$=\frac{\cos^2x-\sin^2x}{\boxed{\sin^2x+\cos^2x}-2\sin x\cos x}$

$=\frac{(\cos x+\sin x)(\cos x-\sin x)}{(\cos x-\sin x)^2}$

$=\frac{\cos x+\sin x}{\boxed{\cos x-\sin x}}$

$=\frac{1+\frac{\sin x}{\cos x}}{1-\frac{\sin x}{\cos x}}$

$=\frac{1+\boxed{\tan x}}{1-\boxed{\tan x}}$

$\therefore$ (가) $\sin^2x+\cos^2x$ (나) $\cos x-\sin x$ (다) $\tan x$

답 ③

178 문제 이해 동경 OP가 x축의 양의 부분과 이루는 각의 크기가 θ이므로 점 P의 좌표는 $(\cos\theta, \sin\theta)$이다. ● 20%

해결 과정 직선 l의 방정식은

$y-\sin\theta=-(x-\cos\theta)$,

즉 $y=-x+\sin\theta+\cos\theta$

직선 l과 포물선 $y=x^2+\frac{3}{4}$이 접하므로 이차방정식

$-x+\sin\theta+\cos\theta=x^2+\frac{3}{4}$, 즉

$x^2+x+\frac{3}{4}-\sin\theta-\cos\theta=0$의 판별식을 D라 하면

$D=1^2-4\left(\frac{3}{4}-\sin\theta-\cos\theta\right)=0$

$-2+4(\sin\theta+\cos\theta)=0$

$\therefore \sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{2}$ ● 50%

답 구하기 $\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{2}$의 양변을 제곱하면

$(\sin\theta+\cos\theta)^2=\frac{1}{4}$

일품 BOX

θ가 제 1 사분면의 각이므로

$\sin\theta>0$, $\cos\theta>0$

$\therefore \sin\theta+\cos\theta>0$

$0<x<\frac{\pi}{4}$에서

$\cos x\neq0$

$\tan\theta=\sqrt{2}-1$이므로

$1+\tan^2\theta$

$=1+(\sqrt{2}-1)^2$

$=4-2\sqrt{2}$

$\cot\theta=\frac{1}{\sqrt{2}-1}$

$=\sqrt{2}+1$

이므로

$1+\cot^2\theta$

$=1+(\sqrt{2}+1)^2$

$=4+2\sqrt{2}$

이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=g(x)$가 접한다.

➡ 이차방정식 $f(x)=g(x)$의 판별식을 D라 할 때 $D=0$

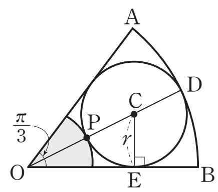
$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{4}$

$1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{4}$

$\therefore \sin\theta\cos\theta=-\frac{3}{8}$ ● 30%

답 $-\frac{3}{8}$

179 오른쪽 그림과 같이 직선 OC가 호 AB와 만나는 점을 D, 원의 중심 C에서 선분 OB에 내린 수선의 발을 E라 하고, 원 C의 반지름의 길이를 r라 하자.



부채꼴 AOB의 반지름의 길이를 R라 하면 호 AB의 길이가 3π이므로

$3\pi=R\cdot\frac{\pi}{3}$ $\therefore R=9$

즉 $\overline{OD}=9$, $\overline{CD}=\overline{CE}=r$이므로 $\overline{OC}=9-r$

직각삼각형 COE에서 $\angle COE=\frac{\pi}{6}$이므로

$\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\overline{CE}}{\overline{OC}}$에서 $\frac{1}{2}=\frac{\overline{CE}}{\overline{OC}}$

$\frac{1}{2}=\frac{r}{9-r}$, $9-r=2r$ $\therefore r=3$

$\therefore \overline{OP}=R-2r=9-6=3$

반지름의 길이가 3이고, 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{3}$인 부채꼴의 넓이는

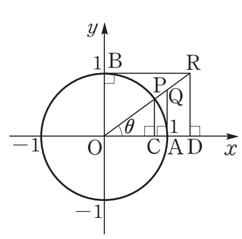
부채꼴의 넓이
반지름의 길이가 r, 중심각의 크기가 θ인 부채꼴의 넓이 S는
$S=\frac{1}{2}r^2\theta$

$\frac{1}{2}\cdot3^2\cdot\frac{\pi}{3}=\frac{3}{2}\pi$

따라서 $k=\frac{3}{2}$이므로 $6k=6\cdot\frac{3}{2}=9$

답 9

180 오른쪽 그림에서 $\angle POC=\theta$라 하자.



ㄱ. 삼각형 POC에서

$\cos\theta=\frac{\overline{OC}}{\overline{OP}}=\overline{OC}$

삼각형 QOA에서

$\cos\theta=\frac{\overline{OA}}{\overline{OQ}}=\frac{1}{\overline{OQ}}$

$\therefore \overline{OQ}=\frac{1}{\cos\theta}$

$\therefore \overline{OC}\times\overline{OQ}=\cos\theta\times\frac{1}{\cos\theta}=1$

ㄴ. 삼각형 POC에서 $\sin\theta=\frac{\overline{PC}}{\overline{OP}}=\overline{PC}$

삼각형 ROD에서 $\tan\theta=\frac{\overline{RD}}{\overline{OD}}=\frac{1}{\overline{OD}}$

$\therefore \overline{OD}=\frac{1}{\tan\theta}=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

$\therefore \overline{PC}\times\overline{OD}=\sin\theta\times\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

$=\cos\theta=\overline{OC}$

ㄷ. 삼각형 QOA에서 $\tan\theta=\frac{\overline{AQ}}{\overline{OA}}=\overline{AQ}$

삼각형 ROD에서 $\sin\theta=\frac{\overline{RD}}{\overline{OR}}=\frac{1}{\overline{OR}}$

$\therefore \overline{OR}=\frac{1}{\sin\theta}$

$\therefore \overline{AQ}\times\overline{OR}=\tan\theta\times\frac{1}{\sin\theta}$

$=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\times\frac{1}{\sin\theta}$

$=\frac{1}{\cos\theta}=\overline{OQ}$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

1등급 비밀노트

길이가 1인 변을 포함한 직각삼각형을 찾아 다른 변의 길이를 삼각함수로 나타내어 본다. 이때 삼각함수 사이의 관계를 이용하면 주어진 선분의 길이 사이의 관계를 찾을 수 있다.

181 $2\le a+b\le 12$이므로

$1\le a\le 6$, $1\le b\le 6$

$\frac{\pi}{3}\le\frac{a+b}{6}\pi\le 2\pi$

이때 $\cos\frac{a+b}{6}\pi<0$에서

$\cos\theta<0$에서 θ는 제2사분면 또는 제3사분면의 각이다.

$\frac{\pi}{2}<\frac{a+b}{6}\pi<\frac{3}{2}\pi$

$\therefore 3<a+b<9$

(i) $a+b=4$일 때,
(1, 3), (2, 2), (3, 1)의 3개

(ii) $a+b=5$일 때,
(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)의 4개

(iii) $a+b=6$일 때,
(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)의 5개

(iv) $a+b=7$일 때,
(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)의 6개

(v) $a+b=8$일 때,
(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)의 5개

이상에서 x의 값이 음수가 되도록 하는 순서쌍 (a, b)의 개수는

$3+4+5+6+5=23$

답 23

182 $\tan^4\theta+\sin^4\theta$

$a^2+b^2=(a-b)^2+2ab$

$=(\tan^2\theta-\sin^2\theta)^2+2\sin^2\theta\tan^2\theta$

이고

$$\tan^2\theta-\sin^2\theta=\sin^2\theta\left(\frac{1}{\cos^2\theta}-1\right)$$
$$=\sin^2\theta\cdot\frac{1-\cos^2\theta}{\cos^2\theta}$$
$$=\sin^2\theta\cdot\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}$$
$$=\sin^2\theta\tan^2\theta=\frac{9}{4}$$

$\therefore \tan^4\theta+\sin^4\theta$

$=(\tan^2\theta-\sin^2\theta)^2+2\sin^2\theta\tan^2\theta$

$=\left(\frac{9}{4}\right)^2+2\cdot\frac{9}{4}=\frac{153}{16}$

따라서 $p=16$, $q=153$이므로

$p+q=169$ 답 169

183 $\sin\theta+\cos\theta=2\sin\theta\cos\theta$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=4(\sin\theta\cos\theta)^2$

$1+2\sin\theta\cos\theta=4(\sin\theta\cos\theta)^2$

$\sin\theta\cos\theta=t$ $(t<0)$로 놓으면

> $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$에서
> $\sin\theta>0$, $\cos\theta<0$
> 이므로
> $\sin\theta\cos\theta<0$

$4t^2-2t-1=0$ $\quad\therefore t=\frac{1-\sqrt{5}}{4}$ $(\because t<0)$

따라서 $a=\frac{1}{4}$, $b=-\frac{1}{4}$이므로

$100(a-b)=100\cdot\frac{1}{2}=50$ 답 50

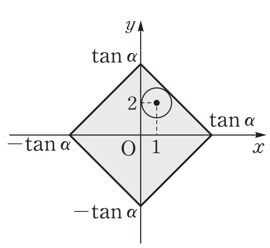
184 집합 A의 원소를 $(x,\ y)$라 하면 $x=1+\cos\theta$, $y=2+\sin\theta$이므로

$x-1=\cos\theta$, $y-2=\sin\theta$

$\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$에서 $\quad(x-1)^2+(y-2)^2=1$

즉 집합 A가 나타내는 영역은 중심이 $(1,\ 2)$이고 반지름의 길이가 1인 원이다.

이때 집합 B가 나타내는 영역은 오른쪽 그림의 어두운 부분(경계선 포함)과 같으므로 $A\subset B$이려면 원 $(x-1)^2+(y-2)^2=1$의 중심 $(1,\ 2)$에서 직선 $x+y=\tan\alpha$에 이르는 거리가 원의 반지름의 길이인 1보다 크거나 같아야 한다.



즉 $\frac{|3-\tan\alpha|}{\sqrt{2}}\geq1$에서

> 점 $(1,\ 2)$와 직선 $x+y-\tan\alpha=0$ 사이의 거리

$|3-\tan\alpha|\geq\sqrt{2}$

$3-\tan\alpha\geq\sqrt{2}$ 또는 $3-\tan\alpha\leq-\sqrt{2}$

$\therefore \tan\alpha\leq3-\sqrt{2}$ 또는 $\tan\alpha\geq3+\sqrt{2}$

이때 위의 그림에서 $\tan\alpha>2$이므로

$\tan\alpha\geq3+\sqrt{2}$

따라서 $\tan\alpha$의 최솟값은 $3+\sqrt{2}$이다. 답 ②

일품 BOX

05 삼각함수의 그래프

본책 39쪽

> $y=\sin(ax+b)$ 꼴의 함수는 $y=\sin a\left(x+\frac{b}{a}\right)$ 꼴로 변형한 후 그래프의 평행이동을 알아본다.

185 ③ $y=2\sin(\pi x-4\pi)=2\sin\pi(x-4)$의 그래프는 $y=2\sin\pi x$의 그래프를 x축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이다.

④ 주기는 $\frac{2\pi}{\pi}=2$이다.

⑤ $y=2\sin\pi x$의 그래프가 원점에 대하여 대칭이고, 주기가 2이므로 x축의 방향으로 4만큼 평행이동하여도 원점에 대하여 대칭이다. 답 ③

> 주기가 2이므로
> $f(x)=f(x+2)$
> $=f(x+4)$
> $=f(x+6)$
> ⋮

186 주어진 함수의 주기가 $\frac{\pi}{4}-\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{2}$이고 $a>0$이므로

$\frac{2\pi}{a}=\frac{\pi}{2}$ $\quad\therefore a=4$

따라서 주어진 함수의 식은 $y=\cos4(x+b)+1$이고, 그래프가 점 $(0,\ 0)$을 지나므로

$\cos4b+1=0$

$\cos4b=-1$

$0<b<\frac{\pi}{2}$에서 $0<4b<2\pi$이므로 $\quad 4b=\pi$

$\therefore b=\frac{\pi}{4}$

$\therefore ab=\pi$ 답 π

187 주기가 $\frac{\pi}{2}$이므로 $\quad\frac{\pi}{|a|}=\frac{\pi}{2}$ $\quad\therefore a=\pm2$

그런데 주어진 그래프는 $y=\tan2x$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 것이므로

> x 대신 $-x$를 대입

$y=\tan(-2x)$ $\quad\therefore a=-2$ 답 -2

188 ㄱ. $f(-x)=(-x)\tan(-x)$
$=(-x)(-\tan x)$
$=x\tan x=f(x)$

ㄴ. $f(-x)=\sin(-x)+\tan(-x)$
$=-\sin x-\tan x$
$=-(\sin x+\tan x)=-f(x)$

ㄷ. $f(-x)=\cos(-x)|\tan(-x)|$
$=\cos x|-\tan x|$
$=\cos x|\tan x|=f(x)$

이상에서 $f(-x)=f(x)$를 만족시키는 함수는 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

1등급 비밀노트

기함수와 우함수

① 기함수: $f(-x)=-f(x)$를 만족시키는 함수
➡ 그래프가 원점에 대하여 대칭이다.
예 $f(x)=\sin x$, $f(x)=\tan x$, $f(x)=x$, …

② 우함수: $f(-x)=f(x)$를 만족시키는 함수
➡ 그래프가 y축에 대하여 대칭이다.
예 $f(x)=\cos x$, $f(x)=x^2$, …

189 ㄱ. $\sin 203° = \sin(180°+23°) = -\sin 23°$

$\therefore \sin 23° + \sin 203° = \sin 23° - \sin 23° = 0$

ㄴ. $\cos 337° = \cos(360°-23°) = \cos 23°$

$\therefore \cos 23° + \cos 337° = \cos 23° + \cos 23°$
$= 2\cos 23° \neq 0$

ㄷ. $\tan 517° = \tan(360°+157°) = \tan 157°$
$= \tan(180°-23°)$
$= -\tan 23°$

$\therefore \tan 23° + \tan 517° = \tan 23° - \tan 23° = 0$

이상에서 값이 0인 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ④

190 $\tan\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = -\cot\theta = -\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

$= -\frac{\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} = \frac{4}{3}$

$\sec\left(\frac{3}{2}\pi+\theta\right) = \frac{1}{\cos\left(\frac{3}{2}\pi+\theta\right)} = \frac{1}{\sin\theta}$

$= \frac{1}{-\frac{3}{5}} = -\frac{5}{3}$

$\therefore \tan\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) - \sec\left(\frac{3}{2}\pi+\theta\right) = \frac{4}{3} - \left(-\frac{5}{3}\right)$
$= 3$

답 3

191 (주어진 식)

$= -\frac{\sin(\pi+\theta)}{\sin(2\pi-\theta)} - \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}{\cos(\pi+\theta)}$

$-\tan\left(\frac{3}{2}\pi-\theta\right)\tan(\pi+\theta)$

$= -\frac{-\sin\theta}{-\sin\theta} - \frac{\cos\theta}{-\cos\theta} - \cot\theta\tan\theta$

$= -1+1-1 = -1$

답 -1

$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$이므로
$\cot\theta\tan\theta$
$= \frac{1}{\tan\theta} \cdot \tan\theta$
$= 1$

192 $y = \sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{3}{4}\pi - x\right) + 1$

$= \sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left\{\frac{\pi}{2} - \left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right\} + 1$

$= 2\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right) + 1$

함수 $y=2\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+1$의 그래프는 함수 $y=2\sin x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{4}$만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

$0 \le x \le 2\pi$에서 $-\frac{\pi}{4} \le x-\frac{\pi}{4} \le \frac{7}{4}\pi$이므로 주어진 함수는 $x-\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$, 즉 $x=\frac{3}{4}\pi$일 때 최댓값 3을 갖는다.

$\therefore a = \frac{3}{4}\pi,\ b=3$

$\therefore ab = \frac{3}{4}\pi \cdot 3 = \frac{9}{4}\pi$

답 ④

$\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$

$y=\sin x$의 그래프를 y축의 방향으로 2배 한 것이다.

$2\sin\frac{\pi}{2}+1=3$

일품 BOX

193 $y = a\cos^2 x + a\sin x + b$
$= a(1-\sin^2 x) + a\sin x + b$
$= -a\sin^2 x + a\sin x + a + b$

$\sin x = t$로 놓으면 $-1 \le t \le 1$이고

$y = -at^2 + at + a + b = -a\left(t-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{4}a + b$

$-a<0$이므로 함수의 그래프는 위로 볼록한 포물선이다.

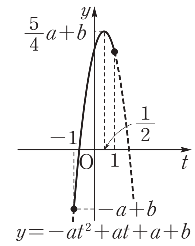
$-a(t^2-t)+a+b$
$= -a\left(t^2-t+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right)+a+b$
$= -a\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{a}{4}+a+b$
$= -a\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{4}a+b$

오른쪽 그림에서

$t=\frac{1}{2}$일 때　최댓값은 $\frac{5}{4}a+b$,

$t=-1$일 때　최솟값은 $-a+b$

이므로



$\frac{5}{4}a+b=6,\ -a+b=-3$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=4,\ b=1$　　$\therefore a+b=5$

답 ①

194 $y = \frac{|\tan x|-5}{|\tan x|+1}$에서 $|\tan x| = t$로 놓으면

$0 \le t \le 1$이고

$-\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{4}$에서
$-1 \le \tan x \le 1$이므로
$0 \le |\tan x| \le 1$

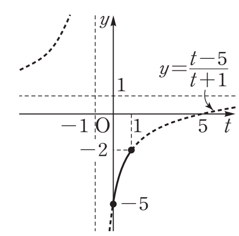
$y = \frac{t-5}{t+1} = \frac{(t+1)-6}{t+1} = -\frac{6}{t+1}+1$

오른쪽 그림에서

$t=1$일 때　최댓값은 -2,

$t=0$일 때　최솟값은 -5

이므로



$M=-2,\ m=-5$

$\therefore M-m=3$

답 3

1등급 비밀노트

유리함수의 그래프의 성질

유리함수 $y=\frac{k}{x-p}+q\ (k\neq 0)$의 그래프는 함수 $y=\frac{k}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 것이고, 점근선은 두 직선 $x=p,\ y=q$이다.

195 $2\cos^2 x + \sin x = 1$에서

$2(1-\sin^2 x) + \sin x = 1$

$2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$

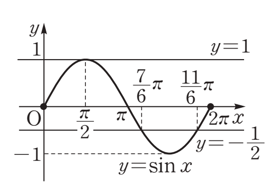
$(2\sin x + 1)(\sin x - 1) = 0$

$\therefore \sin x = -\frac{1}{2}$ 또는 $\sin x = 1$

$0 \le x \le 2\pi$이므로

$\sin x = -\frac{1}{2}$에서

$x = \frac{7}{6}\pi$ 또는 $x = \frac{11}{6}\pi$



$\sin x = 1$에서　$x = \frac{\pi}{2}$

따라서 $\alpha=\frac{\pi}{2},\ \beta=\frac{7}{6}\pi,\ \gamma=\frac{11}{6}\pi$이므로

$\gamma-\beta-\alpha = \frac{11}{6}\pi - \frac{7}{6}\pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6}$

답 $\frac{\pi}{6}$

196 $\left|\tan x-\frac{1}{2}\right|-\frac{1}{2}=0$에서

$\left|\tan x-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}$

$\tan x-\frac{1}{2}=\pm\frac{1}{2}$

$\therefore \tan x=0$ 또는 $\tan x=1$

$-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$이므로

$\tan x=0$에서 $\quad x=0$

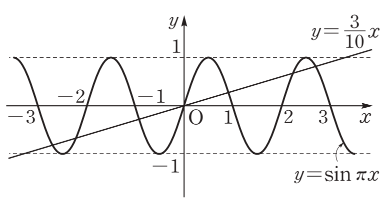
$\tan x=1$에서 $\quad x=\frac{\pi}{4}$

따라서 모든 실근의 합은

$0+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$

답 ④

197 방정식 $\sin \pi x=\frac{3}{10}x$의 실근은 함수 $y=\sin \pi x$의 그래프와 직선 $y=\frac{3}{10}x$의 교점의 x좌표와 같다.



위의 그림에서 함수 $y=\sin \pi x$의 그래프와 직선 $y=\frac{3}{10}x$의 교점의 개수는 7이므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 7이다.

답 ④

일품 BOX: $y=\frac{3}{10}x$에서 $x>\frac{10}{3}$ 또는 $x<-\frac{10}{3}$이면 $y>1$ 또는 $y<-1$이므로 직선 $y=\frac{3}{10}x$는 $y=\sin \pi x$의 그래프와 만나지 않는다.

1등급 비밀노트

① 방정식 $f(x)=g(x)$의 서로 다른 실근의 개수는 두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프의 교점의 개수와 같다.

② 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=0$, 즉 x축의 교점의 개수와 같다.

198 $\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}=t$로 놓으면 $-\pi\le x\le\pi$에서

$-\frac{\pi}{6}\le t\le\frac{5}{6}\pi$이고, 주어진 부등식은

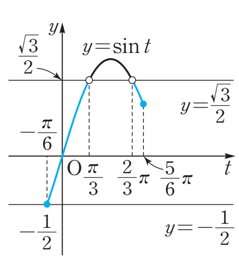
$-\frac{1}{2}\le \sin t<\frac{\sqrt{3}}{2}$

오른쪽 그림에서 부등식

$-\frac{1}{2}\le \sin t<\frac{\sqrt{3}}{2}$ 의 해는

$-\frac{\pi}{6}\le t<\frac{\pi}{3}$

또는 $\frac{2}{3}\pi<t\le\frac{5}{6}\pi$



(i) $-\frac{\pi}{6}\le t<\frac{\pi}{3}$에서

$-\frac{\pi}{6}\le\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}<\frac{\pi}{3}$

$\therefore -\pi\le x<0$

(ii) $\frac{2}{3}\pi<t\le\frac{5}{6}\pi$에서

$\frac{2}{3}\pi<\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}\le\frac{5}{6}\pi \qquad \therefore \frac{2}{3}\pi<x\le\pi$

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는

$-\pi\le x<0$ 또는 $\frac{2}{3}\pi<x\le\pi$

이므로 $\quad a=-\pi,\ b=0,\ c=\frac{2}{3}\pi,\ d=\pi$

$\therefore (b-a)+(d-c)=\pi+\frac{\pi}{3}=\frac{4}{3}\pi$

답 ③

199 $2\cos^2 x+5\sin x-4\ge 0$에서

$2(1-\sin^2 x)+5\sin x-4\ge 0$

$2\sin^2 x-5\sin x+2\le 0$

$(2\sin x-1)(\sin x-2)\le 0$

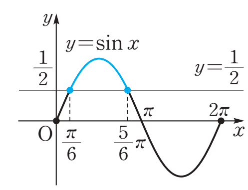
$\sin x-2<0$이므로 $\quad 2\sin x-1\ge 0$

$\therefore \sin x\ge\frac{1}{2}$

일품 BOX: $-1\le\sin x\le 1$이므로 $-3\le\sin x-2\le -1$

오른쪽 그림에서 구하는 x의 값의 범위는

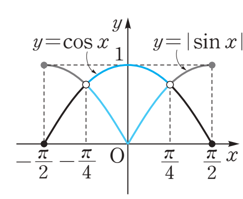
$\frac{\pi}{6}\le x\le\frac{5}{6}\pi$



답 $\frac{\pi}{6}\le x\le\frac{5}{6}\pi$

200 $-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}$에서

$y=|\sin x|$와 $y=\cos x$의 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로 부등식 $|\sin x|<\cos x$를 만족시키는 x의 값의 범위는



$-\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{4}$

답 ④

201 (해결 과정) $a>0$이고 $f(x)$의 최댓값은 6, 최솟값은 2이므로

$a+c=6,\ -a+c=2$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $\quad a=2,\ c=4$ ● 30%

이때 $f(x+4\pi)=f(x)$에서 함수 $f(x)$는 x의 값이 4π씩 커질 때마다 같은 함숫값이 반복되므로

일품 BOX: $f(x+4\pi)=f(x)$라 해서 함수 $f(x)$의 주기가 반드시 4π라 할 수는 없다.

$4\pi=\frac{2\pi}{b}\cdot n$ (n은 자연수)

$\therefore b=\frac{1}{2}n$ ● 40%

(답 구하기) 이때 $\frac{ac}{b}$가 최댓값을 가지려면 b는 최솟값을 가져야 하므로 구하는 최댓값은

일품 BOX: $n=1$일 때, b는 최솟값 $\frac{1}{2}$을 갖는다.

$\dfrac{2\cdot 4}{\frac{1}{2}}=16$ ● 30%

답 16

일품 BOX

202 $a>0$이고 함수 $y=a\cos(bx+c)+d$의 최댓값은 2, 최솟값은 -2이므로

$a+d=2,\ -a+d=-2$

위의 두 식을 연립하여 풀면　　$a=2,\ d=0$

주기가 π이므로 $\frac{2\pi}{b}=\pi$에서　　$b=2$

함수 $y=2\cos(2x+c)=2\cos 2\left(x+\frac{c}{2}\right)$의 그래프는 $y=2\cos 2x$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{c}{2}$만큼 평행이동한 것이다.

주어진 그래프는 $y=2\cos 2x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{4}$만큼 평행이동한 것이고, 주기가 π이므로

$-\frac{c}{2}=\frac{\pi}{4}+n\pi$ (n은 정수)

이때 $0<c<2\pi$에서 $-\pi<-\frac{c}{2}<0$이므로 $n=-1$일 때

$-\frac{c}{2}=-\frac{3}{4}\pi$　　$\therefore c=\frac{3}{2}\pi$

$\therefore a+b+c+d=2+2+\frac{3}{2}\pi+0=4+\frac{3}{2}\pi$

답 ①

$-\pi<\frac{\pi}{4}+n\pi<0$에서

$-\frac{5}{4}\pi<n\pi<-\frac{\pi}{4}$

$-\frac{5}{4}<n<-\frac{1}{4}$

$\therefore n=-1$

203 함수 $y=\sin x$의 그래프는 직선 $x=\frac{\pi}{2}$에 대하여 대칭이므로 $\mathrm{B}(\pi-a,\ 0)$이다.

$\therefore \overline{\mathrm{AB}}=(\pi-a)-a=\pi-2a$

ㄱ. $a=\frac{\pi}{4}$이면　　$\overline{\mathrm{AB}}=\pi-2\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$

ㄴ. $\overline{\mathrm{AB}}=\frac{2}{3}\pi$이면　　$\pi-2a=\frac{2}{3}\pi$　　$\therefore a=\frac{\pi}{6}$

따라서 $\overline{\mathrm{AD}}=\sin a=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$이므로 직사각형 ABCD의 넓이는

$\overline{\mathrm{AB}}\cdot\overline{\mathrm{AD}}=\frac{2}{3}\pi\cdot\frac{1}{2}=\frac{\pi}{3}$

ㄷ. $\overline{\mathrm{AD}}=\sin a$, $\overline{\mathrm{AB}}=\pi-2a$이므로 □ABCD가 정사각형이면 $\overline{\mathrm{AD}}=\overline{\mathrm{AB}}$에서　　$\sin a=\pi-2a$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

점 B의 좌표를 $(b,\ 0)$이라 하면

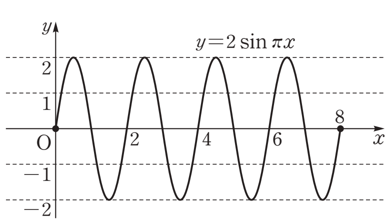
$\frac{a+b}{2}=\frac{\pi}{2}$

$a+b=\pi$

$\therefore b=\pi-a$

204 (문제 이해) 함수 $y=2\sin\pi x$의 최댓값과 최솟값은 각각 $2,\ -2$이고 주기는 $\frac{2\pi}{\pi}=2$이다.　● 20%

(해결 과정) $0\le x\le 8$에서 함수 $y=2\sin\pi x$의 그래프는 다음 그림과 같다.



● 40%

(답 구하기) 함수 $y=2\sin\pi x$의 그래프와 직선 $y=2$, $y=-2$의 교점의 개수는　　8

함수 $y=2\sin\pi x$의 그래프와 직선 $y=1$, $y=-1$의 교점의 개수는　　16

함수 $y=2\sin\pi x$의 그래프와 직선 $y=0$의 교점의 개수는　　9

따라서 y좌표가 정수인 점의 개수는

$8+16+9=33$

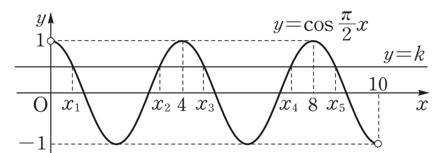
● 40%

답 33

205 함수 $f(x)=\cos\frac{\pi}{2}x$의 주기는 4이므로

$\frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}}=4$

$0<x<10$에서 함수 $y=\cos\frac{\pi}{2}x$의 그래프와 직선 $y=k$ $(0<k<1)$가 만나는 점의 x좌표는 다음 그림과 같이 $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5$이다.



ㄱ. $y=\cos\frac{\pi}{2}x$의 그래프와 직선 $y=k$가 만나는 점의 개수가 5이므로 n의 최댓값은 5이다.

ㄴ. $x_2=4-x_1,\ x_3=4+x_1,\ x_4=8-x_1,\ x_5=8+x_1$이므로

$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=x_1+24$

ㄷ. $x_1+x_2=x_1+(4-x_1)=4$이므로

$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)=f(2)=\cos\pi=-1$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ④

두 점 $(x_1,\ 0)$, $(x_2,\ 0)$이 직선 $x=2$에 대하여 대칭이므로

$\frac{x_1+x_2}{2}=2$

로 계산하여도 된다.

1등급 비밀노트

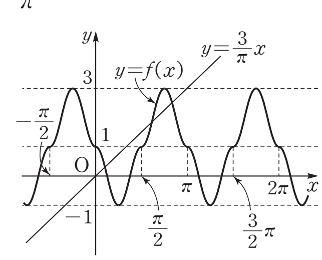
① $y=\sin x$의 그래프는 직선 $x=\frac{\pi}{2},\ x=\frac{3}{2}\pi,\ \cdots$에 대하여 대칭이다.

즉 $y=\sin x$의 그래프는 직선 $x=n\pi+\frac{\pi}{2}$ (n은 정수)에 대하여 대칭이다.

② $y=\cos x$의 그래프는 직선 $x=0,\ x=\pi,\ \cdots$에 대하여 대칭이다.

즉 $y=\cos x$의 그래프는 직선 $x=n\pi$ (n은 정수)에 대하여 대칭이다.

206 조건 (가)에서 $f(x)$는 주기가 π인 주기함수이므로 주어진 조건을 만족시키는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=\frac{3}{\pi}x$는 다음 그림과 같다.

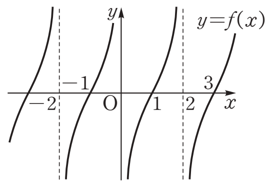


따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=\frac{3}{\pi}x$의 교점의 개수는 3이다.

답 3

> 일품 BOX
>
> $y=\frac{3}{\pi}x$에서 $x>\pi$ 또는 $x<-\frac{\pi}{3}$이면 $y>3$ 또는 $y<-1$이므로 직선 $y=\frac{3}{\pi}x$는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 만나지 않는다.

207 문제 이해 주어진 조건을 만족시키는 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. ● 30%



해결 과정 즉 $f(x)$는 주기가 2인 주기함수이므로

$$\frac{\pi}{b}=2 \qquad \therefore b=\frac{\pi}{2}$$ ● 20%

$f(x)=a\tan\left(\frac{\pi}{2}x+c\right)=a\tan\frac{\pi}{2}\left(x+\frac{2c}{\pi}\right)$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 함수 $y=a\tan\frac{\pi}{2}x$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{2c}{\pi}$만큼 평행이동한 것이다.

또 함수 $y=f(x)$의 그래프는 점 $\left(-\frac{2c}{\pi},\ 0\right)$에 대하여 대칭이고 $-2<c<-1$에서 $\frac{2}{\pi}<-\frac{2c}{\pi}<\frac{4}{\pi}$이므로 조건 (가)에서

$$-\frac{2c}{\pi}=1 \qquad \therefore c=-\frac{\pi}{2}$$ ● 20%

조건 (다)에서 $f\left(\frac{1}{2}\right)=-3$이므로

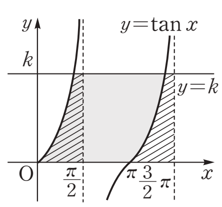
$$a\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-3, \qquad -a=-3$$

$$\therefore a=3$$ ● 20%

답 구하기 $\therefore a+b+c=3+\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}=3$ ● 10%

답 3

208 오른쪽 그림에서 빗금 친 두 부분의 넓이가 같으므로 $y=\tan x$의 그래프와 x축 및 직선 $y=k$로 둘러싸인 도형의 넓이는



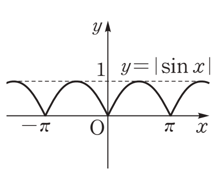
$$\left(\frac{3}{2}\pi-\frac{\pi}{2}\right)k=3\pi$$

$$k\pi=3\pi \qquad \therefore k=3$$

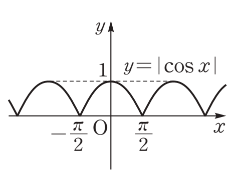
답 3

209 보기의 함수의 그래프는 다음과 같다.

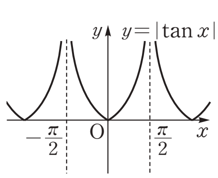
ㄱ.



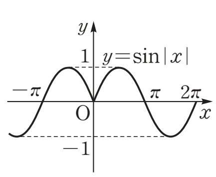
ㄴ.



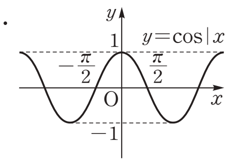
ㄷ.



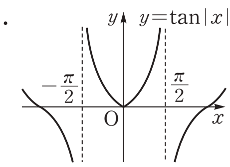
ㄹ.



ㅁ.



ㅂ.



이상에서 주기함수는 ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㅁ의 4개이다.

답 ③

> ㄱ, ㄴ, ㄷ은 주기가 π인 주기함수이고, ㅁ은 주기가 2π인 주기함수이다.

210 주어진 조건에 의하여

$$f(x+1)=-f(-x+1)=f(x-1)$$

> $-f(-x+1)$
> $=-f(-(x-1))$
> $=-\{-f(x-1)\}$
> $=f(x-1)$

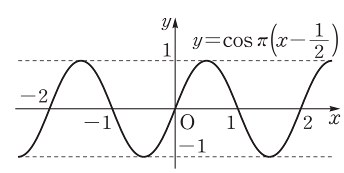
$x-1=t$로 놓으면 $x=t+1$이므로 $f(x+1)=f(x-1)$에서

$$f(t+2)=f(t) \qquad \cdots\cdots ㉠$$

ㄱ. $f(x)=\sin\pi(\pi x-1)$의 주기는 $\frac{2\pi}{\pi^2}=\frac{2}{\pi}$이므로 ㉠을 만족시키지 않는다.

ㄴ. $f(x)=\cos\pi\left(x-\frac{1}{2}\right)$의 주기는 $\frac{2\pi}{\pi}=2$이므로 ㉠을 만족시킨다.

또 $y=\cos\pi\left(x-\frac{1}{2}\right)$의 그래프는 다음 그림과 같이 원점에 대하여 대칭이므로 $f(-x)=-f(x)$를 만족시킨다.



ㄷ. $f(x)=\left|\tan\frac{\pi}{2}x\right|$의 주기는 $\frac{\pi}{\frac{\pi}{2}}=2$이므로 ㉠을 만족시킨다. 그러나 $y=\left|\tan\frac{\pi}{2}x\right|$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이 아니므로 $f(-x)=-f(x)$를 만족시키지 않는다.

> $f(x)=\left|\tan\frac{\pi}{2}x\right|\ge 0$이므로 $y=f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이 아니다.

이상에서 주어진 조건을 만족시키는 함수는 ㄴ뿐이다.

답 ②

1등급 비밀노트

$y=a\sin(bx+c)$, $y=a\cos(bx+c)$, $y=a\tan(bx+c)$ $(a>0,\ b>0)$의 그래프는 각각 $y=a\sin bx$, $y=a\cos bx$, $y=a\tan bx$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{c}{b}$만큼 평행이동한 것이다. 이때 a, c의 값은 함수의 주기에 영향을 주지 않는다.

211 $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$이므로 $\beta=\frac{\pi}{2}-\alpha$

$$\begin{aligned}\therefore \cos(\alpha-\beta)&=\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\\&=\cos\left(2\alpha-\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)\\&=\sin 2\alpha\end{aligned}$$

> $\cos(-x)=\cos x$

답 ①

212 해결 과정 $\overline{\mathrm{OB}}=1$, $\overline{\mathrm{BC}}=\frac{4}{3}$이므로 직각삼각형 OBC에서

$$\overline{\mathrm{OC}}=\sqrt{1^2+\left(\frac{4}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{25}{9}}=\frac{5}{3}$$ ● 50%

답 구하기 $\therefore\ \sin\alpha=\sin(\pi-\theta)$

$$=\sin\theta=\frac{\overline{\mathrm{BC}}}{\overline{\mathrm{OC}}}$$

$$=\frac{\frac{4}{3}}{\frac{5}{3}}=\frac{4}{5}$$ ● 50%

답 $\frac{4}{5}$

213 ㄱ. $\sin\gamma=\sin(2n\pi+\pi+\alpha)$

$=-\sin\alpha$ (n은 정수)

$\therefore\ \sin\alpha+\sin\gamma=0$

ㄴ. $\cos\delta=\cos(2n\pi+\pi+\beta)=-\cos\beta$ (n은 정수)

$\therefore\ \cos\beta+\cos\delta=0$

ㄷ. $\cos\delta=\cos\left(2n\pi+\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)=\sin\alpha$ (n은 정수)

$\therefore\ \sin\alpha+\cos\delta=2\sin\alpha\neq0$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ②

214 $\frac{1}{2}\cdot10^2\cdot\theta=\pi$에서 $\quad 50\theta=\pi$

$\therefore\ \sin\theta+\sin2\theta+\sin3\theta+\cdots+\sin100\theta$

$=(\sin\theta+\sin51\theta)+(\sin2\theta+\sin52\theta)$

$\quad+\cdots+(\sin50\theta+\sin100\theta)$

$=\{\sin\theta+\sin(\pi+\theta)\}+\{\sin2\theta+\sin(\pi+2\theta)\}$

$\quad+\cdots+\{\sin50\theta+\sin(\pi+50\theta)\}$

$=(\sin\theta-\sin\theta)+(\sin2\theta-\sin2\theta)$

$\quad+\cdots+(\sin50\theta-\sin50\theta)$

$=0$

답 0

215 해결 과정 $y=\sin^2x-\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$

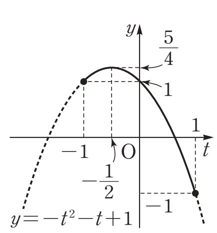
$=(1-\cos^2x)-\cos x$

$=-\cos^2x-\cos x+1$ ● 30%

$\cos x=t$로 놓으면 $0\le x\le2\pi$에서 $-1\le t\le1$이고

$$y=-t^2-t+1=-\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{4}$$ ● 30%

답 구하기 따라서 오른쪽 그림에서



$t=-\frac{1}{2}$일 때 $\quad$ 최댓값은 $\frac{5}{4}$,

$t=1$일 때 $\quad$ 최솟값은 -1

이므로

$M=\frac{5}{4}$, $m=-1$ ● 30%

$\therefore\ M+m=\frac{1}{4}$ ● 10%

답 $\frac{1}{4}$

일품 BOX

$0\le x\le\frac{\pi}{4}$일 때

$\frac{\sqrt{2}}{2}\le\cos x\le1$

부채꼴의 넓이

반지름의 길이가 r, 중심각의 크기가 θ인 부채꼴의 넓이 S는

$S=\frac{1}{2}r^2\theta$

점근선의 방정식은

$t=2$, $y=-2$

$\cos^2(\pi-\alpha)$

$=(-\cos\alpha)^2$

$=\cos^2\alpha$

$0<A<\pi$, $0<B<\pi$

이므로

$-\pi<A-B<\pi$

216 $y=\frac{3\cos x+2\sin x}{2\cos x-\sin x}$에서 $0\le x\le\frac{\pi}{4}$일 때

$\cos x\neq0$이므로 분자, 분모를 $\cos x$로 나누면

$$y=\frac{3+2\tan x}{2-\tan x}=\frac{-2(2-\tan x)+7}{2-\tan x}$$

$$=-2+\frac{7}{2-\tan x}$$

$0\le x\le\frac{\pi}{4}$에서 $0\le\tan x\le1$이므로

$1\le2-\tan x\le2$, $\quad\frac{1}{2}\le\frac{1}{2-\tan x}\le1$

$\frac{7}{2}\le\frac{7}{2-\tan x}\le7$

$\therefore\ \frac{3}{2}\le-2+\frac{7}{2-\tan x}\le5$

따라서 주어진 함수의 치역은

$\left\{y\,\middle|\,\frac{3}{2}\le y\le5\right\}$

이므로 $\quad a=\frac{3}{2}$, $b=5$

$\therefore\ 2a-b=-2$

답 -2

참고 $y=-2+\frac{7}{2-\tan x}\left(0\le x\le\frac{\pi}{4}\right)$에서 $\tan x=t$라 하면

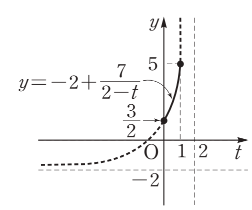
$y=-2+\frac{7}{2-t}\quad(0\le t\le1)$

오른쪽 그림에서 주어진 함수는

$t=0$일 때 $\quad$ 최솟값 $\frac{3}{2}$,

$t=1$일 때 $\quad$ 최댓값 5

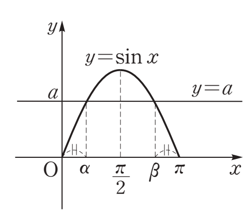
를 갖는다.



217 ㄱ. 오른쪽 그림에서

$\beta=\pi-\alpha$

$\therefore\ \alpha+\beta=\pi$



ㄴ. $\cos\alpha+\cos\beta=\cos\alpha+\cos(\pi-\alpha)$

$=\cos\alpha-\cos\alpha$

$=0$

ㄷ. $\sin^2\alpha+\cos^2\beta=\sin^2\alpha+\cos^2(\pi-\alpha)$

$=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha$

$=1$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

218 해결 과정 $-\pi<A-B<\pi$이므로

$\cos(A-B)=1$에서

$A-B=0\quad\therefore\ A=B$ ● 30%

삼각형 ABC에서 $A+B+C=\pi$이므로

$A+B=\pi-C$

$$\therefore \sin\left(\frac{A+B-C}{2}\right)=\sin\left(\frac{\pi-2C}{2}\right)$$
$$=\sin\left(\frac{\pi}{2}-C\right)$$
$$=\cos C$$
$$=-\frac{1}{2}$$

$\therefore C=\frac{2}{3}\pi$ ● 40%

$A+B=\pi-\frac{2}{3}\pi=\frac{\pi}{3}$이고, $A=B$이므로

$A=\frac{\pi}{6}$ ● 20%

답 구하기 $\therefore \tan A=\tan\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}$ ● 10%

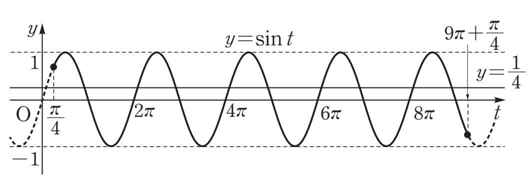
답 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

219 $3x+\frac{\pi}{4}=t$로 놓으면 $0\le x\le 3\pi$에서

$$\frac{\pi}{4}\le t\le 9\pi+\frac{\pi}{4}$$

즉 주어진 방정식의 실근의 개수는 $\frac{\pi}{4}\le t\le 9\pi+\frac{\pi}{4}$일 때 $4\sin t=1$의 실근의 개수와 같다.

따라서 방정식 $\sin t=\frac{1}{4}$의 서로 다른 실근의 개수는 다음 그림에서 함수 $y=\sin t$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{4}$의 교점의 개수와 같으므로 구하는 실근의 개수는 9이다.



답 ④

220 문제 이해 주어진 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(2\sin\theta)^2-6(1-\cos\theta)=0$ ● 30%

해결 과정 $4(1-\cos^2\theta)-6+6\cos\theta=0$

$2\cos^2\theta-3\cos\theta+1=0$

$(2\cos\theta-1)(\cos\theta-1)=0$

$\therefore \cos\theta=\frac{1}{2}$ 또는 $\cos\theta=1$ ● 20%

$0\le\theta<2\pi$이므로

$\cos\theta=\frac{1}{2}$에서 $\theta=\frac{\pi}{3}$ 또는 $\theta=\frac{5}{3}\pi$

$\cos\theta=1$에서 $\theta=0$ ● 40%

답 구하기 따라서 모든 θ의 값의 합은

$\frac{\pi}{3}+\frac{5}{3}\pi+0=2\pi$ ● 10%

답 2π

일품 BOX

점의 대칭이동
점 $(x,\ y)$를
① x축에 대하여 대칭이동하면
➡ 점 $(x,\ -y)$
② y축에 대하여 대칭이동하면
➡ 점 $(-x,\ y)$
③ 원점에 대하여 대칭이동하면
➡ 점 $(-x,\ -y)$

산술평균과 기하평균의 관계
$a>0$, $b>0$일 때
$\frac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}$
(단, 등호는 $a=b$일 때 성립)

점 A는 제1사분면 위의 점이므로
$0<\theta<\frac{\pi}{2}$

이차방정식이 중근을 가질 조건
➡ 판별식 $D=0$

221 점 B의 좌표는 $(-\cos\theta,\ -\sin\theta)$이고 두 점 A, B가 포물선 $y=x^2+ax+b$ 위에 존재하므로

$\sin\theta=\cos^2\theta+a\cos\theta+b$ ······ ㉠

$-\sin\theta=\cos^2\theta-a\cos\theta+b$ ······ ㉡

㉠−㉡을 하면

$2\sin\theta=2a\cos\theta \quad \therefore a=\tan\theta$

㉠+㉡을 하면

$0=2\cos^2\theta+2b \quad \therefore b=-\cos^2\theta$

$$\therefore y=x^2+ax+b$$
$$=x^2+x\tan\theta-\cos^2\theta$$
$$=\left(x+\frac{1}{2}\tan\theta\right)^2-\frac{1}{4}\tan^2\theta-\cos^2\theta$$

따라서 포물선의 꼭짓점의 y좌표는

$-\frac{1}{4}\tan^2\theta-\cos^2\theta$이므로

$g(\theta)=-\frac{1}{4}\tan^2\theta-\cos^2\theta$로 놓으면

$$g(\theta)=-\frac{1}{4}(\tan^2\theta+4\cos^2\theta)$$
$$=-\frac{1}{4}(\sec^2\theta-1+4\cos^2\theta)$$
$$=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}(\sec^2\theta+4\cos^2\theta)$$
$$\le\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\cdot 2\sqrt{\sec^2\theta\cdot 4\cos^2\theta}$$
$$=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\cdot 2\cdot 2=-\frac{3}{4}$$

이때 등호는 $\sec^2\theta=4\cos^2\theta$일 때 성립하므로

$\frac{1}{\cos^2\theta}=4\cos^2\theta, \quad \cos^4\theta=\frac{1}{4}$

$\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}\ \left(\because 0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$

$\therefore \theta=\frac{\pi}{4}$

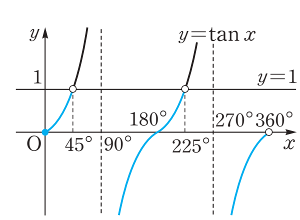
즉 포물선의 꼭짓점의 y좌표는 $\theta=\frac{\pi}{4}$일 때 최댓값 $-\frac{3}{4}$을 가지므로

$p=\frac{\pi}{4},\ q=-\frac{3}{4}$

$\therefore pq=-\frac{3}{16}\pi$

답 ③

222 $0^\circ\le x<360^\circ$에서 함수 $y=\tan x$의 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로 $\tan x<1$을 만족시키는 x의 값의 범위는



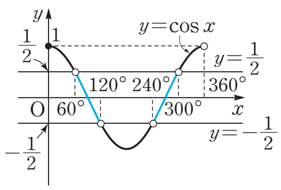
$0^\circ\le x<45^\circ$ 또는 $90^\circ<x<225^\circ$

또는 $270^\circ<x<360^\circ$ ······ ㉠

또 $|\cos x|<\frac{1}{2}$에서

$-\frac{1}{2}<\cos x<\frac{1}{2}$

$0° \le x < 360°$에서 $y=\cos x$의 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로 $-\frac{1}{2} < \cos x < \frac{1}{2}$을 만족시키는 x의 값의 범위는



$60° < x < 120°$ 또는 $240° < x < 300°$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 $90° < x < 120°$ 또는 $270° < x < 300°$

따라서 주어진 연립부등식의 해가 될 수 있는 것은 ③이다.

답 ③

223 (문제 이해) 주어진 이차방정식의 두 실근을 α, β라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=\frac{\sin\theta}{2},\quad \alpha\beta=\frac{2\cos\theta+1}{2}$$ ● 20%

(해결 과정) $\alpha+\beta>0$이므로

$$\frac{\sin\theta}{2}>0,\qquad \sin\theta>0$$

$$\therefore 0<\theta<\pi\ (\because 0\le\theta<2\pi)\quad \cdots ㉠$$ ● 30%

$\alpha\beta<0$이므로

$$\frac{2\cos\theta+1}{2}<0,\qquad \cos\theta<-\frac{1}{2}$$

$$\therefore \frac{2}{3}\pi<\theta<\frac{4}{3}\pi\ (\because 0\le\theta<2\pi)\quad \cdots ㉡$$ ● 30%

(답 구하기) ㉠, ㉡에서 $\frac{2}{3}\pi<\theta<\pi$ ● 20%

답 $\frac{2}{3}\pi<\theta<\pi$

> 양수인 근이 음수인 근의 절댓값보다 크므로 (두 근의 합)>0

224 주어진 부등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로 방정식 $x^2-2x\cos\theta+\sin^2\theta=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=\cos^2\theta-\sin^2\theta<0$$

$$\cos^2\theta-(1-\cos^2\theta)<0$$

$$\cos^2\theta<\frac{1}{2}\qquad \therefore -\frac{1}{\sqrt{2}}<\cos\theta<\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$0\le\theta\le\pi$이므로 $\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{3}{4}\pi$

답 ③

> 모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $ax^2+bx+c>0$이 항상 성립
> ➡ $a>0$, $b^2-4ac<0$

225 ㄱ. [반례] $\alpha=\frac{\pi}{2}$, $\beta=\frac{5}{6}\pi$일 때

$$\frac{\beta}{\alpha}=\frac{5}{3},\quad \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2$$

$$\therefore \frac{\beta}{\alpha}<\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$$

ㄴ. 함수 $y=\sin x$의 그래프 위의 두 점 $\mathrm{P}(\alpha,\ \sin\alpha)$, $\mathrm{Q}(\beta,\ \sin\beta)$와 원점 O에 대하여

(직선 OP의 기울기)$>$(직선 OQ의 기울기)

이므로

$$\frac{\sin\alpha}{\alpha}>\frac{\sin\beta}{\beta}\qquad \therefore \beta\sin\alpha>\alpha\sin\beta$$

> 두 점 $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$를 지나는 직선의 기울기
> ➡ $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

ㄷ. 함수 $y=\sin x$의 그래프 위의 두 점 $\mathrm{P}(\alpha,\ \sin\alpha)$, $\mathrm{Q}(\beta,\ \sin\beta)$에 대하여

(직선 PQ의 기울기)$<$(직선 $y=x$의 기울기)

이므로

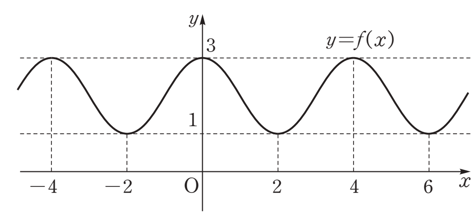
$$\frac{\sin\beta-\sin\alpha}{\beta-\alpha}<1$$

$$\therefore \beta-\alpha>\sin\beta-\sin\alpha$$

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ④

226 함수 $f(x)=\cos\frac{\pi}{2}x+2$의 최댓값은 3, 최솟값은 1이고, 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}}=4$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.

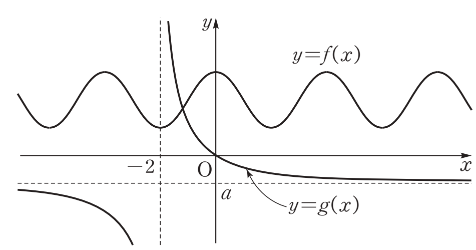


$g(x)=\frac{ax}{x+2}=-\frac{2a}{x+2}+a$이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=-2$, $y=a$

> $\frac{ax}{x+2}$
> $=\frac{a(x+2)-2a}{x+2}$
> $=-\frac{2a}{x+2}+a$

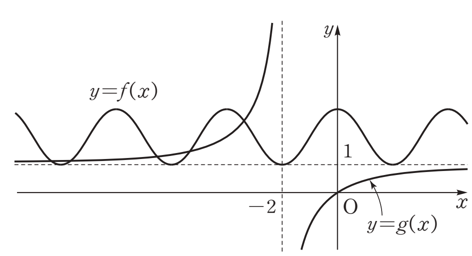
(i) $a<0$일 때,

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 다음 그림과 같으므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 1개의 점에서 만난다.



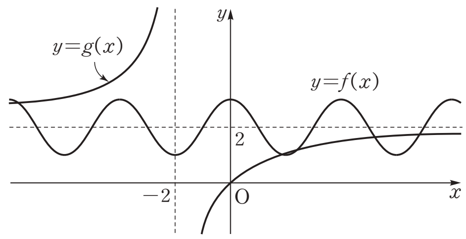
(ii) $a=1$일 때,

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 다음 그림과 같으므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 무수히 많은 점에서 만난다.



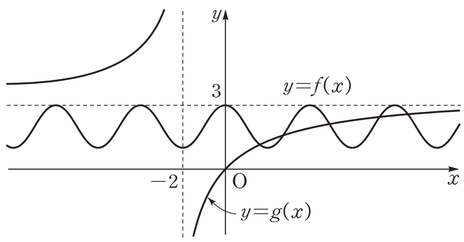
(iii) $a=2$일 때,

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 다음 그림과 같으므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 무수히 많은 점에서 만난다.



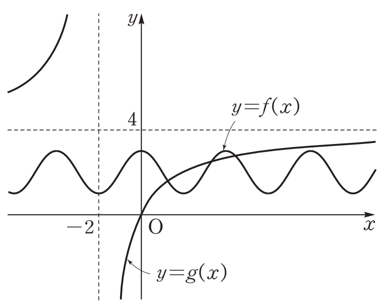
(iv) $a=3$일 때,

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 다음 그림과 같으므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 무수히 많은 점에서 만난다.



(v) $a>3$일 때,

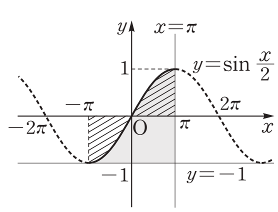
$a=4$이면 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 다음 그림과 같으므로 $a>3$일 때 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 유한개의 점에서 만난다.



이상에서 구하는 합은

$1+2+3=6$ 답 6

227 $y=\sin\frac{x}{2}$의 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}}=4\pi$이므로 곡선 $y=\sin\frac{x}{2}$와 두 직선 $x=\pi$, $y=-1$로 둘러싸인 부분은 위의 그림의 어두운 부분이다.



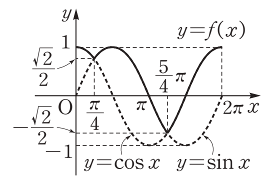
이때 빗금친 두 부분의 넓이가 서로 같으므로 구하는 넓이는 $2\pi\cdot1=2\pi$ 답 ②

228 $0\le x\le2\pi$일 때,

$f(x)=\mathrm{Max}(\sin x,\ \cos x)$

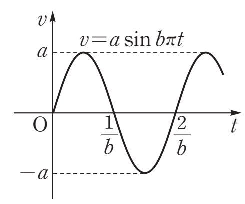
$$=\begin{cases}\cos x & \left(0\le x\le\frac{\pi}{4} \text{ 또는 } \frac{5}{4}\pi\le x\le2\pi\right)\\ \sin x & \left(\frac{\pi}{4}<x<\frac{5}{4}\pi\right)\end{cases}$$

$0\le x\le2\pi$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $f(x)$의 최솟값은 $-\frac{\sqrt{2}}{2}$이다. 답 ②

229 $v=a\sin b\pi t$의 주기는 $\frac{2\pi}{b\pi}=\frac{2}{b}$이고, 최댓값은 a, 최솟값은 $-a$이므로 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



1초당 들이마시는 최대의 공기의 부피가 0.8 L이므로

$a=0.8$

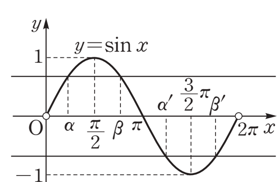
또 1분, 즉 60초당 호흡수가 12회이므로 1회의 호흡에 $\frac{60}{12}=5$(초)가 소요된다.

이때 숨을 들이마시고 내보내는 과정이 1회의 호흡이므로 호흡의 주기는 5초이다.

즉 $\frac{2}{b}=5$에서 $b=\frac{2}{5}=0.4$

$\therefore \frac{a}{b}=2$ 답 2

230 ㄱ. 오른쪽 그림과 같이 함수 $y=\sin x$의 그래프는 $0<x<\pi$일 때 직선 $x=\frac{\pi}{2}$에 대하여 대칭이고,

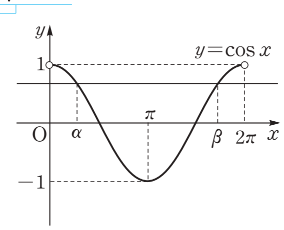


$\pi<x<2\pi$일 때 직선 $x=\frac{3}{2}\pi$에 대하여 대칭이다.

따라서 $\sin\alpha=\sin\beta$이면

$\alpha+\beta=\pi$ 또는 $\alpha+\beta=3\pi$

ㄴ. 오른쪽 그림과 같이 $0<x<2\pi$일 때 함수 $y=\cos x$의 그래프는 직선 $x=\pi$에 대하여 대칭이다.



따라서 $\cos\alpha=\cos\beta$이면 $\alpha+\beta=2\pi$

ㄷ. [반례] $\tan\frac{\pi}{3}=\tan\frac{4}{3}\pi=\sqrt{3}$이지만 $\frac{\pi}{3}+\frac{4}{3}\pi=\frac{5}{3}\pi$이다.

이상에서 옳은 것은 ㄴ뿐이다. 답 ②

231 ㄱ. $\overline{BD}=2r$이면 $\angle A=\frac{\pi}{2}$이므로

$\cos A=0$

ㄴ. 사각형 ABCD가 원에 내접하므로

$\angle C=\pi-\angle A$, $\angle D=\pi-\angle B$

일품 BOX

$y=\sin x$와 $y=\cos x$는 모두 주기가 2π인 주기함수이므로 $f(x)$도 주기가 2π인 주기함수이다. 즉 $0\le x\le2\pi$에서의 $f(x)$의 최솟값이 실수 전체의 집합에서 $f(x)$의 최솟값이다.

$\sin\frac{5}{4}\pi=\cos\frac{5}{4}\pi$
$=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

$1\le a\le3$일 때 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 무수히 많은 점에서 만난다.

$\pi<\alpha<\beta<2\pi$일 때
$\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{3}{2}\pi$
$\therefore \alpha+\beta=3\pi$

반원에 대한 원주각의 크기는 90°이다.

$\therefore \sin C \sin D = \sin(\pi - A)\sin(\pi - B)$
$= \sin A \sin B$

ㄷ. $\cos A + \cos B + \cos C + \cos D$
$= \cos A + \cos B + \cos(\pi - A) + \cos(\pi - B)$
$= \cos A + \cos B - \cos A - \cos B = 0$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ③

232 $\tan\theta = \sqrt{\dfrac{a}{1-a}}$에서 $\tan^2\theta = \dfrac{a}{1-a}$이므로

$\dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} = \dfrac{a}{1-a}, \quad (1-a)\sin^2\theta = a\cos^2\theta$

$\sin^2\theta - a\sin^2\theta = a\cos^2\theta$

$\therefore \sin^2\theta = a(\sin^2\theta + \cos^2\theta) = a,$

$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta = 1 - a$

또 $\cos\left(\dfrac{3}{2}\pi + \theta\right) = \sin\theta$, $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin\theta$이므로

$$(\text{주어진 식}) = \frac{\cos^2\theta}{\sin\theta - a} + \frac{\cos^2\theta}{-\sin\theta - a}$$
$$= \frac{\cos^2\theta}{\sin\theta - a} - \frac{\cos^2\theta}{\sin\theta + a}$$
$$= \frac{2a\cos^2\theta}{\sin^2\theta - a^2} = \frac{2a(1-a)}{a - a^2}$$
$$= \frac{2a(1-a)}{a(1-a)} = 2$$

답 2

233 $a_1 = \dfrac{3}{2}\pi + \dfrac{\pi}{3}$,

$a_2 = \dfrac{3}{2}\pi + \dfrac{3}{2}\pi + \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{3}{2}\pi\cdot 2 + \dfrac{\pi}{3}$,

$a_3 = \dfrac{3}{2}\pi + \dfrac{3}{2}\pi + \dfrac{3}{2}\pi + \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{3}{2}\pi\cdot 3 + \dfrac{\pi}{3}$,

$\vdots$

$a_n = \dfrac{3}{2}\pi\cdot n + \dfrac{\pi}{3}$

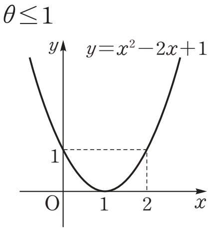
따라서 $a_{11} = \dfrac{3}{2}\pi\cdot 11 + \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{33}{2}\pi + \dfrac{\pi}{3}$이므로

$$\cos a_{11} = \cos\left(\frac{33}{2}\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(16\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right)$$
$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

답 ②

234 $0 \le \theta \le \pi$에서 $\quad 0 \le \sin\theta \le 1$

$y = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



(ⅰ) $x < 0$ 또는 $x > 2$일 때,

$x^2 - 2x + 1 > 1$이므로 $\sin\theta = x^2 - 2x + 1$을 만족시키는 실수 θ는 없다.

$\therefore f(x) = 0$

(ⅱ) $x = 0$ 또는 $x = 2$일 때,

$x^2 - 2x + 1 = 1$이므로 $\quad \sin\theta = 1$

$\therefore \theta = \dfrac{\pi}{2}$ ($\because 0 \le \theta \le \pi$)

$\therefore f(x) = 1$

(ⅲ) $0 < x < 2$일 때,

$0 \le x^2 - 2x + 1 < 1$이므로 $\sin\theta = x^2 - 2x + 1$을 만족시키는 실수 θ의 개수는 2이다.

$\therefore f(x) = 2$

이상에서 $y = f(x)$의 그래프로 알맞은 것은 ①이다. 답 ①

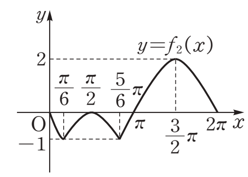
235 ㄱ. $0 \le x \le 2\pi$에서 $-1 \le \sin x \le 1$이므로

$-3 \le 2\sin x - 1 \le 1$

따라서 함수 $f_1(x)$의 최솟값은 -3이다.

ㄴ. $f_2(x) = |f_1(x)| - 1$
$= |2\sin x - 1| - 1$

이므로 함수 $y = f_2(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 방정식 $f_2(x) = 0$을 만족시키는 실수 x의 값은 $0, \dfrac{\pi}{2}, \pi, 2\pi$의 4개이다.

함수 $y=f_2(x)$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표

ㄷ. $-1 \le f_2(x) \le 2$이므로 $\quad 0 \le |f_2(x)| \le 2$

$f_3(x) = |f_2(x)| - 1$에서 $\quad 0 \le |f_3(x)| \le 1$

따라서 $f_4(x) = |f_3(x)| - 1$에서 $-1 \le f_4(x) \le 0$이므로

$f_5(x) = |f_4(x)| - 1 = -f_4(x) - 1$

이때 $-1 \le f_5(x) \le 0$이므로

$-1 \le f_4(x) \le 0$에서
$0 \le -f_4(x) \le 1$
$-1 \le -f_4(x) - 1 \le 0$
$\therefore -1 \le f_5(x) \le 0$

$f_6(x) = |f_5(x)| - 1 = -f_5(x) - 1$
$= -\{-f_4(x) - 1\} - 1 = f_4(x)$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

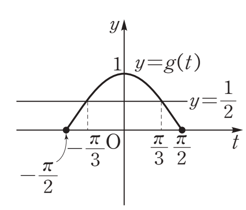
236 $f(x)$의 정의역이 $\left\{x \,\middle|\, -\dfrac{\pi}{2} \le x \le \dfrac{\pi}{2}\right\}$, 치역이 $\{y \mid -1 \le y \le 1\}$이므로 $f^{-1}(x)$의 정의역은 $\{x \mid -1 \le x \le 1\}$, 치역은 $\left\{y \,\middle|\, -\dfrac{\pi}{2} \le y \le \dfrac{\pi}{2}\right\}$이다.

$t = f^{-1}(x)$로 놓으면

$g(t) = \dfrac{1}{2}$에서 $\quad \cos t = \dfrac{1}{2}$

$-\dfrac{\pi}{2} \le t \le \dfrac{\pi}{2}$이므로

$t = -\dfrac{\pi}{3}$ 또는 $t = \dfrac{\pi}{3}$



(ⅰ) $t = -\dfrac{\pi}{3}$일 때, $f^{-1}(x) = -\dfrac{\pi}{3}$에서

함수 $f(x)$에 대하여 역함수 $f^{-1}(x)$가 존재하면
$f(a) = b$
$\Longleftrightarrow f^{-1}(b) = a$

$$x = f\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

(ⅱ) $t = \dfrac{\pi}{3}$일 때, $f^{-1}(x) = \dfrac{\pi}{3}$에서

$$x = f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

(ⅰ), (ⅱ)에서

$\alpha = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\beta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$
또는
$\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\beta = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$$2(\alpha^2 + \beta^2) = 2\left\{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right\} = 3$$

답 3

06 삼각함수의 미분 본책 48쪽

237 $\dfrac{\cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)-\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)}{2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)}$

$=\dfrac{\left(\cos\theta\cos\frac{\pi}{3}+\sin\theta\sin\frac{\pi}{3}\right)-\left(\cos\theta\cos\frac{\pi}{3}-\sin\theta\sin\frac{\pi}{3}\right)}{2\left(\sin\theta\cos\frac{\pi}{6}+\cos\theta\sin\frac{\pi}{6}\right)}$

$=\dfrac{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta}{2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta+\frac{1}{2}\cos\theta\right)}$

$=\dfrac{\sqrt{3}\sin\theta}{\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta}$

$=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}}$

$=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\cot\theta}$

따라서 $a=b=\sqrt{3}$이므로

$a^2+b^2=6$ 답 6

238 $\overline{BD}=\sqrt{5^2-3^2}=4$, $\overline{CD}=\sqrt{(3\sqrt{10})^2-3^2}=9$이므로

$\sin B=\frac{3}{5}$, $\cos B=\frac{4}{5}$

$\sin C=\frac{1}{\sqrt{10}}$, $\cos C=\frac{3}{\sqrt{10}}$

$\therefore \cos(B-C)=\cos B\cos C+\sin B\sin C$

$=\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{\sqrt{10}}+\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{\sqrt{10}}$

$=\frac{3\sqrt{10}}{10}$ 답 ⑤

239 두 직선 $y=ax$, $y=2x$가 x축의 양의 부분과 이루는 각의 크기를 각각 α, β라 하면

$\tan\alpha=a$, $\tan\beta=2$

두 직선이 이루는 예각의 크기가 $45°$이므로

$|\tan(\alpha-\beta)|=\tan 45°$

$\left|\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\right|=1$

$\left|\dfrac{a-2}{1+2a}\right|=1$ $\quad\therefore \dfrac{a-2}{1+2a}=\pm1$

즉 $a-2=1+2a$ 또는 $a-2=-1-2a$이므로

$a=\frac{1}{3}$ $(\because a>0)$ 답 $\frac{1}{3}$

240 $y=\sqrt{3}\sin x+\cos x$

$=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x\right)$

$=2\left(\cos\frac{\pi}{6}\sin x+\sin\frac{\pi}{6}\cos x\right)$

$=2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$

이때 $-1\le\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\le1$이므로

$-2\le2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\le2$

따라서 $M=2$, $m=-2$이므로

$Mm=-4$ 답 -4

241 $f(x)=\sin\left(x+\frac{2}{3}\pi\right)+\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$

$=\left(\sin x\cos\frac{2}{3}\pi+\cos x\sin\frac{2}{3}\pi\right)$

$+\left(\cos x\cos\frac{\pi}{6}-\sin x\sin\frac{\pi}{6}\right)$

$=\left(-\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right)$

$+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x-\frac{1}{2}\sin x\right)$

$=-\sin x+\sqrt{3}\cos x$

$=2\left(-\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right)$

$=2\left(\cos\frac{2}{3}\pi\sin x+\sin\frac{2}{3}\pi\cos x\right)$

$=2\sin\left(x+\frac{2}{3}\pi\right)$

$0\le x\le\pi$에서 $\frac{2}{3}\pi\le x+\frac{2}{3}\pi\le\frac{5}{3}\pi$이므로 함수 $f(x)$는 $x+\frac{2}{3}\pi=\frac{3}{2}\pi$, 즉 $x=\frac{5}{6}\pi$일 때 최솟값 -2를 갖는다.

따라서 $a=\frac{5}{6}\pi$, $b=-2$이므로

$ab=-\frac{5}{3}\pi$ 답 ①

242 $f(x)=3\sin x+4\cos x+2$

$=5\sin(x+\alpha)+2$

$\left(\text{단, } \sin\alpha=\frac{4}{5}, \cos\alpha=\frac{3}{5}\right)$

ㄱ, ㄴ. $y=5\sin(x+\alpha)+2$의 그래프는 $y=5\sin x$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\alpha$만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 함수 $f(x)$의 주기는 2π이다.

ㄷ. $-1\le\sin(x+\alpha)\le1$이므로

$-5\le5\sin(x+\alpha)\le5$

$\therefore -3\le5\sin(x+\alpha)+2\le7$

따라서 $f(x)$의 최댓값은 7이다.

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

1등급 비밀노트

$y=a\sin(bx+c)+d$의 그래프는 $y=a\sin bx$의 그래프를 평행이동한 것이고, 함수의 주기는 그래프를 평행이동하여도 변하지 않으므로 $y=a\sin bx$의 주기를 이용하여 $y=a\sin(bx+c)+d$의 주기를 구할 수 있다.

일품 BOX

삼각함수의 덧셈정리

(1) $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

(2) $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

$\frac{\pi}{6}<\theta<\frac{\pi}{3}$에서 $\frac{1}{2}<\sin\theta<\frac{\sqrt{3}}{2}$이므로 $\sin\theta\ne0$

$\frac{2}{3}\pi\le x+\frac{2}{3}\pi\le\frac{5}{3}\pi$에서

$-1\le\sin\left(x+\frac{2}{3}\pi\right)\le\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore -2\le2\sin\left(x+\frac{2}{3}\pi\right)\le\sqrt{3}$

직선 $y=mx+n$이 x축의 양의 부분과 이루는 각의 크기를 θ라 하면 $\tan\theta=m$

$a-2=1+2a$에서 $a=-3$

$a-2=-1-2a$에서 $3a=1$

$\therefore a=\frac{1}{3}$

243 $\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=\frac{3}{5}$

$\therefore \sin 2\alpha-\cos 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha-(1-2\sin^2\alpha)$

$=2\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{5}-1+2\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^2$

$=\frac{17}{25}$ 답 ④

244 $2\sin\theta+2\cos\theta=\sqrt{6}$에서

$\sin\theta+\cos\theta=\frac{\sqrt{6}}{2}$

양변을 제곱하면

$1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{3}{2}$, $\quad 2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{2}$

$\therefore \sin 2\theta=\frac{1}{2}$ 답 $\frac{1}{2}$

245 $f(x)=2\sqrt{3}\sin^2\frac{x}{2}-\sin x+a$

$=2\sqrt{3}\cdot\frac{1-\cos x}{2}-\sin x+a$

$=-(\sin x+\sqrt{3}\cos x)+a+\sqrt{3}$

$=-2\left(\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right)+a+\sqrt{3}$

$=-2\left(\cos\frac{\pi}{3}\sin x+\sin\frac{\pi}{3}\cos x\right)$

$+a+\sqrt{3}$

$=-2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+a+\sqrt{3}$

이때 $0\le x\le\pi$에서 $\frac{\pi}{3}\le x+\frac{\pi}{3}\le\frac{4}{3}\pi$이므로 함수 $f(x)$는 $x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$, 즉 $x=\frac{\pi}{6}$일 때 최솟값 $-2+a+\sqrt{3}$을 갖는다.

따라서 $-2+a+\sqrt{3}=\sqrt{3}$이므로

$a=2$ 답 ②

246 $\lim_{x\to0}\frac{\tan^2 x}{x\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{x\tan^2 x}{x^2\sin x}$

$=\lim_{x\to0}\left(\frac{\tan x}{x}\right)^2\cdot\frac{x}{\sin x}$

$=1^2\cdot1=1$ 답 ④

247 $\lim_{x\to0}\frac{\tan(\tan 3x)}{\tan 5x}$

$=\lim_{x\to0}\frac{\tan(\tan 3x)}{\tan 3x}\cdot\frac{5x}{\tan 5x}\cdot\frac{\tan 3x}{3x}\cdot\frac{3}{5}$

$=1\cdot1\cdot1\cdot\frac{3}{5}=\frac{3}{5}$ 답 $\frac{3}{5}$

248 $x\to0$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이다.

즉 $\lim_{x\to0}\tan(ax+b)=0$이므로

$\tan b=0 \quad \therefore b=0\ (\because 0\le b<\pi)$

$b=0$을 주어진 식에 대입하면

$\lim_{x\to0}\frac{\tan ax}{\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{\tan ax}{ax}\cdot\frac{x}{\sin x}\cdot a$

$=1\cdot1\cdot a=a$

즉 $a=3$이므로 $\quad a+b=3$ 답 ④

249 $x-2=t$로 놓으면 $x\to2$일 때 $t\to0$이므로

$\lim_{x\to2}\frac{x^2-4}{\sin\pi x}=\lim_{t\to0}\frac{(t+2)^2-4}{\sin\pi(t+2)}$

$=\lim_{t\to0}\frac{t(t+4)}{\sin\pi t}$

$=\lim_{t\to0}\frac{\pi t}{\sin\pi t}\cdot\frac{t+4}{\pi}$

$=1\cdot\frac{4}{\pi}=\frac{4}{\pi}$ 답 ⑤

250 $x-1=t$로 놓으면 $x\to1$일 때 $t\to0$이므로

$\lim_{x\to1}\frac{(x-1)^2}{1-\cos(1-x)}$

$=\lim_{t\to0}\frac{t^2}{1-\cos t}$

$=\lim_{t\to0}\frac{t^2(1+\cos t)}{(1-\cos t)(1+\cos t)}$

$=\lim_{t\to0}\frac{t^2(1+\cos t)}{\sin^2 t}$

$=\lim_{t\to0}\left(\frac{t}{\sin t}\right)^2\cdot(1+\cos t)$

$=1^2\cdot2=2$ 답 ⑤

251 $x\to\frac{\pi}{2}$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이다.

즉 $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(ax-\pi)=0$이므로 $\quad \frac{\pi}{2}a-\pi=0$

$\therefore a=2$

$x-\frac{\pi}{2}=t$로 놓으면 $x\to\frac{\pi}{2}$일 때 $t\to0$이므로

$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{ax-\pi}{\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2x-\pi}{\cos x}$

$=\lim_{t\to0}\frac{2\left(\frac{\pi}{2}+t\right)-\pi}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+t\right)}$

$=\lim_{t\to0}\frac{2t}{-\sin t}=-2\lim_{t\to0}\frac{t}{\sin t}$

$=-2\cdot1=-2$

$\therefore b=-2$

$\therefore ab=-4$ 답 -4

일품 BOX

- $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$에서 $\sin\alpha>0$
- $\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1=2\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^2-1=\frac{7}{25}$로 계산할 수도 있다.
- $(\sin\theta+\cos\theta)^2=\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=1+2\sin\theta\cos\theta$
- 함수 $f(x)$는 $\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=1$일 때 최솟값을 갖는다.
- $\sin(\pi t+2\pi)=\sin\pi t$
- $\cos(-t)=\cos t$

252 $f(x)=\dfrac{\cos^2 x}{1+\sin x}$

$=\dfrac{1-\sin^2 x}{1+\sin x}$

$=\dfrac{(1+\sin x)(1-\sin x)}{1+\sin x}$

$=1-\sin x\ (\sin x \neq -1)$

에서 $f'(x)=-\cos x$

$\therefore f'\left(\dfrac{2}{3}\pi\right)=-\cos\dfrac{2}{3}\pi=\dfrac{1}{2}$ 답 ⑤

253 $f(x)=\sin x\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$

$=\sin x\left(\cos x\cos\dfrac{\pi}{4}-\sin x\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$

$=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin x\cos x-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin^2 x$

$=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(\sin x\cos x-\sin^2 x)$

에서

$(\sin x\cos x)'=(\sin x)'\cos x+\sin x(\cos x)'$

$=\cos^2 x-\sin^2 x$

$(\sin^2 x)'=(\sin x\sin x)'$

$=(\sin x)'\sin x+\sin x(\sin x)'$

$=\cos x\sin x+\sin x\cos x$

$=2\sin x\cos x$

이므로

$f'(x)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(\cos^2 x-\sin^2 x-2\sin x\cos x)$

$\therefore f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos^2\dfrac{\pi}{4}-\sin^2\dfrac{\pi}{4}-2\sin\dfrac{\pi}{4}\cos\dfrac{\pi}{4}\right)$

$=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}-2\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 답 ②

254 $f(x)=\sin^2 x=\sin x\sin x$에서

$f'(x)=\cos x\sin x+\sin x\cos x$

$=2\sin x\cos x$

$\therefore \lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{f'(x)}{x-\pi}=\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{2\sin x\cos x}{x-\pi}$

$x-\pi=t$로 놓으면 $x\to\pi$일 때 $t\to 0$이므로

$\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{2\sin x\cos x}{x-\pi}$

$=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{2\sin(\pi+t)\cos(\pi+t)}{t}$

$=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{2(-\sin t)(-\cos t)}{t}$

$=2\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin t}{t}\cdot\cos t$

$=2\cdot 1\cdot 1=2$ 답 2

일품 BOX

정삼각형의 한 내각의 크기는 $60°$이다.

함수의 곱의 미분법
두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 미분가능할 때,
$\{f(x)g(x)\}'$
$=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

$0<\alpha<\dfrac{\pi}{4}$에서
$0<2\alpha<\dfrac{\pi}{2}$

$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$, $0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$
이므로
$0<\alpha+\beta<\pi$

255 $\angle CAB'=60°-45°=15°$, $\angle AB'C'=60°$이므로 $\triangle PAB'$에서

$\angle APB'=180°-(15°+60°)=105°$

$\therefore \sin(\angle APB')$

$=\sin 105°=\sin(60°+45°)$

$=\sin 60°\cos 45°+\cos 60°\sin 45°$

$=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ 답 ⑤

256 해결 과정 $\tan\alpha+\cot 2\alpha$

$=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}$

$=\dfrac{\sin\alpha\sin 2\alpha+\cos\alpha\cos 2\alpha}{\cos\alpha\sin 2\alpha}$

$=\dfrac{\cos(2\alpha-\alpha)}{\cos\alpha\sin 2\alpha}=\dfrac{\cos\alpha}{\cos\alpha\sin 2\alpha}$

$=\dfrac{1}{\sin 2\alpha}$ ● 40%

즉 $\dfrac{1}{\sin 2\alpha}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$이므로 $\sin 2\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$2\alpha=\dfrac{\pi}{3}$ $\therefore \alpha=\dfrac{\pi}{6}$ ● 40%

답 구하기 $\therefore \tan\alpha\cot 2\alpha=\tan\dfrac{\pi}{6}\cot\dfrac{\pi}{3}$

$=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{1}{3}$ ● 20%

답 $\dfrac{1}{3}$

257 $g\left(\dfrac{1}{3}\right)=\alpha$, $g\left(\dfrac{1}{2}\right)=\beta$라 하면

$f(\alpha)=\dfrac{1}{3}$, $f(\beta)=\dfrac{1}{2}$

즉 $\tan\alpha=\dfrac{1}{3}$, $\tan\beta=\dfrac{1}{2}$이므로

$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

$=\dfrac{\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2}}{1-\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}}=1$

이때 $0<\alpha+\beta<\pi$이므로 $\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{4}$

따라서 $\theta=g\left(\dfrac{1}{3}\right)+g\left(\dfrac{1}{2}\right)=\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{4}$이므로

$\cos\theta=\cos\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 답 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

다른 풀이 $\tan\alpha=\dfrac{1}{3}$, $\tan\beta=\dfrac{1}{2}$이고, $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$, $0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$이므로

$\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{10}}$, $\cos\alpha=\frac{3}{\sqrt{10}}$,

$\sin\beta=\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\cos\beta=\frac{2}{\sqrt{5}}$

$\therefore \cos\theta=\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

$=\frac{3}{\sqrt{10}}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{10}}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

1등급 비밀노트

$0<x<\frac{\pi}{2}$에서 함수 $f(x)=\tan x$는 일대일 대응이므로 역함수 $f^{-1}(x)$가 존재한다. 따라서 함수 $f(x)$의 역함수 $f^{-1}(x)$에 대하여

$f(a)=b \Longleftrightarrow f^{-1}(b)=a$

임을 이용한다.

258 $f(x)=a\sin x+\cos x=\sqrt{a^2+1}\sin(x+\alpha)$

$\left(\text{단, } \sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}, \cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+1}}\right)$

따라서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $\sqrt{a^2+1}$이므로

$\sqrt{a^2+1}=3$, $\quad a^2=8 \quad \therefore a=2\sqrt{2}\ (\because a>0)$

또 주기는 2π이므로

$2(c-b)=2\pi \quad \therefore c-b=\pi$

$\therefore a(c-b)=2\sqrt{2}\pi$

답 ③

259 $y=a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\alpha)$

$\left(\text{단, } \sin\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$

이때 함수 $y=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\alpha)$의 최댓값이 $\sqrt{33}$이므로

$\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{33} \quad \therefore a^2+b^2=33 \quad \cdots\cdots$ ㉠

$b=4a\cos 75^\circ$에서

$\cos 75^\circ=\cos(45^\circ+30^\circ)$

$=\cos 45^\circ\cos 30^\circ-\sin 45^\circ\sin 30^\circ$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}$

$=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

이므로 $\quad b=(\sqrt{6}-\sqrt{2})a \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $\quad a^2+(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2a^2=33$

$\therefore a^2=\frac{33}{9-4\sqrt{3}}=9+4\sqrt{3}$

답 $9+4\sqrt{3}$

1등급 비밀노트

함수 $y=a\sin x+b\cos x\ (a\neq0,\ b\neq0)$의 최댓값과 최솟값은 삼각함수의 합성을 이용하여 구할 수 있다.

즉 $y=a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\alpha)$에서 최댓값은 $\sqrt{a^2+b^2}$, 최솟값은 $-\sqrt{a^2+b^2}$이다.

$\left(\text{단, } \sin\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$

일품 BOX

반원에 대한 원주각의 크기는 90°이다.

$\sec\alpha=\sqrt{1+\left(\frac{1}{3}\right)^2}$

$=\frac{\sqrt{10}}{3}$

이므로

$\cos\alpha=\frac{3}{\sqrt{10}}$,

$\sin\alpha=\sqrt{1-\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right)^2}$

$=\frac{1}{\sqrt{10}}$

$\sec\beta=\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2}$

$=\frac{\sqrt{5}}{2}$

이므로

$\cos\beta=\frac{2}{\sqrt{5}}$,

$\sin\beta=\sqrt{1-\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2}$

$=\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\cos 2x=1-2\sin^2 x$

함수

$y=a\sin(bx+c)+d$

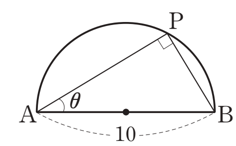
의 주기

➡ $\frac{2\pi}{|b|}$

원 $x^2+y^2=r^2$ 위의 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은

$x_1x+y_1y=r^2$

260 문제 이해



$\angle APB=90^\circ$이므로

$\angle PAB=\theta$라 하면

$\overline{AP}=10\cos\theta$,

$\overline{BP}=10\sin\theta$

● 30%

해결 과정 $\therefore 2\overline{AP}+\overline{BP}$

$=20\cos\theta+10\sin\theta$

$=10\sqrt{5}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\cos\theta+\frac{1}{\sqrt{5}}\sin\theta\right)$

$=10\sqrt{5}\sin(\theta+\alpha)$

$\left(\text{단, } \sin\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}, \cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$

● 50%

답 구하기 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$에서 $\alpha<\theta+\alpha<\frac{\pi}{2}+\alpha$이므로

$2\overline{AP}+\overline{BP}$는 $\sin(\theta+\alpha)=1$일 때 최대이며 최댓값은 $10\sqrt{5}$이다.

● 20%

답 $10\sqrt{5}$

261 문제 이해 $y=\cos 2x+2\sin x+k$

$=-2\sin^2 x+2\sin x+k+1$

● 10%

해결 과정 이때 $\sin x=t$로 놓으면 $0<x\le\frac{\pi}{2}$에서

$0<t\le1$이고

$y=-2t^2+2t+k+1$

$=-2\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+k+\frac{3}{2}$

● 20%

따라서 $t=\frac{1}{2}$일 때 최댓값 $k+\frac{3}{2}$을 가지므로

$k+\frac{3}{2}=1 \quad \therefore k=-\frac{1}{2}$

● 30%

$t=\frac{1}{2}$에서 $\sin x=\frac{1}{2}$이므로

$x=\frac{\pi}{6}\ \left(\because 0<x\le\frac{\pi}{2}\right) \quad \therefore \alpha=\frac{\pi}{6}$

● 30%

답 구하기 $\therefore k\alpha=\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{12}$

● 10%

답 $-\frac{\pi}{12}$

1등급 비밀노트

배각 · 반각의 공식을 이용하여 삼각함수를 포함한 식의 최대 · 최소를 구할 때에는 다음과 같은 순서로 구한다.

(i) 배각 · 반각의 공식을 이용하여 주어진 함수의 식을 간단히 한다.

(ii) $f(x)=a\sin^2 x+b\sin x+c$ 또는 $f(x)=a\cos^2 x+b\cos x+c$ 꼴인 경우 이차함수의 최대 · 최소를 이용하고, $f(x)=a\sin x+b\cos x$ 꼴인 경우 삼각함수의 합성을 이용하여 최대 · 최소를 구한다.

262 원 $x^2+y^2=6$ 위의 점 $(\sqrt{5},\ -1)$에서의 접선의 방정식은

$\sqrt{5}x-y=6 \qquad \therefore y=\sqrt{5}x-6$

이때 직선 $y=\sqrt{5}x-6$이 x축의 양의 부분과 이루는 각의 크기가 $\frac{\theta}{2}$이므로 $\tan\frac{\theta}{2}=\sqrt{5}$

양변을 제곱하면

$\tan^2\frac{\theta}{2}=5, \quad \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}=5$

$1-\cos\theta=5+5\cos\theta$

$\therefore \cos\theta=-\frac{2}{3}$

답 ①

263 $y=8\sin^2 x-3\sin 2x-4(3\sin x-\cos x)$
$+9+\sin^2 x+\cos^2 x$
$=(9\sin^2 x-6\sin x\cos x+\cos^2 x)$
$-4(3\sin x-\cos x)+9$
$=(3\sin x-\cos x)^2-4(3\sin x-\cos x)+9$ …… ㉠

이때 $t=3\sin x-\cos x$로 놓으면

$t=3\sin x-\cos x$
$=\sqrt{10}\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\sin x-\frac{1}{\sqrt{10}}\cos x\right)$
$=\sqrt{10}\sin(x+\alpha)$

$\left(\text{단}, \sin\alpha=-\frac{1}{\sqrt{10}}, \cos\alpha=\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$

에서 $-\sqrt{10}\le t\le\sqrt{10}$이고 ㉠에서

$y=t^2-4t+9=(t-2)^2+5$

y는 $t=-\sqrt{10}$일 때 최댓값 $19+4\sqrt{10}$, $t=2$일 때 최솟값 5를 가지므로

$M=19+4\sqrt{10}, m=5$

$\therefore M-m=14+4\sqrt{10}$

답 $14+4\sqrt{10}$

264 $\sin 3x=3\sin x-4\sin^3 x$이므로

$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin x}{3\sin x-\sin 3x}$
$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin x}{3\sin x-3\sin x+4\sin^3 x}$
$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin x}{4\sin^3 x}$
$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{x}{\sin x}\right)^3\cdot\frac{\sin x}{x}$
$=\frac{1}{4}\cdot 1^3\cdot 1=\frac{1}{4}$

답 $\frac{1}{4}$

265 $\angle PAT=\theta$, $\angle OAT=\frac{\pi}{2}$이므로

$\angle OAP=\frac{\pi}{2}-\theta$

$\therefore \overline{AP}=2\cdot\overline{OA}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$
$=8\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=8\sin\theta,$

일품 BOX

- $\sin 2x=2\sin x\cos x$
- $10=9+1$
  $=9+\sin^2 x+\cos^2 x$
- $(-\sqrt{10}-2)^2+5$
  $=10+4\sqrt{10}+4+5$
  $=19+4\sqrt{10}$
- $\sin(x+2x)$
  $=\sin x\cos 2x$
  $+\cos x\sin 2x$
  $=\sin x(1-2\sin^2 x)$
  $+2\sin x\cos^2 x$
  $=\sin x-2\sin^3 x$
  $+2\sin x(1-\sin^2 x)$
  $=3\sin x-4\sin^3 x$
- 점 O에서 $\overline{AP}$에 내린 수선의 발을 H라 하면
  $\overline{AH}=\overline{OA}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$
  또 △AOP는 이등변삼각형이므로
  $\overline{AH}=\overline{HP}$
  $\therefore \overline{AP}=2\overline{AH}$
- 삼각형 AOP는 이등변삼각형이므로
  $\angle AOP$
  $=\pi-2\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$
  $=2\theta$
- a^3-b^3
  $=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

$\overline{AT}=2\overline{AP}=16\sin\theta$

또 $\angle AOP=2\theta$이므로 $\overline{AQ}=4\tan 2\theta$

$\therefore \lim_{\theta\to 0+}\frac{\overline{AT}}{\overline{AQ}}=\lim_{\theta\to 0+}\frac{16\sin\theta}{4\tan 2\theta}$
$=\lim_{\theta\to 0+}\left(2\cdot\frac{\sin\theta}{\theta}\cdot\frac{2\theta}{\tan 2\theta}\right)$
$=2\cdot 1\cdot 1=2$

답 ②

266 해결 과정 $\overline{OP_1}=1$이므로 직각삼각형 OP_1H_1에서

$\overline{OH_1}=\cos\theta$, $\overline{H_1P_1}=\sin\theta$

$\therefore x_1=\cos\theta, y_1=\sin\theta$

$\overline{OP_2}=\overline{OH_1}=\cos\theta$이므로 직각삼각형 OP_2H_2에서

$\overline{OH_2}=\cos\theta\cos\theta=\cos^2\theta$

$\therefore x_2=\cos^2\theta$

$\overline{OP_3}=\overline{OH_2}=\cos^2\theta$이므로 직각삼각형 OP_3H_3에서

$\overline{OH_3}=\cos^2\theta\cos\theta=\cos^3\theta$

$\therefore x_3=\cos^3\theta$ ● 30%

또 $l=\overline{OP_1}\cdot\theta=\theta$이므로 ● 10%

$\lim_{\theta\to 0+}\left(\frac{1-x_3}{l^3}\cdot\frac{y_1}{x_1}\right)$
$=\lim_{\theta\to 0+}\left(\frac{1-\cos^3\theta}{\theta^3}\cdot\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)$
$=\lim_{\theta\to 0+}\left\{\frac{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta+\cos^2\theta)}{\theta^3}\cdot\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right\}$
$=\lim_{\theta\to 0+}\left\{\frac{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}{\theta^2(1+\cos\theta)}\cdot\frac{\sin\theta}{\theta}\cdot\frac{1+\cos\theta+\cos^2\theta}{\cos\theta}\right\}$
$=\lim_{\theta\to 0+}\left(\frac{\sin^2\theta}{\theta^2}\cdot\frac{1}{1+\cos\theta}\cdot\frac{\sin\theta}{\theta}\cdot\frac{1+\cos\theta+\cos^2\theta}{\cos\theta}\right)$
$=1^2\cdot\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 3=\frac{3}{2}$ ● 50%

답 구하기 따라서 $p=2, q=3$이므로

$p+q=5$ ● 10%

답 5

267 $x\to\frac{\pi}{2}$일 때 (분자)$\to 0$이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모)$\to 0$이다.

즉 $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}f(x)=0$이므로 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$

$f(x)=x^2+ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi^2}{4}+\frac{a}{2}\pi+b=0$

$\therefore b=-\frac{a}{2}\pi-\frac{\pi^2}{4}$

$x-\frac{\pi}{2}=t$로 놓으면 $x\to\frac{\pi}{2}$일 때 $t\to 0$이므로

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2(2x-\pi)}{f(x)}=\lim_{t\to0}\frac{\sin^2 2t}{f\left(t+\frac{\pi}{2}\right)}$$

$$=\lim_{t\to0}\left(\frac{\sin 2t}{2t}\right)^2\cdot\frac{4t^2}{f\left(t+\frac{\pi}{2}\right)}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{4t^2}{f\left(t+\frac{\pi}{2}\right)}$$

$f(x)=x^2+ax-\frac{a}{2}\pi-\frac{\pi^2}{4}$에서

$$f\left(t+\frac{\pi}{2}\right)=t^2+(\pi+a)t$$

즉

$$\lim_{t\to0}\frac{4t^2}{f\left(t+\frac{\pi}{2}\right)}=\lim_{t\to0}\frac{4t^2}{t^2+(\pi+a)t}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{4t}{t+\pi+a}\quad\cdots\cdots ㉠$$

$$=4$$

㉠에서 $t\to0$일 때 (분자)$\to0$이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모)$\to0$이다.

즉 $\lim_{t\to0}(t+\pi+a)=0$이므로 $\pi+a=0$

$\therefore a=-\pi$

따라서 $b=\frac{\pi^2}{2}-\frac{\pi^2}{4}=\frac{\pi^2}{4}$이므로

$$f(x)=x^2-\pi x+\frac{\pi^2}{4}$$

$$\therefore f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\pi^2$$

답 ③

1등급 비밀노트

$aa'\neq0$이고 $\lim_{x\to0}\frac{a'x^2+b'x+c'}{ax^2+bx+c}=\alpha$ (α는 0이 아닌 상수)일 때

① $c'=0$이면 $c=0$

② $b'=0$, $c'=0$이면 $b=0$, $c=0$

268 $f(\theta)f(-\theta)=\frac{1-\sin\theta}{1-\sin3\theta}\cdot\frac{1+\sin\theta}{1+\sin3\theta}$

$$=\frac{1-\sin^2\theta}{1-\sin^2 3\theta}$$

$$=\frac{\cos^2\theta}{\cos^2 3\theta}$$

$\theta-\frac{\pi}{2}=t$로 놓으면 $\theta\to\frac{\pi}{2}$일 때 $t\to0$이므로

$$\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}}f(\theta)f(-\theta)=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2\theta}{\cos^2 3\theta}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{\cos^2\left(t+\frac{\pi}{2}\right)}{\cos^2 3\left(t+\frac{\pi}{2}\right)}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{(-\sin t)^2}{\sin^2 3t}$$

$$=\lim_{t\to0}\left(\frac{\sin t}{\sin 3t}\right)^2$$

일품 BOX

$f\left(t+\frac{\pi}{2}\right)$
$=\left(t+\frac{\pi}{2}\right)^2+a\left(t+\frac{\pi}{2}\right)$
$-\frac{a}{2}\pi-\frac{\pi^2}{4}$
$=t^2+\pi t+\frac{\pi^2}{4}+at$
$+\frac{a}{2}\pi-\frac{a}{2}\pi-\frac{\pi^2}{4}$
$=t^2+(\pi+a)t$

$f(-\theta)$
$=\frac{1-\sin(-\theta)}{1-\sin(-3\theta)}$
$=\frac{1+\sin\theta}{1+\sin3\theta}$

$f'(a)$
$=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$
$=\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

$\cos\left(3t+\frac{3}{2}\pi\right)$
$=\sin 3t$

$$=\lim_{t\to0}\left(\frac{\sin t}{t}\cdot\frac{3t}{\sin 3t}\cdot\frac{1}{3}\right)^2$$

$$=\left(1\cdot1\cdot\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$$

답 ③

269 해결 과정 $2\sqrt{3}\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-4\sin x$

$$=2\sqrt{3}\left(\sin x\cos\frac{\pi}{6}+\cos x\sin\frac{\pi}{6}\right)-4\sin x$$

$$=2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x\right)-4\sin x$$

$$=3\sin x+\sqrt{3}\cos x-4\sin x$$

$$=-\sin x+\sqrt{3}\cos x$$

$$=2\left(-\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right)$$

$$=2\sin\left(x+\frac{2}{3}\pi\right)$$

● 50%

답 구하기 이때 $x+\frac{2}{3}\pi=t$로 놓으면 $x\to-\frac{2}{3}\pi$일 때 $t\to0$이므로

$$\lim_{x\to-\frac{2}{3}\pi}\frac{2\sqrt{3}\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-4\sin x}{x+\frac{2}{3}\pi}$$

$$=\lim_{x\to-\frac{2}{3}\pi}\frac{2\sin\left(x+\frac{2}{3}\pi\right)}{x+\frac{2}{3}\pi}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{2\sin t}{t}$$

$$=2\cdot1=2$$

● 50%

답 2

270 $f(x)=\sqrt{3}\sin x+3\cos x$에서

$$f\left(\frac{2}{3}\pi\right)=\sqrt{3}\sin\frac{2}{3}\pi+3\cos\frac{2}{3}\pi$$

$$=\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$=\frac{3}{2}-\frac{3}{2}=0$$

$$\therefore\lim_{h\to0}\frac{f\left(\frac{2}{3}\pi+h\right)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f\left(\frac{2}{3}\pi+h\right)-f\left(\frac{2}{3}\pi\right)}{h}$$

$$=f'\left(\frac{2}{3}\pi\right)$$

$f'(x)=\sqrt{3}\cos x-3\sin x$이므로

$$f'\left(\frac{2}{3}\pi\right)=\sqrt{3}\cos\frac{2}{3}\pi-3\sin\frac{2}{3}\pi$$

$$=\sqrt{3}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)-3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$=-2\sqrt{3}$$

답 ②

271 $f(x)=\sin x\cos x$에서

$$f'(x)=\cos x\cos x+\sin x(-\sin x)$$

$$=\cos^2 x-\sin^2 x=\cos 2x$$

$f'(\alpha)=\frac{\sqrt{3}}{2}$에서 $\cos 2\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$0\le\alpha\le\frac{\pi}{2}$에서 $0\le 2\alpha\le\pi$이므로

$2\alpha=\frac{\pi}{6}$ $\quad\therefore \alpha=\frac{\pi}{12}$

답 ②

272 $f(x)=\begin{cases} ax+\sin x & (0\le x\le \pi) \\ -ax-\sin x & (-\pi\le x<0)\end{cases}$이므로

$f'(x)=\begin{cases} a+\cos x & (0<x<\pi) \\ -a-\cos x & (-\pi<x<0)\end{cases}$

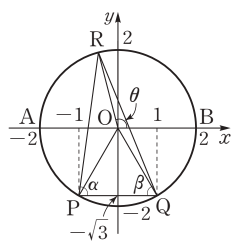
함수 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하므로

$\lim_{x\to 0+}(a+\cos x)=\lim_{x\to 0-}(-a-\cos x)$

즉 $a+1=-a-1$이므로 $\quad a=-1$

답 ②

273 A$(-2,\ 0)$, B$(2,\ 0)$이라 하면



$\angle\text{AOP}=\angle\text{BOQ}=\frac{\pi}{3}$

이므로

$\angle\text{ROP}=(\pi-\theta)+\frac{\pi}{3}$

$=\frac{4}{3}\pi-\theta,$

$\angle\text{ROQ}=\frac{\pi}{3}+\theta$

$\therefore \alpha=\frac{\pi}{6}+\frac{\theta}{2},\ \beta=\frac{2}{3}\pi-\frac{\theta}{2}$

이것을 $\sqrt{3}\sin\alpha=2\sin\beta$에 대입하면

$\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\theta}{2}\right)=2\sin\left(\frac{2}{3}\pi-\frac{\theta}{2}\right)$

$\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}\cos\frac{\theta}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{\theta}{2}\right)$

$=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\frac{\theta}{2}+\frac{1}{2}\sin\frac{\theta}{2}\right)$

$\frac{1}{2}\sin\frac{\theta}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\frac{\theta}{2}$

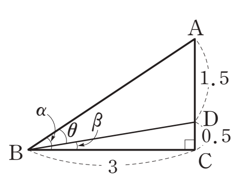
$\therefore \tan\frac{\theta}{2}=\sqrt{3}$

이때 $0<\theta<\pi$에서 $0<\frac{\theta}{2}<\frac{\pi}{2}$이므로 $\quad\frac{\theta}{2}=\frac{\pi}{3}$

$\therefore \theta=\frac{2}{3}\pi$

답 ④

274 오른쪽 그림과 같이 액자의 위 끝을 A, 아래 끝을 D, 사람의 눈의 위치를 B, 사람의 시선이 벽에 수직으로 닿는 지점을 C라 하자.



$\angle\text{ABC}=\alpha$, $\angle\text{DBC}=\beta$라 하면

$\theta=\alpha-\beta$

일품 BOX

- $\tan(\angle\text{AOP})=\frac{|-\sqrt{3}|}{|-1|}=\sqrt{3}$ 이므로 $\angle\text{AOP}=\frac{\pi}{3}$

 $\tan(\angle\text{BOQ})=\frac{|-\sqrt{3}|}{|1|}=\sqrt{3}$ 이므로 $\angle\text{BOQ}=\frac{\pi}{3}$

- $\sin(x+\alpha)=1$일 때 최댓값을 갖는다.

- (거리) $=$(속력)$\times$(시간)

- α는 호 QR에 대한 원주각이므로 $\alpha=\frac{1}{2}\angle\text{ROQ}$

 β는 호 PR에 대한 원주각이므로 $\beta=\frac{1}{2}\angle\text{ROP}$

- $0<\theta<\pi$에서 $0<\frac{\theta}{2}<\frac{\pi}{2}$이므로 $\cos\frac{\theta}{2}\neq 0$

 양변을 $\frac{1}{2}\cos\frac{\theta}{2}$로 나누면 $\tan\frac{\theta}{2}=\sqrt{3}$

$\tan\alpha=\frac{2}{3}$, $\tan\beta=\frac{0.5}{3}=\frac{1}{6}$이므로

$\tan\theta=\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

$=\frac{\frac{2}{3}-\frac{1}{6}}{1+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{6}}=\frac{9}{20}$

$\therefore 20\tan\theta=9$

답 9

275 $f(x)=2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\sqrt{3}\cos x+1$

$=2\left(\sin x\cos\frac{\pi}{3}+\cos x\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$+\sqrt{3}\cos x+1$

$=\sin x+2\sqrt{3}\cos x+1$

$=\sqrt{13}\sin(x+\alpha)+1$

$\left(\text{단, }\sin\alpha=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}},\ \cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{13}}\right)$

따라서 $f(x)$는 $x+\alpha=\frac{\pi}{2}$, 즉 $x=\frac{\pi}{2}-\alpha$일 때 최댓값 $\sqrt{13}+1$을 가지므로 $\quad\theta=\frac{\pi}{2}-\alpha$

$\therefore \cos\theta=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$

$=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}}=\frac{2\sqrt{39}}{13}$

답 ⑤

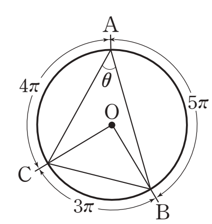
276 10초 동안 가은이가 뛴 거리는

$0.5\pi\times 10=5\pi(\text{m})$

8초 동안 민재가 뛴 거리는

$0.5\pi\times 8=4\pi(\text{m})$

트랙의 중심을 O라 하면 오른쪽 그림에서



$\angle\text{BOC}=2\pi\cdot\frac{3\pi}{12\pi}$

$=\frac{\pi}{2}$

또 $2\angle\text{BAC}=\angle\text{BOC}$에서

$2\theta=\frac{\pi}{2}$ $\quad\therefore \theta=\frac{\pi}{4}$

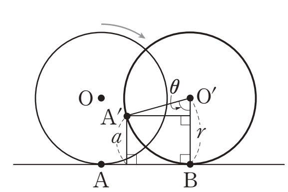
$\therefore \sin^2\frac{\theta}{2}=\frac{1-\cos\theta}{2}$

$=\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2}$

$=\frac{2-\sqrt{2}}{4}$

답 ④

277 오른쪽 그림에서



$\overline{\text{AB}}=\overset{\frown}{\text{A}'\text{B}}=r\theta$

또 $a=r-r\cos\theta$

$=r(1-\cos\theta)$

이므로

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{ar}{\overline{AB}^2}=\lim_{\theta\to0+}\frac{r^2(1-\cos\theta)}{(r\theta)^2}$$
$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}$$
$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}{\theta^2(1+\cos\theta)}$$
$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{1-\cos^2\theta}{\theta^2(1+\cos\theta)}$$
$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin^2\theta}{\theta^2(1+\cos\theta)}$$
$$=\lim_{\theta\to0+}\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^2\cdot\frac{1}{1+\cos\theta}$$
$$=1^2\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

답 ①

일품 BOX

부채꼴의 호의 길이와 넓이
반지름의 길이가 r, 중심각의 크기가 θ인 부채꼴의 호의 길이를 l, 넓이를 S라 하면
① $l=r\theta$
② $S=\frac{1}{2}r^2\theta=\frac{1}{2}rl$

278 $f(x)=\lim_{t\to x}\frac{t\sin x-x\sin t}{t-x}$

$$=\lim_{t\to x}\frac{t\sin x-x\sin x-x\sin t+x\sin x}{t-x}$$
$$=\lim_{t\to x}\frac{(t-x)\sin x-x(\sin t-\sin x)}{t-x}$$
$$=\sin x-x\lim_{t\to x}\frac{\sin t-\sin x}{t-x}$$
$$=\sin x-x\cos x$$

따라서 $f'(x)=\cos x-\cos x+x\sin x=x\sin x$이므로

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}\cdot1=\frac{\pi}{2}$$

즉 $p=2$, $q=1$이므로

$p+q=3$

답 3

함수 $y=f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수는
$f'(a)$
$=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

1등급 비밀노트

$\lim_{t\to x}\frac{\sin t-\sin x}{t-x}$에서 $g(t)=\sin t$라 하면 $\lim_{t\to x}\frac{\sin t-\sin x}{t-x}$는 $g'(t)=\cos t$에 t 대신 x를 대입한 것이므로

$\lim_{t\to x}\frac{\sin t-\sin x}{t-x}=\cos x$

1등급 완성하기

▶ 본책 55쪽

279 각 θ를 나타내는 동경과 각 4θ를 나타내는 동경이 일치하므로

$4\theta-\theta=2n\pi$ (n은 정수)

$3\theta=2n\pi \quad \therefore \theta=\frac{2n\pi}{3}$ …… ㉠

두 각 α, β를 나타내는 동경이 일치하면
➡ $\alpha-\beta=2n\pi$
(단, n은 정수)

$\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$에서 $\pi<\frac{2n\pi}{3}<\frac{3}{2}\pi$이므로

$\frac{3}{2}<n<\frac{9}{4} \quad \therefore n=2$

이것을 ㉠에 대입하면 $\theta=\frac{4}{3}\pi$

$\therefore \sin(\theta-\pi)=\sin\left(\frac{4}{3}\pi-\pi\right)=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

답 $\frac{\sqrt{3}}{2}$

280 해결 과정 원의 넓이가 36π이므로 원의 반지름의 길이를 r라 하면

$\pi r^2=36\pi \quad \therefore r=6\ (\because r>0)$ ● 30%

색칠하지 않은 부채꼴 OAB의 호 AB의 길이는 반지름의 길이의 $\frac{3}{2}$배이므로 색칠하지 않은 부채꼴 OAB의 중심각의 크기를 θ라 하면

$\frac{3}{2}r=r\theta \quad \therefore \theta=\frac{3}{2}$ ● 30%

즉 색칠하지 않은 부채꼴 OAB의 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot6^2\cdot\frac{3}{2}=27$ ● 20%

답 구하기 따라서 색칠한 부분의 넓이는

$36\pi-27$ ● 20%

답 $36\pi-27$

281 ㄱ. △OAB에서 ∠OAB$=90°$이므로

$\tan\theta=\frac{\overline{AB}}{\overline{OA}} \quad \therefore \overline{AB}=\tan\theta$

ㄴ. △OAB에서 $\cos\theta=\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}}$

$\therefore \overline{OB}=\frac{1}{\cos\theta}$

ㄷ. △ABC에서 ∠ABC$=\theta$이고 ∠BAC$=90°$이므로

$\tan\theta=\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$

$\therefore \overline{AC}=\overline{AB}\tan\theta=\tan^2\theta$

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ④

∠AOB+∠ACB$=90°$이고
∠ABC+∠ACB$=90°$이므로
∠ABC=∠AOB
$=\theta$

282 $\sin x\cos y<0$이므로

$\sin x>0$, $\cos y<0$ 또는 $\sin x<0$, $\cos y>0$

(i) $\sin x>0$, $\cos y<0$일 때,

$0<x<\pi$, $\frac{\pi}{2}<y<\frac{3}{2}\pi$

(ii) $\sin x<0$, $\cos y>0$일 때,

$\pi<x<2\pi$, $0<y<\frac{\pi}{2}$

또는 $\pi<x<2\pi$, $\frac{3}{2}\pi<y<2\pi$

(i), (ii)에서 점 (x, y)가 속하는 영역을 좌표평면 위에 나타내면 ①과 같다.

답 ①

283 $\cos\theta=\sin^2\theta$이므로

$\cos^2\theta+\cos\theta=\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$

$\therefore \sin^8\theta+2\sin^6\theta+3\sin^4\theta+2\sin^2\theta$

$=(\sin^2\theta)^4+2(\sin^2\theta)^3+3(\sin^2\theta)^2+2\sin^2\theta$

$=\cos^4\theta+2\cos^3\theta+3\cos^2\theta+2\cos\theta$

$=(\cos^4\theta+2\cos^3\theta+\cos^2\theta)+2\cos^2\theta+2\cos\theta$

$=(\cos^2\theta+\cos\theta)^2+2(\cos^2\theta+\cos\theta)$

$=1^2+2\cdot 1=3$

답 ③

284 해결 과정 $\sin\theta-3\cos\theta=3$에서 양변을 $\cos\theta$로 나누면

$\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}-3=\dfrac{3}{\cos\theta}$

$\tan\theta-3=3\sec\theta$ ● 30%

위의 식의 양변을 제곱하면

$\tan^2\theta-6\tan\theta+9=9\sec^2\theta$

$\tan^2\theta-6\tan\theta+9=9(1+\tan^2\theta)$

$4\tan^2\theta+3\tan\theta=0$

$\tan\theta(4\tan\theta+3)=0$ ● 50%

답 구하기 $\tan\theta\neq0$이므로

$\tan\theta=-\dfrac{3}{4}$ ● 20%

답 $-\dfrac{3}{4}$

일품 BOX

$\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$에서

$\cos\theta\neq0$

285 $1<\dfrac{\pi}{3}<2<\dfrac{2}{3}\pi$이고 $\sin\dfrac{\pi}{3}=\sin\dfrac{2}{3}\pi$이므로

$\sin 1<\sin 2$

$\dfrac{\pi}{4}<1<\dfrac{3}{4}\pi<3<\pi$이고 $\sin\dfrac{\pi}{4}=\sin\dfrac{3}{4}\pi$이므로

$\sin 3<\sin 1$

또 $\pi<4<2\pi$이므로 $\sin 4<0$

$\therefore \sin 4<\sin 3<\sin 1<\sin 2$

답 ④

286 해결 과정 함수 $f(x)=\cos kx$의 주기는 $\dfrac{2\pi}{k}$이므로

$\dfrac{\alpha+\beta}{2}=\dfrac{\pi}{k}$ $\therefore \alpha+\beta=\dfrac{2\pi}{k}$ ● 30%

또 주기가 $\dfrac{2\pi}{k}$이므로 $\gamma=\alpha+\dfrac{2\pi}{k}$ ● 30%

답 구하기 $\therefore f(\alpha+\beta+\gamma)=f\left(\dfrac{2\pi}{k}+\alpha+\dfrac{2\pi}{k}\right)$

$=f\left(\dfrac{4\pi}{k}+\alpha\right)$

$=\cos k\left(\dfrac{4\pi}{k}+\alpha\right)$

$=\cos(4\pi+k\alpha)$

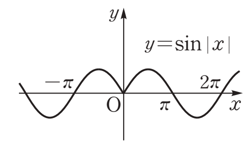
$=\cos k\alpha=\dfrac{2}{3}$ ● 40%

답 $\dfrac{2}{3}$

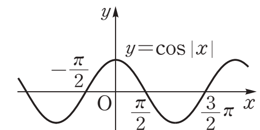
일품 BOX

$0\le x\le\dfrac{2\pi}{k}$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=\dfrac{\pi}{k}$에 대하여 대칭이다.

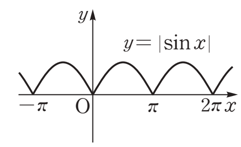
287 ㄱ. $y=\sin|x|$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $y=\sin x$, $y=\sin|x|$의 그래프는 일치하지 않는다.

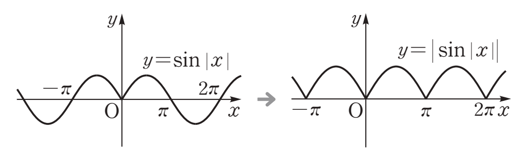


ㄴ. $y=\cos|x|$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $y=\cos x$, $y=\cos|x|$의 그래프는 일치한다.



ㄷ. $y=|\sin x|$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $y=|\sin|x||$의 그래프는 다음과 같다.





따라서 두 그래프는 일치한다.

이상에서 두 함수의 그래프가 일치하는 것끼리 짝지어진 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ④

일품 BOX

(i) $x\ge0$일 때

$y=\sin|x|$

$=\sin x$

(ii) $x<0$일 때

$y=\sin|x|$

$=\sin(-x)$

$=-\sin x$

(i), (ii)에서 $y=\sin x$, $y=\sin|x|$의 그래프는 일치하지 않는다.

(i) $x\ge0$일 때

$y=\cos|x|$

$=\cos x$

(ii) $x<0$일 때

$y=\cos|x|$

$=\cos(-x)$

$=\cos x$

(i), (ii)에서 $y=\cos x$, $y=\cos|x|$의 그래프는 일치한다.

1등급 비밀노트

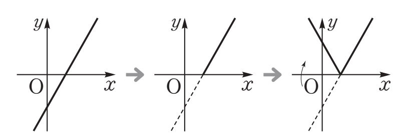
절댓값 기호를 포함한 함수의 그래프

(1) $y=|f(x)|$의 그래프

(i) $y=f(x)$의 그래프를 그린다.

(ii) $y\ge0$인 부분은 그대로 둔다.

(iii) $y<0$인 부분은 x축에 대하여 대칭이동한다.

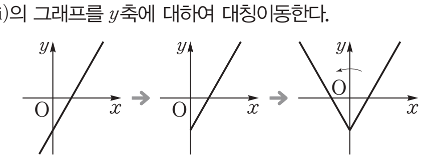


(2) $y=f(|x|)$의 그래프

(i) $y=f(x)$의 그래프를 그린다.

(ii) $x<0$인 부분을 없애고 $x\ge0$인 부분만 남긴다.

(iii) (ii)의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한다.



288 문제 이해 함수 $y=\sin 6x$의 주기는

$\dfrac{2\pi}{6}=\dfrac{\pi}{3}$

함수 $y=\cos\dfrac{4}{3}x$의 주기는 $\dfrac{2\pi}{\frac{4}{3}}=\dfrac{3}{2}\pi$ ● 30%

해결 과정 $\dfrac{\pi}{3}\cdot m=\dfrac{3}{2}\pi\cdot n$ (m, n은 자연수)에서

$2m=9n$

등식을 만족시키는 최소의 자연수 m, n은 $m=9$, $n=2$이므로 함수 $f(x)$의 주기는 3π이다.

일품 BOX

$\dfrac{\pi}{3}\cdot 9=\dfrac{3}{2}\pi\cdot 2=3\pi$

$\therefore\ p=3\pi$ ● 40%

답 구하기 $\therefore\ \sin\frac{p}{6}+\cos\frac{2}{9}p=\sin\frac{\pi}{2}+\cos\frac{2}{3}\pi$

$$=1+\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}$$ ● 30%

답 $\frac{1}{2}$

289 $\beta=\pi-\alpha$이므로 $\sin\beta=\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$

$$\therefore\ \frac{\sin\beta}{\cos\alpha}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\tan\alpha$$

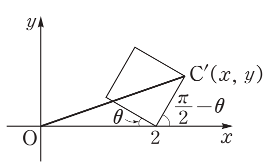
이때 직선 $y=\frac{2}{3}x$가 x축의 양의 부분과 이루는 각의 크기가 $\frac{\pi}{2}-\alpha$이므로

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\frac{2}{3}\qquad \therefore\ \cot\alpha=\frac{2}{3}$$

$$\therefore\ \tan\alpha=\frac{3}{2}$$

답 $\frac{3}{2}$

290 점 C′의 좌표를 $(x,\ y)$로 놓으면 오른쪽 그림에서



$$x=2+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$$

$$=2+\sin\theta$$

$$y=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta$$

$$\therefore\ \{f(\theta)\}^2=\overline{\mathrm{OC'}}^2=x^2+y^2=(2+\sin\theta)^2+\cos^2\theta$$

$$=4+4\sin\theta+\sin^2\theta+\cos^2\theta$$

$$=5+4\sin\theta$$

따라서 $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$에서 함수 $y=\{f(\theta)\}^2$의 그래프의 개형은 ②와 같다.

답 ②

291 $\tan\frac{\pi}{10}=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{5}\pi\right)=\cot\frac{2}{5}\pi$,

$\tan\frac{\pi}{5}=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3}{10}\pi\right)=\cot\frac{3}{10}\pi$이므로

$$\log\left(\tan\frac{\pi}{10}\right)+\log\left(\tan\frac{\pi}{5}\right)+\log\left(\tan\frac{3}{10}\pi\right)$$

$$+\log\left(\tan\frac{2}{5}\pi\right)$$

$$=\log\left(\tan\frac{\pi}{10}\tan\frac{\pi}{5}\tan\frac{3}{10}\pi\tan\frac{2}{5}\pi\right)$$

$$=\log\left\{\left(\tan\frac{\pi}{10}\tan\frac{2}{5}\pi\right)\left(\tan\frac{\pi}{5}\tan\frac{3}{10}\pi\right)\right\}$$

$$=\log\left\{\left(\cot\frac{2}{5}\pi\tan\frac{2}{5}\pi\right)\left(\cot\frac{3}{10}\pi\tan\frac{3}{10}\pi\right)\right\}$$

$$=\log(1\cdot1)=0$$

답 0

$\cot\theta\tan\theta=1$

292 $y=\left\{1+2\sin^2\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\right\}\{1+\sin^2(\pi-x)\}$

$$=(1+2\cos^2x)(1+\sin^2x)$$

$\sin^2x=1-\cos^2x$

$$=(1+2\cos^2x)(2-\cos^2x)$$

$$=-2\cos^4x+3\cos^2x+2$$

$\cos^2x=t$로 놓으면 $0\le x<2\pi$에서 $0\le t\le1$이고

$$y=-2t^2+3t+2=-2\left(t-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{25}{8}$$

따라서 y는 $t=\frac{3}{4}$일 때 최댓값 $\frac{25}{8}$를 갖는다. 답 ④

일품 BOX

계수가 실수인 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 D라 하면

① 실근을 갖는다. $\Longleftrightarrow D\ge0$

② 허근을 갖는다. $\Longleftrightarrow D<0$

293 해결 과정 이차방정식이 두 실근을 가지므로 판별식을 D라 하면

$$D=\cos^2\theta-4\cdot\frac{1}{4}\sin^2\theta$$

$$=\cos^2\theta-\sin^2\theta=1-2\sin^2\theta\ge0$$

$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta$

$$\therefore\ 0\le\sin^2\theta\le\frac{1}{2}$$ ● 30%

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=\cos\theta,\ \alpha\beta=\frac{1}{4}\sin^2\theta$$

이므로

$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$
$=(a-b)^2+2ab$

$$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=\cos^2\theta-\frac{1}{2}\sin^2\theta$$

$$=1-\frac{3}{2}\sin^2\theta$$

$0\le\sin^2\theta\le\frac{1}{2}$이므로 $-\frac{3}{4}\le-\frac{3}{2}\sin^2\theta\le0$

$$\therefore\ \frac{1}{4}\le1-\frac{3}{2}\sin^2\theta\le1$$ ● 40%

답 구하기 따라서 $\alpha^2+\beta^2$의 최댓값은 1, 최솟값은 $\frac{1}{4}$이므로 구하는 합은 $1+\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$ ● 30%

답 $\frac{5}{4}$

원 $x^2+y^2=r^2$ 위의 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은
$x_1x+y_1y=r^2$

294 원 $x^2+y^2=4$ 위의 두 점 $\mathrm{P}(1,\ \sqrt{3})$, $\mathrm{Q}(-\sqrt{2},\ \sqrt{2})$에서의 접선의 방정식은 각각

$$x+\sqrt{3}y=4,\ -\sqrt{2}x+\sqrt{2}y=4$$

이므로 두 접선이 x축의 양의 부분과 이루는 각의 크기를 각각 $\alpha,\ \beta$라 하면

$$\tan\alpha=-\frac{1}{\sqrt{3}},\ \tan\beta=1$$

$$\therefore\ \tan\theta=|\tan(\alpha-\beta)|=\left|\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\right|$$

$$=\left|\frac{-\frac{1}{\sqrt{3}}-1}{1+\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\cdot1}\right|=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$$

$$=2+\sqrt{3}$$

답 ④

295 $\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+\sin x$

$$=\left(\cos x\cos\frac{\pi}{6}-\sin x\sin\frac{\pi}{6}\right)+\sin x$$

$=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x-\frac{1}{2}\sin x\right)+\sin x$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x+\frac{1}{2}\sin x$

$=\sin\frac{\pi}{3}\cos x+\cos\frac{\pi}{3}\sin x$

$=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$

즉 $\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=0$이고 $0\le x\le 2\pi$에서

$\frac{\pi}{3}\le x+\frac{\pi}{3}\le\frac{7}{3}\pi$이므로

$x+\frac{\pi}{3}=\pi$ 또는 $x+\frac{\pi}{3}=2\pi$

$\therefore x=\frac{2}{3}\pi$ 또는 $x=\frac{5}{3}\pi$

따라서 모든 해의 곱은

$\frac{2}{3}\pi\cdot\frac{5}{3}\pi=\frac{10}{9}\pi^2$

답 ③

296 $\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)$

$=\left(\sin\theta\cos\frac{\pi}{3}+\cos\theta\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$\cdot\left(\sin\theta\cos\frac{\pi}{3}-\cos\theta\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$=\frac{1}{4}(\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta)(\sin\theta-\sqrt{3}\cos\theta)$

$=\frac{1}{4}(\sin^2\theta-3\cos^2\theta)=\frac{1}{4}(\sin^2\theta-3+3\sin^2\theta)$

$=\sin^2\theta-\frac{3}{4}$

즉 $\sin^2\theta-\frac{3}{4}=\frac{1}{8}$이므로 $\quad\sin^2\theta=\frac{7}{8}$

$\therefore \sin\theta=\frac{\sqrt{14}}{4}\ \left(\because 0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$

답 ⑤

297 해결 과정 $\angle\mathrm{APO}=\alpha$, $\angle\mathrm{BPO}=\beta$라 하면

$\tan\alpha=\frac{5}{x}$, $\tan\beta=\frac{10}{x}$ ● 20%

$\therefore \tan(\angle\mathrm{APB})=\tan(\beta-\alpha)$

$=\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha}=\frac{\frac{10}{x}-\frac{5}{x}}{1+\frac{10}{x}\cdot\frac{5}{x}}$

$=\frac{\frac{5}{x}}{1+\frac{50}{x^2}}=\frac{5}{x+\frac{50}{x}}$ ● 30%

이때 $x>0$, $\frac{50}{x}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$x+\frac{50}{x}\ge 2\sqrt{x\cdot\frac{50}{x}}=10\sqrt{2}$

(단, 등호는 $x=5\sqrt{2}$일 때 성립)

일품 BOX

산술평균과 기하평균의 관계

$a>0$, $b>0$일 때,

$\frac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}$

(단, 등호는 $a=b$일 때 성립)

$x=\frac{50}{x}$에서

$x^2=50$

$\therefore x=5\sqrt{2}\ (\because x>0)$

$\therefore \tan(\angle\mathrm{APB})=\frac{5}{x+\frac{50}{x}}\le\frac{1}{2\sqrt{2}}$ ● 30%

답 구하기 따라서 $x=5\sqrt{2}$일 때 $\tan(\angle\mathrm{APB})$의 값이 최대이고, 이때 $\angle\mathrm{APB}$의 크기도 최대이므로

$\overline{\mathrm{OP}}^2=x^2=(5\sqrt{2})^2=50$ ● 20%

답 50

298 $\frac{1}{\tan A}=\tan B$에서 $\tan A\tan B=1$이므로

$\frac{\sin A}{\cos A}\cdot\frac{\sin B}{\cos B}=1$

$\cos A\cos B-\sin A\sin B=0$

$\therefore \cos(A+B)=0$

이때 $A+B=\pi-C$이므로

삼각형 ABC에서 $A+B+C=\pi$

$\cos(\pi-C)=-\cos C=0$

$\therefore \cos C=0$

$0<C<\pi$이므로 $\quad C=\frac{\pi}{2}$

따라서 삼각형 ABC는 $C=90^\circ$인 직각삼각형이다.

답 ①

다른 풀이 $\tan A=\cot\left(\frac{\pi}{2}-A\right)$이므로

$\frac{1}{\tan A}=\tan B$에서

$\frac{1}{\cot\left(\frac{\pi}{2}-A\right)}=\tan B,\quad \tan\left(\frac{\pi}{2}-A\right)=\tan B$

이때 $0<A+B<\pi$이므로 $\quad\frac{\pi}{2}-A=B$

$\therefore A+B=\frac{\pi}{2}$

$\therefore C=\frac{\pi}{2}$

299 $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{\sin^2\theta+\cos^2\theta}=1$이므로 삼각형 ABC에서 $\overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{3^2-1^2}=2\sqrt{2}$

이때 $\overline{\mathrm{AB}}\cos(\angle\mathrm{ABO})=\overline{\mathrm{OB}}=\cos\theta$이므로

$\overline{\mathrm{AB}}=1$

$\cos(\angle\mathrm{ABO})=\cos\theta\quad\therefore \angle\mathrm{ABO}=\theta$

또 $\angle\mathrm{CBD}=\frac{\pi}{2}-\theta$이므로 삼각형 BCD에서

$\overline{\mathrm{BD}}=\overline{\mathrm{BC}}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\overline{\mathrm{BC}}\sin\theta=2\sqrt{2}\sin\theta$,

$\overline{\mathrm{CD}}=\overline{\mathrm{BC}}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=2\sqrt{2}\cos\theta$

사각형 AODC의 넓이를 $S(\theta)$라 하면

$S(\theta)=\frac{1}{2}(\overline{\mathrm{OA}}+\overline{\mathrm{CD}})\cdot\overline{\mathrm{OD}}$

$=\frac{1}{2}(\sin\theta+2\sqrt{2}\cos\theta)\cdot(\cos\theta+2\sqrt{2}\sin\theta)$

$\overline{\mathrm{OD}}=\overline{\mathrm{OB}}+\overline{\mathrm{BD}}$
$=\cos\theta+2\sqrt{2}\sin\theta$

$=\frac{1}{2}(9\sin\theta\cos\theta+2\sqrt{2})$

$=\frac{9}{2}\sin\theta\cos\theta+\sqrt{2}$

$=\frac{9}{4}\sin 2\theta+\sqrt{2}$

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$에서 $0<2\theta<\pi$이므로

$0<\sin 2\theta\le 1$

$\therefore \sqrt{2}<\frac{9}{4}\sin 2\theta+\sqrt{2}\le\frac{9}{4}+\sqrt{2}$

따라서 사각형 AODC의 넓이의 최댓값은

$\frac{9}{4}+\sqrt{2}$ 답 $\frac{9}{4}+\sqrt{2}$

300 $\sqrt{1+\cos\theta}+\sqrt{1-\cos\theta}$

$=\sqrt{2\cos^2\frac{\theta}{2}}+\sqrt{2\sin^2\frac{\theta}{2}}$

$=\sqrt{2}\cos\frac{\theta}{2}+\sqrt{2}\sin\frac{\theta}{2}$

$=2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{\theta}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{\theta}{2}\right)$

$=2\left(\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\theta}{2}\right)$

$=2\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$

따라서 $a=2$, $b=4$이므로 $ab=8$ 답 ④

301 문제 이해 $3(1+\cos 2\theta)=\cot\theta$에서

$3(1+2\cos^2\theta-1)=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$, $6\cos^2\theta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

$\cos\theta(6\sin\theta\cos\theta-1)=0$

$\therefore \cos\theta=0$ 또는 $6\sin\theta\cos\theta=1$ ● 30%

해결 과정 (i) $\cos\theta=0$일 때,

$\cos 4\theta=2\cos^2 2\theta-1=2(2\cos^2\theta-1)^2-1$

$=2\cdot(-1)^2-1=1$

(ii) $6\sin\theta\cos\theta=1$일 때,

$3\sin 2\theta=1$ $\therefore \sin 2\theta=\frac{1}{3}$

$\therefore \cos 4\theta=1-2\sin^2 2\theta$

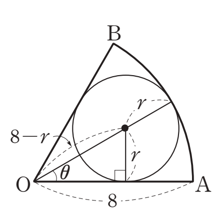
$=1-2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{7}{9}$ ● 50%

답 구하기 (i), (ii)에서

$\cos 4\theta=1$ 또는 $\cos 4\theta=\frac{7}{9}$ ● 20%

답 $\frac{7}{9}$, 1

302 문제 이해 오른쪽 그림과 같이 부채꼴 OAB에 내접하는 원의 반지름의 길이를 r라 하면



$\sin\theta=\frac{r}{8-r}$ ● 30%

해결 과정 $\cos 2\theta=1-2\sin^2\theta$이므로

$1-2\left(\frac{r}{8-r}\right)^2=\frac{3}{4}$, $\left(\frac{r}{8-r}\right)^2=\frac{1}{8}$

$\frac{r}{8-r}=\frac{\sqrt{2}}{4}$, $4r=\sqrt{2}(8-r)$

일품 BOX

$0\le\theta\le\pi$에서

$0\le\frac{\theta}{2}\le\frac{\pi}{2}$이므로

$\sin\frac{\theta}{2}\ge 0$, $\cos\frac{\theta}{2}\ge 0$

호도법과 육십분법의 관계

1라디안$=\frac{180^\circ}{\pi}$

$1^\circ=\frac{\pi}{180}$ 라디안

$x\to a\ (a\ne 0)$일 때 삼각함수의 극한은 $x-a=t$로 치환하여 식을 변형한 후 극한값을 계산한다.

$0<r<8$이므로

$\frac{r}{8-r}>0$

$(4+\sqrt{2})r=8\sqrt{2}$ ● 50%

답 구하기 $\therefore r=\frac{8\sqrt{2}}{4+\sqrt{2}}=\frac{16\sqrt{2}-8}{7}$ ● 20%

답 $\frac{16\sqrt{2}-8}{7}$

303 $\sin 2x=2\sin x\cos x$이므로

$\lim_{x\to 0}\frac{x\cos 2x}{\sin 2x+2\sin x}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{x\cos 2x}{2\sin x\cos x+2\sin x}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{x\cos 2x}{2\sin x(\cos x+1)}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{\cos 2x}{\cos x+1}$

$=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$ 답 ①

304 $90^\circ=\frac{\pi}{2}$이므로 $\frac{90^\circ}{x}=\frac{\pi}{2x}$

$\frac{1}{x}=t$로 놓으면 $x\to\infty$일 때 $t\to 0+$이므로

$\lim_{x\to\infty}x\tan\left(\frac{90^\circ}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}x\tan\frac{\pi}{2x}$

$=\lim_{t\to 0+}\frac{1}{t}\tan\frac{\pi t}{2}$

$=\lim_{t\to 0+}\frac{\tan\frac{\pi t}{2}}{\frac{\pi t}{2}}\cdot\frac{\pi}{2}$

$=1\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$ 답 $\frac{\pi}{2}$

305 해결 과정 $x-\frac{\pi}{2}=t$로 놓으면 $x\to\frac{\pi}{2}$일 때 $t\to 0$이므로 ● 20%

$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{a\cos x}{x^2-\frac{\pi^2}{4}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{a\cos x}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}$

$=\lim_{t\to 0}\frac{a\cos\left(t+\frac{\pi}{2}\right)}{t(t+\pi)}$

$=\lim_{t\to 0}\frac{-a\sin t}{t(t+\pi)}$

$=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}\cdot\frac{-a}{t+\pi}$

$=-\frac{a}{\pi}$ ● 60%

답 구하기 따라서 $-\frac{a}{\pi}=-\frac{6}{\pi}$이므로 $a=6$ ● 20%

답 6

306 $\lim_{h\to 0}\frac{f(\pi+h)-f(\pi-h)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{\{f(\pi+h)-f(\pi)\}-\{f(\pi-h)-f(\pi)\}}{h}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(\pi+h)-f(\pi)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{f(\pi-h)-f(\pi)}{-h}$$

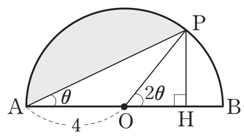
$$=f'(\pi)+f'(\pi)=2f'(\pi)$$

$f'(x)=e^x\sin x+e^x\cos x$이므로

$$2f'(\pi)=2\cdot(-e^\pi)=-2e^\pi$$

답 $-2e^\pi$

307 반원의 중심을 O라 하면



$\overline{OP}=4$, $\angle POB=2\theta$

점 P에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{PH}=\overline{OP}\sin 2\theta=4\sin 2\theta$$

$$\therefore S(\theta)=\frac{1}{2}\cdot 4^2\cdot(\pi-2\theta)-\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 4\sin 2\theta$$

$$=8\pi-16\theta-8\sin 2\theta$$

$$=8\pi-16\theta-16\sin\theta\cos\theta$$

따라서

$$S'(\theta)=-16-16(\cos^2\theta-\sin^2\theta)$$

$$=-16(1+\cos^2\theta-\sin^2\theta)$$

이므로

$$S'\left(\frac{\pi}{4}\right)=-16\left(1+\cos^2\frac{\pi}{4}-\sin^2\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=-16\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)$$

$$=-16$$

답 ④

308 전략 수열 $\{\theta_n\}$의 일반항을 구한 후 $\sin\theta+\sin(2\pi-\theta)=0$임을 이용한다.

Step 1 $\theta_n=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{12}(n-1)=\frac{\pi}{12}n+\frac{\pi}{4}$

Step 2 $1\le n\le 8$에서

$$\theta_n+\theta_{18-n}=\frac{\pi}{12}n+\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{12}(18-n)+\frac{\pi}{4}=2\pi$$

이므로

$$\sin\theta_{18-n}=\sin(2\pi-\theta_n)=-\sin\theta_n$$

$$\therefore \sin\theta_n+\sin\theta_{18-n}=0$$

Step 3 $\therefore \sum_{n=1}^{17}a_n=\sum_{n=1}^{17}\sin\theta_n$

$$=\sum_{n=1}^{8}(\sin\theta_n+\sin\theta_{18-n})+\sin\theta_9$$

$$=0+\sin\pi=0$$

답 ③

309 전략 $g(x)$를 간단히 정리한 후 함수 $y=g(x)$의 그래프를 그려 본다.

Step 1 ㄱ. $g(-x)=\frac{f(-x)+|f(-x)|}{2}$

$$=\frac{\sin(-x)+|\sin(-x)|}{2}$$

$$=\frac{-\sin x+|\sin x|}{2}$$

일품 BOX

$y=g(x)$의 그래프가 y축에 대하여 대칭이면
$g(-x)=g(x)$

$\angle PAB$는 호 PB에 대한 원주각, $\angle POB$는 호 PB에 대한 중심각이므로
$\angle POB=2\angle PAB$
$=2\theta$

(부채꼴 OAP의 넓이) $-$($\triangle$OAP의 넓이)

$(\sin\theta\cos\theta)'$
$=(\sin\theta)'\cos\theta+\sin\theta(\cos\theta)'$
$=\cos^2\theta-\sin^2\theta$

첫째항이 a, 공차가 d인 등차수열의 일반항 a_n은
$a_n=a+(n-1)d$

$\theta_9=\frac{9}{12}\pi+\frac{\pi}{4}$
$=\pi$

$(f\circ g)(x)=1$, $(f\circ h)(x)=1$ 또는 $(f\circ g)(x)=-1$, $(f\circ h)(x)=-1$ 인 경우

$(f\circ g)(x)=1$, $(f\circ h)(x)=-1$ 또는 $(f\circ g)(x)=-1$, $(f\circ h)(x)=1$ 인 경우

$|\sin(-x)|$
$=|-\sin x|$
$=|\sin x|$

$$=\frac{-f(x)+|f(x)|}{2}\neq g(x)$$

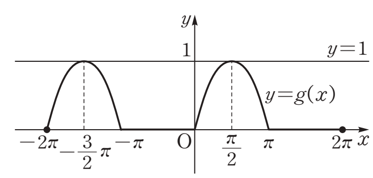
따라서 함수 $y=g(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이 아니다.

Step 2

ㄴ. $g(x)=\frac{f(x)+|f(x)|}{2}=\frac{\sin x+|\sin x|}{2}$

$$=\begin{cases}\sin x & (-2\pi\le x\le -\pi \text{ 또는 } 0\le x\le \pi)\\ 0 & (-\pi\le x\le 0 \text{ 또는 } \pi\le x\le 2\pi)\end{cases}$$

따라서 함수 $y=g(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



즉 방정식 $g(x)=1$의 모든 실근은 $-\frac{3}{2}\pi$, $\frac{\pi}{2}$이므로 그 합은

$$-\frac{3}{2}\pi+\frac{\pi}{2}=-\pi$$

Step 3 ㄷ. 부등식 $g(x)\le 0$의 해는 $x=-2\pi$ 또는 $-\pi\le x\le 0$ 또는 $\pi\le x\le 2\pi$이다.

이상에서 옳은 것은 ㄴ뿐이다.

답 ②

310 전략 $(f\circ g)(x)=1$, $(f\circ h)(x)=1$을 만족시키는 x의 값을 각각 구해 본다.

Step 1 구간 $(0, 10\pi)$에서 $(f\circ g)(x)=1$을 만족시키는 x의 값의 집합을 A라 하면

$$A=\left\{\frac{\pi}{2},\ \pi,\ \frac{3}{2}\pi,\ 2\pi,\ \frac{5}{2}\pi,\ \cdots,\ \frac{19}{2}\pi\right\}$$

$$\therefore (f\circ g)(x)=\begin{cases}1 & (x\in A)\\ -1 & (x\notin A)\end{cases}$$

Step 2 또 구간 $(0, 10\pi)$에서 $(f\circ h)(x)=1$을 만족시키는 x의 값의 집합을 B라 하면

$$B=\left\{\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{2},\ \frac{3}{4}\pi,\ \pi,\ \cdots,\ \frac{39}{4}\pi\right\}$$

$$\therefore (f\circ h)(x)=\begin{cases}1 & (x\in B)\\ -1 & (x\notin B)\end{cases}$$

Step 3

$$\therefore i(x)=\begin{cases}1 & (x\in(A\cap B) \text{ 또는 } x\in(A^C\cap B^C))\\ -1 & (x\in(A-B) \text{ 또는 } x\in(B-A))\end{cases}$$

이때 $A\subset B$이므로

$$A-B=\varnothing,\ B-A=\left\{\frac{\pi}{4},\ \frac{3}{4}\pi,\ \frac{5}{4}\pi,\ \cdots,\ \frac{39}{4}\pi\right\}$$

따라서 $i(x)$는 구간 $(0, 10\pi)$에서 $x=\frac{\pi}{4}$, $\frac{3}{4}\pi$, $\frac{5}{4}\pi$, $\cdots$, $\frac{39}{4}\pi$일 때 불연속이므로 불연속이 되는 x의 값은 20개이다.

답 20

Ⅲ 미분법

07 여러 가지 미분법

본책 62쪽

311 $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=f'(1)$

이때 $f(x)=\dfrac{2x}{x+1}$에서

$$f'(x)=\frac{2(x+1)-2x\cdot1}{(x+1)^2}=\frac{2}{(x+1)^2}$$

$$\therefore f'(1)=\frac{2}{2^2}=\frac{1}{2}$$

답 $\frac{1}{2}$

> 함수 $f(x)$에 대하여
> $f'(a)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$

312 $y=\dfrac{1}{x^m}$이므로

$$y'=-\frac{\boxed{mx^{m-1}}}{x^{2m}}=-mx^{m-1-2m}=-mx^{\boxed{-m-1}}$$

이때 $-m=n$이므로 $y'=nx^{n-1}$

$\therefore$ (가) mx^{m-1} (나) $-m-1$

답 풀이 참조

313 $f(x)=\dfrac{\tan x}{x}$에서

$$f'(x)=\frac{\sec^2x\cdot x-\tan x\cdot1}{x^2}=\frac{x\sec^2x-\tan x}{x^2}$$

$$\therefore \lim_{x\to\pi}f'(x)=\lim_{x\to\pi}\frac{x\sec^2x-\tan x}{x^2}=\frac{\pi\cdot(-1)^2-0}{\pi^2}=\frac{1}{\pi}$$

답 ④

314 $y=f(g(x))$에서 $y'=f'(g(x))g'(x)$이므로

$y=f(g(x))$의 $x=2$에서의 미분계수는

$$f'(g(2))g'(2)=f'(4)g'(2)=6g'(2)$$

즉 $6g'(2)=-30$이므로

$$g'(2)=-5$$

답 -5

315 $f(x)=3^{x^2+x+3}$에서

$$f'(x)=3^{x^2+x+3}\cdot\ln3\cdot(x^2+x+3)'=3^{x^2+x+3}\cdot\ln3\cdot(2x+1)$$

$$\therefore f'(1)=3^5\cdot\ln3\cdot3=3^6\ln3$$

답 ①

> **지수함수의 도함수**
> ① $y=e^x$이면 $y'=e^x$
> ② $y=a^x$ $(a>0,\ a\neq1)$이면 $y'=a^x\ln a$

316 $f(x)=\ln|\tan x+\sec x|$에서

$$f'(x)=\frac{(\tan x+\sec x)'}{\tan x+\sec x}=\frac{\sec^2x+\sec x\tan x}{\tan x+\sec x}=\frac{\sec x(\tan x+\sec x)}{\tan x+\sec x}=\sec x$$

답 ④

317 $y=\sqrt[4]{x}$에서 $x=\boxed{y^4}$

양변을 y에 대하여 미분하면 $\dfrac{dx}{dy}=\boxed{4y^3}$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{4y^3}=\frac{1}{4(\sqrt[4]{x})^3}=\boxed{\frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}}$$

$\therefore$ (가) y^4 (나) $4y^3$ (다) $\dfrac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$

답 풀이 참조

318 $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{g(x)-3}{x-2}=6$에서 $x\to2$일 때 (분모)$\to0$

이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이다.

즉 $\lim\limits_{x\to2}\{g(x)-3\}=0$이므로 $g(2)=3$

$\therefore f(3)=2$

또

$$\lim_{x\to2}\frac{g(x)-3}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}=g'(2)$$

이므로

$$g'(2)=6$$

$$\therefore f'(3)=\frac{1}{g'(f(3))}=\frac{1}{g'(2)}=\frac{1}{6}$$

답 ①

> $x\to a$일 때
> ① (분모)$\to0$이고 극한값이 존재
> ➡ (분자)$\to0$
> ② (분자)$\to0$이고 0이 아닌 극한값이 존재
> ➡ (분모)$\to0$

319 $g(4)=a$라 하면 $f(a)=4$이므로

$3a^2+6a+4=4$, $3a(a+2)=0$

$\therefore a=0$ ($\because a>-1$)

즉 $g(4)=0$이고 $f'(x)=6x+6$이므로

$$g'(4)=\frac{1}{f'(g(4))}=\frac{1}{f'(0)}=\frac{1}{6}$$

답 ⑤

320 $f(x)=2x\ln(\cos x)$에서

$$f'(x)=2\ln(\cos x)+2x\cdot\frac{-\sin x}{\cos x}=2\ln(\cos x)-2x\tan x$$

> $\{\ln(\cos x)\}'=\dfrac{(\cos x)'}{\cos x}=\dfrac{-\sin x}{\cos x}=-\tan x$

$f'(0)=2\ln1-0=0$이므로

$$\lim_{x\to0}\frac{f'(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}=f''(0)$$

이때

$$f''(x)=2\cdot\frac{-\sin x}{\cos x}-(2\tan x+2x\sec^2x)=-4\tan x-2x\sec^2x$$

$$\therefore f''(0)=0$$

답 ③

321 $f(x)=xe^{ax+1}$에서

$$f'(x)=e^{ax+1}+axe^{ax+1}=(1+ax)e^{ax+1}$$

$$f''(x)=ae^{ax+1}+a(1+ax)e^{ax+1}=(2a+a^2x)e^{ax+1}$$

$f''(0)=8e$에서 $2ae=8e$

$\therefore a=4$

답 ②

322 $y=e^x\sin 2x$에서

$y'=e^x\sin 2x+2e^x\cos 2x=e^x(\sin 2x+2\cos 2x)$

$y''=e^x(\sin 2x+2\cos 2x)+e^x(2\cos 2x-4\sin 2x)$

$\quad=e^x(-3\sin 2x+4\cos 2x)$

$2y''+ay'+by=0$에서

$(-6\sin 2x+8\cos 2x+a\sin 2x$

$\quad+2a\cos 2x+b\sin 2x)e^x=0$

$\{(a+b-6)\sin 2x+(2a+8)\cos 2x\}e^x=0$

위의 등식이 임의의 실수 x에 대하여 성립하므로

$a+b-6=0,\ 2a+8=0$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=-4,\ b=10 \qquad \therefore ab=-40$ 답 ③

323 해결 과정 $\lim_{h\to0}\frac{f(2h)-f(-2h)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(2h)-f(0)-f(-2h)+f(0)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(2h)-f(0)}{2h}\cdot2+\lim_{h\to0}\frac{f(-2h)-f(0)}{-2h}\cdot2$

$=2f'(0)+2f'(0)=4f'(0)$

이므로 $\quad 4f'(0)=16 \qquad \therefore f'(0)=4$ ● 40%

답 구하기 이때 $f(x)=\frac{ax+1}{x^2+3}$에서

$f'(x)=\frac{a(x^2+3)-(ax+1)\cdot2x}{(x^2+3)^2}$

$\quad=\frac{-ax^2-2x+3a}{(x^2+3)^2}$ ● 40%

이므로 $\quad f'(0)=\frac{a}{3}=4$

$\therefore a=12$ ● 20%

답 12

324 $f(x)=\frac{x}{x^2+5}$에서

$f'(x)=\frac{(x^2+5)-x\cdot2x}{(x^2+5)^2}=\frac{5-x^2}{(x^2+5)^2}$

$f'(x)>0$에서 $\quad \frac{5-x^2}{(x^2+5)^2}>0$

이때 $(x^2+5)^2>0$이므로 $\quad 5-x^2>0$

$x^2-5<0 \qquad \therefore -\sqrt{5}<x<\sqrt{5}$

따라서 $f'(x)>0$을 만족시키는 정수 x는 $-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2$의 5개이다. 답 ③

325 $f(x)=\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}$에서

$f'(x)=\frac{\cos x(\sin x+\cos x)-\sin x(\cos x-\sin x)}{(\sin x+\cos x)^2}$

$\quad=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\sin^2 x+\cos^2 x+2\sin x\cos x}$

$\quad=\frac{1}{1+\sin 2x}$

$f'(\alpha)=\frac{2}{3}$에서 $\quad \frac{1}{1+\sin 2\alpha}=\frac{2}{3}$

$1+\sin 2\alpha=\frac{3}{2}, \qquad \sin 2\alpha=\frac{1}{2}$

$0\le\alpha\le\frac{\pi}{2}$에서 $0\le2\alpha\le\pi$이므로

$2\alpha=\frac{\pi}{6}$ 또는 $2\alpha=\frac{5}{6}\pi$

$\therefore \alpha=\frac{\pi}{12}$ 또는 $\alpha=\frac{5}{12}\pi$

따라서 모든 α의 값의 합은

$\frac{\pi}{12}+\frac{5}{12}\pi=\frac{\pi}{2}$ 답 ⑤

326 해결 과정 $f(x)=\cos^2 x$에서

$f'(x)=2\cos x\cdot(\cos x)'$

$\quad=-2\cos x\sin x=-\sin 2x$ ● 50%

답 구하기 $x-\frac{\pi}{2}=t$로 놓으면 $x\to\frac{\pi}{2}$일 때 $t\to0$이므로

$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{f'(x)}{x-\frac{\pi}{2}}=\lim_{t\to0}\frac{-\sin(2t+\pi)}{t}=\lim_{t\to0}\frac{\sin 2t}{t}$

$\quad=\lim_{t\to0}\frac{\sin 2t}{2t}\cdot2=1\cdot2=2$ ● 50%

답 2

1등급 비밀노트

$\lim_{x\to a}\frac{\sin(x-a)}{x-a}$, $\lim_{x\to a}\frac{\tan(x-a)}{x-a}$ 꼴의 극한

$x-a=t$로 놓으면 $x\to a$일 때 $t\to0$이므로

① $\lim_{x\to a}\frac{\sin(x-a)}{x-a}=\lim_{t\to0}\frac{\sin t}{t}=1$

② $\lim_{x\to a}\frac{\tan(x-a)}{x-a}=\lim_{t\to0}\frac{\tan t}{t}=1$

327 $f(x)=\frac{e^x}{\sqrt{3+e^x}}$에서

$f'(x)=\frac{e^x\sqrt{3+e^x}-e^x\cdot\frac{e^x}{2\sqrt{3+e^x}}}{3+e^x}=\frac{e^x(6+e^x)}{2\sqrt{(3+e^x)^3}}$

$\therefore f'(0)=\frac{7}{2\sqrt{4^3}}=\frac{7}{16}$ 답 ④

328 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하므로 $x=1$에서 연속이다.

즉 $\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1-}f(x)=f(1)$이므로

$1+a=1+b \qquad \therefore a=b \qquad$ ······ ㉠

또 $f'(1)$이 존재해야 하므로

$f'(x)=\begin{cases}\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}x+a & (x>1)\\ 2x & (x<1)\end{cases}$

일품 BOX

임의의 실수 x에 대하여

$(A\sin 2x+B\cos 2x)e^x=0$

$(A,\ B$는 실수$)$

이 성립하려면 $e^x>0$이므로

$A\sin 2x+B\cos 2x=0$

$\therefore A=0,\ B=0$

$f(x)$가 미분가능할 때

$y=\{f(x)\}^n$ (n은 실수)

이면

$y'=n\{f(x)\}^{n-1}f'(x)$

배각의 공식

① $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$

② $\cos 2\alpha$

$=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$

$=2\cos^2\alpha-1$

$=1-2\sin^2\alpha$

③ $\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

x의 단위가 라디안일 때

① $\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$

② $\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x}=1$

$(\sqrt{3+e^x})'$

$=\{(3+e^x)^{\frac{1}{2}}\}'$

$=\frac{1}{2}(3+e^x)^{-\frac{1}{2}}\cdot(3+e^x)'$

$=\frac{e^x}{2\sqrt{3+e^x}}$

에서 $\lim_{x \to 1+}\left(\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}x+a\right)=\lim_{x \to 1-} 2x$

$\therefore a=2$

$a=2$를 ㉠에 대입하면 $b=2$

$\therefore a+b=4$

답 4

다른 풀이

$$\lim_{h \to 0+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h \to 0+}\frac{\cos\frac{\pi}{2}h+ah-1}{h}$$

$$=\lim_{h \to 0+}\frac{\cos\frac{\pi}{2}h-1}{h}+a$$

에서 $g(x)=\cos\frac{\pi}{2}x$라 하면

$$\lim_{h \to 0+}\frac{\cos\frac{\pi}{2}h-1}{h}+a=\lim_{h \to 0+}\frac{g(h)-g(0)}{h}+a$$

$$=g'(0)+a$$

이때 $g'(x)=-\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}x$이므로

$g'(0)=0$

$$\therefore \lim_{h \to 0+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=a$$

또 $\lim_{h \to 0-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h \to 0-}\frac{h^2+2h}{h}=2$이므로

$a=2$

329 $f(x)=\sin^2 x$라 하면

$f'(x)=2\sin x\cos x=\sin 2x$

두 점 $(\alpha,\ \sin^2\alpha)$, $(\beta,\ \sin^2\beta)$에서의 접선의 기울기는 각각

$f'(\alpha)=\sin 2\alpha$, $f'(\beta)=\sin 2\beta$

이때 두 접선이 서로 수직이므로

$\sin 2\alpha\sin 2\beta=-1$

$0<\alpha<\frac{\pi}{2}<\beta<\pi$에서 $0<2\alpha<\pi<2\beta<2\pi$이므로

$0<\sin 2\alpha\le 1$, $-1\le\sin 2\beta<0$

따라서 $\sin 2\alpha=1$, $\sin 2\beta=-1$이므로

$2\alpha=\frac{\pi}{2}$, $2\beta=\frac{3}{2}\pi$ $\therefore \alpha=\frac{\pi}{4}$, $\beta=\frac{3}{4}\pi$

$$\therefore \sin\alpha\cos\beta=\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{3}{4}\pi$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\frac{1}{2}$$

답 ③

330 $h(x)=(g\circ f)(x)=g(f(x))$에서

$h'(x)=g'(f(x))f'(x)$

$\therefore h'(1)=g'(f(1))f'(1)$ …… ㉠

$f(x)=(\sqrt{3x+1}-3)^5$에서

$$f'(x)=5(\sqrt{3x+1}-3)^4\cdot\frac{3}{2\sqrt{3x+1}}$$

$\therefore f(1)=-1$, $f'(1)=\frac{15}{4}$

㉠에서 $h'(1)=g'(-1)\cdot\frac{15}{4}$이므로

$g'(-1)\cdot\frac{15}{4}=3$ $\therefore g'(-1)=\frac{4}{5}$

답 $\frac{4}{5}$

331 $f(x)=\sqrt{1-x^2}$에서

$$f'(x)=\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$g(x)=\frac{\tan x}{\sqrt{3}}$에서 $g'(x)=\frac{1}{\sqrt{3}}\sec^2 x$

$h(x)=f(g(x))$에서

$h'(x)=f'(g(x))g'(x)$

$$\therefore h'\left(\frac{\pi}{6}\right)=f'\left(g\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)g'\left(\frac{\pi}{6}\right)=f'\left(\frac{1}{3}\right)g'\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$=-\frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{4}{3}=-\frac{\sqrt{6}}{9}$$

답 ④

332 두 점 A$(1,\ 4)$, B$(4,\ -2)$가 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$f(1)=4$, $f(4)=-2$

또 두 점 A$(1,\ 4)$, B$(4,\ -2)$에서의 접선의 기울기가 각각 2, 4이므로

$f'(1)=2$, $f'(4)=4$

$F(x)=f(f(x))$라 하면

$F(1)=f(f(1))=f(4)=-2$

$$\therefore \lim_{x \to 1}\frac{f(f(x))+2}{x-1}=\lim_{x \to 1}\frac{F(x)-F(1)}{x-1}$$

$$=F'(1)$$

이때 $F'(x)=f'(f(x))f'(x)$이므로

$F'(1)=f'(f(1))f'(1)=f'(4)f'(1)$

$=4\cdot 2=8$

답 ④

333 $f_{n+1}(x)=f(f_n(x))$에서

$f_{n+1}'(x)=f'(f_n(x))f_n'(x)$이므로

$g'(x)=f_{10}'(x)=f'(f_9(x))\cdot f_9'(x)$

$=f'(f_9(x))\cdot f'(f_8(x))\cdot f_8'(x)$

$=f'(f_9(x))\cdot f'(f_8(x))\cdot\cdots\cdot f'(f_1(x))\cdot f_1'(x)$

한편 $f(1)=1$이므로

$f_2(1)=f(f(1))=f(1)=1$

$f_3(1)=f(f_2(1))=f(1)=1$

$\vdots$

$f_9(1)=1$

$\therefore g'(1)$

$=f'(f_9(1))\cdot f'(f_8(1))\cdot\cdots\cdot f'(f_1(1))\cdot f_1'(1)$

$=\underbrace{f'(1)\cdot f'(1)\cdot\cdots\cdot f'(1)}_{9개}\cdot f'(1)$

$=\underbrace{2\cdot 2\cdot\cdots\cdot 2\cdot 2}_{10개}=2^{10}=1024$

답 1024

일품 BOX

삼각함수의 도함수

① $(\sin x)'=\cos x$
② $(\cos x)'=-\sin x$
③ $(\tan x)'=\sec^2 x$
④ $(\sec x)'=\sec x\tan x$
⑤ $(\csc x)'=-\csc x\cot x$
⑥ $(\cot x)'=-\csc^2 x$

$g(0)=\cos 0=1$

$(\sqrt{3x+1}-3)'$
$=\{(3x+1)^{\frac{1}{2}}-3\}'$
$=\frac{1}{2}(3x+1)^{-\frac{1}{2}}\cdot(3x+1)'$
$=\frac{3}{2\sqrt{3x+1}}$

$f'(1)=5\cdot(-1)^4\cdot\frac{3}{4}$
$=\frac{15}{4}$

334 $f(x)=\dfrac{g(x)-1}{\{g(x)\}^2+1}$에서

$$f'(x)=\frac{g'(x)[\{g(x)\}^2+1]-\{g(x)-1\}\cdot 2g(x)g'(x)}{[\{g(x)\}^2+1]^2}$$

$g'(0)=a$라 하면

$$f'(0)=\frac{g'(0)[\{g(0)\}^2+1]-\{g(0)-1\}\cdot 2g(0)g'(0)}{[\{g(0)\}^2+1]^2}$$

$$=\frac{5a-4a}{25}=\frac{a}{25}$$

$f'(0)=3$에서 $\quad \dfrac{a}{25}=3 \qquad \therefore a=75$

$\therefore g'(0)=75$

답 ③

335 문제 이해 양변의 절댓값에 자연로그를 취하면

$$\ln|f(x)|=\ln\left|\frac{(x+2)(x+3)^3}{(x-1)^2}\right|$$

$$=\ln|x+2|+3\ln|x+3|-2\ln|x-1|$$

● 20%

해결 과정 양변을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{x+2}+\frac{3}{x+3}-\frac{2}{x-1}$$

$$=\frac{2x^2-5x-21}{(x+3)(x+2)(x-1)}$$

● 30%

$$\therefore f'(x)=f(x)\cdot\frac{2x^2-5x-21}{(x+3)(x+2)(x-1)}$$

$$=\frac{(x+2)(x+3)^3}{(x-1)^2}\cdot\frac{2x^2-5x-21}{(x+3)(x+2)(x-1)}$$

$$=\frac{(x+3)^2(2x^2-5x-21)}{(x-1)^3}$$

● 30%

답 구하기 $\therefore f'(-1)=\dfrac{4\cdot(-14)}{-8}=7$ ● 20%

답 7

336 $f(x)=x^{\ln x}$의 양변에 자연로그를 취하면

$$\ln f(x)=\ln x^{\ln x}=(\ln x)^2$$

양변을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=2\ln x\cdot\frac{1}{x}$$

$$\therefore f'(x)=f(x)\cdot 2\ln x\cdot\frac{1}{x}=x^{\ln x}\cdot 2\ln x\cdot\frac{1}{x}$$

$$\therefore f'(e^2)=(e^2)^2\cdot 4\cdot\frac{1}{e^2}=4e^2$$

답 $4e^2$

1등급 비밀노트

$y=\{f(x)\}^{g(x)}\ (f(x)>0)$ 꼴의 함수의 도함수는 다음과 같은 순서로 구한다.

(i) 주어진 식의 양변에 자연로그를 취한다.

➡ $\ln y=g(x)\ln f(x)$

(ii) (i)의 식의 양변을 x에 대하여 미분한다.

➡ $\dfrac{y'}{y}=g'(x)\ln f(x)+g(x)\cdot\dfrac{f'(x)}{f(x)}$

(iii) $y'=\square$ 꼴로 정리하여 도함수를 구한다.

➡ $y'=y\left\{g'(x)\ln f(x)+g(x)\cdot\dfrac{f'(x)}{f(x)}\right\}$

일품 BOX

$h(a)=a^3+a^2-36$이라 하면 $h(3)=0$이므로

3	1	1	0	-36
		3	12	36
	1	4	12	0

$\therefore h(a)=(a-3)(a^2+4a+12)$

로그의 성질

$a>0,\ a\neq1$이고 $M>0,\ N>0$일 때

① $\log_a MN=\log_a M+\log_a N$

② $\log_a \dfrac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$

③ $\log_a M^k=k\log_a M$

(단, k는 실수)

함수 $f(x)$가 미분가능하면 연속이므로

$\lim_{\Delta x\to0}\Delta y$

$=\lim_{\Delta x\to0}\{f(a+\Delta x)-f(a)\}$

$=0$

337 해결 과정 $g(6)=a$라 하면 $f(a)=6$이므로

$a\sqrt{a+1}=6$

양변을 제곱하면 $\quad a^3+a^2=36,\quad a^3+a^2-36=0$

$(a-3)(a^2+4a+12)=0$

$\therefore a=3\ (\because a^2+4a+12>0)$ ● 40%

$\therefore g(6)=3$

또 $f(x)=x\sqrt{x+1}$에서

$$f'(x)=\sqrt{x+1}+\frac{x}{2\sqrt{x+1}}$$

이므로

$$f'(3)=2+\frac{3}{2\cdot2}=\frac{11}{4}$$

● 40%

답 구하기 $\therefore g'(6)=\dfrac{1}{f'(g(6))}=\dfrac{1}{f'(3)}=\dfrac{4}{11}$ ● 20%

답 $\dfrac{4}{11}$

338 $f(a)=b$에서 $\quad g(b)=a$

$f(a+\Delta x)=b+\Delta y$라 하면 $\quad g(b+\Delta y)=a+\Delta x$

또 $\Delta x\to0$일 때 $\Delta y\to0$이므로

$$f'(a)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{(a+\Delta x)-a}$$

$$=\lim_{\Delta y\to0}\frac{(b+\Delta y)-b}{g(b+\Delta y)-g(b)}$$

$$=\lim_{\Delta y\to0}\frac{\Delta y}{g(b+\Delta y)-g(b)}$$

답 ②

다른 풀이 $f'(a)=\dfrac{1}{g'(b)}$이므로

$$f'(a)=\lim_{\Delta y\to0}\frac{1}{\dfrac{g(b+\Delta y)-g(b)}{\Delta y}}$$

$$=\lim_{\Delta y\to0}\frac{\Delta y}{g(b+\Delta y)-g(b)}$$

339 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)>0$이므로 함수 $f(x)$의 역함수가 존재한다.

$f(x)$의 역함수를 $h(x)$라 하면 $f(2)=3$이므로

$h(3)=2$

또 $f'(2)=4$이므로

$$h'(3)=\frac{1}{f'(h(3))}=\frac{1}{f'(2)}=\frac{1}{4}$$

한편 $y=f\left(\dfrac{x+1}{4}\right)$에서 x와 y를 서로 바꾸면

$$x=f\left(\frac{y+1}{4}\right)\qquad \therefore f^{-1}(x)=\frac{y+1}{4}$$

즉 $h(x)=\dfrac{y+1}{4}$이므로 $\quad y=4h(x)-1$

$\therefore g(x)=4h(x)-1$

따라서 $g'(x)=4h'(x)$이므로

$$g'(3)=4h'(3)=4\cdot\frac{1}{4}=1$$

답 1

다른 풀이 $F(x)=f\left(\frac{x+1}{4}\right)$이라 하자.

$F(x)$의 역함수가 $g(x)$이므로 $g(F(x))=x$

양변을 x에 대하여 미분하면

$$g'(F(x))F'(x)=1$$

이때 $F'(x)=f'\left(\frac{x+1}{4}\right)\cdot\frac{1}{4}$이므로

$$g'\left(f\left(\frac{x+1}{4}\right)\right)\cdot f'\left(\frac{x+1}{4}\right)\cdot\frac{1}{4}=1 \quad \cdots\cdots ㉠$$

한편 $f(2)=3$, $f'(2)=4$이고, $\frac{x+1}{4}=2$에서

$$x=7$$

따라서 ㉠에 $x=7$을 대입하면

$$g'(f(2))\cdot f'(2)\cdot\frac{1}{4}=1 \qquad \therefore g'(3)=1$$

340 $f(2g(x)+x^3+2x-5)=x$에서

$$g(x)=2g(x)+x^3+2x-5$$

$$\therefore g(x)=-x^3-2x+5$$

$f(2)=a$라 하면 $g(a)=2$이므로

$$-a^3-2a+5=2, \qquad a^3+2a-3=0$$

$$(a-1)(a^2+a+3)=0$$

$$\therefore a=1 \ (\because a^2+a+3>0)$$

$$\therefore f(2)=1$$

또 $g'(x)=-3x^2-2$이므로

$$f'(2)=\frac{1}{g'(f(2))}=\frac{1}{g'(1)}=-\frac{1}{5}$$

답 $-\frac{1}{5}$

일품 BOX

$f(h(x))=x$이면
$h(x)=f^{-1}(x)$

341 $\lim_{h\to0}\frac{g(\sqrt{2}+h)-g(\sqrt{2})}{h}=g'(\sqrt{2}) \quad \cdots ㉠$

$g(\sqrt{2})=a$라 하면 $f(a)=\sqrt{2}$이므로

$$2^{\sin a}=\sqrt{2}, \qquad \sin a=\frac{1}{2}$$

$$\therefore a=\frac{\pi}{6}\left(\because -\frac{\pi}{2}<a<\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\therefore g(\sqrt{2})=\frac{\pi}{6}$$

또 $f'(x)=2^{\sin x}\cdot\ln2\cdot\cos x$이므로

$$f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=2^{\frac{1}{2}}\cdot\ln2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{2}\ln2$$

$$\therefore g'(\sqrt{2})=\frac{1}{f'(g(\sqrt{2}))}=\frac{1}{f'\left(\frac{\pi}{6}\right)}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{6}\ln2}=\frac{\sqrt{6}}{3\ln2}$$

답 ④

$f(x)=2^{\sin x}$에서
$f'(x)$
$=2^{\sin x}\cdot\ln2\cdot(\sin x)'$
$=2^{\sin x}\cdot\ln2\cdot\cos x$

342 $f(x)=x^x$의 양변에 자연로그를 취하면

$$\ln f(x)=x\ln x$$

양변을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\ln x+x\cdot\frac{1}{x}=\ln x+1$$

$$\therefore f'(x)=f(x)(\ln x+1)=x^x(\ln x+1)$$

즉 $(x^x)'=x^x(\ln x+1)$이므로

$$f''(x)=(x^x)'(\ln x+1)+x^x(\ln x+1)'$$

$$=x^x(\ln x+1)(\ln x+1)+x^x\cdot\frac{1}{x}$$

$$=x^x(\ln x+1)^2+x^{x-1}$$

$$\therefore f''(1)=2$$

답 ③

343 해결 과정 $\lim_{x\to1}\frac{f'(x)-f'(1)}{x^2-1}$

$$=\lim_{x\to1}\frac{f'(x)-f'(1)}{(x-1)(x+1)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{f'(x)-f'(1)}{x-1}\cdot\frac{1}{x+1}$$

$$=\frac{1}{2}f''(1)$$

● 30%

이때 $f(x)=e^{x^2+2x-3}$에서

$$f'(x)=e^{x^2+2x-3}\cdot(2x+2)$$

$$f''(x)=e^{x^2+2x-3}\cdot(2x+2)^2+e^{x^2+2x-3}\cdot2$$

$$=2e^{x^2+2x-3}(2x^2+4x+3)$$

● 40%

이므로 $f''(1)=2\cdot1\cdot9=18$ ● 20%

답 구하기 $\therefore \frac{1}{2}f''(1)=\frac{1}{2}\cdot18=9$ ● 10%

답 9

344 $f'(x)=\lim_{h\to0+}\frac{e^{x+h}\{(x+h)^2-x^2\}+ax^2(e^{x+h}-e^x)}{h}$

$$=\lim_{h\to0+}\left\{e^{x+h}\cdot\frac{(x+h)^2-x^2}{h}\right\}$$

$$+ax^2\lim_{h\to0+}\frac{e^{x+h}-e^x}{h}$$

$$=e^x\cdot2x+ax^2\cdot e^x$$

$$=e^x(ax^2+2x)$$

$$f''(x)=e^x(ax^2+2x)+e^x(2ax+2)$$

$$=e^x(ax^2+2x+2ax+2)$$

$f''(1)=e$에서 $(3a+4)e=e$

$$\therefore a=-1$$

답 ②

$\lim_{h\to0+}\frac{e^{x+h}-e^x}{h}$
$=\lim_{h\to0+}\frac{e^x(e^h-1)}{h}$
$=e^x\cdot1=e^x$

$f''(1)$
$=e(a+2+2a+2)$
$=(3a+4)e$

345 해결 과정 $f(x)=10e^{\frac{3}{5}x}$이므로

$$f^{(1)}(x)=f'(x)=10\cdot\frac{3}{5}e^{\frac{3}{5}x}$$

$$f^{(2)}(x)=\frac{d}{dx}f^{(1)}(x)=10\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^2e^{\frac{3}{5}x}$$

$$f^{(3)}(x)=\frac{d}{dx}f^{(2)}(x)=10\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^3e^{\frac{3}{5}x}$$

$$\vdots$$

$$\therefore f^{(n)}(x)=10\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^ne^{\frac{3}{5}x}\ (n\ge1)$$

● 50%

답 구하기 따라서 $f^{(n)}(5)=10\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^n e^3$이므로

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} f^{(n)}(5) &= \sum_{n=1}^{\infty}\left\{10\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^n e^3\right\}\\ &=10e^3\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n\\ &=10e^3\cdot\frac{\frac{3}{5}}{1-\frac{3}{5}}\\ &=10e^3\cdot\frac{3}{2}\\ &=15e^3\end{aligned}$$

● 50%

답 $15e^3$

346 $$\begin{aligned}g(x)&=\lim_{h\to0}\frac{f(x+2h-3h^2)-f(x-h)}{h}\\ &=\lim_{h\to0}\frac{f(x+2h-3h^2)-f(x)}{h}\\ &\quad+\lim_{h\to0}\frac{f(x-h)-f(x)}{-h}\\ &=\lim_{h\to0}\frac{f(x+2h-3h^2)-f(x)}{2h-3h^2}\cdot\frac{2h-3h^2}{h}\\ &\quad+f'(x)\\ &=f'(x)\cdot2+f'(x)\\ &=3f'(x)\end{aligned}$$

$f(x)=\dfrac{e^{2x}}{\sqrt{3x+4}}$에서

$$\begin{aligned}f'(x)&=\frac{2e^{2x}\sqrt{3x+4}-e^{2x}\cdot\frac{3}{2\sqrt{3x+4}}}{3x+4}\\ &=\frac{(12x+13)e^{2x}}{2(3x+4)\sqrt{3x+4}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore\ g(0)&=3f'(0)\\ &=3\cdot\frac{13}{16}=\frac{39}{16}\end{aligned}$$

따라서 $p=16$, $q=39$이므로

$p+q=55$

답 55

347 ㄱ. $\frac{1}{x}=t$로 놓으면 $x\to\infty$일 때 $t\to0$이다.

(i) $n=1$일 때,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}x\sin\frac{1}{x^2}&=\lim_{t\to0}\frac{\sin t^2}{t}\\ &=\lim_{t\to0}\frac{\sin t^2}{t^2}\cdot t\\ &=1\cdot0=0\end{aligned}$$

(ii) $n=2$일 때,

$$\lim_{x\to\infty}x^2\sin\frac{1}{x^2}=\lim_{t\to0}\frac{\sin t^2}{t^2}=1$$

(iii) $n\ge3$일 때,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}x^n\sin\frac{1}{x^2}&=\lim_{t\to0}\frac{\sin t^2}{t^n}\\ &=\lim_{t\to0}\frac{\sin t^2}{t^2}\cdot\frac{1}{t^{n-2}}\\ &=\infty\end{aligned}$$

따라서 $\lim_{x\to\infty}f(x)$의 값이 존재하도록 하는 자연수 n의 값은 1, 2의 2개이다.

ㄴ. $n=2$일 때, $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x^2} & (x\neq0)\\ 0 & (x=0)\end{cases}$

$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}x^2\sin\frac{1}{x^2}=0$이므로

$\lim_{x\to0}f(x)=f(0)$

따라서 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

또

$$\begin{aligned}f'(0)&=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x^2}}{x}\\ &=\lim_{x\to0}x\sin\frac{1}{x^2}=0\end{aligned}$$

이므로 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

ㄷ. $x\neq0$일 때,

$$\begin{aligned}f'(x)&=nx^{n-1}\sin\frac{1}{x^2}+x^n\cos\frac{1}{x^2}\cdot\frac{-2}{x^3}\\ &=nx^{n-1}\sin\frac{1}{x^2}-2x^{n-3}\cos\frac{1}{x^2}\end{aligned}$$

$\lim_{x\to0}x^{n-1}\sin\frac{1}{x^2}$의 값이 존재하려면 $n\ge2$이어야 하고, $\lim_{x\to0}x^{n-3}\cos\frac{1}{x^2}$의 값이 존재하려면 $n\ge4$이어야 하므로 $\lim_{x\to0}f'(x)$의 값이 존재하려면 $n\ge4$이어야 한다.

즉 $n\ge4$일 때 $\lim_{x\to0}f'(x)=0$이고

$$\begin{aligned}f'(0)&=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{x^n\sin\frac{1}{x^2}}{x}\\ &=\lim_{x\to0}x^{n-1}\sin\frac{1}{x^2}=0\end{aligned}$$

이므로 $\lim_{x\to0}f'(x)=f'(0)$

따라서 $n\ge4$이면 $f'(x)$는 $x=0$에서 연속이므로 n의 최솟값은 4이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

일품 BOX

첫째항이 $\frac{3}{5}$이고 공비가 $\frac{3}{5}$인 등비급수이다.

$n-1\ge1$에서 $n\ge2$

$n-3\ge1$에서 $n\ge4$

$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$

1등급 비밀노트

$n=2$ 또는 $n=3$일 때 함수 $f(x)=\begin{cases}x^n\sin\frac{1}{x^2} & (x\neq0)\\ 0 & (x=0)\end{cases}$은 $x=0$에서 미분가능하지만 도함수 $f'(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.
즉 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하다는 것은 도함수 $f'(x)$가 $x=a$에서 연속이기 위한 필요충분조건이 아님을 알 수 있다.

미분법 Ⅲ

348 $f(x)=\ln\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)$이라 하면

$f(0)=\ln\frac{1+1}{2}=0$

$$\therefore \lim_{x\to0}\ln\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)$$

이때 $f'(x)=\frac{a^x\ln a+b^x\ln b}{a^x+b^x}$이므로

$$f'(0)=\frac{\ln a+\ln b}{2}=\frac{1}{2}\ln ab=\ln\sqrt{ab}$$

답 ④

349 $f(\sin x+\cos x)=\sin x-\cos x$에서

$f'(\sin x+\cos x)\cdot(\cos x-\sin x)=\cos x+\sin x$

이때 $-\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{4}$에서 $\cos x-\sin x\neq0$이므로

$$f'(\sin x+\cos x)=\frac{\cos x+\sin x}{\cos x-\sin x}=\frac{(\cos x+\sin x)^2}{\cos^2 x-\sin^2 x}=\frac{\sin^2 x+\cos^2 x+2\sin x\cos x}{\cos 2x}=\frac{1+\sin 2x}{\cos 2x}$$

$\sin x+\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$에서

$\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}$

$-\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{4}$에서 $0<x+\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{2}$이므로

$x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{6}$ $\therefore x=-\frac{\pi}{12}$

$$\therefore f'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{1+\sin2\left(-\frac{\pi}{12}\right)}{\cos2\left(-\frac{\pi}{12}\right)}=\frac{1+\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)}{\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)}=\frac{1-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

답 ④

350 $f(x)=\ln(\tan x)$에서

$$f'(x)=\frac{\sec^2 x}{\tan x}=\frac{1+\tan^2 x}{\tan x}$$

$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$이므로 $g(0)=\frac{\pi}{4}$

$$\therefore g'(0)=\frac{1}{f'(g(0))}=\frac{1}{f'\left(\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{1}{\frac{1+1}{1}}=\frac{1}{2}$$

한편

$$\lim_{h\to0}\frac{4g(kh)-\pi}{h}=4\lim_{h\to0}\frac{g(kh)-\frac{\pi}{4}}{h}=4\lim_{h\to0}\frac{g(kh)-g(0)}{kh}\cdot k=4kg'(0)=4k\cdot\frac{1}{2}=2k$$

이므로

$$\lim_{h\to0}\frac{\sum_{k=1}^{n}\{4g(kh)-\pi\}}{h}=\lim_{h\to0}\sum_{k=1}^{n}\frac{4g(kh)-\pi}{h}=\sum_{k=1}^{n}\left\{\lim_{h\to0}\frac{4g(kh)-\pi}{h}\right\}=\sum_{k=1}^{n}2k=2\cdot\frac{n(n+1)}{2}=n(n+1)$$

따라서 $n(n+1)=30$에서

$n=5$

답 5

351 $f(x)=e^x\cos 2x$에서

$f'(x)=e^x\cos 2x-2e^x\sin 2x=e^x(\cos 2x-2\sin 2x)$

$f''(x)=e^x(\cos 2x-2\sin 2x)+e^x(-2\sin 2x-4\cos 2x)=e^x(-3\cos 2x-4\sin 2x)$

$f'(\alpha)=f''(\alpha)$에서

$e^\alpha(\cos 2\alpha-2\sin 2\alpha)=e^\alpha(-3\cos 2\alpha-4\sin 2\alpha)$

$\cos 2\alpha-2\sin 2\alpha=-3\cos 2\alpha-4\sin 2\alpha$

$4\cos 2\alpha+2\sin 2\alpha=0$

$\therefore 2\cos 2\alpha+\sin 2\alpha=0$

$\cos 2\alpha\neq0$이므로 양변을 $\cos 2\alpha$로 나누면

$2+\tan 2\alpha=0$

$\therefore \tan 2\alpha=-2$

$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=-2$에서

$\tan\alpha=-1+\tan^2\alpha$

$\tan^2\alpha-\tan\alpha-1=0$

$\tan\alpha\neq0$이므로 양변을 $\tan\alpha$로 나누면

$\tan\alpha-1-\frac{1}{\tan\alpha}=0$

$\therefore \tan\alpha-\frac{1}{\tan\alpha}=1$

답 1

일품 BOX

$f(x)=\ln\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)=\ln(a^x+b^x)-\ln 2$
이므로
$f'(x)=\frac{a^x\ln a+b^x\ln b}{a^x+b^x}$

모든 실수 x에 대하여 $e^x>0$

삼각함수의 합성
① $a\sin\theta+b\cos\theta=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$
$\left(\text{단, } \sin\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$
② $a\sin\theta+b\cos\theta=\sqrt{a^2+b^2}\cos(\theta-\beta)$
$\left(\text{단, } \cos\beta=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \sin\beta=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$

$\cos 2\alpha=0$이라 하면
$2\alpha=n\pi+\frac{\pi}{2}$ (n은 정수)
$\therefore \sin 2\alpha\neq0$
따라서
$2\cos 2\alpha+\sin 2\alpha\neq0$
이므로 $\cos 2\alpha\neq0$

$\tan\alpha=0$이라 하면
$\tan^2\alpha-\tan\alpha-1\neq0$
이므로 $\tan\alpha\neq0$

$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\ln\left(\tan\frac{\pi}{4}\right)=\ln 1=0$

08 도함수의 활용 본책 68쪽

352 $f(x)=x+\dfrac{k}{x}$라 하면

$f'(x)=1-\dfrac{k}{x^2}$

점 $(1,\ 1+k)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=1-k$이므로 접선의 방정식은

$y-(1+k)=(1-k)(x-1)$,

즉 $y=(1-k)x+2k$

이 접선의 x절편, y절편은 각각 $\dfrac{2k}{k-1}$, $2k$이므로 접선과 x축 및 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2k}{k-1}\cdot 2k=9,\qquad \dfrac{2k^2}{k-1}=9$

$2k^2-9k+9=0$

$(2k-3)(k-3)=0$

$\therefore k=\dfrac{3}{2}$ 또는 $k=3$

따라서 모든 실수 k의 값의 합은

$\dfrac{3}{2}+3=\dfrac{9}{2}$ 답 ④

> **일품 BOX**
>
> 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a,\ f(a))$에서의 접선의 방정식
> ➡ $y-f(a)=f'(a)(x-a)$
>
> 점 $(p,\ q)$가 직선 $y=f(x)$ 위의 점이면 $q=f(p)$를 만족시킨다.
>
> $2k^2-9k+9=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여 $\dfrac{9}{2}$

353 $f(x)=e^x-x^2+2x$라 하면

$f'(x)=e^x-2x+2$

점 $(1,\ e+1)$에서의 접선의 기울기는

$f'(1)=e$

따라서 점 $(1,\ e+1)$에서의 접선에 수직인 직선의 기울기는 $-\dfrac{1}{e}$이므로 구하는 직선의 방정식은

$y-(e+1)=-\dfrac{1}{e}(x-1)$,

즉 $y=-\dfrac{1}{e}x+\dfrac{1}{e}+e+1$

따라서 $m=-\dfrac{1}{e}$, $n=e+1+\dfrac{1}{e}$이므로

$\dfrac{n}{m}=\left(e+1+\dfrac{1}{e}\right)\cdot(-e)$

$=-e^2-e-1$ 답 $-e^2-e-1$

> 서로 수직인 두 직선의 기울기가 m, m'이면
> ➡ $mm'=-1$

354 $f(x)=x\ln x+x$라 하면

$f'(x)=\ln x+x\cdot\dfrac{1}{x}+1=\ln x+2$

접점의 좌표를 $(a,\ a\ln a+a)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 3이므로

$f'(a)=\ln a+2=3,\qquad \ln a=1$

$\therefore a=e$

따라서 접점의 좌표가 $(e,\ 2e)$이므로 구하는 접선의 방정식은

$y-2e=3(x-e)$,

즉 $y=3x-e$ 답 ②

355 $g(x)=\ln x$라 하면 $\quad g'(x)=\dfrac{1}{x}$

접점의 좌표를 $(a,\ \ln a)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $g'(a)=\dfrac{1}{a}$이므로 접선의 방정식은

$y-\ln a=\dfrac{1}{a}(x-a)$ …… ㉠

이 직선이 점 $(0,\ 1)$을 지나므로

$1-\ln a=\dfrac{1}{a}\cdot(-a)$

$\ln a=2\qquad \therefore a=e^2$

$a=e^2$을 ㉠에 대입하면 접선의 방정식은

$y-\ln e^2=\dfrac{1}{e^2}(x-e^2)$, 즉 $y=\dfrac{1}{e^2}x+1$

따라서 $f(x)=\dfrac{1}{e^2}x+1$이므로

$f(e)=\dfrac{1}{e}+1=\dfrac{1+e}{e}$ 답 ④

356 $f(x)=e^{x-2}$이라 하면 $\quad f'(x)=e^{x-2}$

접점의 좌표를 $(a,\ e^{a-2})$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(a)=e^{a-2}$이므로 접선의 방정식은

$y-e^{a-2}=e^{a-2}(x-a)$ …… ㉠

이 직선이 점 $(2,\ 0)$을 지나므로

$-e^{a-2}=e^{a-2}(2-a),\qquad e^{a-2}(a-3)=0$

$\therefore a=3$

$a=3$을 ㉠에 대입하면 접선의 방정식은

$y-e=e(x-3)$, 즉 $y=ex-2e$

따라서 y절편은 $-2e$이다. 답 ①

> 모든 실수 a에 대하여 $e^{a-2}>0$

357 $f(x)=a-\cos^2 x$, $g(x)=\sin x-1$이라 하면

$f'(x)=-2\cos x\cdot(-\sin x)=2\sin x\cos x$,

$g'(x)=\cos x$

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 $x=t$인 점에서 접하므로

$f(t)=g(t)$, $f'(t)=g'(t)$

$f(t)=g(t)$에서

$a-\cos^2 t=\sin t-1,\qquad a=\cos^2 t+\sin t-1$

$a=(1-\sin^2 t)+\sin t-1$

$\therefore a=-\sin^2 t+\sin t$ …… ㉠

$f'(t)=g'(t)$에서

$2\sin t\cos t=\cos t$

$\therefore \cos t(2\sin t-1)=0$

$0<t<\dfrac{\pi}{2}$에서 $\cos t\neq 0$이므로

$2\sin t=1$

$\therefore \sin t=\dfrac{1}{2}$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$a=-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4}$ 답 $\dfrac{1}{4}$

> $f'(x)$
> $=-2\cos x\cdot(\cos x)'$
> $=-2\cos x\cdot(-\sin x)$
> $=2\sin x\cos x$

358 $f(x)=\dfrac{x}{\ln x}$에서

$$f'(x)=\frac{\ln x-x\cdot\frac{1}{x}}{(\ln x)^2}=\frac{\ln x-1}{(\ln x)^2}$$

$f'(x)=0$에서 $\quad \ln x-1=0$

$\therefore x=e$

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$		$-$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘		↘		↗

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(0,\ 1)$, $(1,\ e)$에서 감소하고, 구간 $(e,\ \infty)$에서 증가하므로 함수 $f(x)$가 감소하는 구간은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

359 $f(x)=2\sin x-x$에서

$f'(x)=2\cos x-1$

$f'(x)=0$에서 $\quad \cos x=\dfrac{1}{2}$

$\therefore x=\dfrac{\pi}{3}$ 또는 $x=\dfrac{5}{3}\pi$ $(\because 0<x<2\pi)$

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\frac{5}{3}\pi$	$\cdots$	2π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗		↘		↗	

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $\left(0,\ \dfrac{\pi}{3}\right)$, $\left(\dfrac{5}{3}\pi,\ 2\pi\right)$에서 증가한다.

답 ⑤

360 $f(x)=x^2-4x+a\ln x$에서

$$f'(x)=2x-4+\frac{a}{x}=\frac{2x^2-4x+a}{x}$$

함수 $f(x)$가 구간 $(0,\ \infty)$에서 증가하려면 $f'(x)\ge0$이어야 하므로

$2x^2-4x+a\ge0$ $(\because x>0)$

이차방정식 $2x^2-4x+a=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=(-2)^2-2a\le0 \qquad \therefore a\ge2$

답 $a\ge2$

361 $f(x)=xe^x$에서

$f'(x)=e^x+xe^x=(1+x)e^x$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-1$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극솟값 $f(-1)$을 갖는다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗

답 ②

다른 풀이 $f''(x)=e^x+(1+x)e^x=(2+x)e^x$이므로

$f''(-1)=e^{-1}>0$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극솟값 $f(-1)$을 갖는다.

일품 BOX

$-2(x^2-a)=0$에서
$x^2=a$
$\therefore x=\pm\sqrt{a}$

이차방정식
$ax^2+2x-1=0$
에서 근과 계수의 관계에 의하여
(두 근의 합)$=-\dfrac{2}{a}$
(두 근의 곱)$=-\dfrac{1}{a}$

$x<e^{\frac{1}{2}}$에서 $\quad x<\sqrt{e}$

이계도함수를 갖는 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(a)=0$일 때
① $f''(a)<0$
➡ $f(x)$는 $x=a$에서 극대
② $f''(a)>0$
➡ $f(x)$는 $x=a$에서 극소

362 $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+a}$에서

$$f'(x)=\frac{2(x^2+a)-2x\cdot2x}{(x^2+a)^2}=\frac{-2(x^2-a)}{(x^2+a)^2}$$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=\pm\sqrt{a}$

x	$\cdots$	$-\sqrt{a}$	$\cdots$	$\sqrt{a}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\sqrt{a}$에서 극댓값을 가지므로

$\sqrt{a}=2 \qquad \therefore a=4$

극댓값은 $f(2)$이므로

$f(2)=\dfrac{4}{4+4}=\dfrac{1}{2} \qquad \therefore b=\dfrac{1}{2}$

$\therefore a+b=\dfrac{9}{2}$

답 $\dfrac{9}{2}$

363 $f(x)=ax+\dfrac{1}{x}+2\ln x$에서

$$f'(x)=a-\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x}=\frac{ax^2+2x-1}{x^2}$$

함수 $f(x)$가 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 $a\ne0$이고, 이차방정식 $ax^2+2x-1=0$이 $x>0$에서 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

(i) 이차방정식 $ax^2+2x-1=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=1+a>0 \qquad \therefore a>-1$

(ii) 두 근의 합이 양수이므로

$-\dfrac{2}{a}>0 \qquad \therefore a<0$

(iii) 두 근의 곱이 양수이므로

$-\dfrac{1}{a}>0 \qquad \therefore a<0$

이상에서 a의 값의 범위는

$-1<a<0$

답 ②

364 $f(x)=\dfrac{1+\ln x}{x}$라 하면

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-(1+\ln x)}{x^2}=-\frac{\ln x}{x^2}$$

$$f''(x)=-\frac{\frac{1}{x}\cdot x^2-2x\ln x}{x^4}=\frac{2\ln x-1}{x^3}$$

곡선 $y=f(x)$가 위로 볼록하려면 $f''(x)<0$이어야 하므로

$2\ln x-1<0$ $(\because x>0)$

$\ln x<\dfrac{1}{2} \qquad \therefore x<\sqrt{e}$

따라서 곡선 $y=f(x)$가 위로 볼록한 구간은 $(0,\ \sqrt{e})$이다.

답 ①

365 $f(x)=\cos^2 x$라 하면

$f'(x)=2\cos x\cdot(-\sin x)=-\sin 2x$

$f''(x)=-2\cos 2x$

$f''(x)=0$에서 $\quad -2\cos 2x=0$

$\therefore x=\dfrac{\pi}{4}\left(\because\ 0\le x\le\dfrac{\pi}{2}\right)$

$0\le x<\dfrac{\pi}{4}$일 때 $f''(x)<0$, $\dfrac{\pi}{4}<x\le\dfrac{\pi}{2}$일 때 $f''(x)>0$이므로 $x=\dfrac{\pi}{4}$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀐다.

따라서 변곡점의 좌표는 $\left(\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{1}{2}\right)$이고, 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=-1$이므로 접선의 방정식은

$y-\dfrac{1}{2}=-\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$, 즉 $y=-x+\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{2}$

이 접선이 점 $\left(\dfrac{1}{2},\ a\right)$를 지나므로 $\quad a=\dfrac{\pi}{4}$

답 $\dfrac{\pi}{4}$

일품 BOX

$0\le x\le\dfrac{\pi}{2}$에서 $0\le 2x\le\pi$이므로 $2x=\dfrac{\pi}{2}$ $\quad\therefore x=\dfrac{\pi}{4}$

$f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\cos^2\dfrac{\pi}{4}=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\dfrac{1}{2}$

방정식 $f(x)=g(x)$의 서로 다른 실근의 개수는 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점의 개수와 같다.

366 $f(x)=ax^2+x+4\sin x$라 하면

$f'(x)=2ax+1+4\cos x$

$f''(x)=2a-4\sin x$

곡선 $y=f(x)$가 $0<x<2\pi$에서 두 개의 변곡점을 가지려면 방정식 $f''(x)=0$이 서로 다른 두 실근 α, β를 갖고, $x=\alpha$, $x=\beta$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌어야 한다.

$f''(x)=0$에서 $\quad 2a-4\sin x=0 \quad \therefore \sin x=\dfrac{a}{2}$

$-1\le\sin x\le 1$이므로 $\quad -1<\dfrac{a}{2}<1$

$\therefore -2<a<2$

이때 $a=0$이면 방정식 $\sin x=0$의 근은 한 개이므로 구하는 정수 a의 값은 -1, 1의 2개이다.

답 ②

방정식 $f''(x)=0$, 즉 $\sin x=\dfrac{a}{2}$에서 $\left|\dfrac{a}{2}\right|>1$이면 방정식을 만족시키는 실근이 존재하지 않고, $\left|\dfrac{a}{2}\right|=1$이면 실근의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌지 않는다.

367 $f(x)=xe^{-x}$에서

$f'(x)=e^{-x}-xe^{-x}=(1-x)e^{-x}$

$f''(x)=-e^{-x}-(1-x)e^{-x}=(x-2)e^{-x}$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=1$

$f''(x)=0$에서 $\quad x=2$

x	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$\dfrac{1}{e}$	↘	$\dfrac{2}{e^2}$	↘

또 $\lim\limits_{x\to\infty}xe^{-x}=0$, $\lim\limits_{x\to-\infty}xe^{-x}=-\infty$이므로 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 ①과 같다.

답 ①

368 $f(x)=2\sin x+x$에서

$f'(x)=2\cos x+1$

$f'(x)=0$에서 $\quad \cos x=-\dfrac{1}{2}$

$\therefore x=\dfrac{2}{3}\pi$ 또는 $x=\dfrac{4}{3}\pi$ $(\because 0\le x\le 2\pi)$

x	0	$\cdots$	$\dfrac{2}{3}\pi$	$\cdots$	$\dfrac{4}{3}\pi$	$\cdots$	2π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↗	$\sqrt{3}+\dfrac{2}{3}\pi$	↘	$-\sqrt{3}+\dfrac{4}{3}\pi$	↗	2π

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2\pi$일 때 최댓값 2π를 갖는다.

답 2π

369 $e^x-x+n-10=0$에서

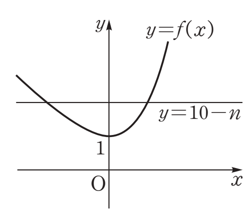
$e^x-x=10-n \quad \cdots\cdots$ ㉠

$f(x)=e^x-x$라 하면 $\quad f'(x)=e^x-1$

$f'(x)=0$에서 $\quad e^x=1 \quad \therefore x=0$

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	1	↗

또 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\infty$이므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



방정식 ㉠이 서로 다른 두 실근을 가지려면 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=10-n$이 서로 다른 두 점에서 만나야 하므로

$10-n>1 \quad \therefore n<9$

따라서 모든 자연수 n의 값의 합은

$1+2+3+\cdots+8=36$

답 ③

$\sum\limits_{k=1}^{8}k=\dfrac{8\cdot 9}{2}=36$

370 $n\ln x=x$에서 $\quad \dfrac{\ln x}{x}=\dfrac{1}{n}$

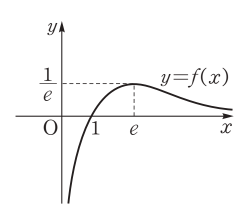
$f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$라 하면

$f'(x)=\dfrac{\dfrac{1}{x}\cdot x-\ln x}{x^2}=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$

$f'(x)=0$에서 $\quad 1-\ln x=0 \quad \therefore x=e$

x	0	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		↗	$\dfrac{1}{e}$	↘

또 $\lim\limits_{x\to 0+}f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$이므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



(i) $n=1$ 또는 $n=2$일 때,

곡선 $y=\dfrac{\ln x}{x}$와 직선 $y=\dfrac{1}{n}$은 만나지 않으므로

$a_1=a_2=0$

방정식 $n\ln x=x$의 서로 다른 실근의 개수가 0이다.

(ii) $n\geq3$일 때,

곡선 $y=\dfrac{\ln x}{x}$와 직선 $y=\dfrac{1}{n}$은 서로 다른 두 점에서 만나므로 $\quad a_3=a_4=\cdots=a_{10}=2$

(i), (ii)에서 $\quad \displaystyle\sum_{n=1}^{10} a_n=2\cdot8=16$

답 16

다른 풀이 $n\ln x=x$에서 $\quad \dfrac{x}{\ln x}=n\ (\because x\neq1)$

$g(x)=\dfrac{x}{\ln x}$라 하면 $\quad g'(x)=\dfrac{\ln x-1}{(\ln x)^2}$

$g'(x)=0$에서 $\quad \ln x=1 \quad \therefore x=e$

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	e	$\cdots$
$g'(x)$		$-$		$-$	0	$+$
$g(x)$		$\searrow$		$\searrow$	e	$\nearrow$

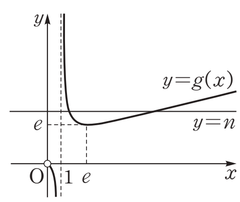
또 $\displaystyle\lim_{x\to0+} g(x)=0$,

$\displaystyle\lim_{x\to1-} g(x)=-\infty$,

$\displaystyle\lim_{x\to1+} g(x)=\infty$,

$\displaystyle\lim_{x\to\infty} g(x)=\infty$이므로

$y=g(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



a_n은 곡선 $y=g(x)$와 직선 $y=n$의 교점의 개수와 같으므로 $\quad a_1=a_2=0,\ a_3=a_4=\cdots=a_{10}=2$

$\therefore \displaystyle\sum_{n=1}^{10} a_n=2\cdot8=16$

371

$x^2e^{-x^2}+a=0$에서

$x^2e^{-x^2}=-a \qquad \cdots\cdots ㉠$

$f(x)=x^2e^{-x^2}$이라 하면

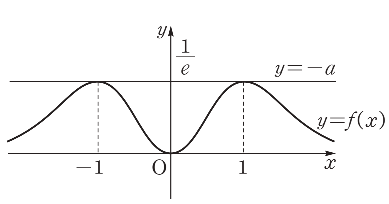
$f'(x)=2xe^{-x^2}+x^2e^{-x^2}\cdot(-2x)=2xe^{-x^2}(1-x^2)$

$\qquad =-2x(x+1)(x-1)e^{-x^2}$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$

또 $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x)=0,\ \lim_{x\to\infty} f(x)=0$이므로 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



방정식 ㉠이 서로 다른 두 실근을 가지려면 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-a$가 서로 다른 두 점에서 만나야 하므로

$-a=\dfrac{1}{e} \qquad \therefore a=-\dfrac{1}{e}$

답 ⑤

일품 BOX

방정식 $n\ln x=x$의 서로 다른 실근의 개수가 2이다.

$n\ln x=x$에서 $x=1$이면

$0=1$

따라서 모순이므로

$x\neq1$

$1\leq x\leq3$이므로

$ax\leq e^x\leq bx$

의 각 변을 x로 나누면

$a\leq\dfrac{e^x}{x}\leq b$

로그의 밑의 변환

$a>0,\ a\neq1,\ b>0,\ b\neq1,\ N>0$일 때

① $\log_a N=\dfrac{\log_b N}{\log_b a}$

② $\log_a b=\dfrac{1}{\log_b a}$

$e<3$이므로

$\log_3 e<\log_3 3$

$\therefore \log_3 e<1$

372

$ax\leq e^x\leq bx$에서 $\qquad a\leq\dfrac{e^x}{x}\leq b$

$f(x)=\dfrac{e^x}{x}$이라 하면

$f'(x)=\dfrac{xe^x-e^x}{x^2}=\dfrac{(x-1)e^x}{x^2}$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=1$

x	1	$\cdots$	3
$f'(x)$	0	$+$	
$f(x)$	e	$\nearrow$	$\frac{e^3}{3}$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=3$일 때 최댓값 $\dfrac{e^3}{3}$, $x=1$일 때 최솟값 e를 가지므로 $1\leq x\leq3$인 모든 실수 x에 대하여

$e\leq\dfrac{e^x}{x}\leq\dfrac{e^3}{3}$

즉 $0<a\leq e,\ b\geq\dfrac{e^3}{3}$이므로 $\dfrac{b}{a}$의 최솟값은

$\dfrac{\frac{e^3}{3}}{e}=\dfrac{e^2}{3}$

답 ③

373

$f(x)=x-\ln(x+1)$이라 하면

$f'(x)=1-\dfrac{1}{x+1}=\boxed{\dfrac{x}{x+1}}$

이므로 $x>0$에서 $\quad f'(x)>0$

즉 $x>0$에서 $f(x)$는 $\boxed{\text{증가}}$하고 $f(0)=0$이므로

$f(x)>0$, 즉 $x-\ln(x+1)>0$

$\therefore \ln(x+1)<x \qquad \cdots\cdots ㉠$

이때 $\ln(x+1)=\dfrac{\log_3(x+1)}{\log_3 e}$에서

$\log_3(x+1)=\boxed{\log_3 e}\cdot\ln(x+1)$

이고 $0<\log_3 e<1$이므로 ㉠에서

$\log_3 e\cdot\ln(x+1)<\log_3 e\cdot x<x$

$\therefore \log_3(x+1)<x$

위의 부등식에 $x=\dfrac{1}{100}$을 대입하면

$\log_3\dfrac{101}{100}<\dfrac{1}{100}$

$\therefore$ (가) $\dfrac{x}{x+1}$ (나) 증가 (다) $\log_3 e$

답 ⑤

374

$f(x)=e^x$이라 하면 $\quad f'(x)=e^x$

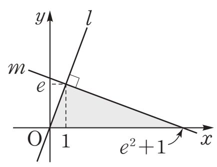
점 $(1,\ e)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=e$이므로 직선 l의 방정식은

$y-e=e(x-1)$, 즉 $y=ex$

직선 m의 기울기는 $-\dfrac{1}{e}$이므로 직선 m의 방정식은

$y-e=-\dfrac{1}{e}(x-1)$, 즉 $y=-\dfrac{1}{e}x+e+\dfrac{1}{e}$

따라서 두 직선 l, m은 오른쪽 그림과 같으므로 구하는 도형의 넓이는



$$\frac{1}{2}(e^2+1)\cdot e=\frac{e^3+e}{2}$$

답 ⑤

일품 BOX

직선 m의 x절편은
$0=-\frac{1}{e}x+e+\frac{1}{e}$
에서 $x=e^2+1$

375 해결 과정 $y=xf(x)$에서

$y'=f(x)+xf'(x)$ ● 30%

곡선 $y=xf(x)$ 위의 점 $(1,\ f(1))$, 즉 $(1,\ 3)$에서의 접선의 기울기는

$f(1)+f'(1)=3+0=3$

따라서 곡선 $y=xf(x)$ 위의 점 $(1,\ 3)$에서의 접선의 방정식은

$y-3=3(x-1)$, 즉 $y=3x$ ● 50%

답 구하기 이 접선이 점 $(a,\ 6)$을 지나므로

$6=3a\qquad \therefore a=2$ ● 20%

답 2

376 $f(x)=x\ln x$라 하면

$f'(x)=\ln x+x\cdot\frac{1}{x}=\ln x+1$

접점의 좌표를 $(a,\ a\ln a)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 2이므로

$f'(a)=\ln a+1=2$

$\ln a=1\qquad \therefore a=e$

따라서 접점의 좌표는 $(e,\ e)$이므로 직선 l의 방정식은

$y-e=2(x-e)$, 즉 $2x-y-e=0$

따라서 원점 O와 직선 l 사이의 거리는

$$\frac{|-e|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{e}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}e$$

답 $\frac{\sqrt{5}}{5}e$

377 해결 과정 $f(x)=e^{x+1}$이라 하면

$f'(x)=e^{x+1}$

접점의 좌표를 $(a,\ e^{a+1})$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(a)=e^{a+1}$이므로 접선의 방정식은

$y-e^{a+1}=e^{a+1}(x-a)$

이 직선이 원점을 지나므로

$-e^{a+1}=-ae^{a+1}$

$e^{a+1}(a-1)=0$

$\therefore a=1\ (\because e^{a+1}>0)$

$\therefore \mathrm{A}(1,\ e^2)$ ● 40%

한편 $y=\ln x-1$은 $y=e^{x+1}$의 역함수이므로 두 곡선은 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

$y=e^{x+1}$에서
$x+1=\ln y$
$x=\ln y-1$
x와 y를 서로 바꾸면
$y=\ln x-1$

$\therefore \mathrm{B}(e^2,\ 1)$ ● 40%

답 구하기 $\therefore \overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(e^2-1)^2+(1-e^2)^2}$

$=\sqrt{2}(e^2-1)$ ● 20%

답 $\sqrt{2}(e^2-1)$

378 $f(x)=\frac{1}{x}$이라 하면 $\qquad f'(x)=-\frac{1}{x^2}$

접점의 좌표를 $\left(a,\ \frac{1}{a}\right)$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(a)=-\frac{1}{a^2}$이므로 접선의 방정식은

$y-\frac{1}{a}=-\frac{1}{a^2}(x-a)$

이 직선이 점 $(2,\ -4)$를 지나므로

$-4-\frac{1}{a}=-\frac{1}{a^2}(2-a)$

$4a^2+a=2-a,\qquad 2a^2+a-1=0$

$(a+1)(2a-1)=0$

$\therefore a=-1$ 또는 $a=\frac{1}{2}$

따라서 두 접선의 기울기는

$f'(-1)=-1,\ f'\left(\frac{1}{2}\right)=-4$

이므로 구하는 기울기의 곱은

$(-1)\cdot(-4)=4$

답 ③

참고 두 접선의 방정식은 $\qquad y=-x-2,\ y=-4x+4$

379 $f(x)=e^x$이라 하면 $\qquad f'(x)=e^x$

점 $(\ln 2,\ 2)$에서의 접선의 기울기는 $f'(\ln 2)=2$이므로 접선의 방정식은

$f'(\ln 2)=e^{\ln 2}=2$

$y-2=2(x-\ln 2)$,

즉 $y=2x-2\ln 2+2$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

직선 ㉠과 곡선 $y=2\ln x+a$의 접점의 좌표를 $(t,\ 2\ln t+a)$라 하고 $g(x)=2\ln x+a$라 하면

$g'(x)=\frac{2}{x}$이므로 접선의 방정식은

$y-(2\ln t+a)=\frac{2}{t}(x-t)$,

즉 $y=\frac{2}{t}x-2+2\ln t+a$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

두 직선 ㉠, ㉡이 일치하므로

$2=\frac{2}{t},\ -2\ln 2+2=-2+2\ln t+a$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$t=1,\ a=4-2\ln 2$

답 ④

380 $f(x)=\sin x(\cos x+1)$에서

$f'(x)=\cos x(\cos x+1)+\sin x(-\sin x)$

$=\cos^2 x+\cos x-\sin^2 x$

$=2\cos^2 x+\cos x-1$

$=(\cos x+1)(2\cos x-1)$

$\sin^2 x=1-\cos^2 x$이므로
$\cos^2 x+\cos x-\sin^2 x$
$=\cos^2 x+\cos x-(1-\cos^2 x)$
$=2\cos^2 x+\cos x-1$

$f'(x)=0$에서 $\qquad \cos x=-1$ 또는 $\cos x=\frac{1}{2}$

$0<x<2\pi$이므로

$x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\pi$ 또는 $x=\frac{5}{3}\pi$

$\cos x=-1$에서
$x=\pi$
$\cos x=\frac{1}{2}$에서
$x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\frac{5}{3}\pi$

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	π	$\cdots$	$\frac{5}{3}\pi$	$\cdots$	2π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗		↘		↘		↗	

ㄱ. 함수 $f(x)$는 구간 $\left(0,\ \frac{\pi}{3}\right)$에서 증가한다.

ㄴ. 함수 $f(x)$는 구간 $\left(\frac{\pi}{2},\ \frac{3}{2}\pi\right)$에서 감소한다.

ㄷ. 함수 $f(x)$는 구간 $\left(\frac{3}{2}\pi,\ \frac{5}{3}\pi\right)$에서 감소하고,

구간 $\left(\frac{5}{3}\pi,\ 2\pi\right)$에서 증가한다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ③

381 $f(x)=e^x\cos x$에서

$f'(x)=e^x\cos x-e^x\sin x=e^x(\cos x-\sin x)$

$f'(x)<0$이면 함수 $f(x)$가 감소하므로

$e^x(\cos x-\sin x)<0$

$e^x>0$이므로 $\quad \cos x<\sin x$

$\therefore \frac{\pi}{4}<x<\frac{5}{4}\pi\ (\because 0<x<2\pi)$

따라서 a의 최솟값은 $\frac{\pi}{4}$, b의 최댓값은 $\frac{5}{4}\pi$이므로 $b-a$의 최댓값은 $\quad \frac{5}{4}\pi-\frac{\pi}{4}=\pi$ 답 ④

382 $f(x)=ax+\dfrac{b}{x-1}$에서

$f'(x)=a-\dfrac{b}{(x-1)^2}$

함수 $f(x)$가 $x=0$에서 극댓값 -2를 가지므로

$f(0)=-2$에서 $\quad -b=-2$

$\therefore b=2$

$f'(0)=0$에서 $\quad a-b=0$

$\therefore a=b=2$

따라서 $f'(x)=2-\dfrac{2}{(x-1)^2}$이므로 $f'(x)=0$에서

$(x-1)^2=1,\quad x^2-2x=0,\quad x(x-2)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	-2	↘		↘	6	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극솟값 6을 갖는다.

답 6

383 $f'(x)=\sin x(2\cos x-1)$에서

$f''(x)=\cos x(2\cos x-1)+\sin x(-2\sin x)$

$=2(\cos^2 x-\sin^2 x)-\cos x$

$=2\cos 2x-\cos x$

$f'(x)=0$에서 $\quad \sin x=0$ 또는 $\cos x=\frac{1}{2}$

일품 BOX

$\sin x=0$에서

$x=\pi,\ 2\pi,\ 3\pi$

$\cos x=\frac{1}{2}$에서

$x=\frac{\pi}{3},\ \frac{5}{3}\pi,\ \frac{7}{3}\pi,\ \frac{11}{3}\pi$

어떤 구간에서 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여

① $f'(x)>0$

➡ $f(x)$는 이 구간에서 증가

② $f'(x)<0$

➡ $f(x)$는 이 구간에서 감소

$\sin 2x-\cos 2x$

$=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin 2x-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos 2x\right)$

$=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\sin 2x-\sin\frac{\pi}{4}\cos 2x\right)$

$=\sqrt{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$

$0<x<4\pi$이므로

$x=\frac{\pi}{3},\ \pi,\ \frac{5}{3}\pi,\ 2\pi,\ \frac{7}{3}\pi,\ 3\pi,\ \frac{11}{3}\pi$

$f''\left(\frac{\pi}{3}\right)=2\cos\frac{2}{3}\pi-\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{3}{2}<0$

$f''(\pi)=2\cos 2\pi-\cos\pi=3>0$

$f''\left(\frac{5}{3}\pi\right)=2\cos\frac{10}{3}\pi-\cos\frac{5}{3}\pi=-\frac{3}{2}<0$

$f''(2\pi)=2\cos 4\pi-\cos 2\pi=1>0$

$f''\left(\frac{7}{3}\pi\right)=2\cos\frac{14}{3}\pi-\cos\frac{7}{3}\pi=-\frac{3}{2}<0$

$f''(3\pi)=2\cos 6\pi-\cos 3\pi=3>0$

$f''\left(\frac{11}{3}\pi\right)=2\cos\frac{22}{3}\pi-\cos\frac{11}{3}\pi=-\frac{3}{2}<0$

따라서 $f(x)$는 $x=\frac{\pi}{3},\ \frac{5}{3}\pi,\ \frac{7}{3}\pi,\ \frac{11}{3}\pi$에서 극대이므로 극대가 되는 점은 4개이다. 답 ④

384 해결 과정 $f'(x)=-2e^{2x}\sin 2x+2f(x)$에서

$f''(x)=-4e^{2x}\sin 2x-4e^{2x}\cos 2x+2f'(x)$

$=-4e^{2x}\sin 2x-4e^{2x}\cos 2x$

$+2\{-2e^{2x}\sin 2x+2f(x)\}$

$=-8e^{2x}\sin 2x-4e^{2x}\cos 2x+4f(x)$

이므로 $\quad 4e^{2x}=-4e^{2x}\cos 2x+4f(x)$

$\therefore f(x)=e^{2x}+e^{2x}\cos 2x$ ● 40%

즉 $f'(x)=2e^{2x}(-\sin 2x+1+\cos 2x)$이므로

$f'(x)=0$에서

$\sin 2x-\cos 2x=1,\quad \sqrt{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=1$

$\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$0<x<\pi$에서 $-\frac{\pi}{4}<2x-\frac{\pi}{4}<\frac{7}{4}\pi$이므로

$2x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$ 또는 $2x-\frac{\pi}{4}=\frac{3}{4}\pi$

$\therefore x=\frac{\pi}{4}$ 또는 $x=\frac{\pi}{2}$ ● 40%

답 구하기 $f''\left(\frac{\pi}{4}\right)=-4e^{\frac{\pi}{2}}<0,\ f''\left(\frac{\pi}{2}\right)=4e^{\pi}>0$이므로 구하는 극댓값은 $\quad f\left(\frac{\pi}{4}\right)=e^{\frac{\pi}{2}}$ ● 20%

답 $e^{\frac{\pi}{2}}$

385 문제 이해 $f(x)=\frac{a}{\sqrt{2}}x^2+\sin x+\cos x$라 하면

$f'(x)=\sqrt{2}ax+\cos x-\sin x$

$f''(x)=\sqrt{2}a-\sin x-\cos x$

$=\sqrt{2}a-\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ ● 30%

해결 과정 $f''(x)=0$에서 $\quad \sqrt{2}a-\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0$

$a=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠ ● 20%

곡선 $y=f(x)$가 변곡점을 가지려면 방정식 $f''(x)=0$이 실근을 가져야 한다.

이때 $-1\le\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\le1$이므로 ㉠에서

$$-1\le a\le 1$$

$a=-1$이면 $\quad f''(x)=-\sqrt{2}\left\{1+\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right\}\le0$

$a=1$이면 $\quad f''(x)=\sqrt{2}\left\{1-\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right\}\ge0$

이므로 $a=-1$ 또는 $a=1$이면 $f''(x)=0$이 되는 x의 값의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌지 않는다. ● 40%

답 구하기 따라서 구하는 a의 값의 범위는

$$-1<a<1$$ ● 10%

답 $-1<a<1$

일품 BOX

변곡점의 판정
함수 $f(x)$에서 $f''(a)=0$이고 $x=a$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌면 점 $(a,\ f(a))$는 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이다.

386 $f(x)=x^n\left(\ln x-\frac{1}{n}\right)$이라 하면

$$f'(x)=nx^{n-1}\left(\ln x-\frac{1}{n}\right)+x^{n-1}=nx^{n-1}\ln x$$

$$f''(x)=n(n-1)x^{n-2}\ln x+nx^{n-2}$$
$$=nx^{n-2}\{(n-1)\ln x+1\}$$

$f''(x)=0$에서 $\quad (n-1)\ln x+1=0\ (\because x>0)$

$$\therefore x=e^{\frac{1}{1-n}}$$

$(n-1)\ln x+1=0$에서
$\ln x=\frac{1}{1-n}$
$\therefore x=e^{\frac{1}{1-n}}$

$x>e^{\frac{1}{1-n}}$일 때, $\quad f''(x)>0$

$x<e^{\frac{1}{1-n}}$일 때, $\quad f''(x)<0$

$x=e^{\frac{1}{1-n}}$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로

$$a_n=e^{\frac{1}{1-n}},\quad b_n=e^{\frac{n}{1-n}}\left(\frac{1}{1-n}-\frac{1}{n}\right)$$

이때

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{1}{1-n}}=1,$$

$$\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{n}{1-n}}\left(\frac{1}{1-n}-\frac{1}{n}\right)=0$$

이므로

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n+\lim_{n\to\infty}b_n=1+0=1$$ 답 ④

387 $b=\sqrt{112-a^3}$이므로 직육면체의 부피를 $f(a)$라 하면

$$f(a)=a^2b=a^2\sqrt{112-a^3}$$

$$f'(a)=2a\sqrt{112-a^3}+a^2\cdot\frac{-3a^2}{2\sqrt{112-a^3}}$$
$$=\frac{4a(112-a^3)-3a^4}{2\sqrt{112-a^3}}$$
$$=\frac{-7a^4+448a}{2\sqrt{112-a^3}}$$
$$=\frac{-7a(a-4)(a^2+4a+16)}{2\sqrt{112-a^3}}$$

$f'(a)=0$에서 $\quad -7a(a-4)(a^2+4a+16)=0$

$$\therefore a=4\ (\because 0<a<\sqrt[3]{112},\ a^2+4a+16>0)$$

따라서 $f(a)$는 $a=4$일 때 극대이면서 최대이다.

a	0	$\cdots$	4	$\cdots$	$\sqrt[3]{112}$
$f'(a)$		$+$	0	$-$	
$f(a)$		↗	극대	↘	

$a^3+b^2=112$이므로

$b^2=112-64=48 \qquad \therefore b=4\sqrt{3}\ (\because b>0)$

$\therefore ab=16\sqrt{3}$

답 ⑤

388 $f(x)=e^{-2x}$이라 하면 $\quad f'(x)=-2e^{-2x}$

점 $(t,\ e^{-2t})$에서의 접선의 기울기는

$$f'(t)=-2e^{-2t}$$

따라서 접선의 방정식은

$$y-e^{-2t}=-2e^{-2t}(x-t),$$

즉 $y=-2e^{-2t}x+(2t+1)e^{-2t}$

이 접선의 x절편, y절편은 각각 $\frac{2t+1}{2},\ (2t+1)e^{-2t}$이므로 접선과 x축 및 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 $S(t)$라 하면

$$S(t)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2t+1}{2}\cdot(2t+1)e^{-2t}=\frac{1}{4}(2t+1)^2e^{-2t}$$

$$\therefore S'(t)=(2t+1)e^{-2t}-\frac{1}{2}(2t+1)^2e^{-2t}$$
$$=\frac{1}{2}e^{-2t}(2t+1)(1-2t)$$

$S'(t)=0$에서 $\quad t=\frac{1}{2}\ (\because t>0)$

t	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$S'(t)$		$+$	0	$-$
$S(t)$		↗	$\frac{1}{e}$	↘

따라서 $S(t)$는 $t=\frac{1}{2}$일 때 극대이면서 최대이므로 구하는 넓이의 최댓값은 $\frac{1}{e}$이다.

$S\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}\cdot2^2\cdot e^{-1}$
$=\frac{1}{e}$

답 $\frac{1}{e}$

389 원 $(x-1)^2+y^2=\frac{1}{4}$의 중심을 $\mathrm{C}(1,\ 0)$이라 하면

$$\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QC}}\ge\overline{\mathrm{PC}}$$

$$\therefore \overline{\mathrm{PQ}}\ge\overline{\mathrm{PC}}-\overline{\mathrm{QC}}=\overline{\mathrm{PC}}-\frac{1}{2}$$

따라서 $\overline{\mathrm{PC}}$의 길이가 최소일 때, $\overline{\mathrm{PC}}$와 원의 교점을 점 Q로 잡으면 $\overline{\mathrm{PQ}}$의 길이가 최소가 된다.

점 P의 좌표를 $(t,\ e^t)$이라 하면

$$\overline{\mathrm{PC}}^2=(t-1)^2+(e^t)^2=e^{2t}+t^2-2t+1$$

$f(t)=e^{2t}+t^2-2t+1$이라 하면

$$f'(t)=2e^{2t}+2t-2=2(e^{2t}+t-1)$$

$f'(t)=0$에서 $\quad e^{2t}+t-1=0 \qquad \therefore t=0$

따라서 $f(t)$는 $t=0$일 때 극소이면서 최소이다.

t	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(t)$	$-$	0	$+$
$f(t)$	↘	2	↗

즉 $\overline{\mathrm{PC}}^2\ge2$이므로

$f(0)=e^0+1=2$

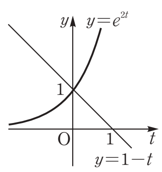
$\overline{\mathrm{PC}} \ge \sqrt{2}$

$\therefore \overline{\mathrm{PQ}} \ge \overline{\mathrm{PC}} - \frac{1}{2} \ge \sqrt{2} - \frac{1}{2}$

따라서 $\overline{\mathrm{PQ}}$의 최솟값은 $\sqrt{2}-\frac{1}{2}$이다. 답 ③

1등급 비밀노트

$e^{2t}+t-1=0$에서 $e^{2t}=1-t$
방정식 $e^{2t}=1-t$의 실근은 곡선 $y=e^{2t}$과 직선 $y=1-t$의 교점의 t좌표와 같다.
두 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 점 $(0,\ 1)$에서 만나므로 방정식 $e^{2t}+t-1=0$의 실근은 $t=0$이다.



390

$\sqrt{1+x^2}=a(x+1)$에서 $\frac{\sqrt{1+x^2}}{x+1}=a$

$f(x)=\frac{\sqrt{1+x^2}}{x+1}$이라 하면

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}\cdot(x+1)-\sqrt{1+x^2}}{(x+1)^2}$$

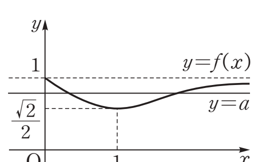
$$=\frac{x-1}{\sqrt{1+x^2}\,(x+1)^2}$$

$f'(x)=0$에서 $x=1$

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	1	↘	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	↗

또 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=1$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$
$=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x+1}$
$=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}{1+\frac{1}{x}}$
$=1$



주어진 방정식이 실근을 가지려면 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=a$가 만나야 하므로 a의 값의 범위는

$\frac{\sqrt{2}}{2}\le a\le 1$

$x\ge0$에서 방정식 $\frac{\sqrt{1+x^2}}{x+1}=a$의 서로 다른 실근의 개수
(i) $a=\frac{\sqrt{2}}{2}$일 때, 1
(ii) $\frac{\sqrt{2}}{2}<a<1$일 때, 2
(iii) $a=1$일 때, 1

따라서 a의 최솟값은 $\frac{\sqrt{2}}{2}$이다. 답 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

391

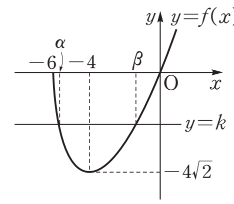
해결 과정 $f(x)=x\sqrt{x+6}$이라 하면

$f'(x)=\sqrt{x+6}+\frac{x}{2\sqrt{x+6}}=\frac{3x+12}{2\sqrt{x+6}}$ ● 20%

$f'(x)=0$에서 $x=-4$

x	-6	$\cdots$	-4	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	0	↘	$-4\sqrt{2}$	↗

또 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$이므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. ● 30%



주어진 방정식이 서로 다른 두 실근을 가지려면 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 서로 다른 두 점에서 만나야 하므로 $-4\sqrt{2}<k\le0$

$\therefore a=-4\sqrt{2},\ b=0$ ● 20%

또 $-6\le\alpha<-4$이므로 $c=-6,\ d=-4$ ● 20%

답 구하기 $\therefore ad=-4\sqrt{2}\cdot(-4)=16\sqrt{2}$ ● 10%

답 $16\sqrt{2}$

392

$g(x)=\ln(\sin x+3)$이라 하면

$g'(x)=\frac{\cos x}{\sin x+3}$

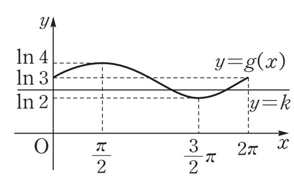
$g'(x)=\frac{(\sin x+3)'}{\sin x+3}=\frac{\cos x}{\sin x+3}$

$g'(x)=0$에서

$x=\frac{\pi}{2}$ 또는 $x=\frac{3}{2}\pi$ $(\because 0\le x\le 2\pi)$

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{3}{2}\pi$	$\cdots$	2π
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$\ln 3$	↗	$\ln 4$	↘	$\ln 2$	↗	$\ln 3$

따라서 $y=g(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



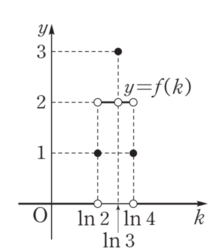
방정식 $\ln(\sin x+3)=k$의 서로 다른 실근의 개수는 곡선 $y=g(x)$와 직선 $y=k$의 교점의 개수와 같으므로

(i) $k<\ln 2$일 때, $f(k)=0$
(ii) $k=\ln 2$일 때, $f(k)=1$
(iii) $\ln 2<k<\ln 3$일 때, $f(k)=2$
(iv) $k=\ln 3$일 때, $f(k)=3$
(v) $\ln 3<k<\ln 4$일 때, $f(k)=2$
(vi) $k=\ln 4$일 때, $f(k)=1$
(vii) $k>\ln 4$일 때, $f(k)=0$

따라서 $y=f(k)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 함수 $f(k)$가 불연속이 되는 k의 값은

$\ln 2,\ \ln 3,\ \ln 4$

의 3개이다. 답 ③



393

$f(x)=e^x-\frac{1}{2}x^2-x-1$이라 하면

$f'(x)=e^x-x-1,\ f''(x)=e^x-1$

$x>0$에서 $f''(x)>0$이므로 $f'(x)$는 $x>0$에서 $\boxed{증가}$한다.

이때 $f'(0)=0$이므로 $\quad f'(x)\boxed{>}0$

따라서 함수 $f(x)$는 $x>0$에서 $\boxed{\text{증가}}$하고, $f(0)=0$이므로 $f(x)>0$이다.

즉 $x>0$일 때, 부등식 $e^x>\frac{1}{2}x^2+x+1$이 성립한다.

$\therefore$ (가) 증가 (나) $>$ (다) 증가

답 ①

394 (해결 과정) $f(x)=k\ln x-2\sqrt{x}$라 하면

$$f'(x)=\frac{k}{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{k-\sqrt{x}}{x}$$

$f'(x)=0$에서 $\quad k-\sqrt{x}=0 \quad \therefore x=k^2$ ● 30%

x	0	$\cdots$	k^2	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		$\nearrow$	극대	$\searrow$

따라서 $f(x)$는 $x=k^2$에서 극대이면서 최대이다. ● 30%

(답 구하기) $x>0$에서 주어진 부등식이 성립하려면 $f(k^2)<0$이어야 하므로

$f(k^2)=k\ln k^2-2\sqrt{k^2}<0, \quad 2k(\ln k-1)<0$

$k>0$이므로 $\quad \ln k<1$

$\therefore \ 0<k<e$ ● 40%

답 $0<k<e$

395 ㄱ. 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 미분가능하므로

$$\lim_{x\to a}g(x)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$$

따라서 $\lim_{x\to a}g(x)=g(a)$이므로 $g(x)$는 $x=a$에서 연속이다.

ㄴ. $x\neq a$일 때,

$$g'(x)=\frac{f'(x)(x-a)-\{f(x)-f(a)\}}{(x-a)^2}$$

$h(x)=f'(x)(x-a)-f(x)+f(a)$로 놓으면

$h'(x)=f''(x)(x-a)+f'(x)-f'(x)$
$\quad =f''(x)(x-a)$

$h'(x)=0$에서 $\quad x=a\ (\because f''(x)>0)$

$h(x)$는 $x=a$에서 극솟값을 갖고, $h(a)=0$이므로 $x\neq a$일 때, $h(x)>0$이다.

즉 $x\neq a$일 때, $g'(x)>0$이다.

따라서 $x\neq a$일 때, $g(x)$는 증가하고 ㄱ에서 $g(x)$는 모든 실수 x에서 연속이므로 $g(x)$는 구간 $(-\infty,\ \infty)$에서 증가한다.

ㄷ. ㄴ에서 $g'(x)>0$이므로 $g(x)$는 극값을 갖지 않는다.

이상에서 옳은 것은 ㄴ뿐이다.

답 ②

396 $f(x)=\left(\frac{1}{x}\right)^{\ln x}$의 양변에 자연로그를 취하면

일품 BOX

$f(x)=\left(\frac{1}{x}\right)^{\ln x}$에서
$f(x)=x^{-\ln x}$
위의 식의 양변에 자연로그를 취하면
$\ln f(x)$
$=-\ln x\cdot\ln x$
$=-(\ln x)^2$

$x>0$일 때 $f(x)>0$이므로
$e^x-\frac{1}{2}x^2-x-1>0$
$\therefore e^x>\frac{1}{2}x^2+x+1$

$y=f(x)$의 그래프의 점근선의 방정식은 $y=0$이다.

$h(a)$
$=f'(a)(a-a)-f(a)+f(a)$
$=0$

점 A, B가 직선 $y=x$ 위에 있다.

$\ln f(x)=-(\ln x)^2$

양변을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=-\frac{2}{x}\ln x$$

$$\therefore f'(x)=-\frac{2f(x)\ln x}{x}$$

$f''(x)$

$$=-2\left\{f'(x)\cdot\frac{\ln x}{x}+f(x)\cdot\frac{1-\ln x}{x^2}\right\}$$

$$=-2\left\{-\frac{2f(x)\ln x}{x}\cdot\frac{\ln x}{x}+\frac{f(x)(1-\ln x)}{x^2}\right\}$$

$$=\frac{2f(x)}{x^2}\{2(\ln x)^2+\ln x-1\}$$

$$=\frac{2f(x)}{x^2}(\ln x+1)(2\ln x-1)$$

$f'(x)=0$에서 $\quad \ln x=0\ (\because f(x)>0)$

$\therefore x=1$

$f''(x)=0$에서 $\quad \ln x=-1$ 또는 $\ln x=\frac{1}{2}$

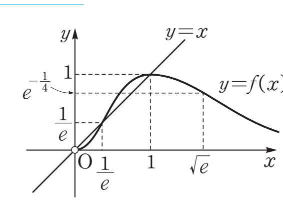
$\therefore x=\frac{1}{e}$ 또는 $x=\sqrt{e}$

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{e}$	$\cdots$	1	$\cdots$	$\sqrt{e}$	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$		⤴	$\frac{1}{e}$	↗	1	↘	$e^{-\frac{1}{4}}$	↘

또 $\lim_{x\to 0+}\ln f(x)=-\infty,\ \lim_{x\to\infty}\ln f(x)=-\infty$이므로

$\lim_{x\to 0+}f(x)=0,\ \lim_{x\to\infty}f(x)=0$

따라서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



ㄱ. 오른쪽 그림에서 함수 $f(x)$의 치역은 $\{y\,|\,0<y\leq 1\}$이다.

ㄴ. 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$는 서로 다른 두 점에서 만나므로 방정식 $f(x)=x$, 즉 $f(x)-x=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

ㄷ. 곡선 $y=f(x)$의 변곡점의 좌표는 $\left(\frac{1}{e},\ \frac{1}{e}\right)$, $(\sqrt{e},\ e^{-\frac{1}{4}})$이고, $f(x)$는 $x=1$에서 극댓값 1을 가지므로 세 점 $\mathrm{A}(1,\ 1)$, $\mathrm{B}\left(\frac{1}{e},\ \frac{1}{e}\right)$, $\mathrm{C}(\sqrt{e},\ e^{-\frac{1}{4}})$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC에서

$$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{\left(1-\frac{1}{e}\right)^2+\left(1-\frac{1}{e}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}(e-1)}{e}$$

$\triangle$ABC의 밑변을 $\overline{\mathrm{AB}}$라 하면 높이는 점 C와 직선 $y=x$, 즉 $x-y=0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{\left|\sqrt{e}-e^{-\frac{1}{4}}\right|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{\sqrt{e}-e^{-\frac{1}{4}}}{\sqrt{2}}$$

미분법 Ⅲ

$$\therefore S=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}(e-1)}{e}\cdot\frac{\sqrt{e}-e^{-\frac{1}{4}}}{\sqrt{2}}$$

$$=\frac{(e-1)(\sqrt{e}-e^{-\frac{1}{4}})}{2e}$$

$\sqrt{e}-e^{-\frac{1}{4}}<e$이므로 $\frac{\sqrt{e}-e^{-\frac{1}{4}}}{e}<1$에서

$$S<\frac{e-1}{2}$$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

397 $a^x=x^a$의 양변에 자연로그를 취하면

$x\ln a=a\ln x \quad \therefore \frac{\ln x}{x}=\frac{\ln a}{a}$

주어진 방정식의 양의 근의 개수는 곡선 $y=\frac{\ln x}{x}$와 직선 $y=\frac{\ln a}{a}$의 교점의 개수와 같다.

$f(x)=\frac{\ln x}{x}$라 하면 $\quad f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$

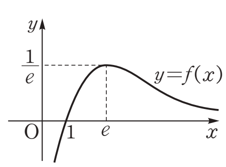
$f'(x)=0$에서 $\quad 1-\ln x=0 \quad \therefore x=e$

x	0	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$

또 $\lim_{x\to0+}f(x)=-\infty$,

$\lim_{x\to\infty}f(x)=0$이므로

$y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



ㄱ. $0<a\le1$일 때, $\frac{\ln a}{a}\le0$이므로 곡선 $y=\frac{\ln x}{x}$와 직선 $y=\frac{\ln a}{a}$는 한 점에서 만난다.

$\therefore N(a)=1$

ㄴ. $1<a<e$일 때, $0<\frac{\ln a}{a}<\frac{1}{e}$이므로 곡선 $y=\frac{\ln x}{x}$와 직선 $y=\frac{\ln a}{a}$는 서로 다른 두 점에서 만난다.

$\therefore N(a)=2$

ㄷ. $a>e$일 때, $0<\frac{\ln a}{a}<\frac{1}{e}$이므로 곡선 $y=\frac{\ln x}{x}$와 직선 $y=\frac{\ln a}{a}$는 서로 다른 두 점에서 만난다.

$\therefore N(a)=2$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ③

1등급 비밀노트

함수 $y=\frac{\ln x}{x}$의 그래프에서 $1<x<e$ 또는 $x>e$일 때 $0<y<\frac{1}{e}$이므로 $1<a<e$ 또는 $a>e$일 때 $0<\frac{\ln a}{a}<\frac{1}{e}$임을 알 수 있다.

일품 BOX

$\sqrt{e}<e$, $e^{-\frac{1}{4}}>0$이므로

$\sqrt{e}-e^{-\frac{1}{4}}<e$

$f(0)=m\ln1-n\ln1$
$=0-0=0$

로그부등식

① $a>1$일 때
$\log_a f(x)>\log_a g(x)$
$\iff f(x)>g(x)>0$

② $0<a<1$일 때
$\log_a f(x)>\log_a g(x)$
$\iff 0<f(x)<g(x)$

$f(x)=kx\sqrt{x}=kx^{\frac{3}{2}}$에서

$f'(x)=\frac{3}{2}kx^{\frac{1}{2}}$
$=\frac{3}{2}k\sqrt{x}$

$g(x)=\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$에서

$g'(x)=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$
$=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

$f(1)=\frac{\ln1}{1}=0$

이므로 $y=f(x)$의 그래프는 점 $(1,\ 0)$을 지난다.

두 직선 l, m이 x축의 양의 부분과 이루는 각의 크기가 각각 α, β일 때, 두 직선 l, m이 이루는 예각의 크기를 θ라 하면

$\tan\theta$
$=|\tan(\alpha-\beta)|$
$=\left|\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\right|$

398 $f(x)=m\ln\left(1+\frac{x}{m^2}\right)-n\ln\left(1+\frac{x}{n^2}\right)$라 하면

$$f'(x)=m\cdot\frac{\frac{1}{m^2}}{1+\frac{x}{m^2}}-n\cdot\frac{\frac{1}{n^2}}{1+\frac{x}{n^2}}$$

$$=\frac{m}{x+m^2}-\frac{n}{x+n^2}=\frac{(m-n)(\boxed{x-mn})}{(x+m^2)(x+n^2)}$$

$m-n<0$, $mn>1$이므로 $0<x<1$에서 $\quad f'(x)>0$

따라서 $0<x<1$에서 $f(x)$는 증가한다.

이때 $f(0)=0$이므로 $\quad f(x)>0$

즉 $m\ln\left(1+\frac{x}{m^2}\right)>n\ln\left(1+\frac{x}{n^2}\right)$이므로

$$\left(1+\frac{x}{m^2}\right)^m\ \boxed{>}\ \left(1+\frac{x}{n^2}\right)^n$$

$\therefore$ (가) $x-mn$ (나) $>$ 답 ③

399 $kx\sqrt{x}=\sqrt{x}$에서 $\quad \sqrt{x}(kx-1)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=\frac{1}{k}$

점 P는 원점이 아니므로 $\quad \mathrm{P}\left(\frac{1}{k},\ \frac{1}{\sqrt{k}}\right)$

$f(x)=kx\sqrt{x}$, $g(x)=\sqrt{x}$라 하면

$f'(x)=\frac{3}{2}k\sqrt{x}$, $g'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 P에서의 접선이 x축의 양의 부분과 이루는 각의 크기를 α라 하면

$$\tan\alpha=f'\left(\frac{1}{k}\right)=\frac{3\sqrt{k}}{2}$$

곡선 $y=g(x)$ 위의 점 P에서의 접선이 x축의 양의 부분과 이루는 각의 크기를 β라 하면

$$\tan\beta=g'\left(\frac{1}{k}\right)=\frac{\sqrt{k}}{2}$$

$$\therefore \tan\theta=|\tan(\alpha-\beta)|=\left|\frac{\frac{3\sqrt{k}}{2}-\frac{\sqrt{k}}{2}}{1+\frac{3\sqrt{k}}{2}\cdot\frac{\sqrt{k}}{2}}\right|$$

$$=\left|\frac{\sqrt{k}}{1+\frac{3}{4}k}\right|=\left|\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{3\sqrt{k}}{4}}\right|$$

$k>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{3\sqrt{k}}{4}\ge2\sqrt{\frac{1}{\sqrt{k}}\cdot\frac{3\sqrt{k}}{4}}=2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$$

$\left(\text{단, 등호는 } \frac{1}{\sqrt{k}}=\frac{3\sqrt{k}}{4},\ \text{즉 } k=\frac{4}{3}\text{일 때 성립}\right)$

$$\therefore \tan\theta=\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{3\sqrt{k}}{4}}\le\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

따라서 $M=\frac{\sqrt{3}}{3}$이므로

$60M^2=20$ 답 20

1등급 완성하기

▶ 본책 76쪽

400 해결 과정 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)-2}{x-1}=3$에서 $x\to1$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이다.
즉 $\lim_{x\to1}\{f(x)-2\}=0$에서 $f(1)=2$이므로

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-2}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$$

$\therefore f'(1)=3$ ● 20%

$\lim_{x\to1}\frac{g(x)+1}{x-1}=2$에서 $x\to1$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이다.
즉 $\lim_{x\to1}\{g(x)+1\}=0$에서 $g(1)=-1$이므로

$$\lim_{x\to1}\frac{g(x)+1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=g'(1)$$

$\therefore g'(1)=2$ ● 20%

한편 $F(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$라 하면

$$\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\left\{\frac{f(1)}{g(1)}-\frac{f(1+h)}{g(1+h)}\right\}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\{F(1)-F(1+h)\}$$
$$=-\lim_{h\to0}\frac{F(1+h)-F(1)}{h}$$
$$=-F'(1)$$ ● 20%

답 구하기 이때

$$F'(x)=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$ ● 20%

이므로

$$-F'(1)=-\frac{f'(1)g(1)-f(1)g'(1)}{\{g(1)\}^2}$$
$$=-\frac{3\cdot(-1)-2\cdot2}{(-1)^2}$$
$$=7$$ ● 20%

답 7

> **함수의 몫의 미분법**
> 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ $(g(x)\neq0)$가 미분가능할 때
> ① $y=\frac{f(x)}{g(x)}$이면
> $y'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$
> ② $y=\frac{1}{g(x)}$이면
> $y'=-\frac{g'(x)}{\{g(x)\}^2}$

401 $f(x)=\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x^3}+\cdots+\frac{10}{x^{10}}$
$=x^{-1}+2x^{-2}+3x^{-3}+\cdots+10x^{-10}$

에서

$$f'(x)=-x^{-2}-2^2x^{-3}-3^2x^{-4}-\cdots-10^2x^{-11}$$
$$=-\frac{1}{x^2}-\frac{2^2}{x^3}-\frac{3^2}{x^4}-\cdots-\frac{10^2}{x^{11}}$$

$\therefore f'(-1)$
$=-1+2^2-3^2+4^2-5^2+6^2-7^2+8^2-9^2+10^2$
$=(2-1)(2+1)+(4-3)(4+3)$
$\quad+\cdots+(10-9)(10+9)$
$=1+2+3+4+\cdots+9+10$
$=55$

답 55

> $\sum_{k=1}^{10}k=\frac{10\cdot11}{2}=55$

402 $f(x)=\frac{x}{x+1}$에서

$$f'(x)=\frac{x+1-x}{(x+1)^2}=\frac{1}{(x+1)^2}$$

$\therefore f'(0)=1$

$g(x)=\frac{x^2-1}{x^2+1}$에서

$$g'(x)=\frac{2x(x^2+1)-(x^2-1)\cdot2x}{(x^2+1)^2}=\frac{4x}{(x^2+1)^2}$$

$\therefore g'(0)=0$

$h(x)=(x+\sqrt{1+x^2})^{10}$에서

$$h'(x)=10(x+\sqrt{1+x^2})^9\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right)$$

$\therefore h'(0)=10$

$\therefore f'(0)+g'(0)+h'(0)=1+0+10=11$ 답 ②

> **합성함수의 미분법**
> 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 미분가능할 때,
> $y=f(g(x))$이면
> $y'=f'(g(x))g'(x)$

403 $f(x^3-1)=\frac{x^2+3}{x+1}$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f'(x^3-1)\cdot3x^2=\frac{2x(x+1)-(x^2+3)}{(x+1)^2}$$
$$=\frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}$$

함수 $f(x)$가 $x>0$에서 정의되므로

$x^3-1>0$, $\quad(x-1)(x^2+x+1)>0$

$\therefore x>1$ ($\because x^2+x+1>0$)

$$\therefore f'(x^3-1)=\frac{x^2+2x-3}{3x^2(x+1)^2}$$

$x^3-1=7$에서 $\quad x^3-8=0$

$(x-2)(x^2+2x+4)=0$

$\therefore x=2$ ($\because x^2+2x+4>0$)

$$\therefore f'(7)=\frac{4+4-3}{3\cdot4\cdot9}=\frac{5}{108}$$ 답 ①

404 $\lim_{x\to3}\frac{f(x)-1}{x-3}=2$에서 $x\to3$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이다.
즉 $\lim_{x\to3}\{f(x)-1\}=0$에서 $f(3)=1$이므로

$$\lim_{x\to3}\frac{f(x)-1}{x-3}=\lim_{x\to3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=f'(3)$$

$\therefore f'(3)=2$

$g(x)=2^{f(x^2+2x)}$에서

$$g'(x)=2^{f(x^2+2x)}\cdot\ln2\cdot f'(x^2+2x)\cdot(2x+2)$$

$\therefore g'(1)=2^{f(3)}\cdot\ln2\cdot f'(3)\cdot4$
$=2^1\cdot\ln2\cdot2\cdot4$
$=16\ln2$

$\therefore k=16$ 답 16

> **지수함수의 도함수**
> ① $y=e^x$이면 $y'=e^x$
> ② $y=a^x$ $(a>0,\ a\neq1)$이면 $y'=a^x\ln a$

405 해결 과정 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하려면 $x=1$에서 연속이어야 하므로

$$\lim_{x\to1+}\ln\pi x=\lim_{x\to1-}(a\tan\pi x+b)=f(1)$$

$\ln\pi=a\tan\pi+b$

$\therefore b=\ln\pi$ ● 30%

또 $f'(1)$이 존재해야 하므로

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x} & (x>1)\\ a\pi\sec^2\pi x & \left(\dfrac{1}{2}<x<1\right)\end{cases}$$ 에서

$$\lim_{x\to1+}\frac{1}{x}=\lim_{x\to1-}a\pi\sec^2\pi x$$

$1=a\pi\sec^2\pi,\quad a\pi=1\quad \therefore a=\dfrac{1}{\pi}$ ● 50%

답 구하기 $\therefore \dfrac{b}{a}=\pi\ln\pi$ ● 20%

답 $\pi\ln\pi$

406 $x=y^{\frac{1}{2}}+2y^{\frac{5}{2}}$의 양변을 y에 대하여 미분하면

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}+5y^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{y}}+5y\sqrt{y}=\frac{1+10y^2}{2\sqrt{y}}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{2\sqrt{y}}{1+10y^2}$$

답 ④

다른 풀이 $x=y^{\frac{1}{2}}+2y^{\frac{5}{2}}$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$1=\frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}\frac{dy}{dx}+5y^{\frac{3}{2}}\frac{dy}{dx}$$

$$1=\frac{1+10y^2}{2\sqrt{y}}\cdot\frac{dy}{dx}\qquad\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{2\sqrt{y}}{1+10y^2}$$

407 ㄱ. $f(g(x))=x$이므로 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(g(x))g'(x)=1$

따라서 $f'(g(2))g'(2)=1$이고 $g'(2)\neq0$이므로

$$f'(g(2))=\frac{1}{g'(2)}$$

ㄴ. $f(2)=2$이므로 $g(2)=2$

ㄱ에서 $f'(g(2))=f'(2)=\dfrac{1}{g'(2)}$이므로

$f'(2)g'(2)=1$

ㄷ. [반례] $f(x)=x+1$이면 $g(x)=x-1$이므로

$f'(x)=1,\ g'(x)=1$

따라서 $f'(2)g'(2)=1\cdot1=1$이지만

$f(2)=3\neq2$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

408 $f(1)=2$이므로 $g(2)=1$

$$\therefore g'(2)=\frac{1}{f'(g(2))}=\frac{1}{f'(1)}=\frac{1}{4}$$

$h(x)=\dfrac{1}{\sqrt{g(x)}}$이라 하면

일품 BOX

$\ln\pi x=\ln\pi+\ln x$에서

$(\ln\pi x)'=\dfrac{1}{x}$

$f''(e)$

$=3e\cdot\dfrac{3}{e}+e^2\cdot\left(-\dfrac{1}{e^2}\right)$

$=9-1=8$

$y=x+1$로 놓으면

$x=y-1$

x와 y를 서로 바꾸면

$y=x-1$

$\therefore g(x)=x-1$

주어진 조건에서 $ab\neq0$이므로

$a\neq0$이고 $b\neq0$

$\therefore \dfrac{2ab}{b^2}=\dfrac{2a}{b}$

$$\lim_{x\to2}\frac{\frac{1}{\sqrt{g(x)}}-\frac{1}{\sqrt{g(2)}}}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{h(x)-h(2)}{x-2}$$

$$=h'(2)$$

이때

$$h'(x)=-\frac{\frac{1}{2\sqrt{g(x)}}\cdot g'(x)}{\{\sqrt{g(x)}\}^2}=-\frac{g'(x)}{2g(x)\sqrt{g(x)}}$$

이므로

$$h'(2)=-\frac{g'(2)}{2g(2)\sqrt{g(2)}}$$

$$=-\frac{\frac{1}{4}}{2\cdot1\cdot1}=-\frac{1}{8}$$

답 ②

409 $f(x)=x^{1+\ln x}$의 양변에 자연로그를 취하면

$\ln f(x)=(1+\ln x)\ln x$

양변을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{x}\ln x+(1+\ln x)\cdot\frac{1}{x}=\frac{2\ln x+1}{x}$$

$$\therefore f'(x)=f(x)\cdot\frac{2\ln x+1}{x}$$

$f''(x)$

$$=f'(x)\cdot\frac{2\ln x+1}{x}+f(x)\cdot\frac{\frac{2}{x}\cdot x-(2\ln x+1)}{x^2}$$

$$=f'(x)\cdot\frac{2\ln x+1}{x}+f(x)\cdot\frac{1-2\ln x}{x^2}$$

따라서 $f(e)=e^2,\ f'(e)=f(e)\cdot\dfrac{3}{e}=3e$이므로

$$f''(e)=f'(e)\cdot\frac{3}{e}+f(e)\cdot\left(-\frac{1}{e^2}\right)=8$$

답 8

410 해결 과정 $f(x)=ax\ln(2x+b)$에서

$$f'(x)=a\ln(2x+b)+ax\cdot\frac{2}{2x+b}$$

$$=a\ln(2x+b)+\frac{2ax}{2x+b}$$

$$f''(x)=\frac{2a}{2x+b}+\frac{2a(2x+b)-2ax\cdot2}{(2x+b)^2}$$

$$=\frac{2a}{2x+b}+\frac{2ab}{(2x+b)^2}$$ ● 50%

$f'(0)=\ln8$에서 $a\ln b=\ln8$ …… ㉠

$f''(0)=a$에서 $\dfrac{2a}{b}+\dfrac{2ab}{b^2}=a$

$\dfrac{4a}{b}=a\qquad\therefore b=4$ ● 20%

$b=4$를 ㉠에 대입하면 $a\ln4=\ln8$

$2a\ln2=3\ln2\qquad\therefore a=\dfrac{3}{2}$ ● 20%

답 구하기 $\therefore ab=6$ ● 10%

답 6

411 $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$이라 하면

$$f'(x)=-\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$$

점 $A\left(1,\ \dfrac{1}{2}\right)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=-\dfrac{1}{2}$이므로 접선 l의 방정식은

$$y-\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{2}(x-1),\ \text{즉}\ y=-\dfrac{1}{2}x+1$$

곡선 $y=\dfrac{1}{x^2+1}$과 직선 $y=-\dfrac{1}{2}x+1$의 교점의 x좌표는 $\dfrac{1}{x^2+1}=-\dfrac{1}{2}x+1$에서

$$-x^3+2x^2-x+2=2,\qquad x(x-1)^2=0$$

$\therefore x=0$ 또는 $x=1$

따라서 점 B의 좌표는 $(0,\ 1)$이므로 두 점 A, B 사이의 거리는

$$\overline{AB}=\sqrt{1^2+\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$$

답 ③

412 ㄱ. 점 P의 x좌표는 $xe^{-x}=ax$에서

$e^{-x}=a\ (\because x>0)$

$-x=\ln a \qquad \therefore x=-\ln a$

$x>0$이므로 $\quad -\ln a>0,\quad \ln a<0$

$\therefore 0<a<1$

ㄴ. $f(x)=xe^{-x}$이라 하면

$f'(x)=e^{-x}-xe^{-x}=(1-x)e^{-x}$

점 P의 좌표는 $(-\ln a,\ -a\ln a)$이므로 점 P에서의 접선의 기울기는 $\quad f'(-\ln a)=a(1+\ln a)$

따라서 접선 l의 방정식은

$y+a\ln a=a(1+\ln a)(x+\ln a)$,

즉 $y=a(1+\ln a)x+a(\ln a)^2$

접선 l과 직선 $y=ax$ 및 y축으로 둘러싸인 도형은 세 점 $(0,\ 0)$, $(0,\ a(\ln a)^2)$, $(-\ln a,\ -a\ln a)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형이므로 그 넓이는

$$S(a)=\dfrac{1}{2}\cdot a(\ln a)^2\cdot(-\ln a)=-\dfrac{1}{2}a(\ln a)^3$$

$$\therefore S\left(\dfrac{1}{e}\right)=-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{e}\cdot(-1)^3=\dfrac{1}{2e}$$

ㄷ. $S'(a)=-\dfrac{1}{2}(\ln a)^3-\dfrac{3}{2}a(\ln a)^2\cdot\dfrac{1}{a}$

$$=-\dfrac{1}{2}(\ln a)^3-\dfrac{3}{2}(\ln a)^2$$

$$\therefore S'\left(\dfrac{1}{e}\right)=-\dfrac{1}{2}\cdot(-1)^3-\dfrac{3}{2}\cdot(-1)^2=-1$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

413 $f(x)=e^{2x}$이라 하면 $\quad f'(x)=2e^{2x}$

접점의 좌표를 $(a,\ e^{2a})$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 2이므로 $f'(a)=2$에서

일품 BOX

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a,\ f(a))$에서의 접선의 방정식

➡ $y-f(a)=f'(a)(x-a)$

평행한 두 직선 l, l' 사이의 거리는 직선 l 위의 한 점과 직선 l' 사이의 거리와 같다.

$f(0)=\dfrac{1}{0+1}=1$

접선 l과 y축의 교점의 좌표

$2e^{2a}=2 \qquad \therefore a=0$

따라서 곡선 $y=e^{2x}$과 직선 l_1의 접점의 좌표는 $(0,\ 1)$이므로 접선 l_1의 방정식은

$$y-1=2(x-0),\ \text{즉}\ 2x-y+1=0$$

$g(x)=2\ln x$라 하면 $\qquad g'(x)=\dfrac{2}{x}$

접점의 좌표를 $(b,\ 2\ln b)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 2이므로 $g'(b)=2$에서

$$\dfrac{2}{b}=2 \qquad \therefore b=1$$

따라서 곡선 $y=2\ln x$와 직선 l_2의 접점의 좌표는 $(1,\ 0)$이므로 접선 l_2의 방정식은

$$y-0=2(x-1),\ \text{즉}\ 2x-y-2=0$$

두 직선 l_1, l_2 사이의 거리는 점 $(0,\ 1)$과 직선 $2x-y-2=0$ 사이의 거리와 같으므로 구하는 거리는

$$\dfrac{|-1-2|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\dfrac{3}{\sqrt{5}}=\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$$

답 ③

다른 풀이 두 직선 l_1, l_2 사이의 거리는 점 $(1,\ 0)$과 직선 $2x-y+1=0$ 사이의 거리와 같으므로 구하는 거리는

$$\dfrac{|2+1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\dfrac{3}{\sqrt{5}}=\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$$

414 **문제 이해** 곡선 $y=\sin x\ (0<x<\pi)$ 위의 점 P에서의 접선이 직선 AB와 평행할 때 삼각형 ABP의 넓이가 최소가 된다. 즉 직선 AB의 기울기가 $\dfrac{0-1}{-2-0}=\dfrac{1}{2}$이므로 곡선 위의 점 P에서의 접선의 기울기가 $\dfrac{1}{2}$이어야 한다. ● 20%

해결 과정 $f(x)=\sin x$라 하면 $\qquad f'(x)=\cos x$

점 P의 좌표를 $(a,\ \sin a)$라 하면

$$\cos a=\dfrac{1}{2} \qquad \therefore a=\dfrac{\pi}{3}\ (\because 0<a<\pi)$$

따라서 점 P의 좌표는 $\left(\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$이고 직선 AB의 방정식은

$$y-1=\dfrac{1}{2}(x-0),\ \text{즉}\ x-2y+2=0$$

이므로 점 P와 직선 AB 사이의 거리는

$$\dfrac{\left|\dfrac{\pi}{3}-\sqrt{3}+2\right|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\dfrac{\pi}{3}-\sqrt{3}+2\right)$$ ● 40%

또 $\overline{AB}=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$이므로 삼각형 ABP의 넓이의 최솟값은

$$\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{5}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\dfrac{\pi}{3}-\sqrt{3}+2\right)=\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+1$$ ● 30%

답 구하기 따라서 $p=\dfrac{1}{6}$, $q=-\dfrac{1}{2}$이므로

$$p+q=-\dfrac{1}{3}$$ ● 10%

답 $-\dfrac{1}{3}$

415 해결 과정 $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$라 하면

$$f'(x)=\frac{(x+1)-x}{(x+1)^2}=\frac{1}{(x+1)^2}$$ ● 20%

접점의 좌표를 $\left(a,\ \dfrac{a}{a+1}\right)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(a)=\dfrac{1}{(a+1)^2}$이므로 접선의 방정식은

$$y-\frac{a}{a+1}=\frac{1}{(a+1)^2}(x-a)$$ ● 20%

이 직선이 점 $(2,\ 2)$를 지나므로

$$2-\frac{a}{a+1}=\frac{1}{(a+1)^2}(2-a)$$
$$2(a+1)^2-a(a+1)=2-a$$
$$a^2+4a=0,\quad a(a+4)=0$$
$$\therefore a=-4 \text{ 또는 } a=0$$ ● 20%

따라서 접점의 좌표는 $\left(-4,\ \dfrac{4}{3}\right)$, $(0,\ 0)$이고 각 점에서의 접선이 x축의 양의 부분과 이루는 각의 크기를 α, β라 하면 $\tan\alpha=\dfrac{1}{9}$, $\tan\beta=1$ ● 20%

답 구하기 $\therefore \tan\theta=|\tan(\alpha-\beta)|$

$$=\left|\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\right|$$
$$=\left|\frac{\frac{1}{9}-1}{1+\frac{1}{9}\cdot 1}\right|=\frac{4}{5}$$ ● 20%

답 $\dfrac{4}{5}$

416 해결 과정 $f(x)=x^2e^{-x}$이라 하면

$$f'(x)=2xe^{-x}-x^2e^{-x}=xe^{-x}(2-x)$$ ● 20%

접점의 좌표를 $(t,\ t^2e^{-t})$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=te^{-t}(2-t)$이므로 접선의 방정식은

$$y-t^2e^{-t}=te^{-t}(2-t)(x-t)$$

이 직선이 점 $(a,\ 0)$을 지나므로

$$-t^2e^{-t}=te^{-t}(2-t)(a-t)$$
$$te^{-t}\{t^2-(a+1)t+2a\}=0$$
$$\therefore t\{t^2-(a+1)t+2a\}=0\ (\because e^{-t}>0)$$ ● 20%

점 $(a,\ 0)$에서 곡선 $y=x^2e^{-x}$에 서로 다른 세 개의 접선을 그을 수 있으려면 이차방정식 $t^2-(a+1)t+2a=0$이 0이 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로

$$a\neq 0 \quad \cdots\cdots \text{㉠}$$ ● 20%

이차방정식 $t^2-(a+1)t+2a=0$의 판별식을 D라 하면

$$D=(a+1)^2-8a>0,\quad a^2-6a+1>0$$
$$\therefore a<3-2\sqrt{2} \text{ 또는 } a>3+2\sqrt{2} \quad \cdots \text{㉡}$$ ● 20%

답 구하기 ㉠, ㉡에서

$$a<0 \text{ 또는 } 0<a<3-2\sqrt{2} \text{ 또는 } a>3+2\sqrt{2}$$

따라서 자연수 a의 최솟값은 6이다. ● 20%

답 6

일품 BOX

$\sqrt{(a+2)^2+a^2}$
$=\sqrt{a^2+4a+4+a^2}$
$=\sqrt{2a^2+4a+4}$

$f'(-4)=\dfrac{1}{9}$,
$f'(0)=1$

두 직선 l, m이 x축의 양의 부분과 이루는 각의 크기가 각각 α, β일 때, 두 직선 l, m이 이루는 예각의 크기를 θ라 하면
$\tan\theta$
$=|\tan(\alpha-\beta)|$
$=\left|\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\right|$

$te^{-t}(2-t)(a-t)+t^2e^{-t}$
$=0$
$te^{-t}\{t^2-(a+2)t+2a+t\}$
$=0$
$te^{-t}\{t^2-(a+1)t+2a\}$
$=0$

$\sqrt{4}<2\sqrt{2}<\sqrt{9}$이므로
$0<3-2\sqrt{2}<1$,
$5<3+2\sqrt{2}<6$

417 $f(x)=a\ln x+x^2-6x$에서

$$f'(x)=\frac{a}{x}+2x-6=\frac{a+2x^2-6x}{x}$$

함수 $f(x)$가 $x>0$에서 증가하려면 $f'(x)\geq 0$이어야 하므로

$$\frac{2x^2-6x+a}{x}\geq 0$$
$$\therefore 2x^2-6x+a\geq 0\ (\because x>0)$$

$g(x)=2x^2-6x+a$라 하면

$$g(x)=2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+a-\frac{9}{2}$$

이므로 $x>0$에서 $g(x)$의 최솟값은 $a-\dfrac{9}{2}$이다.

$a-\dfrac{9}{2}\geq 0$에서 $\quad a\geq\dfrac{9}{2}$

따라서 a의 최솟값은 $\dfrac{9}{2}$이다.

답 ⑤

418 문제 이해 함수 $f(x)$가 구간 $(-\infty,\ \infty)$에서 감소하려면 $f'(x)\leq 0$이어야 한다. ● 20%

해결 과정 $f(x)=(a+2)\sin x-a\cos x-10x$에서

$$f'(x)=(a+2)\cos x+a\sin x-10$$
$$=\sqrt{2a^2+4a+4}\sin(x+\alpha)-10$$
$$\left(\text{단, } \sin\alpha=\frac{a+2}{\sqrt{2a^2+4a+4}},\ \cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{2a^2+4a+4}}\right)$$

$f'(x)\leq 0$에서

$$\sqrt{2a^2+4a+4}\sin(x+\alpha)\leq 10 \quad \cdots\cdots \text{㉠}$$ ● 40%

$-1\leq\sin(x+\alpha)\leq 1$이므로 ㉠을 만족시키려면 $\sqrt{2a^2+4a+4}\leq 10$이어야 한다.

$$2a^2+4a+4\leq 100,\quad a^2+2a-48\leq 0$$
$$(a+8)(a-6)\leq 0 \quad \therefore -8\leq a\leq 6$$ ● 30%

답 구하기 따라서 정수 a는 $-8,\ -7,\ -6,\ \cdots,\ 5,\ 6$의 15개이다. ● 10%

답 15

419 ㄱ. $F'(x)=f'(f(x))f'(x)$이고 $f(1)=2$, $f'(2)=0$이므로

$$F'(1)=f'(f(1))f'(1)=f'(2)f'(1)$$
$$=0\cdot f'(1)=0$$

ㄴ. $1<x<2$에서 $2<f(x)<3$이므로 $f(x)=t$라 하면

$$2<t<3$$

$2<t<3$에서 $f'(t)<0$이므로 $1<x<2$에서

$$f'(f(x))<0$$

또 $1<x<2$에서 $f'(x)>0$이므로 $1<x<2$에서

$$F'(x)=f'(f(x))\cdot f'(x)<0$$

ㄷ. $2<x<3$에서 $2<f(x)<3$이므로 $f(x)=t$라 하면

$$2<t<3$$

$2<t<3$에서 $f'(t)<0$이므로 $2<x<3$에서

$$f'(f(x))<0$$

따라서 $2<x<3$에서

$$F'(x)=f'(f(x))\cdot f'(x)>0$$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

420 $f(x)=x-\ln(5x^2+n)$에서

$$f'(x)=1-\frac{10x}{5x^2+n}=\frac{5x^2-10x+n}{5x^2+n}$$

$5x^2+n>0$이므로 함수 $f(x)$가 극값을 가지려면 이차방정식 $5x^2-10x+n=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

이차방정식 $5x^2-10x+n=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=25-5n>0 \qquad \therefore n<5$$

따라서 자연수 n의 값은 1, 2, 3, 4이므로 구하는 합은

$$1+2+3+4=10$$

답 ②

421 해결 과정 $f(x)=e^{-x}(\sin x+\cos x)$에서

$$f'(x)=-e^{-x}(\sin x+\cos x)+e^{-x}(\cos x-\sin x)$$
$$=-2e^{-x}\sin x$$

● 20%

$f'(x)=0$에서 $\sin x=0$ ($\because e^{-x}>0$)

$\therefore x=\pi,\ 2\pi,\ 3\pi,\ \cdots$

x	0	$\cdots$	π	$\cdots$	2π	$\cdots$	3π	$\cdots$	4π	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$		↘	$-e^{-\pi}$	↗	$e^{-2\pi}$	↘	$-e^{-3\pi}$	↗	$e^{-4\pi}$	↘

따라서 $f(x)$는 $x=2\pi,\ 4\pi,\ 6\pi,\ \cdots$에서 극댓값을 갖는다. ● 50%

답 구하기 $f(2\pi)=e^{-2\pi}$, $f(4\pi)=e^{-4\pi}$, $f(6\pi)=e^{-6\pi}$, $\cdots$이므로 $a_1=e^{-2\pi}$, $a_2=e^{-4\pi}$, $a_3=e^{-6\pi}$, $\cdots$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{1}{e^{2\pi}}+\frac{1}{e^{4\pi}}+\frac{1}{e^{6\pi}}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{e^{2\pi}}\right)^n$$
$$=\frac{\frac{1}{e^{2\pi}}}{1-\frac{1}{e^{2\pi}}}=\frac{1}{e^{2\pi}-1}$$

● 30%

답 $\frac{1}{e^{2\pi}-1}$

422 ㄱ. $f(x)=\sin(\ln x)$에서

$$f'(x)=\cos(\ln x)\cdot\frac{1}{x}$$

$1<x<e^{\frac{\pi}{2}}$일 때, $0<\cos(\ln x)<1$이므로

$f'(x)>0$

즉 함수 $f(x)$는 구간 $(1,\ e^{\frac{\pi}{2}})$에서 증가한다.

ㄴ. $f''(x)=-\sin(\ln x)\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}+\cos(\ln x)\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)$

$$=-\frac{1}{x^2}\{\sin(\ln x)+\cos(\ln x)\}$$

$$\therefore f''(e^{\pi})=-\frac{1}{e^{2\pi}}(\sin\pi+\cos\pi)=\frac{1}{e^{2\pi}}>0$$

ㄷ. $f'(e^{\frac{\pi}{2}})=\cos\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{e^{\frac{\pi}{2}}}=0$

$$f''(e^{\frac{\pi}{2}})=-\frac{1}{e^{\pi}}\left(\sin\frac{\pi}{2}+\cos\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{1}{e^{\pi}}<0$$

이므로 함수 $f(x)$는 $x=e^{\frac{\pi}{2}}$에서 극댓값을 갖는다.

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

423 점 P(2, ln2)가 곡선 $y=\ln(x^2+ax+b)$ 위의 점이므로 $\ln 2=\ln(4+2a+b)$

$2a+b=-2 \qquad \therefore b=-2a-2$ ⋯⋯ ㉠

$f(x)=\ln(x^2+ax-2a-2)$라 하면

$$f'(x)=\frac{2x+a}{x^2+ax-2a-2}$$
$$f''(x)=\frac{2(x^2+ax-2a-2)-(2x+a)^2}{(x^2+ax-2a-2)^2}$$
$$=\frac{-2x^2-2ax-a^2-4a-4}{(x^2+ax-2a-2)^2}$$

$f'(2)>0$에서 $\frac{4+a}{2}>0$

$\therefore a>-4$ ⋯⋯ ㉡

$f''(2)=0$에서 $\frac{-a^2-8a-12}{4}=0$

$a^2+8a+12=0$, $(a+6)(a+2)=0$

$\therefore a=-2$ ($\because$ ㉡)

$a=-2$를 ㉠에 대입하면 $b=2$

$\therefore a^2+b^2=4+4=8$ 답 8

424 $f(x)=x^2+\frac{1}{x}$에서

$$f'(x)=2x-\frac{1}{x^2},\ f''(x)=2+\frac{2}{x^3}$$

$f'(x)=0$에서 $x=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

$f''(x)=0$에서 $x=-1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$		$-$	0	$+$
$f''(x)$	$+$	0	$-$		$+$	$+$	$+$
$f(x)$	↘	0	↘		↘	극소	↗

ㄱ. 곡선 $y=f(x)$는 구간 $(-1,\ 0)$에서 위로 볼록하다.

ㄴ. 곡선 $y=f(x)$의 변곡점은 P$(-1,\ 0)$이고 점 P에서의 접선 l의 기울기는

$$f'(-1)=-2-1=-3$$

ㄷ. 점 P$(-1,\ 0)$을 지나고 기울기가 $\frac{1}{3}$인 직선의 방정식은

$$y-0=\frac{1}{3}(x+1),\ 즉\ y=\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}$$

⋯⋯ ㉠

일품 BOX

이계도함수를 갖는 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(a)=0$일 때
① $f''(a)<0$
➡ $f(x)$는 $x=a$에서 극대
② $f''(a)>0$
➡ $f(x)$는 $x=a$에서 극소

$f'(x)=\frac{h(x)}{g(x)}$에서 $h(x)$가 이차식이고 모든 실수 x에 대하여 $g(x)>0$일 때
① $f(x)$가 극값을 갖는다.
➡ $h(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 갖는다.
② $f(x)$가 극값을 갖지 않는다.
➡ $h(x)=0$이 중근 또는 허근을 갖는다.

점 $(a,\ f(a))$가 곡선 $y=f(x)$의 변곡점
➡ $f''(a)=0$이고 $x=a$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀐다.

• 첫째항이 $\frac{1}{e^{2\pi}}$, 공비가 $\frac{1}{e^{2\pi}}$인 등비급수이다.

• $1<x<e^{\frac{\pi}{2}}$일 때
$0<\ln x<\frac{\pi}{2}$
$\therefore 0<\cos(\ln x)<1$

기울기가 -3인 직선에 수직인 직선의 기울기 •

미분법

이 직선과 곡선 $y=x^2+\dfrac{1}{x}$의 교점의 x좌표는

$\dfrac{1}{3}x+\dfrac{1}{3}=x^2+\dfrac{1}{x}$에서

$x^2+x=3x^3+3$

$3x^3-x^2-x+3=0$

$(x+1)(3x^2-4x+3)=0$ ...... ㉡

방정식 ㉡은 한 개의 실근과 두 개의 허근을 가지므로 직선 ㉠은 곡선 $y=f(x)$와 점 P 이외의 점에서 만나지 않는다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

일품 BOX

$x=-1$

$3x^2-4x+3=0$에서 $x=\dfrac{2\pm\sqrt{5}i}{3}$

425

해결 과정 $f(x)=\dfrac{x-3}{(x-3)^2+16}$에서

$$f'(x)=\frac{(x-3)^2+16-2(x-3)^2}{\{(x-3)^2+16\}^2}$$

$$=\frac{-x^2+6x+7}{\{(x-3)^2+16\}^2}$$

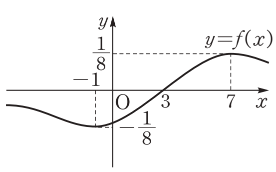
$f'(x)=0$에서 $x^2-6x-7=0$

$(x+1)(x-7)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=7$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	7	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	$-\frac{1}{8}$	↗	$\frac{1}{8}$	↘

또 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$이므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. ● 50%



(i) $0<a<1$일 때,

최댓값이 $f(a)$, 최솟값이 $f(-a)$이므로

$f(a)+f(-a)\neq0$

(ii) $1\le a<7$일 때,

최댓값이 $f(a)$, 최솟값이 $f(-1)=-\dfrac{1}{8}$이므로

$f(a)+f(-1)\neq0$

(iii) $a\ge7$일 때,

최댓값이 $f(7)=\dfrac{1}{8}$, 최솟값이 $f(-1)=-\dfrac{1}{8}$이므로

$f(7)+f(-1)=0$ ● 40%

답 구하기 이상에서 $a\ge7$이므로 a의 최솟값은 7이다. ● 10%

답 7

함수 $f(x)$가 어떤 구간에서 미분가능하고, 이 구간에서
① $f(x)$가 증가하면 $f'(x)\ge0$
② $f(x)$가 감소하면 $f'(x)\le0$

$0<a<1$일 때 $f(a)<0$, $f(-a)<0$ 이므로 $f(a)+f(-a)<0$

$1\le a<7$일 때 $f(a)<\dfrac{1}{8}$ 이므로 $f(a)+\left(-\dfrac{1}{8}\right)<0$

426

$f(x)=2x-\tan x$라 하면

$f'(x)=2-\sec^2 x$

$f'(x)=0$에서

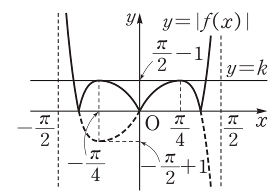
$\sec^2 x=2$, $\cos^2 x=\dfrac{1}{2}$

$-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}$이므로 $\cos x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore x=-\dfrac{\pi}{4}$ 또는 $x=\dfrac{\pi}{4}$

x	$-\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$-\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		↘	$-\frac{\pi}{2}+1$	↗	$\frac{\pi}{2}-1$	↘	

또 $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}+} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-} f(x)=-\infty$이고 $f(-x)=-f(x)$이므로 함수 $y=|f(x)|$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



$f(x)=2x-\tan x$에서
$f(-x)$
$=2(-x)-\tan(-x)$
$=-2x+\tan x$
$=-f(x)$

따라서 곡선 $y=|f(x)|$와 직선 $y=k$가 서로 다른 네 점에서 만나도록 하는 k의 값은 $\dfrac{\pi}{2}-1$이다.

답 ②

427

전략 전체 저항 R를 구한 후 t에 대하여 미분한다.

Step 1 $R=\dfrac{1}{\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{10}}+R_2=\dfrac{10R_1}{R_1+10}+R_2$

Step 2 양변을 t에 대하여 미분하면

$$\frac{dR}{dt}=\frac{10(R_1+10)-10R_1}{(R_1+10)^2}\cdot\frac{dR_1}{dt}+\frac{dR_2}{dt}$$

$$=\frac{200}{(R_1+10)^2}+1$$

$\dfrac{dR_1}{dt}=2$, $\dfrac{dR_2}{dt}=1$을 대입한다.

Step 3 따라서 $R_1=20$일 때의 $\dfrac{dR}{dt}$의 값은

$\dfrac{200}{(20+10)^2}+1=\dfrac{11}{9}(\Omega/\text{s})$

답 $\dfrac{11}{9}$

428

전략 함수 $f(x)$의 역함수가 존재하려면 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가하거나 또는 감소해야 함을 이용한다.

Step 1 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$이므로 함수 $f(x)$의 역함수가 존재하려면 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가해야 한다.

Step 2 $f(x)=(x^2+ax+b)e^x$에서

$f'(x)=(2x+a)e^x+(x^2+ax+b)e^x$

$=\{x^2+(a+2)x+a+b\}e^x$

$f'(x)\ge0$이어야 하므로

$\{x^2+(a+2)x+a+b\}e^x\ge0$

$e^x>0$이므로 $x^2+(a+2)x+a+b\ge0$

이차방정식 $x^2+(a+2)x+a+b=0$의 판별식을 D라 하면

$$D=(a+2)^2-4(a+b)\le 0$$
$$a^2-4b+4\le 0$$
$$\therefore b\ge \frac{1}{4}a^2+1$$

Step ③ $a=1$일 때, $b\ge\frac{5}{4}$이므로

$b=2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$

$a=2$일 때, $b\ge 2$이므로 $b=2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$

$a=3$일 때, $b\ge\frac{13}{4}$이므로 $b=4,\ 5,\ 6$

$a=4$일 때, $b\ge 5$이므로 $b=5,\ 6$

$a=5$ 또는 $a=6$일 때, 조건을 만족시키는 b는 없다.

Step ④ 따라서 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는

$5+5+3+2=15$

답 15

429 전략 □PROQ의 넓이를 a에 대한 함수로 나타낸 후 도함수를 이용하여 최댓값을 구한다.

Step ① $f(x)=e^{-x^2+1}$에서

$$f'(x)=-2xe^{-x^2+1}$$

점 $\mathrm{P}(a,\ e^{-a^2+1})$에서의 접선의 기울기는

$f'(a)=-2ae^{-a^2+1}$이므로 접선의 방정식은

$$y-e^{-a^2+1}=-2ae^{-a^2+1}(x-a)$$

$y=0$일 때 $-e^{-a^2+1}=-2ae^{-a^2+1}(x-a)$에서

$$1=2a(x-a)\qquad \therefore x=\frac{1}{2a}+a$$

$$\therefore \mathrm{Q}\left(\frac{1}{2a}+a,\ 0\right)$$

따라서 □PROQ의 넓이를 $S(a)$라 하면

$$S(a)=\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{2a}+a\right)\cdot e^{-a^2+1}$$
$$=\left(a+\frac{1}{4a}\right)e^{-a^2+1}$$

Step ② $S'(a)$

$$=\left(1-\frac{1}{4a^2}\right)e^{-a^2+1}+\left(a+\frac{1}{4a}\right)e^{-a^2+1}\cdot(-2a)$$
$$=e^{-a^2+1}\left(1-\frac{1}{4a^2}-2a^2-\frac{1}{2}\right)$$
$$=-e^{-a^2+1}\left(2a^2+\frac{1}{4a^2}-\frac{1}{2}\right)$$

이때 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$2a^2+\frac{1}{4a^2}-\frac{1}{2}\ge 2\sqrt{2a^2\cdot\frac{1}{4a^2}}-\frac{1}{2}$$
$$=\sqrt{2}-\frac{1}{2}>0$$

즉 $a\ge 1$에서 $S'(a)<0$이므로 $S(a)$는 감소한다.

Step ③ 따라서 $S(a)$는 $a=1$일 때 최대이고, 최댓값은

$$S(1)=\left(1+\frac{1}{4}\right)e^0=\frac{5}{4}$$

답 ①

일품 BOX

함수 $y=x^n$ (n은 실수)의 부정적분

① $n\ne -1$일 때

$\int x^n dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C$

② $n=-1$일 때

$\int \frac{1}{x}dx=\ln|x|+C$

$\frac{1}{x^p}$ 또는 $\sqrt[q]{x}$의 부정적분을 구할 때에는 $\frac{1}{x^p}$은 x^{-p}, $\sqrt[q]{x}$는 $x^{\frac{1}{q}}$으로 변형한다.

□PROQ는 사다리꼴이다.

Ⅳ 적분법

09 여러 가지 적분법 본책 82쪽

430 $f(x)=\int\frac{(x+1)(x+3)}{x^2}dx$

$$=\int\frac{x^2+4x+3}{x^2}dx$$
$$=\int\left(1+\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}\right)dx$$
$$=\int\left(1+\frac{4}{x}+3x^{-2}\right)dx$$
$$=x+4\ln|x|-3x^{-1}+C$$
$$=x+4\ln|x|-\frac{3}{x}+C$$

$f(1)=0$이므로 $-2+C=0$ $\therefore C=2$

따라서 $f(x)=x+4\ln|x|-\frac{3}{x}+2$이므로

$f(3)=4+4\ln 3$

답 ⑤

431 $F(x)=f(x)-g(x)$라 하면

$$F'(x)=f'(x)-g'(x)$$
$$=\frac{(x-1)\sqrt{x}-(1-x)}{x+\sqrt{x}}$$
$$=\frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}$$
$$=\frac{x-1}{\sqrt{x}}=\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}$$

이므로

$$F(x)=\int\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx=\int\left(x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}}\right)dx$$
$$=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-2x^{\frac{1}{2}}+C=\frac{2}{3}x\sqrt{x}-2\sqrt{x}+C$$

$F(1)=f(1)-g(1)=0$이므로

$$\frac{2}{3}-2+C=0\qquad \therefore C=\frac{4}{3}$$

따라서 $F(x)=\frac{2}{3}x\sqrt{x}-2\sqrt{x}+\frac{4}{3}$이므로

$$f(4)-g(4)=F(4)$$
$$=\frac{2}{3}\cdot 8-2\cdot 2+\frac{4}{3}=\frac{8}{3}$$

답 ④

432 $F(x)=xf(x)+5\ln x+\frac{4}{x}$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f(x)=f(x)+xf'(x)+\frac{5}{x}-\frac{4}{x^2}$$
$$xf'(x)=-\frac{5}{x}+\frac{4}{x^2}$$
$$\therefore f'(x)=-\frac{5}{x^2}+\frac{4}{x^3}$$

Ⅳ 적분법

$$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int\left(-\frac{5}{x^2}+\frac{4}{x^3}\right)dx$$
$$=\int(-5x^{-2}+4x^{-3})dx$$
$$=5x^{-1}-2x^{-2}+C$$
$$=\frac{5}{x}-\frac{2}{x^2}+C$$

$f(1)=1$이므로 $\quad 3+C=1 \quad \therefore C=-2$

즉 $f(x)=\frac{5}{x}-\frac{2}{x^2}-2$이므로 $f(x)=0$에서

$$\frac{5x-2-2x^2}{x^2}=0, \quad 2x^2-5x+2=0$$
$$(2x-1)(x-2)=0 \quad \therefore x=\frac{1}{2} \text{ 또는 } x=2$$

따라서 구하는 합은 $\quad \frac{1}{2}+2=\frac{5}{2}$ 답 $\frac{5}{2}$

433 $f(x)=\int 4^{x+1}\ln 2\,dx=4\ln 2\int 4^x dx$
$$=4\ln 2\cdot\frac{4^x}{\ln 4}+C$$
$$=2\cdot 4^x+C$$

$f(1)=8$이므로 $\quad C=0$

따라서 $f(x)=2\cdot 4^x$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{f(n)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2\cdot 4^n}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{6}$$

답 $\frac{1}{6}$

434 $f(x)=\int\left(\sin^2\frac{x}{2}-\cos^2\frac{x}{2}\right)dx$
$$=\int\left(\frac{1-\cos x}{2}-\frac{1+\cos x}{2}\right)dx$$
$$=\int(-\cos x)dx$$
$$=-\sin x+C$$

$f(\pi)=\pi$이므로 $\quad C=\pi$

따라서 $f(x)=-\sin x+\pi$이므로

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\pi-1$$

답 ④

435 $f'(x)=\tan^2 x$이므로
$$f(x)=\int f'(x)dx=\int\tan^2 x\,dx$$
$$=\int(\sec^2 x-1)dx=\tan x-x+C$$

곡선 $y=f(x)$가 점 $\left(\frac{\pi}{4},\ 0\right)$을 지나므로

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$$
$$1-\frac{\pi}{4}+C=0 \quad \therefore C=\frac{\pi}{4}-1$$

일품 BOX

배각의 공식
① $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$
② $\cos 2\alpha$
$=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$
$=2\cos^2\alpha-1$
$=1-2\sin^2\alpha$
③ $\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

$2x^2-5x+2=0$에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
(두 근의 합)$=\frac{5}{2}$

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n$은 첫째항이 $\frac{1}{4}$, 공비가 $\frac{1}{4}$인 등비급수이다.

반각의 공식
① $\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}$
② $\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2}$
③ $\tan^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$

$\int\frac{2x}{x^2+2}dx$에서
$(x^2+2)'=2x$이므로
$\int\frac{2x}{x^2+2}dx$
$=\ln(x^2+2)+C$
$(\because x^2+2>0)$

삼각함수 사이의 관계
① $\sin^2 x+\cos^2 x=1$
② $1+\tan^2 x=\sec^2 x$,
$1+\cot^2 x=\csc^2 x$

따라서 $f(x)=\tan x-x+\frac{\pi}{4}-1$이므로
$$f\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{2}-2$$

답 $\frac{\pi}{2}-2$

436 $\cos 2x\cos x=(1-2\sin^2 x)\cos x$이므로

$\sin x=t$로 놓으면 $\quad \frac{dt}{dx}=\cos x$

$$\therefore f(x)=\int\cos 2x\cos x\,dx$$
$$=\int(1-2\sin^2 x)\cos x\,dx$$
$$=\int(1-2t^2)dt=t-\frac{2}{3}t^3+C$$
$$=\sin x-\frac{2}{3}\sin^3 x+C$$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$이므로 $\quad \frac{1}{3}+C=0 \quad \therefore C=-\frac{1}{3}$

따라서 $f(x)=\sin x-\frac{2}{3}\sin^3 x-\frac{1}{3}$이므로

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{12}$$

답 $\frac{1}{12}$

1등급 비밀노트

피적분함수가 $f(\sin x)\cos x$ 꼴일 때 $\sin x=t$로 놓으면
$\frac{dt}{dx}=\cos x$
$\therefore \int f(\sin x)\cos x\,dx=\int f(t)dt$
같은 방법으로 $\quad \int f(\cos x)\sin x\,dx=-\int f(t)dt$

437 $f(x)=\int f'(x)dx=\int\frac{x^3+3x}{x^2+2}dx$
$$=\int\frac{x(x^2+2)+x}{x^2+2}dx$$
$$=\int\left(x+\frac{x}{x^2+2}\right)dx$$
$$=\int x\,dx+\frac{1}{2}\int\frac{2x}{x^2+2}dx$$
$$=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}\ln(x^2+2)+C$$

$f(0)=\frac{1}{2}\ln 2$이므로 $\quad C=0$

따라서 $f(x)=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}\ln(x^2+2)$이므로

$$f(\sqrt{e-2})=\frac{1}{2}(e-2)+\frac{1}{2}\ln e=\frac{1}{2}(e-1)$$

답 $\frac{1}{2}(e-1)$

438 $\frac{x}{x^2+3x+2}=\frac{x}{(x+1)(x+2)}$이므로

$\frac{x}{(x+1)(x+2)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+2}$로 놓으면

$$\frac{x}{(x+1)(x+2)}=\frac{(A+B)x+2A+B}{(x+1)(x+2)}$$

위의 등식은 x에 대한 항등식이므로

$$A+B=1,\ 2A+B=0$$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$A=-1,\ B=2$

$$\therefore \int \frac{x}{x^2+3x+2}dx$$

$$=\int\left(-\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x+2}\right)dx$$

$$=-\ln|x+1|+2\ln|x+2|+C$$

$$=\ln\frac{(x+2)^2}{|x+1|}+C$$

답 ②

1등급 비밀노트

분수식의 모양에 따라 다음과 같이 부분분수로 나타낸 다음 항등식의 성질을 이용하여 상수 $A,\ B,\ C$의 값을 각각 구한다.

① $\dfrac{px+q}{(x+a)(x+b)}=\dfrac{A}{x+a}+\dfrac{B}{x+b}$

② $\dfrac{px^2+qx+r}{(x+a)(x^2+bx+c)}=\dfrac{A}{x+a}+\dfrac{Bx+C}{x^2+bx+c}$

439 $u(x)=\ln x,\ v'(x)=\sqrt{x}$로 놓으면

$u'(x)=\dfrac{1}{x},\ v(x)=\dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$

$$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int\sqrt{x}\ln x\,dx$$

$$=(\ln x)\cdot\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\int\frac{1}{x}\cdot\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}dx$$

$$=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\ln x-\frac{2}{3}\int x^{\frac{1}{2}}dx$$

$$=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\ln x-\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C$$

$$=\frac{2}{3}x\sqrt{x}\ln x-\frac{4}{9}x\sqrt{x}+C$$

$$=\frac{2}{9}x\sqrt{x}(3\ln x-2)+C$$

$f(1)=0$이므로 $\quad -\dfrac{4}{9}+C=0 \quad \therefore C=\dfrac{4}{9}$

따라서 $f(x)=\dfrac{2}{9}x\sqrt{x}(3\ln x-2)+\dfrac{4}{9}$이므로

$$f(e)=\frac{2}{9}e\sqrt{e}+\frac{4}{9}=\frac{2}{9}(e\sqrt{e}+2)$$

답 ⑤

440 $u(x)=x-2,\ v'(x)=e^x$으로 놓으면

$u'(x)=1,\ v(x)=e^x$

$$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int(x-2)e^x dx$$

$$=(x-2)e^x-\int e^x dx$$

$$=(x-2)e^x-e^x+C$$

$$=(x-3)e^x+C$$

한편 $f'(x)=0$에서

$x=2\ (\because e^x>0)$

x	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗

일품 BOX

$$\int\frac{b}{x+a}dx=b\ln|x+a|+C$$

$$\int u(x)v'(x)dx=u(x)v(x)-\int u'(x)v(x)dx$$

부분적분법을 한 번 적용하여 부정적분을 구할 수 없을 때에는 부분적분법을 한 번 더 적용한다.

즉 $f(2)=4-e^2$이므로

$-e^2+C=4-e^2 \quad \therefore C=4$

따라서 $f(x)=(x-3)e^x+4$이므로

$f(0)=-3+4=1$

답 1

441 $f(x)=\cos x,\ g'(x)=e^x$으로 놓으면

$f'(x)=-\sin x,\ g(x)=e^x$

$$\therefore \int e^x\cos x\,dx=e^x\cos x+\int e^x\sin x\,dx \quad \cdots\cdots ㉠$$

$\displaystyle\int e^x\sin x\,dx$에서 $u(x)=\sin x,\ v'(x)=e^x$으로 놓으면

$u'(x)=\cos x,\ v(x)=e^x$

$$\therefore \int e^x\sin x\,dx=e^x\sin x-\int e^x\cos x\,dx \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$\int e^x\cos x\,dx=e^x\cos x+e^x\sin x-\int e^x\cos x\,dx$$

$$2\int e^x\cos x\,dx=e^x(\sin x+\cos x)+C_1$$

$$\therefore \int e^x\cos x\,dx=\frac{1}{2}e^x(\sin x+\cos x)+C$$

따라서 $F(x)=\dfrac{1}{2}(\sin x+\cos x)$이므로

$$F\left(\frac{2}{3}\pi\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}-1}{4}$$

답 ②

442 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\sin x}dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{\sin^2 x}{1+\sin x}dx$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\sin x}dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 x}{1+\sin x}dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin^2 x}{1+\sin x}dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1+\sin x)(1-\sin x)}{1+\sin x}dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin x)dx$$

$$=\Big[x+\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi-2}{2}$$

답 ①

443 $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}(\cos^2 x+\sin 4x\cos 8x)dx$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 x\,dx+\int_{-\pi}^{\pi}\sin 4x\cos 8x\,dx \quad \cdots ㉠$$

$f(x)=\cos^2 x$라 하면

$f(-x)=\cos^2(-x)=\cos^2 x=f(x)$

이므로 $f(x)$는 우함수이다.

또 $g(x)=\sin 4x\cos 8x$라 하면

$g(-x)=\sin(-4x)\cos(-8x)$

$=-\sin 4x\cos 8x=-g(x)$

이므로 $g(x)$는 기함수이다.

Ⅳ 적분법

따라서 ㉠에서 $\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 x\,dx=2\int_{0}^{\pi}\cos^2 x\,dx$,

$\int_{-\pi}^{\pi}\sin 4x\cos 8x\,dx=0$이므로

$$\begin{aligned}(\text{주어진 식})&=2\int_{0}^{\pi}\cos^2 x\,dx\\&=2\int_{0}^{\pi}\frac{1+\cos 2x}{2}\,dx\\&=\int_{0}^{\pi}(1+\cos 2x)\,dx\\&=\left[x+\frac{1}{2}\sin 2x\right]_{0}^{\pi}=\pi\end{aligned}$$

답 ④

444 $-1\le x<2$에서 $\frac{x-2}{x+2}<0$, $2\le x\le 4$에서 $\frac{x-2}{x+2}\ge 0$이므로

$$\begin{aligned}&\int_{-1}^{4}\left|\frac{x-2}{x+2}\right|dx\\&=-\int_{-1}^{2}\frac{x-2}{x+2}dx+\int_{2}^{4}\frac{x-2}{x+2}dx\\&=-\int_{-1}^{2}\left(1-\frac{4}{x+2}\right)dx+\int_{2}^{4}\left(1-\frac{4}{x+2}\right)dx\\&=-\Big[x-4\ln(x+2)\Big]_{-1}^{2}+\Big[x-4\ln(x+2)\Big]_{2}^{4}\\&=-3+4\ln 4+2-4\ln 6+4\ln 4\\&=12\ln 2-4\ln 3-1\end{aligned}$$

따라서 $a=12$, $b=-4$, $c=-1$이므로

$a+b+c=7$

답 7

일품 BOX

절댓값 기호를 포함한 함수는 절댓값 기호 안의 식의 값을 0으로 하는 x의 값을 경계로 구간을 나누어 정적분의 값을 구한다.

$8\ln 4-4\ln 6-1$
$=8(2\ln 2)$
$\quad-4(\ln 2+\ln 3)-1$
$=12\ln 2-4\ln 3-1$

445 $\sqrt{2x-1}=t$로 놓으면 $2x-1=t^2$이므로

$\frac{dt}{dx}=\frac{1}{t}$

$x=1$일 때 $t=1$, $x=5$일 때 $t=3$이므로

$$\begin{aligned}\int_{1}^{5}x\sqrt{2x-1}\,dx&=\int_{1}^{3}\frac{t^2+1}{2}\cdot t\cdot t\,dt\\&=\frac{1}{2}\int_{1}^{3}(t^4+t^2)dt\\&=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{5}t^5+\frac{1}{3}t^3\right]_{1}^{3}\\&=\frac{1}{2}\cdot\frac{856}{15}=\frac{428}{15}\end{aligned}$$

답 $\frac{428}{15}$

$2x-1=t^2$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$2=2t\frac{dt}{dx}$

$\therefore \frac{dt}{dx}=\frac{1}{t}$

$2x-1=t^2$에서

$x=\frac{t^2+1}{2}$

446 $\ln x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}$

$x=1$일 때 $t=0$, $x=e^2$일 때 $t=2$이므로

$$\begin{aligned}&\int_{1}^{e^2}\frac{(2+3\ln x)\ln x}{x}dx\\&=\int_{0}^{2}(2+3t)t\,dt=\int_{0}^{2}(3t^2+2t)dt\\&=\Big[t^3+t^2\Big]_{0}^{2}=8+4=12\end{aligned}$$

답 ④

447 $x=2\sin\theta\left(-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right)$로 놓으면

$\frac{dx}{d\theta}=2\cos\theta$

$x=0$일 때 $\theta=0$, $x=1$일 때 $\theta=\frac{\pi}{6}$이므로

$$\begin{aligned}\int_{0}^{1}\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx&=\int_{0}^{\frac{\pi}{6}}\frac{2\cos\theta}{\sqrt{4-4\sin^2\theta}}d\theta\\&=\int_{0}^{\frac{\pi}{6}}\frac{2\cos\theta}{2\cos\theta}d\theta\\&=\Big[\theta\Big]_{0}^{\frac{\pi}{6}}=\frac{\pi}{6}\end{aligned}$$

답 ①

448 $f(x)=\ln x$, $g'(x)=\frac{1}{x^2}$로 놓으면

$f'(x)=\frac{1}{x}$, $g(x)=-\frac{1}{x}$

$$\begin{aligned}\therefore&\int_{1}^{2}\frac{\ln x}{x^2}dx\\&=\left[(\ln x)\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)\right]_{1}^{2}-\int_{1}^{2}\left(-\frac{1}{x^2}\right)dx\\&=\left[-\frac{1}{x}\cdot\ln x\right]_{1}^{2}+\int_{1}^{2}x^{-2}dx\\&=-\frac{1}{2}\ln 2+\Big[-x^{-1}\Big]_{1}^{2}\\&=-\frac{1}{2}\ln 2+\frac{1}{2}\\&=\frac{1}{2}(1-\ln 2)\end{aligned}$$

답 ①

449 $\int_{0}^{\pi}x|\cos x|dx$

$=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}x\cos x\,dx-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}x\cos x\,dx$

$0\le x\le\frac{\pi}{2}$에서

$\cos x\ge 0$

$\frac{\pi}{2}\le x\le\pi$에서

$\cos x\le 0$

$f(x)=x$, $g'(x)=\cos x$로 놓으면

$f'(x)=1$, $g(x)=\sin x$

$$\begin{aligned}\therefore&\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}x\cos x\,dx-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}x\cos x\,dx\\&=\Big[x\sin x\Big]_{0}^{\frac{\pi}{2}}-\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx\\&\quad-\Big[x\sin x\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin x\,dx\\&=\frac{\pi}{2}-\Big[-\cos x\Big]_{0}^{\frac{\pi}{2}}+\frac{\pi}{2}+\Big[-\cos x\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\\&=\pi-1+1=\pi\end{aligned}$$

답 ④

450 $\int_{0}^{\ln 2}(e^{2x}+x)^2dx-\int_{0}^{\ln 2}(e^{2x}-x)^2dx$

$=\int_{0}^{\ln 2}\{(e^{2x}+x)^2-(e^{2x}-x)^2\}dx$

$=\int_{0}^{\ln 2}4xe^{2x}dx$

$f(x)=4x$, $g'(x)=e^{2x}$으로 놓으면

$f'(x)=4$, $g(x)=\frac{1}{2}e^{2x}$

$\therefore \int_0^{\ln 2} 4xe^{2x}dx$

$=\left[4x\cdot\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^{\ln 2}-\int_0^{\ln 2}4\cdot\frac{1}{2}e^{2x}dx$

$=8\ln 2-\left[e^{2x}\right]_0^{\ln 2}$

$=8\ln 2-(4-1)=-3+8\ln 2$

따라서 $a=-3$, $b=8$이므로 $a+b=5$ 답 5

451 $f(x)=\int_0^x (x^2-t^2)\cos t\,dt$

$=x^2\int_0^x \cos t\,dt-\int_0^x t^2\cos t\,dt$

이므로

$f'(x)=2x\int_0^x \cos t\,dt+x^2\cos x-x^2\cos x$

$=2x\left[\sin t\right]_0^x=2x\sin x$

$\therefore f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=2\cdot\frac{\pi}{6}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}$ 답 ②

452 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}\cdot\frac{1}{n}$

$=\int_0^1\frac{1}{1+x}dx=\left[\ln|1+x|\right]_0^1=\ln 2$ 답 $\ln 2$

453 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(1+\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}=\int_1^2 f(x)dx$,

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}f\left(2+\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}f\left(2+\frac{2k}{2n}\right)\frac{2}{2n}$

$=\int_2^4 f(x)dx$

이므로

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(1+\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}+\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}f\left(2+\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}$

$=\int_1^2 f(x)dx+\int_2^4 f(x)dx=\int_1^4 f(x)dx$

$=\int_1^4\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx=\int_1^4\left(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}\right)dx$

$=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+2x^{\frac{1}{2}}\right]_1^4$

$=\frac{16}{3}+4-\left(\frac{2}{3}+2\right)=\frac{20}{3}$ 답 ③

454 $f'(x)=\frac{\sqrt{x}+1}{x^2}$이므로

$f(x)=\int f'(x)dx=\int\frac{\sqrt{x}+1}{x^2}dx$

$=\int\left(x^{-\frac{3}{2}}+x^{-2}\right)dx$

$=-2x^{-\frac{1}{2}}-x^{-1}+C_1$

$=-\frac{2}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x}+C_1$

일품 BOX

$e^{2\ln 2}-e^0$
$=e^{\ln 4}-1$
$=4-1$

$\int\left(-\frac{2}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x}+3\right)dx$
$=\int\left(-2x^{-\frac{1}{2}}-x^{-1}+3\right)dx$
$=-4x^{\frac{1}{2}}-\ln|x|+3x+C$
$=-4\sqrt{x}-\ln|x|+3x+C$

$\frac{k}{n}$를 x로, $\frac{1}{n}$을 dx로 나타낼 때,
$k=1$이고 $n\to\infty$이면 $x=0$
$k=n$이면 $x=1$

$2n=N$으로 놓으면
$\lim_{N\to\infty}\sum_{k=1}^{N}f\left(2+\frac{2k}{N}\right)\frac{2}{N}$
$2+\frac{2k}{N}$를 x로, $\frac{2}{N}$를 dx로 나타낼 때,
$k=1$이고 $N\to\infty$이면 $x=2$
$k=N$이면 $x=4$

곡선 $y=f(x)$가 점 $(0,\ 1)$을 지나므로
$f(0)=1$

$e^x-2^x=0$
$\therefore x=0$

$\lim_{x\to-\infty}e^x=0$,
$\lim_{x\to-\infty}2^x=0$
이므로
$\lim_{x\to-\infty}\left\{e^x-\frac{1}{\ln 2}(2^x-1)\right\}$
$=0-\frac{1}{\ln 2}\cdot(-1)$
$=\frac{1}{\ln 2}$

$f(1)=0$이므로 $-3+C_1=0$ $\therefore C_1=3$

따라서 $f(x)=-\frac{2}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x}+3$이므로

$\int f(x)dx=\int\left(-\frac{2}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x}+3\right)dx$

$=-4\sqrt{x}-\ln|x|+3x+C$

따라서 $p=-4$, $q=-1$, $r=3$이므로

$p+q+r=-2$ 답 ②

455 해결 과정 $F(x)=xf(x)$라 하자. ● 20%

$F'(x)=f(x)+xf'(x)=\frac{1}{x\sqrt{x}}-\frac{4}{x^2}$이므로

$F(x)=\int\left(\frac{1}{x\sqrt{x}}-\frac{4}{x^2}\right)dx$

$=\int\left(x^{-\frac{3}{2}}-4x^{-2}\right)dx$

$=-2x^{-\frac{1}{2}}+4x^{-1}+C$

$=-\frac{2}{\sqrt{x}}+\frac{4}{x}+C$

$F(1)=f(1)=4$이므로

$-2+4+C=4$ $\therefore C=2$

$\therefore F(x)=-\frac{2}{\sqrt{x}}+\frac{4}{x}+2$ ● 60%

답 구하기 $F(4)=4f(4)=-1+1+2=2$이므로

$f(4)=\frac{1}{2}$ ● 20%

답 $\frac{1}{2}$

456 $f'(x)=\frac{e^{2x}-4^x}{e^x+2^x}=\frac{(e^x+2^x)(e^x-2^x)}{e^x+2^x}=e^x-2^x$

이므로

$f(x)=\int f'(x)dx=\int(e^x-2^x)dx$

$=e^x-\frac{2^x}{\ln 2}+C$

$f(0)=1$이므로

$1-\frac{1}{\ln 2}+C=1$ $\therefore C=\frac{1}{\ln 2}$

$\therefore f(x)=e^x-\frac{1}{\ln 2}(2^x-1)$

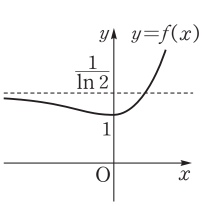
한편 $f'(x)=0$에서 $x=0$

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	1	↗

또 $\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$,

$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\frac{1}{\ln 2}$이므로

$y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



ㄱ. $f(1)=e-\frac{1}{\ln 2}$

Ⅳ 적분법

ㄴ. 함수 $f(x)$는 $x=0$일 때 극소이면서 최소이므로

$f(x)\ge f(0)=1$

ㄷ. 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=\dfrac{1}{\ln 2}$의 교점은 1개이므로

방정식 $f(x)=\dfrac{1}{\ln 2}$의 실근은 1개이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ③

457 $y=\ln x^3-e$로 놓으면 $\dfrac{y+e}{3}=\ln x$

$\therefore x=e^{\frac{y+e}{3}}$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=e^{\frac{x+e}{3}}$

$\therefore g(x)=e^{\frac{x+e}{3}}$

$\therefore G(x)=\int g(x)dx=\int e^{\frac{x+e}{3}}dx$

$=3e^{\frac{x+e}{3}}+C$

$G(-e)=0$이므로 $3+C=0$ $\therefore C=-3$

따라서 $G(x)=3e^{\frac{x+e}{3}}-3$이므로

$G(3-e)=3e-3$ 답 ③

458 $F(x)=xf(x)-(x\sin x+\cos x)$ ⋯ ㉠

㉠의 양변에 $x=\pi$를 대입하면

$F(\pi)=\pi f(\pi)+1$, $\pi+1=\pi f(\pi)+1$

$\therefore f(\pi)=1$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=f(x)+xf'(x)$

$-(\sin x+x\cos x-\sin x)$

$xf'(x)=x\cos x$

$x>0$이므로 $f'(x)=\cos x$

$\therefore f(x)=\int f'(x)dx$

$=\int \cos x\,dx=\sin x+C$

$f(\pi)=1$이므로 $C=1$

따라서 $f(x)=\sin x+1$이므로

$f\left(\dfrac{3}{2}\pi\right)=0$ 답 0

459 해결 과정 $x^2+4=t$로 놓으면 $\dfrac{dt}{dx}=2x$

$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int \dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}}dx$

$=\int \dfrac{1}{\sqrt{t}}\cdot\dfrac{1}{2}dt=\dfrac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}dt$

$=\dfrac{1}{2}\cdot 2t^{\frac{1}{2}}+C=\sqrt{t}+C$

$=\sqrt{x^2+4}+C$

$f(0)=-2$이므로 $2+C=-2$ $\therefore C=-4$

$\therefore f(x)=\sqrt{x^2+4}-4$ ● 50%

곡선 $y=f(x)$가 x축과 만나는 점의 x좌표는

$\sqrt{x^2+4}-4=0$에서 $\sqrt{x^2+4}=4$

$x^2+4=16$, $x^2=12$

$\therefore x=\pm 2\sqrt{3}$ ● 30%

답 구하기 따라서 곡선 $y=f(x)$는 x축과 두 점 $(-2\sqrt{3},\ 0)$, $(2\sqrt{3},\ 0)$에서 만나므로

$\overline{AB}=4\sqrt{3}$ ● 20%

답 $4\sqrt{3}$

460 $f(x)=\int \dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}dx=\int \dfrac{(e^x+e^{-x})'}{e^x+e^{-x}}dx$

$=\ln|e^x+e^{-x}|+C$

$=\ln(e^x+e^{-x})+C$ ($\because e^x+e^{-x}>0$)

$f(0)=3\ln 2$이므로 $\ln 2+C=3\ln 2$

$\therefore C=2\ln 2$

따라서 $f(x)=\ln(e^x+e^{-x})+2\ln 2$이므로

$f(\ln 2)=\ln(e^{\ln 2}+e^{-\ln 2})+2\ln 2$

$=\ln(2+2^{-1})+2\ln 2$

$=\ln\dfrac{5}{2}+\ln 4$

$=\ln\left(\dfrac{5}{2}\cdot 4\right)=\ln 10$ 답 ③

461 문제 이해 $\sin^n x\sin 2x=2\sin^{n+1}x\cos x$이므로

$f_n(x)=2\int \sin^{n+1}x\cos x\,dx$ ● 20%

해결 과정 $\sin x=t$로 놓으면 $\dfrac{dt}{dx}=\cos x$

$\therefore f_n(x)=2\int t^{n+1}dt=\dfrac{2}{n+2}t^{n+2}+C$

$=\dfrac{2}{n+2}\sin^{n+2}x+C$

$f_n(0)=0$이므로 $C=0$

따라서 $f_n(x)=\dfrac{2}{n+2}\sin^{n+2}x$이므로

$f_n\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{2}{n+2}$ ● 60%

답 구하기 $f_n\left(\dfrac{\pi}{2}\right)<\dfrac{1}{10}$에서 $\dfrac{2}{n+2}<\dfrac{1}{10}$

$\therefore n>18$

따라서 자연수 n의 최솟값은 19이다. ● 20%

답 19

462 $\dfrac{2x^3-3x^2+4x-1}{2x^2-3x+1}$

$=\dfrac{x(2x^2-3x+1)+3x-1}{2x^2-3x+1}$

$=x+\dfrac{3x-1}{2x^2-3x+1}$

$\dfrac{3x-1}{2x^2-3x+1}=\dfrac{3x-1}{(2x-1)(x-1)}$이므로

$\dfrac{3x-1}{(2x-1)(x-1)}=\dfrac{A}{2x-1}+\dfrac{B}{x-1}$

일품 BOX

두 점 A, B의 y좌표가 같으므로

$\overline{AB}=2\sqrt{3}-(-2\sqrt{3})$

$=4\sqrt{3}$

$\int \dfrac{f'(x)}{f(x)}dx$

$=\ln|f(x)|+C$

$\int e^{\frac{x+e}{3}}dx$

$=e^{\frac{e}{3}}\int e^{\frac{x}{3}}dx$

$=e^{\frac{e}{3}}\int (e^{\frac{1}{3}})^x dx$

$=e^{\frac{e}{3}}\cdot\dfrac{1}{\ln e^{\frac{1}{3}}}(e^{\frac{1}{3}})^x+C$

$=3e^{\frac{x+e}{3}}+C$

$\sin 2x=2\sin x\cos x$이므로

$\sin^n x\sin 2x$

$=\sin^n x\cdot 2\sin x\cos x$

$=2\sin^{n+1}x\cos x$

(분자의 차수)$\ge$(분모의 차수)인 경우

➡ 분자를 분모로 나누어 몫과 나머지의 꼴로 나타낸다.

로 놓으면

$$\frac{3x-1}{(2x-1)(x-1)}=\frac{(A+2B)x-(A+B)}{(2x-1)(x-1)}$$

위의 등식은 x에 대한 항등식이므로

$A+2B=3,\ A+B=1$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $A=-1,\ B=2$

$$\begin{aligned}\therefore f(x)&=\int f'(x)dx=\int\frac{2x^3-3x^2+4x-1}{2x^2-3x+1}dx\\&=\int\left(x-\frac{1}{2x-1}+\frac{2}{x-1}\right)dx\\&=\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}\ln|2x-1|+2\ln|x-1|+C\\&=\frac{x^2}{2}+\ln\frac{(x-1)^2}{\sqrt{|2x-1|}}+C\end{aligned}$$

답 ①

463 $F(x)=xf(x)-(4x^3+x^2)\ln x$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$F(1)=f(1)$ $\therefore f(1)=4$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$\begin{aligned}f(x)&=f(x)+xf'(x)\\&\quad-(12x^2+2x)\ln x-(4x^3+x^2)\cdot\frac{1}{x}\end{aligned}$$

$xf'(x)=(12x^2+2x)\ln x+4x^2+x$

$x>0$이므로 $f'(x)=(12x+2)\ln x+4x+1$

$$\begin{aligned}\therefore f(x)&=\int\{(12x+2)\ln x+4x+1\}dx\\&=\int(12x+2)\ln x\,dx+\int(4x+1)dx\end{aligned}$$

$\int(12x+2)\ln x\,dx$에서 $u(x)=\ln x,\ v'(x)=12x+2$

로 놓으면

$u'(x)=\frac{1}{x},\ v(x)=6x^2+2x$

$$\begin{aligned}\therefore &\int(12x+2)\ln x\,dx\\&=(\ln x)(6x^2+2x)-\int\frac{1}{x}(6x^2+2x)\,dx\\&=(6x^2+2x)\ln x-\int(6x+2)\,dx\\&=(6x^2+2x)\ln x-3x^2-2x+C_1\end{aligned}$$

또 $\int(4x+1)\,dx=2x^2+x+C_2$이므로

$$\begin{aligned}f(x)&=(6x^2+2x)\ln x-3x^2-2x+2x^2+x+C\\&=(6x^2+2x)\ln x-x^2-x+C\end{aligned}$$

$f(1)=4$이므로 $-2+C=4$ $\therefore C=6$

$\therefore f(x)=(6x^2+2x)\ln x-x^2-x+6$

㉠의 양변에 $x=2$를 대입하면

$F(2)=2f(2)-36\ln 2$

이때 $f(2)=(24+4)\ln 2-4-2+6=28\ln 2$이므로

$$\begin{aligned}F(2)&=2\cdot 28\ln 2-36\ln 2\\&=20\ln 2\end{aligned}$$

답 $20\ln 2$

일품 BOX

$$\begin{aligned}&\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}\ln|2x-1|\\&+2\ln|x-1|+C\\&=\frac{x^2}{2}-\ln\sqrt{|2x-1|}\\&+\ln(x-1)^2+C\\&=\frac{x^2}{2}+\ln\frac{(x-1)^2}{\sqrt{|2x-1|}}+C\end{aligned}$$

(다항함수)×(로그함수) 꼴일 때에는 로그함수를 $u(x)$로, 다항함수를 $v'(x)$로 놓는다.

$$\begin{aligned}&\int_0^9 2^x\,dx-\int_0^8 2^x\,dx\\&=\int_0^8 2^x\,dx+\int_8^9 2^x\,dx\\&\quad-\int_0^8 2^x\,dx\\&=\int_8^9 2^x\,dx\end{aligned}$$

464 $I_m=\int\sin^m x\,dx=\int\sin^{m-1}x\sin x\,dx$

$f(x)=\sin^{m-1}x,\ g'(x)=\sin x$로 놓으면

$f'(x)=(m-1)\sin^{m-2}x\cos x,\ g(x)=-\cos x$

$$\begin{aligned}\therefore I_m&=\int\sin^{m-1}x\sin x\,dx\\&=-\cos x\sin^{m-1}x\\&\quad+(m-1)\int\sin^{m-2}x\cos^2 x\,dx\\&=-\cos x\sin^{m-1}x\\&\quad+(m-1)\int\sin^{m-2}x(1-\sin^2 x)dx\\&=-\cos x\sin^{m-1}x\\&\quad+(m-1)\int\sin^{m-2}x\,dx\\&\quad-(m-1)\int\sin^m x\,dx\\&=-\cos x\sin^{m-1}x+(m-1)I_{m-2}\\&\quad-(m-1)I_m\end{aligned}$$

$mI_m=-\cos x\sin^{m-1}x+(m-1)I_{m-2}$이므로

$$I_m=\frac{-\cos x\sin^{m-1}x}{m}+\frac{m-1}{m}I_{m-2}$$

$\therefore k=\frac{m-1}{m}$

답 ④

1등급 비밀노트

I_m과 I_{m-2}의 관계식을 구해야 하므로 $\int\sin^{m-2}x\,dx$를 유도할 수 있도록 $f(x),\ g'(x)$를 정하는 것이 중요하다.

465 주어진 등식의 양변에 $n=8$을 대입하면

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_8=\int_0^9 2^x\,dx$ …… ㉠

주어진 등식의 양변에 $n=7$을 대입하면

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_7=\int_0^8 2^x\,dx$ …… ㉡

㉠−㉡을 하면

$$\begin{aligned}a_8&=\int_0^9 2^x\,dx-\int_0^8 2^x\,dx\\&=\int_8^9 2^x\,dx=\left[\frac{2^x}{\ln 2}\right]_8^9\\&=\frac{512}{\ln 2}-\frac{256}{\ln 2}\\&=\frac{256}{\ln 2}\end{aligned}$$

답 ③

466 해결 과정 $f'(x)=\begin{cases}6x & (x>0)\\ \sin x & (x<0)\end{cases}$에서

$$f(x)=\begin{cases}3x^2+C_1 & (x>0)\\ -\cos x+C_2 & (x<0)\end{cases}$$

● 20%

$f(1)=6$이므로 $3+C_1=6$ $\therefore C_1=3$

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이므로

Ⅳ 적분법

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0-} f(x) = f(0)$$

$$\lim_{x\to 0+} (3x^2+3) = \lim_{x\to 0-} (-\cos x + C_2)$$

$3=-1+C_2 \qquad \therefore C_2=4$

$$\therefore f(x)=\begin{cases} 3x^2+3 & (x\ge 0) \\ -\cos x+4 & (x<0) \end{cases}$$ ● 40%

답 구하기 $\therefore \int_{-\frac{\pi}{2}}^{2} f(x)dx$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} (-\cos x+4)dx + \int_0^2 (3x^2+3)dx$$

$$=\Big[-\sin x+4x\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{0} + \Big[x^3+3x\Big]_0^2$$

$$=-(1-2\pi)+(8+6)$$

$$=13+2\pi$$ ● 40%

답 $13+2\pi$

467 $f(x)=e^{|x|}+kx^2$에서

$f(-x)=e^{|-x|}+k(-x)^2=e^{|x|}+kx^2=f(x)$

이므로

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = 2\int_0^1 f(x)dx$$

$$=2\int_0^1 (e^x+kx^2)dx$$

$$=2\Big[e^x+\frac{k}{3}x^3\Big]_0^1$$

$$=2\Big(e+\frac{k}{3}-1\Big)$$

따라서 $2\Big(e+\frac{k}{3}-1\Big)=2e+1$이므로

$2e+\frac{2}{3}k-2=2e+1, \qquad \frac{2}{3}k=3$

$\therefore k=\frac{9}{2}$

답 $\frac{9}{2}$

468 $\sqrt{x}=t$로 놓으면 $x=t^2$이므로 $\frac{dt}{dx}=\frac{1}{2t}$

$x=0$일 때 $t=0$, $x=1$일 때 $t=1$이므로

$$\int_0^1 \sqrt{1-\sqrt{x}}\,dx = \int_0^1 \sqrt{1-t}\cdot 2t\,dt$$

$\sqrt{1-t}=s$로 놓으면 $t=1-s^2$이므로 $\frac{ds}{dt}=-\frac{1}{2s}$

$t=0$일 때 $s=1$, $t=1$일 때 $s=0$이므로

$$\int_0^1 \sqrt{1-t}\cdot 2t\,dt = 2\int_1^0 s(1-s^2)\cdot(-2s)ds$$

$$=4\int_0^1 (s^2-s^4)ds$$

$$=4\Big[\frac{1}{3}s^3-\frac{1}{5}s^5\Big]_0^1=\frac{8}{15}$$

답 ③

469 $f(x)=\int_0^x e^{t^2}dt$ ...... ㉠

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면

$f(0)=0$

일품 BOX

- $f(-x)=f(x)$에서 $f(x)$는 우함수이므로 $f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.
  $\therefore \int_{-a}^{a} f(x)dx$
  $=2\int_0^a f(x)dx$
- $0\le x\le 1$에서
  $e^{|x|}+kx^2$
  $=e^x+kx^2$
- $4\cos^2\theta$
  $=4\cdot\frac{1+\cos 2\theta}{2}$
  $=2+2\cos 2\theta$
- $t=1-s^2$의 양변을 t에 대하여 미분하면
  $1=-2s\frac{ds}{dt}$
  $\therefore \frac{ds}{dt}=-\frac{1}{2s}$
- $\int_a^b f(x)dx$
  $=-\int_b^a f(x)dx$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=e^{x^2}$

한편 $\int_0^a e^{x^2-f(x)}dx$에서 $f(x)=u$로 놓으면

$$\frac{du}{dx}=f'(x)=e^{x^2}$$

$x=0$일 때 $u=f(0)=0$, $x=a$일 때 $u=f(a)=\ln 3$이므로

$$\int_0^a e^{x^2-f(x)}dx=\int_0^a e^{x^2}\cdot e^{-f(x)}dx$$

$$=\int_0^{\ln 3} e^{-u}du$$

$$=\Big[-e^{-u}\Big]_0^{\ln 3}$$

$$=-e^{-\ln 3}+1$$

$$=-\frac{1}{3}+1$$

$$=\frac{2}{3}$$

답 $\frac{2}{3}$

470 $\sqrt{3+2x-x^2}=\sqrt{4-(x-1)^2}$이므로

$x-1=2\sin\theta\Big(-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}\Big)$로 놓으면

$$\frac{dx}{d\theta}=2\cos\theta$$

$x=1$일 때 $\theta=0$, $x=2$일 때 $\theta=\frac{\pi}{6}$이므로

$$\int_1^2 \sqrt{3+2x-x^2}\,dx$$

$$=\int_1^2 \sqrt{4-(x-1)^2}\,dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{4-4\sin^2\theta}\cdot 2\cos\theta\,d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{4\cos^2\theta}\cdot 2\cos\theta\,d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{6}} 4\cos^2\theta\,d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{6}} (2+2\cos 2\theta)d\theta$$

$$=\Big[2\theta+\sin 2\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{6}}$$

$$=\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}$$

따라서 $a=\frac{1}{3}$, $b=\frac{1}{2}$이므로 $\quad a+b=\frac{5}{6}$

답 ⑤

471 해결 과정 $\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} kx\cos x\,dx$

$$=k\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} x\cos x\,dx$$

에서 $f(x)=x$, $g'(x)=\cos x$로 놓으면

$f'(x)=1$, $g(x)=\sin x$

$$\therefore \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} x\cos x\,dx$$
$$=\Big[x\sin x\Big]_{(k-1)\pi}^{k\pi}-\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}\sin x\,dx$$
$$=\Big[\cos x\Big]_{(k-1)\pi}^{k\pi}$$
$$=\cos k\pi-\cos(k-1)\pi$$
$$=\begin{cases}-2 & (k=1,\ 3,\ 5,\ \cdots)\\ 2 & (k=2,\ 4,\ 6,\ \cdots)\end{cases}$$
● 60%

$$\therefore S_n=\sum_{k=1}^{n} k\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} x\cos x\,dx$$
$$=1\cdot(-2)+2\cdot2+3\cdot(-2)+4\cdot2+\cdots+n\cdot(-1)^n\cdot2$$
$$=\begin{cases}-n-1 & (n\text{이 홀수})\\ n & (n\text{이 짝수})\end{cases}$$
● 30%

답 구하기 따라서 $S_n=-20$에서

$-n-1=-20 \quad \therefore n=19$ ● 10%

답 19

472 $f(x)=xe^{|x|}$에서

$f(-x)=-xe^{|-x|}=-xe^{|x|}=-f(x)$

이므로

$$\int_{-n}^{n} f(x)dx=0$$
$$\therefore a_n=\int_{-n}^{n+1} f(x)dx$$
$$=\int_{-n}^{n} f(x)dx+\int_{n}^{n+1} f(x)dx$$
$$=\int_{n}^{n+1} f(x)dx$$

따라서

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$$
$$=\int_1^2 f(x)dx+\int_2^3 f(x)dx+\int_3^4 f(x)dx+\cdots+\int_n^{n+1} f(x)dx$$
$$=\int_1^{n+1} f(x)dx=\int_1^{n+1} xe^x\,dx$$

이므로 $\int_1^{n+1} xe^x\,dx$에서 $u(x)=x$, $v'(x)=e^x$으로 놓으면

$u'(x)=1$, $v(x)=e^x$

$$\therefore \int_1^{n+1} xe^x\,dx$$
$$=\Big[xe^x\Big]_1^{n+1}-\int_1^{n+1} e^x\,dx$$
$$=\{(n+1)e^{n+1}-e\}-\Big[e^x\Big]_1^{n+1}$$
$$=\{(n+1)e^{n+1}-e\}-(e^{n+1}-e)$$
$$=ne^{n+1}$$
$$\therefore \frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{12}}{a_1+a_2+a_3+a_4}=\frac{12e^{13}}{4e^5}=3e^8$$

답 ⑤

일품 BOX

함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면

$\int_a^{2x} f(t)dt$

$=F(2x)-F(a)$

이므로

$\frac{d}{dx}\left\{\int_a^{2x} f(t)dt\right\}$

$=F'(2x)\cdot2$

$=2f(2x)$

(i) n이 홀수일 때,

S_n

$=2\{(-1+2)+(-3+4)+\cdots+(-n+2+n-1)-n\}$

$=2(\underbrace{1+1+\cdots+1}_{\frac{n-1}{2}\text{개}}-n)$

$=2\cdot\frac{-n-1}{2}$

$=-n-1$

(ii) n이 짝수일 때,

S_n

$=2\{(-1+2)+(-3+4)+\cdots+(-n+1+n)\}$

$=2(\underbrace{1+1+\cdots+1}_{\frac{n}{2}\text{개}})$

$=2\cdot\frac{n}{2}=n$

두 변의 길이가 a, b이고 그 끼인 각의 크기가 θ인 삼각형의 넓이

➡ $\frac{1}{2}ab\sin\theta$

$f(-x)=-f(x)$에서 $f(x)$는 기함수이므로 $f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

$\therefore \int_{-a}^{a} f(x)dx=0$

$\frac{k}{n}$를 x로, $\frac{1}{n}$을 dx로 나타낼 때,

$k=1$이고 $n\to\infty$이면 $x=0$

$k=n-1$이고 $n\to\infty$이면 $x=1$

473 $\int_a^{2x} f(t)dt=\frac{1}{10}x^2-\ln x$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$2f(2x)=\frac{1}{5}x-\frac{1}{x} \qquad \therefore f(2x)=\frac{x}{10}-\frac{1}{2x}$

$2x=t$로 놓으면 $\quad f(t)=\frac{t}{20}-\frac{1}{t}$

$$\therefore \int_1^e f(t)dt=\int_1^e\left(\frac{t}{20}-\frac{1}{t}\right)dt$$
$$=\left[\frac{1}{40}t^2-\ln|t|\right]_1^e$$
$$=\frac{e^2-41}{40}$$

답 ⑤

474 해결 과정 $\angle \mathrm{AOP}_k=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{k}{n}$이므로

$S_k=\frac{1}{2}\cdot2^2\sin\frac{k\pi}{2n}=2\sin\frac{k\pi}{2n}$ ● 40%

답 구하기 $\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n-1}S_k$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n-1}2\sin\frac{k\pi}{2n}$$
$$=2\pi\int_0^1\sin\frac{\pi}{2}x\,dx$$
$$=2\pi\left[-\frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi}{2}x\right]_0^1=4$$
● 60%

답 4

475 (i) $x>0$일 때,

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int\sin^2 x\,dx$$
$$=\int\frac{1-\cos2x}{2}dx$$
$$=\frac{1}{2}x-\frac{\sin2x}{4}+C_1$$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\pi$이므로 $\quad \frac{\pi}{4}+C_1=\pi \qquad \therefore C_1=\frac{3}{4}\pi$

$$\therefore f(x)=\frac{1}{2}x-\frac{\sin2x}{4}+\frac{3}{4}\pi$$

(ii) $x<0$일 때,

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int k\cos x\,dx$$
$$=k\sin x+C_2$$

$f\left(-\frac{3}{2}\pi\right)=\pi$이므로

$k+C_2=\pi \qquad \therefore C_2=\pi-k$

$\therefore f(x)=k\sin x+\pi-k$

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이므로 (i), (ii)에서

$$\lim_{x\to0+}\left(\frac{1}{2}x-\frac{\sin2x}{4}+\frac{3}{4}\pi\right)$$
$$=\lim_{x\to0-}(k\sin x+\pi-k)$$

$\frac{3}{4}\pi=\pi-k \qquad \therefore k=\frac{\pi}{4}$

답 ③

Ⅳ 적분법

476 $\ln x=t$로 놓으면 $\quad \dfrac{dt}{dx}=\dfrac{1}{x}$

$$\therefore f(x)=\int \frac{1}{x}\sin(\ln x)dx=\int \sin t\,dt$$
$$=-\cos t+C=-\cos(\ln x)+C$$

$f(1)=-2$이므로 $\quad -1+C=-2 \quad \therefore C=-1$

$$\therefore f(x)=-\cos(\ln x)-1$$

$f(x)=0$에서 $\quad \cos(\ln x)=-1$

$\therefore \ln x=2n\pi+\pi$ (단, n은 정수)

이때 $0<x<1$이므로 $\quad \ln x<0$

따라서 $\ln x=-\pi,\ -3\pi,\ -5\pi,\ \cdots$이므로

$$a_1=e^{-\pi},\ a_2=e^{-3\pi},\ a_3=e^{-5\pi},\ \cdots$$

수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $e^{-\pi}$, 공비가 $e^{-2\pi}$인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n=\frac{e^{-\pi}}{1-e^{-2\pi}}=\frac{e^{\pi}}{e^{2\pi}-1}$$

답 ②

일품 BOX

첫째항이 a, 공비가 $r\ (|r|<1)$인 등비급수의 합

$\Rightarrow \dfrac{a}{1-r}$

477 $\sqrt{x^2+1}=t$로 놓으면 $x^2+1=t^2$이므로

$$\frac{dt}{dx}=\frac{x}{t}$$

$$\therefore f(x)=\int f'(x)dx$$
$$=\int x^2\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx$$
$$=\int (t^2-1)dt=\frac{1}{3}t^3-t+C$$
$$=\frac{1}{3}(x^2-2)\sqrt{x^2+1}+C$$

$f(\sqrt{2})=2$이므로 $\quad C=2$

$$\therefore f(x)=\frac{1}{3}(x^2-2)\sqrt{x^2+1}+2$$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=0$

$\dfrac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}=0$에서

$x=0$

따라서 $f(x)$는 $x=0$일 때 극소이면서 최소이므로

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$\frac{4}{3}$	$\nearrow$

$m=\dfrac{4}{3}$

$m=f(0)$

$=\dfrac{1}{3}\cdot(-2)\cdot1+2$

$=\dfrac{4}{3}$

$\therefore 120m=120\cdot\dfrac{4}{3}=160$

답 160

478 $I_n(x)=\int x^ne^xdx$에서 $f(x)=x^n$, $g'(x)=e^x$으로 놓으면

$$f'(x)=nx^{n-1},\ g(x)=e^x$$

$$\therefore I_n(x)=x^ne^x-\int nx^{n-1}e^xdx \quad \cdots\cdots ㉠$$

ㄱ. $I_1(x)=xe^x-\int e^xdx=e^x(x-1)+C$

ㄴ. ㉠에서 $I_n(x)=x^ne^x-nI_{n-1}(x)$이므로

$$I_n(x)+nI_{n-1}(x)=x^ne^x$$

ㄷ. $I_{n-1}(x)=x^{n-1}e^x-(n-1)I_{n-2}(x) \quad \cdots\cdots ㉡$

이고 ㄴ에서 $I_n(x)+nI_{n-1}(x)=x^ne^x$이므로 ㉡을 이 식에 대입하면

$$I_n(x)+nx^{n-1}e^x-n(n-1)I_{n-2}(x)=x^ne^x$$
$$\therefore I_n(x)-n(n-1)I_{n-2}(x)=x^{n-1}e^x(x-n)$$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

479 $f(x)=\begin{cases} -x+3 & (0\le x<2) \\ 2x-3 & (2\le x<3) \\ -3x+12 & (3\le x\le 4)\end{cases}$

$2x+1=t$로 놓으면 $\quad \dfrac{dt}{dx}=2$

$x=0$일 때 $t=1$, $x=1$일 때 $t=3$이므로

$$\int_0^1 f(2x+1)dx$$
$$=\int_1^3 f(t)\cdot\frac{1}{2}dt$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\int_1^2 f(t)dt+\int_2^3 f(t)dt\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\int_1^2 (-t+3)dt+\int_2^3 (2t-3)dt\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left(\left[-\frac{1}{2}t^2+3t\right]_1^2+\left[t^2-3t\right]_2^3\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}+2\right)=\frac{7}{4}$$

답 ③

480 $f(n)=I_n+I_{n+2}$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\,dx+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{n+2}x\,dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x(1+\tan^2 x)dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\sec^2 x\,dx$$

$\tan x=t$로 놓으면 $\quad \dfrac{dt}{dx}=\sec^2 x$

$x=0$일 때 $t=0$, $x=\dfrac{\pi}{4}$일 때 $t=1$이므로

$$f(n)=\int_0^1 t^ndt=\left[\frac{1}{n+1}t^{n+1}\right]_0^1=\frac{1}{n+1}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} f(n)f(n+2)$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+3)}$$

일품 BOX

$\dfrac{1}{AB}=\dfrac{1}{B-A}\left(\dfrac{1}{A}-\dfrac{1}{B}\right)$ (단, $A\ne B$)

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+3}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+3}\right)\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)=\frac{5}{12}$$

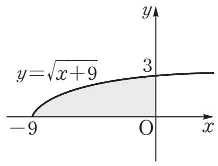
따라서 $p=12$, $q=5$이므로

$p+q=17$

답 17

10 정적분의 활용 본책 90쪽

481 오른쪽 그림에서 구하는 넓이는



$\int_{-9}^{0}\sqrt{x+9}\,dx$

$=\left[\frac{2}{3}(x+9)^{\frac{3}{2}}\right]_{-9}^{0}$

$=\frac{2}{3}\cdot 27$

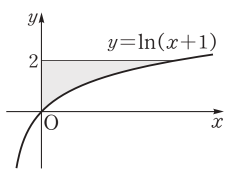
$=18$

답 ④

482 $y=\ln(x+1)$에서

$x=e^y-1$

따라서 구하는 넓이는

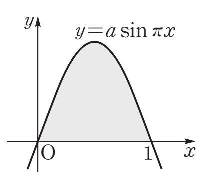


$\int_{0}^{2}(e^y-1)dy=\left[e^y-y\right]_{0}^{2}$

$=e^2-3$

답 ④

483 오른쪽 그림에서 어두운 부분의 넓이는



$\int_{0}^{1}a\sin\pi x\,dx$

$=\left[-\frac{a}{\pi}\cos\pi x\right]_{0}^{1}$

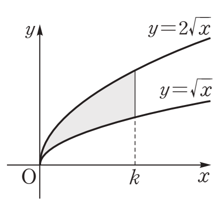
$=\frac{a}{\pi}-\left(-\frac{a}{\pi}\right)$

$=\frac{2a}{\pi}$

따라서 $\frac{2a}{\pi}=2$이므로 $a=\pi$

답 π

484 오른쪽 그림에서 어두운 부분의 넓이는



$\int_{0}^{k}(2\sqrt{x}-\sqrt{x})dx$

$=\int_{0}^{k}\sqrt{x}dx$

$=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_{0}^{k}$

$=\frac{2}{3}k^{\frac{3}{2}}$

따라서 $\frac{2}{3}k^{\frac{3}{2}}=18$이므로

$k^{\frac{3}{2}}=27$ $\therefore k=9$

답 9

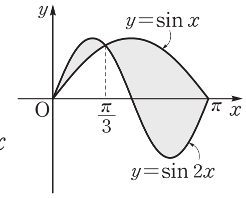
485 $\sin x=\sin 2x$에서 $\sin x=2\sin x\cos x$

$\sin x(1-2\cos x)=0$

$\therefore \sin x=0$ 또는 $\cos x=\frac{1}{2}$

$0\le x\le\pi$이므로 $x=0$ 또는 $x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\pi$

따라서 구하는 넓이는



$\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}(\sin 2x-\sin x)dx$

$+\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}(\sin x-\sin 2x)dx$

$=\left[-\frac{1}{2}\cos 2x+\cos x\right]_{0}^{\frac{\pi}{3}}$

$+\left[-\cos x+\frac{1}{2}\cos 2x\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}$

$=\frac{1}{4}+\frac{9}{4}=\frac{5}{2}$

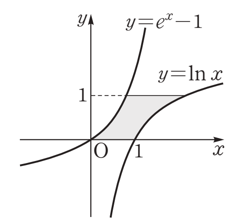
답 ②

486 $y=e^x-1$에서

$x=\ln(y+1)$

$y=\ln x$에서 $x=e^y$

따라서 두 곡선 $x=\ln(y+1)$, $x=e^y$과 x축 및 직선 $y=1$로 둘러싸인 도형의 넓이는



$\int_{0}^{1}\{e^y-\ln(y+1)\}dy$

$=\int_{0}^{1}e^y\,dy-\int_{0}^{1}\ln(y+1)dy$

$\int_{0}^{1}\ln(y+1)dy$에서 $y+1=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dy}=1$

$y=0$일 때 $t=1$, $y=1$일 때 $t=2$이므로

$\int_{0}^{1}\ln(y+1)dy=\int_{1}^{2}\ln t\,dt$

$=\left[t\ln t\right]_{1}^{2}-\int_{1}^{2}dt$

$=2\ln 2-\left[t\right]_{1}^{2}$

$=2\ln 2-1$

따라서 구하는 넓이는

$\int_{0}^{1}e^y\,dy-\int_{0}^{1}\ln(y+1)dy$

$=\left[e^y\right]_{0}^{1}-(2\ln 2-1)$

$=e-1-(2\ln 2-1)$

$=e-2\ln 2$

답 ①

487 $A=B$이므로

$\int_{0}^{1}\left(\sin\frac{\pi}{2}x-k\right)dx=0$

$\left[-\frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi}{2}x-kx\right]_{0}^{1}=0$

$-k+\frac{2}{\pi}=0$ $\therefore k=\frac{2}{\pi}$

답 $\frac{2}{\pi}$

488 $A+B=\int_{0}^{k}e^x\,dx=\left[e^x\right]_{0}^{k}=e^k-1$

$B=\int_{0}^{k}e^{-x}\,dx=\left[-e^{-x}\right]_{0}^{k}=-e^{-k}+1$

일품 BOX

$\int\ln x\,dx$에서

$f(x)=\ln x$, $g'(x)=1$로 놓으면

$f'(x)=\frac{1}{x}$, $g(x)=x$

$\therefore \int\ln x\,dx$

$=x\ln x-\int\frac{1}{x}\cdot x\,dx$

$=x\ln x-\int dx$

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속일 때, 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이

➡ $\int_{a}^{b}|f(x)-g(x)|dx$

곡선 $y=\sin\frac{\pi}{2}x$와 직선 $y=k$의 교점의 x좌표를 a $(0<a<1)$라 하면

$\int_{0}^{1}\left(\sin\frac{\pi}{2}x-k\right)dx$

$=\int_{0}^{a}\left(\sin\frac{\pi}{2}x-k\right)dx$

$+\int_{a}^{1}\left(\sin\frac{\pi}{2}x-k\right)dx$

$=-A+B=0$

$k^{\frac{3}{2}}=27=3^3$에서

$(k^{\frac{3}{2}})^{\frac{2}{3}}=(3^3)^{\frac{2}{3}}$

$\therefore k=3^2$

$\sin x=0$에서

$x=0$ 또는 $x=\pi$

$\cos x=\frac{1}{2}$에서

$x=\frac{\pi}{3}$

Ⅳ 적분법

$A=B$이므로 $A+B=2B$에서

$e^k-1=2(-e^{-k}+1)$

$e^k-3+2e^{-k}=0$

$e^{2k}-3e^k+2=0, \quad (e^k-1)(e^k-2)=0$

이때 $k>0$이므로 $\quad e^k>1$

$\therefore e^k=2$

$\therefore k=\ln 2$

답 $\ln 2$

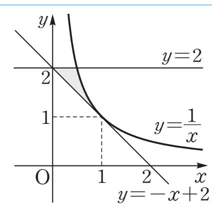
489 $f(x)=\dfrac{1}{x}$이라 하면 $\quad f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$

점 $(1,\ 1)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=-1$이므로

접선의 방정식은

$y-1=-(x-1)$, 즉 $y=-x+2$

따라서 오른쪽 그림에서 구하는 넓이는



$\displaystyle\int_1^2\left\{\frac{1}{y}-(2-y)\right\}dy$

$\displaystyle=\int_1^2\left(\frac{1}{y}-2+y\right)dy$

$\displaystyle=\left[\ln|y|-2y+\frac{1}{2}y^2\right]_1^2$

$=-\dfrac{1}{2}+\ln 2$

답 ①

490 구하는 입체도형의 부피는

$\displaystyle\int_0^\pi S(x)dx=\int_0^\pi \cos^2 x\,dx=\int_0^\pi \frac{1+\cos 2x}{2}dx$

$\displaystyle=\left[\frac{1}{2}x+\frac{\sin 2x}{4}\right]_0^\pi=\frac{\pi}{2}$

답 ②

491 점 P의 x좌표를 x라 하면 $\overline{\mathrm{PH}}=2^{1-x}$이므로

$\overline{\mathrm{PH}}$를 지름으로 하는 반원의 반지름의 길이는

$\dfrac{1}{2}\overline{\mathrm{PH}}=\dfrac{1}{2}\cdot 2^{1-x}=2^{-x}$

이때 x좌표가 x인 점을 지나고 x축에 수직인 평면으로 입체도형을 자른 단면의 넓이를 $S(x)$라 하면

$S(x)=\dfrac{1}{2}\cdot\pi\cdot(2^{-x})^2=\dfrac{\pi}{2}\cdot 4^{-x}$

따라서 입체도형의 부피는

$\displaystyle\int_0^2 S(x)dx=\int_0^2\left(\frac{\pi}{2}\cdot 4^{-x}\right)dx$

$\displaystyle=\frac{\pi}{2}\left[-4^{-x}\cdot\frac{1}{\ln 4}\right]_0^2$

$\displaystyle=\frac{\pi}{2\ln 4}\Big[-4^{-x}\Big]_0^2$

$=\dfrac{\pi}{2\ln 4}(-4^{-2}+1)$

$=\dfrac{15}{64\ln 2}\pi$

$a=64,\ b=15$이므로 $\quad a-b=49$

답 ②

일품 BOX

$f(-x)=-f(x)$에서 $f(x)$는 기함수이므로 $f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

$\displaystyle\therefore \int_{-a}^0\{-f(x)\}dx=\int_0^a f(x)dx$

$y=-x+2$에서 $x=2-y$

$y=\dfrac{1}{x}$에서 $x=\dfrac{1}{y}$

변곡점의 판정

함수 $f(x)$에서 $f''(a)=0$이고 $x=a$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌면 점 $(a,\ f(a))$는 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이다.

492 $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$라 하면

$f(-x)=\dfrac{2\cdot(-x)}{(-x)^2+1}=-\dfrac{2x}{x^2+1}=-f(x)$

이고, $x>0$일 때 $f(x)>0$이므로 구하는 넓이는

$\displaystyle\int_{-\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}}\left|\frac{2x}{x^2+1}\right|dx$

$\displaystyle=\int_{-\sqrt{2}}^0\left(-\frac{2x}{x^2+1}\right)dx+\int_0^{2\sqrt{2}}\frac{2x}{x^2+1}dx$

$\displaystyle=\int_0^{\sqrt{2}}\frac{2x}{x^2+1}dx+\int_0^{2\sqrt{2}}\frac{2x}{x^2+1}dx$

$\displaystyle=\Big[\ln|x^2+1|\Big]_0^{\sqrt{2}}+\Big[\ln|x^2+1|\Big]_0^{2\sqrt{2}}$

$=\ln 3+\ln 9=3\ln 3$

답 ④

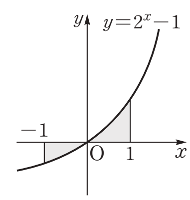
493 해결 과정 곡선 $y=a^x+b$가 점 $(0,\ 0)$을 지나므로

$0=1+b \qquad \therefore b=-1$ ● 20%

곡선 $y=a^x-1$이 점 $(2,\ 3)$을 지나므로

$3=a^2-1, \qquad a^2=4 \qquad \therefore a=2\ (\because a>0)$ ● 20%

답 구하기 따라서 곡선 $y=2^x-1$과 x축 및 두 직선 $x=-1$, $x=1$로 둘러싸인 도형의 넓이는



$\displaystyle\int_{-1}^1|2^x-1|dx$

$\displaystyle=\int_{-1}^0(1-2^x)dx+\int_0^1(2^x-1)dx$

$\displaystyle=\left[x-\frac{2^x}{\ln 2}\right]_{-1}^0+\left[\frac{2^x}{\ln 2}-x\right]_0^1$

$=-\dfrac{1}{\ln 2}-\left(-1-\dfrac{1}{2\ln 2}\right)+\left(\dfrac{2}{\ln 2}-1\right)-\dfrac{1}{\ln 2}$

$=\dfrac{1}{2\ln 2}$ ● 60%

답 $\dfrac{1}{2\ln 2}$

494 해결 과정 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$에서

$f'(x)=\dfrac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x}{x^2}=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$

$f''(x)=\dfrac{-\frac{1}{x}\cdot x^2-(1-\ln x)\cdot 2x}{x^4}$

$=\dfrac{-3+2\ln x}{x^3}$

$f'(x)=0$에서 $\qquad 1-\ln x=0 \qquad \therefore x=e$

$f''(x)=0$에서 $\qquad -3+2\ln x=0 \qquad \therefore x=e^{\frac{3}{2}}=e\sqrt{e}$

x	0	$\cdots$	e	$\cdots$	$e\sqrt{e}$	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$		$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$		↗	극대	↘	변곡점	↘

● 50%

답 구하기 따라서 $a=e$, $b=e\sqrt{e}$이고 $x>1$일 때 $f(x)>0$이므로 구하는 넓이는

$$\int_e^{e\sqrt{e}} \frac{\ln x}{x}dx$$

$\ln x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}$

$x=e$일 때 $t=1$, $x=e\sqrt{e}$일 때 $t=\frac{3}{2}$이므로

$$\int_e^{e\sqrt{e}} \frac{\ln x}{x}dx=\int_1^{\frac{3}{2}} t\,dt=\left[\frac{1}{2}t^2\right]_1^{\frac{3}{2}}$$

$$=\frac{9}{8}-\frac{1}{2}=\frac{5}{8}$$

● 50%

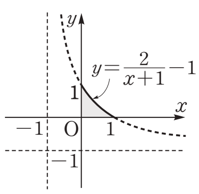
답 $\frac{5}{8}$

495 $xy+x+y-1\le 0$에서

$x(y+1)+(y+1)\le 2$

$(x+1)(y+1)\le 2$ $\quad\therefore y\le\frac{2}{x+1}-1$

이때 $x\ge 0$, $y\ge 0$이므로 점 P가 나타내는 영역은 오른쪽 그림의 어두운 부분(경계선 포함)과 같다.



따라서 구하는 넓이는

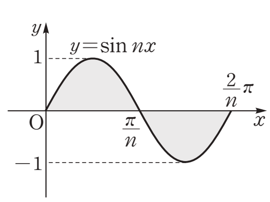
$$\int_0^1\left(\frac{2}{x+1}-1\right)dx=\Big[2\ln|x+1|-x\Big]_0^1$$

$$=2\ln 2-1=\ln 4-1$$

답 ④

496 $0\le x\le\frac{2}{n}\pi$에서

곡선 $y=\sin nx$는 오른쪽 그림과 같으므로 어두운 부분의 넓이는



$$2\int_0^{\frac{\pi}{n}}\sin nx\,dx$$

$$=2\left[-\frac{1}{n}\cos nx\right]_0^{\frac{\pi}{n}}=\frac{4}{n}$$

따라서 $S_n=n\cdot\frac{4}{n}=4$이므로

$$\lim_{n\to\infty}S_n=4$$

답 4

497 두 곡선 $y=e^{2x}+1$, $y=4e^x-2$의 교점의 x좌표는

$e^{2x}+1=4e^x-2$에서

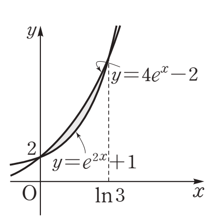
$e^{2x}-4e^x+3=0$

$(e^x-1)(e^x-3)=0$

$e^x=1$ 또는 $e^x=3$

$\therefore x=0$ 또는 $x=\ln 3$

따라서 구하는 넓이는



$$\int_0^{\ln 3}\{(4e^x-2)-(e^{2x}+1)\}dx$$

$$=\int_0^{\ln 3}(4e^x-e^{2x}-3)dx=\left[4e^x-\frac{1}{2}e^{2x}-3x\right]_0^{\ln 3}$$

$$=\left(4\cdot 3-\frac{1}{2}\cdot 9-3\ln 3\right)-\left(4-\frac{1}{2}\right)$$

$$=4-3\ln 3$$

답 ③

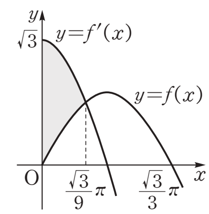
일품 BOX

$0\le x\le \ln 3$에서
$(e^x-1)(e^x-3)\le 0$,
즉 $e^{2x}-4e^x+3\le 0$
이므로
$e^{2x}+1\le 4e^x-2$

498 $f(x)=\sin\sqrt{3}x$에서

$f'(x)=\sqrt{3}\cos\sqrt{3}x$

두 곡선 $y=f(x)$, $y=f'(x)$의 교점의 x좌표는



$\sin\sqrt{3}x=\sqrt{3}\cos\sqrt{3}x$에서

$$\frac{\sin\sqrt{3}x}{\cos\sqrt{3}x}=\sqrt{3}\ (\because \cos\sqrt{3}x\ne 0)$$

$\tan\sqrt{3}x=\sqrt{3}$

$\sqrt{3}x=\frac{\pi}{3}$ $\quad\therefore x=\frac{\pi}{3\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{9}\pi$

따라서 $a=\frac{\sqrt{3}}{9}\pi$이므로 구하는 넓이는

$$\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{9}\pi}(\sqrt{3}\cos\sqrt{3}x-\sin\sqrt{3}x)dx$$

$$=\left[\sin\sqrt{3}x+\frac{1}{\sqrt{3}}\cos\sqrt{3}x\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{9}\pi}$$

$$=\sin\frac{\pi}{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}\cos\frac{\pi}{3}-\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{6}-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

답 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

일품 BOX

$0\le x\le\frac{\sqrt{3}}{9}\pi$에서
$f'(x)\ge f(x)$

$y=\sin nx$의 주기는
$\frac{2\pi}{n}=\frac{2}{n}\pi$

1등급 비밀노트

방정식 $\sin\sqrt{3}x=\sqrt{3}\cos\sqrt{3}x$에서 $\cos\sqrt{3}x=0$이라 하면

$\sqrt{3}x=\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi$ $\quad\therefore x=\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{\sqrt{3}}$ (단, n은 정수)

$x=\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{\sqrt{3}}$ (n은 정수)일 때

$\sin\sqrt{3}x=\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\ne 0$

따라서 $\sin\sqrt{3}x\ne\sqrt{3}\cos\sqrt{3}x$이므로 $\cos\sqrt{3}x\ne 0$이다.

499 문제 이해 곡선 $y=\frac{4}{x+1}$와 두 선분 AP, BP로 둘러싸인 도형의 넓이의 합이 최소가 되려면 삼각형 APB의 넓이가 최대가 되어야 한다. ● 10%

또 곡선 $y=\frac{4}{x+1}$ 위의 점 P에서의 접선이 선분 AB와 평행할 때 삼각형 APB의 넓이가 최대가 된다.

즉 직선 AB의 기울기가 $\frac{1-4}{3-0}=-1$이므로 곡선 위의 점 P에서의 접선의 기울기가 -1이어야 한다. ● 10%

해결 과정 $y=\frac{4}{x+1}$에서 $\quad y'=-\frac{4}{(x+1)^2}$

$-\frac{4}{(t+1)^2}=-1$에서 $\quad(t+1)^2=4$

$\therefore t=1\ (\because 0<t<3)$

따라서 점 P의 좌표는 $(1,\ 2)$

직선 AB의 방정식은

$y=-x+4$, 즉 $x+y-4=0$

이므로 점 P와 직선 $x+y-4=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|1+2-4|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{3^2+(-3)^2}=3\sqrt{2}$이므로 삼각형 APB의 넓이의 최댓값은

$$\frac{1}{2}\cdot 3\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{3}{2}$$ ● 40%

답 구하기 곡선 $y=\frac{4}{x+1}$와 두 선분 AP, BP로 둘러싸인 도형의 넓이의 합의 최솟값은

$$\int_0^3\left(-x+4-\frac{4}{x+1}\right)dx-\frac{3}{2}$$

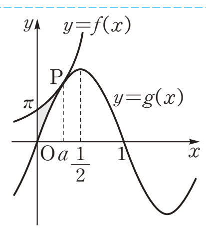
$$=\left[-\frac{1}{2}x^2+4x-4\ln|x+1|\right]_0^3-\frac{3}{2}$$

$$=-\frac{9}{2}+12-4\ln 4-\frac{3}{2}=6-8\ln 2$$ ● 30%

따라서 $a=6$, $b=-8$이므로 $a+b=-2$ ● 10%

답 -2

500 오른쪽 그림에서 점 P의 x좌표를 a라 하면 $0<a<\frac{1}{2}$



$f(x)=\pi e^{\pi x}$에서

$f'(x)=\pi^2 e^{\pi x}$

$g(x)=k\pi\sin\pi x$에서

$g'(x)=k\pi^2\cos\pi x$

$f(a)=g(a)$에서 $\pi e^{\pi a}=k\pi\sin\pi a$ $\cdots$ ㉠

$f'(a)=g'(a)$에서 $\pi^2 e^{\pi a}=k\pi^2\cos\pi a$ $\cdots$ ㉡

㉠÷㉡에서 $\frac{1}{\pi}=\frac{\sin\pi a}{\pi\cos\pi a}$

$\tan\pi a=1$, $\pi a=\frac{\pi}{4}\left(\because 0<a<\frac{1}{2}\right)$

$\therefore a=\frac{1}{4}$

이것을 ㉠에 대입하면

$\pi e^{\frac{\pi}{4}}=k\pi\sin\frac{\pi}{4}$ $\therefore k=\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}$

따라서 $g(x)=\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}\pi\sin\pi x$이므로 구하는 넓이는

$$\int_0^{\frac{1}{4}}\left(\pi e^{\pi x}-\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}\pi\sin\pi x\right)dx$$

$$=\left[e^{\pi x}+\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}\cos\pi x\right]_0^{\frac{1}{4}}$$

$$=\left(e^{\frac{\pi}{4}}+e^{\frac{\pi}{4}}\right)-\left(1+\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}\right)$$

$$=\left(2-\sqrt{2}\right)e^{\frac{\pi}{4}}-1$$

답 ①

501 곡선 $y=(2x^2-a)\sin x\ (0\le x\le\pi)$와 x축으로 둘러싸인 두 도형의 넓이가 같으므로

일품 BOX

점 $(x_1,\ y_1)$과 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리는 $\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$f(x)=-x^2+4$라 하면

$f(-x)$

$=-(-x)^2+4$

$=-x^2+4=f(x)$

에서 $f(x)$는 우함수이므로

$\int_{-a}^{a}f(x)dx$

$=2\int_0^a f(x)dx$

곡선 $y=\frac{4}{x+1}$와 직선 AB로 둘러싸인 도형의 넓이

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 $x=t$에서 공통인 접선을 가지면

$f(t)=g(t)$

$f'(t)=g'(t)$

$x=a$는 방정식 $k\sqrt{x}=-x^2+4$의 실근이다.

$0<a<\frac{1}{2}$이므로

$0<\pi a<\frac{\pi}{2}$

따라서 $\tan\pi a=1$에서

$\pi a=\frac{\pi}{4}$

$$\int_0^{\pi}(2x^2-a)\sin x\,dx=0$$

이때

$$\int_0^{\pi}(2x^2-a)\sin x\,dx$$

$$=\left[-(2x^2-a)\cos x\right]_0^{\pi}+\int_0^{\pi}4x\cos x\,dx$$

$$=(2\pi^2-a)-a+\left[4x\sin x\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}4\sin x\,dx$$

$$=2\pi^2-2a+\left[4\cos x\right]_0^{\pi}=2\pi^2-2a-8$$

이므로 $2\pi^2-2a-8=0$

$\therefore a=\pi^2-4$

답 ④

502 $A+B=\int_{-2}^{2}(-x^2+4)dx=2\int_0^2(-x^2+4)dx$

$$=2\left[-\frac{1}{3}x^3+4x\right]_0^2=\frac{32}{3}$$

$A:B=3:1$이므로 $B=\frac{1}{4}(A+B)$

$\therefore B=\frac{1}{4}\cdot\frac{32}{3}=\frac{8}{3}$

따라서 두 곡선 $y=k\sqrt{x}$, $y=-x^2+4$의 교점의 x좌표가 a이므로

$$\int_0^a k\sqrt{x}\,dx+\int_a^2(-x^2+4)dx=\frac{8}{3}$$

$$\left[\frac{2k}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^a+\left[-\frac{1}{3}x^3+4x\right]_a^2=\frac{8}{3}$$

$$\frac{2k}{3}a^{\frac{3}{2}}+\left(-\frac{8}{3}+8\right)-\left(-\frac{1}{3}a^3+4a\right)=\frac{8}{3}$$

$$\frac{2k}{3}a\sqrt{a}+\frac{1}{3}a^3-4a+\frac{8}{3}=0 \quad\cdots\cdots ㉠$$

이때 $k\sqrt{a}=-a^2+4$이므로 이 식을 ㉠에 대입하면

$$\frac{2}{3}a(-a^2+4)+\frac{1}{3}a^3-4a+\frac{8}{3}=0$$

$$-\frac{1}{3}a^3-\frac{4}{3}a+\frac{8}{3}=0,\quad -a^3-4a+8=0$$

$\therefore a^3+4a=8$

답 8

1등급 비밀노트

$A+B=4B$이므로 오른쪽 그림에서 빗금친 부분의 넓이는

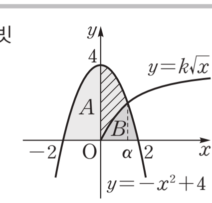
$\frac{A+B}{2}-B=2B-B=B$

따라서

$B=\int_0^a\{(-x^2+4)-k\sqrt{x}\}dx$

$=\frac{8}{3}$

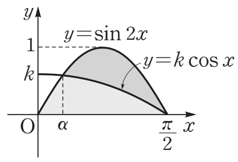
을 이용하여 풀어도 된다.



503 곡선 $y=\sin 2x\ \left(0\le x\le\frac{\pi}{2}\right)$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2x\,dx=\left[-\frac{1}{2}\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=1$$

오른쪽 그림에서 두 곡선 $y=\sin 2x$, $y=k\cos x$의 교점의 x좌표를 α라 하면



$$\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}}(\sin 2x-k\cos x)dx=\frac{1}{2}$$

$$\left[-\frac{1}{2}\cos 2x-k\sin x\right]_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}$$

$$\left(\frac{1}{2}-k\right)-\left(-\frac{1}{2}\cos 2\alpha-k\sin\alpha\right)=\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2}\cos 2\alpha-k+k\sin\alpha=0$$

$$\frac{1}{2}(1-2\sin^2\alpha)-k+k\sin\alpha=0$$

$$\therefore -\sin^2\alpha+k\sin\alpha-k+\frac{1}{2}=0 \quad \cdots\cdots ㉠$$

이때 $\sin 2\alpha=k\cos\alpha$이므로 $\quad 2\sin\alpha\cos\alpha=k\cos\alpha$

$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$에서 $\cos\alpha\neq 0$이므로

$$2\sin\alpha=k \quad \therefore \sin\alpha=\frac{k}{2} \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$-\left(\frac{k}{2}\right)^2+k\cdot\frac{k}{2}-k+\frac{1}{2}=0, \quad k^2-4k+2=0$$

$$\therefore k=2\pm\sqrt{2}$$

이때 ㉡에서 $0<k<2$이므로 $\quad k=2-\sqrt{2}$ 답 ④

1등급 비밀노트

$\sin 2\alpha=k\cos\alpha$에서 배각의 공식을 이용하여 $\cos 2\alpha$와 $\sin\alpha$를 k에 대한 식으로 나타내는 것이 중요하다.

일품 BOX

- 두 곡선 $y=\sin 2x$, $y=k\cos x$의 교점의 x좌표가 α이므로 $x=\alpha$는 방정식 $\sin 2x=k\cos x$의 실근이다.
- $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$에서 $0<\sin\alpha<1$, $0<\frac{k}{2}<1$ $\quad\therefore 0<k<2$

504

$f(x)=\sin^2 x$라 하면

$$f'(x)=2\sin x\cos x=\sin 2x$$

두 접점의 x좌표를 각각 α, $\beta(\alpha<\beta)$라 하면

$$f'(\alpha)=\sin 2\alpha,\ f'(\beta)=\sin 2\beta$$

이때 두 접선이 직교하므로 $\quad \sin 2\alpha\sin 2\beta=-1$

$0\le\alpha<\beta\le\pi$이므로 $\quad \sin 2\alpha=1,\ \sin 2\beta=-1$

$$\therefore \alpha=\frac{\pi}{4},\ \beta=\frac{3}{4}\pi$$

점 $\left(\frac{\pi}{4},\ \frac{1}{2}\right)$에서의 접선의 방정식은

$$y-\frac{1}{2}=x-\frac{\pi}{4},\ 즉\ y=x-\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}$$

점 $\left(\frac{3}{4}\pi,\ \frac{1}{2}\right)$에서의 접선의 방정식은

$$y-\frac{1}{2}=-\left(x-\frac{3}{4}\pi\right),\ 즉\ y=-x+\frac{3}{4}\pi+\frac{1}{2}$$

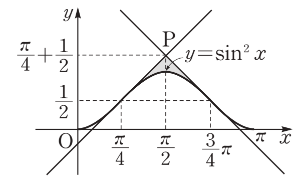
두 접선의 교점의 x좌표는

$$x-\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}=-x+\frac{3}{4}\pi+\frac{1}{2}에서 \quad x=\frac{\pi}{2}$$

$$\therefore \mathrm{P}\left(\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right)$$

일품 BOX

- $x=\frac{\pi}{2}$를 $y=x-\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}$에 대입하면 $y=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}$
- 곡선과 두 접선으로 둘러싸인 도형은 직선 $x=\frac{\pi}{2}$에 대하여 대칭이다.



따라서 위의 그림에서 구하는 넓이는

$$2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left(x-\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}-\sin^2 x\right)dx$$

$$=2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left(x-\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}-\frac{1-\cos 2x}{2}\right)dx$$

$$=2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left(x-\frac{\pi}{4}+\frac{\cos 2x}{2}\right)dx$$

$$=2\left[\frac{x^2}{2}-\frac{\pi}{4}x+\frac{\sin 2x}{4}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{2}=\frac{\pi^2-8}{16}$$

답 ⑤

505

해결 과정 $f(x)=e^{-x}$에서 $\quad f'(x)=-e^{-x}$

점 $(x_n,\ e^{-x_n})$에서의 접선의 기울기는

$$f'(x_n)=-e^{-x_n}$$

따라서 직선 l_n의 방정식은

$$y-e^{-x_n}=-e^{-x_n}(x-x_n)$$ ● 20%

$y=0$을 대입하면

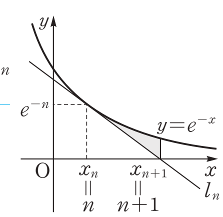
$$-e^{-x_n}=-e^{-x_n}(x-x_n) \quad \therefore x=x_n+1$$

직선 l_n의 x절편이 x_{n+1}이므로

$$x_{n+1}=x_n+1,\ x_1=1$$

$$\therefore x_n=n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$ ● 20%

오른쪽 그림에서



$$S_n=\int_n^{n+1}e^{-x}dx-\frac{1}{2}\cdot 1\cdot e^{-n}$$

$$=\left[-e^{-x}\right]_n^{n+1}-\frac{1}{2e^n}$$

$$=-\frac{1}{e^{n+1}}+\frac{1}{e^n}-\frac{1}{2e^n}$$

$$=\frac{1}{2e^n}\left(1-\frac{2}{e}\right)$$ ● 40%

일품 BOX

- 직선 l_n과 x축 및 직선 $x=n$으로 둘러싸인 도형의 넓이

답 구하기 $\quad \therefore \frac{S_{10}}{S_9}=\frac{e^9}{e^{10}}=\frac{1}{e}$ ● 20%

답 $\frac{1}{e}$

506

$\mathrm{P}(x,\ e^x)$이므로 $\quad \overline{\mathrm{PH}}=e^x$

선분 PH를 한 변으로 하는 정삼각형의 넓이를 $S(x)$라 하면 $\quad S(x)=\frac{\sqrt{3}}{4}e^{2x}$

따라서 구하는 입체도형의 부피는

$$\int_0^{\ln 3}S(x)dx=\int_0^{\ln 3}\frac{\sqrt{3}}{4}e^{2x}dx=\frac{\sqrt{3}}{8}\left[e^{2x}\right]_0^{\ln 3}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{8}(e^{2\ln 3}-1)=\sqrt{3}$$

답 ②

507 $\overline{\mathrm{AP}}=x$라 하면 $\quad x:\overline{\mathrm{P}_b\mathrm{P}_c}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 4\right):4$

$\therefore \overline{\mathrm{P}_b\mathrm{P}_c}=\frac{2}{\sqrt{3}}x$

$\overline{\mathrm{P}_b\mathrm{P}_c}$를 지름으로 하는 반원의 넓이를 $S(x)$라 하면

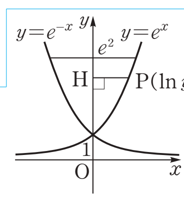
$$S(x)=\frac{1}{2}\cdot\pi\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2=\frac{\pi}{6}x^2$$

따라서 구하는 입체도형의 부피는

$$\int_0^{2\sqrt{3}}S(x)dx=\int_0^{2\sqrt{3}}\frac{\pi}{6}x^2dx$$
$$=\frac{\pi}{6}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{2\sqrt{3}}$$
$$=\frac{4\sqrt{3}}{3}\pi$$

답 ③

508 오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=e^x$ 위의 점 $\mathrm{P}(\ln y,\ y)$ $(1\le y\le e^2)$에서 y축에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\overline{\mathrm{PH}}=\ln y$

이때 두 곡선 $y=e^x$, $y=e^{-x}$은 y축에 대하여 대칭이고, y좌표가 y인 점을 지나고 y축에 수직인 평면으로 입체도형을 자른 단면이 정사각형이므로 그 넓이를 $S(y)$라 하면

$$S(y)=(2\overline{\mathrm{PH}})^2=(2\ln y)^2=4(\ln y)^2$$

따라서 구하는 입체도형의 부피는

$$\int_1^{e^2}S(y)dy$$
$$=\int_1^{e^2}4(\ln y)^2dy=4\int_1^{e^2}(\ln y)^2dy$$
$$=4\left[y(\ln y)^2\right]_1^{e^2}-4\int_1^{e^2}2\ln y\,dy$$
$$=16e^2-8\int_1^{e^2}\ln y\,dy$$
$$=16e^2-8\left(\left[y\ln y\right]_1^{e^2}-\int_1^{e^2}dy\right)$$
$$=16e^2-8\left(2e^2-\left[y\right]_1^{e^2}\right)$$
$$=16e^2-8(e^2+1)=8e^2-8$$

답 ④

일품 BOX

$y=e^x$에서 $x=\ln y$

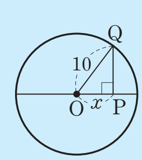
부분적분법을 이용한 정적분

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 미분가능하고 $f'(x)$, $g'(x)$가 연속일 때,

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx=\left[f(x)g(x)\right]_a^b-\int_a^b f'(x)g(x)dx$$

509 해결 과정 밑면의 중심 O에서 단면까지의 거리를 x라 하면 이등변삼각형의 높이는 x이고 밑변의 길이는 $2\sqrt{10^2-x^2}$이므로 이등변삼각형의 넓이를 $S(x)$라 하면

$$S(x)=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{100-x^2}\cdot x=x\sqrt{100-x^2}$$ ● 40%



위의 그림에서
$\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{10^2-x^2}$

답 구하기 따라서 입체도형의 부피는

$$2\int_0^{10}S(x)dx=2\int_0^{10}x\sqrt{100-x^2}dx$$ ●20%

$100-x^2=t$로 놓으면 $\quad\frac{dt}{dx}=-2x$

$x=0$일 때 $t=100$, $x=10$일 때 $t=0$이므로

$$2\int_0^{10}S(x)dx=2\int_{100}^{0}\sqrt{t}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)dt=\int_0^{100}\sqrt{t}\,dt$$
$$=\left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_0^{100}=\frac{2000}{3}$$ ● 40%

답 $\frac{2000}{3}$

510 곡선 $y=\frac{1}{x}$과 x축 및 두 직선 $x=a_n$, $x=a_{n+1}$로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_{a_n}^{a_{n+1}}\frac{1}{x}dx=\left[\ln|x|\right]_{a_n}^{a_{n+1}}$$
$$=\ln a_{n+1}-\ln a_n=\ln\frac{a_{n+1}}{a_n}$$

$\ln\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{2}$에서 $\quad\frac{a_{n+1}}{a_n}=\sqrt{e}\quad\quad\therefore a_{n+1}=\sqrt{e}a_n$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 1이고, 공비가 $\sqrt{e}$인 등비수열이므로 $\quad a_n=(\sqrt{e})^{n-1}$

이때

$$a_na_{n+1}=(\sqrt{e})^{n-1}(\sqrt{e})^n=\frac{1}{\sqrt{e}}\cdot e^n$$

이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_na_{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{e}}{e^n}=\frac{\frac{\sqrt{e}}{e}}{1-\frac{1}{e}}=\frac{\sqrt{e}}{e-1}$$

첫째항이 $\frac{\sqrt{e}}{e}$이고 공비가 $\frac{1}{e}$인 등비급수이다.

답 ②

511 ㄱ. 곡선 $y=\sin\frac{\pi}{2}x+k$와 직선 $y=k$로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_0^2\left(\sin\frac{\pi}{2}x+k-k\right)dx=\left[-\frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi}{2}x\right]_0^2$$
$$=\frac{2}{\pi}+\frac{2}{\pi}=\frac{4}{\pi}$$

ㄴ. 곡선 $y=\sin\frac{\pi}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{2}$과 x축의 교점의 x좌표는

$\sin\frac{\pi}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{2}=0$에서 $\quad\sin\frac{\pi}{2}x=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$0\le x\le 2$에서 $0\le\frac{\pi}{2}x\le\pi$이므로

$$\frac{\pi}{2}x=\frac{\pi}{3}\text{ 또는 }\frac{\pi}{2}x=\frac{2}{3}\pi$$
$$\therefore x=\frac{2}{3}\text{ 또는 }x=\frac{4}{3}$$
$$\therefore B=\int_{\frac{2}{3}}^{\frac{4}{3}}\left(\sin\frac{\pi}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)dx$$
$$=\left[-\frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{2}x\right]_{\frac{2}{3}}^{\frac{4}{3}}$$
$$=\left(\frac{1}{\pi}-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)-\left(-\frac{1}{\pi}-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$
$$=\frac{2}{\pi}-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

ㄷ. 곡선 $y=\sin\frac{\pi}{2}x+k$는 직선 $x=1$에 대하여 대칭이므로 $2A=B$이면 $\int_0^1\left(\sin\frac{\pi}{2}x+k\right)dx=0$

$$\left[-\frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi}{2}x+kx\right]_0^1=0$$

$$k+\frac{2}{\pi}=0 \qquad \therefore k=-\frac{2}{\pi}$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

512 $f(x)=e^{-x}$에서 $\quad f'(x)=-e^{-x}$

점 $(0,\ 1)$에서의 접선의 기울기는 -1이므로 접선 l의 방정식은

$$y-1=-x,\ 즉\ y=-x+1$$

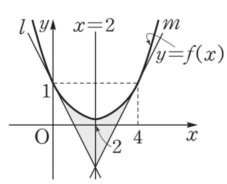
한편 등식 $f(x)=f(4-x)$에서 x 대신에 $2+x$를 대입하면

$$f(2+x)=f(2-x)$$

이므로 곡선 $y=f(x)$는 직선 $x=2$에 대하여 대칭이다.

따라서 두 점 $(0,\ 1)$, $(4,\ 1)$에서의 접선 l, m은 직선 $x=2$에 대하여 대칭이다.

따라서 구하는 넓이는



$$2\int_0^2\{e^{-x}-(-x+1)\}dx$$

$$=2\left[-e^{-x}+\frac{1}{2}x^2-x\right]_0^2$$

$$=2\left(-\frac{1}{e^2}+2-2+1\right)$$

$$=2-\frac{2}{e^2}$$

답 ④

513 $Q(t,\ 2)$, $R(t,\ \sin t+2)$이므로

$\overline{PR}=\overline{RS}=\sin t+2$

$\overline{TS}=\overline{QR}=\sin t$

사다리꼴 PRST의 넓이를 $S(t)$라 하면

$$S(t)=\frac{1}{2}(\sin t+\sin t+2)\cdot(\sin t+2)$$

$$=\sin^2 t+3\sin t+2$$

따라서 구하는 입체도형의 부피는

$$\int_0^\pi S(t)dt=\int_0^\pi(\sin^2 t+3\sin t+2)dt$$

$$=\int_0^\pi\left(\frac{1-\cos 2t}{2}+3\sin t+2\right)dt$$

$$=\int_0^\pi\left(\frac{5}{2}-\frac{1}{2}\cos 2t+3\sin t\right)dt$$

$$=\left[\frac{5}{2}t-\frac{1}{4}\sin 2t-3\cos t\right]_0^\pi$$

$$=\frac{5}{2}\pi+3+3$$

$$=\frac{5}{2}\pi+6$$

답 ④

일품 BOX

$f(1+x)$
$=\sin\frac{\pi}{2}(1+x)+k$
$=\cos\frac{\pi}{2}x+k$
$f(1-x)$
$=\sin\frac{\pi}{2}(1-x)+k$
$=\cos\frac{\pi}{2}x+k$
$\therefore f(1+x)=f(1-x)$

$f(0)=e^0=1$

$\sqrt{x}+1=x^{\frac{1}{2}}+1$이므로
$\int(\sqrt{x}+1)dx$
$=\frac{1}{\frac{1}{2}+1}x^{\frac{1}{2}+1}+x+C$
$=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+x+C$
$=\frac{2}{3}x\sqrt{x}+x+C$

점 $(0,\ 1)$과 직선 $x=2$에 대하여 대칭인 점을 $(a,\ 1)$이라 하면
$\frac{a}{2}=2$
$\therefore a=4$

$\frac{1}{2}(\overline{TS}+\overline{PR})\cdot\overline{RS}$

지수함수의 부정적분

① $\int e^x dx=e^x+C$

② $\int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+C$

(단, $a>0$, $a\neq1$)

1등급 완성하기

▶ 본책 96쪽

514 해결 과정 $f'(x)+g'(x)=\frac{x+2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}$

$$=\frac{(\sqrt{x}+1)^2}{\sqrt{x}+1}$$

$$=\sqrt{x}+1 \qquad ● 30\%$$

$$\therefore f(x)+g(x)=\int\{f'(x)+g'(x)\}dx$$

$$=\int(\sqrt{x}+1)dx$$

$$=\frac{2}{3}x\sqrt{x}+x+C$$

$f(0)+g(0)=0$이므로 $\quad C=0$ ● 50%

답 구하기 따라서 $f(x)+g(x)=\frac{2}{3}x\sqrt{x}+x$이므로

$f(9)+g(9)=27$ ● 20%

답 27

515 $f'(x)=2x+\frac{k}{x}$이므로

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int\left(2x+\frac{k}{x}\right)dx$$

$$=x^2+k\ln x+C$$

$f(1)=-2$이므로 $\quad 1+C=-2$

$\therefore C=-3$

$f(e)=e^2$이므로

$e^2+k-3=e^2 \qquad \therefore k=3$

답 ④

516 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=4$에서 $x\to1$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이다.

즉 $\lim_{x\to1}f(x)=0$에서 $f(1)=0$이므로

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$$

$\therefore f'(1)=4$

즉 $k\cdot2^0=4$에서 $\quad k=4$

$f'(x)=4\cdot2^{x-1}=2^{x+1}$이므로

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int 2^{x+1}dx$$

$$=\frac{2^{x+1}}{\ln 2}+C$$

$f(1)=0$이므로 $\quad \frac{4}{\ln 2}+C=0$

$$\therefore C=-\frac{4}{\ln 2}$$

따라서 $f(x)=\frac{2^{x+1}}{\ln 2}-\frac{4}{\ln 2}=\frac{2^{x+1}-4}{\ln 2}$이므로

$$f(2)=\frac{4}{\ln 2}$$

답 ⑤

517 $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)$이므로

$f'(x)=\frac{1}{x(\ln x)^2}$

$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int\frac{1}{x(\ln x)^2}dx$

$\ln x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}$

$\therefore f(x)=\int\frac{1}{t^2}dt=-\frac{1}{t}+C=-\frac{1}{\ln x}+C$

$f(e)=2$이므로 $-1+C=2$ $\therefore C=3$

따라서 $f(x)=-\frac{1}{\ln x}+3$이므로

$f(e^2)=-\frac{1}{2}+3=\frac{5}{2}$

답 $\frac{5}{2}$

518 $2\sin x+4=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=2\cos x$

$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int\frac{\cos x}{2\sin x+4}dx$

$=\int\frac{1}{t}\cdot\frac{1}{2}dt$

$=\frac{1}{2}\ln|t|+C$

$=\frac{1}{2}\ln|2\sin x+4|+C$

$f(0)=0$이므로 $\frac{1}{2}\ln 4+C=0$

$\therefore C=-\frac{1}{2}\ln 4=-\ln 2$

따라서 $f(x)=\frac{1}{2}\ln|2\sin x+4|-\ln 2$이므로

$f\left(\frac{3}{2}\pi\right)=\frac{1}{2}\ln|-2+4|-\ln 2=-\frac{1}{2}\ln 2$

답 ④

519 해결 과정 $f(x)=\int f'(x)dx$

$=\int\sin^3 x\cos^4 x\,dx$

$=\int(1-\cos^2 x)\cos^4 x\sin x\,dx$

$\cos x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=-\sin x$

$\therefore f(x)=\int(t^2-1)t^4dt=\int(t^6-t^4)dt$

$=\frac{1}{7}t^7-\frac{1}{5}t^5+C$

$=\frac{1}{7}\cos^7 x-\frac{1}{5}\cos^5 x+C$ ● 50%

$f(\pi)=1$이므로

$-\frac{1}{7}+\frac{1}{5}+C=1$ $\therefore C=\frac{33}{35}$ ● 30%

답 구하기 따라서 $f(x)=\frac{1}{7}\cos^7 x-\frac{1}{5}\cos^5 x+\frac{33}{35}$이므로

$f(0)=\frac{1}{7}-\frac{1}{5}+\frac{33}{35}=\frac{31}{35}$

즉 곡선 $y=f(x)$가 y축과 만나는 점의 y좌표는 $\frac{31}{35}$이다. ● 20%

답 $\frac{31}{35}$

일품 BOX

도함수의 정의
$f'(x)$
$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

함수 $f(x)$가 미분가능하며 $f(x)\neq 0$일 때
$y=\ln|f(x)|$이면
$y'=\frac{f'(x)}{f(x)}$

$\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx$
$=\ln|f(x)|+C$

$\frac{1}{2}\left(\ln\frac{4}{6}+\ln\frac{6}{8}\right)+2C=0$
$\frac{1}{2}\ln\left(\frac{4}{6}\cdot\frac{6}{8}\right)+2C=0$
$\therefore\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}+2C=0$

1등급 비밀노트

$\sin x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=\cos x$이므로

$f(x)=\begin{cases}\int t^3(1-t^2)\sqrt{1-t^2}dt & (\cos x\geq 0)\\ \int t^3(t^2-1)\sqrt{1-t^2}dt & (\cos x<0)\end{cases}$

따라서 $\sin x=t$로 치환하였을 때 $f(x)$의 식이 간단하지 않으므로 $\cos x=t$로 치환하여 풀어야 한다.

520 $\frac{d}{dx}\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$,

$\frac{f(x)}{g(x)}\cdot\frac{d}{dx}\{2x-\ln g(x)\}=\frac{f(x)}{g(x)}\left\{2-\frac{g'(x)}{g(x)}\right\}$

$=\frac{2f(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$

이고 $g(x)\neq 0$이므로

$f'(x)g(x)-f(x)g'(x)=2f(x)g(x)-f(x)g'(x)$

$f'(x)g(x)=2f(x)g(x)$, $f'(x)=2f(x)$

$\therefore\frac{f'(x)}{f(x)}=2$

$\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\int 2\,dx$이므로 $\ln f(x)=2x+C$

$\therefore f(x)=e^{2x+C}$

$f(0)=1$이므로 $e^C=1$ $\therefore C=0$

따라서 $f(x)=e^{2x}$이므로

$f(\ln\sqrt{5})=e^{2\ln\sqrt{5}}=e^{\ln 5}=5$

답 ②

521 $f(x)=\int f'(x)dx=\int\frac{1}{x^2+4x+3}dx$

$=\int\frac{1}{(x+1)(x+3)}dx$

$=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+3}\right)dx$

$=\frac{1}{2}(\ln|x+1|-\ln|x+3|)+C$

$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x+3}\right|+C$

$f(3)+f(5)=0$이므로

$\frac{1}{2}\ln\frac{4}{6}+\frac{1}{2}\ln\frac{6}{8}+2C=0$, $\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}+2C=0$

$2C=-\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\ln 2$ $\therefore C=\frac{1}{4}\ln 2$

따라서 $f(x)=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x+3}\right|+\frac{1}{4}\ln 2$이므로

$f(1)=\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\ln 2=-\frac{1}{2}\ln 2+\frac{1}{4}\ln 2$

$=-\frac{1}{4}\ln 2$

답 ②

522 해결 과정 $u(x)=\ln x,\ v'(x)=1$로 놓으면

$u'(x)=\frac{1}{x},\ v(x)=x$

$$\int \ln x\,dx=\ln x\cdot x-\int \frac{1}{x}\cdot x\,dx=x\ln x-x+C_1$$

$$\therefore \int \ln x^3\,dx=3\int \ln x\,dx$$

$$=3x\ln x-3x+C$$ ● 50%

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 1} f(x)=f(1),\qquad -3+C=1$

$\therefore C=4$ ● 40%

답 구하기 따라서 $x\neq 1$일 때, $f(x)=3x\ln x-3x+4$이므로 $\quad f(e)=4$ ● 10%

답 4

523 해결 과정 $u(x)=x,\ v'(x)=\cos x$로 놓으면

$u'(x)=1,\ v(x)=\sin x$

$$\therefore f(x)=\int f'(x)\,dx=\int x\cos x\,dx$$

$$=x\sin x-\int \sin x\,dx$$

$$=x\sin x+\cos x+C$$ ● 20%

한편 $f'(x)=0$에서 $\quad x\cos x=0$

$x=0$ 또는 $\cos x=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=\frac{\pi}{2}\ (\because 0\le x\le \pi)$ ● 20%

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	극대	↘	

따라서 $0\le x\le \pi$에서 함수 $f(x)$는 $x=\frac{\pi}{2}$일 때 극대이면서 최대이므로 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$에서

$\frac{\pi}{2}+C=\frac{\pi}{2}\qquad \therefore C=0$

$\therefore f(x)=x\sin x+\cos x$ ● 20%

방정식 $f(x)=\cos x+\frac{x}{2}$에서

$x\sin x+\cos x=\cos x+\frac{x}{2}$

$x\left(\sin x-\frac{1}{2}\right)=0$

$x=0$ 또는 $\sin x=\frac{1}{2}$

$\therefore x=0$ 또는 $x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{5}{6}\pi\ (\because 0\le x\le 2\pi)$

● 30%

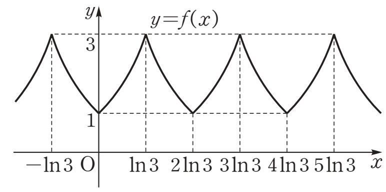
답 구하기 따라서 서로 다른 실근의 개수는 3이다. ● 10%

답 3

524 문제 이해 모든 실수 x에 대하여 $f(\ln 3+x)=f(\ln 3-x)$이므로 함수 $f(x)$의 그래프는 직선 $x=\ln 3$에 대하여 대칭이다.

또 $f(-x)=f(x)$이므로 함수 $f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다. ● 40%

해결 과정 따라서 함수 $f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



● 10%

이때 함수 $f(x)$는 모든 실수 x에 대하여

$f(x+2\ln 3)=f(x)$

이고 $\int_0^{\ln 3} f(x)\,dx=\int_{\ln 3}^{2\ln 3} f(x)\,dx$이므로 ● 10%

답 구하기 $\int_0^{\ln 81} f(x)\,dx$

$$=\int_0^{4\ln 3} f(x)\,dx$$

$$=2\int_0^{2\ln 3} f(x)\,dx$$

$$=2\left\{\int_0^{\ln 3} f(x)\,dx+\int_{\ln 3}^{2\ln 3} f(x)\,dx\right\}$$

$$=4\int_0^{\ln 3} e^x\,dx=4\Big[e^x\Big]_0^{\ln 3}$$

$$=4(3-1)=8$$ ● 40%

답 8

525 $\ln x=t$로 놓으면 $\quad \frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}$

$x=1$일 때 $t=0,\ x=e^2$일 때 $t=2$이므로

$$\int_1^{e^2} \frac{\ln x^2+(\ln x)^3}{x}\,dx=\int_1^{e^2} \frac{2\ln x+(\ln x)^3}{x}\,dx$$

$$=\int_0^2 (2t+t^3)\,dt$$

$$=\left[t^2+\frac{t^4}{4}\right]_0^2=8$$ 답 8

526 $$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos x}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos x}{\cos^2 x}\,dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos x}{1-\sin^2 x}\,dx$$

$\sin x=t$로 놓으면 $\quad \frac{dt}{dx}=\cos x$

$x=0$일 때 $t=0,\ x=\frac{\pi}{6}$일 때 $t=\frac{1}{2}$이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos x}\,dx=\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-t^2}\,dt$$

$$=-\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{(t-1)(t+1)}\,dt$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)dt$$

$$=-\frac{1}{2}\Big[\ln|t-1|-\ln|t+1|\Big]_0^{\frac{1}{2}}$$

$$=-\frac{1}{2}\left(\ln\frac{1}{2}-\ln\frac{3}{2}\right)=-\frac{1}{2}\ln\frac{1}{3}$$

$$=\ln\sqrt{3}$$ 답 ②

일품 BOX

우함수

$f(\ln 3+x)=f(\ln 3-x)$에 x 대신 $x+\ln 3$을 대입하면

$f(x+2\ln 3)$
$=f(\ln 3-x-\ln 3)$
$=f(-x)$
$=f(x)$

$\ln\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\right)=\ln\frac{1}{3}$

모든 실수 x에 대하여 $f(p+x)=f(p-x)$ ➡ 함수 $f(x)$의 그래프는 직선 $x=p$에 대하여 대칭이다.

Ⅳ 적분법

527 $x=\tan\theta\left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$로 놓으면

$\frac{dx}{d\theta}=\sec^2\theta$

$x=1$일 때 $\theta=\frac{\pi}{4}$, $x=\sqrt{3}$일 때 $\theta=\frac{\pi}{3}$이므로

$$\int_1^{\sqrt{3}}\frac{3}{x^2\sqrt{1+x^2}}dx$$
$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{3}{\tan^2\theta\sqrt{1+\tan^2\theta}}\cdot\sec^2\theta\,d\theta$$
$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{3\sec\theta}{\tan^2\theta}d\theta$$
$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{3}{\cos\theta}\cdot\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}d\theta$$
$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{3\cos\theta}{\sin^2\theta}d\theta$$

$\sin\theta=t$로 놓으면 $\frac{dt}{d\theta}=\cos\theta$

$\theta=\frac{\pi}{4}$일 때 $t=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\theta=\frac{\pi}{3}$일 때 $t=\frac{\sqrt{3}}{2}$이므로

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{3\cos\theta}{\sin^2\theta}d\theta=\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{3}{t^2}dt$$
$$=\left[-\frac{3}{t}\right]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$
$$=3\sqrt{2}-2\sqrt{3}$$

따라서 $a=3$, $b=-2$이므로 $a+b=1$ 답 ④

528 $\int_1^2 e^x\ln x\,dx$에서 $f(x)=\ln x$, $g'(x)=e^x$으로 놓으면

$f'(x)=\frac{1}{x}$, $g(x)=e^x$

$$\therefore \int_1^2 e^x\ln x\,dx=\Big[(\ln x)e^x\Big]_1^2-\int_1^2\frac{e^x}{x}dx$$
$$=e^2\ln 2-\int_1^2\frac{e^x}{x}dx$$

$\int_1^2 e^x\ln x\,dx+\int_1^2\frac{e^x}{x}dx=e^2\ln 2$이므로

$$\int_1^2\left(e^x\ln x+\frac{e^x+a}{x}\right)dx$$
$$=\int_1^2 e^x\ln x\,dx+\int_1^2\frac{e^x}{x}dx+\int_1^2\frac{a}{x}dx$$
$$=e^2\ln 2+a\Big[\ln|x|\Big]_1^2$$
$$=e^2\ln 2+a\ln 2$$

따라서 $e^2\ln 2+a\ln 2=0$이므로

$a=-e^2$ 답 ②

529 $\int_0^\pi xe^x dx$에서 $f(x)=x$, $g'(x)=e^x$으로 놓으면

$f'(x)=1$, $g(x)=e^x$

$$\therefore B=\int_0^\pi xe^x dx=\Big[xe^x\Big]_0^\pi-\int_0^\pi e^x dx$$
$$=\pi e^\pi-A \quad\cdots\cdots ㉠$$

$\int_0^\pi e^x\sin x\,dx$에서 $h(x)=\sin x$, $g'(x)=e^x$으로 놓으면

$h'(x)=\cos x$, $g(x)=e^x$

$$\therefore C=\int_0^\pi e^x\sin x\,dx$$
$$=\Big[e^x\sin x\Big]_0^\pi-\int_0^\pi e^x\cos x\,dx$$
$$=-\int_0^\pi e^x\cos x\,dx$$

$\int_0^\pi xe^x\sin x\,dx$에서 $u(x)=x\sin x$, $g'(x)=e^x$으로 놓으면

$u'(x)=\sin x+x\cos x$, $g(x)=e^x$

$$\therefore \int_0^\pi xe^x\sin x\,dx$$
$$=\Big[xe^x\sin x\Big]_0^\pi-\int_0^\pi e^x(\sin x+x\cos x)dx$$
$$=-\int_0^\pi e^x\sin x\,dx-\int_0^\pi xe^x\cos x\,dx$$
$$=-C-\int_0^\pi xe^x\cos x\,dx \quad\cdots\cdots ㉡$$

$\int_0^\pi xe^x\cos x\,dx$에서 $v(x)=x\cos x$, $g'(x)=e^x$으로 놓으면

$v'(x)=\cos x-x\sin x$, $g(x)=e^x$

$$\therefore \int_0^\pi xe^x\cos x\,dx$$
$$=\Big[xe^x\cos x\Big]_0^\pi-\int_0^\pi(e^x\cos x-xe^x\sin x)dx$$
$$=-\pi e^\pi+C+\int_0^\pi xe^x\sin x\,dx \quad\cdots\cdots ㉢$$

㉢을 ㉡에 대입하면

$$2\int_0^\pi xe^x\sin x\,dx=-2C+\pi e^\pi$$
$$=A+B-2C\ (\because ㉠)$$
$$\therefore \int_0^\pi xe^x\sin x\,dx=\frac{A+B-2C}{2}$$

답 ②

다른 풀이 $(xe^x\sin x)'$

$=e^x\sin x+xe^x\sin x+xe^x\cos x$이므로

$$\int_0^\pi xe^x\sin x\,dx=\Big[xe^x\sin x\Big]_0^\pi-\int_0^\pi e^x\sin x\,dx$$
$$-\int_0^\pi xe^x\cos x\,dx$$
$$=-C-\int_0^\pi xe^x\cos x\,dx$$

$(xe^x\cos x)'=e^x\cos x+xe^x\cos x-xe^x\sin x$이므로

일품 BOX

$1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$이므로

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{3\sec^2\theta}{\tan^2\theta\sqrt{1+\tan^2\theta}}d\theta$$
$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{3\sec^2\theta}{\tan^2\theta\sqrt{\sec^2\theta}}d\theta$$
$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{3\sec\theta}{\tan^2\theta}d\theta$$

$$-\frac{6}{\sqrt{3}}+\frac{6}{\sqrt{2}}$$
$$=-2\sqrt{3}+3\sqrt{2}$$

$$\Big[xe^x\sin x\Big]_0^\pi$$
$$=\pi e^\pi\sin\pi-0$$
$$=0$$

$$\Big[xe^x\cos x\Big]_0^\pi$$
$$=\pi e^\pi\cos\pi-0$$
$$=-\pi e^\pi$$

$$C=\int_0^\pi e^x\sin x\,dx$$
$$=-\int_0^\pi e^x\cos x\,dx$$

$$\int_0^\pi xe^x\cos x\,dx=\left[xe^x\cos x\right]_0^\pi-\int_0^\pi e^x\cos x\,dx$$
$$+\int_0^\pi xe^x\sin x\,dx$$
$$=-\pi e^\pi+C+\int_0^\pi xe^x\sin x\,dx$$

1등급 비밀노트

A, B, C의 값을 각각 구하여 $\int_0^\pi xe^x\sin x\,dx$와 비교할 수도 있지만 각각의 값을 모두 구하는 것은 계산이 복잡하다.
따라서 풀이와 같이 식을 계산하는 과정에서 A, B, C에 해당하는 식이 나오면 계산하지 않고 A, B, C를 이용하여 나타낸다.

530 해결 과정 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\cos t\,dt=k$ (k는 상수) ······ ㉠

로 놓으면 $f(x)=\sin x+2k$
이것을 ㉠에 대입하면

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin t+2k)\cos t\,dt=k$$
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin t\cos t+2k\cos t)dt=k$$
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{2}\sin 2t+2k\cos t\right)dt=k$$
$$\left[-\frac{1}{4}\cos 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+2k\left[\sin t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=k$$ ● 70%

즉 $\frac{1}{2}+2k=k$이므로 $k=-\frac{1}{2}$ ● 20%

답 구하기 따라서 $f(x)=\sin x-1$이므로

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$$ ● 10%

답 0

531 $\int_1^e f(t)dt=k$ (k는 상수) ······ ㉠

로 놓으면 $f(x)=1+\ln x-\frac{k}{x}$
이것을 ㉠에 대입하면

$$\int_1^e\left(1+\ln t-\frac{k}{t}\right)dt=k$$
$$\left[t+t\ln t-t-k\ln|t|\right]_1^e=k$$
$$(e+e-e-k)-(1-1)=k$$
$$e-k=k,\quad 2k=e$$
$$\therefore k=\frac{e}{2}$$

따라서 $f(x)=1+\ln x-\frac{e}{2x}$이므로

$$f(e)=\frac{3}{2}$$

답 $\frac{3}{2}$

일품 BOX

$f(1)=e^2-\cos\pi$
$=e^2+1$

적분 구간이 상수이므로 정적분의 값도 상수이다.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1 f(x)dx$$

$\frac{\pi k}{n}$를 x로, $\frac{\pi}{n}$를 dx로 나타낼 때, $k=1$이고 $n\to\infty$이면
$x=0$
$k=n-1$이고 $n\to\infty$이면
$x=\pi$

$\int_a^b \ln t\,dt$에서
$u(t)=\ln t$, $v'(t)=1$
로 놓으면
$u'(t)=\frac{1}{t}$, $v(t)=t$
$\int_a^b \ln t\,dt$
$=\left[t\ln t\right]_a^b-\int_a^b\frac{1}{t}\cdot t\,dt$
$=\left[t\ln t\right]_a^b-\int_a^b dt$
$=\left[t\ln t-t\right]_a^b$

함수 $y=f(x)$와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

532 $f(t)=e^{2t}-\cos\pi t$, $F'(t)=f(t)$로 놓으면

$$\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\int_1^{x^2}(e^{2t}-\cos\pi t)dt$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\int_1^{x^2}f(t)dt$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\left[F(t)\right]_1^{x^2}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{F(x^2)-F(1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{F(x^2)-F(1)}{x^2-1}\cdot(x+1)$$
$$=2F'(1)=2f(1)=2(e^2+1)$$

답 ①

533 $$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{4}+\sqrt{8}+\sqrt{12}+\cdots+\sqrt{4n}}{n\sqrt{n}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\left(\sqrt{\frac{1}{n}}+\sqrt{\frac{2}{n}}+\sqrt{\frac{3}{n}}+\cdots+\sqrt{\frac{n}{n}}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n 2\sqrt{\frac{k}{n}}\cdot\frac{1}{n}$$
$$=2\int_0^1\sqrt{x}\,dx=2\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1=\frac{4}{3}$$

답 ③

534 해결 과정 호 AB의 길이가 π이므로

$$l_k=\frac{\pi k}{n}$$

반원의 중심각의 크기가 π이므로 $\theta_k=\frac{\pi k}{n}$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}l_k\sin\theta_k$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\pi k}{n}\cdot\sin\frac{\pi k}{n}$$
$$=\frac{1}{\pi}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\pi k}{n}\sin\frac{\pi k}{n}\cdot\frac{\pi}{n}$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi x\sin x\,dx$$ ······ ㉠ ● 40%

$f(x)=x$, $g'(x)=\sin x$로 놓으면
$f'(x)=1$, $g(x)=-\cos x$

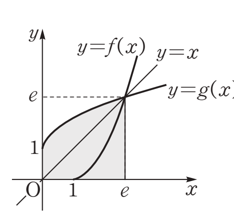
$$\therefore \int_0^\pi x\sin x\,dx=\left[-x\cos x\right]_0^\pi+\int_0^\pi\cos x\,dx$$
$$=\pi+\left[\sin x\right]_0^\pi$$
$$=\pi$$ ······ ㉡ ● 40%

답 구하기 ㉡을 ㉠에 대입하면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}l_k\sin\theta_k=\frac{1}{\pi}\cdot\pi=1$$ ● 20%

답 1

535 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이고, $f(e)=e$이므로 곡선 $y=g(x)$는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 곡선 $y=g(x)$와 x축, y축 및 직선 $x=e$로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선 $y=f(x)$와 x축, y축 및 직선 $y=e$로 둘러싸인 도형의 넓이와 같으므로 구하는 넓이는

$$e^2-\int_1^e x(\ln x)^2dx \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$\int_1^e x(\ln x)^2dx$에서 $h(x)=(\ln x)^2$, $k'(x)=x$로 놓으면

$$h'(x)=\frac{2\ln x}{x},\ k(x)=\frac{1}{2}x^2$$

$$\begin{aligned}\therefore \int_1^e x(\ln x)^2dx &= \left[(\ln x)^2\frac{1}{2}x^2\right]_1^e-\int_1^e\frac{2\ln x}{x}\cdot\frac{1}{2}x^2dx\\ &=\frac{e^2}{2}-\int_1^e x\ln x\,dx \qquad \cdots\cdots ㉡\end{aligned}$$

$\int_1^e x\ln x\,dx$에서 $u(x)=\ln x$, $v'(x)=x$로 놓으면

$$u'(x)=\frac{1}{x},\ v(x)=\frac{1}{2}x^2$$

$$\begin{aligned}\therefore \int_1^e x\ln x\,dx&=\left[\ln x\cdot\frac{1}{2}x^2\right]_1^e-\int_1^e\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{2}x^2dx\\&=\frac{e^2}{2}-\left[\frac{1}{4}x^2\right]_1^e\\&=\frac{e^2}{2}-\left(\frac{e^2}{4}-\frac{1}{4}\right)\\&=\frac{e^2}{4}+\frac{1}{4} \qquad \cdots\cdots ㉢\end{aligned}$$

㉢을 ㉡에 대입하면

$$\int_1^e x(\ln x)^2dx=\frac{e^2}{2}-\left(\frac{e^2}{4}+\frac{1}{4}\right)=\frac{e^2}{4}-\frac{1}{4}$$

이것을 ㉠에 대입하면

$$e^2-\int_1^e x(\ln x)^2dx=e^2-\left(\frac{e^2}{4}-\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{4}e^2+\frac{1}{4}$$

따라서 $a=\frac{3}{4}$, $b=\frac{1}{4}$이므로 $\quad a+b=1$

답 1

536 곡선 $y=xe^{1-x}$과 직선 $y=x$의 교점의 x좌표는

$xe^{1-x}=x$에서 $\quad x(e^{1-x}-1)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=1$

$0\le x\le 1$일 때, $xe^{1-x}\ge x$이므로 구하는 넓이는

$$\int_0^1(xe^{1-x}-x)dx=\int_0^1xe^{1-x}dx-\int_0^1x\,dx$$

이때 $f(x)=x$, $g'(x)=e^{1-x}$으로 놓으면

$$f'(x)=1,\ g(x)=-e^{1-x}$$

$$\begin{aligned}\therefore \int_0^1xe^{1-x}dx-\int_0^1x\,dx&=\left[-xe^{1-x}\right]_0^1+\int_0^1e^{1-x}dx-\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1\\&=-1+\left[-e^{1-x}\right]_0^1-\frac{1}{2}\\&=-1-1+e-\frac{1}{2}=e-\frac{5}{2}\end{aligned}$$

답 ①

일품 BOX

$e^{1-x}-1=0$에서
$e^{1-x}=1$
$1-x=0$
$\therefore x=1$

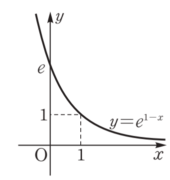
$$\int_a^b\ln x\,dx=\left[x\ln x-x\right]_a^b$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^1\left(\frac{x}{x+1}-1\right)dx=\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{x-x-1}{x+1}dx=-\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{1}{x+1}dx$$

$$-\frac{3}{2}(\ln 3-\ln 2)+\ln 2=-\frac{3}{2}\ln 3+\frac{3}{2}\ln 2+\ln 2=\frac{5}{2}\ln 2-\frac{3}{2}\ln 3$$

1등급 비밀노트

함수 $y=e^{1-x}$, 즉 $y=e^{-(x-1)}$의 그래프는 $y=e^{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.
따라서 $0\le x\le 1$일 때, $1\le e^{1-x}\le e$이므로
$xe^{1-x}\ge x$

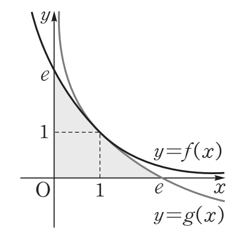


537 $y=e^{1-x}$으로 놓으면

$1-x=\ln y$
$x=1-\ln y$

x와 y를 서로 바꾸면

$y=1-\ln x$
$\therefore g(x)=1-\ln x$



$f(1)=1$이므로 $\quad g(1)=1$

따라서 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 위의 그림과 같으므로 구하는 넓이는

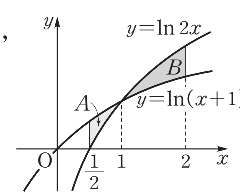
$$\begin{aligned}&\int_0^1e^{1-x}dx+\int_1^e(1-\ln x)dx\\&=\left[-e^{1-x}\right]_0^1+\left[x\right]_1^e-\int_1^e\ln x\,dx\\&=(-1+e)+(e-1)-\left[x\ln x-x\right]_1^e\\&=2e-2-1\\&=2e-3\end{aligned}$$

답 ③

538 두 곡선 $y=\ln(x+1)$, $y=\ln 2x$의 교점의 x좌표는

$\ln(x+1)=\ln 2x$에서

$x+1=2x \qquad \therefore x=1$



$$A=\int_{\frac{1}{2}}^1\{\ln(x+1)-\ln 2x\}dx$$

에서 $f(x)=\ln(x+1)-\ln 2x$, $g'(x)=1$로 놓으면

$$f'(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x},\ g(x)=x$$

$$\begin{aligned}\therefore A&=\left[\{\ln(x+1)-\ln 2x\}x\right]_{\frac{1}{2}}^1-\int_{\frac{1}{2}}^1\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}\right)x\,dx\\&=-\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}+\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{1}{x+1}dx\\&=-\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}+\left[\ln|x+1|\right]_{\frac{1}{2}}^1\\&=-\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}+\left(\ln 2-\ln\frac{3}{2}\right)\\&=-\frac{3}{2}\ln\frac{3}{2}+\ln 2\\&=\frac{5}{2}\ln 2-\frac{3}{2}\ln 3\end{aligned}$$

$B=\int_1^2\{\ln 2x-\ln(x+1)\}dx$에서

$u(x)=\ln 2x-\ln(x+1)$, $v'(x)=1$로 놓으면

$$u'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1},\quad v(x)=x$$

$$\therefore B=\Big[\{\ln 2x-\ln(x+1)\}x\Big]_1^2-\int_1^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)x\,dx$$

$$=2(\ln 4-\ln 3)-\int_1^2\frac{1}{x+1}dx$$

$$=4\ln 2-2\ln 3-\Big[\ln|x+1|\Big]_1^2$$

$$=4\ln 2-2\ln 3-(\ln 3-\ln 2)$$

$$=5\ln 2-3\ln 3$$

$$\int_1^2\left(1-\frac{x}{x+1}\right)dx=\int_1^2\frac{x+1-x}{x+1}dx=\int_1^2\frac{1}{x+1}dx$$

따라서 $2A=5\ln 2-3\ln 3=B$이므로

$$\frac{B}{A}=\frac{2A}{A}=2$$

답 2

539 해결 과정 두 영역 A, B의 넓이의 합을 S_1이라 하면

$$S_1=\frac{1}{2}\cdot 12\cdot 12=72$$ ● 10%

영역 B의 넓이를 S_2라 하면

$$S_2=\int_k^{12}\sqrt{x-k}\,dx$$

$$=\left[\frac{2}{3}(x-k)^{\frac{3}{2}}\right]_k^{12}$$

$$=\frac{2}{3}(12-k)^{\frac{3}{2}}$$ ● 50%

$$\int\sqrt{x-k}\,dx=\int(x-k)^{\frac{1}{2}}dx=\frac{2}{3}(x-k)^{\frac{3}{2}}+C$$

이때 두 영역 A, B의 넓이의 비가 $3:1$이므로

$$S_2=\frac{1}{4}S_1$$ ● 20%

답 구하기 즉 $\frac{2}{3}(12-k)^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{4}\cdot 72$이므로

$(12-k)^{\frac{3}{2}}=27$, $(12-k)^3=3^6=9^3$

$12-k=9$ $\therefore k=3$ ● 20%

답 3

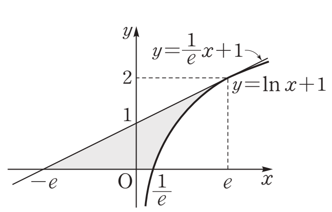
540 $f(x)=\ln x+1$이라 하면 $f'(x)=\frac{1}{x}$

점 $(e,\ 2)$에서의 접선의 기울기는 $f'(e)=\frac{1}{e}$이므로 접선 l의 방정식은

$$y-2=\frac{1}{e}(x-e),\ \text{즉}\ y=\frac{1}{e}x+1$$

곡선 $y=\ln x+1$과 접선 l이 x축과 만나는 점의 좌표는 각각 $\left(\frac{1}{e},\ 0\right)$, $(-e,\ 0)$이므로 곡선 $y=\ln x+1$과 접선 $y=\frac{1}{e}x+1$은 다음 그림과 같다.

$0=\ln x+1$에서 $\ln x=-1$ $\therefore x=e^{-1}=\frac{1}{e}$



따라서 구하는 넓이는

$$\frac{1}{2}\cdot 2e\cdot 2-\int_{\frac{1}{e}}^{e}(\ln x+1)dx$$

$$=2e-\Big[x\ln x-x+x\Big]_{\frac{1}{e}}^{e}$$

$$=2e-\Big[x\ln x\Big]_{\frac{1}{e}}^{e}$$

$$=2e-\left(e+\frac{1}{e}\right)$$

$$=e-\frac{1}{e}$$

답 ③

541 해결 과정 바닥으로부터의 물의 높이가 x cm일 때 수면의 넓이를 $S(x)\,\text{cm}^2$라 하면

$$S(x)=\pi(x\sqrt[4]{x^3+9})^2=\pi x^2\sqrt{x^3+9}$$ ● 30%

따라서 물의 높이가 3 cm일 때 물의 부피 $V\,\text{cm}^3$는

$$V=\int_0^3 S(x)dx=\int_0^3\pi x^2\sqrt{x^3+9}\,dx$$ ● 10%

답 구하기 $x^3+9=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=3x^2$

$x=0$일 때 $t=9$, $x=3$일 때 $t=36$이므로

$$V=\int_0^3\pi x^2\sqrt{x^3+9}\,dx$$

$$=\int_9^{36}\pi\sqrt{t}\cdot\frac{1}{3}dt$$

$$=\frac{\pi}{3}\int_9^{36}\sqrt{t}\,dt$$

$$=\frac{\pi}{3}\left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_9^{36}$$

$$=\frac{\pi}{3}\left(\frac{2}{3}\cdot 36\cdot 6-\frac{2}{3}\cdot 9\cdot 3\right)$$

$$=\frac{\pi}{3}\cdot 126=42\pi$$ ● 50%

$\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}t\sqrt{t}$이므로

$$\left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_9^{36}=\frac{2}{3}\cdot 36\sqrt{36}-\frac{2}{3}\cdot 9\sqrt{9}=\frac{2}{3}\cdot 36\cdot 6-\frac{2}{3}\cdot 9\cdot 3=126$$

$\therefore p=42$ ● 10%

답 42

542 $\overline{\text{PQ}}=6t-t^2$, $\overline{\text{QR}}=t$이므로 $\angle\text{PQR}=30°$일 때 삼각형 PQR의 넓이를 $S(t)$라 하면

$$S(t)=\frac{1}{2}\cdot(6t-t^2)\cdot t\cdot\sin 30°$$

$$=\frac{1}{4}(6t^2-t^3)$$

두 변의 길이가 a, b이고 그 끼인 각의 크기가 θ인 삼각형의 넓이
➡ $\frac{1}{2}ab\sin\theta$

따라서 구하는 입체도형의 부피는

$$\int_0^6 S(t)dt=\int_0^6\frac{1}{4}(6t^2-t^3)dt$$

$$=\frac{1}{4}\left[2t^3-\frac{1}{4}t^4\right]_0^6$$

$$=\frac{1}{4}(432-324)=27$$

답 ②

543 전략 다항함수 $f(x)$의 차수를 $n(n\geq 1)$이라 하고 주어진 조건을 이용하여 먼저 $f(x)$를 구한다.

Step 1 조건 (가)에서 $f(3)=2$, $f'(3)=2$

Ⅳ 적분법

본책 100쪽

Step 2 조건 (나)에서 등식

$(x+2)f(x)=\int\{2f(x)+8\}dx$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f(x)+(x+2)f'(x)=2f(x)+8 \quad \cdots\cdots ㉠$$

$f(x)$의 차수를 $n(n\geq 1)$이라 하고 x^n의 계수를 $a\ (a\neq 0)$라 하면

$$f(x)=ax^n+\cdots,\ f'(x)=nax^{n-1}+\cdots$$

이므로 ㉠의 좌변에서 x^n의 계수는 $\quad a+na$

> **일품 BOX**
>
> $f(x)+(x+2)f'(x)$
> $=ax^n+\cdots$
> $\quad +(x+2)(nax^{n-1}+\cdots)$
> $=ax^n+\cdots$
> $\quad +nax^n+\cdots$
> $=(a+na)x^n+\cdots$

㉠의 우변에서 x^n의 계수는 $\quad 2a$

따라서 $a+na=2a$에서 $\quad n+1=2 \quad \therefore n=1$

$f(x)$는 일차함수이므로 $f(x)=ax+b$라 하자.

$f'(x)=a$이고 $f'(3)=2$이므로 $\quad a=2$

또 $f(3)=3a+b=2$에서 $\quad 6+b=2 \quad \therefore b=-4$

$$\therefore f(x)=2x-4$$

Step 3 $g(x)=\int g'(x)dx=\int f(x)e^x\,dx$이므로

$$g(x)=\int(2x-4)e^x\,dx$$

$u(x)=2x-4,\ v'(x)=e^x$으로 놓으면

$$u'(x)=2,\ v(x)=e^x$$

$$\begin{aligned}\therefore g(x)&=(2x-4)e^x-\int 2e^x\,dx\\&=(2x-4)e^x-2e^x+C\\&=(2x-6)e^x+C\end{aligned}$$

$g(3)=4$이므로 $\quad C=4$

Step 4 따라서 $g(x)=(2x-6)e^x+4$이므로

$$g(0)=-2$$

답 ④

544

전략 $0\leq x<1,\ x=1,\ x>1$인 경우로 나누어 각 구간에서의 $f(x)$를 구한 후 곡선 $y=f(x)$의 개형을 그려 본다.

Step 1 (i) $0\leq x<1$일 때, $\lim\limits_{n\to\infty}x^n=\lim\limits_{n\to\infty}x^{n+2}=0$이므로

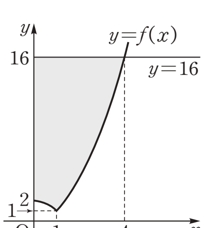
$$f(x)=\cos\frac{\pi}{2}x+1$$

(ii) $x=1$일 때, $\quad f(1)=\dfrac{0+1+1}{1+1}=1$

(iii) $x>1$일 때, $\lim\limits_{n\to\infty}x^n=\infty$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{x^n}\cos\frac{\pi}{2}x+x^2+\frac{1}{x^n}}{1+\frac{1}{x^n}}=x^2$$

Step 2 따라서 곡선 $y=f(x)$는 오른쪽 그림과 같으므로 곡선 $y=f(x)$와 y축 및 직선 $y=16$으로 둘러싸인 도형의 넓이는



$$\begin{aligned}&4\cdot16-\int_0^4 f(x)\,dx\\&=64-\left\{\int_0^1\left(\cos\frac{\pi}{2}x+1\right)dx+\int_1^4 x^2\,dx\right\}\\&=64-\left(\left[\frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi}{2}x+x\right]_0^1+\left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^4\right)\\&=64-\left\{\left(\frac{2}{\pi}+1\right)+\left(\frac{64}{3}-\frac{1}{3}\right)\right\}\\&=42-\frac{2}{\pi}\end{aligned}$$

Step 3 따라서 $a=42,\ b=-2$이므로

$$a+b=40$$

답 40

545

전략 곡선 $y=\dfrac{4}{x}$와 직선 $y=kx$의 교점의 좌표를 $\left(a,\ \dfrac{4}{a}\right)$로 놓고 A 또는 B를 a에 대한 식으로 나타낸다.

Step 1 곡선 $y=\dfrac{4}{x}$와 두 직선 $y=4x,\ y=\dfrac{1}{4}x$로 둘러싸인 도형의 넓이는

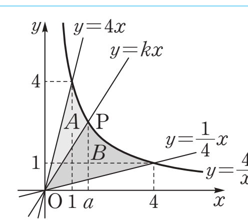
$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\cdot1\cdot4+\int_1^4\frac{4}{x}dx-\frac{1}{2}\cdot4\cdot1\\&=\int_1^4\frac{4}{x}dx=\Big[4\ln|x|\Big]_1^4\\&=4\ln4=8\ln2\end{aligned}$$

Step 2 $A:B=1:2$이므로

$$A=\frac{1}{3}\cdot8\ln2=\frac{8}{3}\ln2$$

Step 3 한편 직선 $y=kx$와 곡선 $y=\dfrac{4}{x}$의 교점을 $\mathrm{P}\left(a,\ \dfrac{4}{a}\right)$라 하면 $1<k<4$이므로 $1<a<2$이다.

> $k=1$일 때, 즉 직선 $y=x$와 곡선 $y=\dfrac{4}{x}$ $(x>0)$의 교점의 x좌표는
>
> $x=\dfrac{4}{x},\quad x^2=4$
>
> $\therefore x=2\ (\because x>0)$



$$\begin{aligned}\therefore A&=\frac{1}{2}\cdot1\cdot4+\int_1^a\frac{4}{x}dx-\frac{1}{2}\cdot a\cdot\frac{4}{a}\\&=2+\Big[4\ln|x|\Big]_1^a-2\\&=4\ln a\end{aligned}$$

$4\ln a=\dfrac{8}{3}\ln2$에서

$$\ln a=\frac{2}{3}\ln2=\ln2^{\frac{2}{3}}$$

$$\therefore a=2^{\frac{2}{3}}$$

Step 4 점 P의 좌표는 $\left(2^{\frac{2}{3}},\ \dfrac{4}{2^{\frac{2}{3}}}\right)$, 즉 $\left(2^{\frac{2}{3}},\ 2^{\frac{4}{3}}\right)$이고 직선 $y=kx$가 점 P를 지나므로

> $\dfrac{4}{2^{\frac{2}{3}}}=2^{2-\frac{2}{3}}=2^{\frac{4}{3}}$

$$2^{\frac{4}{3}}=k\cdot2^{\frac{2}{3}},\quad k=\frac{2^{\frac{4}{3}}}{2^{\frac{2}{3}}}=2^{\frac{2}{3}}$$

$$\therefore k^3=\left(2^{\frac{2}{3}}\right)^3=2^2=4$$

답 4