최상위 수학 중 2-1 정답과 풀이

1 유리수와 순환소수

1 STEP 주제별 실력다지기

7~14쪽

1 ②, ④	2 ②, ③	3 6	4 17	5 47	6 11
7 98	8 3	9 23	10 64	11 4	12 ④
13 6, 6	14 4	15 7	16 (1) 500 (2) -27.3 (3) 0.32		17 ①
18 $1.80\dot{5}$	19 8	20 3	21 5579	22 $0.0\dot{0}\dot{1}$	23 9
24 36	25 ④	26 ③, ④, ⑤	27 ②, ③	28 (1) $6.\dot{6}$ (2) $3.8\dot{6}\dot{7}$ (3) $0.2\dot{8}5\dot{1}$ (4) $1.3\dot{2}$	
29 $x=0.25$	30 15	31 20	32 ③	33 ㄱ, ㄷ, ㅅ, ㅇ, ㅊ	34 ⑤, ⑥
35 ②, ④, ⑤					

최상위 NOTE 01 $0.999\cdots=1$임을 추론하기

$0.999\cdots$가 1이 된다는 사실을 다음과 같이 조금 다르게 생각해보자. 1.1, 1.01, 1.001과 같이 1보다 큰 방향에서 1에 한없이 가까워지면 $1.000\cdots$은 1과 같다는 사실에는 의문의 여지가 없을 것이다. 그렇다면 0.9, 0.99, 0.999와 같이 1보다 작은 방향에서 1에 한없이 가까워지면 $0.999\cdots$도 1임을 추론할 수 있다. 물론 계산을 통해서 $0.999\cdots=1$임을 확인할 수도 있다.

최상위 NOTE 02 유리수의 조밀성

서로 다른 두 유리수 사이에 무수히 많은 유리수가 있음을 알아보기 위해 다음과 같은 방법을 생각해보자. $a>b$인 두 유리수 a, b 사이에는 정중앙에 유리수 $\frac{a+b}{2}$가 존재한다. 같은 방법으로 두 유리수 a, $\frac{a+b}{2}$ 사이에는 정중앙에 유리수 $\frac{3a+b}{4}$가 존재하고, 두 유리수 a, $\frac{3a+b}{4}$ 사이에는 정중앙에 유리수 $\frac{7a+b}{8}$가 존재하고, 두 유리수 a, $\frac{7a+b}{8}$ 사이에는 정중앙에 유리수 $\frac{15a+b}{16}$가 존재한다. 이러한 방법으로 두 유리수 a, b 사이에는 $\frac{a+b}{2}$, $\frac{3a+b}{4}$, $\frac{7a+b}{8}$, $\frac{15a+b}{16}$, $\cdots$와 같이 무수히 많은 유리수가 있음을 알 수 있다.

문제 풀이

1 $m\neq0$, m, n이 정수일 때, $\frac{n}{m}$의 꼴로 나타낼 수 있는 수는 유리수이다.
즉, 이런 꼴로 나타낼 수 없는 수는 유리수가 아니다.
① 유한소수이므로 유리수이다.
② 순환하지 않는 무한소수이므로 유리수가 아니다.
③ 순환소수이므로 유리수이다.
④ 원주율 π는 3.1415926535…로 순환하지 않는 무한소수이므로 유리수가 아니다.
⑤ 정수이므로 유리수이다.

TIP 분자와 분모($\neq0$)가 정수인 분수의 꼴로 나타낼 수 없는 수는 유리수가 아니므로 순환하지 않는 무한소수이다.

2 x는 유리수이다.
① 무한소수 중에서 순환소수는 유리수이지만 순환하지 않는 무한소수는 유리수가 아니다.
②, ③ 유한소수, 순환소수는 유리수이다.
④ 원주율 π는 유리수가 아니다.
⑤ 순환하지 않는 무한소수는 유리수가 아니다.
따라서 유리수만을 모아놓은 것은 ②, ③이다.

3 분모를 10의 거듭제곱꼴로 만들 수 있는 분수는 유한소수로 나타낼 수 있다.
$\frac{3}{40}=\frac{3}{2^3\times5}\times\frac{5^2}{5^2}=\frac{3\times5^2}{2^3\times5^3}=\frac{75}{10^3}=0.075$
이므로 $a=5^2=25$, $b=75$, $c=0.075$
$\therefore \frac{b-a}{c}=\frac{75-25}{0.075}=\frac{50}{0.075}=666.\dot{6}$
따라서 순환마디는 6이다.

4 $\frac{3}{20}=\frac{3}{2^2\times5}\times\frac{5}{5}=\frac{15}{2^2\times5^2}=\frac{15}{10^2}=\frac{150}{10^3}=\frac{1500}{10^4}=\cdots$
이때 $a+n$의 값은 17, 153, 1504, …이므로 최솟값은 17이다.

5 $\frac{11}{250}=\frac{11}{2\times5^3}\times\frac{2^2}{2^2}=\frac{2^2\times11}{2^3\times5^3}=\frac{44}{10^3}=\frac{440}{10^4}$
$=\frac{4400}{10^5}=\cdots$
이때 $x+y$의 값은 47, 444, 4405, …이므로 최솟값은 47이다.

6 $\frac{26}{2^3\times5^2\times x}=\frac{13}{2^2\times5^2\times x}$에서 x가 2나 5 이외의 소인수로 이루어지면 된다. 즉, x는 3, 6, 7, 9, 11, 12, 14, …가 될 수 있다.
따라서 가장 작은 두 자리의 자연수는 11이다.

7 $\frac{3\times a}{84}=\frac{3\times a}{2^2\times3\times7}=\frac{a}{2^2\times7}$가 유한소수가 되려면 a는 7의 배수이어야 한다.
따라서 7의 배수 중 가장 큰 두 자리의 자연수는
$7\times14=98$이다.

8 $\frac{7}{2^3\times a}$을 기약분수로 만들었을 때, 분모에 2나 5 이외의 소인수가 있으면 무한소수이다.
따라서 a가 될 수 있는 수는 3, 6, 9이므로 a의 개수는 3이다.

주의
a가 7인 경우 분자와 약분되므로 분수 $\frac{7}{2^3\times a}=\frac{1}{2^3}$은 유한소수가 된다.

9 $\frac{x}{45}=\frac{x}{3^2\times5}$를 약분하면 $\frac{2}{y}$이므로 x는 2의 배수이고 유한소수가 되려면 분모에 있는 3^2이 약분되어야 하므로 x는 $3^2=9$의 배수이다. 따라서 조건에서 $10<x<20$인 2와 9의 배수를 구하면 $x=18$이다.
$\frac{18}{45}$을 기약분수로 나타내면 $\frac{2}{5}$이므로 $y=5$
$\therefore x+y=23$

10 $x=\frac{n}{70}=\frac{n}{2\times5\times7}$이고, $1\leq n\leq500$인 자연수일 때, x가 정수가 아닌 유한소수가 되려면 n은 7의 배수이면서 70의 배수는 아닌 수이어야 한다. 즉, $1\leq n\leq500$에서 7의 배수는 71개이고 70의 배수는 7개이므로 조건을 만족하는 x의 개수는
$71-7=64$

11 $x=2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19$
y가 유한소수이므로 x가 2와 5만을 소인수로 갖거나, 분자의 3×11과 약분된 후 분모가 2와 5만을 소인수로 가지면 된다. 따라서 y가 유한소수가 되게 하는 x의 값은 2, 3, 5, 11이므로 x의 개수는 4이다.

12 ① $1.2333\cdots=1.2\dot{3}$
② $4.0404\cdots=4.\dot{0}\dot{4}$
③ $5.125125\cdots=5.\dot{1}2\dot{5}$
⑤ $0.454454\cdots=0.\dot{4}5\dot{4}$

13 $\frac{23}{12}$을 소수로 나타내면 $1.9166\cdots=1.91\dot{6}$이므로 순환마디는 6이다. $1.91\dot{6}$은 소수점 아래 첫째 자리와 둘째 자리는 순환하지 않고 그 아래 자리의 숫자는 모두 6이므로 199번째 자리의 숫자도 6이다.

> **TIP** **순환소수의 소수점 아래 특정 자리의 숫자 찾기**
> $0.\dot{a}_1a_2a_3\cdots\dot{a}_n$에 대하여
> $(1$번째 자리 수$)=((n+1)$번째 자리 수$)=((2n+1)$번째 자리 수$)=a_1$
> $(2$번째 자리 수$)=((n+2)$번째 자리 수$)=((2n+2)$번째 자리 수$)=a_2$
> $(3$번째 자리 수$)=((n+3)$번째 자리 수$)=((2n+3)$번째 자리 수$)=a_3$
> $\vdots$
> $(n$번째 자리 수$)=(2n$번째 자리 수$)=(3n$번째 자리 수$)=a_n$
> 따라서 자연수 m을 n으로 나눈 나머지가 r일 때,
> $(m\text{번째 자리 수})=\begin{cases} a_r\ (1\le r<n) \\ a_n\ (r=0) \end{cases}$

14 $\dfrac{8}{13}=0.\dot{6}1538\dot{4}$이므로 순환마디의 숫자는 6개이다.
소수점 아래 50번째 자리의 숫자는 $50=6\times8+2$이므로 순환마디의 두 번째 숫자인 1이다.
또, 소수점 아래 100번째 자리의 숫자는 $100=6\times16+4$이므로 순환마디의 네 번째 숫자인 3이다.
$\therefore\ 1+3=4$

15 $\dfrac{2}{35}=0.0\dot{5}7142\dot{8}$에서 순환마디의 숫자는 6개이고, 소수점 아래 첫째 자리의 0은 순환하지 않는다.
따라서 0 이후에 반복되는 수가 6개이므로 x는 이 반복되는 수의 34번째 수이고, y는 69번째 수이다.
따라서 $34=6\times5+4$이므로 소수점 아래 35번째 자리의 숫자는 순환마디의 4번째 숫자인 4이다.
$\therefore\ x=4$
또, $69=6\times11+3$이므로 소수점 아래 70번째 자리의 숫자는 순환마디의 3번째 숫자인 1이다.
$\therefore\ y=1$
$\therefore\ |2x-y|=|2\times4-1|$
$=|8-1|=7$

16 (1) $0.\dot{9}=1$임을 이용하면
$499.\dot{9}=499+0.\dot{9}$
$=499+1=500$
(2) $0.0\dot{9}=0.1$임을 이용하면
$-27.2\dot{9}=-(27.2+0.0\dot{9})$
$=-(27.2+0.1)=-27.3$
(3) $0.00\dot{9}=0.01$임을 이용하면
$0.31\dot{9}=0.31+0.00\dot{9}$
$=0.31+0.01=0.32$

17 $x=43.\dot{1}\dot{2}=43.1212\cdots$이므로

$$\begin{array}{rl} 100x= & 4312.1212\cdots \\ -)\quad x= & 43.1212\cdots \\ \hline 99x= & 4269 \end{array}$$

$\therefore\ x=\dfrac{4269}{99}=\dfrac{1423}{33}$
따라서 가장 간단한 식은 $100x-x$이다.

18 $x=0.\dot{5}=\dfrac{5}{9}$이므로

$$x-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{x}}=\frac{5}{9}-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{\cfrac{5}{9}}}$$
$$=\frac{5}{9}-\cfrac{1}{1-\cfrac{9}{5}}=\frac{5}{9}-\cfrac{1}{-\cfrac{4}{5}}$$
$$=\frac{5}{9}+\frac{5}{4}$$
$$=\frac{20+45}{36}=\frac{65}{36}$$
$$=1.80\dot{5}$$

> **TIP** 먼저 식을 변형한 후 대입해도 된다. 즉,
> $x-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{x}}=x-\cfrac{1}{\cfrac{x-1}{x}}=x-\dfrac{x}{x-1}=\dfrac{x^2-x-x}{x-1}=\dfrac{x^2-2x}{x-1}$

19 $1.\dot{5}=\dfrac{15-1}{9}=\dfrac{14}{9}$의 역수가 a이므로 $a=\dfrac{9}{14}$
$12.\dot{4}=\dfrac{124-12}{9}=\dfrac{112}{9}$가 b이므로 $b=\dfrac{112}{9}$
$\therefore\ ab=\dfrac{9}{14}\times\dfrac{112}{9}=8$

20 $0.\dot{5}=\dfrac{5}{9}$, $0.\dot{8}=\dfrac{8}{9}$이므로 분모가 90인 분수 $\dfrac{x}{90}$가 $0.\dot{5}$와 $0.\dot{8}$ 사이의 수이면 $\dfrac{5}{9}<\dfrac{x}{90}<\dfrac{8}{9}$ $\quad\therefore\ 50<x<80$
그런데 $\dfrac{x}{90}=\dfrac{x}{2\times3^2\times5}$이므로 $\dfrac{x}{90}$가 유한소수가 되려면 x는 9의 배수이어야 한다.
따라서 x는 $9\times6=54$, $9\times7=63$, $9\times8=72$이므로 x의 개수는 3이다.

21 $x=5.63535\cdots$이므로

$$\begin{array}{rl} 1000x= & 5635.3535\cdots \\ -)\quad 10x= & 56.3535\cdots \\ \hline 990x= & 5579 \end{array}$$

$\therefore\ 1000x-10x=5579$

22 $2.3\dot{4}\dot{5}=\dfrac{2345-23}{990}=\dfrac{2322}{990}$
$=2322\times\boxed{\dfrac{1}{990}}$
$=2322\times\boxed{0.0\dot{0}\dot{1}}$

23 $1.9\dot{4}=\dfrac{194-19}{90}=\dfrac{175}{90}=\dfrac{35}{18}=\dfrac{5\times7}{2\times3^2}$이므로 이 분수에 자연수 m을 곱해서 유한소수가 되려면 m은 3^2의 배수이어야 한다.
따라서 m의 최솟값은 9이다.

24 $0.2\dot{7}=\frac{27-2}{90}=\frac{25}{90}=\frac{5}{18}=\frac{5}{2\times3^2}$이므로

$0.2\dot{7}\times x$가 유한소수이려면 x는 3^2의 배수이어야 한다.

따라서 가장 작은 자연수 x의 값은 9, 가장 큰 두 자리의 자연수 x의 값은 9×11이므로

$a=9$, $b=9\times11=99$

$\therefore\ b-7a=99-7\times9=99-63=36$

25 ① 0.542

② 0.542 2 2…

③ 0.542 4 2…

④ 0.542 5 42…

⑤ 0.542 0 5420…

따라서 가장 큰 수는 ④이다.

26 ① $0.333\cdots>0.3131\cdots$ (거짓)

② $0.42<0.4242\cdots$ (거짓)

③ $0.2\dot{9}=0.3$ (참)

④ $0.8111\cdots<0.888\cdots$ (참)

⑤ $\frac{12}{99}=0.\dot{1}\dot{2}=0.1212\cdots<0.1222\cdots$ (참)

따라서 대소관계가 바르게 된 것은 ③, ④, ⑤이다.

27 $\frac{5}{11}<x<\frac{8}{11}$이라 하면

$\frac{45}{99}<x<\frac{72}{99}$, 즉 $0.\dot{4}\dot{5}<x<0.\dot{7}\dot{2}$

따라서 조건을 만족하는 것은 ②, ③이다.

28 (1)
$$\begin{array}{r} 2.555\cdots \\ +\underline{)\ 5.333\cdots} \\ 7.888\cdots \end{array}\qquad \therefore\ 2.\dot{5}+5.\dot{3}=7.\dot{8}$$

$$\begin{array}{r} 7.888\cdots \\ -\underline{)\ 1.222\cdots} \\ 6.666\cdots \end{array}\qquad \therefore\ 7.\dot{8}-1.\dot{2}=6.\dot{6}$$

다른 풀이

분수로 고쳐 계산하면

$(\text{주어진 식})=\frac{23}{9}+\frac{48}{9}-\frac{11}{9}$

$=\frac{60}{9}=6.\dot{6}$

(2) $5.\dot{6}\dot{7}=\frac{567-5}{99}=\frac{562}{99}$

$4.1\dot{5}=\frac{415-41}{90}=\frac{374}{90}$

$2.\dot{3}4\dot{6}=\frac{2346-23}{990}=\frac{2323}{990}$

$\therefore\ (\text{주어진 식})=\frac{562}{99}-\frac{374}{90}+\frac{2323}{990}$

$=\frac{5620-4114+2323}{990}$

$=\frac{3829}{990}=3.8\dot{6}\dot{7}$

(3) $1.9\dot{4}=\frac{194-19}{90}=\frac{175}{90}$

$0.\dot{2}=\frac{2}{9}$

$1.\dot{5}\dot{1}=\frac{151-1}{99}=\frac{150}{99}$

$\therefore\ (\text{주어진 식})=\frac{175}{90}\times\frac{2}{9}\div\frac{150}{99}$

$=\frac{175}{90}\times\frac{2}{9}\times\frac{99}{150}$

$=\frac{77}{270}=0.2\dot{8}5\dot{1}$

(4) $3.\dot{2}=\frac{32-3}{9}=\frac{29}{9}$

$1.0\dot{5}=\frac{105-10}{90}=\frac{95}{90}$

$0.\dot{5}=\frac{5}{9}$

$\therefore\ (\text{주어진 식})=\frac{29}{9}-\frac{95}{90}\div\frac{5}{9}$

$=\frac{29}{9}-\frac{95}{90}\times\frac{9}{5}$

$=\frac{29}{9}-\frac{19}{10}$

$=\frac{290}{90}-\frac{171}{90}$

$=\frac{119}{90}=1.3\dot{2}$

29 $1.2\dot{3}=\frac{123-12}{90}=\frac{111}{90}$, $1.0\dot{1}=\frac{101-10}{90}=\frac{91}{90}$,

$0.0\dot{5}=\frac{5}{90}$이므로 주어진 방정식은

$\frac{111}{90}x-\frac{91}{90}x=\frac{5}{90}$에서 $111x-91x=5$이므로

$20x=5\qquad\therefore\ x=\frac{5}{20}=\frac{1}{4}=0.25$

30 $0.3\dot{6}=\frac{36-3}{90}=\frac{33}{90}$, $1.0\dot{5}=\frac{105-10}{90}=\frac{95}{90}$,

$4.\dot{7}=\frac{47-4}{9}=\frac{43}{9}$이므로 주어진 방정식은

$\frac{33}{90}x+\frac{95}{90}=\frac{43}{9}$에서 $33x+95=430$이므로 $33x=335$

$\therefore\ x=\frac{335}{33}=10.\dot{1}\dot{5}$

따라서 순환마디는 15이다.

31 $\frac{1}{8}<0.\dot{x}<\frac{3}{4}$이므로 $\frac{1}{8}<\frac{x}{9}<\frac{3}{4}$

각 변에 9를 곱하면 $\frac{9}{8}<x<\frac{27}{4}$

자연수 x를 모두 구하면 2, 3, 4, 5, 6이므로

그 합은 $2+3+4+5+6=20$

32 $0.\dot{2}=\frac{2}{9}$, $0.\dot{9}=1$, $2.\dot{3}=\frac{21}{9}$이므로 주어진 방정식은

$\frac{2}{9}x+1=\frac{21}{9}$에서 $\frac{2}{9}x=\frac{12}{9}$ $\qquad\therefore x=6$

이때 주어진 부등식은

$\frac{1}{6}<\frac{y}{6}\leq\frac{6}{9}$에서 $\frac{1}{6}<\frac{y}{6}\leq\frac{4}{6}$이므로 $1<y\leq4$

y는 자연수이므로 $y=2$, 3, 4

$\therefore$ (y의 값의 합)$=2+3+4=9$

33 ㄴ. 0은 정수로서 유리수이다.

ㄹ. 무한소수 중 순환하지 않는 무한소수는 유리수가 아니다.

ㅁ. $0.\dot{9}=1$과 같이 정수로 나타낼 수 있는 순환소수도 있다.

ㅂ. 유한소수가 아닌 소수는 무한소수로, 순환소수와 순환하지 않는 무한소수가 있다.

- 소수
  - 유한소수 — 유리수
  - 무한소수
    - 순환소수 — 유리수
    - 순환하지 않는 무한소수 — 무리수

ㅈ. 기약분수 중 분모의 소인수가 2나 5뿐인 수는 유한소수로 나타낼 수 있지만 2나 5 이외의 소인수를 가지면 유한소수로 나타낼 수 없다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ, ㅅ, ㅇ, ㅊ이다.

34 옳지 않은 것의 반례를 찾아 보자.

① $0.\dot{3}+(-0.\dot{3})=0$

(0은 어떤 방법으로도 순환소수로 나타낼 수 없다.)

② $0.\dot{3}-0.\dot{3}=0$

③ $\frac{3}{7}$과 $\frac{7}{6}$은 분모에 2나 5 이외의 소인수를 가지므로 모두 순환소수인데 $\frac{3}{7}\times\frac{7}{6}=0.5$는 유한소수이다.

④ $\frac{3}{7}\div\frac{6}{7}=\frac{3}{7}\times\frac{7}{6}=\frac{1}{2}=0.5$

⑦ $0.3\times0.\dot{3}=\frac{3}{10}\times\frac{3}{9}=\frac{1}{10}=0.1$

⑧ $0.2\div0.\dot{2}=\frac{2}{10}\div\frac{2}{9}=\frac{2}{10}\times\frac{9}{2}=\frac{9}{10}=0.9$

35 ① 순환소수는 모두 유리수이므로 항상 분모, 분자가 정수인 분수로 나타낼 수 있다.

③ $0.\dot{3}+(-0.\dot{3})=0$

⑤ $0.\dot{9}=1$이므로 정수로 나타낼 수 있는 순환소수가 존재한다.

2 STEP 실력 높이기

15~18쪽

1 ⑤	**2** -47	**3** 31	**4** 123	**5** 5	**6** 18
7 30	**8** 6	**9** -33	**10** $0.0\dot{1}$	**11** $0.\dot{8}$	**12** $0.0\dot{7}$
13 $0.\dot{1}\dot{8}$	**14** 16	**15** $0.\dot{2}\dot{7}$	**16** 2	**17** $0.\dot{2}7\dot{5}$	**18** 2, 5, 8
19 50	**20** 0				

문제 풀이

1 ⑤ 순환소수는 모두 유리수이므로 항상 분모, 분자가 정수인 분수로 나타낼 수 있다.
(단, 분모는 0이 아닌 정수)

2 주어진 식의 순환소수를 분수로 나타내면

$\frac{234-2}{99}\times m=\frac{4}{9}\times n$

$\frac{m}{n}=\frac{4}{9}\times\frac{99}{232}=\frac{11}{58}$

$\therefore m=11$, $n=58$

$\therefore m-n=11-58=-47$

TIP 두 자연수 m, n에 대하여
$\frac{m}{n}=\frac{a}{b}$(a, b는 서로소인 두 자연수)일 때,
자연수 k에 대하여 $m=ak$, $n=bk$이다.
만약 m, n이 서로소인 경우 $m=a$, $n=b$이다.

3 문제의 뜻에 따라 $\frac{51}{70}\leq\frac{x}{70}\leq\frac{300}{70}$이라 하면

$\frac{x}{70}=\frac{x}{2\times5\times7}$이므로 이 수가 유한소수이려면 x는 7의 배수가 되어야 한다. 따라서 $51\leq x\leq300$에서 7의 배수는 $7\times8=56$, $7\times9=63$, $\cdots$, $7\times42=294$로 35개이지만 정수

를 제외한다고 했으므로 이 중 70의 배수 70, 140, 210, 280의 4개를 제외하면 유한소수가 되는 분수는 31개가 된다. 따라서 소수로 고쳤을 때, 유한소수가 되는 분수의 개수는 31이다.

4

$x=\frac{123}{999}$이고 $999.\dot{9}=1000$이므로

$x\times(999.\dot{9}-1)=\frac{123}{999}\times(1000-1)=123$

5

$$\begin{aligned}1-\frac{1}{1-\frac{1}{1-a}}&=1-\frac{1}{\frac{1-a}{1-a}-\frac{1}{1-a}}=1-\frac{1}{\frac{-a}{1-a}}\\&=1+\frac{1-a}{a}=\frac{a+1-a}{a}\\&=\frac{1}{a}\end{aligned}$$

$a=0.2\dot{9}=0.3=\frac{3}{10}$이므로

$1-\frac{1}{1-\frac{1}{1-a}}=\frac{1}{a}=\frac{10}{3}$

따라서 주어진 방정식은 $\frac{10}{3}=0.\dot{6}\times x$이므로

$\frac{10}{3}=\frac{6}{9}\times x$

$\therefore\ x=\frac{10}{3}\times\frac{9}{6}=5$

6

$0.\dot{a}=\frac{a}{9}$, $0.0\dot{a}=\frac{a}{90}$이므로 주어진 부등식은

$\frac{3}{14}<\frac{a}{9}-\frac{a}{90}<\frac{2}{3}$에서 $\frac{3}{14}<\frac{10a-a}{90}<\frac{2}{3}$이므로

$\frac{3}{14}<\frac{a}{10}<\frac{2}{3}$ $\qquad\therefore\ \frac{15}{7}<a<\frac{20}{3}$

따라서 조건을 만족하는 자연수 a는 3, 4, 5, 6이고, a의 값의 합은 18이다.

TIP 순환소수를 분수로 고치지 않고 계산하기

$0.\dot{a}=0.aaaa\cdots$, $0.0\dot{a}=0.0aaa\cdots$, 이므로

$$\begin{array}{r}0.\dot{a}=0.aaaa\cdots\\-)\ 0.0\dot{a}=0.0aaa\cdots\\\hline 0.\dot{a}-0.0\dot{a}=0.a\end{array}$$

따라서 $0.\dot{a}-0.0\dot{a}=0.a=\frac{a}{10}$가 된다.

7 서술형

표현 단계 $\frac{1}{3}<\frac{15}{x}<\frac{3}{5}$에서

변형 단계 분자를 15로 같게 만들기 위해 $\frac{1}{3}$의 분자, 분모에 각각 15를 곱하고, $\frac{3}{5}$의 분자, 분모에 각각 5를 곱하면 $\frac{1\times15}{3\times15}<\frac{15}{x}<\frac{3\times5}{5\times5}$

풀이 단계 $\frac{15}{45}<\frac{15}{x}<\frac{15}{25}$이므로 $25<x<45$이고 x는 자연수이므로 x의 값은 26, 27, 28, $\cdots$, 44이다.
그런데 $\frac{15}{x}$가 유한소수이므로 x에 26, 27, 28, $\cdots$, 44를 대입한 기약분수 중 분모의 소인수는 2나 5뿐이어야 한다.
즉, $15=3\times5$이므로 $x=2^m\times5^n\times3$ 또는 $x=2^m\times5^n$ (단, m, n은 0 또는 자연수)

확인 단계 따라서 x의 값은 30, 32, 40이고, 이 중 가장 작은 값은 30이다.

8

어떤 자연수를 x라 하면 정답은 $1.\dot{5}x$, 오답은 $1.5x$이고, 그 차가 $0.\dot{3}$이므로 $1.\dot{5}x>1.5x$에서

$1.\dot{5}x-1.5x=0.\dot{3}$

$1.\dot{5}=\frac{15-1}{9}$, $0.\dot{3}=\frac{3}{9}$이므로

$\frac{14}{9}x-\frac{15}{10}x=\frac{3}{9}$

$\frac{140-135}{90}x=\frac{30}{90}$

$5x=30$

$\therefore\ x=6$

따라서 어떤 자연수는 6이다.

9 서술형

변형 단계 $\frac{5}{6}=0.8\dot{3}$, $\frac{29}{225}=0.12\dot{8}$이므로

풀이 단계 $\frac{5}{6}$의 순환마디는 3이고, $\frac{29}{225}$의 순환마디는 8이다.
따라서 $a=3$, $b=8$

확인 단계 $\therefore\ -a^2-ab=-9-24=-33$

10

$(1,\ 2)=0.\dot{1}+0.0\dot{2}=\frac{1}{9}+\frac{2}{90}=\frac{12}{90}$이므로

$12\times A=\frac{12}{90}$에서 $A=\frac{1}{90}$

$\therefore\ A=0.0\dot{1}$

11

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-\frac{1}{1-\frac{1}{x}}}&=\frac{1}{1-\frac{1}{\frac{x-1}{x}}}=\frac{1}{1-\frac{x}{x-1}}\\&=\frac{1}{\frac{x-1}{x-1}-\frac{x}{x-1}}=\frac{1}{\frac{-1}{x-1}}\\&=-x+1\end{aligned}$$

이므로 주어진 방정식은 $-x+1=0.\dot{1}$에서

$-x+1=\frac{1}{9}$

$\therefore\ x=\frac{8}{9}=0.\dot{8}$

12 소현이가 구한 순환소수 $0.58\dot{3}$을 기약분수로 바꾸면

$$0.58\dot{3}=\frac{583-58}{900}=\frac{525}{900}=\frac{7}{12}$$

인데 분모를 잘못 봤으므로 처음 기약분수의 분자는 7이다.
은정이가 구한 순환소수 $0.8\dot{1}$을 기약분수로 바꾸면

$$0.8\dot{1}=\frac{81-8}{90}=\frac{73}{90}$$

인데 분자를 잘못 봤으므로 처음 기약분수의 분모는 90이다.
따라서 처음 기약분수는 $\frac{7}{90}$이므로 순환소수로 나타내면 $0.0\dot{7}$이다.

13 서술형

<u>표현 단계</u> $0.\dot{a}\dot{b}+0.\dot{b}\dot{a}=0.\dot{6}$을 분수로 고치면

<u>변형 단계</u> $\frac{10a+b}{99}+\frac{10b+a}{99}=\frac{6}{9}$에서

$$\frac{(10a+b)+(10b+a)}{99}=\frac{6}{9}$$

$$\frac{11(a+b)}{99}=\frac{6}{9}$$

$\therefore a+b=6$

<u>풀이 단계</u> a, b가 10보다 작은 짝수이고 $a>b>0$이므로

$a=4$, $b=2$

<u>확인 단계</u> 따라서 두 순환소수 $0.\dot{4}\dot{2}$와 $0.\dot{2}\dot{4}$의 차는

$$\frac{42}{99}-\frac{24}{99}=\frac{18}{99}=0.\dot{1}\dot{8}$$

> **TIP** $a+b=6$에서 식의 개수는 1이고 미지수의 개수는 2이므로 주어진 식을 만족하는 a, b의 값은 무수히 많다.
> 하지만 '10보다 작은 짝수 a, b에 대하여 $a>b>0$'이라는 특수한 조건에 의하여 $a+b=6$을 만족하는 a, b의 값이 $a=4$, $b=2$로 유일하게 결정된다.

14 $\frac{2157}{9900}=\frac{abcd-ab}{9900}$이고, a, b가 서로 다른 자연수이므로 $a=2$, $b=1$
즉, $21cd-21=2157$이므로
$21cd=2157+21=2178$
$\therefore c=7$, $d=8$
$\therefore |a-b+c+d|=|2-1+7+8|=16$

> **TIP** $\frac{2157}{9900}=2157\div9900=0.21\dot{7}\dot{8}$과 같이 직접 순환소수로 바꾸어도 된다.

15 $\frac{3}{700}=0.00\dot{4}2857\dot{1}$에서 순환마디의 숫자는 6개이고, 소수 첫째, 둘째 자리의 0은 순환하지 않는다.
100번째 자리의 숫자는 처음 두 자리를 제외한 순환하는 부분만으로 98번째 자리의 숫자이고, $98=6\times16+2$이므로 100번째 자리의 숫자는 순환마디의 2번째 숫자인 2이다.
또, 150번째 자리의 숫자는 순환하는 부분만으로 148번째 자리의 숫자이고, $148=6\times24+4$이므로 150번째 자리의 숫자는 순환마디의 4번째 숫자인 5이다.
$\therefore x=2$, $y=5$
따라서 $0.\dot{y}\dot{x}-0.\dot{x}\dot{y}$의 값을 순환소수로 나타내면

$$0.\dot{5}\dot{2}-0.\dot{2}\dot{5}=\frac{52}{99}-\frac{25}{99}=\frac{27}{99}=0.\dot{2}\dot{7}$$

16 $x=0.5\dot{6}\dot{7}$이므로

$$\begin{aligned}1-x&=1-0.5\dot{6}\dot{7}=1-\frac{567-5}{990}\\&=\frac{990-562}{990}=\frac{428}{990}\\&=0.4\dot{3}\dot{2}\end{aligned}$$

$0.4\dot{3}\dot{2}$에서 순환마디의 숫자가 2개이고, 소수점 아래 11번째 자리의 숫자는 순환하는 부분만으로 10번째 자리의 숫자가 된다.
이때 $10=2\times5$이므로 소수점 아래 11번째 자리의 숫자는 순환마디의 두 번째 숫자인 2이다.

17

$$\begin{aligned}&275\times\frac{1}{10^3}+275\times\frac{1}{10^6}+275\times\frac{1}{10^9}+\cdots\\&=0.275+0.000275+0.000000275+\cdots\\&=0.275275275\cdots\\&=0.\dot{2}7\dot{5}\end{aligned}$$

18 $12x+5=10a$를 풀면

$$x=\frac{5(2a-1)}{12}=\frac{5(2a-1)}{2^2\times3}$$

이때 x가 유한소수가 되려면 $(2a-1)$은 3의 배수이어야 한다.
즉, $2a-1=3$, 3×2, 3×3, 3×4, 3×5, 3×6, $\cdots$
$2a=4$, 7, 10, 13, 16, 19, $\cdots$
따라서 가능한 한 자리의 자연수 a는 2, 5, 8이다.

> **TIP** 자연수 a에 대하여 $2a-1$은 홀수이므로
> $2a-1=3$, 3×2, 3×3, 3×4, 3×5, $\cdots$에서
> $2a-1=3\times2$, 3×4, 3×6, $\cdots$을 만족하는 자연수 a는 존재하지 않는다.

19 $x=\frac{n}{12}=\frac{n}{2^2\times3}$에서 x는 n이 3의 배수이어야 유한소수가 되고, n이 12의 배수가 아니어야 정수가 되지 않는다.
즉, 200 이하의 자연수 중에서 3의 배수는 66개이고, 12의 배수는 16개이므로 x의 값 중 정수가 아닌 유한소수의 개수는 $66-16=50$이다.

20 서술형

<u>표현 단계</u> 주어진 식은 $\{(0.0\dot{9}*0.1)*0.0\dot{1}\}*\frac{1}{90}$이고

<u>변형 단계</u> $0.0\dot{9}=\frac{9}{90}$, $0.1=\frac{1}{10}$, $0.0\dot{1}=\frac{1}{90}$이므로

풀이 단계 (주어진 식)$=\left\{\left(\frac{9}{90}*\frac{1}{10}\right)*\frac{1}{90}\right\}*\frac{1}{90}$

$=\left(1*\frac{1}{90}\right)*\frac{1}{90}\ \left(\because \frac{9}{90}=\frac{1}{10}\right)$

$=0*\frac{1}{90}\ \left(\because 1\neq\frac{1}{90}\right)$

$=0\ \left(\because 0\neq\frac{1}{90}\right)$

확인 단계 따라서 구하는 식의 값은 0이다.

3 STEP 최고 실력 완성하기

19~20쪽

1 ①, ③	2 189	3 240	4 4	5 $0.00\dot{1}$	6 12
7 2	8 24	9 35			

문제 풀이

1 $\frac{x}{120}=\frac{x}{2^3\times3\times5}$가 유한소수가 되려면 x는 3의 배수이고, $10<x<20$을 만족해야 하므로 $x=12,\ 15,\ 18$이다.

또, $\frac{x}{120}=\frac{x}{2^3\times3\times5}$를 기약분수로 고치면 $\frac{1}{y}$이므로

$x=12$일 때, $y=10$

$\therefore\ 2x-y=2\times12-10=24-10=14$

$x=15$일 때, $y=8$

$\therefore\ 2x-y=2\times15-8=30-8=22$

$x=18$일 때, 기약분수로 나타내면 분자가 1일 수 없다.

따라서 $2x-y$의 값은 14 또는 22이다.

2 $\frac{1}{3500}=0.000\dot{2}8571\dot{4}$에서 순환마디의 숫자는 6개이고, 소수점 아래 세 번째 자리까지의 숫자는 순환하지 않는다. 따라서 $45=6\times7+3$이므로 소수점 아래 45번째 자리의 수는 순환마디가 소수점 아래 네 번째 자리부터 7번 반복되었을 때 그 마지막 숫자이다.

$\therefore\ A_1+A_2+A_3+A_4+\cdots+A_{45}$

$=0+0+0+(2+8+5+7+1+4)\times7$

$=27\times7=189$

3 $0.\dot{4}=a\times0.\dot{1}$을 분수로 바꾸면

$\frac{4}{9}=a\times\frac{1}{9}$

$\therefore\ a=4$

$0.\dot{4}\dot{0}=b\times0.\dot{0}\dot{1}$을 분수로 바꾸면

$\frac{40}{99}=b\times\frac{1}{99}$

$\therefore\ b=40$

$0.\dot{4}0\dot{0}=c\times0.\dot{0}0\dot{1}$을 분수로 바꾸면

$\frac{400}{999}=c\times\frac{1}{999}$

$\therefore\ c=400$

$\therefore\ |a\times b-c|=|4\times40-400|=240$

4 $0.y\dot{x}=\frac{5}{6}$에서

$\frac{5}{6}=5\div6=0.8\dot{3}=0.y\dot{x}$이므로

$y=8,\ x=3$

따라서 $0.x\dot{y}=0.3\dot{8}=\frac{38-3}{90}=\frac{35}{90}=\frac{7}{18}=\frac{z}{18}$

이므로 $z=7$

$\therefore\ x+y-z=3+8-7=4$

5 $[5,\ 6,\ 7]=0.5+0.0\dot{6}+0.00\dot{7}$

$=\frac{5}{10}+\frac{6}{90}+\frac{7}{900}$

$=\frac{517}{900}$

$=517\times\frac{1}{900}$

$=517\times0.00\dot{1}$

$\therefore\ A=0.00\dot{1}$

6 주어진 식을 분수로 나타내면

$\left(\frac{a}{90}\right)^2=\frac{2}{9}\times\frac{b}{900}$이므로

$a^2=2b$

$a,\ b$는 $a<b$인 한 자리의 자연수로 이 식을 만족하는 수는 $a=4,\ b=8$뿐이다.

$\therefore\ a+b=12$

7 $x=0.\dot{a}=\frac{a}{9}$이므로

(주어진 식)$=1-\frac{1}{1+\frac{9}{a}}=1-\frac{1}{\frac{a+9}{a}}$

$=1-\frac{a}{a+9}$

$=\frac{9}{a+9}$

또, $0.\dot{8}\dot{1}=\frac{81}{99}=\frac{9}{11}$이므로

$\frac{9}{a+9}=\frac{9}{11}$에서 $a=2$

다른 풀이

$$1-\frac{1}{1+\frac{1}{x}}=1-\frac{1}{\frac{x+1}{x}}$$
$$=1-\frac{x}{x+1}$$
$$=\frac{1}{x+1}$$
$$=\frac{1}{\frac{a}{9}+1}$$
$$=\frac{1}{\frac{a+9}{9}}$$
$$=\frac{9}{a+9}$$

8 $999.\dot{9}=1000$이고 $c=\frac{b}{a\times111}$이므로

$c\times999.\dot{9}-c=c\times1000-c=c\times999$

$=\frac{b}{a\times111}\times999=\frac{3^2\times b}{a}$

또, $\frac{b}{a\times111}$가 기약분수이므로 a, b는 서로소이고

$\frac{3^2\times b}{a}$가 자연수가 되어야 하므로 a는 1이 아닌 3^2의 약수가 되어야 한다. 즉,

$a=3$일 때, $b=2, 4, 5, 7, 8$이고,

$a=9$일 때, $b=2, 4, 5, 7, 8$이다.

이 중 $\frac{3^2\times b}{a}$가 최대이려면 a는 최소, b는 최댓값을 가져야 한다. 즉, $a=3$, $b=8$일 때 최댓값 24를 갖는다.

9 $\frac{x}{y}<1$이고, $\frac{x}{y}$를 소수로 나타내었을 때 소수점 아래 첫 번째 자리와 두 번째 자리의 숫자가 0, 6이므로

$0.06\le\frac{x}{y}<0.07$ …… ㉠

$\therefore \frac{6}{100}y\le x<\frac{7}{100}y$ …… ㉡

$30<y<40$에서 y는 자연수이므로 $31\le y\le39$ …… ㉢

㉡, ㉢에서 $\frac{6}{100}\times31\le x<\frac{7}{100}\times39$

$\frac{186}{100}\le x<\frac{273}{100}$

$\therefore x=2$

㉠에서 $\frac{1}{0.07}<\frac{y}{2}\le\frac{1}{0.06}$,

$\frac{2}{0.07}<y\le\frac{2}{0.06}$이므로

$28.5\cdots<y\le33.3\cdots$ …… ㉣

㉢, ㉣에 의해 $31\le y\le33.3\cdots$

$\frac{x}{y}$가 기약분수라는 조건에 의해 x, y는 서로소이므로

$y=31, 33$

따라서 $x+y$가 최대인 경우는 $x=2$, $y=33$일 때 35이다.

TIP x, y가 자연수임에 유의하여 부등식을 만족하는 x, y의 값을 구한다.

2 단항식의 계산

1 STEP 주제별 실력다지기

22~24쪽

1 (1) $x^{18}y^{12}z^{21}$ (2) $\frac{y^2z}{x^6}$		2 (1) x^6y (2) $\frac{x^9}{y^5}$	3 ①, ③	4 $x=27a^2$	5 D, C, A, B
6 $\frac{4}{13}$	7 $-\frac{13}{14}$	8 8	9 3	10 9	11 20
12 ⑤	13 x	14 $-\frac{8}{25}$	15 -25		

최상위 03 NOTE

지수법칙의 확장

중학교 과정에서는 지수가 자연수인 경우만 다루지만 수학적으로 지수법칙은 지수가 정수인 경우에도 성립한다.

(1) $a^0=1$ $(a\neq0)$

지수법칙을 이용하여 $2^3\div2^3$을 계산하면

$2^3\div2^3=2^{3-3}=2^0$

$2^3\div2^3$의 값을 실제로 계산하면

$2^3\div2^3=\frac{2\times2\times2}{2\times2\times2}=\frac{8}{8}=1$

따라서 $2^0=1$임을 알 수 있다.

하지만 0^0을 계산하려면

$0^0=0^{3-3}=0^3\div0^3=\frac{0\times0\times0}{0\times0\times0}$과 같이 분모가 0이 되는 상황이 발생하므로 0^0은 약속하지 않는다.

따라서 $a^0=1$ $(a\neq0)$이다.

(2) $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$ $(a\neq0$, n은 자연수$)$

2^{-3}의 값을 구하기 위해서 지수법칙을 이용하여

$2^3\times2^{-3}$을 계산하면

$2^3\times2^{-3}=2^{3+(-3)}=2^0=1$이므로 2^{-3}과 2^3은 서로 역수 관계이다.

즉, $2^{-3}=\frac{1}{2^3}$이다.

하지만 0^{-3}을 계산하려면 $\frac{1}{0^3}$이 되어 분모가 0이 되는 상황이 발생하므로 밑이 0일 때, 지수가 음의 정수인 경우는 약속하지 않는다.

따라서 $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$ $(a\neq0$, n은 자연수$)$이다.

1 (1) (주어진 식)$=x^6y^6z^3\times x^{12}y^6z^{18}=x^6x^{12}y^6y^6z^3z^{18}$

$=x^{6+12}y^{6+6}z^{3+18}=x^{18}y^{12}z^{21}$

(2) (주어진 식)$=x^6y^6z^9\div(x^{12}y^4z^8)$

$=\dfrac{y^{6-4}z^{9-8}}{x^{12-6}}$

$=\dfrac{y^2z}{x^6}$

2 (1) (주어진 식)$=x^2y^4\div(x^2y^6)\times(x^6y^3)$

$=(x^2\div x^2\times x^6)(y^4\div y^6\times y^3)$

$=x^{2-2+6}y^{4-6+3}=x^6y$

(2) (주어진 식)$=\dfrac{x^9}{y^3}\times\dfrac{y^6}{x^{12}}\div\dfrac{y^8}{x^{12}}$

$=\dfrac{x^9}{y^3}\times\dfrac{y^6}{x^{12}}\times\dfrac{x^{12}}{y^8}=\dfrac{x^9}{y^5}$

3 ① (좌변)$=(a^5\div a^8)\times a^3=\dfrac{1}{a^3}\times a^3=1$

② (좌변)$=a^4\times a^4\div a^5=a^{4+4-5}=a^3$

③ (좌변)$=a^5\times a^2\times a^2=a^{5+2+2}=a^9$

④ (좌변)$=\left(\dfrac{1}{a^4}\times\dfrac{1}{a^3}\right)\div\dfrac{1}{a^6}=\dfrac{1}{a^7}\times a^6=\dfrac{1}{a}$

⑤ (좌변)$=a^{10}\times a^5\div\dfrac{1}{a^8}=a^{10}\times a^5\times a^8=a^{23}$

따라서 옳은 것은 ①, ③이다.

4 두 조건을 각각 식으로 나타내면

$S=(3a)^{3b}=(3^3a^3)^b=(27a^3)^b$ …… ㉠

$S=a^b\times x^b=(ax)^b$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $(27a^3)^b=(ax)^b$이므로

$27a^3=ax$ $\quad\therefore x=27a^2$

5 A에서 $9^{-2}=\dfrac{1}{9^2}$이므로

$3^3\times9^{-2}=3^3\times\dfrac{1}{9^2}=3^3\times\dfrac{1}{3^4}=\dfrac{1}{3}$

$\therefore A=\dfrac{1}{3}$

B에서 $8^{-2}=\dfrac{1}{8^2}$이므로

$4^2\times8^{-2}\div16=4^2\times\dfrac{1}{8^2}\div16$

$=2^4\times\dfrac{1}{2^6}\div2^4$

$=2^{4-6-4}=2^{-6}$

$=\dfrac{1}{2^6}$

$\therefore B=\dfrac{1}{64}$

C에서 $(0.5)^{-2}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-2}=\dfrac{1}{2^{-2}}=\dfrac{1}{\frac{1}{4}}=4$이고,

$5^{-1}=\dfrac{1}{5}$이므로 $(0.5)^{-2}\times5^{-1}=4\times\dfrac{1}{5}=\dfrac{4}{5}$

$\therefore C=\dfrac{4}{5}$

D에서 $3^{-2}=\dfrac{1}{3^2}$이므로

$3^2\div3^{-2}=3^2\div\dfrac{1}{3^2}=3^2\times3^2=3^4$

$\therefore D=81$

따라서 큰 수부터 나열하면 D, C, A, B이다.

6 $\dfrac{a+b^{-1}}{a^{-1}+b}=\dfrac{a+\frac{1}{b}}{\frac{1}{a}+b}=\dfrac{\frac{ab+1}{b}}{\frac{1+ab}{a}}=\dfrac{a(ab+1)}{b(ab+1)}=\dfrac{a}{b}$

$\dfrac{a}{b}=6$이므로 $a=6b$

$\therefore \dfrac{a-2b}{2a+b}=\dfrac{6b-2b}{12b+b}=\dfrac{4b}{13b}=\dfrac{4}{13}$

> **TIP** 분자, 분모에 같은 수를 곱해도 분수의 값은 변하지 않으므로 다음과 같이 계산할 수도 있다.
>
> $\dfrac{a+b^{-1}}{a^{-1}+b}=\dfrac{a+\frac{1}{b}}{\frac{1}{a}+b}=\dfrac{\left(a+\frac{1}{b}\right)\times ab}{\left(\frac{1}{a}+b\right)\times ab}=\dfrac{a^2b+a}{b+ab^2}=\dfrac{a(ab+1)}{b(ab+1)}=\dfrac{a}{b}$

7 $a^{-2}=3$에서 $\dfrac{1}{a^2}=3$, 즉 $a^2=\dfrac{1}{3}$이므로

$a^4=\dfrac{1}{9}$이 된다.

$\therefore$ (주어진 식)$=\dfrac{a^3-\frac{1}{a^3}}{a^3+\frac{1}{a^3}}=\dfrac{a^4-\frac{1}{a^2}}{a^4+\frac{1}{a^2}}$

$=\dfrac{\frac{1}{9}-3}{\frac{1}{9}+3}=-\dfrac{13}{14}$

8 $\dfrac{1}{27}=\dfrac{1}{3^3}=3^{-3}$이므로 $3^5\div3^x=\dfrac{1}{27}$에서 $3^{5-x}=3^{-3}$

즉, $5-x=-3$ $\quad\therefore x=8$

9 $2^{x+3}+2^x=2^x\times2^3+2^x=(2^3+1)2^x=9\times2^x$

즉, $9\times2^x=72$에서 $2^x=8$, $2^x=2^3$

$\therefore x=3$

10 (좌변)$=(5^3)^n\times\left(\dfrac{4}{5}\right)^6=5^{3n}\times\dfrac{2^{12}}{5^6}=5^{3n-6}\times2^{12}$

(우변)$=(5\times2)^n\times2^{3m}=5^n\times2^n\times2^{3m}=5^n\times2^{n+3m}$

따라서 $5^{3n-6}\times2^{12}=5^n\times2^{n+3m}$이므로 지수를 비교하면

$3n-6=n$ …… ㉠

$12=n+3m$ …… ㉡

㉠에서 $2n=6$ $\therefore n=3$

㉡에서 $12=3+3m$, $3m=9$ $\therefore m=3$

$\therefore m\times n=9$

11 주어진 식에서 좌변의 괄호를 풀면

$\dfrac{b^a y^{2a}}{x^{3a}}=\dfrac{64y^c}{x^{18}}$

계수와 문자의 지수를 각각 비교하면

$3a=18$, $b^a=64=2^6$, $2a=c$

$\therefore a=6$, $b=2$, $c=12$

$\therefore a+b+c=20$

12 $\dfrac{1}{8^n}\times 27^n\div 6^n=\dfrac{1}{(2^3)^n}\times(3^3)^n\div(2\times 3)^n$

$=\dfrac{1}{(2^n)^3}\times(3^n)^3\div(2^n\times 3^n)$

$2^n=A$, $3^n=B$이므로 대입하면

$\dfrac{1}{(2^n)^3}\times(3^n)^3\div(2^n\times 3^n)=\dfrac{1}{A^3}\times B^3\div(AB)$

$=\dfrac{1}{A^3}\times B^3\times\dfrac{1}{AB}=\dfrac{B^2}{A^4}$

13 주어진 식은

$x^4y^6\div\dfrac{y^3}{-8x^3}\div\boxed{}=-8x^6y^3$

$x^4y^6\times\dfrac{-8x^3}{y^3}\times\dfrac{1}{\boxed{}}=-8x^6y^3$

$x^4y^6\times\dfrac{-8x^3}{y^3}=-8x^6y^3\times\boxed{}$

$\boxed{}=x^4y^6\times\dfrac{-8x^3}{y^3}\times\dfrac{1}{-8x^6y^3}$

$\therefore \boxed{}=x$

14 (주어진 식)$=10a^3b^3x\times 49a^4b^8x^2\div(-125a^3b^9x^3)$

$=\dfrac{10\times 49a^7b^{11}x^3}{-125a^3b^9x^3}$

$=-\dfrac{2\times 49}{25}a^4b^2$

$a^2b=\dfrac{2}{7}$에서 $a^4b^2=(a^2b)^2=\left(\dfrac{2}{7}\right)^2$이므로 대입하면

$-\dfrac{2\times 49}{25}\times\left(\dfrac{2}{7}\right)^2=-\dfrac{8}{25}$

15 (주어진 식)$=x^3y^5\div\dfrac{4x^8y^6}{25}\times 6x^4y^2$

$=x^3y^5\times\dfrac{25}{4x^8y^6}\times 6x^4y^2$

$=\dfrac{75y}{2x}$

$x=3$, $y=-2$를 대입하면

$\dfrac{75y}{2x}=\dfrac{75\times(-2)}{2\times 3}=-25$

2 STEP 실력 높이기

25~28쪽

1 14	**2** 14	**3** 144	**4** 64	**5** 3	**6** 22
7 3^{30}, 15^{10}	**8** 0	**9** $-\dfrac{1}{2}$	**10** $\dfrac{9}{32}$	**11** 10	**12** $a=3$, $b=2$
13 약 0.0001	**14** 2730	**15** $\dfrac{24}{5}$	**16** $2^{n+1}3^n$	**17** 6	**18** 19
19 1, 2					

문제 풀이

1 (좌변)$=x^6y^3\div\dfrac{x^6}{y^3}\times x^4\times y^4$

$=x^6y^3\times\dfrac{y^3}{x^6}\times x^4\times y^4$

$=x^4y^{10}$

즉, $x^4y^{10}=x^ay^b$이므로

$a=4$, $b=10$ $\therefore a+b=14$

2 (좌변)$=4^{x+1}(3^{x+2}+3^{x+3})$

$=4^{x+1}(3^{x+2}+3\times 3^{x+2})$

$=4^{x+1}\{(1+3)\times 3^{x+2}\}$

$=4^{x+1}(4\times 3^{x+2})$

$=4^{x+2}\times 3^{x+2}$

$=12^{x+2}$

즉, $12^{x+2}=a^{x+b}$이므로 밑과 지수를 각각 비교하면

$a=12$, $b=2$ $\therefore a+b=14$

3 $8=2^3$, $4=2^2$이므로

$$(\text{주어진 식})=\left\{\frac{(2^3)^4+(2^2)^4}{(2^3)^6+(2^2)^7}\right\}^2=\left(\frac{2^{12}+2^8}{2^{18}+2^{14}}\right)^2$$
$$=\left\{\frac{2^{12}+2^8}{2^6(2^{12}+2^8)}\right\}^2$$
$$=\left(\frac{1}{2^6}\right)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^{12}$$

따라서 $a=2$, $b=12$이므로 $b^a=12^2=144$

4 서술형

표현 단계 $ab=2^{3x}\times 2^{3y}$이므로

변형 단계 $ab=2^{3x+3y}$

$=2^{3(x+y)}$

풀이 단계 $=2^{3\times 2}$ ($\because$ $x+y=2$)

$=2^6=64$

확인 단계 $\therefore$ $ab=64$

5 서술형

변형 단계 $2^{x+2}=2^x\times 4$, $2^{x+1}=2^x\times 2$이므로

$2^{x+2}+2^{x+1}+2^x=2^x\times 4+2^x\times 2+2^x$

$=2^x(4+2+1)$

$=2^x\times 7$

풀이 단계 따라서 $2^{x+2}+2^{x+1}+2^x=56$이므로

$2^x\times 7=56$

$\therefore$ $2^x=8=2^3$

확인 단계 $\therefore$ $x=3$

6 $a\times 10^n$의 꼴로 고치면

$2^{19}\times 5^{22}=2^{19}\times 5^{19}\times 5^3$

$=(2\times 5)^{19}\times 5^3$

$=125\times 10^{19}$

따라서 세 자리 수 125 뒤에 0이 19개 있으므로 $2^{19}\times 5^{22}$은 22자리 자연수이다. $\therefore$ $n=22$

TIP 자연수의 자릿수 구하기

$a.bc\times 10^n$(a, b, c는 한 자리 자연수)은 $(n+1)$자리 수이다.

7 지수가 같은 수는 밑이 클수록 큰 수이므로 주어진 수들의 지수를 모두 10으로 만들면

$2^{40}=(2^4)^{10}=16^{10}$

$3^{30}=(3^3)^{10}=27^{10}$

$5^{20}=(5^2)^{10}=25^{10}$

$15<16<25<27$이므로 $15^{10}<16^{10}<25^{10}<27^{10}$

$\therefore$ $15^{10}<2^{40}<5^{20}<3^{30}$

따라서 가장 큰 수는 3^{30}, 가장 작은 수는 15^{10}이다.

8 (i) n이 짝수이면

$n+2$는 짝수, $n+1$, $n+3$은 홀수이므로

$(\text{주어진 식})=1+(-1)-1-(-1)=0$

(ii) n이 홀수이면

$n+2$는 홀수, $n+1$, $n+3$은 짝수이므로

$(\text{주어진 식})=(-1)+1-(-1)-1=0$

(i), (ii)에서 n이 자연수이면 주어진 식의 값은 항상 0이다.

TIP n이 자연수일 때, n과 $n+1$의 차는 1이므로 n이 홀수이면 $n+1$은 짝수이고, n이 짝수이면 $n+1$은 홀수이다.
따라서 $(-1)^n+(-1)^{n+1}=0$이다.
마찬가지로 생각하면 $(-1)^{n+2}+(-1)^{n+3}=0$이다.

9 서술형

변형 단계 주어진 식을 간단히 정리하면

$$(\text{주어진 식})=\frac{1}{3}x^3y^5\div 4x^2y^4\times\frac{-6}{x^3y^2}$$
$$=\frac{1}{3}x^3y^5\times\frac{1}{4x^2y^4}\times\frac{-6}{x^3y^2}$$
$$=\frac{-1}{2x^2y}$$

풀이 단계 이 식에 $x=\frac{1}{2}$, $y=4$를 대입하면

$$\frac{-1}{2x^2y}=\frac{-1}{2\times\frac{1}{4}\times 4}=-\frac{1}{2}$$

확인 단계 $\therefore$ $\frac{1}{3}x^3y^5\div(2xy^2)^2\times\frac{-6}{x^3y^2}=-\frac{1}{2}$

10 $2x-y=x-3y$에서 $x=-2y$

$$(\text{주어진 식})=\frac{1}{2}xy^2\times 9x^{10}y^2\div 64x^9y^6$$
$$=\frac{1}{2}xy^2\times 9x^{10}y^2\times\frac{1}{64x^9y^6}$$
$$=\frac{xy^2\times 9x^{10}y^2}{2\times 64x^9y^6}$$
$$=\frac{9x^2}{128y^2}$$
$$=\frac{9(-2y)^2}{128y^2}\ (\because\ x=-2y)$$
$$=\frac{9}{32}$$

11 $2^{2^2}=2^4$, $9^x=3^{2x}$, $54^y=(2\times 3^3)^y=2^y\times 3^{3y}$이므로

$2^4\times 3^{2x}=2^y\times 3^{3y}$에서 $y=4$, $2x=3y$

$2x=3\times 4$에서 $x=6$이므로 $x+y=10$

12 216을 소인수분해하여 3의 거듭제곱과 자연수의 곱으로 나타내면 $216=3^3\times 8$이므로

$3^a(3^b-1)=3^3\times 8$

$=3^3\times(9-1)=3^3\times(3^2-1)$

$\therefore$ $a=3$, $b=2$

13 $0.4=\frac{4}{10}=\frac{2^2}{10}$이므로

$0.4^{10}=\left(\frac{2^2}{10}\right)^{10}=\frac{(2^{10})^2}{10^{10}}$

주어진 조건 $2^{10}\fallingdotseq 10^3$에 의해

$\frac{(2^{10})^2}{10^{10}}\fallingdotseq\frac{(10^3)^2}{10^{10}}=\frac{1}{10^4}$

따라서 소수로 나타내면 약 0.0001이다.

14 서술형

표현 단계 주어진 식을 두 개씩 묶어 보면 규칙을 찾을 수 있다.

변형 단계 (주어진 식)

$=(2^{12}-2^{11})+(2^{10}-2^9)+\cdots+(2^2-2)$

$=2^{11}(2-1)+2^9(2-1)+\cdots+2(2-1)$

$=2^{11}+2^9+2^7+2^5+2^3+2$

$=(2^{11}+2^9)+(2^7+2^5)+(2^3+2)$

$=2^9(2^2+1)+2^5(2^2+1)+2(2^2+1)$

$=(2^9+2^5+2)(2^2+1)$

풀이 단계 $=(2^9+2^5+2)\times 5$

$=(2^8+2^4+1)\times 2\times 5$

$=(256+16+1)\times 10=2730$

확인 단계 $\therefore\ 2^{12}-2^{11}+2^{10}-2^9+\cdots+2^2-2=2730$

15 (주어진 식)$=4x^4y^2\div\frac{1}{9}x^2y^6\times\left(-\frac{1}{6}x^2y\right)$

$=4x^4y^2\times\frac{9}{x^2y^6}\times\left(-\frac{1}{6}x^2y\right)$

$=\frac{-6x^4}{y^3}=\frac{-6(x^2)^2}{y^3}$

여기에 $x^2=2$, $y^3=-5$를 대입하면

$\frac{-6(x^2)^2}{y^3}=\frac{-6\times 2^2}{-5}=\frac{24}{5}$

16 $2^{n+1}+2^{n+2}=2^{n+1}+2\times 2^{n+1}$

$=(1+2)\times 2^{n+1}$

$=3\times 2^{n+1}$

$\therefore$ (주어진 식)$=3^{n-1}(3\times 2^{n+1})$

$=3^n\times 2^{n+1}$

$=2^{n+1}3^n$

17 $\{8\}=8$, $\{8^2\}=4$, $\{8^3\}=2$, $\{8^4\}=6$, $\{8^5\}=8$, $\cdots$이므로 n이 1, 2, 3, 4, 5, $\cdots$일 때, $\{8^n\}$은 8, 4, 2, 6이 반복된다.
$\{8^{10}\}=\{8^{4\times 2+2}\}$은 8, 4, 2, 6이 두 번 반복된 후 2번째 수이므로 4이고, $\{8^{31}\}=\{8^{4\times 7+3}\}$은 8, 4, 2, 6이 일곱 번 반복된 후 3번째 수이므로 2이다.
따라서 $8^{10}+8^{31}$의 일의 자리의 숫자는 $4+2=6$이다.
$\therefore\ \{8^{10}+8^{31}\}=6$

18 주어진 식에서 좌변을 간단히 하면

(좌변)$=(-2)^2x^2y^4z^2\div\frac{(-2)^5x^{10}y^5z^{15}}{(-2)^3y^3z^{12}}\times\frac{1}{(-2)^2x^6y^4}$

$=(-2)^2x^2y^4z^2\div(-2)^2x^{10}y^2z^3\times\frac{1}{(-2)^2x^6y^4}$

$=(-2)^2x^2y^4z^2\times\frac{1}{(-2)^2x^{10}y^2z^3}\times\frac{1}{(-2)^2x^6y^4}$

$=\frac{1}{(-2)^2x^{14}y^2z}$

따라서 $\frac{1}{(-2)^2x^{14}y^2z}=\frac{1}{(-2)^ax^by^cz^d}$에서

$a=2$, $b=14$, $c=2$, $d=1$이므로

$a+b+c+d=19$

19 (i) 밑이 x로 같으므로 지수가 같으면 등호는 성립한다.

$x+2=2x\qquad\therefore\ x=2$

(ii) 1의 거듭제곱은 항상 1이다.

즉, $x=1$일 때, $1^3=1^2$

따라서 주어진 식을 만족하는 x의 값은 1, 2이다.

3 STEP 최고 실력 완성하기

1 1	**2** 327	**3** $\dfrac{a^3b^6}{46656}$	**4** 9	**5** 1	**6** 1
7 20	**8** 18				

문제 풀이

1 자연수 n이 짝수일 때와 홀수일 때로 나누어 계산한다.

(i) n이 짝수일 때

$n+1$은 홀수, $n+2$는 짝수, $n+3$은 홀수이므로

(주어진 식)

$=x^n\times(-1)\times x^{n+2}-1\times(-1)-x^n\times x^{n+2}\times(-1)$

$=-x^n\times x^{n+2}+1+x^n\times x^{n+2}$

$=1$

(ii) n이 홀수일 때

$n+1$은 짝수, $n+2$는 홀수, $n+3$은 짝수이므로

(주어진 식)

$=(-x^n)\times 1\times(-x^{n+2})-(-1)\times 1-x^n\times x^{n+2}\times 1$

$=x^n\times x^{n+2}+1-x^n\times x^{n+2}$

$=1$

(i), (ii)에서 자연수 n에 대하여 주어진 식의 값은 항상 1이다.

2 $[27]=[3^3]=3 \qquad \therefore x=3$

$[y]=5$에서 $y=3^5 \qquad \therefore y=243$

$[729]=[3^6]=6$이므로 $[9]+[z]=[729]$에서

$2+[z]=6,\ [z]=4$

$\therefore z=3^4=81$

$\therefore x+y+z=3+243+81=327$

3 $a=3^{x+2}$에서 $a=3^x\times 3^2 \qquad \therefore 3^x=\dfrac{a}{9}$ …… ㉠

$b=2^{x+1}$에서 $b=2^x\times 2^1 \qquad \therefore 2^x=\dfrac{b}{2}$ …… ㉡

$\therefore 12^{3x}=(2^2\times 3)^{3x}$

$=2^{6x}\times 3^{3x}$

$=(2^x)^6\times(3^x)^3$

㉠, ㉡을 대입하면

$(2^x)^6\times(3^x)^3=\left(\dfrac{b}{2}\right)^6\times\left(\dfrac{a}{9}\right)^3$

$=\dfrac{b^6}{2^6}\times\dfrac{a^3}{3^6}$

$=\dfrac{a^3b^6}{(2\times 3)^6}=\dfrac{a^3b^6}{6^6}$

$=\dfrac{a^3b^6}{46656}$

4 우변의 계수의 부호가 양(+)이므로 a는 짝수이어야 한다.

이때 $1\le a\le 3$이므로 $a=2$

$\therefore$ (좌변)$=\left(-\dfrac{x^3}{y}\right)^2\times\left(\dfrac{y^2}{x^b}\right)^3\div\left(-\dfrac{x^2}{2y}\right)^2$

$=\dfrac{x^6}{y^2}\times\dfrac{y^6}{x^{3b}}\div\dfrac{x^4}{4y^2}$

$=\dfrac{x^6}{y^2}\times\dfrac{y^6}{x^{3b}}\times\dfrac{4y^2}{x^4}$

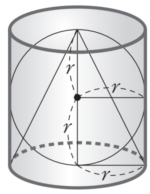
$=\dfrac{4y^6}{x^{3b-2}}$

$\dfrac{4y^6}{x^{3b-2}}=\dfrac{4y^c}{x}$이므로 계수와 각 문자의 지수를 각각 비교하면 $c=6$

$3b-2=1$에서 $b=1$

$\therefore a+b+c=2+1+6=9$

5 구의 반지름의 길이를 r라 하면 원기둥의 밑면의 반지름의 길이는 r, 높이는 $2r$이므로



$V_1=\pi r^2\times 2r$

$=2\pi r^3$

$V_2=\dfrac{4}{3}\pi r^3$

$V_3=\dfrac{1}{3}\times\pi r^2\times 2r$

$=\dfrac{2}{3}\pi r^3$

$\therefore \dfrac{V_1}{V_2+V_3}=\dfrac{2\pi r^3}{\dfrac{4}{3}\pi r^3+\dfrac{2}{3}\pi r^3}=1$

> **TIP 원뿔과 원기둥의 부피**
> 원뿔과 원기둥에 대하여 밑면인 원의 반지름의 길이가 r, 높이가 h일 때, 원뿔과 원기둥의 부피는 각각 $\frac{1}{3}\pi r^2h$, πr^2h이다.

6 주어진 조건 $x^ay^b=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{a-b}$, $x^by^a=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{b-a}$을 각 변끼리 곱하면

$x^ay^b\times x^by^a=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{a-b}\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^{b-a}$

$x^{a+b}y^{a+b}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\{(a-b)+(b-a)\}}$

$(xy)^{a+b}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^0$

이때 $\left(\dfrac{1}{2}\right)^0=1$이므로 $(xy)^{a+b}=1$

a, b는 자연수이므로 $a+b\neq 0$

따라서 $(xy)^{a+b}=1$을 만족하는 xy는 1이다.

7 $(\text{좌변})=\dfrac{(-3^2)^7}{(-3)^n\times(-3)}=\dfrac{-3^{14}}{-(-3)^n\times 3}=\dfrac{3^{13}}{(-3)^n}$

$(\text{우변})=-(-3)^m\times\dfrac{1}{(-3)^5}\times\dfrac{1}{(-3)^3}=-\dfrac{(-3)^m}{3^8}$

$\dfrac{3^{13}}{(-3)^n}=-\dfrac{(-3)^m}{3^8}$에서

$(-3)^m\times(-3)^n=-3^{13}\times 3^8$

$(-3)^{m+n}=-3^{21}$

$(-3)^{m+n}=(-3)^{21}$

$\therefore\ m+n=21$

따라서 순서쌍 $(m,\ n)$은

$(1,\ 20),\ (2,\ 19),\ \cdots,\ (20,\ 1)$

이므로 순서쌍 $(m,\ n)$의 개수는 20이다.

8 주어진 정리에 의해

$2^a+2^b\le 1+2^{a+b}$ (단, 등호는 $a=0$ 또는 $b=0$일 때 성립)

양변에 2^c을 더하면

$2^a+2^b+2^c\le 1+(2^{a+b}+2^c)$ ⋯⋯ ㉠

㉠의 괄호 ( ) 안에 있는 부분을 주어진 정리에 의해 정리하면

$2^{a+b}+2^c\le 1+2^{a+b+c}$

(단, 등호는 $a+b=0$ 또는 $c=0$일 때 성립)

이고, 양변에 1을 더하면

$1+2^{a+b}+2^c\le 1+1+2^{a+b+c}$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡에 의해

$2^a+2^b+2^c\le 1+2^{a+b}+2^c\le(1+1)+2^{a+b+c}$

즉, $2^a+2^b+2^c\le 2+2^{a+b+c}$

$2^a+2^b+2^c\le 2+2^4$ ($\because\ a+b+c=4$)

$\therefore\ 2^a+2^b+2^c\le 18$

(단, 등호는 $a=0,\ b=0,\ c=4$ 또는 $a=0,\ b=4,\ c=0$ 또는 $a=4,\ b=0,\ c=0$일 때 성립)

따라서 $2^a+2^b+2^c$의 최댓값은 18이다.

참고

$2^a+2^b+2^c\le 18$에서

등호는 $a=0$ 또는 $b=0$일 때,

$a+b=0$ 또는 $c=0$일 때 성립하므로

(i) $a=0,\ a+b=0$일 때

$a=0,\ b=0,\ c=4$ ($\because\ a+b+c=4$)

(ii) $a=0,\ c=0$일 때

$a=0,\ b=4,\ c=0$ ($\because\ a+b+c=4$)

(iii) $b=0,\ a+b=0$일 때

$a=0,\ b=0,\ c=4$ ($\because\ a+b+c=4$)

(iv) $b=0,\ c=0$일 때

$a=4,\ b=0,\ c=0$ ($\because\ a+b+c=4$)

(i)~(iv)에서 등호는 $a=0,\ b=0,\ c=4$ 또는 $a=0,\ b=4,\ c=0$ 또는 $a=4,\ b=0,\ c=0$일 때 성립한다.

3 다항식의 계산

1 STEP 주제별 실력다지기

32~34쪽

1 $-3x+3y$ 2 $x^2+10x+6$ 3 ① 4 $12x^3y^4$ 5 $12x^2y$ 6 $\frac{4}{3}ac+bc$

7 $-6y$ 8 $9x+6$ 9 $9x^2-10x-12$ 10 $2x+y$ 11 $a=15,\ b=31,\ c=-39$

12 $\frac{12}{25}$ 13 $\frac{26}{29}$

최상위 NOTE 04 다항식의 덧셈과 뺄셈

다음과 같이 다항식에서 문자와 차수가 같은 항을 동류항이라 한다.

항	$\frac{1}{2}x^3$	$-x^2y$	$\frac{3}{2}x^3y^2$
문자	x	$x,\ y$	$x,\ y$
차수	3	x에 대해 2차 y에 대해 1차	x에 대해 3차 y에 대해 2차
동류항의 예	$2x^3,\ -x^3$	$\frac{1}{2}x^2y,\ -2x^2y$	$x^3y^2,\ -3x^3y^2$

다항식의 덧셈 또는 뺄셈을 할 때에는 동류항끼리만 계산이 가능하다.

예를 들어

$$3x^2y-2x^2y=(x^2y+x^2y+x^2y)-(x^2y+x^2y)$$
$$=x^2y+x^2y+x^2y-x^2y-x^2y$$
$$=x^2y$$

즉, $3x^2y-2x^2y=(3-2)x^2y$이므로

동류항끼리는 계수를 더하거나 뺀 후 문자를 곱하여 하나의 항으로 계산할 수 있다.

1 (주어진 식) $=x-\{2x-(y-x)-(x-2x+2y)\}$
$=x-\{2x-y+x-(x-2x+2y)\}$
$=x-(2x-y+x-x+2x-2y)$
$=x-(4x-3y)$
$=x-4x+3y$
$=-3x+3y$

2 주어진 조건에서
$A+(x^2-2x-3)=4x^2+5x+2$이므로
$A=4x^2+5x+2-(x^2-2x-3)$
$=3x^2+7x+5$
$B-(x^2-2x-3)=x^2-x+2$이므로
$B=x^2-x+2+(x^2-2x-3)$
$=2x^2-3x-1$
$\therefore\ A-B=3x^2+7x+5-(2x^2-3x-1)$
$=x^2+10x+6$

3 두 다항식을 더하면
$(-2x^2+5xy-3y^2)+(3x^2-4xy+2y^2)=x^2+xy-y^2$
$x^2+xy-y^2=px^2-qxy+ry^2$이므로
$p=1,\ q=-1,\ r=-1$
$\therefore\ pr-q^2=1\times(-1)-(-1)^2$
$=-2$

TIP 두 다항식의 합을 정리하고 계수를 비교하여 p, q, r의 값을 구한다.

4 (좌변) $=\dfrac{-4x^2y^5+A-8x^3y^4}{4x^2y^4}$
$=-y+\dfrac{A}{4x^2y^4}-2x$
$-y+\dfrac{A}{4x^2y^4}-2x=x-y$에서
$\dfrac{A}{4x^2y^4}=3x$
$A=3x\times4x^2y^4$
$\therefore\ A=12x^3y^4$

5 (주어진 식)
$=8x^2y+6xy^2-\dfrac{12x^3y-9x^2y^2}{3x}+\dfrac{2}{3}x^2y\times12-\dfrac{3}{4}xy^2\times12$
$=8x^2y+6xy^2-(4x^2y-3xy^2)+(8x^2y-9xy^2)$
$=8x^2y+6xy^2-4x^2y+3xy^2+8x^2y-9xy^2$
$=12x^2y$

6 (주어진 식)
$=\left(\dfrac{4}{9}a^2bc-\dfrac{3}{9}ab^2c\right)\div\dfrac{15}{90}ab-2abc\left(-\dfrac{3}{2a}+\dfrac{2}{3b}\right)$
$=\left(\dfrac{4}{9}a^2bc-\dfrac{1}{3}ab^2c\right)\times\dfrac{6}{ab}-2abc\left(-\dfrac{3}{2a}+\dfrac{2}{3b}\right)$
$=\dfrac{4}{9}a^2bc\times\dfrac{6}{ab}-\dfrac{1}{3}ab^2c\times\dfrac{6}{ab}$
$+(-2abc)\times\left(-\dfrac{3}{2a}\right)+(-2abc)\times\dfrac{2}{3b}$
$=\dfrac{8}{3}ac-2bc+3bc-\dfrac{4}{3}ac$
$=\dfrac{4}{3}ac+bc$

7 (주어진 식) $=B-2A+6C-6C+B+2A$
$=2B$
$=2\times(-3y)$
$=-6y$

8 $6A-3B=6(2x^2+x)-3(4x^2-x-2)$
$=12x^2+6x-12x^2+3x+6$
$=9x+6$

9 B와 C를 간단히 하면
$B=\dfrac{9x^3-6x^2-3x}{-3x}$
$=-3x^2+2x+1$
$C=x^6y^6\div x^6y^6=1$
(주어진 식) $=A-\{B-(2A-B-C)\}$
$=A-(B-2A+B+C)$
$=A-(-2A+2B+C)$
$=A+2A-2B-C$
$=3A-2B-C$
$=3(x^2-2x-3)-2(-3x^2+2x+1)-1$
$=3x^2-6x-9+6x^2-4x-2-1$
$=9x^2-10x-12$

10 A를 간단히 하면
$A=\dfrac{12x^5y^4-8x^4y^5}{4x^2y^4}=3x^3-2x^2y$이고,
$B=x^3-2x^2y+x-2y$이므로
$A-B=3x^3-2x^2y-(x^3-2x^2y+x-2y)$
$=2x^3-x+2y$
$A-(B-2C)=2x^3+3x+4y$에서
$(A-B)+2C=2x^3+3x+4y$
$2C=2x^3+3x+4y-(A-B)$
$=2x^3+3x+4y-(2x^3-x+2y)$
$=4x+2y$
$\therefore\ C=2x+y$

11 (주어진 식)$=3A+\{3B-5(B+2A-2C)\}$

$=3A+(3B-5B-10A+10C)$

$=-7A-2B+10C$

$=-7(-x^2-x-1)-2(x^2-2x+3)+10(x^2+2x-4)$

$=15x^2+31x-39$

$\therefore a=15,\ b=31,\ c=-39$

12 $a:b=3:4$이므로 $a=3k,\ b=4k$ (단, $k\neq0$)라 하고 주어진 식에 대입하면

$$\frac{ab}{a^2+b^2}=\frac{3k\times4k}{(3k)^2+(4k)^2}=\frac{12k^2}{9k^2+16k^2}=\frac{12k^2}{25k^2}=\frac{12}{25}$$

13 $a:b:c=2:3:4$이므로

$a=2k,\ b=3k,\ c=4k$ (단, $k\neq0$)라 하고 주어진 식에 대입하면

$$\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}=\frac{6k^2+12k^2+8k^2}{4k^2+9k^2+16k^2}=\frac{26k^2}{29k^2}=\frac{26}{29}$$

2 STEP 실력 높이기

35~37쪽

1 11	**2** $-2x^2+5x-1$	**3** $16x^2+2x-14$	**4** $-4x^2+4xy$	**5** $-x^6$	**6** -10
7 $6x^2+5x-11$	**8** ③	**9** $\frac{29}{2}$	**10** 17	**11** $-\frac{14}{13}$	**12** $1:1$
13 ②	**14** ①				

문제 풀이

1 $3x(Bx+5)+A(Bx+5)$

$=3Bx^2+(15+AB)x+5A$

$=6x^2+Cx-10$

따라서 각 항의 계수를 비교하면

$3B=6,\ 15+AB=C,\ 5A=-10$이므로

$A=-2,\ B=2,\ C=11$

$\therefore A+B+C=-2+2+11=11$

2 서술형

변형 단계 소괄호, 중괄호, 대괄호 순으로 괄호를 풀어 전개하면

(주어진 식)$=x-\{x^2-2x-(x-x^2+x-1)\}$

$=x-\{x^2-2x-(-x^2+2x-1)\}$

$=x-(x^2-2x+x^2-2x+1)$

$=x-(2x^2-4x+1)$

$=x-2x^2+4x-1$

$=-2x^2+5x-1$

확인 단계 따라서 주어진 식을 간단히 하면 $-2x^2+5x-1$이다.

3 $A=2x^2+x-2x-1=2x^2-x-1$

$B=\frac{8x^3+2x^2-6x}{-2x}=-4x^2-x+3$

$C=8x^{12}y^6\div4x^{10}y^6=\frac{8x^{12}y^6}{4x^{10}y^6}=2x^2$

$\therefore$ (주어진 식)$=A-\{2B-(A-2B-2C)\}$

$=A-(2B-A+2B+2C)$

$=A-(4B-A+2C)$

$=A-4B+A-2C$

$=2A-4B-2C$

$=2(2x^2-x-1)-4(-4x^2-x+3)-2\times2x^2$

$=16x^2+2x-14$

4 $A=(8x^3y^4-16x^3y^5-4x^2y^5)\times\frac{1}{4x^2y^4}=2x-4xy-y$

$B=2x(1-2x+y)-y(1-2x+y)$

$=2x-4x^2+2xy-y+2xy-y^2$

$=2x-y-4x^2+4xy-y^2$

$\therefore B-A=2x-y-4x^2+4xy-y^2-(2x-4xy-y)$

$=-4x^2+8xy-y^2$

$B-(A+C)=4xy-y^2$에서

$C=B-A-(4xy-y^2)$

$=-4x^2+8xy-y^2-4xy+y^2$

$=-4x^2+4xy$

5 주어진 식을 정리하면

$A-8x^4=(2x^4+B)\times 2x^3$

$A-8x^4=4x^7+2x^3B$

$A-2x^3B=4x^7+8x^4$

이때 A, B는 모두 단항식이므로

$A=4x^7$, $-2x^3B=8x^4$ 또는 $A=8x^4$, $-2x^3B=4x^7$

(i) $A=4x^7$, $-2x^3B=8x^4$일 때

$-2x^3B=8x^4$에서 $B=-4x$

(ii) $A=8x^4$, $-2x^3B=4x^7$일 때

$-2x^3B=4x^7$에서 $B=-2x^4$

(i), (ii)에서 A의 차수가 B의 차수보다 커야 하므로

$A=4x^7$, $B=-4x$

$\therefore \dfrac{A}{B}=\dfrac{4x^7}{-4x}=-x^6$

6 서술형

변형 단계 소괄호, 중괄호, 대괄호 순으로 괄호를 풀어 전개하면

(주어진 식)

$=2x+y-\{2x+y-2z-(3x-x-y)\}$

$=2x+y-\{2x+y-2z-(2x-y)\}$

$=2x+y-(2x+y-2z-2x+y)$

$=2x+y-(2y-2z)$

$=2x+y-2y+2z$

$=2x-y+2z$

풀이 단계 이 식에 $x=-1$, $y=2$, $z=-3$을 각각 대입하면

$2x-y+2z=2\times(-1)-2+2\times(-3)$

$=-2-2-6$

$=-10$

확인 단계 따라서 주어진 식의 값은 -10이다.

7 서술형

표현 단계 어떤 다항식을 S라 하고 식을 세우면

$S+(-x^2-2x+4)=4x^2+x-3$이므로

변형 단계 $S=4x^2+x-3-(-x^2-2x+4)$

$=4x^2+x-3+x^2+2x-4$

$=5x^2+3x-7$

풀이 단계 따라서 바르게 계산하면

$5x^2+3x-7-(-x^2-2x+4)$

$=5x^2+3x-7+x^2+2x-4$

$=6x^2+5x-11$

확인 단계 따라서 바르게 계산하였을 때의 답은 $6x^2+5x-11$이다.

8 $147a+441(a-3)=147\{a+3(a-3)\}$

$=147(4a-9)$ …… ㉠

147을 소인수분해하면 $147=3\times 7^2$이므로 ㉠이 어떤 수 b의 제곱이 되고 b가 최소일 경우는 $4a-9=3$일 때이다.

$\therefore a=3$

이때 $147(4a-9)=3^2\times 7^2=(3\times 7)^2=21^2$

따라서 a, b의 최솟값은 각각 3, 21이므로 그 합은 24이다.

> **TIP** 어떤 수가 완전제곱수가 되려면 소인수분해했을 때 지수가 모두 짝수이어야 한다.

9 $a:b:c=1:2:3$이므로

$a=k$, $b=2k$, $c=3k$ (단, $k\neq 0$)라 하고 주어진 식에 대입하면

$$(\text{주어진 식})=\left(\frac{8a^2bc}{3}-\frac{abc^2}{3}+\frac{4b^2c^2}{3}\right)\times\frac{3}{ab^2c}$$

$$=\frac{8a}{b}-\frac{c}{b}+\frac{4c}{a}$$

$$=\frac{8k}{2k}-\frac{3k}{2k}+\frac{12k}{k}$$

$$=\frac{29}{2}$$

10 $a:b=3:4$, $b:c=3:5$이므로

$a:b:c=9:12:20$

$a=9k$, $b=12k$, $c=20k$ (단, $k\neq 0$)라 하고 주어진 식에 대입하면

$$\frac{a-b+c}{a+b-c}=\frac{9k-12k+20k}{9k+12k-20k}=\frac{17k}{k}=17$$

> **TIP** 두 수의 비를 알 때, 세 수의 비 구하기
> $a:b=p:q$, $b:c=r:s$인 경우 q와 r의 최소공배수를 이용하여
> $a:b:c$를 구하면 된다.
> 만약 q와 r가 서로소인 경우 두 수의 최소공배수는 qr이므로
> $a:b:c=pr:qr:qs$이다.

11 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{9}$에서 $\dfrac{a+b}{ab}=\dfrac{1}{9}$ $\quad\therefore ab=9(a+b)$

$$\therefore \frac{a+3ab+b}{a-3ab+b}=\frac{a+b+3ab}{a+b-3ab}$$

$$=\frac{(a+b)+27(a+b)}{(a+b)-27(a+b)}=-\frac{14}{13}$$

12 $x:y:z=a:b:c$이므로 $x=ak$, $y=bk$, $z=ck$ (단, $k\neq 0$)라 하고 주어진 식에 대입하면

$$\frac{x^3}{a^2}+\frac{y^3}{b^2}+\frac{z^3}{c^2}=\frac{(ak)^3}{a^2}+\frac{(bk)^3}{b^2}+\frac{(ck)^3}{c^2}$$

$$=(a+b+c)k^3$$

$$\frac{(x+y+z)^3}{(a+b+c)^2}=\frac{(ak+bk+ck)^3}{(a+b+c)^2}$$

$$=\frac{\{k(a+b+c)\}^3}{(a+b+c)^2}$$

$$=\frac{(a+b+c)^3k^3}{(a+b+c)^2}=(a+b+c)k^3$$

$\therefore \left(\frac{x^3}{a^2}+\frac{y^3}{b^2}+\frac{z^3}{c^2}\right) : \frac{(x+y+z)^3}{(a+b+c)^2}$

$=(a+b+c)k^3 : (a+b+c)k^3=1 : 1$

13 세 수를 x, y, z라 하면 조건에서

$x+y=a$, $y+z=b$, $z+x=c$

위의 세 식을 변끼리 더하면

$2(x+y+z)=a+b+c$

$\therefore x+y+z=\frac{a+b+c}{2}$

한편, 조건에서 $xyz=1$이므로 두 개씩 곱한 수들의 역수의 합은

$\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}=\frac{x+y+z}{xyz}$

$=\frac{a+b+c}{2}$

14 두 점 P, Q의 속력이 각각 매초 3 cm, 2 cm이므로 t초 후에 $\overline{\text{BP}}=3t$ cm, $\overline{\text{CQ}}=2t$ cm이다.

$\therefore \overline{\text{PC}}=\overline{\text{BC}}-\overline{\text{BP}}=(6-3t)$ cm

$\overline{\text{AQ}}=\overline{\text{AC}}-\overline{\text{CQ}}=(6-2t)$ cm

$\overline{\text{BP}} : \overline{\text{BC}}=\overline{\text{AQ}} : \overline{\text{AC}}$에서

$3t : 6=(6-2t) : 6$

$36-12t=18t$

$30t=36$

$\therefore t=1.2$(초)

3 STEP 최고 실력 완성하기

38쪽

1 $-\frac{2}{3}$ **2** $\frac{10}{3}$ **3** $\frac{19}{3}$ **4** ③ **5** 남자 9 : 16, 여자 1 : 2

문제 풀이

1 (주어진 식)$=\frac{30b-3(2a-3b)+5(2a-5b)}{15}$

$=\frac{4a+14b}{15}=\frac{2(2a+7b)}{15}$

$=\frac{2\times(-5)}{15}=-\frac{2}{3}$

2 $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=6$에서 $\frac{b-a}{ab}=6$

$b-a=6ab \quad \therefore a-b=-6ab$

$\therefore \frac{3a-3b-2ab}{a-b}=\frac{3(a-b)-2ab}{a-b}$

$=\frac{-18ab-2ab}{-6ab}=\frac{-20ab}{-6ab}$

$=\frac{10}{3}$

3 $\frac{b}{a}=\frac{1}{2}$, $\frac{c}{b}=\frac{3}{2}$이므로 $\frac{b}{a}\times\frac{c}{b}=\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}$

$\frac{c}{a}=\frac{3}{4} \quad \therefore \frac{a}{c}=\frac{4}{3}$

$\therefore$ (주어진 식)$=\frac{a^2b+abc}{abc}+\frac{b^2c+abc}{abc}+\frac{c^2a+abc}{abc}$

$=\frac{a}{c}+1+\frac{b}{a}+1+\frac{c}{b}+1$

$=\left(\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}\right)+3$

$=\left(\frac{4}{3}+\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\right)+3$

$=\frac{19}{3}$

TIP 세 수의 비를 이용하여 식의 값 구하기

$a : b=2 : 1$, $b : c=2 : 3$에서 $a : b : c=4 : 2 : 3$이므로

$a=4k$, $b=2k$, $c=3k$ (단, $k\neq0$)를 이용하여 식의 값을 구할 수도 있다.

4 x, y의 최대공약수를 G, 최소공배수를 L이라 하면 $x=aG$, $y=bG$, $L=abG$ (단, a와 b는 서로소인 자연수)로 놓을 수 있다.

최소공배수가 60이므로

$abG=60$ …… ㉠

또, $2x-3y=24$에 $x=aG$, $y=bG$를 대입하면

$2aG-3bG=24$ …… ㉡

각 변끼리 $\frac{㉡}{㉠}$을 계산하면

$\frac{2aG-3bG}{abG}=\frac{24}{60}$에서 $\frac{2a-3b}{ab}=\frac{2}{5}$

$5(2a-3b)=2ab$, $10a-15b=2ab$

$10a-2ab=15b$, $2a(5-b)=15b$

a, b는 자연수이므로

$b>0$, $5-b>0 \quad \therefore 1\leq b\leq 4$

b	1	2	3	4
a	$\frac{15}{8}$	5	$\frac{45}{4}$	30

위의 표에서 서로소인 자연수는

$a=5$, $b=2$

따라서 ㉠에서 $G=6$

$x=aG=30$, $y=bG=12$이므로 $x-y=18$

5

	남자 수(명)	여자 수(명)
동부 지역	$9a$	$10a$
서부 지역	$4b$	$5b$
도시 전체	$9a+4b$	$10a+5b$

전체 도시에서 남녀의 비가 5 : 6이므로

$(9a+4b):(10a+5b)=5:6$

$50a+25b=54a+24b$

$\therefore b=4a$

즉, 동부, 서부 지역에 거주하는 남녀의 인원 수는 아래의 표와 같으므로 남녀 각각에 대하여 동부, 서부 지역에 거주하는 인원의 비를 구하면

	남자 수(명)	여자 수(명)
동부 지역	$9a$	$10a$
서부 지역	$4b=16a$	$5b=20a$

남자 ⇨ $9a:16a=9:16$

여자 ⇨ $10a:20a=1:2$

I 단원 종합 문제

39~42쪽

1 ②	**2** ④, ⑤	**3** 5개	**4** -2	**5** 32	**6** 7
7 ③	**8** $-\frac{1}{2}$	**9** 2	**10** 10	**11** ④, ⑤	**12** $0.\dot{7}1428\dot{5}$
13 87	**14** 0	**15** ④	**16** $-6xy+1$ 또는 $4x^2+3y$		**17** $a=3$, $b=4$, $c=6$
18 104	**19** $0.\dot{1}\dot{8}$	**20** $54°$	**21** 4	**22** 1800	**23** $3.\dot{8}$
24 6	**25** $\frac{3}{2}$	**26** 21	**27** -3	**28** 7	**29** $a=7$, $b=5$
30 0	**31** $2ab-b^2$				

문제 풀이

1 ① (좌변)$=(-a^2b)\times 3ab^3$

$$=-3(a^2\times a)(b\times b^3)$$

$$=-3a^3b^4$$

$\therefore (-a^2b)\times 3ab^3=-3a^3b^4$

② (좌변)$=(2x^3y)^2\div(-2x^2)$

$$=4x^6y^2\times\frac{1}{-2x^2}$$

$$=-2x^4y^2$$

$\therefore (2x^3y)^2\div(-2x^2)\neq x^4y^2$

③ (좌변)$=\frac{6a^2b^4}{ab^2}\div\frac{3b}{a}$

$$=6ab^2\times\frac{a}{3b}$$

$$=2a^2b$$

$\therefore \frac{6a^2b^4}{ab^2}\div\frac{3b}{a}=2a^2b$

④ (좌변)$=\frac{8}{3}x^2y\div(2x)^2$

$$=\frac{8}{3}x^2y\div 4x^2$$

$$=\frac{8}{3}x^2y\times\frac{1}{4x^2}$$

$$=\frac{2}{3}y$$

$\therefore \frac{8}{3}x^2y\div(2x)^2=\frac{2}{3}y$

⑤ (좌변)$=5a^3\times\frac{1}{2}a$

$$=\left(5\times\frac{1}{2}\right)\times(a^3\times a)$$

$$=\frac{5}{2}a^4$$

$\therefore 5a^3\times\frac{1}{2}a=\frac{5}{2}a^4$

2 ① $\frac{1}{3}=0.\dot{3}$과 같이 유리수이지만 무한소수인 경우도 있다.

② 무한소수 중 순환소수는 유리수이지만 순환하지 않는 무한소수는 유리수가 아니다.

③ 유한소수는 모두 유리수이다.

3 x는 유리수이다.

- 유리수
  - 정수
    - 양의 정수
    - 0
    - 음의 정수
  - 정수가 아닌 유리수
    - 유한소수
    - 순환소수

ㄱ. $2.0\dot{1}$은 순환소수이므로 유리수이다.

ㄴ. $-\frac{3}{7}$은 분수이므로 유리수이다.

ㄷ. -0.06은 유한소수이므로 유리수이다.

ㄹ, ㅁ, ㅂ. 순환하지 않는 무한소수이므로 유리수가 아니다.

ㅅ. 0은 정수이므로 유리수이다.

ㅇ. 3.14는 유한소수이므로 유리수이다.

따라서 보기 중 유리수인 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㅅ, ㅇ의 5개이다.

4 주어진 분수가 유한소수이므로 분모의 7이 약분되어야 한다. 이때 a는 가장 작은 두 자리의 자연수이므로

$a=14$

분모를 10의 거듭제곱으로 나타내면

$$\frac{3\times a}{2\times 5^2\times 7}=\frac{3\times 14}{2\times 5^2\times 7}=\frac{3}{5^2}=\frac{2^2\times 3}{2^2\times 5^2}=\frac{12}{100}=0.12$$

따라서 $b=100$, $c=0.12$이므로

$bc-a=100\times 0.12-14=-2$

5 기약분수의 분모를 소인수분해했을 때, 분모에 2나 5 이외의 소인수가 있으면 순환소수가 된다.

즉, $\frac{3}{2^2\times 5\times x}$이 순환소수가 되도록 하는 20보다 작은 짝수 x는 $2\times 7=14$, $2\times 9=18$이다.

따라서 x를 모두 더한 값은 $14+18=32$

TIP $2\times3=6$, $2\times6=12$인 경우, 분자의 3과 서로 약분이 되므로 적당하지 않다.

6 □ 안에 들어갈 수를 차례로 a, b, c라 하면 주어진 식은

$(-2x)^a \div 4y^3 \times 6y \div (-y)^b = -\dfrac{6x^c}{y^5}$

$(-2x)^a \times \dfrac{1}{4y^3} \times 6y \times \dfrac{1}{(-y)^b} = -\dfrac{6x^c}{y^5}$

$(-2)^a \times \dfrac{1}{4} \times 6 \times \dfrac{1}{(-1)^b} \times \dfrac{x^a y}{y^3 y^b} = -\dfrac{6x^c}{y^5}$

$\dfrac{3(-2)^a}{2(-1)^b} \times \dfrac{x^a}{y^{2+b}} = -\dfrac{6x^c}{y^5}$

(i) $y^{2+b}=y^5$이므로

$2+b=5$

$\therefore b=3$

(ii) $\dfrac{3(-2)^a}{2(-1)^b}=-6$에서 $b=3$이므로

$\dfrac{3(-2)^a}{2(-1)^3}=-6$

$\dfrac{3(-2)^a}{-2}=-6$

즉, $3(-2)^a=12$

$(-2)^a=4$

$\therefore a=2$

(iii) $x^a=x^c$이므로 $a=c$

$\therefore c=2$

따라서 □ 안에 알맞은 수들의 합은

$a+b+c=2+3+2=7$이다.

7 주어진 식에 a, b의 값을 대입하면

$5\times\left(\dfrac{1}{5}\right)^5\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^4=\dfrac{1}{10^x}$

$\dfrac{1}{5^4}\times\dfrac{1}{2^4}=\dfrac{1}{10^x}$

$5^4\times2^4=10^x$

$(5\times2)^4=10^x$

$\therefore x=4$

8 $x : y : z=2 : 1 : 3$이므로

$x=2k$, $y=k$, $z=3k$ (단, $k\neq0$)라 하고

주어진 식에 대입하면

$(\text{주어진 식})=\dfrac{2k-3k+3k}{4k+k-9k}$

$=\dfrac{2k}{-4k}=-\dfrac{1}{2}$

9 $\dfrac{3}{13}=0.\dot{2}3076\dot{9}$이므로 순환마디의 숫자는 6개이다.

$55=6\times9+1$이므로 소수점 아래 55번째 자리의 숫자는 순환마디의 첫 번째 숫자인 2와 같다.

$\therefore x=2$

또, $77=6\times12+5$이므로 소수점 아래 77번째 자리의 숫자는 순환마디의 다섯 번째 숫자인 6과 같다.

$\therefore y=6$

$\therefore |2x-y|=|2\times2-6|$

$=|4-6|=|-2|=2$

10 $(\text{주어진 식})=\dfrac{\frac{1}{9}}{\frac{1}{10}}+\dfrac{\frac{2}{9}}{\frac{2}{10}}+\dfrac{\frac{3}{9}}{\frac{3}{10}}+\cdots+\dfrac{\frac{9}{9}}{\frac{9}{10}}$

$=\dfrac{10}{9}+\dfrac{10}{9}+\dfrac{10}{9}+\cdots+\dfrac{10}{9}$

$=\dfrac{10}{9}\times9=10$

11 ① $1.3\dot{0}\dot{2}=1.30202\cdots$

$1.30\dot{2}=1.30222\cdots$

$\therefore 1.3\dot{0}\dot{2}<1.30\dot{2}$ (거짓)

② $4.\dot{9}=\dfrac{49-4}{9}=\dfrac{45}{9}=5$ (거짓)

③ $0.\dot{7}\dot{2}=0.727272\cdots$

$0.\dot{7}=0.777777\cdots$

$\therefore 0.\dot{7}\dot{2}<0.\dot{7}$ (거짓)

④ $0.9\dot{4}=0.9444\cdots>0.94$ (참)

⑤ $0.\dot{5}4\dot{3}=0.543543543\cdots$

$0.54\dot{3}=0.543333333\cdots$

$\therefore 0.\dot{5}4\dot{3}>0.54\dot{3}$ (참)

따라서 대소 관계가 옳은 것은 ④, ⑤이다.

12 $\dfrac{5}{7}=\dfrac{3}{7}\times\dfrac{5}{3}$

$=\left(0.428571\cdots\times\dfrac{1}{3}\right)\times5$

$=0.142857\cdots\times5$

$=0.714285\cdots$

$=0.\dot{7}1428\dot{5}$

13 $\dfrac{21}{5x}=\dfrac{3\times7}{5x}$이 순환소수가 되므로 기약분수로 나타내었을 때, 분모에 2와 5 이외의 소인수가 존재해야 한다.

따라서 20보다 작은 자연수 중 x의 값이 될 수 있는 수는 9, 11, 13, 17, 18, 19이므로 그 합은

$9+11+13+17+18+19=87$

14 좌변을 소인수분해하면 $56=2^3\times7$이므로

$2^3\times7=2^m(2^n-1)$

따라서 $2^3=2^m$, $2^n-1=7$에서 $m=3$, $n=3$이므로

$m-n=0$

15 주어진 조건 $3^{2x}=a$에서 지수는 $2x$이고,

주어진 식 $\frac{3^{5x}}{3^{3x}+3^{x}}$에서 지수는 x, $3x$, $5x$이다.

지수를 $2x$의 배수의 형태로 만들기 위해 주어진 식

$\frac{3^{5x}}{3^{3x}+3^{x}}$의 분모, 분자에 3^x을 곱하면

$$\begin{aligned}(\text{주어진 식})&=\frac{3^{5x}\times3^{x}}{3^{3x}\times3^{x}+3^{x}\times3^{x}}\\&=\frac{3^{6x}}{3^{4x}+3^{2x}}\\&=\frac{(3^{2x})^3}{(3^{2x})^2+3^{2x}}\quad\cdots\cdots ㉠\end{aligned}$$

주어진 조건 $3^{2x}=a$를 ㉠에 대입하면

$$\begin{aligned}\frac{(3^{2x})^3}{(3^{2x})^2+3^{2x}}&=\frac{a^3}{a^2+a}\\&=\frac{a\times a^2}{a(a+1)}\\&=\frac{a^2}{a+1}\end{aligned}$$

$\therefore \frac{3^{5x}}{3^{3x}+3^{x}}=\frac{a^2}{a+1}$

16 주어진 식의 양변에 A를 곱하면

$-6xy+12x^2y=AB-2xA$

A, B는 단항식이므로

$AB=-6xy$, $-2xA=12x^2y$

또는 $AB=12x^2y$, $-2xA=-6xy$

(i) $AB=-6xy$, $-2xA=12x^2y$인 경우

$-2xA=12x^2y$에서

$A=-6xy$

$AB=-6xy$에서

$-6xyB=-6xy \qquad \therefore B=1$

$\therefore A+B=-6xy+1$

(ii) $AB=12x^2y$, $-2xA=-6xy$인 경우

$-2xA=-6xy$에서

$A=3y$

$AB=12x^2y$에서

$3yB=12x^2y \qquad \therefore B=4x^2$

$\therefore A+B=4x^2+3y$

(i), (ii)에서 A, B의 합은 $-6xy+1$ 또는 $4x^2+3y$

17 $$\begin{aligned}ax(2x+b)-5(2x+b)&=2ax^2+abx-10x-5b\\&=2ax^2+(ab-10)x-5b\\&=cx^2+2x-20\end{aligned}$$

$2a=c$, $ab-10=2$, $-5b=-20$

$\therefore a=3$, $b=4$, $c=6$

18 $\frac{x}{45}=\frac{x}{5\times3^2}$가 유한소수이므로 x는 9의 배수이고, 기약 분수로 고치면 $\frac{11}{y}$이므로 x는 11의 배수이다. 즉, x는 9와 11의 공배수인 99의 배수이다.

그런데 x가 $50<x<100$인 정수이므로 $x=99$이다.

따라서 $\frac{x}{45}=\frac{99}{45}=\frac{11}{5}=\frac{11}{y}$이므로 $y=5$

$\therefore x+y=99+5=104$

TIP 두 자연수 a, b가 서로소일 때, a와 b의 최소공배수는 ab이므로 공배수는 ab의 배수이다.

19 문제의 뜻에 따라 $0.\dot{a}\dot{b}+0.\dot{b}\dot{a}=0.\dot{4}$이므로 순환소수를 분수로 바꾸어 정리하면

$\frac{10a+b}{99}+\frac{10b+a}{99}=\frac{4}{9}$

즉, $\frac{11a+11b}{99}=\frac{4}{9}$에서 $\frac{a+b}{9}=\frac{4}{9}$이므로 $a+b=4$

그런데 a, b는 $a>b$인 자연수이므로

$a=3$, $b=1$

따라서 두 무한소수는 $0.\dot{3}\dot{1}$과 $0.\dot{1}\dot{3}$이므로 두 무한소수의 차는

$0.\dot{3}\dot{1}-0.\dot{1}\dot{3}=\frac{31}{99}-\frac{13}{99}=\frac{18}{99}=0.\dot{1}\dot{8}$

20 삼각형의 세 내각의 크기의 합은 180°이므로

$0.\dot{8}\times x+1.\dot{3}\times x+60^\circ=180^\circ$

$\frac{8}{9}x+\frac{12}{9}x+60^\circ=180^\circ$, $\frac{20}{9}x=120^\circ$

$\therefore x=120^\circ\times\frac{9}{20}=54^\circ$

21 어떤 수를 x라 하면

$0.\dot{6}\times x=2.\dot{6}$

$\frac{6}{9}\times x=\frac{24}{9}$

$\therefore x=\frac{24}{9}\times\frac{9}{6}=4$

따라서 어떤 수는 4이다.

22 어떤 자연수를 x라 하면

$1.2\dot{4}x-1.24x=8$

$1.2\dot{4}=\frac{124-12}{90}=\frac{112}{90}$, $1.24=\frac{124}{100}$이므로

$\frac{112}{90}x-\frac{124}{100}x=8$에서 양변에 각각 900을 곱하면

$1120x-1116x=7200$

$4x=7200$

$\therefore x=1800$

23 $x=\frac{5}{9}, \frac{10}{9}, \frac{15}{9}, \frac{20}{9}, \cdots$이고

$y=\frac{7}{9}, \frac{14}{9}, \frac{21}{9}, \frac{28}{9}, \cdots$이므로

$z=\frac{35}{9}, \frac{70}{9}, \frac{105}{9}, \cdots$이다.

따라서 $z=\frac{35}{9}\times c=\frac{38-3}{9}\times c=3.\dot{8}\times c$이므로

□ 안에 알맞은 순환소수는 $3.\dot{8}$이다.

24 $2-\frac{1}{1+\frac{3}{a}}=1+\frac{81}{99}$, $1-\frac{1}{1+\frac{3}{a}}=\frac{9}{11}$, $\frac{2}{11}=\frac{1}{1+\frac{3}{a}}$

$\frac{11}{2}=1+\frac{3}{a}$, $\frac{9}{2}=\frac{3}{a}$, $a=\frac{6}{9}=0.\dot{6}$

$\therefore x=6$

25 $x=0.\dot{3}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$이므로 $\frac{1}{x}=3$

$1-\frac{1}{x}=1-3=-2$

$\therefore 1-\frac{1}{1-\frac{1}{x}}=1-\frac{1}{-2}=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

따라서 주어진 식의 값은 $\frac{3}{2}$이다.

26 $0.21\dot{6}=\frac{216-21}{900}=\frac{195}{900}=\frac{13}{60}=\frac{13}{2^2\times3\times5}$,

$\frac{11}{70}=\frac{11}{2\times5\times7}$이므로 두 수에 자연수 A를 각각 곱하여 모두 유한소수가 되려면 A는 3과 7의 공배수이어야 한다.

이때 A 중에서 가장 작은 수는 3과 7의 최소공배수이므로 21이다.

27 $(\text{시간})=\frac{(\text{거리})}{(\text{속력})}$이므로 총 걸리는 시간은

$\frac{x}{4}+\frac{2.5}{5}+\frac{2x}{6}+\frac{x^2}{8}$

$=\frac{x}{4}+\frac{1}{2}+\frac{x}{3}+\frac{x^2}{8}$

$=\frac{1}{8}x^2+\frac{7}{12}x+\frac{1}{2}$

따라서 $A=\frac{1}{8}$, $B=\frac{7}{12}$, $C=\frac{1}{2}$이므로

$\frac{C}{A}-12B=\frac{1}{2}\div\frac{1}{8}-12\times\frac{7}{12}$

$=4-7=-3$

28 $0.\dot{a}\dot{b}=\frac{10a+b}{99}$, $0.\dot{b}\dot{a}=\frac{10b+a}{99}$이므로

$0.\dot{a}\dot{b}+0.\dot{b}\dot{a}=0.\dot{7}$에서

$\frac{10a+b}{99}+\frac{10b+a}{99}=\frac{7}{9}$

$\frac{11a+11b}{99}=\frac{7}{9}$

$\frac{11}{99}(a+b)=\frac{7}{9}$

$\frac{a+b}{9}=\frac{7}{9}$

$\therefore a+b=7$

29 $0.\dot{a}=\frac{a}{9}$, $0.\dot{b}=\frac{b}{9}$, $0.\dot{2}=\frac{2}{9}$이므로

주어진 두 식은 $a+b=12$, $\frac{a}{9}-\frac{b}{9}=\frac{2}{9}$가 된다.

즉, $\begin{cases} a+b=12 & \cdots\cdots ㉠ \\ a-b=2 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠+㉡에서 $2a=14$, $a=7$

$a=7$을 ㉠에 대입하면 $7+b=12$, $b=5$

$\therefore a=7, b=5$

30 $a=0.5\dot{9}=0.6$이므로

$a=b$

$\therefore a*b=0.6*0.6=1$

$c=0.\dot{1}\dot{3}=\frac{13}{99}$이므로

$c\neq d$

$\therefore c*d=\frac{13}{99}*\frac{13}{90}=0$

$\therefore (a*b)*(c*d)=1*0=0$

TIP $d=\frac{13}{90}=0.1\dot{4}$로 변형하여 c와 비교해도 된다.

31 $\square ABCD=2a\times2b=4ab$

$\triangle ABP=\frac{1}{2}\times2b\times2b=2b^2$

$\overline{PC}=2a-2b$, $\overline{QC}=2b-b=b$이므로

$\triangle PCQ=\frac{1}{2}\times(2a-2b)\times b=(a-b)b=ab-b^2$

$\triangle AQD=\frac{1}{2}\times2a\times b=ab$

$\therefore \triangle APQ=\square ABCD-\triangle ABP-\triangle PCQ-\triangle AQD$

$=4ab-2b^2-(ab-b^2)-ab$

$=4ab-2b^2-ab+b^2-ab=2ab-b^2$

따라서 $\triangle APQ$의 넓이는 $2ab-b^2$이다.

1 일차부등식

1 STEP 주제별 실력다지기

45~48쪽

1 ㄷ, ㅂ, ㅅ, ㅇ	**2** ㄷ, ㅁ, ㅅ, ㅇ	**3** ①	**4** ④	**5** 0	
6 (1) $4<2x+y<11$ (2) $-9\le x-2y<-1$ (3) $2<xy<15$ (4) $\frac{2}{5}\le\frac{2x}{y}<3$				**7** $10.7<3a-b<11.1$	
8 $5<A<8$	**9** 8	**10** 6	**11** 14	**12** $-2<x<4$	
13 $y\le-4$ 또는 $y\ge6$		**14** 2, 3	**15** $x<-\frac{1}{a}$	**16** $x<2$	**17** 풀이 참조
18 -3	**19** $-\frac{3}{2}$	**20** $x>\frac{1}{2}$	**21** ④	**22** $4<a\le5$	

최상위 NOTE 05

부등식 $m<ax+b<n$의 풀이

부등호가 1개인 부등식에 대하여 부등식의 성질이 성립함을 학습하였다. 하지만 부등식의 성질은 부등호가 2개일 때에도 성립한다.

$a<b<c$이면 $a<b$, $b<c$

부등식의 양변에 같은 수를 더하거나 빼도 부등호의 방향은 바뀌지 않으므로 상수 m에 대하여

$$\begin{cases} a+m<b+m,\ b+m<c+m \rightarrow a+m<b+m<c+m \\ a-m<b-m,\ b-m<c-m \rightarrow a-m<b-m<c-m \end{cases}$$

또한 부등식의 양변에 같은 양수를 곱하거나 나누면 부등호의 방향이 바뀌지 않지만, 같은 음수를 곱하거나 나누면 부등호의 방향이 바뀐다.

(i) $m>0$인 경우

$$\begin{cases} am<bm,\ bm<cm \rightarrow am<bm<cm \\ \frac{a}{m}<\frac{b}{m},\ \frac{b}{m}<\frac{c}{m} \rightarrow \frac{a}{m}<\frac{b}{m}<\frac{c}{m} \end{cases}$$

(ii) $m<0$인 경우

$$\begin{cases} am>bm,\ bm>cm \rightarrow am>bm>cm \\ \frac{a}{m}>\frac{b}{m},\ \frac{b}{m}>\frac{c}{m} \rightarrow \frac{a}{m}>\frac{b}{m}>\frac{c}{m} \end{cases}$$

따라서 부등식의 성질이 부등호가 2개일 때에도 성립함을 이용하면 부등식 $m<ax+b<n$의 해를 구할 수 있다.

각 변에서 b를 빼면

$m-b<ax<n-b$

각 변을 a로 나누는 경우 a의 부호에 따라 부등호의 방향이 결정된다.

(i) $a>0$인 경우

$$\frac{m-b}{a}<x<\frac{n-b}{a}$$

(ii) $a<0$인 경우

$$\frac{n-b}{a}<x<\frac{m-b}{a}$$

1 $a>b$를 만족하는 임의의 수로 반례를 들어 본다.

ㄱ. $a=2,\ b=-1$일 때

$2>-1$이지만 $\frac{1}{2}>-\frac{1}{1}$ (거짓)

ㄴ. $a=1,\ b=-2$일 때

$1>-2$이지만 $1^2<(-2)^2$ (거짓)

ㄹ. $c<0$일 때, $ac<bc$ (거짓)

ㅁ. $c>0$일 때, $\frac{a}{c}>\frac{b}{c}$ (거짓)

따라서 항상 성립하는 것은 ㄷ, ㅂ, ㅅ, ㅇ이다.

> **TIP 역수의 대소 관계 파악하기**
>
> (1) $0<a<b$이면 $ab>0$에서 $\frac{a}{ab}<\frac{b}{ab}$이므로 $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$
>
> (2) $a<b<0$이면 $ab>0$에서 $\frac{a}{ab}<\frac{b}{ab}$이므로 $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$
>
> (3) $a<0<b$이면 $\frac{1}{a}<0,\ \frac{1}{b}>0$이므로 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$
>
> 즉, 두 수의 부호가 같으면 역수를 취했을 때, 부등호의 방향이 바뀌고, 두 수의 부호가 다르면 역수를 취해도 부등호의 방향이 바뀌지 않는다.

2 ㄱ. $a=-1,\ b=-2,\ c=-2,\ d=-3$일 때

$-1>-2$이고 $-2>-3$이지만

$(-1)\times(-2)<(-2)\times(-3)$ (거짓)

ㄴ. $a=8,\ b=6,\ c=4,\ d=1$일 때

$8>6$이고 $4>1$이지만 $\frac{8}{4}<\frac{6}{1}$ (거짓)

ㄷ. $a>b,\ c>d$이므로

$a+c>b+d$ (참)

ㄹ. $a=5,\ b=2,\ c=1,\ d=-5$일 때

$5>2$이고 $1>-5$이지만

$5-1<2-(-5)$ (거짓)

ㅁ. $0>c>d$이므로 $\frac{d}{c}>1$

$a>b>0$이므로 $\frac{b}{a}<1$

$\therefore \frac{d}{c}>\frac{b}{a}$ (참)

ㅂ. $ab<0$이므로 $b<0<a$

$d>0$이므로 $0<d<c$

따라서 $ad>0,\ bc<0$이므로 $ad>bc$ (거짓)

ㅅ. $b<a=0,\ d<0$이므로

$ac=0,\ bd>0 \qquad \therefore ac<bd$ (참)

ㅇ. $b<a<0,\ d<c<0$이므로

$ac<bd$ (참)

따라서 항상 성립하는 것은 ㄷ, ㅁ, ㅅ, ㅇ이다.

3 ① $a<b,\ \ c<0$이면 $ac>bc$이다. (거짓)

② $ab>0$이므로 $a>b$의 양변을 ab로 나누면

$\frac{1}{b}>\frac{1}{a}$ (참)

③ $a>b,\ c<0$이면 $ac<bc$이다. (참)

④ $-3(a-5)>-3(b-5)$의 양변을 -3으로 나누면

$a-5<b-5 \qquad \therefore a<b$ (참)

⑤ $x<-1$에서 x와 -1은 모두 음수이므로 그 역수끼리는 부등호의 방향이 바뀐다. 즉, $\frac{1}{x}>-1$에서 $x<-1<\frac{1}{x}$이므로 $x<\frac{1}{x}$이다. (참)

4 ① $a-b>0$이므로 $a>b$ (참)

②, ③ $a>0$이고 $a+b<0$이므로 $b<0$이다. 또, 양수 a와 음수 b의 합이 음수이므로 $|a|<|b|$이다. (참)

④ (반례) $a=4,\ b=-5$일 때, $a-b>0,\ a+b<0$, $a>0$이지만 $a^2<b^2$이다. (거짓)

⑤ a와 b의 부호가 서로 다르므로 그 역수끼리를 비교하여도 부등호의 방향은 바뀌지 않는다. (참)

5 $-2\le x<7$에서

각 변에 -2를 곱하면 $4\ge -2x>-14$

각 변에 5를 더하면 $9\ge -2x+5>-9$

즉, $-9<A\le 9$이므로 $a=-9,\ b=9$

$\therefore a+b=-9+9=0$

6 $1\le x<3$이고 $2<y\le 5$일 때,

(1)
$$\begin{array}{rrcl} & 2\le & 2x & <6 \\ +) & 2< & y & \le 5 \\ \hline & 4< & 2x+y & <11 \end{array}$$

(2)
$$\begin{array}{rrcl} & 1\le & x & <3 \\ -) & 4< & 2y & \le 10 \\ \hline & -9\le & x-2y & <-1 \end{array}$$
또는
$$\begin{array}{rrcl} & 1\le & x & <3 \\ +) & -10\le & -2y & <-4 \\ \hline & -9\le & x-2y & <-1 \end{array}$$

(3)
$$\begin{array}{rrcl} & 1\le & x & <3 \\ \times) & 2< & y & \le 5 \\ \hline & 2< & xy & <15 \end{array}$$

(4)
$$\begin{array}{rrcl} & 2\le & 2x & <6 \\ \div) & 2< & y & \le 5 \\ \hline & \frac{2}{5}\le & \frac{2x}{y} & <3 \end{array}$$
또는
$$\begin{array}{rrcl} & 2\le & 2x & <6 \\ \times) & \frac{1}{5}\le & \frac{1}{y} & <\frac{1}{2} \\ \hline & \frac{2}{5}\le & \frac{2x}{y} & <3 \end{array}$$

7 두 수 6.5와 8.6은 소수 둘째 자리에서 반올림한 값이므로

$6.45\le a<6.55,\ 8.55\le b<8.65$

$$\begin{array}{rrcl} & 19.35\le & 3a & <19.65 \\ -) & 8.55\le & b & <8.65 \\ \hline & 10.7< & 3a-b & <11.1 \end{array}$$

8 $1<a<3$에서 역수를 취하면 $\frac{1}{3}<\frac{1}{a}<1$

$\therefore 1<\frac{3}{a}<3$

이때 $4<b<5$이므로

$$\begin{array}{rl} & 1<\frac{3}{a}<3 \\ +) & 4<b<5 \\ \hline & 5<\frac{3}{a}+b<8 \end{array}$$

$\therefore 5<A<8$

9 양변에 100을 곱하여 계수를 정수로 만들면

$16x-5>5x+72$

$11x>77$

$\therefore x>7$

따라서 부등식을 만족하는 자연수 x의 최솟값은 8이다.

10 부등식의 양변에 10을 곱하여 계수를 정수로 만들면

$3x+5<12+2x$

$\therefore x<7$

따라서 부등식을 만족하는 자연수 x는 1, 2, ⋯, 6이므로 x의 개수는 6이다.

11 $0.2x-1.5\le 0.5x+0.6$ ⋯⋯ ㉠

$\frac{x-2}{2}-\frac{x-3}{3}\le 1$ ⋯⋯ ㉡

㉠×10을 하여 부등식의 계수를 정수로 만들면

$2x-15\le 5x+6$, $3x\ge -21$

$\therefore x\ge -7$

즉, ㉠을 만족하는 정수 x는 -7, -6, -5, ⋯이다.

㉡×6을 하여 부등식의 계수를 정수로 만들면

$3(x-2)-2(x-3)\le 6$

$3x-6-2x+6\le 6$

$\therefore x\le 6$

즉, ㉡을 만족하는 정수 x는 6, 5, 4, ⋯이다.

따라서 ㉠, ㉡을 모두 만족하는 정수 x는

-7, -6, -5, ⋯, 4, 5, 6이므로 x의 개수는 14이다.

> **TIP** 두 부등식을 만족하는 정수 x를 각각 나열한 후 공통인 정수를 찾는다.

12 $|x-1|<3$이면 $-3<x-1<3$

$\therefore -2<x<4$

다른 풀이

(i) $x-1\ge 0$, 즉 $x\ge 1$일 때

$|x-1|=x-1$이므로 주어진 식은 $x-1<3$

$\therefore x<4$

$x\ge 1$과 $x<4$의 공통 부분은 $1\le x<4$ ⋯⋯ ㉠

(ii) $x-1<0$, 즉 $x<1$일 때

$|x-1|=-(x-1)$이므로 주어진 식은 $-x+1<3$

$-x<2$ $\therefore x>-2$

$x<1$과 $x>-2$의 공통 부분은 $-2<x<1$ ⋯⋯ ㉡

㉠ 또는 ㉡이 주어진 부등식을 만족하는 x의 값의 범위이므로 구하는 범위는

$-2<x<4$

13 $|y-1|\ge 5$에서 $y-1\le -5$ 또는 $y-1\ge 5$

$\therefore y\le -4$ 또는 $y\ge 6$

14 $x=-3$, -2, -1, 0, 1, 2, 3

또, $-x+5<2x+2$에서 $-3x<-3$

$\therefore x>1$

따라서 이 부등식의 해는 2, 3이다.

15 $a<0$일 때, $-a>0$이므로

$-ax<1$의 양변을 $-a$로 나누면 $x<-\frac{1}{a}$

16 $a<3$이면 $a-3<0$이므로

$(a-3)x>2a-6$의 양변을 $(a-3)$으로 나누면

$x<\frac{2(a-3)}{a-3}$ $\therefore x<2$

17 $ax-3b<3a-bx$에서

$ax+bx<3a+3b$ $\therefore (a+b)x<3(a+b)$

(i) $a+b>0$이면

$x<\frac{3(a+b)}{a+b}$ $\therefore x<3$

(ii) $a+b=0$이면

$0\times x<0$이므로 해가 없다.

(iii) $a+b<0$이면

$x>\frac{3(a+b)}{a+b}$ $\therefore x>3$

18 $3x-a<0$을 풀면 $3x<a$

$\therefore x<\frac{a}{3}$ ⋯⋯ ㉠

㉠의 해가 $x<-1$이므로 $\frac{a}{3}=-1$

$\therefore a=-3$

19 $ax<3x-18$에서 $(a-3)x<-18$ ⋯⋯ ㉠

그런데 ㉠의 해가 $x>4$, 즉 부등호의 방향이 바뀌었으므로 $a-3<0$이다.

따라서 ㉠의 해는 $x>\frac{-18}{a-3}$이므로

$\frac{-18}{a-3}=4$에서

$-18=4a-12$, $4a=-6$

$\therefore a=-\dfrac{3}{2}$

20 $ax+4>0$, 즉 $ax>-4$의 해가 $x<2$로 부등호의 방향이 바뀌었으므로 $a<0$이다.

따라서 $ax>-4$의 해는 $x<-\dfrac{4}{a}$이므로

$-\dfrac{4}{a}=2$ $\quad\therefore a=-2$

따라서 부등식 $-ax>1$은 $2x>1$이므로

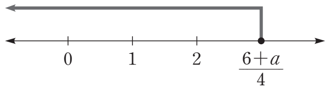
$x>\dfrac{1}{2}$

21 $5x-6+2x\le 3x+a$에서

$4x\le 6+a$

$\therefore x\le\dfrac{6+a}{4}$

이를 만족하는 자연수인 해가 2개 이상이므로



$2\le\dfrac{6+a}{4}$

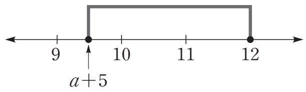
$\therefore a\ge 2$

따라서 a의 최솟값은 2이다.

22 A 주사위에 적힌 수의 범위가 $a\le x\le 6$이고 B 주사위에 적힌 수의 범위가 $5\le y\le 6$이므로 두 주사위를 던져 나온 두 수를 더했을 때의 값의 범위는

$a+5\le x+y\le 12$이다.

이를 만족하는 정수가 10, 11, 12가 되려면 다음 그림과 같이 $9<a+5\le 10$이어야 한다.



$\therefore 4<a\le 5$

2 STEP 실력 높이기

49~51쪽

1 $\dfrac{ad}{c}\le\dfrac{bd}{c}$ **2** $10<(a+1)(2b-3)<66$ **3** $-1\le x^2-y\le 12$ **4** $5a-5b$ **5** ③

6 4 **7** 풀이 참조 **8** $a<-15$ **9** $2<x\le 4$ **10** -3, -1, 1, 3 **11** $a=-1$, $b=3$

12 $1\le a<\dfrac{5}{2}$ **13** $x>-\dfrac{9}{13}$ **14** $x>-3$ **15** 5

문제 풀이

1 $a>b$의 양변에 $d\le 0$인 d를 곱하면 $ad\le bd$

이 식의 양변을 $c>0$인 c로 나누면

$\dfrac{ad}{c}\le\dfrac{bd}{c}$

> **TIP** $a>b$이고 $d<0$이면 $ad<bd$이고
> $a>b$이고 $d=0$이면 $ad=bd$이므로
> $a>b$이고 $d\le 0$이면 $ad\le bd$이다.

2 $1<a<5$이면 $2<a+1<6$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$4<b<7$이면 $8<2b<14$

$\therefore 5<2b-3<11$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡의 각 변을 곱하면

$10<(a+1)(2b-3)<66$

3 $-2\le x\le 3$에서 x^2은 최솟값이 0이고 최댓값이 9이므로 $0\le x^2\le 9$이다.

$$\begin{array}{rrcl} & 0\le & x^2 & \le 9 \\ -) & -3\le & y & \le 1 \\ \hline & -1\le & x^2-y & \le 12 \end{array}$$

4 $a-b\le x<a+b$에서

$3a-3b\le 3x<3a+3b$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$-a-b\le y\le -a+b$에서

$-2a-2b\le 2y\le -2a+2b$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서

$$\begin{array}{rrcl} & 3a-3b\le & 3x & < 3a+3b \\ -) & -2a-2b\le & 2y & \le -2a+2b \\ \hline & 5a-5b\le & 3x-2y & < 5a+5b \end{array}$$

따라서 $3x-2y$의 최솟값은 $5a-5b$이다.

5 $ax+1>bx+3$에서

$ax-bx>2$, $(a-b)x>2$

(ⅰ) $a>b$이면 $x>\dfrac{2}{a-b}$

(ⅱ) $a=b$이면 $0\times x>2$이므로 해가 없다.

(ⅲ) $a<b$이면 $x<\dfrac{2}{a-b}$

④ $a=0$, $b>0$이면 (ⅲ)의 경우에 속하므로 $x<-\dfrac{2}{b}$

⑤ $a=0$, $b<0$이면 (ⅰ)의 경우에 속하므로 $x>-\dfrac{2}{b}$

따라서 옳지 않은 것은 ③이다.

6 서술형

변형 단계 $ax+1<3x+b$

$ax-3x<b-1$

$(a-3)x<b-1$

풀이 단계 부등식의 해가 없으므로

$a-3=0$, $b-1\le 0$

$\therefore a=3$, $b\le 1$

확인 단계 따라서 $a+b$의 최댓값은 4이다.

7

$ax-5>bx+4$에서

$ax-bx>9$, $(a-b)x>9$

(ⅰ) $a>b$이면 $x>\dfrac{9}{a-b}$

(ⅱ) $a=b$이면 $0\times x>9$이므로 해가 없다.

(ⅲ) $a<b$이면 $x<\dfrac{9}{a-b}$

8

$x-\dfrac{1}{5}(x-2a)=6$을 풀면

$5x-(x-2a)=30$, $5x-x+2a=30$, $4x=30-2a$

$\therefore x=\dfrac{30-2a}{4}=\dfrac{15-a}{2}$

이 해가 15보다 커야 하므로

$\dfrac{15-a}{2}>15$, $15-a>30$

$-a>15$ $\quad\therefore a<-15$

9 서술형

변형 단계 $x+y=5$에서 $y=5-x$를

풀이 단계 $1<2x-y\le 7$에 대입하면

$1<2x-(5-x)\le 7$

$1<2x-5+x\le 7$

$1<3x-5\le 7$

$6<3x\le 12$

확인 단계 $\therefore 2<x\le 4$

10

$|2x-1|<8$을 풀면

$-8<2x-1<8$이므로 $-7<2x<9$

$\therefore -\dfrac{7}{2}<x<\dfrac{9}{2}$

$\dfrac{x+1}{2}$의 값의 범위를 구하면 $-\dfrac{5}{2}<x+1<\dfrac{11}{2}$이므로

$-\dfrac{5}{4}<\dfrac{x+1}{2}<\dfrac{11}{4}$

$\dfrac{x+1}{2}$이 정수이므로 $\dfrac{x+1}{2}=-1, 0, 1, 2$

$\therefore x=-3, -1, 1, 3$

TIP $\dfrac{x+1}{2}$이 정수이면 $\dfrac{x+1}{2}=n$ (n은 정수)에서
$x+1=2n$이므로 $x+1$은 짝수이고
$x=2n-1$이므로 x는 홀수이다.

11

$|ax+1|\le b$를 만족하는 x가 존재하므로 $b\ge 0$이고

$-b\le ax+1\le b$

$\therefore -b-1\le ax\le b-1$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

(ⅰ) $a>0$일 때

㉠의 해는 $\dfrac{-b-1}{a}\le x\le\dfrac{b-1}{a}$이고 이 범위가

$-2\le x\le 4$와 같으므로

$\dfrac{-b-1}{a}=-2$, $\dfrac{b-1}{a}=4$

$\therefore a=-1$, $b=-3$

그런데 이 값은 $a>0$, $b\ge 0$에 모순이다.

(ⅱ) $a<0$일 때

㉠의 해는 $\dfrac{-b-1}{a}\ge x\ge\dfrac{b-1}{a}$

즉, $\dfrac{b-1}{a}\le x\le\dfrac{-b-1}{a}$이고 이 범위가

$-2\le x\le 4$와 같으므로

$\dfrac{b-1}{a}=-2$, $\dfrac{-b-1}{a}=4$

$\therefore a=-1$, $b=3$

이 값은 $a<0$, $b\ge 0$에 적합하므로 옳다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 $a=-1$, $b=3$

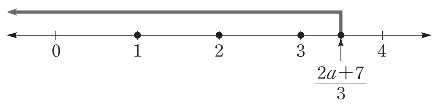
12 서술형

변형 단계 $\dfrac{5x-1}{2}-a\le x+3$의 양변에 각각 2를 곱하면

$5x-1-2a\le 2x+6$, $3x\le 2a+7$

풀이 단계 $\therefore x\le\dfrac{2a+7}{3}$

다음 그림의 수직선에서 주어진 부등식이 자연수의 해를 3개 가지려면 $\dfrac{2a+7}{3}$은 3 이상 4 미만이어야 한다.



즉, $3\le\dfrac{2a+7}{3}<4$, $9\le 2a+7<12$, $2\le 2a<5$

확인 단계 $\therefore 1\le a<\dfrac{5}{2}$

13 $(a+b)x+2a-3b>0$에서

$(a+b)x>-2a+3b$

이 부등식의 해가 $x<\frac{1}{3}$이므로 $a+b<0$이다.

$\therefore\ x<\frac{-2a+3b}{a+b}$

$\frac{-2a+3b}{a+b}=\frac{1}{3}$에서

$3(-2a+3b)=a+b$

$8b=7a \qquad \therefore\ b=\frac{7}{8}a$

그런데 $a+b<0$이므로

$a+\frac{7}{8}a<0$

$\frac{15}{8}a<0 \qquad \therefore\ a<0$

$b=\frac{7}{8}a$를 부등식 $(a-3b)x+b-2a>0$에 대입하면

$\left(a-3\times\frac{7}{8}a\right)x+\frac{7}{8}a-2a>0$

$-\frac{13}{8}ax-\frac{9}{8}a>0$, $13ax+9a<0$, $13ax<-9a$

$a<0$이므로 양변을 $13a$로 나누면

$x>-\frac{9}{13}$

14 서술형

<u>변형 단계</u> $(a+2b)x-2a-b>0$에서 $(a+2b)x>2a+b$

<u>풀이 단계</u> 이 부등식의 해가 $x>1$이므로 $a+2b>0$이고

$x>\frac{2a+b}{a+2b}$에서 $\frac{2a+b}{a+2b}=1$ …… ㉠

㉠을 풀면 $2a+b=a+2b \qquad \therefore\ a=b$ …… ㉡

$a+2b>0$이고 ㉡에서 a, b는 같은 부호이므로

$a>0$, $b>0$이다.

$b=a$를 $(a-2b)x+2a-5b<0$에 대입하면

$-ax-3a<0$, $-ax<3a$

$a>0$이므로 x의 계수 $-a$는 음수이다.

<u>확인 단계</u> $\therefore\ x>-3$

15 $4\times2^x+18<50$에서 $2^x<2^3 \qquad \therefore\ x<3$

주어진 부등식을 만족하는 홀수 x는 1이다.

따라서 $2ax+b=5a+2bx-5$에 $x=1$을 대입하면

$2a+b=5a+2b-5$

$\therefore\ 3a+b=5$

3 STEP 최고 실력 완성하기

52~53쪽

1 $14\le x<22$ **2** -1 **3** 21경기 **4** 11 **5** $a=9$, $b=-2$ **6** 13

7 $(5, 5, 15)$, $(6, 5, 30)$, $(7, 5, 105)$

문제 풀이

1 $2<\left[\frac{x}{4}-1\right]<5$에서 $\left[\frac{x}{4}-1\right]$은 정수이므로 3, 4이다.

$\left[\frac{x}{4}-1\right]=3$, 4를 만족하는 $\frac{x}{4}-1$의 값의 범위는

$2.5\le\frac{x}{4}-1<4.5$이므로

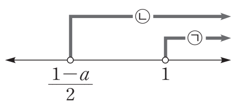
$3.5\le\frac{x}{4}<5.5 \qquad \therefore\ 14\le x<22$

TIP a를 소수 첫째 자리에서 반올림한 정수가 n일 때,
a의 값의 범위는 $n-\frac{1}{2}\le a<n+\frac{1}{2}$이다.
예 a를 소수 첫째 자리에서 반올림한 정수가 3일 때,
a의 값의 범위는 $3-\frac{1}{2}\le a<3+\frac{1}{2}$이다. 즉, $2.5\le a<3.5$이다.

2 ㉠ $3x+1>x+3$을 풀면 $x>1$

㉡ $a+2x>1$을 풀면 $x>\frac{1-a}{2}$

㉠의 해가 ㉡의 해에 포함되려면 다음 그림에서



$\frac{1-a}{2}\le1$, $1-a\le2 \qquad \therefore\ a\ge-1$

따라서 가장 작은 정수 a는 -1이다.

3 롯데와 NC가 시합하는 경기의 수를 x경기라 하면

x경기 후의 롯데의 전체 경기의 수는 $(98+x)$경기, 이긴 경기의 수는 $(49+0.3x)$경기

NC의 전체 경기의 수는 $(98+x)$경기, 이긴 경기의 수는 $(41+0.7x)$경기

NC가 롯데보다 높은 순위에 있기 위해서는 승률이 더 높아야 하므로

$\frac{49+0.3x}{(98+x)-3}<\frac{41+0.7x}{(98+x)-3}$에서

$49+0.3x<41+0.7x$, $8<0.4x$

$\therefore x>20$

따라서 NC는 적어도 21경기를 해야 한다. 이때 그 이후의 경기의 승패에 따라 경기의 수는 더 늘어날 수 있다.

4 세 식을 변끼리 더하면 $2(x+y+z)=16+a$

$\therefore x+y+z=8+\frac{a}{2}$ ...... ㉠

㉠에서 주어진 세 식을 각각 빼면 연립방정식의 해는

$x=\frac{a}{2}-2$, $y=8-\frac{a}{2}$, $z=2+\frac{a}{2}$

x, y, z가 모두 양수이므로

$\frac{a}{2}-2>0$에서 $a>4$

$8-\frac{a}{2}>0$에서 $a<16$

$2+\frac{a}{2}>0$에서 $a>-4$

따라서 정수 a는 5, 6, 7, ⋯, 13, 14, 15이므로 a의 개수는 11이다.

5 $a-3b-5<(a+2b)x<2a+b-1$의 각 변을 $a+2b$로 나눌 때,

(i) $a+2b>0$이면

$\frac{a-3b-5}{a+2b}<x<\frac{2a+b-1}{a+2b}$

이 범위가 $2<x<3$과 같으므로

$\frac{a-3b-5}{a+2b}=2$, $\frac{2a+b-1}{a+2b}=3$

$a-3b-5=2a+4b$, $2a+b-1=3a+6b$

$\therefore \begin{cases} a+7b=-5 \\ a+5b=-1 \end{cases}$

연립방정식을 풀면 $a=9$, $b=-2$

이 값은 $a+2b>0$을 만족하고 정수이므로 적합하다.

(ii) $a+2b<0$이면

$\frac{2a+b-1}{a+2b}<x<\frac{a-3b-5}{a+2b}$

이 범위가 $2<x<3$과 같으므로

$\frac{2a+b-1}{a+2b}=2$, $\frac{a-3b-5}{a+2b}=3$

$2a+b-1=2a+4b$, $a-3b-5=3a+6b$

$\therefore \begin{cases} 3b=-1 \\ 2a+9b=-5 \end{cases}$

연립방정식을 풀면 $a=-1$, $b=-\frac{1}{3}$

이 값은 $a+2b<0$을 만족하지만 정수가 아니므로 적합하지 않다.

(i), (ii)에서 $a=9$, $b=-2$

6 $n<75$이므로 $\frac{n}{75}<1$

$\frac{n}{75}$은 소수 첫째 자리의 수가 1, 소수 셋째 자리의 수가 3이므로 $0.103\le\frac{n}{75}<0.194$

또, $\frac{n+1}{75}=\frac{n}{75}+\frac{1}{75}$이고 $\frac{1}{75}=0.01\dot{3}$이므로

$0.116\dot{3}\le\frac{n+1}{75}<0.207\dot{3}$ ...... ㉠

그런데 $\frac{n+1}{75}$은 소수 둘째 자리의 수가 8이고 ㉠에 의해 소수 첫째 자리의 수는 1이므로 $0.18\le\frac{n+1}{75}<0.19$

$\therefore 12.5\le n<13.25$

따라서 자연수 n의 값은 13이다.

7 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{z}=\frac{1}{3}$, 즉 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{3}+\frac{1}{z}$에서

$\frac{1}{z}>0$이므로 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}>\frac{1}{3}$ ...... ㉠

x, y는 양수이고 $x\ge y$이면 $\frac{1}{x}\le\frac{1}{y}$이므로

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\le\frac{2}{y}$ ...... ㉡

㉠, ㉡에 의해 $\frac{1}{3}<\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\le\frac{2}{y}$이므로 $\frac{1}{3}<\frac{2}{y}$에서

$y<6$이고, 주어진 조건에서 $y\ge5$이므로 정수인 y의 값은 5이다.

$y=5$를 ㉠에 대입하면 $\frac{1}{x}+\frac{1}{5}>\frac{1}{3}$

$\frac{1}{x}>\frac{2}{15}$ $\therefore x<\frac{15}{2}$

또, 주어진 조건에서 $x\ge5$이므로 정수인 x의 값은 5, 6, 7이다.

(i) $x=5$, $y=5$이면 $\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{z}=\frac{1}{3}$이므로

$\frac{1}{z}=\frac{1}{15}$ $\therefore z=15$

(ii) $x=6$, $y=5$이면 $\frac{1}{6}+\frac{1}{5}-\frac{1}{z}=\frac{1}{3}$이므로

$\frac{1}{z}=\frac{1}{30}$ $\therefore z=30$

(iii) $x=7$, $y=5$이면 $\frac{1}{7}+\frac{1}{5}-\frac{1}{z}=\frac{1}{3}$이므로

$\frac{1}{z}=\frac{1}{105}$ $\therefore z=105$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 정수해의 순서쌍 (x, y, z)는 $(5, 5, 15)$, $(6, 5, 30)$, $(7, 5, 105)$이다.

2 일차부등식의 활용

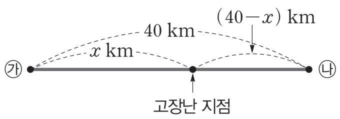
1 STEP 주제별 실력다지기

55~60쪽

1 36 km 이상	2 $\frac{8}{3}$ km 이하	3 $\frac{3}{2}$ km 이내	4 20 km 이상	5 $\frac{225}{2}$ g 이상	6 10 g 이상
7 $\frac{100}{3}$ g 이상	8 80 g 이하	9 6개월 후	10 3600원	11 10000원 이상	12 4000원 이상
13 37.5 % 이하	14 30명 이상	15 26명 이상	16 33명 이상	17 57명 이상	18 3명 이상
19 9, 31	20 19	21 6개	22 5자루	23 80 m 이상 105 m 미만	
24 0 cm 초과 $\frac{9}{2}$ cm 이하		25 4개	26 62.5점 이상	27 93점 이상	

문제 풀이

1 ㉮시에서 자전거가 고장난 지점까지의 거리를 x km라 하면 고장난 지점에서 ㉯시까지의 거리는 $(40-x)$ km이므로



(자전거를 탄 시간)+(걸은 시간)$\leq$4(시간)

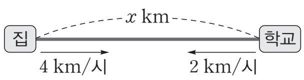
즉, $\frac{x}{12}+\frac{40-x}{4}\leq 4$에서

$x+3(40-x)\leq 48$, $-2x+120\leq 48$

$-2x\leq -72$ $\quad\therefore x\geq 36$

따라서 ㉮시로부터 36 km 이상 떨어진 지점이다.

2 집에서 학교까지의 거리를 x km라 하면 갈 때와 올 때 걸은 거리가 모두 x km이므로



(갈 때 걸린 시간)+(올 때 걸린 시간)$\leq$2(시간)

즉, $\frac{x}{4}+\frac{x}{2}\leq 2$에서 $x+2x\leq 8$, $3x\leq 8$

$\therefore x\leq\frac{8}{3}$

따라서 집에서 학교까지의 거리는 $\frac{8}{3}$ km 이하이다.

3 역에서 상점까지의 거리를 x km라 하면

(가는 시간)+(물건을 사는 시간)+(오는 시간)$\leq$1(시간)

이고 물건을 사는 시간 15분은 $\frac{15}{60}=\frac{1}{4}$(시간)이므로

$\frac{x}{4}+\frac{1}{4}+\frac{x}{4}\leq 1$

$2x+1\leq 4$, $2x\leq 3$ $\quad\therefore x\leq\frac{3}{2}$

따라서 역에서 $\frac{3}{2}$ km 이내에 있는 상점을 이용할 수 있다.

4 시속 6 km로 걸어야 할 거리를 x km라 하면 시속 4 km로 걸어야 할 거리는 $(24-x)$ km이고

10(분)$=\frac{1}{6}$(시간), (4시간 30분)$=\frac{9}{2}$(시간)이므로

(시속 6 km로 걸은 시간)+(쉰 시간)+(시속 4 km로 걸은 시간)$\leq$(4시간 30분)에서

$\frac{x}{6}+\frac{1}{6}+\frac{24-x}{4}\leq\frac{9}{2}$

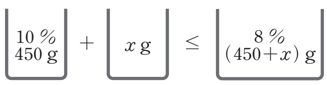
$2x+2+3(24-x)\leq 54$

$-x\leq -20$ $\quad\therefore x\geq 20$

따라서 시속 6 km로 걸어야 할 거리는 20 km 이상이다.

> **TIP** 구하는 것이 시속 6 km로 걸어야 할 거리이므로 시속 6 km로 걸어야 할 거리를 x km라 하고 문제를 해결한다.
> 시속 4 km로 걸어야 할 거리를 x km라 하면 시속 6 km로 걸어야 할 거리는 $(24-x)$ km이고 $24-x$의 범위를 구해야 하므로 풀이 과정이 더 복잡해진다.

5 넣는 물의 양을 x g이라 하면



각 항의 소금의 양을 구하면

$\frac{10}{100}\times 450\leq\frac{8}{100}(450+x)$

양변에 100을 곱하면

$10\times 450\leq 8(450+x)$

$4500\leq 3600+8x$, $-8x\leq -900$

$\therefore x\geq\frac{225}{2}$

따라서 더 넣어야 할 물의 양은 $\frac{225}{2}$ g 이상이다.

6 넣는 소금의 양을 x g이라 하면

$\boxed{\begin{matrix} 8\,\% \\ 450\text{ g} \end{matrix}} + \boxed{x\text{ g}} \geq \boxed{\begin{matrix} 10\,\% \\ (450+x)\text{ g} \end{matrix}}$

각 항의 소금의 양을 구하면

$\frac{8}{100}\times 450+x\geq\frac{10}{100}(450+x)$

양변에 100을 곱하면

$8\times 450+100x\geq 10(450+x)$

$3600+100x\geq 4500+10x$

$90x\geq 900$ $\quad\therefore x\geq 10$

따라서 더 넣어야 할 소금의 양은 10 g 이상이다.

7 증발시킬 물의 양을 x g이라 하면

$\boxed{\begin{matrix} 10\,\% \\ 200\text{ g} \end{matrix}} - \boxed{x\text{ g}} \geq \boxed{\begin{matrix} 12\,\% \\ (200-x)\text{ g} \end{matrix}}$

각 항의 소금의 양을 구하면

$\frac{10}{100}\times 200\geq\frac{12}{100}(200-x)$

양변에 100을 곱하면

$10\times 200\geq 12(200-x)$

$2000\geq 2400-12x$

$12x\geq 400$ $\quad\therefore x\geq\frac{100}{3}$

따라서 증발시켜야 할 물의 양은 $\frac{100}{3}$ g 이상이다.

8 15 %의 소금물의 양을 x g이라 하면 10 %의 소금물의 양은 $(200-x)$ g이므로

$\boxed{\begin{matrix} 15\,\% \\ x\text{ g} \end{matrix}} + \boxed{\begin{matrix} 10\,\% \\ (200-x)\text{ g} \end{matrix}} \leq \boxed{\begin{matrix} 12\,\% \\ 200\text{ g} \end{matrix}}$

각 항의 소금의 양을 구하면

$\frac{15}{100}x+\frac{10}{100}(200-x)\leq\frac{12}{100}\times 200$

양변에 100을 곱하면

$15x+10(200-x)\leq 12\times 200$

$15x+2000-10x\leq 2400$

$5x\leq 400$ $\quad\therefore x\leq 80$

따라서 15 %의 소금물은 80 g 이하를 섞어야 한다.

9 x개월 후 형의 예금액은 $(2500+500x)$원,
동생의 예금액은 $(4000+200x)$원이므로

$2500+500x>4000+200x$

$300x>1500,\ 3x>15$ $\quad\therefore x>5$

따라서 형이 동생보다 예금액이 많아지는 것은 6개월 후부터이다.

10 A가 받을 몫을 x원이라 하면 B가 받을 몫은 $(6000-x)$원이므로

$2x\geq 3(6000-x)$

$5x\geq 18000$ $\quad\therefore x\geq 3600$

따라서 A가 받을 몫은 최소한 3600원이다.

11 원가를 x원이라 하면 원가 x원에 2할의 이익을 붙인 정가는 $1.2x$원이므로

$1.2x-1000\geq 1.1x$

$12x-10000\geq 11x$ $\quad\therefore x\geq 10000$

따라서 원가는 10000원 이상이다.

> **TIP 할푼리의 의미**
> 비율을 소수로 나타낼 때 소수 첫째 자리를 할, 소수 둘째 자리를 푼, 소수 셋째 자리를 리라고 한다.
> 예 (1) 0.132 → 1할3푼2리
> (2) 2할5푼 → 0.25

12 정가를 x원이라 하면 1할 할인한 금액은 $0.9x$원이고 이 금액으로 물건을 팔아서 원가 3000원의 2할 이상의 이익을 얻으려고 하므로

$0.9x\geq 1.2\times 3000$

$9x\geq 12\times 3000$ $\quad\therefore x\geq 4000$

따라서 정가는 4000원 이상으로 정하면 된다.

13 원가를 a원이라 하면 정가는 $1.6a$원이고, 정가를 x % 할인한다고 하면 할인한 가격은 $\{1.6a(1-0.01x)\}$원이다.

또, 손해를 보지 않으려면 이 금액이 원가 이상이어야 하므로

$1.6a(1-0.01x)\geq a$

$1.6-0.016x\geq 1,\ 1600-16x\geq 1000$

$-16x\geq -600$ $\quad\therefore x\leq\frac{600}{16}=37.5$

따라서 정가의 37.5 % 이하로 할인해 주면 된다.

14 입장한 사람 수를 $x(x\geq 20)$명이라 하면 총 입장료는 $\{10000+200(x-20)\}$원이므로

$\frac{10000+200(x-20)}{x}\leq 400$

$10000+200(x-20)\leq 400x$

$100+2(x-20)\leq 4x$

$-2x\leq -60$ $\quad\therefore x\geq 30$

따라서 30명 이상 입장해야 한다.

15 x명의 입장료는 $1000x$원이고, 36명의 단체 입장권을 구입하여 3할을 할인 받으면

$(36\times1000\times0.7)$원이므로

$1000x>36\times1000\times0.7$

$\therefore x>25.2$

따라서 26명 이상이면 36명의 단체 입장권을 구입하는 것이 더 경제적이다.

16 관람객 수를 x명, 1인당 입장료를 a원이라 하면 x명의 입장료는 ax원이고, 50명의 단체 입장권을 구입하여 35 %를 할인 받으면 $(50\times a\times0.65)$원이므로

$ax>50\times a\times0.65$

$\therefore x>32.5$

따라서 33명 이상이면 50명의 단체 입장권을 구입하는 것이 더 경제적이다.

17 1인당 입장료를 a원이라 하면 30명 이상 60명 미만인 x명의 입장료는 $(ax\times0.75)$원이고, 60명의 단체 입장권을 구입하여 3할을 할인 받으면 $(60a\times0.7)$원이므로

$0.75ax>60a\times0.7$

$\therefore x>56$

따라서 57명 이상이면 60명의 단체로 할인 받는 것이 더 경제적이다.

18 전체의 일의 양을 1이라 할 때, 남자 1명, 여자 1명이 하루에 할 수 있는 일의 양은 각각 $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{10}$이다.

남자가 x명 있다고 하면 여자가 $(8-x)$명 있으므로

$\frac{x}{6}+\frac{8-x}{10}\geq1$

$5x+3(8-x)\geq30,\ 2x\geq6$ $\qquad\therefore x\geq3$

따라서 남자는 3명 이상 있어야 한다.

19 두 자연수를 x, $40-x$라고 하면

$x>2(40-x)+10$에서 $x>30$

두 자연수의 차는 $|x-(40-x)|=|2x-40|$이므로 두 자연수의 차가 가장 작을 때 $x=31$이다.

따라서 두 자연수는 9, 31이다.

20 처음 두 자리 자연수의 십의 자리의 숫자가 x이면 일의 자리의 숫자는 $10-x$이므로

$10(10-x)+x>3(10x+10-x)$

$100-10x+x>27x+30$

$-36x>-70$ $\qquad\therefore x<\frac{70}{36}$

따라서 x는 1이므로 처음 자연수는 19이다.

21 1500원 하는 과자의 개수를 x개라 하면 1000원 하는 과자의 개수는 $(15-x)$개이므로

$1700+1500x+1000(15-x)\leq20000$

$1700+1500x+15000-1000x\leq20000$

$500x\leq3300$ $\qquad\therefore x\leq6.6$

따라서 1500원 하는 과자는 최대 6개까지 담을 수 있다.

22 처음에 동생이 가진 연필을 x자루라 하면 형이 가진 연필은 $4x$자루이고, 형이 동생에게 8자루를 주면 형은 $(4x-8)$자루, 동생은 $(x+8)$자루가 되므로

$4x-8<x+8$

$3x<16$ $\qquad\therefore x<\frac{16}{3}$

따라서 동생이 처음에 가지고 있던 연필은 최대 5자루이다.

23 세로의 길이를 x m라 하면 가로의 길이는 $(x+40)$ m이고 둘레의 길이는 $2(x+x+40)$ m이므로

$400\leq2(2x+40)<500$

$160\leq2x<210$ $\qquad\therefore 80\leq x<105$

따라서 세로의 길이는 80 m 이상 105 m 미만이다.

24 (사다리꼴의 넓이)

$=\frac{1}{2}\times\{(\text{윗변의 길이})+(\text{아랫변의 길이})\}\times(\text{높이})$이므로

$\frac{1}{2}\times(12+x)\times8\leq66$에서

$48+4x\leq66,\ 4x\leq18$ $\qquad\therefore x\leq\frac{9}{2}$

그런데 $x>0$이므로 $0<x\leq\frac{9}{2}$

따라서 아랫변의 길이는 0 cm 초과 $\frac{9}{2}$ cm 이하이다.

TIP x는 변의 길이이므로 $x>0$임을 반드시 표기해야 한다.

25 이등변삼각형의 세 변의 길이를 x, x, y라 하면

$2x+y=18$ $\qquad\therefore y=18-2x$ $\qquad\cdots\cdots$ ㉠

또, 이등변삼각형에서 길이가 같은 두 변의 길이의 합은 다른 한 변의 길이보다 커야 한다.

$\therefore 2x>y$ $\qquad\cdots\cdots$ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하여 정리하면

$2x>18-2x,\ 4x>18$ $\qquad\therefore x>4.5$ $\qquad\cdots\cdots$ ㉢

또, 세 변의 길이의 합이 18이므로 $2x<18$이다.

$\therefore x<9$ $\qquad\cdots\cdots$ ㉣

㉢, ㉣에 의해 $4.5<x<9$이고, 이 범위에 포함되는 자연수 x는 5, 6, 7, 8이므로 각각 ㉠에 대입하면 y는 8, 6, 4, 2이다.

따라서 조건을 만족하는 이등변삼각형은 각 변의 길이가 (5, 5, 8), (6, 6, 6), (7, 7, 4), (8, 8, 2)인 4개이다.

26 남학생의 성적의 평균을 x점이라 하면 전체 학생 수가

50명이므로

$\frac{(\text{여학생의 총점})+(\text{남학생의 총점})}{50} \geq 70(\text{점})$

즉, $\frac{30 \times 75+20x}{50} \geq 70$에서

$2250+20x \geq 3500$

$20x \geq 1250 \qquad \therefore x \geq 62.5$

따라서 남학생의 성적의 평균은 62.5점 이상이어야 한다.

TIP (총점)=(학생 수)×(평균)

네 학생의 점수가 각각 a점, b점, c점, d점이고 점수의 평균이 m점이면 $\frac{a+b+c+d}{4}=m$이다. 따라서 $a+b+c+d=4 \times m$이므로 네 학생의 총점은 학생 수와 평균을 곱한 값과 일치한다.

일반적으로 학생 수에 관계없이 (총점)=(학생 수)×(평균)이 성립한다.

27 네 번째 시험 성적을 x점이라 하면

$\frac{85+91+83+x}{4} \geq 88$

$259+x \geq 352 \qquad \therefore x \geq 93$

따라서 네 번째 시험에서 93점 이상을 얻어야 한다.

2 STEP 실력 높이기

61~62쪽

1 사과 6개, 배 9개 **2** 11000개 **3** 89명 이상 **4** 16% 이하 **5** 3할 2푼 이상

6 200 g 이상 400 g 이하 **7** 10 **8** $x=6$, $y=6$, $z=28$

9 4 cm 이상 12 cm 이하

문제 풀이

1 1000원짜리 배를 x개 산다고 하면 500원짜리 사과는 $(15-x)$개를 사야 하므로

$1000x+500(15-x) \leq 12000$

$1000x+7500-500x \leq 12000$

$500x \leq 4500$

$\therefore x \leq 9$

따라서 배를 가능한 한 많이 사야 하므로 배는 9개, 사과는 6개 살 수 있다.

2 한 달 동안 생산한 물건의 개수를 x개라 하면 한 달 동안의 총 수입이 총 지출보다 1000만 원 이상 많아야 하므로

$2000x \geq 1000x+1000000+10000000$

$1000x \geq 11000000$

$\therefore x \geq 11000$

따라서 한 달 동안 최소한 11000개의 물건을 생산하여야 한다.

3 50명 이상 100명 미만인 단체의 인원 수를 x명이라 하면 1할 할인할 경우의 입장료는 $(5000 \times x \times 0.9)$원이고, 100명인 경우의 입장료는 2할 할인되기 때문에 $(5000 \times 100 \times 0.8)$원이므로

$5000 \times x \times 0.9 > 5000 \times 100 \times 0.8$

$9x > 800 \qquad \therefore x > 88.8\cdots$

따라서 89명 이상일 때, 100명의 할인된 입장료를 지불하고 입장하는 것이 더 경제적이다.

4 서술형

표현 단계 원가가 6000원인 상품의 전체 비용은 $6000+1000+500=7500(\text{원})$이 된다.
이익이 전체 비용의 x %라 하면 판매 가격은 $7500\left(1+\frac{x}{100}\right)$이고,
원가의 45 %의 이윤을 붙인 가격은 $6000\left(1+\frac{45}{100}\right)$이므로
$7500\left(1+\frac{x}{100}\right) \leq 6000\left(1+\frac{45}{100}\right)$

풀이 단계 $7500+75x \leq 8700$
$75x \leq 1200$
$\therefore x \leq 16$

확인 단계 따라서 원가가 6000원인 상품에 대한 이익은 전체 비용의 16 % 이하로 정해진다.

5 구입비가 2000원이므로 구입비에 x할의 이익을 붙인

가격은 $2000(1+0.1x)$원

$2000(1+0.1x) \geq 2200 \times 1.2$

$2000+200x \geq 2640$

$200x \geq 640$

$\therefore x \geq 3.2$

따라서 3할 2푼 이상의 이익을 붙여서 팔아야 한다.

6 서술형

표현 단계 10 %의 소금물을 x g이라 하면 4 %의 소금물은 $(600-x)$ g이므로

$$\begin{cases} 10\text{ \%의 소금물의 소금의 양 : } \dfrac{10}{100} \times x = 0.1x(\text{g}) \\ 4\text{ \%의 소금물의 소금의 양 : } \\ \qquad \dfrac{4}{100}(600-x) = 24-0.04x(\text{g}) \end{cases}$$

두 소금물의 소금의 양의 합은

$0.1x+24-0.04x=0.06x+24(\text{g})$

농도를 구하는 식을 세우면

$6 \leq \dfrac{0.06x+24}{600} \times 100 \leq 8$

풀이 단계 $6 \leq \dfrac{0.06x+24}{6} \leq 8$

$36 \leq 0.06x+24 \leq 48$

$12 \leq 0.06x \leq 24$

$1200 \leq 6x \leq 2400$

$\therefore 200 \leq x \leq 400$

확인 단계 따라서 농도가 10 %인 소금물의 양은 200 g 이상 400 g 이하이다.

7

$$\begin{cases} 10a+8<40 & \cdots\cdots ㉠ \\ b<a^2 & \cdots\cdots ㉡ \\ b=2a+1 & \cdots\cdots ㉢ \end{cases}$$

㉠에서 $a<3.2$

그런데 a는 자연수이므로 $a=1,\ 2,\ 3$

a를 ㉢에 대입하면

$a=1$일 때 $b=3$, $a=2$일 때 $b=5$, $a=3$일 때 $b=7$

여기서 ㉡을 만족하는 a, b는 $a=3$, $b=7$

$\therefore a+b=10$

8

$$\begin{cases} x+y+z=40 & \cdots\cdots ㉠ \\ 500x+100y+50z=5000 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉡$\times \dfrac{1}{50}-$㉠을 하면

$9x+y=60 \qquad \therefore y=60-9x \qquad \cdots\cdots ㉢$

이때 동전의 개수는 음수가 될 수 없으므로 $60-9x \geq 0$

$-9x \geq -60 \qquad \therefore x \leq \dfrac{20}{3}$

500원짜리 동전의 개수가 최대가 되려면 $x=6$이므로

㉢에 대입하면 $y=60-9\times 6=6$

따라서 ㉠에서

$6+6+z=40 \qquad \therefore z=28$

$\therefore x=6,\ y=6,\ z=28$

TIP 동전의 개수는 0 또는 자연수임에 유의한다.

9

$\square \text{ABCD}=\dfrac{1}{2}\times(10+15)\times 12=150(\text{cm}^2)$

$\overline{\text{BP}}=x$ cm $(0\leq x\leq 12)$라 하면

$\triangle \text{APD}=\dfrac{1}{2}\times 10\times(12-x)=60-5x(\text{cm}^2)$

$\triangle \text{PBC}=\dfrac{1}{2}\times 15\times x=\dfrac{15}{2}x(\text{cm}^2)$

$\therefore \triangle \text{DPC}=\square \text{ABCD}-(\triangle \text{APD}+\triangle \text{PBC})$

$=150-\left(60-5x+\dfrac{15}{2}x\right)$

$=90-\dfrac{5}{2}x(\text{cm}^2)$

$\triangle$DPC의 넓이가 $\square$ABCD의 넓이의 $\dfrac{8}{15}$ 이하이므로

$90-\dfrac{5}{2}x \leq 150\times\dfrac{8}{15}$

$-\dfrac{5}{2}x \leq -10 \qquad \therefore x\geq 4$

$\therefore 4\leq x\leq 12\ (\because 0\leq x\leq 12)$

따라서 $\overline{\text{BP}}$의 길이는 4 cm 이상 12 cm 이하이다.

3 STEP 최고 실력 완성하기

63쪽

1 ② 2 시속 56 km 이상 3 $\frac{10}{33}$ 4 200 mL 초과 250 mL 이하

문제 풀이

1 n각형의 내각의 크기의 합은 $180^\circ\times(n-2)$이므로

$500^\circ\le180^\circ\times(n-2)\le700^\circ$

$\frac{25}{9}\le n-2\le\frac{35}{9}$

$\therefore \frac{43}{9}\le n\le\frac{53}{9}$

따라서 n의 값은 5이므로 오각형이다.

2 배를 타고 강물을 따라 내려갈 때의 속력은 (배의 속력)+(강물의 속력)이고 올라갈 때의 속력은 (배의 속력)−(강물의 속력)이다.

따라서 올라갈 때의 배의 속력을 시속 x km라 하면 물의 속력이 시속 2 km이므로 내려갈 때의 속력은 시속 32 km (=30+2)이고, 올라갈 때의 속력은 시속 $(x-2)$ km이다.

$\frac{100}{32}+\frac{100}{x-2}\le5$에서

$\frac{100}{x-2}\le5-\frac{25}{8}$

$\frac{100}{x-2}\le\frac{15}{8}$

이때 $x-2>0$이므로 $800\le15(x-2)$

$-15x\le-830$

$\therefore x\ge\frac{166}{3}=55.33\cdots$

따라서 x는 자연수이므로 올라갈 때는 시속 56 km 이상이어야 한다.

3 구하는 기약분수를 $\frac{y}{x}$로 놓으면 x, y는 서로소인 자연수이다.

주어진 조건에 의해

$$\begin{cases}\frac{y}{x+3}=\frac{5}{18} & \cdots\cdots ㉠\\ \frac{y+3}{x}>\frac{1}{3} & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$$

㉠에서 $18y=5(x+3)$

$\therefore y=\frac{5}{18}(x+3)$ $\cdots\cdots$ ㉢

이때 18과 5는 서로소이고 y는 자연수이므로

$x+3$은 18의 배수이다.

㉡에서 $x>0$이므로 양변에 $3x$를 곱하면

$3(y+3)>x$ $\quad\therefore 3y+9>x$ $\cdots\cdots$ ㉣

㉣에 ㉢을 대입하면

$\frac{5}{6}(x+3)+9>x$, $5(x+3)+54>6x$

$-x>-69$ $\quad\therefore x<69$

따라서 $x+3<72$인 18의 배수 $x+3$은 18, 36, 54이므로

$x=15$, 33, 51

㉢에 대입하면

$x=15$일 때 $y=5$

$x=33$일 때 $y=10$

$x=51$일 때 $y=15$

이 중에서 x, y가 서로소인 것은 $x=33$, $y=10$뿐이다.

따라서 구하는 기약분수는 $\frac{10}{33}$이다.

4 흘려 보낸 우유의 양을 x mL라 하면, 라면 국물의 양은 $(1000-x)$ mL이다.

음식물	버린 양 (mL)	필요한 물의 양 (L)	BOD 농도 (mg)
우유	x	$2x$	$0.05x$
라면 국물	$1000-x$	$0.5\times(1000-x)$	$1.25\times(1000-x)$
합계	1000	$2x+0.5(1000-x)$	$0.05x+1.25(1000-x)$

(i) 정화에 필요한 물의 양이 800 L보다 많으므로

$2x+500-0.5x>800$, $1.5x>300$ $\quad\therefore x>200$

(ii) 1000 mL에 대한 BOD가

$0.05x+1.25(1000-x)$이므로 1 mL에 대한 BOD는

$\frac{0.05x+1.25(1000-x)}{1000}$이다.

따라서 문제에서 주어진 BOD가 0.95 mg/mL 이상이므로 $\frac{0.05x+1.25(1000-x)}{1000}\ge0.95$

$0.05x+1250-1.25x\ge950$

$-1.2x\ge-300$ $\quad\therefore x\le250$

(i), (ii)에서 $200<x\le250$

따라서 흘려 보낸 우유의 양은 200 mL 초과 250 mL 이하이다.

Ⅱ 단원 종합 문제

1 ③, ④ **2** -15 **3** $-4<\frac{2}{a}-3b<\frac{49}{5}$ **4** $x>-a$ **5** 3

6 1 **7** 해는 없다. **8** 풀이 참조 **9** $x=3$, $y=3$ **10** 0 **11** $2.5\le x<3.5$

12 18명 이상 **13** 100 g 이상 200 g 이하 **14** 9 cm, 12 cm, 15 cm, 18 cm **15** 25

16 7, 8 **17** 3 **18** $10\le x<18$

문제 풀이

1 ① $a<0$이면 $a>2a$이다. (거짓)

② $a<0$이면 $8-a>4-a$이다. (거짓)

③ $a>0$이면 $\frac{1}{a}<\frac{2}{a}$이다. (참)

④ $a>b>0$이면 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$이다. (참)

⑤ $a<b<0$이면 $ab>0$, $b<0$이므로 $ab>b$이다. (거짓)

2 $2\le p\le 5$이면 $\frac{1}{5}\le\frac{1}{p}\le\frac{1}{2}$

$\therefore \frac{2}{15}\le\frac{2}{3p}\le\frac{1}{3}$ …… ㉠

또, $1\le q\le 3$ …… ㉡

㉠−㉡을 하면

$\frac{2}{15}-3\le\frac{2}{3p}-q\le\frac{1}{3}-1$

$-\frac{43}{15}\le\frac{2}{3p}-q\le-\frac{2}{3}$

$\therefore x=-\frac{43}{15}$, $y=-\frac{2}{3}$

$\therefore 5x+y=5\times\left(-\frac{43}{15}\right)-\frac{2}{3}$

$=-\frac{43}{3}-\frac{2}{3}=-15$

3 $2.5<a<4$, 즉 $\frac{5}{2}<a<4$에서

$\frac{1}{4}<\frac{1}{a}<\frac{2}{5}$

$\therefore \frac{1}{2}<\frac{2}{a}<\frac{4}{5}$ …… ㉠

또, $-3<b<1.5$에서

$-9<3b<4.5$ …… ㉡

㉠−㉡을 하면

$\frac{1}{2}-4.5<\frac{2}{a}-3b<\frac{4}{5}-(-9)$

$\therefore -4<\frac{2}{a}-3b<\frac{49}{5}$

4 $a<0$일 때, $\frac{x}{a}<-1$의 양변에 a를 곱하면

$x>-a$

5 $ax+2>3x+4a$에서

$(a-3)x>4a-2$

이 부등식의 해가 없으려면

$a-3=0$, $4a-2\ge 0$

$\therefore a=3$

6 $ax+3<x+13$에서

$(a-1)x<10$

이 부등식의 해가 모든 실수이려면

$a-1=0$

$\therefore a=1$

7 $ax+1>bx+2$에서

$(a-b)x>1$

그런데 $a=b$이면 $a-b=0$이므로 주어진 부등식은

$0\times x>1$

따라서 해는 없다.

8 $ax-3b<3a-bx$에서

$(a+b)x<3a+3b$

$\therefore (a+b)x<3(a+b)$

(ⅰ) $a+b>0$일 때, 양변을 $a+b$로 나누면 $x<3$

(ⅱ) $a+b=0$일 때, $0\times x<0$ $\therefore$ 해는 없다.

(ⅲ) $a+b<0$일 때, 양변을 $a+b$로 나누면 $x>3$

9 $2x+3y=15$에서 $3y=15-2x$ …… ㉠

$-1<4x-3y<6$에 ㉠을 대입하면

$-1<4x-(15-2x)<6$

$-1<6x-15<6$

$\therefore \frac{7}{3}<x<\frac{7}{2}$

이때 x는 정수이므로 $x=3$이고 이 값을 ㉠에 대입하면

$y=3$이다.

10 a, b, c의 값의 범위를 구하면 다음과 같다.

$$\begin{cases} 3\le a<4 & \cdots\cdots ㉠ \\ -2\le b<-1 & \cdots\cdots ㉡ \\ 4\le c<5 & \cdots\cdots ㉢ \end{cases}$$

$a-b-c=a-(b+c)$이므로

㉡+㉢을 하면

$2\le b+c<4$ ⋯⋯ ㉣

㉠−㉣을 하면

$3-4<a-b-c<4-2$

$\therefore\ -1<a-b-c<2$

따라서 $-1\le[a-b-c]\le1$이고, $[a-b-c]$의 값은 정수이므로

$[a-b-c]=-1,\ 0,\ 1$

$\therefore\ -1+0+1=0$

다른 풀이

㉠−㉡을 하면

$3-(-1)<a-b<4-(-2)$

$\therefore\ 4<a-b<6$ ⋯⋯ ㉣

㉣−㉢을 하면

$4-5<a-b-c<6-4$

$\therefore\ -1<a-b-c<2$

11 $2\langle x\rangle^2+\langle x\rangle-1=2(\langle x\rangle^2+1)$을 풀면

$2\langle x\rangle^2+\langle x\rangle-1=2\langle x\rangle^2+2$

$\therefore\ \langle x\rangle=3$

따라서 $3-\frac{1}{2}\le x<3+\frac{1}{2}$이므로

$2.5\le x<3.5$

> **TIP** $\langle x\rangle$를 $n-\frac{1}{2}\le x<n+\frac{1}{2}$을 만족하는 정수 n으로 정의할 때, $\langle x\rangle$는 x를 소수 첫째 자리에서 반올림한 정수를 의미한다.

12 단체 인원을 x명이라 하면 x명의 입장료는 $500x$원이고 25명의 단체 입장료는 $(500\times25\times0.7)$원이므로 x명의 단체가 25명의 단체 입장료를 내고 입장하는 것이 더 경제적이기 위해서는

(x명의 입장료)>(25명의 단체 입장료)이면 된다.

즉, $500x>500\times25\times0.7$에서

$500x>8750$

$\therefore\ x>17.5$

따라서 18명 이상일 때 25명의 단체 입장료를 내는 것이 더 경제적이다.

13 2 %의 소금물의 양을 x g이라 하면 8 %의 소금물의 양은 $(300-x)$ g이다.

2 %의 소금물의 소금의 양은 $0.02x$ g이고

8 %의 소금물의 소금의 양은

$0.08(300-x)=24-0.08x$(g)이므로

두 소금물의 소금의 양의 합은

$0.02x+24-0.08x=24-0.06x$(g)

농도를 구하는 식을 세우면

$4\le\frac{24-0.06x}{300}\times100\le6$, $4\le\frac{24-0.06x}{3}\le6$,

$12\le24-0.06x\le18$, $-12\le-0.06x\le-6$

$\therefore\ 100\le x\le200$

따라서 2 %의 소금물은 100 g 이상 200 g 이하이어야 한다.

14 삼각형의 세 변의 길이가 모두 3의 배수이므로 각각 $3a$ cm, $3b$ cm, $3c$ cm ($a\le b\le c$인 자연수)라 하자.

$24\le3a+3b+3c\le42$이므로

$8\le a+b+c\le14$ ⋯⋯ ㉠

또, 가장 긴 변의 길이가 $3c$ cm이므로 $3c+6=3a+3b$

$3(a+b)=3(c+2)$

$\therefore\ a+b=c+2$ ⋯⋯ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$8\le c+2+c\le14$, $8\le2c+2\le14$

$6\le2c\le12$

$\therefore\ 3\le c\le6$

가장 긴 변의 길이는 $3c$ cm이므로 $9\le3c\le18$

따라서 가장 긴 변의 길이는 9 cm, 12 cm, 15 cm, 18 cm이다.

15 x는 자연수이므로 $a>0$, $b>0$, $c>0$이고

삼각형의 가장 긴 변의 길이는 c이다.

$a+b>c$에서 $2x+1+3x+2>4x+4$이므로 $x>1$이다.

이때 $a+b+c=9x+7$이고 x의 값이 최소일 때, 세 변의 길이의 합은 최솟값을 갖는다.

따라서 $x=2$일 때, 최솟값 25를 갖는다.

> **TIP 두 식의 대소 관계 파악하기**
> 자연수 x에 대하여 두 식 $2x+1$, $4x+4$의 대소 관계를 파악해보자.
> $2<4$의 양변에 자연수 x를 곱하면 $2x<4x$ ⋯⋯ ㉠
> $1<4$ ⋯⋯ ㉡
> ㉠+㉡에서 $2x+1<4x+4$가 성립함을 알 수 있다.
> 마찬가지로 생각하면 $3x+2<4x+4$ 역시 성립한다.

16 $\frac{1}{3}<\frac{3}{a}<\frac{1}{2}$에서

$2<\frac{a}{3}<3$ ⋯⋯ ㉠

㉠에서 각 변에 3을 곱하면

$6<a<9$

따라서 이를 만족하는 자연수 a의 값은 7, 8이다.

17 $|x-3| \le a$에서 $-a \le x-3 \le a$

$\therefore 3-a \le x \le 3+a$

$a=1$일 때, $2 \le x \le 4$를 만족하는 자연수 x의 개수는 3이다.

$a=2$일 때, $1 \le x \le 5$를 만족하는 자연수 x의 개수는 5이다.

$a=3$일 때, $0 \le x \le 6$을 만족하는 자연수 x의 개수는 6이다.

$a=4$일 때, $-1 \le x \le 7$을 만족하는 자연수 x의 개수는 7이다.

$a=5$일 때, $-2 \le x \le 8$을 만족하는 자연수 x의 개수는 8이다.

$\vdots$

따라서 $a=3$이다.

18 $3 < \left[\frac{x}{4}+1 \right] < 6$이면 $\left[\frac{x}{4}+1 \right]=4,\ 5$이다.

(ⅰ) $\left[\frac{x}{4}+1 \right]=4$일 때, $3.5 \le \frac{x}{4}+1 < 4.5$

(ⅱ) $\left[\frac{x}{4}+1 \right]=5$일 때, $4.5 \le \frac{x}{4}+1 < 5.5$

(ⅰ), (ⅱ)에서

$3.5 \le \frac{x}{4}+1 < 5.5$

$2.5 \le \frac{x}{4} < 4.5$

$\therefore 10 \le x < 18$

1 연립방정식

1 STEP 주제별 실력다지기

69~73쪽

1 $2x+y=10$	**2** $x+2y=250$	**3** $(1, 15)$, $(2, 12)$, $(3, 9)$, $(4, 6)$, $(5, 3)$	**4** $n-1$	**5** 15
6 $\frac{3}{2}$	**7** 2	**8** (1) $x=1$, $y=0$ (2) $x=3$, $y=-1$	**9** $x=3$, $y=1$ 또는 $x=-9$, $y=-5$	
10 0	**11** $a=-\frac{1}{5}$, $b=-\frac{2}{5}$	**12** $\frac{2}{5}$ / **13** $a=5$, $b=13$	**14** 1	**15** -3
16 3	**17** $x=3$, $y=-1$	**18** $x=6$, $y=2$ / **19** $x=2$, $y=0$	**20** $x=1$, $y=1$	**21** $x=2$, $y=-2$
22 3	**23** -3	**24** $x=\frac{5}{4}$, $y=-\frac{1}{2}$, $z=\frac{7}{2}$	**25** $x=2$, $y=1$, $z=3$	

최상위 NOTE 06 해가 특수한 연립방정식

x, y에 대한 연립방정식 $\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{cases}$ 에 대하여

(1) $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$인 경우

한 방정식에 적절한 상수를 곱하면 다른 식과 정확히 일치하게 된다.

예를 들어 연립방정식 $\begin{cases} 2x+y+3=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ 4x+2y+6=0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$ 의 경우

$\frac{2}{4}=\frac{1}{2}=\frac{3}{6}$이 성립하고 실제로 ㉠의 양변에 2를 곱한 식은 ㉡과 정확히 일치한다. 따라서 ㉠의 모든 해는 ㉡의 해가 된다. 또한 ㉡의 모든 해도 ㉠의 해가 된다. 이때 ㉠의 해는 무수히 많으므로 위의 연립방정식의 해는 무수히 많다.

일반적으로 $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$인 경우

연립방정식 $\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{cases}$ 의 해는 무수히 많다.

(2) $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$인 경우

한 방정식에 적절한 상수를 곱해서 x의 계수와 y의 계수를 다른 식과 일치하도록 만들었을 때, 상수항은 일치하지 않는다.

예를 들어 연립방정식 $\begin{cases} 2x+y+2=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ 4x+2y+6=0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$ 의 경우

$\frac{2}{4}=\frac{1}{2}\neq\frac{2}{6}$이고 실제로 ㉠의 양변에 2를 곱한 식은 $4x+2y+4=0$이므로 ㉡과 x의 계수와 y의 계수는 각각 일치하지만 상수항은 일치하지 않는다. 따라서 ㉠과 ㉡을 동시에 만족하는 x, y는 존재하지 않는다. 즉, 위의 연립방정식의 해는 없다.

일반적으로 $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$인 경우

연립방정식 $\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{cases}$ 의 해는 없다.

1 공책과 볼펜을 사는 데 필요한 돈이 각각 $400x$원, $200y$원이므로
$400x+200y=2000$
$\therefore 2x+y=10$

2 (소금의 양)$=\dfrac{(\text{농도})}{100}\times$(소금물의 양)이므로
10 %의 소금물 x g 속의 소금의 양은 $\dfrac{10}{100}x$ g,
20 %의 소금물 y g 속의 소금의 양은 $\dfrac{20}{100}y$ g
문제의 조건에서 $\dfrac{10}{100}x+\dfrac{20}{100}y=25$이므로 정리하면
$x+2y=250$

3 x가 자연수이므로 주어진 방정식에 $x=1, 2, 3, \cdots$을 차례로 대입하여 y의 값을 구하면 다음과 같다.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	$\cdots$
y	15	12	9	6	3	0	-3	-6	$\cdots$

그런데 y의 값도 자연수이므로 구하는 해를 순서쌍으로 나타내면 $(1, 15)$, $(2, 12)$, $(3, 9)$, $(4, 6)$, $(5, 3)$이다.

4 x와 y가 자연수이므로 주어진 방정식을 만족하는 해는 다음과 같다.

x	1	2	3	$\cdots$	$n-2$	$n-1$
y	$n-1$	$n-2$	$n-3$	$\cdots$	2	1

따라서 순서쌍 (x, y)의 개수는 $n-1$이다.

5 $x=1$일 때, $y+z=6$을 만족하는 순서쌍 (y, z)는
$(1, 5)$, $(2, 4)$, $(3, 3)$, $(4, 2)$, $(5, 1)$의 5개이다.
$x=2, 3, 4, 5$인 경우도 같은 방법으로 구하면 다음과 같다.

x	1	2	3	4	5
$y+z$	6	5	4	3	2
순서쌍 (y, z)의 개수	5	4	3	2	1

따라서 $x+y+z=7$을 만족하는 순서쌍 (x, y, z)의 개수는 $5+4+3+2+1=15$이다.

6 (i) $2x+my=4$의 그래프가 점 $(4, -2)$를 지나므로
$x=4$, $y=-2$를 대입하면
$8-2m=4 \qquad \therefore m=2$
(ii) $2x+2y=4$의 그래프가 점 $(2n, 3)$을 지나므로
$x=2n$, $y=3$을 대입하면
$4n+6=4 \qquad \therefore n=-\dfrac{1}{2}$
(i), (ii)에서 $m+n=2+\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{3}{2}$

7 순서쌍 $(3, -1)$이 $ax-y+2=0$의 해이므로
$x=3$, $y=-1$을 대입하면
$3a-(-1)+2=0 \qquad \therefore a=-1$
또, 점 $(b-2, b)$가 $-x-y+2=0$의 그래프 위에 있으므로 $x=b-2$, $y=b$를 대입하면
$-(b-2)-b+2=0$, $-2b+4=0 \qquad \therefore b=2$

8 (1) $\begin{cases} x+2y=1 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x+y=2 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$
㉠$-$㉡$\times 2$를 하면
$$\begin{array}{rl} & x+2y=1 \\ -) & 4x+2y=4 \\ \hline & -3x \quad =-3 \end{array} \qquad \therefore x=1$$
$x=1$을 ㉡에 대입하면
$2+y=2 \qquad \therefore y=0$
(2) $\begin{cases} 2x-3y=9 & \cdots\cdots ㉠ \\ 3x+2y=7 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$
㉠$\times 2+$㉡$\times 3$을 하면
$$\begin{array}{rl} & 4x-6y=18 \\ +) & 9x+6y=21 \\ \hline & 13x \quad =39 \end{array} \qquad \therefore x=3$$
$x=3$을 ㉠에 대입하면
$6-3y=9 \qquad \therefore y=-1$

9 $\begin{cases} |x|+y=4 & \cdots\cdots ㉠ \\ x-2y=1 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$
㉠$\times 2+$㉡을 하면 $2|x|+x=9$
(i) $x\geq 0$일 때, $2x+x=9 \qquad \therefore x=3$
$x=3$을 ㉠에 대입하면 $|3|+y=4 \qquad \therefore y=1$
(ii) $x<0$일 때, $-2x+x=9 \qquad \therefore x=-9$
$x=-9$를 ㉠에 대입하면 $|-9|+y=4 \qquad \therefore y=-5$
(i), (ii)에서 $x=3$, $y=1$ 또는 $x=-9$, $y=-5$

10 $x=1$, $y=1$을 주어진 일차방정식에 대입하면
$a+(a-2)+b=0$, $2a+b=2 \qquad \cdots\cdots ㉠$
$x=-1$, $y=2$를 주어진 일차방정식에 대입하면
$-a+2(a-2)+b=0$, $a+b=4 \qquad \cdots\cdots ㉡$
㉠$-$㉡을 하면 $a=-2$, $b=6$
그러므로 주어진 일차방정식은 $-2x-4y+6=0$
$\therefore x+2y-3=0$

따라서 $x=3$을 $x+2y-3=0$에 대입하면

$3+2y-3=0 \quad \therefore y=0$

11 두 직선의 방정식에 각각 $(3, -1)$을 대입하면

$3a+b=-1$에서 $b=-3a-1$ ...... ㉠

$3b-a=-1$ ...... ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$3(-3a-1)-a=-1,\ -10a=2 \quad \therefore a=-\frac{1}{5}$

$a=-\frac{1}{5}$을 ㉠에 대입하면

$b=-3\times\left(-\frac{1}{5}\right)-1 \quad \therefore b=-\frac{2}{5}$

> **TIP** 교점은 두 직선이 만나서 생기는 점이므로 두 직선 위에 있다. 따라서 교점의 좌표를 두 직선의 방정식에 대입하면 모두 성립한다.

12 y의 값이 x의 값의 2배이므로 $y=2x$를 주어진 연립방정식에 대입하면

$\begin{cases} x+2ax=3 & \cdots\cdots ㉠ \\ ax-4x=-6 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠$-$㉡$\times 2$를 하면

$$\begin{array}{rl} & x+2ax=3 \\ -) & -8x+2ax=-12 \\ \hline & 9x \qquad =15 \end{array} \quad \therefore x=\frac{5}{3}$$

$x=\frac{5}{3}$를 ㉠에 대입하면

$\frac{5}{3}+\frac{10}{3}a=3 \quad \therefore a=\frac{2}{5}$

13 두 연립방정식의 해가 같으므로 각각의 연립방정식의 해는

$\begin{cases} x+y=1 & \cdots\cdots ㉠ \\ x-y=3 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$의 해와 같다.

㉠$+$㉡을 하면 $2x=4 \quad \therefore x=2$

$x=2$를 ㉠에 대입하면 $2+y=1 \quad \therefore y=-1$

$x=2,\ y=-1$을 나머지 방정식 $\begin{cases} ax-3y=b \\ 3x+y=a \end{cases}$에 대입하면

$\begin{cases} 2a+3=b & \cdots\cdots ㉢ \\ 6-1=a & \cdots\cdots ㉣ \end{cases}$

㉣에서 $a=5$

$a=5$를 ㉢에 대입하면 $10+3=b \quad \therefore b=13$

14 세 방정식 $\begin{cases} mx+2y=1 & \cdots\cdots ㉠ \\ x+y=3 & \cdots\cdots ㉡ \\ x-2y=9 & \cdots\cdots ㉢ \end{cases}$의 그래프가

한 점에서 만나므로 교점의 좌표를 (x, y)라 하면

(x, y)는 ㉠, ㉡, ㉢의 식을 모두 만족한다.

즉, ㉡과 ㉢을 연립하여 풀면

㉡$-$㉢에서 $3y=-6 \quad \therefore y=-2$

$y=-2$를 ㉡에 대입하면 $x+(-2)=3 \quad \therefore x=5$

따라서 $x=5,\ y=-2$를 ㉠에 대입하면

$5m+2\times(-2)=1 \quad \therefore m=1$

15 주어진 연립방정식에서 상수 a, b를 바꾸면

$\begin{cases} bx+ay=3 \\ ax-by=-1 \end{cases}$

연립방정식의 해 $x=1,\ y=-1$을 대입하면

$\begin{cases} b-a=3 & \cdots\cdots ㉠ \\ a+b=-1 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠$+$㉡을 하면 $2b=2 \quad \therefore b=1$

$b=1$을 ㉡에 대입하면

$a+1=-1 \quad \therefore a=-2$

$\therefore a-b=(-2)-1=-3$

16 은정이가 바르게 푼 연립방정식은

$\begin{cases} ax+by=-2 \\ bx+ay=5 \end{cases}$이므로 $x=1,\ y=2$를 대입하면

$\begin{cases} a+2b=-2 & \cdots\cdots ㉠ \\ b+2a=5 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠$-$㉡$\times 2$를 하면

$-3a=-12 \quad \therefore a=4$

$a=4$를 ㉡에 대입하면

$b+8=5 \quad \therefore b=-3$

그런데 현정이는 a, b를 바꾸어 풀었으므로 현정이가 푼

연립방정식은 $\begin{cases} bx+ay=-2 \\ ax+by=5 \end{cases}$

$a=4,\ b=-3$을 대입하면

$\begin{cases} -3x+4y=-2 & \cdots\cdots ㉢ \\ 4x-3y=5 & \cdots\cdots ㉣ \end{cases}$

㉢$\times 3+$㉣$\times 4$를 하면

$7x=14 \quad \therefore x=2$

$x=2$를 ㉢에 대입하면

$-6+4y=-2 \quad \therefore y=1$

즉, $m=2,\ n=1$이므로

$m+n=2+1=3$

> **TIP** 연립방정식 $\begin{cases} ax+by=-2 \\ bx+ay=5 \end{cases}$에 대하여 a와 b를 바꾸면
> $\begin{cases} bx+ay=-2 \\ ax+by=5 \end{cases}$이고 x와 y를 바꿔도 $\begin{cases} ay+bx=-2 \\ by+ax=5 \end{cases}$이다. 즉, 위의 연립방정식에서 a와 b를 바꾸는 것은 x와 y를 바꾸는 것과 같다. 따라서 연립방정식의 해는 $x=1,\ y=2$에서 $x=2,\ y=1$로 바뀌게 된다.

17 주어진 연립방정식에서 계수가 소수인 일차방정식의 양변에는 10을 곱하고, 계수가 분수인 일차방정식의 양변에는 분모의 최소공배수인 6을 곱하여 정리하면

$\begin{cases} x-2y=5 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x+3y=3 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠×2−㉡을 하면

$-7y=7 \qquad \therefore y=-1$

$y=-1$을 ㉠에 대입하면

$x+2=5 \qquad \therefore x=3$

18 두 일차방정식의 양변에 각각 분모의 최소공배수인 6을 곱하면

$\begin{cases} 2x=3y+6 \\ 3x+2y=22 \end{cases}$

즉, $\begin{cases} 2x-3y=6 & \cdots\cdots ㉠ \\ 3x+2y=22 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠×2+㉡×3을 하면

$13x=78 \qquad \therefore x=6$

$x=6$을 ㉠에 대입하면

$12-3y=6 \qquad \therefore y=2$

19 두 일차방정식의 양변에 각각 분모의 최소공배수인 6을 곱하면

$\begin{cases} 2(x+1)+3y=6 \\ (x+1)-3(y-1)=6 \end{cases}$

즉, $\begin{cases} 2x+3y=4 & \cdots\cdots ㉠ \\ x-3y=2 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠+㉡을 하면

$3x=6 \qquad \therefore x=2$

$x=2$를 ㉠에 대입하면

$4+3y=4 \qquad \therefore y=0$

20 $\begin{cases} x+2y+3=2x+3y+1 \\ 2x+3y+1=3x+y+2 \end{cases}$를 정리하면

$\begin{cases} x+y=2 & \cdots\cdots ㉠ \\ x-2y=-1 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠−㉡을 하면

$3y=3 \qquad \therefore y=1$

$y=1$을 ㉠에 대입하면

$x+1=2 \qquad \therefore x=1$

21 세 변에 각각 6을 곱하면

$3x+3y=2y+4=x-2$이므로

$\begin{cases} 3x+3y=2y+4 \\ 2y+4=x-2 \end{cases}$

즉, $\begin{cases} y=4-3x & \cdots\cdots ㉠ \\ x-2y=6 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠을 ㉡에 대입하면

$x-2(4-3x)=6 \qquad \therefore x=2$

$x=2$를 ㉠에 대입하면

$y=4-3\times2 \qquad \therefore y=-2$

22 주어진 연립방정식의 해가 무수히 많으므로

$\frac{1}{a}=\frac{3}{b}=\frac{4}{2}$

$\frac{1}{a}=\frac{4}{2}$에서 $a=\frac{1}{2}$

$\frac{3}{b}=\frac{4}{2}$에서 $b=\frac{3}{2}$

$\therefore 4ab=4\times\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}=3$

다른 풀이

$\begin{cases} x+3y=4 \\ 2ax+2by=4 \end{cases}$에서 두 일차방정식은 일치하므로

$2a=1,\ 2b=3$

$\therefore a=\frac{1}{2},\ b=\frac{3}{2}$

$\therefore 4ab=3$

23 주어진 연립방정식의 해가 없으므로

$\frac{a+1}{2}=\frac{a}{3}\neq\frac{3}{2}$

$\frac{a+1}{2}=\frac{a}{3}$에서 $3a+3=2a$

$\therefore a=-3$

24 $\begin{cases} 2x-3y=4 & \cdots\cdots ㉠ \\ -3y+z=5 & \cdots\cdots ㉡ \\ 2x+z=6 & \cdots\cdots ㉢ \end{cases}$

㉢−㉡을 하면

$2x+3y=1 \qquad \cdots\cdots ㉣$

㉠+㉣을 하면

$4x=5 \qquad \therefore x=\frac{5}{4}$

$x=\frac{5}{4}$를 ㉠에 대입하면

$\frac{5}{2}-3y=4 \qquad \therefore y=-\frac{1}{2}$

$x=\frac{5}{4}$를 ㉢에 대입하면

$\frac{5}{2}+z=6 \qquad \therefore z=\frac{7}{2}$

25 주어진 식의 각 변끼리 더하면

$2(x+y+z)=12$

$\therefore x+y+z=6 \qquad \cdots\cdots ㉠$

$x+y=3$을 ㉠에 대입하면

$3+z=6 \qquad \therefore z=3$

$y+z=4$를 ㉠에 대입하면

$x+4=6 \qquad \therefore x=2$

$z+x=5$를 ㉠에 대입하면

$5+y=6 \qquad \therefore y=1$

2 STEP 실력 높이기

74~78쪽

1 $x=\frac{1}{2}, y=-1$	**2** $-\frac{9}{2}$	**3** $-\frac{8}{3}$	**4** -1	**5** $x=\frac{4}{5}, y=\frac{7}{5}$	**6** 23
7 $x=8, y=2$	**8** 12	**9** -8	**10** $x=\frac{1}{2}, y=\frac{1}{3}$	**11** $-\frac{7}{4}$	**12** $a=-\frac{2}{3}, b=-2$
13 3	**14** -1	**15** $a=\frac{9}{5}, b=-\frac{4}{3}$	**16** 9	**17** $x=-\frac{11}{48}, y=-\frac{5}{48}$	
18 3	**19** 6	**20** 18			

문제 풀이

1 첫 번째 식에는 양변에 100을, 두 번째 식에는 24를 곱하여 계수를 정수로 만들면

$$\begin{cases} 50x-75y=100 \\ 18(x-1)+8(y+1)=-9 \end{cases}$$

즉, $\begin{cases} 2x-3y=4 & \cdots\cdots ㉠ \\ 18x+8y=1 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠$\times 9-$㉡을 하면

$-35y=35 \qquad \therefore y=-1$

$y=-1$을 ㉠에 대입하면

$2x-3\times(-1)=4 \qquad \therefore x=\frac{1}{2}$

2 서술형

표현 단계 $\begin{cases} 2ax-by=6 \\ 3ax-2by=11 \end{cases}$의 해가 $x=-2$, $y=1$이므로 각각을 대입하면

변형 단계 $\begin{cases} -4a-b=6 & \cdots\cdots ㉠ \\ -6a-2b=11 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

풀이 단계 ㉠$\times 2-$㉡을 하면

$-2a=1 \qquad \therefore a=-\frac{1}{2}$

$a=-\frac{1}{2}$을 ㉠에 대입하면

$2-b=6 \qquad \therefore b=-4$

확인 단계 $\therefore a+b=-\frac{9}{2}$

3 12와 18의 최대공약수는 6, 최소공배수는 36이므로 연립방정식의 해는 $x=6$, $y=36$이다.

이 값을 연립방정식에 대입하면

$$\begin{cases} 3a+12b=4 & \cdots\cdots ㉠ \\ 6a+12b=-8 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠$-$㉡을 하면 $-3a=12 \qquad \therefore a=-4$

$a=-4$를 ㉠에 대입하면 $b=\frac{4}{3}$

$\therefore a+b=-4+\frac{4}{3}=-\frac{8}{3}$

4 $\begin{cases} x-2y=a & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x-y=3-a & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠$+$㉡을 하면 $3x-3y=3$

$\therefore x-y=1 \qquad \cdots\cdots ㉢$

주어진 연립방정식을 만족하는 x와 y의 값의 합이 5이므로

$x+y=5 \qquad \cdots\cdots ㉣$

㉢$+$㉣을 하면 $2x=6 \qquad \therefore x=3, y=2$

$x=3$, $y=2$를 ㉠에 대입하면

$a=3-2\times 2 \qquad \therefore a=-1$

TIP 방정식 $x+y=5$에는 미지수 a가 없으므로 연립방정식 $\begin{cases} x-2y=a \\ 2x-y=3-a \end{cases}$에서 각 변을 더하여 a를 소거한다.

5 $\begin{cases} ax+y=-1 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x-by=3 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

현정이는 ㉠에서 a를 잘못 보고 풀었으므로 현정이가 구한 해인 $x=3$, $y=-3$은 ㉡을 만족한다.

따라서 ㉡에 $x=3$, $y=-3$을 대입하면

$6+3b=3 \qquad \therefore b=-1$

나연이는 ㉡에서 b를 잘못 보고 풀었으므로 나연이가 구한

해인 $x=1$, $y=2$는 ㉠을 만족한다.
따라서 ㉠에 $x=1$, $y=2$를 대입하면
$a+2=-1 \quad \therefore a=-3$
㉠, ㉡에 $a=-3$, $b=-1$을 대입하면
$\begin{cases} -3x+y=-1 & \cdots\cdots ㉢ \\ 2x+y=3 & \cdots\cdots ㉣ \end{cases}$
㉢−㉣을 하면 $-5x=-4$
$\therefore x=\frac{4}{5},\ y=\frac{7}{5}$

6 두 직선의 교점이 $(3,\ 4)$이므로 연립방정식
$\begin{cases} ax-y=6 \\ 3x+y=b \end{cases}$의 해가 $x=3$, $y=4$이다.
이 값을 두 방정식에 대입하면 $\begin{cases} 3a-4=6 \\ 9+4=b \end{cases}$이므로
$a=\frac{10}{3},\ b=13$
$\therefore 3a+b=10+13=23$

7 주어진 연립방정식의 계수를 정수로 고치면
$\begin{cases} \frac{2}{9}x-\frac{3}{9}y=\frac{11-1}{9} \\ x-1-2(y+1)=1 \end{cases}$, 즉 $\begin{cases} 2x-3y=10 & \cdots\cdots ㉠ \\ x-2y=4 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x=8$, $y=2$

8 문제의 조건에 의해 $(b,\ c)$는 세 일차방정식
$\begin{cases} y=-3x-5 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x-ay=7 & \cdots\cdots ㉡ \\ x=-5y+3 & \cdots\cdots ㉢ \end{cases}$
을 모두 만족하므로 먼저 ㉠에 ㉢을 대입하면
$y=-3(-5y+3)-5$, $14y=14 \quad \therefore y=1$
$y=1$을 ㉢에 대입하면 $x=-5\times1+3=-2$
$\therefore b=-2,\ c=1$
또, $x=-2$, $y=1$을 ㉡에 대입하면
$2\times(-2)-a\times1=7$
$-a=11 \quad \therefore a=-11$
$\therefore |a+b+c|=|-11-2+1|=12$

9 $\begin{cases} 2x-3y=a+3 & \cdots\cdots ㉠ \\ 3x-y=11+a & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$
㉠−㉡×3을 하면
$-7x=-2a-30$
$\therefore x=\frac{2a+30}{7},\ y=\frac{13-a}{7}$
그런데 $x:y=2:3$에서 $3x=2y$이므로
$3\times\frac{2a+30}{7}=2\times\frac{13-a}{7}$, $6a+90=26-2a$
$8a=-64 \quad \therefore a=-8$

다른 풀이
㉡−㉠을 하면 $x+2y=8 \quad \cdots\cdots ㉢$
$x:y=2:3$에서 $3x=2y$, $3x-2y=0 \quad \cdots\cdots ㉣$
㉢+㉣을 하면 $4x=8 \quad \therefore x=2,\ y=3$
구한 해를 ㉠에 대입하면 $a=-8$

10 $\frac{1}{x}=m$, $\frac{1}{y}=n$으로 치환하면
$\begin{cases} 3m+2n=12 & \cdots\cdots ㉠ \\ m-2n=-4 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$
㉠+㉡을 하면 $4m=8 \quad \therefore m=2,\ n=3$
따라서 $m=\frac{1}{x}=2$에서 $x=\frac{1}{2}$
$n=\frac{1}{y}=3$에서 $y=\frac{1}{3}$

11 서술형
표현 단계 $\begin{cases} \frac{3}{x}-\frac{1}{y}=9 \\ -\frac{1}{x}+\frac{2}{y}=2 \end{cases}$에서 $\frac{1}{x}=A$, $\frac{1}{y}=B$로 치환하여
식을 세우면
변형 단계 $\begin{cases} 3A-B=9 & \cdots\cdots ㉠ \\ -A+2B=2 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$
풀이 단계 ㉠×2+㉡을 하면 $5A=20$
$A=4 \quad \therefore x=\frac{1}{4}$
$A=4$를 ㉡에 대입하면 $-4+2B=2$
$B=3 \quad \therefore y=\frac{1}{3}$
$x=\frac{1}{4}$, $y=\frac{1}{3}$이 $x-3my=2$를 만족하므로
$\frac{1}{4}-3\times m\times\frac{1}{3}=2$
$\frac{1}{4}-m=2$
확인 단계 $\therefore m=-\frac{7}{4}$

12 두 연립방정식의 해는
$\begin{cases} 2x-3y=5 & \cdots\cdots ㉠ \\ 3x+y=-9 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$의 해와 같다.
㉠+㉡×3을 하면 $11x=-22$
$\therefore x=-2,\ y=-3$
$x=-2$, $y=-3$을 나머지 두 일차방정식에 대입하면
$\begin{cases} -4-3a=b \\ -2b+3a=2 \end{cases}$, 즉 $\begin{cases} 3a+b=-4 & \cdots\cdots ㉢ \\ 3a-2b=2 & \cdots\cdots ㉣ \end{cases}$
㉢−㉣을 하면 $3b=-6$
$\therefore a=-\frac{2}{3},\ b=-2$

13 미지수가 2개인 연립일차방정식의 해가 2개 이상인 경우는 해가 무수히 많음을 뜻한다.

$\begin{cases} kx-3y=0 \\ (2-k)x+y=0 \end{cases}$ 의 해가 무수히 많으려면

$\dfrac{k}{2-k}=\dfrac{-3}{1}$이어야 한다.

즉, $k=-6+3k$ $\quad\therefore k=3$

> **TIP** 우변에 있는 항을 모두 좌변으로 이항하여
> $\begin{cases} ax+by=0 \\ a'x+b'y=0 \end{cases}$ 꼴로 변형한 후 문제를 해결한다.

14 해가 없으려면 $\dfrac{a-1}{2a}=\dfrac{1}{1}\neq\dfrac{2}{a-1}$이어야 하므로

$\dfrac{a-1}{2a}=1$에서 $a-1=2a$ $\quad\therefore a=-1$

15 연립방정식의 해가 무수히 많으려면

$\dfrac{3}{2}=\dfrac{2a}{3(a-1)}=\dfrac{2}{-b}$이어야 한다.

$\dfrac{3}{2}=\dfrac{2a}{3(a-1)}$에서 $9(a-1)=4a$ $\quad\therefore a=\dfrac{9}{5}$

$\dfrac{3}{2}=\dfrac{2}{-b}$에서 $-3b=4$ $\quad\therefore b=-\dfrac{4}{3}$

16 서술형

표현 단계 $\begin{cases} x+y=2k & \cdots\cdots ㉠ \\ 3x+y=8k & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

풀이 단계 ㉡−㉠을 하면 $2x=6k$ $\quad\therefore x=3k$

$x=3k$를 ㉠에 대입하면 $y=-k$

따라서 $x=3k$, $y=-k$를 주어진 식에 대입하면

(주어진 식)$=\dfrac{6k+3k}{3k-2k}=\dfrac{9k}{k}=9$

확인 단계 $\therefore \dfrac{2x-3y}{x+2y}=9$

17 $\begin{cases} \dfrac{5}{x+y}-\dfrac{2}{x-y}=1 \\ \dfrac{1}{x-y}-\dfrac{3}{x+y}=1 \end{cases}$ 에서

$\dfrac{1}{x+y}=A$, $\dfrac{1}{x-y}=B$로 치환하면

$\begin{cases} 5A-2B=1 & \cdots\cdots ㉠ \\ -3A+B=1 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠+㉡×2를 하면 $-A=3$ $\quad\therefore A=-3$

$A=-3$을 ㉡에 대입하면 $9+B=1$ $\quad\therefore B=-8$

즉, $\begin{cases} \dfrac{1}{x+y}=-3 \\ \dfrac{1}{x-y}=-8 \end{cases}$ 이므로 $\begin{cases} x+y=-\dfrac{1}{3} & \cdots\cdots ㉢ \\ x-y=-\dfrac{1}{8} & \cdots\cdots ㉣ \end{cases}$

㉢+㉣을 하면 $2x=-\dfrac{11}{24}$ $\quad\therefore x=-\dfrac{11}{48}$

$x=-\dfrac{11}{48}$을 ㉢에 대입하면

$-\dfrac{11}{48}+y=-\dfrac{1}{3}$ $\quad\therefore y=-\dfrac{5}{48}$

18 y의 값이 x의 값의 2배이므로 $y=2x$를 주어진 연립방정식에 대입하면

$\begin{cases} (m+2)x+2(1-m)x=-1 \\ mx+2(m-2)x=-5 \end{cases}$

전개하여 정리하면

$\begin{cases} (4-m)x=-1 & \cdots\cdots ㉠ \\ (3m-4)x=-5 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠, ㉡의 해가 같아야 하므로

$\dfrac{-1}{4-m}=\dfrac{-5}{3m-4}$

$-3m+4=-20+5m$

$8m=24$ $\quad\therefore m=3$

19 $\begin{cases} 2x-y+z=3 & \cdots\cdots ㉠ \\ x-2y+z=0 & \cdots\cdots ㉡ \\ x+y-2z=-3 & \cdots\cdots ㉢ \end{cases}$

㉠−㉡을 하면 $x+y=3$ $\cdots\cdots$ ㉣

㉡×2+㉢을 하면 $3x-3y=-3$,

$x-y=-1$ $\cdots\cdots$ ㉤

㉣+㉤을 하면 $2x=2$ $\quad\therefore x=1$, $y=2$

$x=1$, $y=2$를 ㉠에 대입하면

$2-2+z=3$ $\quad\therefore z=3$

$x=a$, $y=b$, $z=c$이므로 $a=1$, $b=2$, $c=3$

$\therefore abc=1\times2\times3=6$

20 $(x+y):(y+z):(z+x)=7:8:9$이므로

$x+y=7k$, $y+z=8k$, $z+x=9k$ (k는 0이 아닌 상수)라 하면

$\begin{cases} x+y=7k & \cdots\cdots ㉠ \\ y+z=8k & \cdots\cdots ㉡ \\ z+x=9k & \cdots\cdots ㉢ \end{cases}$

㉠+㉡+㉢을 하면 $2(x+y+z)=24k$

$\therefore x+y+z=12k$ $\cdots\cdots$ ㉣

㉠을 ㉣에 대입하면 $z=5k$

㉡을 ㉣에 대입하면 $x=4k$

㉢을 ㉣에 대입하면 $y=3k$

$\therefore x=4k$, $y=3k$, $z=5k$

그런데 $x+y+z=36$이므로 ㉣에서 $12k=36$ $\quad\therefore k=3$

$\therefore x=12$, $y=9$, $z=15$

$\therefore x-y+z=18$

3 STEP 최고 실력 완성하기

79쪽

1 $x=8,\ y=-7$ **2** -2 **3** $a=-1,\ b=3$ **4** $-4<a<16$

문제 풀이

1 순환소수를 분수로 고치면

$$\begin{cases} \frac{11}{90}x+\frac{1}{9}y=\frac{2}{10} \\ \frac{2}{9}x+\frac{21}{90}y=\frac{13}{90} \end{cases}$$

즉, $\begin{cases} 11x+10y=18 & \cdots\cdots ㉠ \\ 20x+21y=13 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠$\times 20-$㉡$\times 11$을 하여 풀면

$x=8,\ y=-7$

2 주어진 연립방정식의 해가 무수히 많으려면

$\frac{-2}{4}=\frac{-1}{-a}=\frac{a+2}{-2a-4}$

$\frac{-2}{4}=\frac{-1}{-a}$에서 $2a=-4$ $\therefore a=-2$

이때 $\frac{a+2}{-2a-4}=\frac{-2}{4}$는 a의 값에 관계없이 성립한다.

$\therefore a=-2$

3 네 직선이 한 점에서 만나므로 두 직선

$\begin{cases} 3x+y=8 & \cdots\cdots ㉠ \\ x+3y=8 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

의 교점을 나머지 두 직선도 지나야 한다.

㉠$-$㉡$\times 3$에서

$-8y=-16$ $\therefore y=2$

$y=2$를 ㉠에 대입하면

$3x+2=8$ $\therefore x=2$

즉, ㉠, ㉡의 교점은 $(2,\ 2)$이고 이 점은 두 직선

$\begin{cases} ax+by=4 \\ 2ax-3by=-22 \end{cases}$도 지나야 하므로

$x=2,\ y=2$를 대입하면

$\begin{cases} 2a+2b=4 \\ 4a-6b=-22 \end{cases}$

즉, $\begin{cases} a+b=2 & \cdots\cdots ㉢ \\ 2a-3b=-11 & \cdots\cdots ㉣ \end{cases}$

㉢$\times 2-$㉣을 하여 풀면

$a=-1,\ b=3$

4 $\begin{cases} x+y=10 & \cdots\cdots ㉠ \\ y+z=6 & \cdots\cdots ㉡ \\ z+x=a & \cdots\cdots ㉢ \end{cases}$

㉠$+$㉡$+$㉢을 하면

$2(x+y+z)=16+a$

$\therefore x+y+z=8+\frac{a}{2}$ $\cdots\cdots$ ㉣

㉣$-$㉠을 하면 $z=\frac{a}{2}-2$

㉣$-$㉡을 하면 $x=2+\frac{a}{2}$

㉣$-$㉢을 하면 $y=8-\frac{a}{2}$

$x,\ y$가 양수이므로 $2+\frac{a}{2}>0$이고 $8-\frac{a}{2}>0$

$2+\frac{a}{2}>0$에서 $a>-4$ $\cdots\cdots$ ㉤

$8-\frac{a}{2}>0$에서 $a<16$ $\cdots\cdots$ ㉥

㉤, ㉥을 동시에 만족하는 a의 값의 범위는

$-4<a<16$

2 연립방정식의 활용

1 STEP 주제별 실력다지기

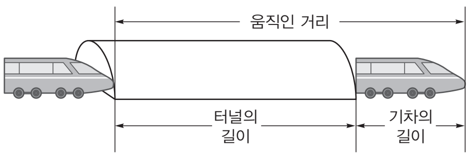
81~86쪽

1 49	**2** 624	**3** 키위 : 13, 배 : 8	**4** 9세	**5** 20회	**6** 5.6 km
7 갑 : 분속 60 m, 을 : 분속 40 m		**8** 시속 4 km	**9** 오르막길 : 시속 $\frac{10}{3}$ km, 내리막길 : 시속 20 km		
10 A : 분속 70 m, B : 분속 50 m		**11** 강물 : 시속 2.5 km, 유람선 : 시속 7.5 km			**12** 80 m
13 속력 : 초속 22 m, 길이 : 600 m		**14** 100 g	**15** 100 g	**16** 100 g, A : 8 %, B : 3 %	
17 남학생 : 92명, 여학생 : 141명		**18** 60명	**19** A : 1500원, B : 2000원		**20** 37개
21 12일	**22** A : 40일, B : 60일		**23** 50분		

최상위 NOTE 07 특수한 상황에서 거리 또는 속력 구하기

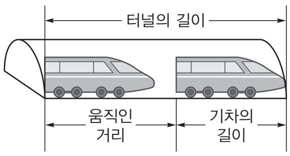
기차가 터널을 통과할 때 움직인 거리를 구할 때에는 기차의 길이를 고려해야 한다.

(1) 터널을 완전히 통과할 때 기차가 움직인 거리



→ (움직인 거리)=(터널의 길이)+(기차의 길이)

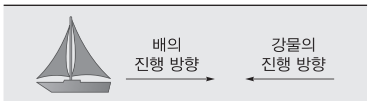
(2) 터널을 통과할 때 기차가 안 보이는 동안 움직인 거리



→ (움직인 거리)=(터널의 길이)−(기차의 길이)

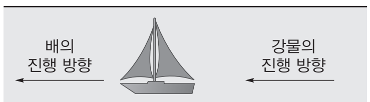
흐르는 강에서의 배의 속력을 구할 때에는 강물의 속력을 고려해야 한다.

(1) 배가 강을 거슬러 올라갈 때의 속력



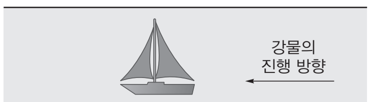
→ (배의 속력)=(정지한 물에서의 배의 속력)−(강물의 속력)

(2) 배가 강을 따라 내려올 때의 속력



→ (배의 속력)=(정지한 물에서의 배의 속력)+(강물의 속력)

(3) 배의 엔진이 멈춰있을 때의 속력



→ (배의 속력)=(강물의 속력)

1 십의 자리의 숫자를 x, 일의 자리의 숫자를 y라 하면 구하는 수는 $10x+y$이다.
일의 자리의 숫자가 십의 자리의 숫자의 2배보다 1이 크므로
$y=2x+1$ …… ㉠
십의 자리의 숫자와 일의 자리의 숫자를 바꾼 수
$10y+x$는 처음 수보다 45가 크므로
$(10y+x)=(10x+y)+45$
$9y=9x+45$
$\therefore y=x+5$ …… ㉡
㉠을 ㉡에 대입하면
$2x+1=x+5$ $\therefore x=4$
$x=4$를 ㉡에 대입하면 $y=9$
따라서 처음 수는 49이다.

2 N의 백의 자리의 숫자를 x, 십의 자리의 숫자를 y, 일의 자리의 숫자를 z라 하면
$N=100x+10y+z$이다.
N은 각 자리의 숫자의 합의 52배와 같으므로
$100x+10y+z=52(x+y+z)$
$48x-42y-51z=0$
$\therefore 16x-14y-17z=0$ …… ㉠
백의 자리의 숫자와 일의 자리의 숫자를 바꾼 수
$100z+10y+x$는 N보다 198이 작으므로
$100z+10y+x=100x+10y+z-198$
$-99x+99z=-198$
$\therefore x-z=2$ …… ㉡
백의 자리의 숫자와 일의 자리의 숫자의 합은 십의 자리의 숫자의 5배와 같으므로
$x+z=5y$
$\therefore x-5y+z=0$ …… ㉢
$$\begin{cases} 16x-14y-17z=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x-z=2 & \cdots\cdots ㉡ \\ x-5y+z=0 & \cdots\cdots ㉢ \end{cases}$$
㉡+㉢을 하면 $2x-5y=2$
$\therefore y=\frac{2}{5}x-\frac{2}{5}$ …… ㉣
또, ㉡에서 $z=x-2$ …… ㉤
㉣, ㉤을 ㉠에 대입하면
$16x-14\left(\frac{2}{5}x-\frac{2}{5}\right)-17(x-2)=0$
$80x-28x+28-85x+170=0$
$-33x+198=0$ $\therefore x=6$
$x=6$을 ㉣, ㉤에 대입하면
$y=2$, $z=4$
따라서 N은 624이다.

3 키위가 x개, 배가 y개라 하면 총 무게가 4.1 kg이므로
$80x+300y+660=4100$
$\therefore 4x+15y=172$ …… ㉠
총 가격이 19000원이므로
$600x+1400y=19000$
$\therefore 3x+7y=95$ …… ㉡
㉠×3−㉡×4를 하면 $17y=136$ $\therefore y=8$
$y=8$을 ㉡에 대입하면 $3x+56=95$ $\therefore x=13$
따라서 키위의 개수는 13, 배의 개수는 8이다.

4 현재 은정이, 아버지, 할아버지의 나이를 각각 x세, y세, z세라 하면
$y=4x+2$ …… ㉠
$y+z=12x$ …… ㉡
$(x+23)+(y+23)=z+23$
$\therefore x+y+23=z$ …… ㉢
㉢을 ㉡에 대입하면
$y+(x+y+23)=12x$ $\therefore 11x=2y+23$ …… ㉣
㉠을 ㉣에 대입하면
$11x=2(4x+2)+23$ $\therefore x=9$
따라서 은정이의 나이는 9세이다.

TIP 현재 나이가 x세일 때, n년 후 나이는 $(x+n)$세이다.

5 A가 이긴 횟수를 x회, B가 이긴 횟수를 y회라 하면
A는 y회, B는 x회 진 것이다.
A는 x회 이기고 y회 져서 30칸 올라갔으므로
$3x-2y=30$ …… ㉠
B는 x회 지고 y회 이겨서 5칸 올라갔으므로
$-2x+3y=5$ …… ㉡
㉠×3+㉡×2를 하면 $5x=100$ $\therefore x=20$
따라서 A는 20회 이겼다.

6 올라갈 때 걸은 거리를 x km, 내려올 때 걸은 거리를 y km라 하면 내려올 때 걸은 거리가 3 km 더 많기 때문에
$y=x+3$ …… ㉠
총 5시간 40분이 걸렸으므로
$\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=5\frac{40}{60}$
$\therefore 3x+2y=34$ …… ㉡
㉠을 ㉡에 대입하면 $3x+2(x+3)=34$, $5x=28$
$\therefore x=5.6$
따라서 올라갈 때 걸은 거리는 5.6 km이다.

7 갑의 속력을 분속 x m, 을의 속력을 분속 y m라 하자.

갑이 600 m 걷는 동안 을이 400 m를 걸으므로

$x : y = 600 : 400 \qquad \therefore x = \frac{3}{2}y \qquad \cdots\cdots$ ㉠

2400 m 떨어진 두 지점에서 서로 마주 보고 걸어서 24분만에 만나므로

$24x + 24y = 2400 \qquad \therefore x + y = 100 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $\frac{5}{2}y = 100 \qquad \therefore y = 40$

$y = 40$을 ㉠에 대입하면 $x = 60$

따라서 갑과 을의 속력은 각각 분속 60 m, 분속 40 m이다.

TIP 두 사람이 서로 마주 보고 걷다가 만나는 경우 다음이 성립한다.
(두 사람이 이동한 거리의 합)
=(두 사람이 출발한 두 지점 사이의 거리)

8 희선이가 걷는 속력을 시속 x km, 버스의 속력을 시속 y km라 하자.

갈 때는 1시간 걷고 3시간 버스를 타서 52 km를 움직였으므로

$x + 3y = 52 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

올 때는 2시간 버스를 타고 5시간 걸어서 52 km를 움직였으므로

$5x + 2y = 52 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠$\times 2-$㉡$\times 3$을 하면 $-13x = -52 \qquad \therefore x = 4$

따라서 희선이가 걷는 속력은 시속 4 km이다.

9 오르막길에서의 속력을 시속 x km, 내리막길에서의 속력을 시속 y km라 하면

$$\begin{cases} \frac{8}{x} + \frac{12}{y} = 3 \\ \frac{12}{x} + \frac{8}{y} = 4 \end{cases}$$

$\frac{1}{x} = X,\ \frac{1}{y} = Y$라 하면

$\begin{cases} 8X + 12Y = 3 \\ 12X + 8Y = 4 \end{cases}$ 즉, $\begin{cases} 8X + 12Y = 3 & \cdots\cdots ㉠ \\ 3X + 2Y = 1 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠$-$㉡$\times 6$을 하면

$-10X = -3 \qquad \therefore X = \frac{3}{10}$

$X = \frac{3}{10}$을 ㉡에 대입하면

$\frac{9}{10} + 2Y = 1 \qquad \therefore Y = \frac{1}{20}$

즉, $x = \frac{10}{3}$, $y = 20$이다.

따라서 오르막길에서의 속력은 시속 $\frac{10}{3}$ km이고, 내리막길에서의 속력은 시속 20 km이다.

10 A의 속력을 분속 x m, B의 속력을 분속 y m라 하자.

반대 방향으로 걸어가면 20분만에 처음 만나므로

$20x + 20y = 2400 \qquad \therefore x + y = 120 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

같은 방향으로 걸어가면 2시간만에 처음 만나므로

$120x - 120y = 2400 \qquad \therefore x - y = 20 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠+㉡을 하면 $2x = 140 \qquad \therefore x = 70$

$x = 70$을 ㉠에 대입하면 $y = 50$

따라서 A는 분속 70 m, B는 분속 50 m로 걷는다.

11 강물이 흐르는 속력을 시속 x km, 정지한 물에서 유람선의 속력을 시속 y km라 하자.

거슬러 올라갈 때 강물의 속력만큼 유람선의 속력이 감소하므로 유람선의 속력은 시속 $(y-x)$ km이다.

$\frac{10}{y-x} = 2 \qquad \therefore y - x = 5 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

내려올 때 강물의 속력만큼 유람선의 속력이 증가하므로 유람선의 속력은 시속 $(y+x)$ km이다.

$\frac{10}{y+x} = 1 \qquad \therefore y + x = 10 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠+㉡을 하면 $2y = 15 \qquad \therefore y = 7.5$

$y = 7.5$를 ㉡에 대입하면 $x = 2.5$

따라서 강물이 흐르는 속력은 시속 2.5 km이고, 정지한 물에서 유람선의 속력은 시속 7.5 km이다.

12 기차의 속력을 초속 x m, 기차의 길이를 y m라 하자.

길이가 1.6 km인 터널을 완전히 통과하는 데 1분 10초, 즉 70초가 걸리므로

$70x = 1600 + y \qquad \cdots\cdots$ ㉠

길이가 640 m인 다리를 완전히 통과하는 데 30초가 걸리므로

$30x = 640 + y \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠$-$㉡을 하면

$40x = 960 \qquad \therefore x = 24$

$x = 24$를 ㉡에 대입하면

$720 = 640 + y \qquad \therefore y = 80$

따라서 기차의 길이는 80 m이다.

13 기차의 속력을 초속 x m, 기차의 길이를 y m라 하자.

길이가 500 m인 다리를 완전히 통과하는 데 50초가 걸리므로

$500 + y = 50x \qquad \cdots\cdots$ ㉠

길이가 2140 m인 터널을 통과하는 데 기차 전체가 70초 동안 터널에 있었으므로

$2140 - y = 70x \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠+㉡에서 $120x = 2640 \qquad \therefore x = 22$

$x = 22$를 ㉠에 대입하면 $y = 600$

따라서 기차의 속력은 초속 22 m, 기차의 길이는 600 m이다.

14 6 %의 소금물과 8 %의 소금물을 각각 x g, y g이라 하면 더 부은 물은 y g이므로

$$\begin{cases} x+y+y=200 \\ \frac{6}{100}x+\frac{8}{100}y=\frac{5}{100}\times 200 \end{cases}$$

즉, $\begin{cases} x+2y=200 & \cdots\cdots ㉠ \\ 3x+4y=500 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉡$-$㉠$\times 2$를 하면 $x=100$

따라서 6 %의 소금물의 양은 100 g이다.

TIP 소금물에 물을 부으면 소금물의 양은 늘어나지만 소금의 양은 변하지 않는다.

15 4 %의 소금물의 양을 $3x$ g이라 하면 더 부은 물의 양은 $2x$ g이다.

또, 6 %의 소금물의 양을 y g이라 하자.

총 소금물의 양이 600 g이므로

$3x+y+2x=600 \qquad \therefore 5x+y=600 \qquad \cdots\cdots ㉠$

농도가 4.5 %가 되었으므로

$\frac{4}{100}\times 3x+\frac{6}{100}\times y=\frac{4.5}{100}\times 600$

$\therefore 2x+y=450 \qquad \cdots\cdots ㉡$

㉠$-$㉡을 하면 $3x=150 \qquad \therefore x=50$

따라서 더 부은 물의 양은 $2x=2\times 50=100$(g)

16 소금물 A, B의 농도를 각각 x %, y %라 하면

$$\begin{cases} \frac{x}{100}\times 200+\frac{y}{100}\times 300=\frac{5}{100}\times 500 \\ \frac{x}{100}\times 300+\frac{y}{100}\times 200=\frac{6}{100}\times 500 \end{cases}$$

즉, $\begin{cases} 2x+3y=25 & \cdots\cdots ㉠ \\ 3x+2y=30 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠$\times 2-$㉡$\times 3$을 하면 $-5x=-40 \qquad \therefore x=8$

$x=8$을 ㉠에 대입하면 $16+3y=25 \qquad \therefore y=3$

따라서 소금물 A, B의 농도는 각각 8 %, 3 %이고 5 %의 소금물을 만들기 위해 더 넣어야 할 물의 양을 z g이라 하면

$\frac{6}{100}\times 500=\frac{5}{100}\times(500+z)$

$3000=2500+5z \qquad \therefore z=100$

따라서 더 넣어야 할 물의 양은 100 g이고, 처음 두 소금물 A, B의 농도는 각각 8 %, 3 %이다.

17 지난해 남녀 학생 수를 각각 x명, y명이라 하면

$\begin{cases} x+y=230 \\ \frac{15}{100}x-\frac{6}{100}y=3 \end{cases}$, 즉 $\begin{cases} x+y=230 & \cdots\cdots ㉠ \\ 5x-2y=100 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠$\times 2+$㉡을 하면 $7x=560$

$\therefore x=80,\ y=150$

따라서 올해 남학생 수는 $80\left(1+\frac{15}{100}\right)=92$(명),

여학생 수는 $150\left(1-\frac{6}{100}\right)=141$(명)이다.

18 입학 지원자의 수가 140명이고 남녀의 비가 3 : 4이므로

남자의 수는 $140\times\frac{3}{3+4}=60$(명),

여자의 수는 $140\times\frac{4}{3+4}=80$(명)이다.

합격자의 남녀의 비가 3 : 5이므로 합격한 남자, 여자의 수를 각각 $3x$명, $5x$명이라 하고, 불합격자의 남녀의 비가 1 : 1이므로 불합격한 남자, 여자의 수를 각각 y명이라 하면

	남(명)	여(명)
지원자	60	80
합격자	$3x$	$5x$
불합격자	y	y

위의 표에서 $\begin{cases} 3x+y=60 & \cdots\cdots ㉠ \\ 5x+y=80 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠$-$㉡을 하면 $-2x=-20 \qquad \therefore x=10$

$x=10$을 ㉠에 대입하면 $30+y=60 \qquad \therefore y=30$

따라서 불합격자의 수는 $2y=60$(명)이다.

19 A, B의 원가를 각각 x원, y원이라 하면

$x+y=3500 \qquad \cdots\cdots ㉠$

A는 4할의 이익을 붙여 정가를 정하고 정가의 20 %를 할인하였으므로

A의 판매가는 $1.4x\times\left(1-\frac{20}{100}\right)$(원)

B는 5할의 이익을 붙여 정가를 정하고 정가의 10 %를 할인하였으므로

B의 판매가는 $1.5y\times\left(1-\frac{10}{100}\right)$(원)

따라서 두 상품의 이익을 각각 구하면

(A의 이익)$=1.4x\times\left(1-\frac{20}{100}\right)-x=0.12x$(원)

(B의 이익)$=1.5y\times\left(1-\frac{10}{100}\right)-y=0.35y$(원)

그런데 두 상품을 합하여 880원의 이익이 생겼으므로

$0.12x+0.35y=880$에서

$12x+35y=88000 \qquad \cdots\cdots ㉡$

㉠$\times 12-$㉡을 하면 $-23y=-46000 \qquad \therefore y=2000$

$y=2000$을 ㉠에 대입하면 $x=1500$

따라서 A, B 상품의 원가는 각각 1500원, 2000원이다.

20 A 상품과 B 상품의 팔린 개수를 각각 x개, y개라 하면 총 82개가 팔렸으므로

$x+y=82 \qquad \cdots\cdots ㉠$

총 이익이 16020원이므로

$600\times\frac{6}{10}x+300\times\frac{2}{10}y=16020$

$\therefore 6x+y=267$ ...... ㉡

㉠−㉡을 하면 $-5x=-185$ $\therefore x=37$

따라서 A 상품은 37개가 팔렸다.

21 은정이와 현정이가 하루에 할 수 있는 일의 양을 각각 x, y라 하고, 전체 일의 양을 1이라 하면

$\begin{cases}4(x+y)=1 & \cdots\cdots ㉠\\ 2x+5y=1 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$

㉠−㉡×2를 하면 $-6y=-1$ $\therefore y=\frac{1}{6}$

$y=\frac{1}{6}$을 ㉡에 대입하면 $x=\frac{1}{12}$

따라서 은정이가 혼자서 하면 12일이 걸린다.

22 전체 일의 양을 1로 놓고, A, B가 하루에 할 수 있는 일의 양을 각각 x, y라 하면

A가 20일 동안, B가 30일 동안 일을 하면 일을 끝낼 수 있으므로

$20x+30y=1$ ...... ㉠

A, B가 동시에 하면 24일만에 일을 끝낼 수 있으므로

$24x+24y=1$ ...... ㉡

㉠×6−㉡×5를 하면

$60y=1$ $\therefore y=\frac{1}{60}$

$y=\frac{1}{60}$을 ㉠에 대입하면 $x=\frac{1}{40}$

따라서 각각 혼자서 일을 하면 A는 40일, B는 60일이 걸린다.

23 1분당 A, B 수도관에서 나오는 물의 양을 각각 x L, y L라 하자. A 수도관을 20분, B 수도관을 24분 사용하여 모두 채울 수 있으므로

$20x+24y=1000$

$\therefore 5x+6y=250$ ...... ㉠

A, B의 두 수도관을 동시에 16분, A 수도관을 10분 더 사용하면 80 L가 부족하게 채워지므로

$16(x+y)+10x=920$

$\therefore 13x+8y=460$ ...... ㉡

㉠×4−㉡×3에서

$-19x=-380$ $\therefore x=20$

따라서 A 수도관만을 사용할 때 $\frac{1000}{20}=50$(분)이 걸린다.

2 STEP 실력 높이기

87~90쪽

1 A : 312000원, B : 408000원 **2** 506명 **3** 남자 : 30명, 여자 : 25명

4 A : 140 g, B : 280 g **5** 68점 **6** A : 27세, B : 36세 **7** 2 %, 7 %

8 $a=72$, $b=35$ **9** 72명 **10** 빵 : 1000 g, 버터 : 100 g **11** 40원 : 8개, 80원 : 2개, 120원 : 6개

12 가로의 길이 : 10 cm, 세로의 길이 : 8 cm **13** 3 % : 200 g, 4 % : 300 g, 5 % : 300 g

14 입장료 : 52000원, 식사비 : 42000원, 교통비 : 2000원 **15** 나연 : 시속 4.5 km, 현정 : 시속 1.5 km **16** 12 km

문제 풀이

1 지난 달의 A, B의 판매액을 각각 x원, y원이라 하면

$x+y=700000$ ...... ㉠

또한, 이 달의 판매 증가액은 A가 $0.04x$원, B가 $0.02y$원이므로 $\frac{4}{100}x+\frac{2}{100}y=20000$

$\therefore 2x+y=1000000$ ...... ㉡

㉡−㉠을 하면 $x=300000$

$x=300000$을 ㉠에 대입하면 $y=400000$

따라서 이 달의 A, B의 판매액은 각각

$(1+0.04)x=1.04x=1.04\times300000=312000$(원)

$(1+0.02)y=1.02y=1.02\times400000=408000$(원)

2 서술형

표현 단계 작년 남학생, 여학생 수를 각각 x명, y명이라 하면 올해 남학생 수는 작년에 비해 $\frac{10}{100}x$명만큼 감소하였고, 올해 여학생 수는 작년에 비해 $\frac{10}{100}y$명만큼 증가했다.

따라서 연립방정식을 세우면

$$\begin{cases} x+y=960 & \cdots\cdots ㉠ \\ -\frac{10}{100}x+\frac{10}{100}y=-4 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

변형 단계 ㉡을 간단히 하면

$-x+y=-40$ ⋯⋯ ㉢

풀이 단계 ㉠+㉢을 하면

$2y=920$ $\therefore y=460$

확인 단계 따라서 올해의 여학생 수는

$460\times\left(1+\frac{10}{100}\right)=506$(명)이다.

3

남자와 여자의 수를 각각 x명, y명이라 하면

$x+y=55$ ⋯⋯ ㉠

$\frac{1}{6}x+\frac{2}{5}y=55\times\frac{3}{11}$, $5x+12y=450$ ⋯⋯ ㉡

㉡$-$㉠$\times5$를 하면 $7y=175$

$\therefore y=25$, $x=30$

따라서 남자는 30명, 여자는 25명이다.

4

필요한 합금 A, B의 양을 각각 x g, y g이라 하면 합금 A의 철과 니켈의 비가 1 : 1이므로 철과 니켈의 양은 각각 $\frac{1}{2}x$ g이고, 합금 B의 철과 니켈의 비가 3 : 1이므로 철과 니켈의 양은 각각 $\frac{3}{4}y$ g, $\frac{1}{4}y$ g이다.

또한, 두 종류의 합금을 녹여서 철과 니켈을 2 : 1의 비율로 합금 420 g을 만들어야 하므로 새로운 합금의 철과 니켈의 양은 각각 280 g, 140 g이다.

	철(g)	니켈(g)
합금 A	$\frac{1}{2}x$	$\frac{1}{2}x$
합금 B	$\frac{3}{4}y$	$\frac{1}{4}y$
새로운 합금	280	140

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x+\frac{3}{4}y=280 \\ \frac{1}{2}x+\frac{1}{4}y=140 \end{cases} \text{즉, } \begin{cases} 2x+3y=1120 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x+y=560 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠$-$㉡을 하면 $2y=560$ $\therefore y=280$

$y=280$을 ㉡에 대입하면 $x=140$

따라서 합금 A는 140 g, 합금 B는 280 g이 필요하다.

다른 풀이

합금 A에 들어 있는 철과 니켈의 양을 각각 x g이라 하고 합금 B에 들어 있는 철과 니켈의 양을 각각 $3y$ g, y g이라 하면

	철(g)	니켈(g)
합금 A	x	x
합금 B	$3y$	y
새로운 합금	280	140

$$\begin{cases} x+3y=280 & \cdots\cdots ㉠ \\ x+y=140 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠$-$㉡을 하면 $2y=140$ $\therefore y=70$

$y=70$을 ㉡에 대입하면 $x=70$

따라서 합금 A는 $2x=2\times70=140$(g), 합금 B는 $4y=4\times70=280$(g)이 필요하다.

5

합격자의 평균을 x점, 불합격자의 평균을 y점이라 하자.

전체 평균은 $\frac{30x+20y}{50}=\frac{3x+2y}{5}$이고,

최저 합격 점수는 50명의 평균보다 5점이 낮고 합격자의 평균보다는 30점이 낮으며, 불합격자의 평균의 2배보다 3점이 낮으므로 최저 합격 점수는

$\frac{3x+2y}{5}-5=x-30=2y-3$이다.

$$\begin{cases} \frac{3x+2y}{5}-5=x-30 \\ x-30=2y-3 \end{cases}$$

즉, $\begin{cases} 2x-2y=125 & \cdots\cdots ㉠ \\ x-2y=27 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠$-$㉡을 하면 $x=98$

따라서 구하는 최저 합격 점수는

$98-30=68$(점)이다.

TIP 두 집단의 평균 구하기

A 집단 학생 a명과 B 집단 학생 b명의 점수의 평균을 각각 x점, y점이라 하면 A 집단과 B 집단의 점수의 총합은 각각 ax점, by점이므로 두 집단 전체의 평균은 $\frac{ax+by}{a+b}$점이다.

6

현재 A는 x세, B는 y세라고 하자.

A의 나이가 $\frac{y}{2}$세일 때, B의 나이가 x세이므로

	과거 나이	현재 나이
A	$\frac{1}{2}y$	x
B	x	y

$$\begin{cases} x+y=63 \\ x-\frac{y}{2}=y-x \end{cases} \text{즉, } \begin{cases} x+y=63 & \cdots\cdots ㉠ \\ 4x-3y=0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠×3+㉡을 하면 $7x=189$　　∴ $x=27$

$x=27$을 ㉠에 대입하면 $y=36$

따라서 현재 A의 나이는 27세, B의 나이는 36세이다.

7 두 그릇을 A, B라 하고 각각의 소금물의 농도를 x %, y %라 하자.

A, B에 담긴 소금물을 40 g씩 맞바꾸었으므로

A의 소금의 양은 $\frac{x}{100}\times60+\frac{y}{100}\times40=4$

∴ $3x+2y=20$　　…… ㉠

B의 소금의 양은 $\frac{x}{100}\times40+\frac{y}{100}\times60=5$

∴ $2x+3y=25$　　…… ㉡

㉠×3−㉡×2를 하면

$5x=10$　　∴ $x=2$

$x=2$를 ㉠에 대입하면

$6+2y=20$

∴ $y=7$

따라서 두 그릇의 소금물의 농도는 각각 2 %, 7 %이다.

8 a는 b보다 37이 크므로 $a=b+37$　　…… ㉠

b의 십의 자리의 숫자를 m, 일의 자리의 숫자를 n이라 하면

$b=10m+n$　　…… ㉡

이고, 일의 자리의 숫자와 십의 자리의 숫자를 바꾼 수 $10n+m$은 a보다 19가 작으므로

$10n+m=a-19$　　…… ㉢

㉡을 ㉠에 대입하면 $a=10m+n+37$　　…… ㉣

㉣을 ㉢에 대입하면

$10n+m=10m+n+37-19$

$9n=9m+18$　　∴ $n=m+2$　　…… ㉤

a는 두 자리의 자연수이므로 ㉠에서

$10\leq b+37\leq99$　　∴ $-27\leq b\leq62$

또, b도 두 자리의 자연수이므로 $10\leq b\leq99$

∴ $10\leq b\leq62$　　…… ㉥

따라서 ㉡, ㉥에서 $10\leq10m+n\leq62$이면서 ㉤을 만족하는 m, n은

$(m, n)=(1, 3), (2, 4), (3, 5), (4, 6), (5, 7)$

∴ $b=13, 24, 35, 46, 57$

이때 ㉠에서 $a=50, 61, 72, 83, 94$이고,

이 중에서 3의 배수는 72뿐이므로

$a=72$, $b=35$

9 서술형

표현 단계 처음 항구 A에서 배에 탔던 남자 승객 수를 x명, 여자 승객 수를 y명이라 하자.

(i) 항구 B를 지났을 때 남은 승객 수는 남자는 $(x-12)$명, 여자는 y명이므로 $4(x-12)=y$

즉, $4x-y=48$

(ii) 항구 C를 지났을 때 남은 승객 수는 남자는 $\{(x-12)-6\}$명, 여자는 $(y-6)$명이므로

$(x-12)-6=\frac{1}{7}(y-6)$

즉, $7x-y=120$

풀이 단계 따라서 연립방정식

$\begin{cases}4x-y=48 & \cdots\cdots ㉠\\ 7x-y=120 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$ 에서

㉡−㉠ 을 하면

$3x=72$　　∴ $x=24$

$x=24$를 ㉠에 대입하면

$96-y=48$　　∴ $y=48$

확인 단계 따라서 처음 승객 수는 $24+48=72$(명)이다.

10 빵을 x g, 버터를 y g 먹는다고 하면

단백질 섭취량에서

$\frac{8}{100}x+\frac{2}{100}y=82$　　∴ $4x+y=4100$　　…… ㉠

지방 섭취량에서

$\frac{1}{100}x+\frac{80}{100}y=90$　　∴ $x+80y=9000$　　…… ㉡

㉡×4−㉠을 하면

$319y=31900$　　∴ $y=100$

$y=100$을 ㉠에 대입하면 $x=1000$

따라서 빵 1000 g, 버터 100 g을 먹으면 된다.

11 40원, 80원, 120원짜리 물건을 각각 x개, y개, z개 샀다고 하자. (단, x, y, z는 모두 양의 정수)

물건을 총 16개 샀으므로

$x+y+z=16$　　…… ㉠

가격이 총 1200원이므로

$40x+80y+120z=1200$

∴ $x+2y+3z=30$　　…… ㉡

㉡−㉠을 하면 $y+2z=14$　　…… ㉢

㉢에서 y, z는 모두 양의 정수이고 z를 최대로 하려면

$z=6$, $y=2$

㉠에서 $x+2+6=16$이므로 $x=8$

따라서 40원, 80원, 120원짜리 물건을 각각 8개, 2개, 6개 샀다.

12 서술형

표현 단계 작은 직사각형의 가로의 길이를 x cm, 세로의 길이를 y cm $(x>y)$라 하면

직사각형 ABCD의 넓이는

$\overline{AB}\times\overline{BC}=5y(x+y)=720$ 또는

(작은 직사각형의 넓이)$\times 9=9xy=720$으로 나타낼 수 있다.

변형 단계 $\begin{cases}5y(x+y)=720\\9xy=720\end{cases}$에서

$\begin{cases}xy+y^2=144 & \cdots\cdots ㉠\\xy=80 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$

풀이 단계 ㉡을 ㉠에 대입하면 $80+y^2=144$

$y^2=64$

y는 양수이므로 $y=8$

$y=8$을 ㉡에 대입하면 $x=10$

확인 단계 따라서 작은 직사각형의 가로의 길이는 10 cm, 세로의 길이는 8 cm이다.

13 3 %, 4 %, 5 %의 소금물의 양을 각각 x g, y g, z g이라 하면

$x+y+z=800$ $\cdots\cdots$ ㉠

$\frac{3}{100}x+\frac{4}{100}y=\frac{3.6}{100}(x+y)$에서

$3x=2y \quad \therefore y=\frac{3}{2}x$ $\cdots\cdots$ ㉡

$\frac{3}{100}x+\frac{5}{100}z=\frac{4.2}{100}(x+z)$에서

$3x=2z \quad \therefore z=\frac{3}{2}x$ $\cdots\cdots$ ㉢

㉡, ㉢을 ㉠에 대입하면

$x+\frac{3}{2}x+\frac{3}{2}x=800$

$\therefore x=200,\ y=300,\ z=300$

따라서 3 %, 4 %, 5 %의 소금물의 양은 각각 200 g, 300 g, 300 g이다.

14 입장료를 x원, 식사비를 y원, 교통비를 z원이라 하면 입장료가 교통비의 5배에 식사비를 합한 것과 같으므로

$x=5z+y$ $\cdots\cdots$ ㉠

희선, 찬희, 지은이가 부담한 금액은 각각

$(x-20000)$원, $(y-10000)$원, $(z+30000)$원이고 모두 같은 금액을 부담하였으므로

$x-20000=y-10000=z+30000$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉡에서

$\begin{cases}x-20000=y-10000\\y-10000=z+30000\end{cases}$

즉, $\begin{cases}x-y=10000 & \cdots\cdots ㉢\\y-z=40000 & \cdots\cdots ㉣\end{cases}$

㉠을 ㉢에 대입하면 $5z=10000 \quad \therefore z=2000$

$z=2000$을 ㉣에 대입하면 $y=42000$

$y=42000$을 ㉢에 대입하면 $x=52000$

따라서 입장료, 식사비, 교통비는 각각 52000원, 42000원, 2000원이다.

15 서술형

표현 단계 나연이의 속력을 시속 x km, 현정이의 속력을 시속 y km라 하면

(시간)$\times$(속력)$=$(거리)이고 자전거로 간 거리가 더 많으므로

$\begin{cases}2x-2y=6\\x+y=6\end{cases}$ 즉, $\begin{cases}x-y=3 & \cdots\cdots ㉠\\x+y=6 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$

풀이 단계 ㉠+㉡을 하면

$2x=9 \quad \therefore x=4.5$

$x=4.5$를 ㉡에 대입하면

$4.5+y=6 \quad \therefore y=1.5$

확인 단계 따라서 나연이의 속력은 시속 4.5 km, 현정이의 속력은 시속 1.5 km이다.

16 A, B의 속력의 비가 $200:300=2:3$이므로 A의 속력을 분속 $2x$ m, B의 속력을 분속 $3x$ m라 하고 호수의 둘레의 길이를 y m라 하면

$\begin{cases}80\times 3x-80\times 2x=y\\10\times 2x+10\times 3x\times 1.2=y-3600\end{cases}$

즉, $\begin{cases}80x=y & \cdots\cdots ㉠\\56x=y-3600 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$

㉠을 ㉡에 대입하면

$56x=80x-3600 \quad \therefore x=150$

$x=150$을 ㉠에 대입하면 $y=12000$

따라서 호수의 둘레의 길이는 12 km이다.

3 STEP 최고 실력 완성하기

91~92쪽

1 16 또는 20 **2** A : 260원, B : 120원 **3** 민수의 수입 : 16800원, 영희의 지출 : 10500원

4 $a=80$, $b=120$, $c=180$ **5** $\frac{5}{36}$ **6** $a=18$, $b=3$ **7** 10곡 **8** 1400 g

9 초속 850 m **10** 시속 12 km

문제 풀이

1 A, B, C 구슬이 각각 $2a$개, $2b$개, $2c$개씩 주머니에 들어 있다고 하자. (단, a, b, c는 자연수)

구슬의 개수가 56개이므로

$2a+2b+2c=56$ $\quad\therefore a+b+c=28$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

구슬의 무게가 192 g이므로

$6\times 2a+4\times 2b+2\times 2c=192$

$\therefore 3a+2b+c=48$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉡$-$㉠에서 $2a+b=20$ $\quad\cdots\cdots$ ㉢

또, A 구슬의 개수가 가장 적고, C 구슬의 개수가 가장 많으므로 $a<b<c$ $\quad\cdots\cdots$ ㉣

즉, ㉠, ㉢, ㉣을 만족하는 자연수의 순서쌍 (a, b, c)를 구하면 $(5, 10, 13)$, $(6, 8, 14)$

따라서 $b=8$ 또는 $b=10$이므로 B 구슬의 개수는 16 또는 20이다.

2 A, B 두 물건의 100 g당 정가를 각각 $13k$원, $6k$원 (k는 자연수)이라 하자. A, B를 각각 $16m$ g, $27m$ g (m은 양수) 구입했다면 구입 비용의 비는

$\left\{(13k-8)\times\frac{16m}{100}\right\} : \left\{(6k-8)\times\frac{27m}{100}\right\}=4 : 3$

$3\times 16m\times(13k-8)=4\times 27m\times(6k-8)$

$52k-32=54k-72$ $\quad\therefore k=20$

따라서 A, B의 100 g당 정가는 각각 260원, 120원이다.

3 민수와 영희의 일주일 동안의 수입을 각각 $12k$원, $7k$원 (k는 자연수)이라 하고, 지출을 각각 $7m$원, $5m$원 (m은 자연수)이라 하면

$\begin{cases} 12k-7m=2100 & \cdots\cdots ㉠ \\ 7k-5m=-700 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠$\times 5-$㉡$\times 7$을 하면

$11k=15400$ $\quad\therefore k=1400$

$k=1400$을 ㉠에 대입하면

$12\times 1400-7m=2100$ $\quad\therefore m=2100$

따라서 민수의 수입은 $12k=12\times 1400=16800$(원), 영희의 지출은 $5m=5\times 2100=10500$(원)이다.

4 $\frac{10}{100}\times a+\frac{20}{100}\times b=\frac{16}{100}(a+b)$에서

$5a+10b=8a+8b$, $3a=2b$

$\therefore a=\frac{2}{3}b$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$\frac{20}{100}\times b+\frac{30}{100}\times c=\frac{26}{100}(b+c)$에서

$10b+15c=13b+13c$, $3b=2c$

$\therefore c=\frac{3}{2}b$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

$a+b+c=380$이므로 ㉠, ㉡으로부터

$\frac{2}{3}b+b+\frac{3}{2}b=380$, $4b+6b+9b=2280$

$\therefore b=120$

㉠에서 $a=\frac{2}{3}b=\frac{2}{3}\times 120=80$

㉡에서 $c=\frac{3}{2}b=\frac{3}{2}\times 120=180$

$\therefore a=80$, $b=120$, $c=180$

5 전체 일의 양을 1이라 하고, A, B, C가 하루에 하는 일의 양을 각각 x, y, z라 하자.

A, B, C가 함께 하면 6일이 걸리므로

$6x+6y+6z=1$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

A와 C가 함께 하면 9일이 걸리므로

$9x+9z=1$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

B와 C가 함께 하면 12일이 걸리므로

$12y+12z=1$ $\quad\cdots\cdots$ ㉢

㉠$\times 2-$㉢을 하면

$12x=1$ $\quad\therefore x=\frac{1}{12}$

$x=\frac{1}{12}$을 ㉡에 대입하면

$\frac{3}{4}+9z=1$ $\quad\therefore z=\frac{1}{36}$

$z=\frac{1}{36}$을 ㉢에 대입하면

$12y+\frac{1}{3}=1$ $\quad\therefore y=\frac{1}{18}$

따라서 A, B가 하루에 하는 일의 양이 각각 전체의 $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{18}$이므로 둘이 함께 일하면 하루에 전체의

$\frac{1}{12}+\frac{1}{18}=\frac{5}{36}$의 일을 할 수 있다.

6 (i) 비커 A의 반을 비커 B에 넣고 잘 섞었을 때

$$\text{A}\begin{cases}\text{소금물의 양 : }400\text{ g}\\ \text{소금의 양 : }\dfrac{a}{100}\times400=4a(\text{g})\end{cases}$$

$$\text{B}\begin{cases}\text{소금물의 양 : }1200\text{ g}\\ \text{소금의 양 : }4a+\dfrac{b}{100}\times800=4a+8b(\text{g})\end{cases}$$

(ii) 다시 비커 B의 반을 비커 A에 넣고 잘 섞었을 때

$$\text{A}\begin{cases}\text{소금물의 양 : }600+400=1000(\text{g})\\ \text{소금의 양 : }4a+\dfrac{1}{2}(4a+8b)=6a+4b(\text{g})\end{cases}$$

$$\text{B}\begin{cases}\text{소금물의 양 : }600\text{ g}\\ \text{소금의 양 : }\dfrac{1}{2}(4a+8b)=2a+4b(\text{g})\end{cases}$$

비커 A의 농도가 12 %이므로

$\dfrac{6a+4b}{1000}\times100=12$

$\therefore 3a+2b=60$ …… ㉠

비커 B의 농도가 8 %이므로

$\dfrac{2a+4b}{600}\times100=8$

$\therefore a+2b=24$ …… ㉡

㉠−㉡을 하면 $2a=36$

$\therefore a=18$

$a=18$을 ㉡에 대입하면

$18+2b=24$ $\therefore b=3$

7 곡과 곡 사이에는 1분간의 쉬는 시간이 있으므로 6분짜리 x곡과 8분짜리 y곡을 연주하기로 처음에 계획했다면 쉬는 시간은 모두 $(x+y-1)$분이다.

$$\begin{cases}6x+8y+(x+y-1)=105\\ 6y+8x+(x+y-1)=117\end{cases}$$

즉, $\begin{cases}7x+9y=106 & \cdots\cdots ㉠\\ 9x+7y=118 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$

㉠×7−㉡×9를 하면

$-32x=-320$

$\therefore x=10$

따라서 처음에 연주하려고 계획했던 6분짜리 곡의 수는 10곡이다.

8 3 : 7의 비로 섞인 페인트 x g과 1 : 4의 비로 섞인 페인트 y g을 섞었을 때, 원하는 페인트가 만들어졌다면

	흰색(g)	갈색(g)	합계(g)
3 : 7로 섞인 페인트	$\frac{3}{10}x$	$\frac{7}{10}x$	x
1 : 4로 섞인 페인트	$\frac{1}{5}y$	$\frac{4}{5}y$	y

섞어서 만든 페인트의 흰색과 갈색의 비가 2 : 5이므로

$\left(\dfrac{3}{10}x+\dfrac{1}{5}y\right):\left(\dfrac{7}{10}x+\dfrac{4}{5}y\right)=2:5$

$5\left(\dfrac{3}{10}x+\dfrac{1}{5}y\right)=2\left(\dfrac{7}{10}x+\dfrac{4}{5}y\right)$

양변에 10을 곱하면

$15x+10y=14x+16y$

$\therefore x=6y$

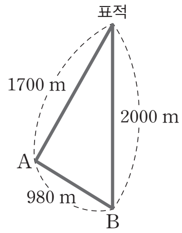
그런데 $0\le x\le1200$이므로 $x+y$의 최댓값은

$x=1200$, $y=200$일 때, $x+y=1200+200=1400$이다.

따라서 최대 1400 g의 페인트를 만들 수 있다.

TIP 문제의 조건을 만족하도록 두 페인트를 각각 얼마나 섞어야 하는지 알기 어렵기 때문에 두 페인트를 섞는 비부터 찾아야 한다.

9 탄환의 속력을 초속 x m, 소리의 속력을 초속 y m라 하면



A가 쏜 탄환이 표적에 맞는 데 걸린 시간이 $\dfrac{1700}{x}$초이고, 표적에 맞는 소리가 A에게 들리는 시간이 $\dfrac{1700}{y}$초이므로

$\dfrac{1700}{x}+\dfrac{1700}{y}=7$ …… ㉠

A가 쏜 탄환이 표적에 맞는 데 걸린 시간이 $\dfrac{1700}{x}$초이고,

표적에 맞는 소리가 B에게 들리는 시간이 $\dfrac{2000}{y}$초,

A의 총성이 B에게 들리는 시간이 $\dfrac{980}{y}$초이므로

$\dfrac{1700}{x}+\dfrac{2000}{y}=\dfrac{980}{y}+5$ …… ㉡

㉠−㉡에서 $\dfrac{680}{y}=2$ $\therefore y=340$

$y=340$을 ㉠에 대입하면 $x=850$

따라서 탄환의 속력은 초속 850 m이다.

10 정지된 물에서의 배의 속력을 시속 x km, 흐르는 물의 속력을 시속 y km라 하면

20분간 떠내려 간 거리는 $\dfrac{y}{3}$ km이므로

강물을 거슬러 올라가는 데 걸린 시간은

$\left(20+\dfrac{y}{3}\right)\times\dfrac{1}{x-y}$(시간),

내려오는 데 걸린 시간은 $\dfrac{20}{x+y}$(시간)

이고, 배가 고장나서 떠내려 간 시간은 $\dfrac{1}{3}$시간이다.

따라서 문제의 조건에 의해

$$\begin{cases}\left(20+\dfrac{y}{3}\right)\times\dfrac{1}{x-y}+\dfrac{20}{x+y}+\dfrac{1}{3}=4 & \cdots\cdots ㉠\\ \left(20+\dfrac{y}{3}\right)\times\dfrac{1}{x-y}=\dfrac{20}{x+y}\times\dfrac{7}{4} & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$\frac{20}{x+y}\times\frac{7}{4}+\frac{20}{x+y}+\frac{1}{3}=4$

$\frac{35}{x+y}+\frac{20}{x+y}=\frac{11}{3}$

$\frac{55}{x+y}=\frac{11}{3}$

$x+y=15$

$\therefore y=15-x$ …… ㉢

㉢을 ㉠에 대입하면

$\left(20+\frac{15-x}{3}\right)\times\frac{1}{x-(15-x)}+\frac{20}{15}+\frac{1}{3}=4$

$\frac{75-x}{3}\times\frac{1}{2x-15}=\frac{7}{3}$

$75-x=7(2x-15)$

$15x=180\qquad\therefore x=12$

따라서 정지된 물에서의 배의 속력은 시속 12 km이다.

III 단원 종합 문제

1 $x=3$, $y=-1$ **2** 4 **3** $x=-3$, $y=-\frac{26}{7}$ **4** $x=\frac{1}{3}$, $y=\frac{1}{4}$ **5** -2 **6** -1

7 $x=2$, $y=2$ **8** $x=7$, $y=14$, $z=21$ **9** $x=0$, $y=2$ 또는 $x=4$, $y=6$ **10** ②

11 ③ **12** $x=1$, $y=-2$ **13** 교통비 : 92000원, 숙박비 : 124000원 **14** 70 g **15** 35 L

16 엄마 : 30세, 딸 : 5세 **17** 영어 : 81점, 수학 : 88점 **18** A : 40 kg, B : 20 kg

19 30 g **20** 16명 **21** 6 km, 4 km **22** 439 **23** 시속 3.15 km

24 A : 840 g, B : 660 g

문제 풀이

1 $\begin{cases} 0.3x-y=1.9 & \cdots\cdots ㉠ \\ \frac{1}{2}x-\frac{5}{12}y=\frac{23}{12} & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠×10, ㉡×12를 하면

$\begin{cases} 3x-10y=19 & \cdots\cdots ㉢ \\ 6x-5y=23 & \cdots\cdots ㉣ \end{cases}$

㉢−㉣×2를 하면

$-9x=-27$ $\therefore x=3$

$x=3$을 ㉢에 대입하면

$9-10y=19$ $\therefore y=-1$

2 (i) $z=1$일 때, $x+y=4$에서

$x=1$, $y=3$ 또는 $x=y=2$ 또는 $x=3$, $y=1$

(ii) $z=2$일 때, $x+y=2$에서

$x=y=1$

(i), (ii)에서 순서쌍 (x, y, z)는 $(1, 3, 1)$, $(2, 2, 1)$, $(3, 1, 1)$, $(1, 1, 2)$이므로 순서쌍 (x, y, z)의 개수는 4이다.

> **TIP** 계수가 큰 미지수의 값을 기준으로 분류하면 분류의 개수가 적으므로 방정식을 만족하는 해의 개수를 찾기 쉽다.

3 주어진 식의 각 변에 12를 곱하면

$4(x-y+1)=3(-2x+y)=2(3x-2y+5)$

$\begin{cases} 4(x-y+1)=3(-2x+y) \\ 3(-2x+y)=2(3x-2y+5) \end{cases}$

즉, $\begin{cases} 10x-7y=-4 & \cdots\cdots ㉠ \\ 12x-7y=-10 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠−㉡을 하면 $-2x=6$ $\therefore x=-3$

$x=-3$을 ㉠에 대입하면

$-30-7y=-4$ $\therefore y=-\frac{26}{7}$

4 $\begin{cases} \frac{1}{x}-\frac{1}{2y}=1 \\ \frac{2}{3x}-\frac{3}{4y}=-1 \end{cases}$에서 $\frac{1}{x}=a$, $\frac{1}{y}=b$라 하면

$\begin{cases} a-\frac{b}{2}=1 & \cdots\cdots ㉠ \\ \frac{2}{3}a-\frac{3}{4}b=-1 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠×2, ㉡×12를 하면

$\begin{cases} 2a-b=2 & \cdots\cdots ㉢ \\ 8a-9b=-12 & \cdots\cdots ㉣ \end{cases}$

㉢×9−㉣에서

$10a=30$ $\therefore a=3$

$a=3$을 ㉢에 대입하면

$6-b=2$ $\therefore b=4$

따라서 $a=\frac{1}{x}=3$에서 $x=\frac{1}{3}$,

$b=\frac{1}{y}=4$에서 $y=\frac{1}{4}$

5 $\begin{cases} 2x+3y+a=0 \\ ax-3y+2=0 \end{cases}$의 해가 무수히 많으려면

$\frac{2}{a}=\frac{3}{-3}=\frac{a}{2}$

$\frac{2}{a}=\frac{3}{-3}$에서 $3a=-6$

$\therefore a=-2$

6 $\begin{cases} x+ay+4=0 \\ 2x+(a-1)y-8=0 \end{cases}$이 해를 갖지 않으려면

$\frac{1}{2}=\frac{a}{a-1}\neq\frac{4}{-8}$

$\frac{1}{2}=\frac{a}{a-1}$에서 $2a=a-1$

$\therefore a=-1$

7 각 변에 12를 곱하면

$12x-4(5y-8)=4(2x-3)+6y=24x-(50-9y)$

$12x-20y+32=8x+6y-12=24x+9y-50$

$\begin{cases} 12x-20y+32=8x+6y-12 \\ 8x+6y-12=24x+9y-50 \end{cases}$

즉, $\begin{cases} 2x-13y=-22 & \cdots\cdots ㉠ \\ 16x+3y=38 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠$\times$8$-$㉡을 하면

$-107y=-214$

$\therefore\ y=2$

$y=2$를 ㉠에 대입하면

$2x-26=-22$

$\therefore\ x=2$

8 $x:y:z=1:2:3$이므로 $x=a$라 하면

$y=2a,\ z=3a$

$4x-3y+z=7$에 대입하면

$4a-6a+3a=7$ $\quad\therefore\ a=7$

$\therefore\ x=7,\ y=14,\ z=21$

9 (i) $x\ge2$이면 $|x-2|=x-2$이므로

$\begin{cases} y=x+2 & \cdots\cdots ㉠ \\ y=2x-2 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉡을 ㉠에 대입하면

$2x-2=x+2$

$\therefore\ x=4$

$x=4$를 ㉠에 대입하면

$y=4+2$

$\therefore\ y=6$

$x=4,\ y=6$은 $x\ge2$의 조건을 만족하므로 연립방정식의 해이다.

(ii) $x<2$이면 $|x-2|=-x+2$이므로

$\begin{cases} y=x+2 & \cdots\cdots ㉠ \\ y=2 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉡을 ㉠에 대입하면

$2=x+2$

$\therefore\ x=0,\ y=2$

$x=0,\ y=2$는 $x<2$의 조건을 만족하므로 연립방정식의 해이다.

(i), (ii)에서 $x=0,\ y=2$ 또는 $x=4,\ y=6$

10 $\begin{cases} x+|y|=8 & \cdots\cdots ㉠ \\ x-|y|=4 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠$+$㉡을 하면

$2x=12$ $\quad\therefore\ x=6$

$x=6$을 ㉠에 대입하면 $|y|=2$

(i) $y=2$일 때

$x+y+z=6+2+z=5$

$\therefore\ z=-3$

(ii) $y=-2$일 때

$x+y+z=6+(-2)+z=5$

$\therefore\ z=1$

(i), (ii)에서 $z=-3$ 또는 $z=1$

11 $\begin{cases} 2x+y=4 & \cdots\cdots ㉠ \\ x+2y=m & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

$\begin{cases} x-y=5 & \cdots\cdots ㉢ \\ nx+4y=4 & \cdots\cdots ㉣ \end{cases}$

해가 서로 같으므로 ㉠, ㉡, ㉢, ㉣의 해가 모두 같다.

따라서 미지수가 없는 ㉠과 ㉢을 연립해서 해를 먼저 구한다.

㉠$+$㉢을 하면

$3x=9$ $\quad\therefore\ x=3$

$x=3$을 ㉠에 대입하면

$6+y=4$ $\quad\therefore\ y=-2$

$x=3,\ y=-2$를 ㉡과 ㉣에 대입하면

$3+2\times(-2)=m$

$\therefore\ m=-1$

$3n+4\times(-2)=4,\ 3n=12$

$\therefore\ n=4$

$\therefore\ n^2-m^2=4^2-(-1)^2=15$

12 $\begin{cases} ax-3y=8 & \cdots\cdots ㉠ \\ 3x+by=-1 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

A는 ㉡을 바르게 보고 풀었으므로 A가 구한 해를 ㉡에 대입하면

$-9+4b=-1$

$\therefore\ b=2$

B는 ㉠을 바르게 보고 풀었으므로 B가 구한 해를 ㉠에 대입하면

$7a-6=8$

$\therefore\ a=2$

따라서 연립방정식은

$\begin{cases} 2x-3y=8 & \cdots\cdots ㉢ \\ 3x+2y=-1 & \cdots\cdots ㉣ \end{cases}$

㉢$\times$2$+$㉣$\times$3을 하면

$13x=13$ $\quad\therefore\ x=1$

$x=1$을 ㉣에 대입하면

$3+2y=-1$ $\quad\therefore\ y=-2$

13 작년의 교통비를 x원, 숙박비를 y원이라 하면

$1.2(x+y)=216000$에서

$x+y=180000$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

따라서 올해의 교통비와 숙박비의 합계는 작년에 비해

$216000-180000=36000$(원)

증가했으므로

$0.15x+0.24y=36000$에서

$5x+8y=1200000$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠$\times$5$-$㉡을 하면

$-3y=-300000$

$\therefore\ y=100000$

$y=100000$을 ㉠에 대입하면 $x=80000$
따라서 올해의 교통비는 $80000\times1.15=92000$(원)이고,
숙박비는 $100000\times1.24=124000$(원)이다.

14 새로 만들어질 합금은 280 g이고 구리와 주석의 비가 9 : 5이므로

구리의 양은 $280\times\frac{9}{9+5}=180(\text{g})$

주석의 양은 $280\times\frac{5}{9+5}=100(\text{g})$

필요한 합금 A, B의 양을 각각 x g, y g이라 하면 합금 A의 구리와 주석의 비가 2 : 1이므로 구리와 주석의 양은 각각 $\frac{2}{3}x$ g, $\frac{1}{3}x$ g이고, 합금 B의 구리와 주석의 비가 4 : 3이므로 구리와 주석의 양은 각각 $\frac{4}{7}y$ g, $\frac{3}{7}y$ g이다.

	구리(g)	주석(g)
합금 A	$\frac{2}{3}x$	$\frac{1}{3}x$
합금 B	$\frac{4}{7}y$	$\frac{3}{7}y$
새로운 합금	180	100

$$\begin{cases}\frac{2}{3}x+\frac{4}{7}y=180\\\frac{1}{3}x+\frac{3}{7}y=100\end{cases}$$

즉, $\begin{cases}7x+6y=1890 & \cdots\cdots \text{㉠}\\7x+9y=2100 & \cdots\cdots \text{㉡}\end{cases}$

㉠−㉡을 하면

$-3y=-210 \qquad \therefore y=70$

따라서 사용해야 할 합금 B의 무게는 70 g이다.

다른 풀이

합금 A, B의 구리와 주석의 양을 각각 a, b를 써서 나타내면

	구리(g)	주석(g)	합계(g)
합금 A	$2a$	a	$3a$
합금 B	$4b$	$3b$	$7b$
새로운 합금	$2a+4b$	$a+3b$	$3a+7b$

$(2a+4b):(a+3b)=9:5$에서

$10a+20b=9a+27b$

$\therefore a=7b \qquad \cdots\cdots$ ㉠

㉠을 $3a+7b=280$에 대입하면

$21b+7b=280$

$\therefore b=10,\ a=70$

따라서 합금 B의 무게는 $7\times10=70(\text{g})$이다.

15 A, B 두 호스에서 1분당 나오는 물의 양을 각각 x L, y L라 하자.

A 호스로 5분, B 호스로 2분 동안 채우면 전체의 $\frac{3}{4}$이 채워지므로

$5x+2y=160\times\frac{3}{4}$

$\therefore 5x+2y=120 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

A 호스로 2분, B 호스로 4분 동안 채우면 전체의 $\frac{2}{3}$가 채워지므로

$2x+4y=160\times\frac{2}{3}$

$\therefore x+2y=\frac{160}{3} \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠−㉡을 하면

$4x=\frac{200}{3}$

$\therefore x=\frac{50}{3}$

$x=\frac{50}{3}$을 ㉡에 대입하면

$y=\frac{55}{3}$

따라서 A, B 두 호스로 1분 동안

$\frac{50}{3}+\frac{55}{3}=\frac{105}{3}=35(\text{L})$의 물을 채울 수 있다.

16 현재 엄마의 나이를 x세, 딸의 나이를 y세라 하자.

엄마와 딸의 나이 차가 25세이므로

$x-y=25 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

20년 후의 엄마의 나이는 딸의 나이의 2배이므로

$x+20=2(y+20)$

$\therefore x-2y=20 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠−㉡을 하면 $y=5$

$y=5$를 ㉠에 대입하면 $x=30$

따라서 현재 엄마의 나이는 30세, 딸의 나이는 5세이다.

17 중간고사 영어 점수와 수학 점수를 각각 x점, y점이라 하자.

중간고사 때 두 과목의 점수의 평균이 85점이므로

$\frac{x+y}{2}=85$

$\therefore x+y=170 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

또, 기말고사 영어 점수와 수학 점수의 증감은 각각 $-0.1x$점, $0.1y$점이므로

$-0.1x+0.1y=-1$

$\therefore x-y=10 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠+㉡을 하면

$2x=180$

$\therefore x=90$

$x=90$을 ㉠에 대입하면

$90+y=170$

$\therefore y=80$

따라서 기말고사 영어 점수는

$(1-0.1)x=0.9\times 90=81$(점)이고,

수학 점수는 $(1+0.1)y=1.1\times 80=88$(점)이다.

18 합금 A를 x kg, 합금 B를 y kg 섞는다고 하자.

총 합금의 양에서

$x+y=60$ …… ㉠

합금 속의 금의 양에서

$0.8x+0.5y=0.7\times 60$

$\therefore 8x+5y=420$ …… ㉡

㉠$\times 5-$㉡을 하면

$-3x=-120$

$\therefore x=40$

$x=40$을 ㉠에 대입하면 $y=20$

따라서 합금 A는 40 kg, 합금 B는 20 kg을 섞어야 한다.

19 더 부은 물의 양을 x g, 8 %의 소금물의 양을 y g이라 하면 5 %의 소금물의 양은 $4x$ g이므로

$$\begin{cases} 4x+y+x=300 \\ \frac{5}{100}\times 4x+\frac{8}{100}\times y=\frac{6}{100}\times 300 \end{cases}$$

즉, $\begin{cases} 5x+y=300 & \cdots\cdots ㉠ \\ 5x+2y=450 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠$\times 2-$㉡을 하면

$5x=150$ $\therefore x=30$

따라서 더 부은 물의 양은 30 g이다.

20 A 종목에서 상을 받은 사람을 x명, B 종목에서 상을 받은 사람을 y명이라 하면

$\begin{cases} x+y-10=20 & \cdots\cdots ㉠ \\ x=y+2 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉡에서 $y=x-2$이므로 ㉠에 대입하면

$x+x-2-10=20$ $\therefore x=16$

따라서 A 종목에서 상을 받은 사람은 16명이다.

21 A에서 P까지의 거리를 x km, P에서 B까지의 거리를 y km라 하자.

A에서 B까지의 거리가 10 km이므로

$x+y=10$ …… ㉠

A에서 P까지는 시속 6 km로, P에서 B까지는 시속 8 km로 가서 총 1시간 30분이 걸리므로

$\frac{x}{6}+\frac{y}{8}=1\frac{30}{60}$

$\therefore 4x+3y=36$ …… ㉡

㉠$\times 3-$㉡을 하면 $-x=-6$ $\therefore x=6$

$x=6$을 ㉠에 대입하면 $y=4$

따라서 A에서 P까지의 거리는 6 km이고, P에서 B까지의 거리는 4 km이다.

22 세 자리의 자연수를 $100a+10b+c$라 하자.

가장 왼쪽의 숫자를 가장 오른쪽에 옮기면

$100b+10c+a$가 되고 이 수가 처음의 수보다 45만큼 작으므로

$100b+10c+a=100a+10b+c-45$

$\therefore 11a-10b-c=5$ …… ㉠

백의 자리의 숫자의 9배는 십의 자리와 일의 자리의 숫자로 된 두 자리의 자연수 $10b+c$보다 3만큼 작으므로

$9a=10b+c-3$

$\therefore 9a-10b-c=-3$ …… ㉡

㉠$-$㉡을 하면 $2a=8$ $\therefore a=4$

$a=4$를 ㉠에 대입하면 $10b+c=39$

b, c는 한 자리의 자연수이므로 $b=3$, $c=9$

따라서 구하는 수는 439이다.

23 강물이 흐르는 속력을 시속 x km, 정지한 물에서 보트의 속력을 시속 y km라 하자.

강을 따라 내려올 때는 보트의 속력이 시속 $(y+x)$ km가 되므로

$\frac{40}{60}(y+x)=7$ $\therefore 2x+2y=21$ …… ㉠

강을 거슬러 올라갈 때는 보트의 속력이 시속 $(y-x)$ km가 되므로

$1\frac{40}{60}(y-x)=7$ $\therefore -5x+5y=21$ …… ㉡

㉠$\times 5-$㉡$\times 2$를 하면

$20x=63$ $\therefore x=3.15$

따라서 강물이 흐르는 속력은 시속 3.15 km이다.

24 금속 A x g과 금속 B y g을 섞어서 합금 1500 g을 만들었다고 하면

$x+y=1500$

$\therefore y=1500-x$ …… ㉠

물 속에서의 무게는

$\frac{4}{15}x+\frac{3}{4}y=719$

$\therefore 16x+45y=43140$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$16x+45(1500-x)=43140$

$29x=24360$ $\therefore x=840$

$x=840$을 ㉠에 대입하면 $y=660$

따라서 금속 A는 840 g, 금속 B는 660 g이 섞여 있다.

1 함수

1 STEP 주제별 실력다지기

99~102쪽

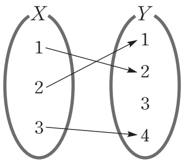
1 12	**2** ①, ⑤	**3** ㄴ, ㅅ	**4** 15	**5** 2	**6** 0
7 -20	**8** 26	**9** $\frac{27}{10}$	**10** 27	**11** 9	**12** ②, ③
13 ③					

최상위 NOTE 08 함수의 의미 파악하기

두 변수 x, y에 대하여 x의 값이 하나씩 정해질 때마다 그에 따른 y의 값이 오직 하나씩 대응하는 관계가 성립할 때, y를 x의 함수라고 한다.

예를 들어 x가 1, 2, 3이고 y가 1, 2, 3, 4일 때, y가 x의 함수가 되는 경우를 알아보자.

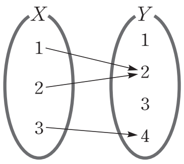
(1)



⇨ $x=1$일 때, $y=2$
$x=2$일 때, $y=1$
$x=3$일 때, $y=4$

→ x의 값에 따라 y의 값이 오직 하나씩 대응하는 관계이므로 y는 x의 함수이다.

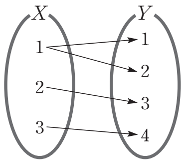
(2)



⇨ $x=1$일 때, $y=2$
$x=2$일 때, $y=2$
$x=3$일 때, $y=4$

→ $x=1$, 2가 모두 $y=2$에 대응되지만 x의 값에 따라 y의 값이 오직 하나씩 대응하는 관계이므로 y는 x의 함수이다.

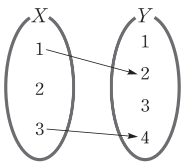
(3)



⇨ $x=1$일 때, $y=1$, 2
$x=2$일 때, $y=3$
$x=3$일 때, $y=4$

→ $x=1$은 두 개의 y의 값에 대응되므로 y는 x의 함수가 아니다.

(4)



⇨ $x=1$일 때, $y=2$
$x=2$에 대응하는 y의 값은 없다.
$x=3$일 때, $y=4$

→ $x=2$에 대응하는 y의 값이 없으므로 y는 x의 함수가 아니다.

문제 풀이

1 x의 값인 1, 2, 3의 각각에 y의 문자 a, b, c, d를 하나하나 짝지으면 되므로 구하는 순서쌍은
$(1, a)$, $(1, b)$, $(1, c)$, $(1, d)$,
$(2, a)$, $(2, b)$, $(2, c)$, $(2, d)$,
$(3, a)$, $(3, b)$, $(3, c)$, $(3, d)$이다.
따라서 순서쌍 (x, y)의 개수는 12이다.

다른 풀이

x인 3개의 수에 y의 문자 4개를 일일이 짝지으면 되므로 구하는 대응의 순서쌍의 개수는
$3\times4=12$

2 ② $1 \longrightarrow 3$, $1 \longrightarrow 4$로 x의 값 1개에 y의 값 2개가 대응하므로 함수가 아니다.
③ $1 \longrightarrow 0$, $1 \longrightarrow 1$로 x의 값 1개에 y의 값 2개가 대응하므로 함수가 아니다.
④ x의 값 2에 대응하는 y의 값이 없으므로 함수가 아니다.
따라서 함수인 것은 ①, ⑤이다.

> **TIP** y가 x의 함수이면 x의 값이 하나씩 정해질 때마다 y의 값이 오직 하나씩만 대응하므로 y가 x의 함수가 되지 않는 경우는 다음과 같다.
> (1) 여러 개의 y의 값에 대응되는 x의 값이 존재하는 경우
> (2) y의 값에 대응되지 않는 x의 값이 존재하는 경우

3 x, y 사이의 관계식을 구해 보면 다음과 같다.
ㄱ. $y=1000x$
ㄴ. x의 값 하나에 y의 값이 여러 개 대응한다.
ㄷ. $y=\frac{7}{100}x$
ㄹ. $x=1, 2, 3, \cdots, 10$일 때 $y=100$,
$x=11$일 때 $y=\frac{1000}{11}$, $x=12$일 때 $y=\frac{250}{3}$, $\cdots$
ㅁ. $xy=40$에서 $y=\frac{40}{x}$
ㅂ. $xy=10$에서 $y=\frac{10}{x}$
ㅅ. x의 값 하나에 y의 값이 여러 개 대응한다.
따라서 함수가 되기 위해서는 x의 값 하나에 대하여 y의 값이 하나로 정해져야 하므로 함수가 아닌 것은 ㄴ, ㅅ이다.

4 $f\left(\frac{33}{2}\right)=\left(\frac{33}{2}\text{ 미만의 소수의 개수}\right)$에서
$\frac{33}{2}=16.5$ 미만의 소수는 2, 3, 5, 7, 11, 13의 6개이다.
$\therefore f\left(\frac{33}{2}\right)=6$
$f(24)=(24\text{ 미만의 소수의 개수})$에서
24 미만의 소수는 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23의 9개이다.
$\therefore f(24)=9$
$\therefore f\left(\frac{33}{2}\right)+f(24)=15$

5 $f(x)=\frac{3}{2}x+1$에서 $f(a)=4$이므로
$\frac{3}{2}a+1=4$, $\frac{3}{2}a=3$
$\therefore a=2$

6 (i) $g(1)$은 $g(x)=-6x+5$에서 $x=1$일 때의 함숫값이므로
$g(1)=-6\times1+5=-1$
(ii) $f(-3)$은 $f\left(\frac{3x}{x+1}\right)=2x-1$에서 $\frac{3x}{x+1}=-3$일 때의 함숫값이므로
$\frac{3x}{x+1}=-3$, $3x=-3(x+1)$
$3x=-3x-3$, $6x=-3$
$\therefore x=-\frac{1}{2}$
$\therefore f(-3)=2\left(-\frac{1}{2}\right)-1$
$=-2$
(i), (ii)에서 $g(1)-f(-3)=-1-(-2)=1$
$\therefore f(g(1)-f(-3))=f(1)$
이때 (ii)와 마찬가지로 $f(1)$은 $f\left(\frac{3x}{x+1}\right)=2x-1$에서
$\frac{3x}{x+1}=1$일 때의 함숫값이므로
$\frac{3x}{x+1}=1$, $3x=x+1$
$\therefore x=\frac{1}{2}$
$\therefore f(g(1)-f(-3))$
$=f(1)=2\times\frac{1}{2}-1$
$=0$

7 $f(1)=3$, $f(a+b)=f(a)+f(b)+2ab$이므로
(i) $a=1$, $b=1$을 대입하면
$f(1+1)=f(1)+f(1)+2\times1\times1$
$=3+3+2=8$
$\therefore f(2)=8$
(ii) $a=2$, $b=1$을 대입하면
$f(2+1)=f(2)+f(1)+2\times2\times1$
$=8+3+4=15$
$\therefore f(3)=15$
(iii) $a=3$, $b=2$를 대입하면

$f(3+2)=f(3)+f(2)+2\times3\times2$

$=15+8+12=35$

$\therefore f(5)=35$

$\therefore f(3)-f(5)=15-35=-20$

8 함수 $y=3x+2$, 즉 $f(x)=3x+2$에 x의 값 0, 1, 2, 3을 각각 대입하면

$f(0)=2$, $f(1)=5$, $f(2)=8$, $f(3)=11$

따라서 구하는 함숫값의 합은

$2+5+8+11=26$

9 $f(1)=\frac{6}{1}=6$, $f(2)=\frac{6}{2}=3$, $f(3)=\frac{6}{3}=2$,

$f(4)=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$, $f(5)=\frac{6}{5}$, $f(6)=\frac{6}{6}=1$

따라서 구하는 함숫값의 합은

$\frac{3}{2}+\frac{6}{5}=\frac{27}{10}$

10 함수 $f: x \longrightarrow$ (x의 약수 중 가장 큰 소수)는

$f(x)=$(x의 약수 중 가장 큰 소수)이므로

x에 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10을 각각 대입하여 계산하면

$f(4)=2$, $f(5)=5$, $f(6)=3$, $f(7)=7$, $f(8)=2$,

$f(9)=3$, $f(10)=5$

따라서 모든 함숫값의 합은

$2+5+3+7+2+3+5=27$

11 y가 x의 함수가 되는 경우는 함숫값 $f(1)$, $f(2)$가 각각 다음과 같이 3, 4, 5에 대응될 때이다.

$f(1)$	3	3	3	4	4	4	5	5	5
$f(2)$	3	4	5	3	4	5	3	4	5

따라서 구하는 x의 함수 y의 개수는 9이다.

다른 풀이

x가 2개, y가 3개이므로 공식에 의해 $3^2=9$

12 ① $x=3$에 대응하는 y의 값이 없으므로 함수가 아니다.

④ $x=1$, 2, 4, 5에 대응하는 y의 값이 없고, $x=3$에 대응하는 y의 값이 2개 이상이므로 함수가 아니다.

⑤ $x=4$에 대응하는 y의 값이 없고, $x=5$에 대응하는 y의 값이 2개 이상이므로 함수가 아니다.

13 ①, ②, ④, ⑤ x의 값 1개에 y의 값이 2개 이상 대응하는 경우가 있으므로 함수가 아니다.

③ x의 값 하나에 y의 값이 하나씩만 정해져 있고, 대응되지 못한 x가 없으므로 함수이다.

2 STEP 실력 높이기

103~106쪽

1 ㄴ	**2** $-2, \frac{1}{2}, 2, 3, 6$	**3** ③	**4** -1	**5** 6	**6** $y=\frac{a-b}{b-100}x$
7 ④, ⑤	**8** 4개	**9** ⑤	**10** 33	**11** 58	**12** 7
13 4	**14** -6	**15** -1	**16** 4		

문제 풀이

1 ㄱ. $1 \longrightarrow 4$, $1 \longrightarrow 5$로 x의 값 1개에 y의 값 2개가 대응하고, 3에 대응하는 y의 값이 없으므로 함수가 아니다.

ㄴ. $-1 \longrightarrow 4$, $0 \longrightarrow 3$, $1 \longrightarrow 4$이므로 함수이다.

ㄷ. x의 값인 1에 대응하는 y의 값이 없으므로 함수가 아니다.

ㄹ. $2 \longrightarrow -1$, $4 \longrightarrow -2$, $6 \longrightarrow -3$, $8 \longrightarrow -4$로 모든 x의 값에 대응하는 y의 값이 없으므로 함수가 아니다.

따라서 함수인 것은 ㄴ이다.

2 서술형

표현 단계 함수가 되지 않으려면 x에 대한 함숫값이 2개 이상이면 된다. 즉, x의 값들 중 2개 이상이 같으면 된다.

변형 단계 (i) $m-1=2m+1$

(ii) $m-1=2$ 또는 $m-1=5$

(iii) $2m+1=2$ 또는 $2m+1=5$

풀이 단계 (i) $m=-2$

(ⅱ) $m=3$ 또는 $m=6$

(ⅲ) $m=\frac{1}{2}$ 또는 $m=2$

확인 단계 따라서 m의 값은 -2, $\frac{1}{2}$, 2, 3, 6이다.

3 $f(x)=-x+5$이므로

$f(a-1)+f(a+1)=-(a-1)+5-(a+1)+5=6$

$-a+1+5-a-1+5=6$

$-2a=-4$

$\therefore a=2$

4 $y+5$가 $2(x-3)$에 정비례하므로

$y+5=k\times2(x-3)$ (k는 0이 아닌 상수)라 하자.

즉, $f(x)=2k(x-3)-5$에서

$f(-2)=-10k-5=15$

$10k=-20$

$k=-2$

$\therefore f(x)=-4x+7$

$\therefore f(2)=-8+7=-1$

5 자연수 x에 대하여 $f(x)=\frac{12}{x}$의 값이 자연수이므로 x는 12의 약수이다.

따라서 만족하는 x의 값은 1, 2, 3, 4, 6, 12이므로 x의 개수는 6이다.

6 a %의 소금물 x g에 녹아 있는 소금의 양은 $\frac{a}{100}x$ g

b %의 소금물 $(x+y)$ g에 녹아 있는 소금의 양은

$\frac{b}{100}\times(x+y)$ g이므로

$\frac{a}{100}x+y=\frac{b}{100}\times(x+y)$에서

$(a-b)x=(b-100)y$ $\qquad \therefore y=\frac{a-b}{b-100}x$

TIP 소금의 양 구하기

(소금의 양)$=\frac{\text{(소금물의 농도)}}{100}\times$(소금물의 양)

7 ① x의 값 2는 1과 2에 동시에 대응, 3은 1과 3에 동시에 대응, 4는 1, 2, 4에 동시에 대응, 5는 1과 5에 동시에 대응되어 x의 값 1개에 y의 값이 여러 개 대응하므로 함수가 아니다.

② x의 값 2는 2, 4, 6에 동시에 대응, 3은 3과 6에 동시에 대응되어 x의 값 1개에 y의 값이 여러 개 대응하므로 함수가 아니다.

③ $2\longrightarrow4$이지만 나머지 x의 값인 3, 4, 5에 대응하는 y의 값이 없으므로 함수가 아니다.

④ $2\longrightarrow2$, $3\longrightarrow2$, $4\longrightarrow3$, $5\longrightarrow2$이므로 함수이다.

⑤ $2\longrightarrow1$, $3\longrightarrow1$, $4\longrightarrow1$, $5\longrightarrow1$이므로 함수이다.

8 ㄱ. $-1\longrightarrow0$, $0\longrightarrow1$, $1\longrightarrow2$이므로 함수이다.

ㄴ. $-1\longrightarrow-1$, $0\longrightarrow0$, $1\longrightarrow1$이므로 함수이다.

ㄷ. $1\longrightarrow-1$이지만 나머지 x의 값인 -1, 0에 대응하는 y의 값이 없으므로 함수가 아니다.

ㄹ. $-1\longrightarrow2$, $0\longrightarrow1$, $1\longrightarrow2$이므로 함수이다.

ㅁ. x의 값 -1이 1, 2에 동시에 대응되어 x의 값 1개에 y의 값 2개가 대응하므로 함수가 아니다.

ㅂ. $-1\longrightarrow0$, $0\longrightarrow-1$, $1\longrightarrow0$이므로 함수이다.

따라서 함수인 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ, ㅂ의 4개이다.

9 ① 각각의 x는 서로 다른 y의 값을 갖는다.

② 모든 y는 항상 x의 값 3을 갖는다.

③ 모든 x는 항상 y의 값 -3을 갖는다.

④ 모든 y는 항상 x의 값 -3을 갖는다.

⑤ 모든 x는 항상 y의 값 3을 갖는다.

10 서술형

표현 단계 a는 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9이므로 a에 각각 대입하여 본다.

변형 단계 a에 대응하는 함숫값이 있는지 알아본다.

풀이 단계 $a=3$일 때, $3+4=7$(소수),
$3+5=8$(소수가 아님)
$a=4$일 때, $4+4=8$(소수가 아님),
$4+5=9$(소수가 아님)
$a=5$일 때, $5+4=9$(소수가 아님),
$5+5=10$(소수가 아님)
$a=6$일 때, $6+4=10$(소수가 아님),
$6+5=11$(소수)
$a=7$일 때, $7+4=11$(소수),
$7+5=12$(소수가 아님)
$a=8$일 때, $8+4=12$(소수가 아님),
$8+5=13$(소수)
$a=9$일 때, $9+4=13$(소수),
$9+5=14$(소수가 아님)
즉, a가 4, 5일 때, a에 대응하는 y의 값이 없으므로 함수가 될 수 없다.

확인 단계 따라서 a가 될 수 있는 것은 3, 6, 7, 8, 9이므로 합은 $3+6+7+8+9=33$

11 12보다 작은 4의 배수는 4, 8의 2개이므로 $f(12)=2$

13보다 작은 4의 배수는 4, 8, 12의 3개이므로 $f(13)=3$

마찬가지로 생각하면 $f(14)=f(15)=f(16)=3$이고

$f(17)=4$이다.
따라서 $f(x)=3$을 만족하는 모든 x의 값의 합은
$13+14+15+16=58$이다.

12 서술형

표현 단계 $f(-1)=7$이므로 주어진 함수의 식에 $x=-1$, $y=7$을 대입한다.

변형 단계 $f(x)=5+ax-x$에서
$f(-1)=5-a+1=7$
$\therefore a=-1$
즉, $f(x)=-2x+5$이다.

풀이 단계 $f(3)=-6+5=-1$
$f(f(3))=f(-1)=-2\times(-1)+5$

확인 단계 $=7$

13

$f(2)=a=3$이므로 $f(x)=3|x-1|$
$f(x)=3|x-1|=9$에서 $|x-1|=3$이므로
$x-1=3$ 또는 $x-1=-3$
$\therefore x=4$ 또는 $x=-2$
이때 x는 2, 3, 4, 5이므로 $x=4$

14 서술형

표현 단계 $\frac{x-8}{2x-1}$의 값이 -2라고 하면

변형 단계 $\frac{x-8}{2x-1}=-2$, $x-8=-4x+2$
$5x=10$ $\quad\therefore x=2$

풀이 단계 $f\left(\frac{x-8}{2x-1}\right)=-x^2+x-4$에서 $x=2$를 대입하면
$f(-2)=-2^2+2-4$
$=-4+2-4$

확인 단계 $=-6$

15

$f(-1.7)=[-1.7]$
$=(-1.7$보다 크지 않은 최대의 정수$)$
$=-2$
$f(-0.4)=[-0.4]$
$=(-0.4$보다 크지 않은 최대의 정수$)$
$=-1$
$f(1)=[1]=(1$보다 크지 않은 최대의 정수$)=1$
$f(1.3)=[1.3]=(1.3$보다 크지 않은 최대의 정수$)=1$
$\therefore f(-1.7)+f(-0.4)+f(1)+f(1.3)$
$=(-2)+(-1)+1+1=-1$

16

x의 값이 커질수록 함숫값은 작아지도록 y의 값 4, 5, 6, 7 중의 3개를 뽑아 대응시킨다. 즉,

$f(1)$	6	7	7	7
$f(2)$	5	5	6	6
$f(3)$	4	4	4	5

따라서 구하는 함수의 개수는 4이다.

3 STEP 최고 실력 완성하기

107~108쪽

1 $y=\frac{4}{15}x$ **2** $y=60x$ **3** $\frac{5}{2}$ **4** ③ **5** ③, ④ **6** 18
7 ④ **8** 4 **9** 18 **10** 3

문제 풀이

1 두 톱니바퀴 P, Q의 톱니의 수의 비는 $2:3=4:6$이고 두 톱니바퀴 Q, R의 톱니의 수의 비는 $2:5=6:15$이므로 두 톱니바퀴 P, R의 톱니의 수의 비는 $4:15$이다.
두 톱니바퀴 P, R의 톱니의 수를 각각 $4a$개, $15a$개 (단, a는 자연수)라 하면 1분 동안 돌아간 톱니의 수는 각각 $4a\times x$(개), $15a\times y$(개)이고 서로 같아야 하므로
$4ax=15ay$ $\quad\therefore y=\frac{4}{15}x$

2 1시간은 60분이므로 시계의 분침에서 1분을 가리키는 눈금 하나의 각도는 $\frac{360^\circ}{60}=6^\circ$이다.
즉, 1분 동안 분침은 6°, 초침은 360° 움직이므로 분침이 1° 움직이는 동안 초침은 $\frac{360^\circ}{6}=60^\circ$ 움직인다.
$\therefore y=60x$

3 $f(x)=ax-1-(a-x)$, 즉 $f(x)=(a+1)x-a-1$에서 $f(2)=3$이므로

$3=2(a+1)-a-1$, $3=a+1$

$\therefore a=2$

$f(x)=3x-3$이고 $f(2)+f(3)=3+6=9$이므로

$2f(b)=9$에서 $6b-6=9$

$\therefore b=\frac{5}{2}$

4 ① $f(1)=4$, $f(2)=5$, $f(3)=6$, $f(4)=7$, $f(5)=8$, $f(6)=9$, $\cdots$

따라서 $x=1, 2, 3, 4, \cdots$일 때 $y=4, 5, 6, 7, \cdots$이 차례로 대응하므로 함수이다.

② $f(1)=0$, $f(2)=0$, $f(3)=1$, $f(4)=1$, $f(5)=2$, $f(6)=2$, $\cdots$

따라서 $x=1, 2, 3, 4, \cdots$일 때 $y=0, 0, 1, 1, \cdots$이 차례로 대응하므로 함수이다.

③ 자연수의 약수의 개수는 1 이외의 수는 모두 2개 이상이므로 x의 값 1개에 y의 값이 여러 개 대응하여 함수가 아니다.

④ $f(1)=1$, $f(2)=2$, $f(3)=3$, $f(4)=0$, $f(5)=1$, $f(6)=2$, $\cdots$

따라서 $x=1, 2, 3, 4, \cdots$일 때 $y=1, 2, 3, 0, \cdots$이 차례로 대응하므로 함수이다.

⑤ $f(1)=0$, $f(2)=2$, $f(3)=4$, $f(4)=6$, $f(5)=8$, $f(6)=10$, $\cdots$

따라서 $x=1, 2, 3, 4, \cdots$일 때 $y=0, 2, 4, 6, \cdots$이 차례로 대응하므로 함수이다.

5 ① $f(1)=2$, $f(2)=3$, $f(3)=4$이지만 나머지 x의 값인 4, 5에 대응하는 y의 값이 없으므로 함수가 아니다.

② $f(1)=1$, $f(5)=1$이지만 나머지 x의 값인 2, 3, 4에 대응하는 y의 값이 2개 이상이므로 함수가 아니다.

③ $f(1)=1$, $f(2)=2$, $f(3)=3$, $f(4)=0$, $f(5)=1$이므로 함수이다.

④ $f(1)=0$, $f(2)=1$, $f(3)=2$, $f(4)=3$, $f(5)=4$이므로 함수이다.

⑤ $f(3)=2$이지만 x의 값 1, 2에 대응하는 y의 값은 없고, x의 값 4, 5에 대응하는 y의 값은 2개씩이므로 함수가 아니다.

6 (i) $a=1$일 때

$1+f(1)$이 짝수이어야 하므로 $f(1)$은 반드시 홀수이어야 한다.

따라서 가능한 $f(1)$의 값은 1, 3, 5의 3개이다.

(ii) $a=2$일 때

$2+f(2)$가 짝수이어야 하므로 $f(2)$는 반드시 짝수이어야 한다.

따라서 가능한 $f(2)$의 값은 2, 4의 2개이다.

(iii) $a=3$일 때

$3+f(3)$이 짝수이어야 하므로 $f(3)$은 반드시 홀수이어야 한다.

따라서 가능한 $f(3)$의 값은 1, 3, 5의 3개이다.

따라서 구하는 함수의 개수는

$3\times2\times3=18$

7 ① $5x+5=5(x+1)$이므로 5로 나눈 나머지는 0이다.

$\therefore f(5x+5)=0$

② $x+10=x+5\times2$이므로 나머지는 x를 5로 나눈 나머지와 같다.

$\therefore f(x+10)=f(x)$

③ $5x-2=5(x-1)+3$이므로 5로 나누어 3이 남는 수는 5로 나누어 2가 모자라는 수와 나머지가 같다.

$\therefore f(5x+3)=f(5x-2)$

④ $x=2$이면 $f(2)=2$, $f(3)=3$이므로

$f(2)+f(3)=5$

또, $f(2x+1)=f(5)=0$이다.

$\therefore f(x)+f(x+1)\neq f(2x+1)$

⑤ $x=3$이면 $f(5x+3)=f(18)=3$

또, $f(x-2)=f(1)=1$이므로 $5f(x-2)=5$

$\therefore f(5x+3)\neq 5f(x-2)$

8 $f(x)=2$, 즉 약수의 개수가 2인 자연수는 소수뿐이고, 9 이하의 자연수 중 소수는 2, 3, 5, 7이므로 구하는 x의 개수는 4이다.

9 $f(x)=\begin{cases} 2 & (x\le 3) \\ f(x-2)+f(x-3) & (x\ge 4) \end{cases}$에서

$f(1)=f(2)=f(3)=2$

$f(4)=f(2)+f(1)=2+2=4$

$f(5)=f(3)+f(2)=2+2=4$

$f(6)=f(4)+f(3)=4+2=6$

$f(7)=f(5)+f(4)=4+4=8$

$f(8)=f(6)+f(5)=6+4=10$

$\therefore\ f(7)+f(8)=8+10=18$

> **TIP** x의 값에 따라 식이 달라지는 함수
>
> 함수 $f(x)=\begin{cases} 2 & (x\le 3) \\ f(x-2)+f(x-3) & (x\ge 4) \end{cases}$와 같이 x의 값에 따라 식이 달라지는 경우 x의 값을 대입할 때, 식을 올바르게 선택해야 한다.

10 주어진 관계식에 $x=1$, $y=0$을 대입하면

$f(1)f(0)=f(1)+f(1)$, $f(1)f(0)=2f(1)$

$f(1)=1$이므로 $f(0)=2$

주어진 관계식에 $x=1$, $y=1$을 대입하면

$f(1)f(1)=f(2)+f(0)$

$f(1)=1$, $f(0)=2$이므로 $1=f(2)+2$

$\therefore\ f(2)=-1$

$\therefore\ 2f(0)+f(2)=3$

2 일차함수와 그래프

1 STEP 주제별 실력다지기

110~112쪽

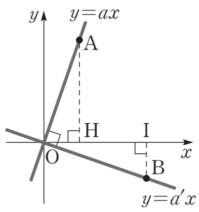
1 ③, ④, ⑤ **2** (1) $-\frac{1}{2}$ (2) -4 (3) 2 (4) 1 **3** $a=\frac{3}{2}$, $b=-3$ **4** 1 **5** $\frac{7}{3}$

6 $a=-3$, $b=-8$ **7** 2 또는 -8 **8** $\left(\frac{5}{3}, 0\right)$ **9** (1) $\frac{7}{3}$ (2) $-\frac{1}{2}$ **10** -6 **11** 6

12 $\frac{1}{2}$

최상위 09 NOTE 수직인 두 직선의 기울기의 곱 구하기

두 직선 $y=ax+b$와 $y=a'x+b'$이 직교하면 두 직선 $y=ax$와 $y=a'x$도 직교한다. 오른쪽 그림과 같이 직선 $y=ax$ 위의 점 A에 대하여 x축에 내린 수선의 발을 H라 하자. $\overline{OA}=\overline{OB}$를 만족하는 직선 $y=a'x$ 위의 점 B에 대하여 x축에 내린 수선의 발을 I라 하자.



$\angle AOH+\angle BOI=90°$이고 $\angle BOI+\angle OBI=90°$이므로

$\angle AOH=\angle OBI$

두 삼각형 AOH, BOI의 내각의 크기의 합은 180°이므로

$\angle OAH=\angle BOI$

따라서 $\triangle AOH\equiv\triangle OBI$ (ASA 합동)이므로

점 A의 좌표를 (p, q)라 하면 점 B의 x좌표는 $\overline{OI}=\overline{AH}=q$이고 y좌표는 $-\overline{BI}=-\overline{OH}=-p$이다.

직선 $y=ax$의 기울기는 $a=\frac{q-0}{p-0}=\frac{q}{p}$이고

직선 $y=a'x$의 기울기는 $a'=\frac{-p-0}{q-0}=-\frac{p}{q}$이다.

$\therefore aa'=\frac{q}{p}\times\left(-\frac{p}{q}\right)=-1$

1 ① 정x각형의 대각선의 총수는 $\frac{x(x-3)}{2}$개이므로

$y=\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x$ $\quad\therefore$ 이차함수

② 정x각형의 외각의 크기의 합은 $360°$이므로

$y=360$ $\quad\therefore$ 일차함수가 아니다.

③ $y=2x$ $\quad\therefore$ 일차함수

④ $y=4x$ $\quad\therefore$ 일차함수

⑤ $y=\frac{x}{100}\times300$이므로 $y=3x$ $\quad\therefore$ 일차함수

TIP 일차함수의 정의
함수 $y=f(x)$에서 y가 x에 관한 일차식
$y=ax+b$ ($a\neq0$, a, b는 상수)로 나타날 때, y를 x에 대한 일차함수라고 한다.

2 (1) $f(3)=-\frac{1}{2}\times3+1=-\frac{1}{2}$

(2) $f(a)=-\frac{1}{2}a+1=3$ $\quad\therefore a=-4$

(3) x절편은 $y=0$일 때 x의 값이므로

$-\frac{1}{2}x+1=0$ $\quad\therefore x=2$

(4) y절편은 $x=0$일 때 y의 값이므로

$y=1$

3 $y=ax+b$에 $(2,\ 0)$, $(0,\ -3)$을 대입하면

$2a+b=0$, $b=-3$

$\therefore a=\frac{3}{2}$, $b=-3$

4 주어진 일차함수의 그래프의 x절편과 y절편은 각각 $-\frac{b}{a}$, b이므로 $A\left(-\frac{b}{a},\ 0\right)$, $B(0,\ b)$이다.

$\overline{AB}$의 중점의 좌표는 $\left(\frac{-\frac{b}{a}}{2},\ \frac{b}{2}\right)=\left(-\frac{b}{2a},\ \frac{b}{2}\right)$

$\left(-\frac{b}{2a},\ \frac{b}{2}\right)=(1,\ 1)$이므로

$-\frac{b}{2a}=1$, $\frac{b}{2}=1$

$\therefore a=-1$, $b=2$

$\therefore a+b=1$

5 $y=3x+1$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동하면

$y-(-1)=3(x-2)+1$

$\therefore y=3x-6$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$y=3x+1$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼 평행이동하면

$y=3(x-m)+1$

$\therefore y=3x-3m+1$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡이 일치하므로

$-3m+1=-6$ $\quad\therefore m=\frac{7}{3}$

6 $y=ax+b$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동하였으므로

$y-3=a(x-2)+b$

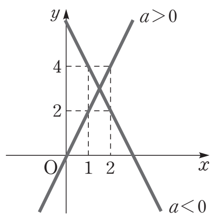
$y=ax-2a+b+3$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

㉠과 $y=-3x+1$의 그래프가 일치하므로

$a=-3$, $-2a+b+3=1$

$\therefore a=-3$, $b=-8$

7 x의 값의 범위가 $1\le x\le2$, 함숫값의 범위가 $2\le y\le4$인 일차함수 $y=ax+b$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 2개 있다.



(i) $a>0$일 때

두 점 $(1,\ 2)$, $(2,\ 4)$를 지나므로 이를 $y=ax+b$에 각각 대입하면

$a+b=2$, $2a+b=4$

$\therefore a=2$, $b=0$

(ii) $a<0$일 때

두 점 $(1,\ 4)$, $(2,\ 2)$를 지나므로 같은 방법으로

$a+b=4$, $2a+b=2$

$\therefore a=-2$, $b=6$

(i), (ii)에 의해 $a-b=2$ 또는 $a-b=-8$이다.

8 $y=x+a$의 그래프 위에 점 $A(1,\ 2)$가 있으므로 대입하면

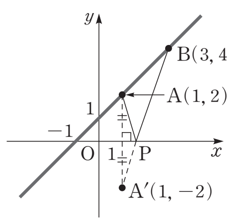
$2=1+a$ $\quad\therefore a=1$

그러므로 $y=x+1$에 $B(3,\ b)$를 대입하면

$b=4$

$\therefore B(3,\ 4)$

오른쪽 그림과 같이 $A(1,\ 2)$를 x축에 대하여 대칭이동시킨 점이 $A'(1,\ -2)$이고 $\overline{AP}+\overline{BP}=\overline{A'P}+\overline{BP}$이다.



이것이 최소가 될 때는 세 점 A', P, B가 한 직선 위에 있을 때이다.

직선 $A'B$의 관계식을 $y=mx+n$이라 하고 $A'(1,\ -2)$와 $B(3,\ 4)$를 대입하면

$\begin{cases} m+n=-2 \\ 3m+n=4 \end{cases}$

$\therefore m=3,\ n=-5$

$\therefore y=3x-5$

점 P는 직선 $y=3x-5$와 x축의 교점이므로

$0=3x-5$

$\therefore x=\frac{5}{3}$

따라서 점 P의 좌표는 $\left(\frac{5}{3},\ 0\right)$이다.

9 세 점이 한 직선 위에 있으려면 두 점을 지나는 직선의 기울기가 같아야 한다.

(1) $\frac{2-(-1)}{3-1}=\frac{1-2}{a-3}$

$3(a-3)=-2$

$\therefore a=\frac{7}{3}$

(2) $\frac{a-1}{-1-2}=\frac{2-1}{4-2}$

$2(a-1)=-3$

$\therefore a=-\frac{1}{2}$

TIP 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있을 때, $\overleftrightarrow{AB}=\overleftrightarrow{AC}=\overleftrightarrow{BC}$이므로 세 직선의 기울기는 같다.

10 $f(m)-f(n)=3n-3m=-3(m-n)$에서

$\frac{f(m)-f(n)}{m-n}=-3$이므로 기울기인 $a=-3$

따라서 x의 값이 2만큼 증가할 때 y의 값은 k만큼 증가하므로

$(기울기)=\frac{(y의\ 값의\ 증가량)}{(x의\ 값의\ 증가량)}=\frac{k}{2}=-3$

$\therefore k=-6$

11 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 기울기가 각각 1과 -2이므로 $f(x)=x+m$, $g(x)=-2x+n$이라 하면

$y=f(x)$의 그래프의 x절편이 3이고

$y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프의 교점의 x좌표가 3이므로

교점의 좌표는 $(3,\ 0)$이다.

$g(x)=-2x+n$에 $(3,\ 0)$을 대입하면

$0=-2\times3+n$

$\therefore n=6$

따라서 $g(x)=-2x+6$이므로 y절편은 6이다.

12 일차함수 $y=ax+b$의 그래프가 두 점 $(4,\ 0)$, $(0,\ 2)$를 지나므로 각각 대입하면

$\begin{cases}0=4a+b\\2=a\times0+b\end{cases}$

$\therefore a=-\frac{1}{2},\ b=2$

$y=-\frac{1}{2}x+2$의 그래프의 기울기는 $-\frac{1}{2}$이고 $x-my=2$의 그래프의 기울기는 $y=\frac{1}{m}x-\frac{2}{m}$에서 $\frac{1}{m}$이다.

두 직선이 수직이려면 기울기의 곱이 -1이어야 하므로

$\left(-\frac{1}{2}\right)\times\frac{1}{m}=-1$

$\therefore m=\frac{1}{2}$

2 STEP 실력 높이기

113~117쪽

1 ④, ⑤	**2** $-2\le b\le 2$	**3** $\frac{32}{5}$	**4** 1	**5** $-\frac{5}{2}\le a\le -\frac{2}{5}$	**6** $\frac{3}{4}$
7 $-3\le k\le 0$	**8** $y=2x+1$	**9** $\frac{1}{5}<m<\frac{2}{3}$	**10** $-1\le k\le 4$	**11** $\left(\frac{8}{5}, 0\right)$	**12** 2
13 $\frac{1}{2}$	**14** 2	**15** $y=x+2$	**16** $\frac{1}{2}$, 1, 2	**17** $ac<0$	**18** 72 cm²
19 $y=8x\ (0<x<5)$, $y=90-10x\ (5\le x<9)$			**20** 40분	**21** 오후 5시	**22** 풀이 참조

문제 풀이

1 ①, ② 기울기가 양수이므로 $a>0$

y절편이 0과 1 사이에 있으므로

$0<b+1<1$

$\therefore -1<b<0$

③, ④ $x=1$일 때, y의 값은 양수이므로

$a+b+1>0$

⑤ $x=2$일 때, y의 값은 양수이므로

$2a+b+1>0$

$\therefore 2a+b>-1$

2 서술형

표현 단계 $y=ax+b$의 그래프가 점 $(1, 1)$을 지나므로

풀이 단계 $(1, 1)$을 대입하면

$a+b=1$

즉, $b=1-a$이므로

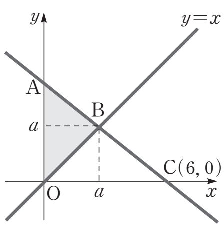
$-1\le a\le 3$에서

$-3\le -a\le 1$

$\therefore -2\le 1-a\le 2$

확인 단계 따라서 b의 값의 범위는 $-2\le b\le 2$

3 점 B는 직선 $y=x$ 위의 점이므로 점 B의 좌표를 (a, a)로 놓으면



$\triangle BOC=\frac{1}{2}\times 6\times a=8$

$\therefore a=\frac{8}{3}$

또, 직선 BC는 두 점

$B\left(\frac{8}{3}, \frac{8}{3}\right)$, $C(6, 0)$을 지나므로 기울기는

$$\frac{0-\frac{8}{3}}{6-\frac{8}{3}}=-\frac{4}{5}$$

직선 BC의 방정식을 $y=-\frac{4}{5}x+k$라 놓고 $C(6, 0)$을 대입하면 $k=\frac{24}{5}$

$\therefore y=-\frac{4}{5}x+\frac{24}{5}$

따라서 점 A의 좌표는 $\left(0, \frac{24}{5}\right)$이므로

$\triangle AOB=\frac{1}{2}\times\frac{24}{5}\times\frac{8}{3}=\frac{32}{5}$

4 세 점 O, A, B를 이동한 점을 각각 O′, A′, B′이라 하면

$O(0, 0)\rightarrow O'(0, 0)$

$A(2, 4)\rightarrow A'(6, -2)$

$B(m, 2)\rightarrow B'(m+2, m-2)$

세 점 O′, A′, B′이 한 직선 위에 있으려면 각각의 두 점을 지나는 직선의 기울기가 같아야 한다.

두 점 O′, A′을 지나는 직선의 기울기는

$\frac{-2-0}{6-0}=-\frac{1}{3}$ …… ㉠

두 점 O′, B′을 지나는 직선의 기울기는

$\frac{(m-2)-0}{(m+2)-0}=\frac{m-2}{m+2}$ …… ㉡

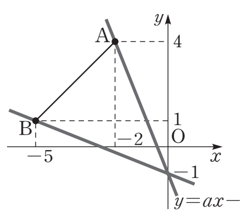
㉠, ㉡이 일치하므로

$\frac{m-2}{m+2}=-\frac{1}{3}$, $3(m-2)=-(m+2)$

$\therefore m=1$

5 서술형

표현 단계 그래프로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



변형 단계 일차함수 $y=ax-1$의 그래프가 $\overline{AB}$와 만나려면 일차함수의 그래프의 기울기가 점 A를 지날 때보다 크거나 같고, 점 B를 지날 때보다 작거나 같아야 한다.

풀이 단계 $y=ax-1$에 $x=-2$, $y=4$를 대입하면

$4=-2a-1$ $\therefore a=-\frac{5}{2}$

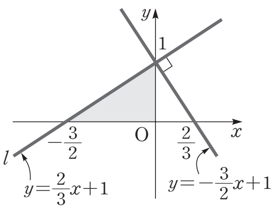
$x=-5$, $y=1$을 대입하면

$1=-5a-1 \qquad \therefore a=-\frac{2}{5}$

<u>확인 단계</u> $\therefore -\frac{5}{2}\le a\le -\frac{2}{5}$

> **TIP** 일차함수 $y=ax-1$에 대하여 a의 값에 관계없이 $x=0$일 때, $y=-1$이므로 일차함수 $y=ax-1$의 그래프는 a의 값에 관계없이 점 $(0, -1)$을 지난다.

6 $y=-\frac{3}{2}x+1$의 그래프와 수직으로 만나는 직선 l의 기울기를 m이라 하면



$\left(-\frac{3}{2}\right)\times m=-1$

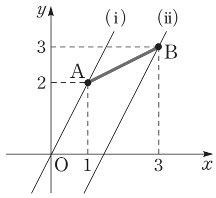
$\therefore m=\frac{2}{3}$

이때 직선 l이 점 $(0, 1)$을 지나므로 직선 l의 방정식은 $y=\frac{2}{3}x+1$이고 그래프는 위의 그림과 같다.

따라서 직선 l과 x축, y축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times 1=\frac{3}{4}$

7 직선 $y=2x+k$가 선분 AB와 만나는 경우는 오른쪽 그림과 같이 점 A를 지나는 직선부터 점 B를 지나는 직선까지이다.



(i) $y=2x+k$의 그래프가 점 $A(1, 2)$를 지날 때

$2=2+k \qquad \therefore k=0$

(ii) $y=2x+k$의 그래프가 점 $B(3, 3)$을 지날 때

$3=6+k \qquad \therefore k=-3$

(i), (ii)에 의해 $-3\le k\le 0$

8 일차함수를 $y=ax+b$라 하면

$\frac{f(m^2)-f(n)}{m^2-n}=2$는 일차함수의 그래프의 기울기이므로

$y=2x+b$

$f(2)=5$이므로 $(2, 5)$를 대입하면

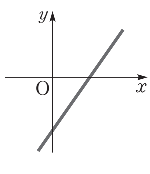
$5=2\times 2+b$

$\therefore b=1$

따라서 일차함수의 식은 $y=2x+1$이다.

9 서술형

<u>표현 단계</u> 일차함수의 그래프가 제2사분면만을 지나지 않을 때는 오른쪽 그림과 같이 (기울기)>0, (y절편)<0인 경우이다.



<u>변형 단계</u> $y=(2-3m)x-5m+1$에서 $2-3m>0$이고

$-5m+1<0$

<u>풀이 단계</u> 즉, $2-3m>0$에서 $-3m>-2 \qquad \therefore m<\frac{2}{3}$

또한, $-5m+1<0$에서 $-5m<-1$

$\therefore m>\frac{1}{5}$

<u>확인 단계</u> $\therefore \frac{1}{5}<m<\frac{2}{3}$

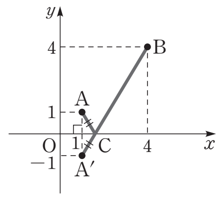
10 $y=2x+k$는 x의 값이 증가할 때 y의 값도 증가하므로

$x=0$일 때 $2\times 0+k\ge -1 \qquad \therefore k\ge -1$

$x=2$일 때 $2\times 2+k\le 8 \qquad \therefore k\le 4$

$\therefore -1\le k\le 4$

11 오른쪽 그림과 같이 점 $A(1, 1)$과 x축에 대하여 대칭인 점을 A'이라 하면 $A'(1, -1)$이다. $\overline{AC}=\overline{A'C}$이므로 $\overline{AC}+\overline{BC}$의 길이가 최소가 되려면 $\overline{A'C}+\overline{BC}$의 길이가 최소가 되면 된다.



즉, 세 점 A′, C, B가 한 직선 위에 있을 때, $\overline{A'C}+\overline{BC}$의 길이는 최소가 된다. 두 점 $A'(1, -1)$, $B(4, 4)$를 지나는 직선의 방정식을 $y=ax+b$로 놓으면

점 $A'(1, -1)$을 지나므로

$-1=a+b \qquad \cdots\cdots$ ㉠

또, 점 $B(4, 4)$를 지나므로

$4=4a+b \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=\frac{5}{3}$, $b=-\frac{8}{3}$

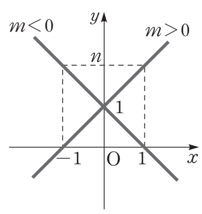
$\therefore y=\frac{5}{3}x-\frac{8}{3} \qquad \cdots\cdots$ ㉢

점 C는 직선 ㉢과 x축의 교점이므로

$0=\frac{5}{3}x-\frac{8}{3} \qquad \therefore x=\frac{8}{5}$

따라서 점 C의 좌표는 $\left(\frac{8}{5}, 0\right)$이다.

12 $y=mx+1$의 그래프의 y절편은 1이고 x의 값의 범위는 $-1\le x\le 1$, 함숫값의 범위는 $0\le y\le n$이므로 그래프의 모양은 오른쪽 그림과 같이 $m>0$인 경우와 $m<0$인 경우로 2가지이다.



(i) $m>0$일 때

점 $(-1, 0)$을 지나므로 대입하면

$-m+1=0 \qquad \therefore m=1$

$\therefore y=x+1$

점 $(1, n)$을 지나므로 대입하면

$1+1=n \qquad \therefore n=2$

(ii) $m<0$일 때

점 $(1, 0)$을 지나므로 대입하면

$m+1=0 \qquad \therefore m=-1$

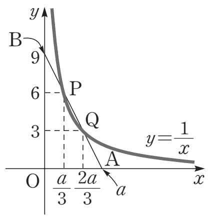
$\therefore y=-x+1$

점 $(-1, n)$을 지나므로 대입하면

$-(-1)+1=n \qquad \therefore n=2$

(i), (ii)에서 $n=2$

13 오른쪽 그림과 같이 $y=\frac{1}{x}$의 그래프와 $\overline{AB}$의 교점을 P, Q라 하면 $\overline{BP}=\overline{PQ}=\overline{QA}$이므로



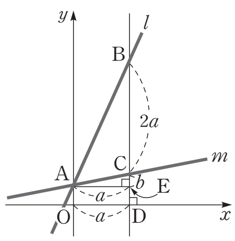
$P\left(\frac{a}{3}, 6\right)$, $Q\left(\frac{2a}{3}, 3\right)$

점 P는 $y=\frac{1}{x}$의 그래프 위의 점이므로

$6=\frac{1}{\frac{a}{3}}$, $6=\frac{3}{a}$

$\therefore a=\frac{1}{2}$

14 오른쪽 그림과 같이 $\overline{BC}:\overline{OD}=2:1$이므로 $\overline{OD}=a$라 하면 $\overline{BC}=2a$이고 점 A에서 $\overline{OD}$와 평행하게 보조선을 그어 $\overline{BD}$와 만나는 점을 E라 하자.



$\overline{AE}=a$이고 $\overline{CE}=b$라 하면 직선 l의 기울기는 $\frac{2a+b}{a}$,

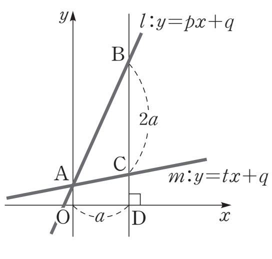
직선 m의 기울기는 $\frac{b}{a}$이다.

따라서 두 직선 l, m의 기울기의 차는

$\frac{2a+b}{a}-\frac{b}{a}=\frac{2a}{a}=2$이다.

다른 풀이

점 D의 좌표를 $(a, 0)$이라 하고, 두 직선 l, m의 관계식을 각각 $y=px+q$, $y=tx+q$라 하면 점 B의 좌표는 $B(a, ap+q)$이고, 점 C의 좌표는 $C(a, at+q)$이다.



이때 $\overline{BC}:\overline{OD}=2:1$이고 $\overline{OD}=a$이므로 $\overline{BC}=2a$

즉, $\overline{BD}-\overline{CD}=\overline{BC}$이므로 $ap+q-(at+q)=2a$,

$ap+q-at-q=2a$, $a(p-t)=2a \qquad \therefore p-t=2$

따라서 두 직선 l, m의 기울기의 차는 $p-t=2$이다.

15 갑이 그린 그래프의 식은 $y=-x+2$이고 b의 값은 바르게 보았으므로 $b=2$

을이 그린 그래프의 식은 $y=x-2$이고 a의 값은 바르게 보았으므로 $a=1$

따라서 처음 일차함수의 식은 $y=x+2$이다.

16 직선 $y=mx-1$이 점 $(4, 7)$을 지나므로

$7=4m-1 \qquad \therefore m=2$

세 직선이 삼각형을 이루지 못하는 경우는 다음 세 가지 중 하나이다.

(i) 직선 $y=ax+5$가 점 $(4, 7)$을 지날 때

$7=4a+5 \qquad \therefore a=\frac{1}{2}$

(ii) 직선 $y=ax+5$가 직선 $y=x+3$과 평행할 때

$a=1$

(iii) 직선 $y=ax+5$가 직선 $y=mx-1$과 평행할 때

$a=m=2$

(i), (ii), (iii)에 의해 $a=\frac{1}{2}$ 또는 $a=1$ 또는 $a=2$

> **TIP** 세 직선 $y=x+3$, $y=mx-1$, $y=ax+5$의 y절편은 각각 3, -1, 5로 모두 다르므로 세 직선 중 적어도 두 직선이 일치하는 경우는 생기지 않는다.

17 $ax+by+c=0$의 x절편은 $-\frac{c}{a}>0$이므로 $\frac{c}{a}<0$

$\therefore ac<0$

다른 풀이

$ax+by+c=0$, $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$

기울기는 $-\frac{a}{b}>0$, y절편은 $-\frac{c}{b}<0$이므로

$\frac{a}{b}<0$, $\frac{c}{b}>0$

즉, a, b는 부호가 서로 다르고 b, c는 부호가 서로 같다.

따라서 a, c는 부호가 서로 다르다.

$\therefore ac<0$

18 □PBCQ가 등변사다리꼴이 되려면 $\overline{AP}=\overline{QD}$이어야 한다.

x초 후에 □PBCQ가 등변사다리꼴이 된다고 하면

$\overline{AP}=x$ cm이고 $\overline{AQ}=3x$ cm이므로 $\overline{QD}=12-3x$(cm)

즉, $\overline{AP}=\overline{QD}$에서 $x=12-3x \qquad \therefore x=3$

따라서 3초 후에 □PBCQ는 등변사다리꼴이 된다.

$\overline{PQ}=\overline{AQ}-\overline{AP}=2x$ cm이므로

사다리꼴 PBCQ의 넓이를 y cm^2라 하면

$y=\frac{1}{2}\times(2x+12)\times 8=8x+48 \qquad \therefore y=8x+48$

$y=8x+48$에 $x=3$을 대입하면 $y=8\times 3+48=72$

따라서 사다리꼴 PBCQ가 등변사다리꼴이 되었을 때의 넓이는 72 cm^2이다.

19 서술형

표현 단계 x의 값의 범위가 $0<x<5$일 때, 점 P는 $\overline{\text{AB}}$ 위에 있고 x의 값의 범위가 $5\le x<9$일 때, 점 P는 $\overline{\text{BC}}$ 위에 있다.

풀이 단계 (i) 점 P가 $\overline{\text{AB}}$ 위에 있을 때,

$\overline{\text{AP}}=2x$ cm이므로

$\triangle\text{APC}=\frac{1}{2}\times 2x\times 8=8x(\text{cm}^2)$

$\therefore\ y=8x\ (0<x<5)$

(ii) 점 P가 $\overline{\text{BC}}$ 위에 있을 때,

$\overline{\text{CP}}=18-2x(\text{cm})$이므로

$\triangle\text{APC}=\frac{1}{2}\times(18-2x)\times 10=90-10x(\text{cm}^2)$

$\therefore\ y=90-10x\ (5\le x<9)$

확인 단계 따라서 x, y 사이의 관계식은

$\begin{cases} y=8x\ (0<x<5) \\ y=90-10x\ (5\le x<9) \end{cases}$

> **TIP** 위의 문제의 답은 $\begin{cases} y=8x\ (0<x\le 5) \\ y=90-10x\ (5\le x<9) \end{cases}$와 같이 나타내어도 된다. 이렇게 두 범위에 모두 등호를 넣어줄 수 있을 때는 보통 $5\le x<9$와 같이 '크다' 쪽에 등호를 붙여서 표현한다.

20

5분에 15 ℃씩 올라가므로 1분에 3 ℃씩 올라가고, 3분에 6 ℃씩 내려가므로 1분에 2 ℃씩 내려간다.

x분 후의 온도를 y ℃라 하면

올라갈 때 : $y=3x+10$

내려갈 때 : $y=85-2x$

10 ℃의 물은 85 ℃까지 올라가므로 85 ℃까지 올라가는 데 걸린 시간은 $y=3x+10$에 $y=85$를 대입하면

$85=3x+10$

$\therefore\ x=25$(분)

85 ℃의 물은 55 ℃까지 내려가므로 55 ℃까지 내려가는 데 걸린 시간은 $y=85-2x$에 $y=55$를 대입하면

$55=85-2x$

$\therefore\ x=15$(분)

$\therefore$ (전체 소요 시간)$=25+15=40$(분)

21

1분에 2 mL씩 x분 동안 맞으면 $2x$ mL, 3 mL씩 y분 동안 맞으면 $3y$ mL이므로 $2x+3y=600$이다.

$2x+3y=600$에서 $3y=-2x+600$ $\qquad\therefore\ y=-\frac{2}{3}x+200$

2 mL씩 1시간 30분 동안 맞았으므로 $x=90$을 대입하면

$y=-\frac{2}{3}\times 90+200$

$\ =-60+200=140$

즉, 3 mL씩 140분을 맞아야 한다.

따라서 오후 2시 40분에 2시간 20분을 더하면 다 맞았을 때의 시각은 오후 5시이다.

22 서술형

표현 단계 $70-40=30$(cm)이므로 물은 10분 동안 30 cm, 즉 1분에 3 cm씩 채워지고, 10분 후의 높이가 40 cm이었으므로 물을 틀기 전의 물통에는 10 cm 높이의 물이 채워져 있었다.

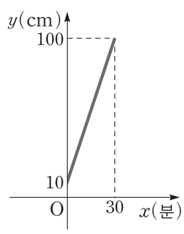
따라서 x, y 사이의 관계식은 $y=3x+10$이다.

풀이 단계 물이 가득 찼을 때의 높이는 100 cm이므로 $y=3x+10$에 $y=100$을 대입하면

$100=3x+10$ $\qquad\therefore\ x=30$

즉, x의 값의 범위는 $0\le x\le 30$, 함숫값의 범위는 $10\le y\le 100$이다.

확인 단계 따라서 x, y 사이의 관계식은 $y=3x+10\ (0\le x\le 30)$이고, 이것을 그래프로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



3 STEP 최고 실력 완성하기

118~119쪽

1 $m=-2,\ n=\frac{8}{3}$ **2** $m=\frac{2}{n}$ **3** 제3사분면 **4** $\left(-\frac{7}{5},\ 0\right)$ **5** 33 **6** $y=-\frac{1}{2}x+5$

7 $y=-\frac{8}{9}x$ **8** $3<y<7$ **9** $\left(-\frac{29}{7},\ \frac{26}{7}\right)$

문제 풀이

1 직선 l의 y절편이 -2이므로 직선 l을 나타내는 함수의 식은 $y=kx-2$

또, 직선 l이 점 $(4,\ 4)$를 지나므로

$4=4k-2 \qquad \therefore k=\frac{3}{2}$

즉, $l : y=\frac{3}{2}x-2$이고 이 직선이 점 $A(3a,\ 0)$을 지나므로

$0=\frac{9}{2}a-2,\ 2=\frac{9}{2}a \qquad \therefore a=\frac{4}{9}$

따라서 $A\left(\frac{4}{3},\ 0\right)$, $B\left(\frac{16}{9},\ -\frac{8}{9}\right)$이고 직선

$y=mx+n$이 두 점 A, B를 지나므로

$A\left(\frac{4}{3},\ 0\right)$을 대입하면 $\frac{4}{3}m+n=0$ …… ㉠

$B\left(\frac{16}{9},\ -\frac{8}{9}\right)$을 대입하면 $\frac{16}{9}m+n=-\frac{8}{9}$ …… ㉡

㉡$-$㉠에서 $\frac{4}{9}m=-\frac{8}{9} \qquad \therefore m=-2$

또, $m=-2$를 ㉠에 대입하면

$-\frac{8}{3}+n=0 \qquad \therefore n=\frac{8}{3}$

다른 풀이

직선 $y=mx+n$이 두 점 $A\left(\frac{4}{3},\ 0\right)$, $B\left(\frac{16}{9},\ -\frac{8}{9}\right)$을 지나

므로 $m=\dfrac{-\frac{8}{9}-0}{\frac{16}{9}-\frac{4}{3}}=\dfrac{-\frac{8}{9}}{\frac{4}{9}}=-2$

$y=-2x+n$에 $A\left(\frac{4}{3},\ 0\right)$을 대입하면

$0=-2\times\frac{4}{3}+n \qquad \therefore n=\frac{8}{3}$

2 $y=mx+2$에 $x=nt+1$을 대입하면

$y=m(nt+1)+2$

$y=mnt+m+2$ …… ㉠

㉠에서 t의 값이 1에서 4까지 증가하면 y의 값의 증가량은

$(4mn+m+2)-(mn+m+2)=3mn$

즉, $3mn=6 \qquad \therefore m=\frac{2}{n}$

3 $\begin{cases} y=ax+b & \cdots\cdots ㉠ \\ y=bx+a & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠$-$㉡을 하면

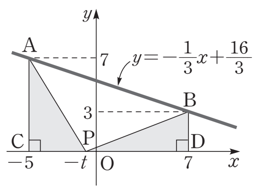
$(a-b)x=a-b \qquad \therefore x=\frac{a-b}{a-b}=1\ (\because a\neq b)$

따라서 교점의 좌표는 $(1,\ a+b)$이고 이 점이 제4사분면 위에 있으므로 $a+b<0$

그런데 $ab>0$이므로 $a<0,\ b<0$

따라서 점 $(a,\ b)$는 제3사분면 위의 점이다.

4 오른쪽 그림과 같이 두 점 $A(-5,\ a)$, $B(7,\ b)$는 직선 $y=-\frac{1}{3}x+\frac{16}{3}$ 위에 있으므로



$a=-\frac{1}{3}\times(-5)+\frac{16}{3}=7$,

$b=-\frac{1}{3}\times7+\frac{16}{3}=3$

즉, $A(-5,\ 7)$, $B(7,\ 3)$이므로 $C(-5,\ 0)$, $D(7,\ 0)$이고 점 P의 좌표를 $(-t,\ 0)\ (t>0)$이라 하면

$\triangle ACP=\frac{1}{2}\times(5-t)\times7$

$\triangle BPD=\frac{1}{2}\times(t+7)\times3$

$\triangle ACP=\triangle BPD$이므로

$(5-t)\times7=(t+7)\times3,\ 35-7t=3t+21,\ 10t=14$

$\therefore t=\frac{7}{5}$

따라서 점 P의 좌표는 $\left(-\frac{7}{5},\ 0\right)$이다.

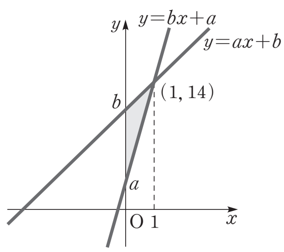
5 $\begin{cases} y=ax+b & \cdots\cdots ㉠ \\ y=bx+a & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠$-$㉡을 하면 $(a-b)x=a-b$

$\therefore x=1\ (\because 0<a<b)$

따라서 교점의 좌표는 $(1,\ 14)$이므로 ㉠에 $(1,\ 14)$를 대입하면 $a+b=14$ …… ㉢

또, 주어진 조건에 의해 오른쪽 그림의 어두운 부분의 넓이는



$\frac{1}{2}\times(b-a)\times1=4$

$\therefore b-a=8$ …… ㉣

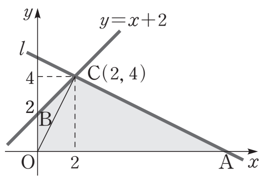
㉢, ㉣을 연립하여 풀면

$a=3,\ b=11$

$\therefore ab=33$

6 직선 $y=x+2$의 y절편은 2이므로 $B(0,\ 2)$이다.

점 A의 좌표를 $(n,\ 0)$이라 하면



$\square OACB=\triangle CBO+\triangle COA$

$=\frac{1}{2}\times2\times2+\frac{1}{2}\times n\times4$

$=2+2n$

$\square OACB=22$이므로 $2+2n=22$ $\quad\therefore n=10$

따라서 직선 l은 두 점 $C(2,\ 4)$, $A(10,\ 0)$을 지나므로

직선 l의 방정식을 $y=ax+b$로 놓으면

$a=\frac{0-4}{10-2}=-\frac{1}{2}$

$y=-\frac{1}{2}x+b$에 $A(10,\ 0)$을 대입하면 $b=5$

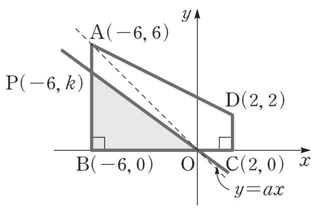
따라서 직선 l의 방정식은 $y=-\frac{1}{2}x+5$

7 구하는 직선은 원점을 지나므로 $y=ax$라 하자.

$\square ABCD=\frac{1}{2}\times(2+6)\times8=32$

이므로 원점을 지나는 직선으로 이등분된 도형의 넓이는 각각 16이다.

그런데 $\triangle ABO=\frac{1}{2}\times6\times6=18$이므로 $\square ABCD$의 넓이를 이등분하는 직선은 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AB}$와 만난다.



$\square ABCD$의 넓이를 이등분하는 직선과 $\overline{AB}$의 교점을 $P(-6,\ k)\,(k>0)$라 하면

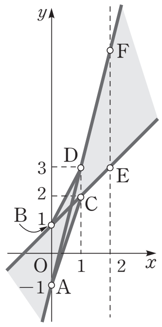
$\triangle PBO=\frac{1}{2}\times6\times k=16$ $\quad\therefore k=\frac{16}{3}$

따라서 직선 $y=ax$는 점 $P\left(-6,\ \frac{16}{3}\right)$을 지나므로

$\frac{16}{3}=-6a$ $\quad\therefore a=-\frac{8}{9}$

$\therefore y=-\frac{8}{9}x$

8 $x=0$일 때 $-1<y<1$, $x=1$일 때 $2<y<3$이므로 일차함수 $y=ax+b$의 그래프는 오른쪽 그림에서 어두운 부분에 있어야 한다.

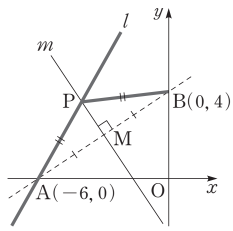


여기에서 직선 BC의 방정식은 $y=x+1$이므로 점 E의 y좌표는 $2+1=3$

또한, 직선 AD의 방정식은 $y=4x-1$이므로 점 F의 y좌표는 $8-1=7$

따라서 $x=2$일 때 y의 값의 범위는 $3<y<7$

9 오른쪽 그림과 같이 $\overline{PA}=\overline{PB}$이므로 점 P는 $\overline{AB}$의 수직이등분선 위의 점이다.



직선 AB의 기울기가 $\frac{4-0}{0-(-6)}=\frac{2}{3}$이므로 $\overline{AB}$에 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{3}{2}$이다.

따라서 $\overline{AB}$에 수직인 직선의 방정식을

$m:y=-\frac{3}{2}x+b$로 놓으면 두 점 $A(-6,\ 0)$, $B(0,\ 4)$의 중점 $M\left(\frac{-6+0}{2},\ \frac{0+4}{2}\right)=M(-3,\ 2)$가 직선 m을 지나므로

$2=-\frac{3}{2}\times(-3)+b$에서 $b=-\frac{5}{2}$

따라서 직선 m의 방정식은 $y=-\frac{3}{2}x-\frac{5}{2}$

한편, 직선 l은 기울기가 2이므로 $y=2x+b'$이라 하면 이 직선이 점 $A(-6,\ 0)$을 지나므로

$0=2\times(-6)+b'$에서 $b'=12$

$\therefore y=2x+12$

따라서 점 P는 직선 l과 직선 m의 교점이므로 두 식을 연립하여 풀면 점 P의 좌표는 $\left(-\frac{29}{7},\ \frac{26}{7}\right)$이다.

3 일차함수와 일차방정식

1 STEP 주제별 실력다지기

121~124쪽

1 ③	**2** 제1사분면	**3** (1) $x=3$ (2) $y=2x+7$		**4** $y=-\frac{2}{3}x-\frac{7}{6}$	
5 (1) $y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$ (2) $y=3x+3$		**6** $y=6x+10$	**7** $y=-2x+4$	**8** $\frac{46}{15}$	**9** 17
10 $\frac{25}{2}$	**11** 2	**12** 제4사분면	**13** -6 또는 6	**14** $\frac{14}{3}$	**15** 108 cm^2
16 $y=\frac{1}{2}x+1$					

최상위 10 NOTE

그래프를 통해 연립방정식의 해의 개수 파악하기

3단원에서는 식의 조작을 통해서 연립방정식의 해의 개수를 파악했다. 하지만 연립방정식 $\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{cases}$ 의 해의 개수와 두 그래프 $\begin{cases} y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b} \\ y=-\frac{a'}{b'}x-\frac{c'}{b'} \end{cases}$ 의 교점의 개수가 같다는 점을 이용하면 연립방정식의 해의 개수를 쉽게 파악할 수 있다. 두 직선의 위치 관계는 기울기와 y절편에 의하여 결정된다.

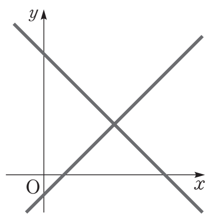
(1) 두 직선이 한 점에서 만나는 경우

→ 연립방정식이 한 쌍의 해를 갖는 경우

두 직선의 기울기가 다르다.

$-\frac{a}{b}\neq-\frac{a'}{b'}$

⇨ $\frac{a}{a'}\neq\frac{b}{b'}$



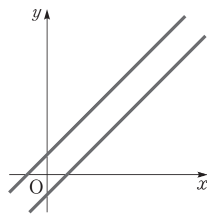
(2) 두 직선이 평행한 경우

→ 연립방정식의 해가 없는 경우

두 직선의 기울기는 같고 y절편은 다르다.

$-\frac{a}{b}=-\frac{a'}{b'}$, $-\frac{c}{b}\neq-\frac{c'}{b'}$

⇨ $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$



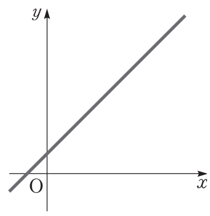
(3) 두 직선이 일치하는 경우

→ 연립방정식의 해가 무수히 많은 경우

두 직선의 기울기와 y절편이 모두 같다.

$-\frac{a}{b}=-\frac{a'}{b'}$, $-\frac{c}{b}=-\frac{c'}{b'}$

⇨ $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$



1 $ax+by+c=0$에서 $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$이므로

기울기에서 $-\frac{a}{b}>0$ $\quad\therefore ab<0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

y절편에서 $-\frac{c}{b}>0$ $\quad\therefore bc<0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서

$b>0$일 때 $a<0$, $c<0$이고,

$b<0$일 때 $a>0$, $c>0$이므로

$ac>0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉢

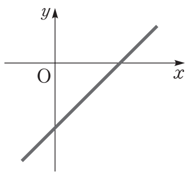
$bx+ay+c=0$에서

$y=-\frac{b}{a}x-\frac{c}{a}$

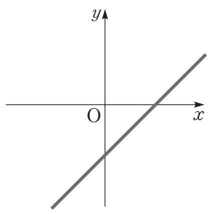
㉠에서 $ab<0$이므로 $-\frac{b}{a}>0$

㉢에서 $ac>0$이므로 $-\frac{c}{a}<0$

따라서 구하는 그래프의 기울기는 양수이고, y절편은 음수이므로 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다.



2 $y=-\frac{1}{m}x-\frac{n}{m}$이 제2사분면을 지나지 않으므로 오른쪽 그림과 같이 직선의 기울기는 양수이고, y절편은 음수이다.

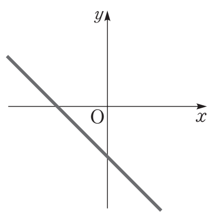


즉, $-\frac{1}{m}>0$, $-\frac{n}{m}<0$

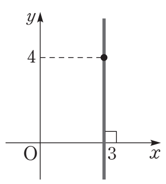
$\therefore m<0$, $n<0$

따라서 직선 $y=mx+n$은 기울기와 y절편이 음수이므로 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다.

따라서 제1사분면을 지나지 않는다.



3 (1) 점 $(3,\ 4)$를 지나고 x축에 수직인 직선은 오른쪽 그림과 같다.



$\therefore x=3$

(2) 직선의 기울기가 2이므로

$y=2x+b$에 $(-2,\ 3)$을 대입하면

$3=2\times(-2)+b$

$\therefore b=7$

$\therefore y=2x+7$

4 두 점 $(-2,\ 1)$, $(3,\ -4)$를 연결한 선분의 중점의 좌표는 $\left(\frac{-2+3}{2},\ \frac{1+(-4)}{2}\right)=\left(\frac{1}{2},\ -\frac{3}{2}\right)$이고, 구하는 직선은 직선 $2x+3y+1=0$과 평행하므로 기울기가 같다.

$2x+3y+1=0$에서 $y=-\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}$이므로 기울기는 $-\frac{2}{3}$이다.

따라서 구하는 직선의 기울기는 $-\frac{2}{3}$이고, 점 $\left(\frac{1}{2},\ -\frac{3}{2}\right)$을 지나므로 $y=-\frac{2}{3}x+b$라 하면

$-\frac{3}{2}=\left(-\frac{2}{3}\right)\times\frac{1}{2}+b$ $\quad\therefore b=-\frac{7}{6}$

$\therefore y=-\frac{2}{3}x-\frac{7}{6}$

5 (1) 두 점 $(-3,\ 4)$, $(1,\ 2)$를 지나는 직선의 방정식을 $y=ax+b$라 하고 두 점의 좌표를 대입하면

$\begin{cases}-3a+b=4\\ a+b=2\end{cases}$ $\quad\therefore a=-\frac{1}{2},\ b=\frac{5}{2}$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$

다른 풀이

$y=ax+b$에서 $a=\frac{2-4}{1-(-3)}=-\frac{1}{2}$

$\therefore y=-\frac{1}{2}x+b$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

㉠에 $(1,\ 2)$를 대입하면

$2=\left(-\frac{1}{2}\right)\times1+b$ $\quad\therefore b=\frac{5}{2}$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$

(2) 두 점 $(-1,\ 0)$, $(0,\ 3)$을 지나는 직선의 방정식을 $y=ax+b$라 하고 두 점의 좌표를 대입하면

$\begin{cases}-a+b=0\\ b=3\end{cases}$ $\quad\therefore a=3,\ b=3$

따라서 구하는 직선의 방정식은 $y=3x+3$

다른 풀이 (1)

$y=ax+b$에서 점 $(0,\ 3)$을 지나므로 y절편은 3이다.

$\therefore b=3$

기울기는 $a=\frac{3-0}{0-(-1)}=3$

따라서 구하는 직선의 방정식은 $y=3x+3$

다른 풀이 (2)

두 점 $(-1,\ 0)$, $(0,\ 3)$을 지나므로 x절편은 -1, y절편은 3이다. 따라서 구하는 직선의 방정식은

$\frac{x}{-1}+\frac{y}{3}=1$이므로 $y=3x+3$

6 점 A는 직선 $2x-y+6=0$ 위의 점이므로

$y=4$이면 $2x-4+6=0$

$\therefore x=-1$

$\therefore A(-1, 4)$

점 B는 직선 $2x+y+6=0$ 위의 점이므로

$y=-2$이면 $2x-2+6=0$

$\therefore x=-2$

$\therefore B(-2, -2)$

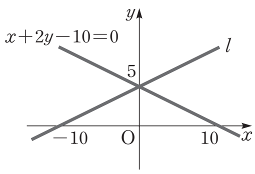
직선 AB의 방정식을 $y=ax+b$라 하면

$a=\dfrac{-2-4}{-2-(-1)}=6$

$y=6x+b$에 $(-1, 4)$를 대입하면 $b=10$

따라서 구하는 직선의 방정식은 $y=6x+10$

7 직선 $x+2y-10=0$은 오른쪽 그림과 같고 직선 $x+2y-10=0$과 y축에 대하여 대칭인 직선 l은 $(-10, 0)$, $(0, 5)$를 지나므로



$\dfrac{x}{-10}+\dfrac{y}{5}=1$

$\therefore y=\dfrac{1}{2}x+5$

직선 l의 기울기는 $\dfrac{1}{2}$이므로 직선 l과 수직인 직선의 기울기는 -2이다.

따라서 구하는 직선은 기울기가 -2이고 점 $(1, 2)$를 지나므로 $y=-2x+b$라 하면

$2=-2\times1+b$

$\therefore b=4$

$\therefore y=-2x+4$

다른 풀이

$x+2y-10=0$에서

$y=-\dfrac{1}{2}x+5$ ······ ㉠

직선 l은 직선 ㉠과 y축에 대하여 대칭이므로

$y=-\dfrac{1}{2}\times(-x)+5$

따라서 직선 l의 방정식은 $y=\dfrac{1}{2}x+5$이다.

직선 l과 수직인 직선의 기울기는 -2이므로 구하는 직선의 방정식을 $y=-2x+b$라 하면

점 $(1, 2)$를 지나므로 $2=-2\times1+b$

$\therefore b=4$

$\therefore y=-2x+4$

8 $2x-3y=3+a$ ······ ㉠

$x+3y=1-a$ ······ ㉡

$3x-y=2a-1$ ······ ㉢

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 교점의 좌표는 $\left(\dfrac{4}{3}, -\dfrac{3a+1}{9}\right)$

이고, 세 직선이 한 점에서 만나므로

㉢에 점 $\left(\dfrac{4}{3}, -\dfrac{3a+1}{9}\right)$을 대입하면

$3\times\dfrac{4}{3}-\left(-\dfrac{3a+1}{9}\right)=2a-1$,

$4+\dfrac{3a+1}{9}=2a-1$

$-15a=-46$

$\therefore a=\dfrac{46}{15}$

TIP 세 직선이 한 점에서 만나기 위한 조건

세 직선이 한 점에서 만나려면 세 직선 중 두 직선의 교점을 다른 한 직선이 지나야 한다.

9 두 점 A, B를 지나는 직선의 x절편이 4, y절편이 3이므로 직선 AB의 방정식은

$\dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{3}=1$ $\therefore y=-\dfrac{3}{4}x+3$ ······ ㉠

점 $E(2, b)$가 직선 ㉠ 위에 있으므로

$b=-\dfrac{3}{4}\times2+3=\dfrac{3}{2}$

$\therefore E\left(2, \dfrac{3}{2}\right)$

두 점 $C(1, -1)$, $E\left(2, \dfrac{3}{2}\right)$을 지나는 직선의 기울기는

$\dfrac{\frac{3}{2}-(-1)}{2-1}=\dfrac{5}{2}$

직선 CE의 방정식을 $y=\dfrac{5}{2}x+n$이라 하고

$(1, -1)$을 대입하면

$-1=\dfrac{5}{2}\times1+n$

$\therefore n=-\dfrac{7}{2}$

$\therefore y=\dfrac{5}{2}x-\dfrac{7}{2}$ ······ ㉡

점 $D(a, 2)$가 직선 ㉡ 위에 있으므로

$2=\dfrac{5}{2}a-\dfrac{7}{2}$

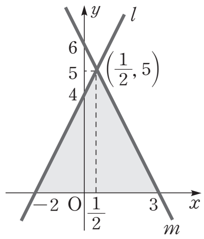
$\therefore a=\dfrac{11}{5}$

$\therefore 5a+4b=5\times\dfrac{11}{5}+4\times\dfrac{3}{2}$

$=11+6=17$

10 기울기가 2, y절편이 4인 직선 l의 방정식은

$y=2x+4$ ...... ㉠



기울기가 -2, x절편이 3인 직선 m의 방정식을 $y=-2x+b$라 하고 $(3, 0)$을 대입하면

$0=-2\times3+b$

$\therefore b=6$

$\therefore y=-2x+6$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 두 직선 l, m의 교점의 좌표는 $\left(\frac{1}{2}, 5\right)$이다.

따라서 구하는 도형의 넓이는 위의 그림에서

$\frac{1}{2}\times5\times5=\frac{25}{2}$이다.

11 $\frac{3}{15}=\frac{4-a}{5a}\neq\frac{8}{4}$

$15a=60-15a$, $16-4a\neq40a$

$\therefore a=2$

다른 풀이

$3x+(4-a)y=8$에서

$y=-\frac{3}{4-a}x+\frac{8}{4-a}$ ...... ㉠

$15x+5ay=4$에서

$y=-\frac{3}{a}x+\frac{4}{5a}$ ...... ㉡

연립방정식의 해가 없는 것은 ㉠, ㉡의 기울기가 같으면서 y절편이 다를 때이므로

$-\frac{3}{4-a}=-\frac{3}{a}$

$\therefore a=2$

$a=2$이면 ㉠, ㉡에서 $\frac{8}{4-a}\neq\frac{4}{5a}$

$\therefore a=2$

12 $\begin{cases} y=ax+b & \cdots\cdots ㉠ \\ y=bx+a & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠−㉡을 하면

$0=(a-b)x+(b-a)$,

$(a-b)x=a-b$

두 직선은 기울기가 다르므로 $a\neq b$, 즉 $a-b\neq0$이므로

$x=\frac{a-b}{a-b}=1$

$x=1$을 ㉠에 대입하면 두 직선의 교점은 $(1, a+b)$

점 (a, b)가 제3사분면 위의 점이므로 $a<0$, $b<0$

$\therefore a+b<0$

따라서 두 직선의 교점 $(1, a+b)$는 제4사분면 위의 점이다.

13 직선 l의 기울기는 $a=\frac{2-6}{1-(-1)}=-2$이므로

직선 l의 방정식은 $y=-2x+b$이다.

이때 x절편은 $\frac{b}{2}$, y절편은 b이므로 직선 l은 두 점 $\left(\frac{b}{2}, 0\right)$, $(0, b)$를 지난다.

따라서 직선 l과 x축, y축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이는

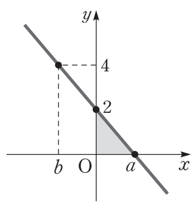
$\frac{1}{2}\times\left|\frac{b}{2}\right|\times|b|=9$,

$b^2=36$

$\therefore b=-6$ 또는 6

TIP 직선의 기울기가 일정할 때, 직선과 x축, y축으로 둘러싸인 특정한 넓이의 삼각형은 항상 2개가 존재한다.

14 $a>0$이므로 세 점 $(0, 2)$, $(a, 0)$, $(b, 4)$를 지나는 직선이 존재하기 위해서 $b<0$이어야 한다. 따라서 세 점을 지나는 직선은 오른쪽 그림과 같고 직선과 x축, y축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이가 $\frac{7}{3}$이므로



$\frac{1}{2}\times a\times2=\frac{7}{3}$

$\therefore a=\frac{7}{3}$

따라서 두 점 $(0, 2)$, $\left(\frac{7}{3}, 0\right)$을 지나는 직선의 방정식은

$y=\frac{0-2}{\frac{7}{3}-0}x+2$

$\therefore y=-\frac{6}{7}x+2$ ...... ㉠

또, 직선 ㉠은 점 $(b, 4)$를 지나므로

$4=-\frac{6}{7}b+2$

$\therefore b=-\frac{7}{3}$

$\therefore |b-a|=\left|-\frac{7}{3}-\frac{7}{3}\right|$

$=\frac{14}{3}$

15 점 A의 x좌표는 매초 3 cm의 속력으로 2초 동안 움직인 거리이므로 $3\times2=6$

$\therefore \overline{OA}=6$ cm

점 A′의 x좌표는 매초 3 cm의 속력으로 6초 동안 움직인 거리이므로 $3\times6=18$

$\therefore \overline{OA'}=18$ cm

$\therefore \overline{AA'}=18-6=12$(cm)

점 B의 y좌표는 $\frac{2}{3}\times6+1=5$

$\therefore \overline{AB}=5$ cm

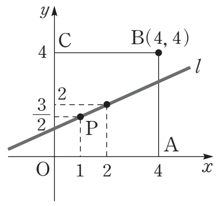
점 B′의 y좌표는 $\frac{2}{3}\times18+1=13$

$\therefore \overline{A'B'}=13$ cm

따라서 □AA′B′B의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times(\overline{AB}+\overline{A'B'})\times\overline{AA'}=\frac{1}{2}\times(5+13)\times12$$
$$=108(\text{cm}^2)$$

16 점 $\text{P}\left(1,\ \frac{3}{2}\right)$을 지나는 직선이 정사각형 OABC의 넓이를 이등분하려면 오른쪽 그림과 같이 □OABC의 두 대각선의 교점인 점 (2, 2)를 지나야 한다.



따라서 직선 l의 기울기는

$$\frac{2-\frac{3}{2}}{2-1}=\frac{1}{2}$$

직선 l의 방정식을 $y=\frac{1}{2}x+b$라 하고 (2, 2)를 대입하면

$b=1$

$\therefore y=\frac{1}{2}x+1$

2 STEP 실력 높이기

125~128쪽

1 제3사분면	**2** -13 또는 5	**3** $-\frac{3}{11}$	**4** $y=-\frac{5}{8}x+\frac{21}{16}$	**5** $\left(1, \frac{1}{2}\right)$	**6** -8, 4, 20
7 $1\le b\le 11$	**8** $-\frac{2}{9}$	**9** 10	**10** $\frac{3}{2}$	**11** $x\le -\frac{7}{3}$	**12** $y=\frac{2}{3}x-2$
13 $-1<m<0$ 또는 $0<m<\frac{2}{3}$		**14** 7	**15** $\left(\frac{4}{3}, \frac{8}{3}\right)$	**16** 9	
17 $m<-\frac{1}{3}$ 또는 $m>1$		**18** $y=\frac{5}{9}x+2$			

문제 풀이

1 x좌표와 y좌표가 같은 점을 $\mathrm{A}(a, a)$라 하면

$7a+2a+18=0 \qquad \therefore a=-2$

따라서 $\mathrm{A}(-2, -2)$이므로 제3사분면 위의 점이다.

2 $y=\frac{3}{2}x-4$와 $y=ax+b$가 서로 평행하므로 $a=\frac{3}{2}$

직선이 x축과 만나는 점의 x좌표는 x절편이다.

따라서 $y=\frac{3}{2}x-4$의 x절편은 $y=0$을 대입하면

$0=\frac{3}{2}x-4 \qquad \therefore x=\frac{8}{3}$

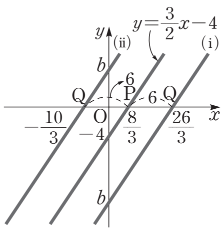
즉, 점 P의 좌표는 $\left(\frac{8}{3}, 0\right)$이고 $\overline{\mathrm{PQ}}=6$이므로

점 Q의 좌표는 $\left(\frac{8}{3}+6, 0\right)$

또는 $\left(\frac{8}{3}-6, 0\right)$

즉, 점 $\mathrm{Q}\left(\frac{26}{3}, 0\right)$

또는 점 $\mathrm{Q}\left(-\frac{10}{3}, 0\right)$이다.



(i) $y=\frac{3}{2}x+b$에 점 $\left(\frac{26}{3}, 0\right)$을 대입하면

$0=\frac{3}{2}\times\frac{26}{3}+b \qquad \therefore b=-13$

(ii) $y=\frac{3}{2}x+b$에 점 $\left(-\frac{10}{3}, 0\right)$을 대입하면

$0=\frac{3}{2}\times\left(-\frac{10}{3}\right)+b \qquad \therefore b=5$

(i), (ii)에 의해 b의 값은 -13 또는 5이다.

3 $ax+by+1=0$에서

$y=-\frac{a}{b}x-\frac{1}{b}$ …… ㉠

$2x-(a-3b)y+2b=0$에서

$y=\frac{2}{a-3b}x+\frac{2b}{a-3b}$ …… ㉡

$3x+2y=1$에서

$y=-\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}$ …… ㉢

수직인 두 직선의 기울기의 곱은 -1이고

㉠, ㉢이 수직이므로

$\left(-\frac{a}{b}\right)\times\left(-\frac{3}{2}\right)=-1 \qquad \therefore 3a=-2b$ …… ㉣

㉡, ㉢이 수직이므로

$\frac{2}{a-3b}\times\left(-\frac{3}{2}\right)=-1 \qquad \therefore a-3b=3$ …… ㉤

㉣에서 $b=-\frac{3}{2}a$를 ㉤에 대입하면

$a+\frac{9}{2}a=3 \qquad \therefore a=\frac{6}{11}$

$\therefore b=\left(-\frac{3}{2}\right)\times\frac{6}{11}=-\frac{9}{11}$

$\therefore a+b=\frac{6}{11}-\frac{9}{11}=-\frac{3}{11}$

4 $\overline{\mathrm{AB}}$의 수직이등분선의 방정식을 $y=mx+n$이라 하면 두 점 A, B를 지나는 직선의 기울기가

$\frac{5-(-3)}{3-(-2)}=\frac{8}{5}$이므로 $\frac{8}{5}\times m=-1$

$\therefore m=-\frac{5}{8}$

$\overline{\mathrm{AB}}$의 중점이

$\left(\frac{3+(-2)}{2}, \frac{5+(-3)}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}, 1\right)$이므로

$y=-\frac{5}{8}x+n$에 $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$을 대입하면

$1=-\frac{5}{8}\times\frac{1}{2}+n \qquad \therefore n=\frac{21}{16}$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$y=-\frac{5}{8}x+\frac{21}{16}$

5 두 직선 l, m이 한 점에서 만나므로

$x+y=1$, $2x-3y=1$을 연립하여 풀면

$x=\frac{4}{5}$, $y=\frac{1}{5}$

직선 n도 두 직선 l, m의 교점 $\left(\frac{4}{5}, \frac{1}{5}\right)$을 지나므로

$(a+2)\times\frac{4}{5}-a\times\frac{1}{5}=4$, $4(a+2)-a=20$

$3a=12 \qquad \therefore a=4$

따라서 직선 n의 방정식은

$6x-4y=4$　　$\therefore 3x-2y=2$

이 직선 위의 점 중 x좌표가 y좌표의 2배가 되는 점을 $(2b,\ b)$라 하면

$6b-2b=2$　　$\therefore b=\frac{1}{2}$

따라서 구하는 점의 좌표는 $\left(1,\ \frac{1}{2}\right)$이다.

6 서술형

표현 단계 세 직선으로 삼각형을 만들 수 없는 경우는 세 직선 중 어느 두 직선이 서로 평행하거나 세 직선이 한 점에서 만날 때이다.

변형 단계 $x-y=0$　　즉, $y=x$　　$\cdots\cdots$ ㉠

$2x+y=3$　　즉, $y=-2x+3$　　$\cdots\cdots$ ㉡

$mx-4y=16$　　즉, $y=\frac{m}{4}x-4$　　$\cdots\cdots$ ㉢

풀이 단계 (i) ㉠과 ㉢이 평행할 때, $\frac{m}{4}=1$　　$\therefore m=4$

(ii) ㉡과 ㉢이 평행할 때, $\frac{m}{4}=-2$

$\therefore m=-8$

(iii) ㉠, ㉡, ㉢이 한 점에서 만날 때, ㉠, ㉡의 교점의 좌표를 구하면

$\begin{cases} x-y=0 & \cdots\cdots ㉣ \\ 2x+y=3 & \cdots\cdots ㉤ \end{cases}$

㉣+㉤을 하면 $3x=3$　　$\therefore x=1$

$x=1$을 ㉣에 대입하면 $y=1$

즉, $x=1,\ y=1$을 ㉢에 대입하면

$1=\frac{m}{4}-4,\ \frac{m}{4}=5$　　$\therefore m=20$

확인 단계 따라서 m의 값은 $-8,\ 4,\ 20$이다.

7

직선 $y=ax+b$가 점 $(2,\ 7)$을 지나므로

$7=2a+b$　　$\therefore a=\frac{1}{2}(7-b)$

이때 $-2\le a\le 3$이므로 $-2\le\frac{1}{2}(7-b)\le 3$

$-4\le 7-b\le 6,\ -11\le -b\le -1$

$\therefore 1\le b\le 11$

다른 풀이

b는 점 $(2,\ 7)$을 지나는 직선 $y=ax+b$의 y절편이므로 직선의 기울기 a가 최대일 때 최소이고, a가 최소일 때 최대이다.

따라서 $-2\le a\le 3$이므로

$a=3$일 때, b는 최솟값을 갖는다.

$y=3x+b$에 점 $(2,\ 7)$을 대입하면 $b=1$

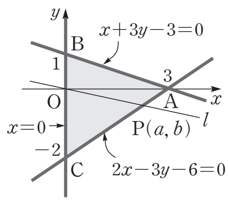
$a=-2$일 때, b는 최댓값을 갖는다.

$y=-2x+b$에 점 $(2,\ 7)$을 대입하면 $b=11$

$\therefore 1\le b\le 11$

8

세 직선으로 둘러싸인 삼각형은 x축 위쪽보다 아래쪽의 넓이가 더 크므로 구하는 직선 l은 오른쪽 그림과 같이 직선 $2x-3y-6=0$과 만난다.



이때 직선 $2x-3y-6=0$과 직선 l의 교점을 $P(a,\ b)$라 하면 $\triangle ABC=\frac{1}{2}\times 3\times 3=\frac{9}{2}$이므로

$\triangle POC=\frac{1}{2}\times 2\times a=\frac{9}{4}$　　$\therefore a=\frac{9}{4}$

점 $P\left(\frac{9}{4},\ b\right)$가 직선 $2x-3y-6=0$ 위에 있으므로

$2\times\frac{9}{4}-3b-6=0$　　$\therefore b=-\frac{1}{2}$

따라서 직선 l의 기울기는 $\dfrac{-\frac{1}{2}-0}{\frac{9}{4}-0}=-\frac{2}{9}$

9 서술형

표현 단계 $3x+ay=6a$의 x절편, y절편을 구한다.

변형 단계 $y=0$을 대입하면 $3x=6a$　　$\therefore x=2a$

$x=0$을 대입하면 $ay=6a$　　$\therefore y=6$

풀이 단계 즉, x절편이 $2a$, y절편이 6인 직선과 x축, y축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이가 18이므로

$\frac{1}{2}\times 2a\times 6=18$

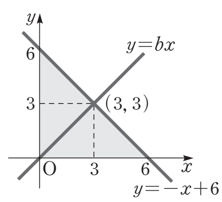
$6a=18$　　$\therefore a=3$

따라서 직선의 방정식은 $y=-x+6$이다.

이때 원점을 지나는 직선 $y=bx$가 직선 $y=-x+6$과 x축, y축으로 둘러싸인 직각이등변삼각형의 넓이를 이등분하므로 직선 $y=bx$는 이 삼각형의 빗변의 중점을 지난다. 따라서 삼각형의 빗변의 중점의 좌표를 구하면

$\left(\frac{6+0}{2},\ \frac{0+6}{2}\right)=(3,\ 3)$

즉, $y=bx$의 그래프는 점 $(3,\ 3)$을 지나므로 그래프로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $y=bx$에 점 $(3,\ 3)$을 대입하면

$3=3b$　　$\therefore b=1$

확인 단계 $\therefore a^2+b^2=9+1=10$

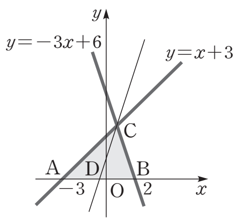
10

두 직선 $y=x+3,\ y=-3x+6$의 x절편은 각각 -3, 2이므로 $A(-3,\ 0),\ B(2,\ 0)$

$y=x+3$, $y=-3x+6$을 연립

하여 풀면 $x=\frac{3}{4}$, $y=\frac{15}{4}$

$\therefore$ C$\left(\frac{3}{4}, \frac{15}{4}\right)$



점 C를 지나고 △ABC의 넓이를 이등분하는 직선이 x축과 만나는 점을 D라 하면 점 D는 $\overline{\text{AB}}$의 중점이므로

D$\left(\frac{-3+2}{2}, \frac{0+0}{2}\right)$ $\quad\therefore$ D$\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$

따라서 직선 CD의 기울기는

$$\frac{\frac{15}{4}-0}{\frac{3}{4}-\left(-\frac{1}{2}\right)}=3$$

이므로 $y=3x+b$라 하고 점 $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$을 대입하면

$0=3\times\left(-\frac{1}{2}\right)+b \qquad \therefore b=\frac{3}{2}$

즉, 직선 CD의 y절편은 $\frac{3}{2}$이다.

11 서술형

표현 단계 일차함수 $y=f(x)$의 그래프는 두 점 $(-3, 0)$, $(-1, 1)$을

지나므로 기울기는 $\frac{1-0}{-1-(-3)}=\frac{1}{2}$

$y=\frac{1}{2}x+b$로 놓고 점 $(-1, 1)$을 대입하면

$1=\frac{1}{2}\times(-1)+b$, $b=\frac{3}{2} \qquad \therefore f(x)=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$

일차함수 $y=g(x)$의 그래프는 두 점 $(1, 0)$, $(-1, 1)$을 지나므로 기울기는 $\frac{1-0}{-1-1}=-\frac{1}{2}$

$y=-\frac{1}{2}x+b'$로 놓고 점 $(1, 0)$을 대입하면

$0=\left(-\frac{1}{2}\right)\times1+b'$, $b'=\frac{1}{2}$

$\therefore g(x)=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$

변형 단계 $2f(x)-g(x)$

$=(x+3)-\left(-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\right)$

$=\frac{3}{2}x+\frac{5}{2}$이므로 $\frac{3}{2}x+\frac{5}{2}\le-1$

풀이 단계 $\frac{3}{2}x\le-\frac{7}{2}$에서 $3x\le-7$, $x\le-\frac{7}{3}$

확인 단계 따라서 구하는 해는 $x\le-\frac{7}{3}$이다.

12

평행한 두 직선 l, n의 기울기는 서로 같으므로

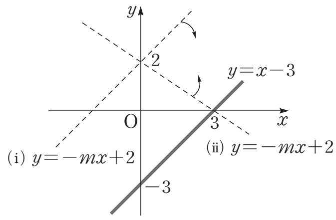
(직선 n의 기울기)$=$(직선 l의 기울기)$=\frac{4-2}{3-0}=\frac{2}{3}$

직선 n의 방정식을 $y=\frac{2}{3}x+b$라 하면 점 C$(3, 0)$을 지나므로 $0=\frac{2}{3}\times3+b \qquad \therefore b=-2$

따라서 직선 n의 방정식은 $y=\frac{2}{3}x-2$

13 서술형

표현 단계 두 일차함수의 그래프 교점이 제1사분면 위에 있기 위해서는 오른쪽 그림과 같이 $y=-mx+2$의 기울기인 $-m$이 두 일차함수가 서로 평행할 때의 기울기보다 작고, x축 위에서 만날 때의 기울기보다 클 때이다.



풀이 단계 (i) 두 직선이 서로 평행할 때,

$y=-mx+2$와 $y=x-3$의 그래프의 기울기가 같아야 한다.

$\therefore m=-1$

(ii) 두 직선이 x축 위에서 만날 때,

$y=-mx+2$에 점 $(3, 0)$을 대입하면

$0=-3m+2 \qquad \therefore m=\frac{2}{3}$

확인 단계 $-1<m<\frac{2}{3}$이고 $m\ne0$이므로 $-1<m<0$ 또는 $0<m<\frac{2}{3}$

14

두 직선의 방정식을 정리하면

$(a-3)x+2y=0$, $(a-1)x+3y=0$

상수항이 없는 일차방정식이므로 좌표평면에 그래프를 그리면 두 직선은 모두 원점을 지난다.

두 직선이 원점 이외의 점에서도 만나려면 두 직선은 일치해야 한다.

즉, $\frac{a-1}{a-3}=\frac{3}{2}$에서 $2a-2=3a-9$

$\therefore a=7$

15

직선 $y=\frac{1}{2}x+a$의 x절편은 $-2a$, y절편은 a이므로

B$(-2a, 0)$, C$(0, a)$

이때 △BOC의 넓이가 4이므로

$\frac{1}{2}\times2a\times a=a^2=4$

그런데 $a>0$이므로 $a=2$

따라서 $y=2x$, $y=\frac{1}{2}x+2$를 연립하여 풀면

$x=\frac{4}{3}$, $y=\frac{8}{3}$

이므로 교점 A의 좌표는 $\left(\frac{4}{3}, \frac{8}{3}\right)$이다.

16 서술형

표현 단계 □ABCD가 정사각형이므로 $\overline{AB}=\overline{BC}$이다.

점 B의 x좌표를 a라 하면 점 B의 좌표는 $(a,\ 0)$

점 A의 좌표는 $A(a,\ 3a)$

점 C의 좌표는 $C(4a,\ 0)$ ($\because \overline{AB}=\overline{BC}=3a$)

점 D의 좌표는 $D(4a,\ 3a)$

풀이 단계 점 D는 직선 $y=-3x+15$ 위의 점이므로

$3a=-3\times4a+15$

$15a=15 \qquad \therefore a=1$

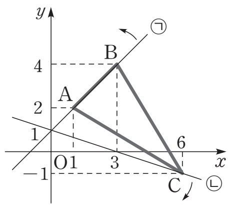
따라서 정사각형 ABCD의 한 변의 길이는

$4a-a=3a=3$이다.

확인 단계 따라서 □ABCD의 넓이는 9이다.

17

△ABC를 그려 보면 오른쪽 그림과 같다.



직선 $y=mx+1$이 △ABC와 교점을 갖지 않기 위해서는 기울기 m의 값이 직선 ㉠의 기울기보다 크거나 직선 ㉡의 기울기보다 작아야 한다.

$(\text{직선 ㉠의 기울기})=\dfrac{2-1}{1-0}=1$

$(\text{직선 ㉡의 기울기})=\dfrac{-1-1}{6-0}=-\dfrac{1}{3}$

$\therefore m<-\dfrac{1}{3}$ 또는 $m>1$

18

직선 AB의 기울기가 $\dfrac{1-\frac{7}{3}}{3-(-1)}=-\dfrac{1}{3}$이므로

직선 AB의 방정식을 $y=-\dfrac{1}{3}x+b$라 하고 $(3,\ 1)$을 대입하면 $b=2 \qquad \therefore y=-\dfrac{1}{3}x+2$

△ABC의 넓이를 이등분하는 직선이 직선 AB, 직선 BC와 만나는 점을 각각 D, E라 하면 직선 AB의 방정식은

$y=-\dfrac{1}{3}x+2$이므로 $D(0,\ 2)$

세 점 B, C, E의 x좌표는 같으므로 점 E를 $(3,\ k)$라 하면

$\triangle ABC=\dfrac{1}{2}\times4\times4=8$이고,

$\triangle BED=\dfrac{1}{2}\triangle ABC$이므로

$\triangle BED=\dfrac{1}{2}\times(k-1)\times3=4 \qquad \therefore k=\dfrac{11}{3}$

$D(0,\ 2)$, $E\left(3,\ \dfrac{11}{3}\right)$을 지나는 직선의 기울기는

$\dfrac{\frac{11}{3}-2}{3-0}=\dfrac{5}{9}$

따라서 구하는 직선의 방정식은 $y=\dfrac{5}{9}x+2$

3 STEP 최고 실력 완성하기

129~130쪽

1 ③ **2** $(13,\ -2)$, $(26,\ -9)$, $(39,\ -16)$, $(52,\ -23)$ **3** $y=3x-6$ **4** $y=16x-12$

5 $\dfrac{1}{2}<m<2$ **6** $S=a^2-2a+\dfrac{13}{2}$ **7** $\dfrac{10}{9}$ 또는 $\dfrac{20}{9}$ **8** 최댓값 : $\dfrac{22}{7}$, 최솟값 : -2

문제 풀이

1

주어진 세 직선 l, m, n의 기울기와 y절편의 부호는 다음과 같다.

직선 l : (기울기)>0, (y절편)>0

직선 m : (기울기)<0, (y절편)>0

직선 n : (기울기)<0, (y절편)<0

한편, 일차함수의 식에서 기울기의 부호가 다른 하나는 ㉢이므로 일차함수 ㉢의 그래프는 직선 l이 된다.

즉, $-a>0$, $b-3>0$이므로 $a<0$, $b>3$

㉠에서 y절편은 b이므로 양수이고, ㉡에서 y절편은 $-\dfrac{1}{2}b$이므로 음수이다.

따라서 ㉠의 그래프는 직선 m, ㉡의 그래프는 직선 n, ㉢의 그래프는 직선 l이다.

TIP 좌표평면에서 직선 $y=ax+b$가 지나는 사분면은 다음과 같다.

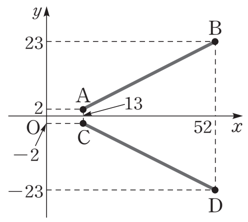
(1) $a>0$, $b>0$인 경우
직선 $y=ax+b$는 제 1, 2, 3 사분면을 지난다.

(2) $a>0$, $b<0$인 경우
직선 $y=ax+b$는 제 1, 3, 4 사분면을 지난다.

(3) $a<0$, $b>0$인 경우
직선 $y=ax+b$는 제 1, 2, 4 사분면을 지난다.

(4) $a<0$, $b<0$인 경우
직선 $y=ax+b$는 제 2, 3, 4 사분면을 지난다.

2 직선 AB의 기울기는



$\dfrac{23-2}{52-13}=\dfrac{7}{13}$이므로

$y=\dfrac{7}{13}x+b$라 하고 (13, 2)를 대입하면

$2=\dfrac{7}{13}\times 13+b \qquad \therefore b=-5$

$\therefore y=\dfrac{7}{13}x-5 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

직선 CD는 ㉠과 x축에 대하여 대칭이므로

㉠에 y대신 $-y$를 대입하면

$-y=\dfrac{7}{13}x-5 \qquad \therefore y=-\dfrac{7}{13}x+5 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

이때 $\overline{CD}$ 위의 점의 x, y좌표의 범위는

$13\le x\le 52$, $-23\le y\le -2$이고 ㉡에서 y좌표가 정수가 되려면 x좌표는 13의 배수이어야 한다.

$\therefore x=13, 26, 39, 52$

따라서 구하는 점은

$(13, -2)$, $(26, -9)$, $(39, -16)$, $(52, -23)$

3 곡선 n의 방정식을 $y=\dfrac{a}{x}$라 하면 이 곡선이 점 B(3, 3)을 지나므로

$3=\dfrac{a}{3} \qquad \therefore a=9$

$\therefore y=\dfrac{9}{x}$

이때 점 A의 좌표는 $A\left(c, \dfrac{9}{c}\right)$이므로 △ABC의 넓이는

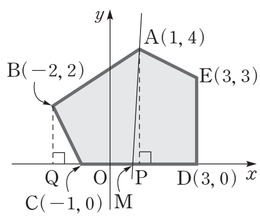
$\dfrac{1}{2}\times\dfrac{9}{c}\times(3-c)=\dfrac{9}{4} \qquad \therefore c=2$

따라서 직선 m은 두 점 B(3, 3), C(2, 0)을 지나므로 직선의 기울기는 $\dfrac{3-0}{3-2}=3$이다.

이 직선의 방정식을 $y=3x+b$라 하면 점 C(2, 0)을 지나므로 $0=3\times 2+b \qquad \therefore b=-6$

즉, 직선 m의 방정식은 $y=3x-6$

4 두 점 A, B에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 P, Q라 하면



□APDE

$=\dfrac{1}{2}\times(\overline{AP}+\overline{ED})\times\overline{DP}$

$=\dfrac{1}{2}\times(4+3)\times 2=7$

□ABCP

$=$□ABQP$-$△BQC

$=\dfrac{1}{2}\times(\overline{BQ}+\overline{AP})\times\overline{QP}-\dfrac{1}{2}\times\overline{BQ}\times\overline{CQ}$

$=\dfrac{1}{2}\times(2+4)\times 3-\dfrac{1}{2}\times 2\times 1=8$

이때 □APDE와 □ABCP의 넓이의 차는 1이므로

△AMP의 넓이가 $\dfrac{1}{2}$이 되는 $\overline{CP}$ 위의 점 M을 찾아보자.

$\triangle AMP=\dfrac{1}{2}\times\overline{MP}\times 4=\dfrac{1}{2}$에서 $\overline{MP}=\dfrac{1}{4}$이므로

점 M의 x좌표는 $1-\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{4} \qquad \therefore M\left(\dfrac{3}{4}, 0\right)$

따라서 직선 AM에 의해 □ABCM$=$□AMDE가 성립한다.

두 점 A(1, 4), $M\left(\dfrac{3}{4}, 0\right)$을 지나는 직선 AM의 기울기는

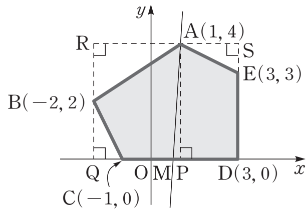
$\dfrac{4-0}{1-\frac{3}{4}}=16$이므로 구하는 직선의 방정식을

$y=16x+b$라 놓고 (1, 4)를 대입하면

$4=16+b \qquad \therefore b=-12$

따라서 직선의 방정식은 $y=16x-12$이다.

다른 풀이



오른쪽 그림과 같이 5개의 꼭짓점 A, B, C, D, E를 지나도록 직사각형을 그리자.

(오각형 ABCDE의 넓이)

$=$□RQDS$-$(△ARB$+$△BQC$+$△AES)

$=5\times 4-\left(\dfrac{1}{2}\times 3\times 2+\dfrac{1}{2}\times 2\times 1+\dfrac{1}{2}\times 2\times 1\right)$

$=20-5=15$

□ABCM$=$□AMDE

$=\dfrac{1}{2}\times$(오각형 ABCDE의 넓이)

$=\dfrac{15}{2}$

한편, □APDE$=\dfrac{1}{2}\times(4+3)\times 2=7$이므로

△AMP$=$□AMDE$-$□APDE

$=\dfrac{15}{2}-7=\dfrac{1}{2}$

$\triangle AMP=\dfrac{1}{2}\times\overline{MP}\times 4=\dfrac{1}{2}$에서 $\overline{MP}=\dfrac{1}{4}$이므로

점 M의 x좌표는 $1-\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{4} \qquad \therefore M\left(\dfrac{3}{4}, 0\right)$

따라서 직선 AM에 의해 □ABCM$=$□AMDE가 성립한다.

두 점 A(1, 4), $M\left(\dfrac{3}{4}, 0\right)$을 지나는 직선 AM의 기울기는

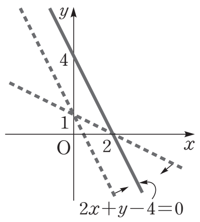
$\dfrac{4-0}{1-\frac{3}{4}}=16$이므로 구하는 직선의 방정식을

$y=16x+b$라 놓고 (1, 4)를 대입하면

$4=16+b \qquad \therefore b=-12$

따라서 직선의 방정식은 $y=16x-12$이다.

5 직선 $mx+y-1=0$



즉, $y=-mx+1$은 점 $(0,\ 1)$을 지나고, 직선 $2x+y-4=0$은 오른쪽 그림과 같으므로 두 직선의 교점이 제4사분면에 있으려면

(ⅰ) 직선 $y=-mx+1$의 기울기가 점 $(2,\ 0)$을 지날 때보다 작아야 한다.

직선 $y=-mx+1$이 점 $(2,\ 0)$을 지날 때 $m=\frac{1}{2}$이므로 $-m<-\frac{1}{2}$ $\quad\therefore\ m>\frac{1}{2}$

(ⅱ) 직선 $y=-mx+1$의 기울기가 직선 $2x+y-4=0$과 평행할 때보다 커야 하므로

$-m>-2$ $\quad\therefore\ m<2$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $\frac{1}{2}<m<2$

6 직선 AB의 방정식은 $\frac{x}{5}+\frac{y}{5}=1$

$\therefore\ y=-x+5$ ...... ㉠

직선 AB와 직선 CD는 평행하므로 기울기가 같다.

즉, 직선 CD의 방정식을 $y=-x+b$라 하고

$\mathrm{P}(2,\ a)$를 대입하면 $b=a+2$

$\therefore\ y=-x+(a+2)$ ...... ㉡

점 C의 x좌표와 점 D의 y좌표는 직선 CD의 x절편과 y절편이므로

$\mathrm{C}(a+2,\ 0)$, $\mathrm{D}(0,\ a+2)$

또, 두 점 E, F의 y좌표는 점 P의 y좌표와 같으므로

$\mathrm{E}(0,\ a)$, 점 F의 x좌표는 ㉠에 $y=a$를 대입하면

$\mathrm{F}(5-a,\ a)$, 두 점 H, G의 x좌표는 점 P의 x좌표와 같으므로 $\mathrm{H}(2,\ 0)$, 점 G의 y좌표는 ㉠에 $x=2$를 대입하면

$\mathrm{G}(2,\ 3)$

따라서 $\overline{\mathrm{OC}}=a+2$, $\overline{\mathrm{PH}}=a$이므로

$\triangle\mathrm{POC}=\frac{1}{2}\times(a+2)\times a=\frac{1}{2}a^2+a$ ...... ㉢

$\overline{\mathrm{PE}}=2$, $\overline{\mathrm{DE}}=(a+2)-a=2$이므로

$\triangle\mathrm{PDE}=\frac{1}{2}\times2\times2=2$ ...... ㉣

$\overline{\mathrm{PF}}=(5-a)-2=3-a$, $\overline{\mathrm{PG}}=3-a$이므로

$\triangle\mathrm{PFG}=\frac{1}{2}\times(3-a)\times(3-a)$

$=\frac{1}{2}(9-6a+a^2)$ ...... ㉤

㉢, ㉣, ㉤에 의해

$S=\frac{1}{2}a^2+a+2+\frac{1}{2}(9-6a+a^2)$

$\therefore\ S=a^2-2a+\frac{13}{2}$

7 직선 l의 방정식 $3x+2y-5=0$에서

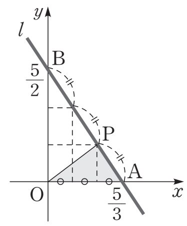
x절편은 $\frac{5}{3}$, y절편은 $\frac{5}{2}$이다.

$\triangle\mathrm{AOP}$와 $\triangle\mathrm{AOB}$의 밑변을 각각 $\overline{\mathrm{AP}}$, $\overline{\mathrm{AB}}$로 하면 두 삼각형의 높이가 같으므로 $\triangle\mathrm{AOP}$와 $\triangle\mathrm{AOB}$의 넓이의 비는 $\overline{\mathrm{AP}}$와 $\overline{\mathrm{AB}}$의 길이의 비와 같다.

따라서 $\triangle\mathrm{AOP}=\frac{1}{3}\triangle\mathrm{AOB}$에서

$\overline{\mathrm{AP}}=\frac{1}{3}\overline{\mathrm{AB}}$ ...... ㉠

(ⅰ) 점 P가 $\overline{\mathrm{AB}}$ 위에 있을 때

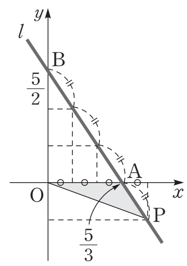


점 A의 x좌표는 $\frac{5}{3}$이므로

㉠에서 점 P의 x좌표는

$\frac{5}{3}-\frac{5}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{10}{9}$

(ⅱ) 점 P가 $\overline{\mathrm{AB}}$ 위에 있지 않을 때



점 P는 점 A의 바깥쪽에 있으므로

㉠에서 점 P의 x좌표는

$\frac{5}{3}+\frac{5}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{20}{9}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 점 P의 x좌표는

$\frac{10}{9}$ 또는 $\frac{20}{9}$

8 직선 $y=x$와 $\triangle\mathrm{ABC}$의 둘레의 교점의 좌표부터 구해 본다.

직선 BC의 방정식을 $y=ax+b$라 하면

$a=\frac{1-(-1)}{4-(-2)}=\frac{1}{3}$

$y=\frac{1}{3}x+b$에 $(4,\ 1)$을 대입하면 $b=-\frac{1}{3}$이므로

직선 BC의 방정식은

$y=\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}$

따라서 직선 $y=x$와 $\overline{\mathrm{BC}}$의 교점을 D라 하고

$\begin{cases} y=x \\ y=\frac{1}{3}x-\frac{1}{3} \end{cases}$ 을 풀면

$x=-\frac{1}{2}$, $y=-\frac{1}{2}$

$\therefore\ \mathrm{D}\left(-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$

또한, 직선 AC의 방정식을 $y=a'x+b'$으로 놓으면

$a'=\frac{1-6}{4-2}=-\frac{5}{2}$

$y=-\frac{5}{2}x+b'$에 $(2,\ 6)$을 대입하면 $b'=11$이므로

직선 AC의 방정식은

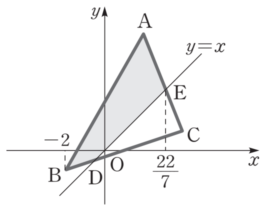
$y=-\frac{5}{2}x+11$

따라서 직선 $y=x$와 $\overline{AC}$의 교점을 E라 하고

$\begin{cases} y=x \\ y=-\frac{5}{2}x+11 \end{cases}$을 풀면 $x=\frac{22}{7}$, $y=\frac{22}{7}$

$\therefore$ $E\left(\frac{22}{7}, \frac{22}{7}\right)$

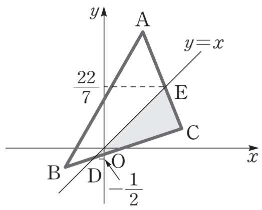
(i) $y \geq x$일 때,



$[x, y]=x$이므로 x좌표의 최대, 최소를 구하면 점 B에서 최소, 점 E에서 최대이다.

$\therefore$ $-2 \leq [x, y] \leq \frac{22}{7}$

(ii) $y < x$일 때,



$[x, y]=y$이므로 y좌표의 최대, 최소를 구하면 점 D에서 최소, 점 E에서 최대이다.

$\therefore$ $-\frac{1}{2} < [x, y] < \frac{22}{7}$

(i), (ii)에서 $[x, y]$의 최댓값은 $\frac{22}{7}$, 최솟값은 -2이다.

IV 단원 종합 문제

1 ②	2 46	3 25	4 $\frac{13}{3}$	5 $\frac{15}{2}$	6 -15
7 2	8 ③	9 $\frac{1}{3}$	10 $y=-\frac{1}{3}x+1$	11 ⑤	12 $y=x-1$
13 $y=\frac{3}{2}x+\frac{13}{5}$	14 $y=-\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}$	15 4	16 $y=\frac{3}{2}x-\frac{11}{2}$	17 $a=\frac{1}{2}$, $b=1$	18 $y=2x+12$
19 $(2, 5)$	20 8	21 9	22 -40 ℃	23 4	24 3
25 ④	26 3	27 $a=\frac{1}{2}$, $b=2$	28 $a=-6$, $m=\frac{16}{3}$	29 ④	30 $-\frac{3}{2}$
31 $m=-\frac{25}{6}$, $n=3$ 또는 $m=\frac{7}{6}$, $n=-6$			32 $\frac{11}{2}$	33 $y=\frac{15}{13}x$	34 $\frac{1}{2}$
35 $\frac{27}{4}$	36 168				

문제 풀이

1 $y=f(x)$라고 하면

① $f(2)=1$, $f(3)=2$, $f(4)=3$이지만 나머지 x의 값인 1에 대응하는 y의 값이 없으므로 함수가 아니다.

② $f(1)=1$, $f(2)=2$, $f(3)=2$, $f(4)=3$이므로 함수이다.

③ x의 모든 값에 대응하는 y의 값이 2개 이상이므로 함수가 아니다.

④ x의 모든 값에 대응하는 y의 값이 2개 이상이므로 함수가 아니다.

⑤ $f(1)=3$, $f(2)=2$, $f(3)=1$이지만 나머지 x의 값인 4에 대응하는 y의 값이 없으므로 함수가 아니다.

2 $x=0$일 때 1이고, 그 이후로 x가 1 증가할 때마다 y가 3 증가하므로 x와 y 사이의 관계식은 $y=3x+1$임을 알 수 있다.

$\therefore f(15)=3\times15+1=46$

3 $x=14$, 15, 20, 22, 26에 대하여 각 자리의 숫자의 합이 y의 값이므로

$14 \longrightarrow 1+4=5$, $15 \longrightarrow 1+5=6$,

$20 \longrightarrow 2+0=2$, $22 \longrightarrow 2+2=4$,

$26 \longrightarrow 2+6=8$

따라서 함숫값의 총합은 $5+6+2+4+8=25$

4 $f(x)=ax+1-(a-x)$

$=ax+1-a+x$

$=(a+1)x+1-a$

$f(2)=-1$에서 $a+3=-1$ $\therefore a=-4$

$\therefore f(x)=-3x+5$

$3f(1)-2f(-2)=3\times2-2\times11=-16$

$2f(k)=-6k+10$

$3f(1)-2f(-2)=2f(k)$이므로

$-16=-6k+10$

$\therefore k=\frac{13}{3}$

5 $f(3)=5$이므로

$f(3)=\frac{a}{5}=5$

$\therefore a=25$

즉, $f(x)=\frac{25}{x+2}$이므로

$$f\left(\frac{4}{3}\right)=\frac{25}{\frac{4}{3}+2}=\frac{\frac{25}{1}}{\frac{10}{3}}=\frac{15}{2}$$

6 x의 값의 증가량은 $a-4-(a+1)=-5$

주어진 일차함수의 그래프의 기울기가 3이므로

$$\frac{(y\text{의 값의 증가량})}{(x\text{의 값의 증가량})}=\frac{(y\text{의 값의 증가량})}{-5}=3$$

$\therefore (y$의 값의 증가량$)=-15$

7 A$(3a, -5)$, B$(-2a+10, -15)$에서 직선 AB가 y축에 평행하므로 두 점 A, B의 x좌표는 같다.

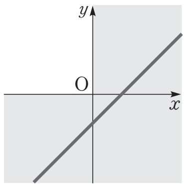
$3a=-2a+10$, $5a=10$

$\therefore a=2$

TIP x축에 평행한 직선 위의 모든 점은 y좌표가 같고, y축에 평행한 직선 위의 모든 점은 x좌표가 같다.

8 $ax+y+b=0$에서 $y=-ax-b$

이 직선이 제2사분면을 지나지 않으려면 오른쪽 그림의 어두운 부분에 그래프가 있어야 한다.



즉, (기울기)$=-a>0$,

(y절편)$=-b<0$

$\therefore a<0$, $b>0$

9 세 점 A$(-2, 3)$, B$(-1, 1)$, C$(k, k-2)$가 한 직선 위에 있으려면 직선 AB와 직선 BC의 기울기가 같아야 하므로

(직선 AB의 기울기)$=\dfrac{1-3}{-1-(-2)}=-2$

(직선 BC의 기울기)$=\dfrac{k-2-1}{k-(-1)}=\dfrac{k-3}{k+1}$

즉, $-2=\dfrac{k-3}{k+1}$

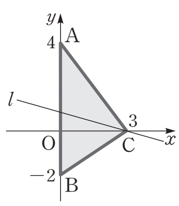
$k-3=-2(k+1)$

$3k=1$

$\therefore k=\dfrac{1}{3}$

10 이등분한 두 삼각형은 높이가 $\overline{\text{OC}}$로 같으므로 밑변의 길이가 같을 때 △ABC의 넓이를 이등분하게 된다.

즉, 직선 l이 $\overline{\text{AB}}$의 중점을 지날 때, △ABC의 넓이를 이등분한다.



$\overline{\text{AB}}$의 중점은 $\left(0, \dfrac{4-2}{2}\right)=(0, 1)$이므로

두 점 $(3, 0)$, $(0, 1)$을 지나는 직선의 방정식은

$\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{1}=1$

$\therefore y=-\dfrac{1}{3}x+1$

11 $y=-\dfrac{1}{3}x+1$의 그래프의 x절편은 3, y절편은 1이다.

$\therefore a=3$, $b=1$

따라서 $(3, 1)$을 대입하여 성립하는 것을 찾으면 ⑤이다.

12 x절편이 a, y절편이 b이므로 구하는 일차함수의 식을 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$이라 하자.

이때 $b=-a$이고 $ab<0$이므로 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{-a}=1$이고,

이 식에 $(2, 1)$을 대입하면 $a=1$

따라서 구하는 일차함수의 식은 $y=x-1$이다.

13 $\begin{cases} y=2x+3 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2y=-x+2 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠$\times 2-$㉡에서 $0=5x+4$

$\therefore x=-\dfrac{4}{5}$

$x=-\dfrac{4}{5}$를 ㉠에 대입하면 $y=2\times\left(-\dfrac{4}{5}\right)+3=\dfrac{7}{5}$

따라서 두 직선의 교점은 $\left(-\dfrac{4}{5}, \dfrac{7}{5}\right)$이다.

기울기가 $\dfrac{3}{2}$인 직선을 $y=\dfrac{3}{2}x+b$라 하면 이 직선이

점 $\left(-\dfrac{4}{5}, \dfrac{7}{5}\right)$을 지나므로

$\dfrac{7}{5}=\dfrac{3}{2}\times\left(-\dfrac{4}{5}\right)+b$

$\therefore b=\dfrac{13}{5}$

$\therefore y=\dfrac{3}{2}x+\dfrac{13}{5}$

14 $\begin{cases} x+y-1=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x-y+4=0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠+㉡에서 $3x+3=0$

$\therefore x=-1$

$x=-1$을 ㉠에 대입하면 $y=2$

따라서 두 직선의 교점은 $(-1, 2)$이다.

또, 직선 $2x-3y-4=0$, 즉 $y=\dfrac{2}{3}x-\dfrac{4}{3}$와 수직인 직선의 기울기를 m이라 하면

$\dfrac{2}{3}\times m=-1$

$\therefore m=-\dfrac{3}{2}$

따라서 구하는 직선의 방정식을 $y=-\frac{3}{2}x+b$라 하면

점 $(-1,\ 2)$를 지나므로

$2=\left(-\frac{3}{2}\right)\times(-1)+b$

$\therefore\ b=\frac{1}{2}$

$\therefore\ y=-\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}$

15 $\begin{cases} 4x-y=a & \cdots\cdots ㉠ \\ x+2y=14-a & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠$\times 2+$㉡에서

$9x=14+a \qquad \therefore\ x=\frac{14+a}{9}$

$x=\frac{14+a}{9}$를 ㉠에 대입하면

$\frac{56+4a}{9}-y=a \qquad \therefore\ y=\frac{56-5a}{9}$

교점 $\left(\frac{14+a}{9},\ \frac{56-5a}{9}\right)$가 직선 $y=2x$ 위에 있으므로

$\frac{56-5a}{9}=2\times\frac{14+a}{9}$,

$56-5a=28+2a$

$\therefore\ a=4$

16 $\begin{cases} 2x-y=7 & \cdots\cdots ㉠ \\ x+y=2 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$에서

㉠+㉡을 하면

$3x=9 \qquad \therefore\ x=3$

$x=3$을 ㉡에 대입하면

$3+y=2 \qquad \therefore\ y=-1$

즉, 두 일차함수의 그래프의 교점의 좌표는 $(3,\ -1)$이다.

$3x-2y=4$에서 $-2y=-3x+4$

$\therefore\ y=\frac{3}{2}x-2$

즉, 구하는 일차함수 그래프의 기울기는 $\frac{3}{2}$이고

점 $(3,\ -1)$을 지난다.

따라서 $y=\frac{3}{2}x+b$에 점 $(3,\ -1)$을 대입하면

$-1=\frac{9}{2}+b \qquad \therefore\ b=-\frac{11}{2}$

$\therefore\ y=\frac{3}{2}x-\frac{11}{2}$

17 두 직선 l, m이 평행하므로

$\frac{a}{1}=\frac{1}{2}\neq\frac{0}{10}$

$\therefore\ a=\frac{1}{2}$

두 직선 l, n의 교점의 x좌표가 -4이므로 직선 l의 방정식에 $x=-4$를 대입하면

$-4+2y+10=0$

$2y=-6$

$\therefore\ y=-3$

$(-4,\ -3)$을 직선 n의 방정식에 대입하면

$-4b-(-3)+1=0$

$\therefore\ b=1$

$\therefore\ a=\frac{1}{2},\ b=1$

다른 풀이

직선 $l : x+2y+10=0 \Longleftrightarrow y=-\frac{1}{2}x-5$

직선 $m : ax+y=0 \Longleftrightarrow y=-ax$

직선 $n : bx-y+1=0 \Longleftrightarrow y=bx+1$

두 직선 l, m이 평행하므로

$-\frac{1}{2}=-a$

$\therefore\ a=\frac{1}{2}$

두 직선 l, n의 교점의 x좌표가 -4이므로 직선 l의 방정식에 $x=-4$를 대입하면

$y=-\frac{1}{2}\times(-4)-5$

$\ \ =-3$

따라서 $(-4,\ -3)$을 직선 n의 방정식에 대입하면

$-3=-4b+1$

$\therefore\ b=1$

18 직선 $y=2x+1$과 평행하므로 구하는 직선의 방정식은 $y=2x+b$로 놓을 수 있다.

또, $y=-3x+12$와 y축에서 만나므로 y절편이 같다.

즉, $b=12$

$\therefore\ y=2x+12$

19 직선 l은 x절편과 y절편이 모두 7이므로

직선의 방정식은

$\frac{x}{7}+\frac{y}{7}=1$

$\therefore\ x+y=7$ ⋯⋯ ㉠

직선 m은 x절편과 y절편이 각각 -3, 3이므로

직선의 방정식은

$\frac{x}{-3}+\frac{y}{3}=1$

$\therefore\ x-y=-3$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$x=2$, $y=5$

따라서 두 직선의 교점의 좌표는 $(2,\ 5)$이다.

20 y가 x의 함수가 되는 경우는 함숫값 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$이 각각 다음의 문자에 순서대로 대응될 때이다.

$f(1)$	a	a	a	b	b	b	a	b
$f(2)$	a	a	b	a	b	a	b	b
$f(3)$	a	b	a	a	a	b	b	b

따라서 구하는 x의 함수 y의 개수는 8이다.

다른 풀이

x가 3개, y가 2개이므로 공식에 의해 $2^3=8$

21 $f(1)=5$, $f(2)=6$을 만족하는 함수의 개수는 x의 수 중 1, 2를 제외한 나머지 수 3, 4가 y의 5, 6, 7에 대응하는 함수의 개수와 같다. 따라서 함숫값 $f(3)$, $f(4)$가 각각 다음의 수에 순서대로 대응될 때이다.

$f(3)$	5	5	5	6	6	6	7	7	7
$f(4)$	5	6	7	5	6	7	5	6	7

따라서 구하는 함수 $y=f(x)$의 개수는 9이다.

다른 풀이

x가 2개, y가 3개이므로 공식에 의해 $3^2=9$

22 x ℃일 때 y ℉라 하면 섭씨 온도와 화씨 온도의 관계는 일차함수이므로 그 그래프는 두 점 $(0,\ 32)$, $(10,\ 50)$을 지나는 직선이다.

따라서 그래프의 기울기는 $\frac{50-32}{10-0}=\frac{9}{5}$이고,

점 $(0,\ 32)$를 지나므로 $y=\frac{9}{5}x+32$

섭씨 온도와 화씨 온도가 같을 때, 즉 $x=y$일 때

$x=\frac{9}{5}x+32$에서

$x=-40$

따라서 구하는 온도는 -40 ℃이다.

23 두 그래프가 평행할 조건은 기울기가 같고 y절편이 달라야 한다.

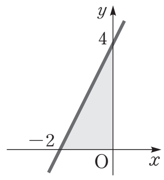
구하는 직선이 일차함수 $y=2x-4$의 그래프와 평행하므로 $y=2x+b$라 하면 점 $(-1,\ 2)$를 지나므로

$2=-2+b$

$b=4$

$\therefore\ y=2x+4$

즉, 일차함수 $y=2x+4$의 그래프의 x절편, y절편은 각각 -2, 4이므로 그래프를 그려 보면 오른쪽 그림과 같다.

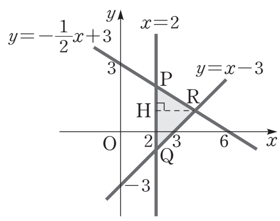


따라서 구하는 삼각형의 넓이는

$\frac{1}{2}\times 2\times 4=4$

TIP 직선과 x축, y축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이를 구하는 경우 삼각형의 밑변의 길이는 $|(\text{직선의 } x\text{절편})|$이고 높이는 $|(\text{직선의 } y\text{절편})|$임에 주의해야 한다.

24 $y=x-3$, $y=-\frac{1}{2}x+3$, $x=2$의 그래프를 그려 보면 오른쪽 그림과 같다.



두 직선끼리 만나는 점을 각각 P, Q, R라 하자.

$y=-\frac{1}{2}x+3$에 $x=2$를 대입하면

$y=2$

$\therefore\ \mathrm{P}(2,\ 2)$

$y=x-3$에 $x=2$를 대입하면

$y=-1$

$\therefore\ \mathrm{Q}(2,\ -1)$

$y=x-3$과 $y=-\frac{1}{2}x+3$을 연립하여 풀면

$x-3=-\frac{1}{2}x+3$

$2x-6=-x+6$

$3x=12 \quad \therefore x=4$

$y=4-3=1 \quad \therefore y=1$

$\therefore \mathrm{R}(4, 1)$

$\therefore \triangle\mathrm{PQR}=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{PQ}}\times\overline{\mathrm{HR}}$

$=\frac{1}{2}\times\{2-(-1)\}\times(4-2)$

$=\frac{1}{2}\times3\times2=3$

25 직선 $y=ax+3$이 점 $\mathrm{A}(2, 7)$을 지날 때

$7=a\times2+3$

$\therefore a=2$

또, 점 $\mathrm{B}(4, 1)$을 지날 때

$1=a\times4+3$

$\therefore a=-\frac{1}{2}$

따라서 상수 a의 값의 범위는 $-\frac{1}{2}\le a\le2$

26 일차함수 $y=ax+b$의 x의 값의 범위와 함숫값의 범위가 각각 $-3\le x\le5$, $2\le y\le4$이고 $a<0$이므로

$x=-3$일 때 $y=4$,

$x=5$일 때 $y=2$이다.

따라서 일차함수 $y=ax+b$의 그래프는 두 점 $(-3, 4)$, $(5, 2)$를 지나는 직선이다.

$y=ax+b$에서

$a=\frac{2-4}{5-(-3)}$

$=-\frac{1}{4}$

$y=-\frac{1}{4}x+b$에 $x=-3$, $y=4$를 대입하면

$4=-\frac{1}{4}\times(-3)+b$

$\therefore b=\frac{13}{4}$

$\therefore a+b=-\frac{1}{4}+\frac{13}{4}$

$=3$

27 서로 다른 세 직선 $\begin{cases} y=-ax+1 \\ y=-\frac{1}{b}x-\frac{3}{b} \\ y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2} \end{cases}$에 의해 좌표평면이 네 부분으로 나누어지려면 세 직선이 서로 평행해야 한다.

$-a=-\frac{1}{b}=-\frac{1}{2}$에서

$a=\frac{1}{2}$, $b=2$

다른 풀이

서로 다른 세 직선 $\begin{cases} ax+y-1=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x+by+3=0 & \cdots\cdots ㉡ \\ x+2y-3=0 & \cdots\cdots ㉢ \end{cases}$이 서로 평행해야 좌표평면이 네 부분으로 나누어지므로

㉠, ㉡에서 $\frac{a}{1}=\frac{1}{b}\ne\frac{-1}{3}$

㉡, ㉢에서 $1=\frac{b}{2}\ne-1$

$\therefore a=\frac{1}{2}$, $b=2$

28 함수 $y=-\frac{2}{3}x+4$의 그래프의 기울기가 $-\frac{2}{3}<0$ 이므로

$x=-5$일 때

$y=-\frac{2}{3}\times(-5)+4$

$=-\frac{1}{3}a+m$

$\therefore -a+3m=22 \quad \cdots\cdots ㉠$

$x=4$일 때

$y=-\frac{2}{3}\times4+4$

$=\frac{2}{3}a+m$

$\therefore 2a+3m=4 \quad \cdots\cdots ㉡$

㉡$-$㉠을 하면 $3a=-18 \quad \therefore a=-6$

$a=-6$을 ㉠에 대입하면 $m=\frac{16}{3}$

29 $(y-2)(x-2y+2)=0$

$\Longleftrightarrow y-2=0 \quad \cdots\cdots ㉠$

또는 $x-2y+2=0 \quad \cdots\cdots ㉡$

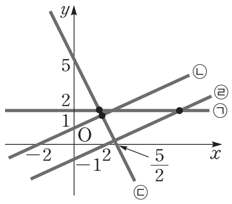
$(2x+y-5)(x-2y-2)=0$

$\Longleftrightarrow 2x+y-5=0 \quad \cdots\cdots ㉢$

또는 $x-2y-2=0 \quad \cdots\cdots ㉣$

두 방정식을 동시에 만족하는 $(x,\ y)$가 존재하려면 ㉠과 ㉢, ㉠과 ㉣, ㉡과 ㉢, ㉡과 ㉣의 교점이 존재하면 된다.

$$\begin{cases} y=2 & \cdots\cdots \text{㉠} \\ y=\dfrac{1}{2}x+1 & \cdots\cdots \text{㉡} \\ y=-2x+5 & \cdots\cdots \text{㉢} \\ y=\dfrac{1}{2}x-1 & \cdots\cdots \text{㉣} \end{cases}$$

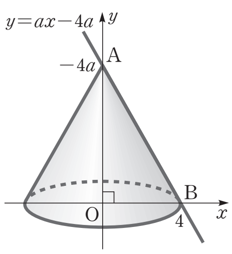


의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 ㉠과 ㉢, ㉠과 ㉣, ㉡과 ㉢이 서로 만나므로 두 방정식을 동시에 만족하는 순서쌍 $(x,\ y)$의 개수는 3이다.

> **TIP** $(ax+by+c)(a'x+b'y+c')=0$**의 그래프 구하기**
> $(ax+by+c)(a'x+b'y+c')=0$이면
> $ax+by+c=0$ 또는 $a'x+b'y+c'=0$이므로
> $(ax+by+c)(a'x+b'y+c')=0$이 나타내는 그래프는
> 두 직선 $ax+by+c=0$과 $a'x+b'y+c'=0$의 모양으로 나타난다.

30 $\triangle$AOB를 y축을 회전축으로 하여 1회전 시키면 밑면은 $\overline{\text{OB}}$를 반지름으로 하는 원이고 높이는 $\overline{\text{OA}}$인 원뿔이 된다.



이때 $y=ax-4a$의 그래프의 x절편은 4이므로 점 B의 좌표는 $(4,\ 0)$이다.

따라서 $\overline{\text{OB}}=4$, $\overline{\text{OA}}=-4a$이므로

$$(\text{부피})=\frac{1}{3}\times\pi\times4^2\times(-4a)$$
$$=-\frac{64}{3}a\pi$$
$$=32\pi$$
$$\therefore\ a=-\frac{3}{2}$$

31 $\begin{cases} y=-mx-n+1 & \cdots\cdots \text{㉠} \\ y=(m+3)x+n+4 & \cdots\cdots \text{㉡} \end{cases}$

(i) 직선 ㉠의 y절편이 -2일 경우

$-n+1=-2 \qquad \therefore\ n=3$

직선 ㉡의 x절편이 6이므로

$\dfrac{-(n+4)}{m+3}=\dfrac{-7}{m+3}=6$

$m+3=-\dfrac{7}{6} \qquad \therefore\ m=-\dfrac{25}{6}$

(ii) 직선 ㉡의 y절편이 -2일 경우

$n+4=-2 \qquad \therefore\ n=-6$

직선 ㉠의 x절편이 6이므로

$\dfrac{n-1}{-m}=\dfrac{-6-1}{-m}=6 \qquad \therefore\ m=\dfrac{7}{6}$

(i), (ii)에서 $m=-\dfrac{25}{6}$, $n=3$ 또는 $m=\dfrac{7}{6}$, $n=-6$

32 $\begin{cases} y=x+a & \cdots\cdots \text{㉠} \\ y=bx+3 & \cdots\cdots \text{㉡} \\ y=cx+d & \cdots\cdots \text{㉢} \end{cases}$

㉡의 y절편이 3이므로 $(0,\ 4)$를 지나는 직선은 ㉠과 ㉢이다.

$(0,\ 4)$를 ㉠, ㉢에 대입하면

$a=4$, $d=4$

점 $(2,\ 1)$은 직선 $y=x+4$(㉠) 위에 있지 않으므로

점 $(2,\ 1)$을 지나는 직선은 ㉡과 ㉢이다.

$(2,\ 1)$을 ㉡, ㉢에 대입하면

$1=2b+3 \qquad \therefore\ b=-1$

$1=2c+4 \qquad \therefore\ c=-\dfrac{3}{2}$

$$\therefore\ a+b+c+d=4+(-1)+\left(-\frac{3}{2}\right)+4$$
$$=\frac{11}{2}$$

33 $\square\text{OABC}=\dfrac{1}{2}\times(4+6)\times6=30$

직선이 $\overline{\text{AB}}$와 만나는 점을 $\text{D}(a,\ b)$라 하면

$\triangle$OAD$=15$이므로

$\dfrac{1}{2}\times6\times b=15 \qquad \therefore\ b=5$

한편, 직선 AB의 기울기는 $\dfrac{0-6}{6-4}=-3$이므로

직선 AD의 기울기도 -3이어야 한다.

$\dfrac{0-5}{6-a}=-3$,

$-5=-18+3a$

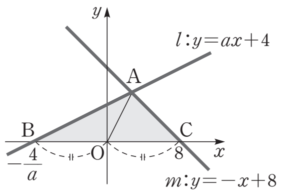
$\therefore\ a=\dfrac{13}{3}$

$\therefore\ \text{D}\left(\dfrac{13}{3},\ 5\right)$

따라서 직선 OD의 기울기는 $\dfrac{5-0}{\dfrac{13}{3}-0}=\dfrac{15}{13}$이므로

구하는 직선의 방정식은 $y=\dfrac{15}{13}x$

34 오른쪽 그림과 같이



직선 l의 x절편은

$-\frac{4}{a}$이고,

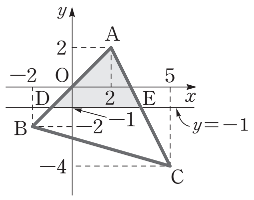
직선 m의 x절편은

8이다.

$\overline{\mathrm{AO}}$가 $\triangle\mathrm{ABC}$의 넓이를 이등분하므로 점 O는 $\overline{\mathrm{BC}}$의 중점이다.

$-\frac{4}{a}+8=0 \qquad \therefore a=\frac{1}{2}$

35 세 점 A(2, 2),



B$(-2,\ -2)$, C$(5,\ -4)$를 꼭짓점으로 하는 $\triangle\mathrm{ABC}$에서 $y\ge -1$인 부분은 오른쪽 그림에서 어두운 부분과 같다.

직선 AB의 방정식이 $y=x$이고 직선 AB와 $y=-1$의 교점을 D라 하면 D$(-1,\ -1)$

직선 AC의 기울기는 $\frac{-4-2}{5-2}=-2$이므로

직선 AC의 방정식을 $y=-2x+b$라 놓고 $(2,\ 2)$를 대입하면 $b=6$

$\therefore y=-2x+6$

또, 직선 AC와 $y=-1$의 교점을 E라 하면

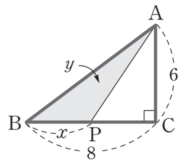
E$\left(\frac{7}{2},\ -1\right)$

$\therefore \triangle\mathrm{ADE}=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{DE}}\times 3$

$=\frac{1}{2}\times\left(1+\frac{7}{2}\right)\times 3$

$=\frac{27}{4}$

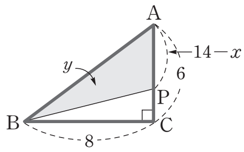
36 (i) 점 P가 $\overline{\mathrm{BC}}$ 위에 있을 때



$\triangle\mathrm{ABP}=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{BP}}\times\overline{\mathrm{AC}}$

$\therefore y=3x\ (0<x<8)$

(ii) 점 P가 $\overline{\mathrm{AC}}$ 위에 있을 때

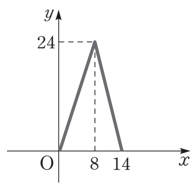


$\overline{\mathrm{AP}}=14-x$

$\triangle\mathrm{ABP}=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AP}}\times\overline{\mathrm{BC}}$

$\therefore y=56-4x\ (8\le x<14)$

(i), (ii)에 의해 x, y 사이의 관계를 나타내는 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 구하는 도형의 넓이는

$\frac{1}{2}\times 14\times 24=168$

TIP 점 C를 기준으로 점 P의 이동 방향이 바뀌므로
점 P가 $\overline{\mathrm{BC}}$ 위에 있는 경우와 $\overline{\mathrm{AC}}$ 위에 있는 경우로 분류하여 생각한다.