Solution

Lecture Book

I 다항식

II 방정식

III 부등식

IV 도형의 방정식

Work Book

I 다항식

II 방정식

III 부등식

IV 도형의 방정식

빠른 정답 찾기 Lecture Book

01 다항식의 연산

6쪽 Lecture 01 **1-1** (1) $-7x^3-x^2+2x+9$
(2) $9+2x-x^2-7x^3$
1-2 (1) $2y^2+y+9+3xy-5x^2+x^3$ (2) $2y^2+(3x+1)y+x^3-5x^2+9$
2-1 (1) $4x^3+x^2-x+1$ (2) $2xy-5y^2$
2-2 (1) x^3+3x^2-5 (2) $2x^3-9x^2+9x-7$

7쪽 유형 Q+Q **01** ④ **02** ③ **03** ② **04** 30
05 $3x^2-7xy-y^2$ **06** $A=-x^2+2xy-3y^2$, $B=-2x^2+2xy$
07 $x^2-6xy+3y^2$

8쪽 Lecture 02 **1-1** (1) $2x^3-3x^2+4x$ (2) $2x^2-xy-3y^2$
(3) $3a^3-2a^2-3a+2$ (4) a^3+4a^2+a-6
1-2 분배법칙, 교환법칙, 결합법칙, 분배법칙 **2-1** (1) 11 (2) 3
2-2 (1) -9 (2) 10

9쪽 Lecture 03 **1-1** (1) x^2-4x+4 (2) x^2-16
(3) $x^2-2x-35$ (4) $6x^2-7x-5$ (5) $x^2+y^2+2xy+12x+12y+36$
(6) $27x^3-27x^2+9x-1$ (7) x^3+8 (8) x^3-2x^2-5x+6
(9) $x^3-y^3+z^3+3xyz$ (10) x^4+9x^2+81
1-2 (1) $a^4-2a^2b^2+b^4$ (2) a^6-b^6 **2-1** 5 **2-2** 31

10쪽 Lecture 04 **1-1** (1) 13 (2) 8 (3) -17 (4) 1
1-2 (1) 8 (2) $12\sqrt{3}$ **2-1** (1) 14 (2) 12 **2-2** (1) 27 (2) 140

11쪽 유형 Q+Q **01** ⑤ **02** $-x^4-5x^2+x+7$ **03** 4
04 ① **05** ③ **06** ① **07** 57 **08** $x^2+4y^2-z^2-4xy$
09 ④ **10** ④ **11** ① **12** -36 **13** ① **14** 1
15 ⑤ **16** ② **17** ② **18** ④ **19** $\sqrt{22}$

14쪽 Lecture 05 **1-1** (1) 2, $-2x^2-6x$, 몫: x^2-2x, 나머지: 7
(2) 3, $2x^3+2x^2-2x$, $3x^2+3x-3$, $-x+2$, 몫: $2x+3$, 나머지: $-x+2$
1-2 (1) 몫: $3x^2+x+6$, 나머지: 7 (2) 몫: $-4x^2+2x+3$, 나머지: $-4x-5$
2-1 $Q=2x^2-2x+4$, $R=-8x-4$,
$4x^4+2x^2+2x-8=(2x^2+2x-1)(2x^2-2x+4)-8x-4$
2-2 $2x^3+x^2-3x-2$

15쪽 유형 Q+Q **01** -2 **02** ② **03** ④
04 몫: $5x+12$, 나머지: 9 **05** 8 **06** ①
07 $a=2$, $b=1$

16쪽 중단원 마무리 **01** ③ **02** 129 **03** -2 **04** 4
05 ④ **06** ② **07** 200 **08** 56 **09** ③ **10** ①
11 ④ **12** 6 **13** ② **14** ⑤ **15** ② **16** 15
17 5 **18** ④ **19** ③

02 나머지정리와 인수분해

20쪽 Lecture 06 **1-1** (1) × (2) ○ (3) × (4) ○
1-2 ㄱ, ㄷ
2-1 (1) $a=1$, $b=0$, $c=-5$ (2) $a=3$, $b=-5$, $c=1$
2-2 (1) $a=0$, $b=0$, $c=-2$ (2) $a=4$, $b=-\frac{1}{2}$, $c=8$

21쪽 Lecture 07 **1-1** (1) $a=9$, $b=-7$ (2) $a=-1$, $b=2$
1-2 (1) $a=1$, $b=-4$, $c=5$ (2) $a=-2$, $b=1$, $c=-1$
2-1 (1) $a=3$, $b=-2$ (2) $a=-9$, $b=14$
2-2 (1) $a=1$, $b=-1$, $c=1$ (2) $a=4$, $b=2$, $c=-1$

22쪽 유형 Q+Q **01** -3 **02** 0 **03** 13 **04** -36
05 ⑤ **06** 8 **07** 4 **08** ③

23쪽 Lecture 08 **1-1** (1) -7 (2) $\frac{27}{4}$ **1-2** (1) 6 (2) 4
2-1 4 **2-2** 2

24쪽 Lecture 09 **1-1** (1) 2, 1, 2, 7, 몫: x^2+3x+2, 나머지: 7
(2) -3, 0, 18, -24, -6, 8, -9, 몫: $2x^2-6x+8$, 나머지: -9
1-2 몫: x^2-6x+9, 나머지: -3
2-1 -3, 2, -1, -2, -2, -4, $4x^2-2x-4$, 1, $2x^2-x-2$, 1
몫: $2x^2-x-2$, 나머지: -1
2-2 몫: $3x^2-3x+4$, 나머지: -6

25쪽 유형 Q+Q **01** $a=3$, $b=-4$ **02** 9 **03** ②
04 $5x-10$ **05** ⑤ **06** ④ **07** 9 **08** 3 **09** -2
10 15 **11** (1) -1 (2) 87 **12** ② **13** ① **14** ④
15 ② **16** -11 **17** ③ **18** $x-1$ **19** $a=1$, $b=1$, $c=-3$
20 ①

28쪽 Lecture 10 **1-1** (1) $ab(b-4a)$ (2) $(a+b)(x-y)$
1-2 (1) $(a-5)^2$ (2) $2(x-3y)^2$ (3) $(x+4)(x-4)$ (4) $(4y+1)(2y-3)$
1-3 (1) $(a+2b-2c)^2$ (2) $(x+2)^3$ (3) $(2a-3b)^3$
(4) $(x+4)(x^2-4x+16)$ (5) $(x+y-2)(x^2+y^2-xy+2x+2y+4)$
(6) $(9x^2+3x+1)(9x^2-3x+1)$

29쪽 **Lecture 11** **1-1** (1) $(x^2-x+2)(x^2-x-3)$
(2) $(x+1)(x-4)(x^2-3x+6)$
2-1 (1) $(x+2)(x-2)(x^2+7)$ (2) $(x^2+x+4)(x^2-x+4)$
3-1 $(x+y+6)(x+y-1)$
4-1 $x+1$, $x+1$, x^2-2x-4, $x+1$, x^2-2x-4

30쪽 **유형 Q+Q** **01** ③ **02** $(x+2)(x-y)$ **03** ②
04 ④ **05** -3 **06** ① **07** 0 **08** 6 **09** ④
10 ④ **11** 3 **12** ② **13** $a=-6$, $(x-2)(x^2+2x+3)$
14 ② **15** 빗변의 길이가 c인 직각삼각형 **16** 60 **17** 77
18 ④ **19** 461

33쪽 **중단원 마무리** **01** $x=1$, $y=4$ **02** ① **03** 0
04 1 **05** ① **06** ③ **07** 6 **08** ③ **09** ④
10 ④ **11** 1 **12** ② **13** ① **14** 40 **15** ④
16 -2 **17** 16 **18** ① **19** ④ **20** $3yz-9$ **21** 3
22 정삼각형 **23** ⑤ **24** ②

03 복소수

40쪽 **Lecture 12** **1-1** (1) 실수부분: 1, 허수부분: 3
(2) 실수부분: 4, 허수부분: -7 (3) 실수부분: $\frac{3}{2}$, 허수부분: $-\frac{5}{2}$
(4) 실수부분: $\sqrt{6}$, 허수부분: 0
2-1 (1) ㄱ, ㄷ, ㅁ (2) ㄴ, ㄹ **2-2** ㄱ, ㄹ, ㅁ

41쪽 **Lecture 13** **1-1** (1) $a=2$, $b=-3$ (2) $a=0$, $b=-6$
(3) $a=4$, $b=6$ (4) $a=2$, $b=5$
1-2 (1) $a=-3$, $b=2$ (2) $a=-4$, $b=-2$
2-1 (1) $1-4i$ (2) $2i-3$ (3) -12 (4) $-9i$
2-2 (1) $a=3$, $b=6$ (2) $a=7$, $b=1$ (3) $a=\sqrt{2}$, $b=0$ (4) $a=7$, $b=-5$

42쪽 **Lecture 14** **1-1** (1) $4-i$ (2) $-1-6i$ (3) $-9+11i$
(4) $4+4i$
1-2 $-2-14i$
2-1 (1) $-2+9i$ (2) $-8-14i$ (3) $15-8i$ (4) 13
2-2 (1) $1-i$ (2) $-\frac{6}{5}+\frac{3}{5}i$ (3) $\frac{1}{13}-\frac{5}{13}i$ (4) $\frac{1}{2}-3i$

43쪽 **Lecture 15** **1-1** (1) $5+2i$ (2) $5-2i$ (3) 10 (4) 29
1-2 (1) $1-5i$ (2) $5-3i$ (3) $-10+5i$ (4) $-10+5i$
2-1 (1) -1 (2) $-i$ (3) 0 (4) $-i$ **2-2** (1) -4 (2) -1

44쪽 **유형 Q+Q** **01** ④ **02** 3 **03** ⑤
04 $18+9i$ **05** ⑤ **06** ③ **07** 6 **08** ③ **09** ①
10 ② **11** $x=6$, $y=8$ **12** 4 **13** ② **14** ⑤
15 ④ **16** -2 **17** ④ **18** $-3+i$ **19** ② **20** $1\pm3i$
21 ③ **22** -1 **23** ③ **24** ⑤

48쪽 **Lecture 16** **1-1** (1) $\sqrt{7}i$ (2) $4i$ (3) $-2\sqrt{6}i$ (4) $\frac{2}{3}i$
1-2 (1) $\pm3\sqrt{2}i$ (2) $\pm\frac{1}{5}i$
2-1 (1) $-\sqrt{10}$ (2) $6i$ (3) $\sqrt{6}$ (4) $-\sqrt{3}i$ **2-2** ㄱ, ㄹ, ㅁ

49쪽 **유형 Q+Q** **01** ② **02** ① **03** ① **04** a

50쪽 **중단원 마무리** **01** 3 **02** ⑤ **03** ② **04** ③
05 0 **06** ② **07** ① **08** $\frac{1}{2}$ **09** ⑤ **10** ⑤
11 ④ **12** ① **13** $-2\sqrt{7}$ **14** 12 **15** 16 **16** ③
17 ③ **18** ② **19** ④

04 이차방정식

54쪽 **Lecture 17** **1-1** (1) $x=2$ 또는 $x=4$
(2) $x=-\frac{1}{3}$ 또는 $x=\frac{1}{3}$ (3) $x=1$ (4) $x=-\frac{1}{3}$ 또는 $x=2$
1-2 (1) $x=\frac{-3\pm\sqrt{33}}{2}$ (2) $x=1\pm\sqrt{6}i$ (3) $x=\frac{1\pm\sqrt{41}}{4}$
(4) $x=\frac{-2\pm\sqrt{2}i}{3}$
1-3 (1) $x=2$, 실근 (2) $x=\frac{-1\pm\sqrt{19}i}{10}$, 허근

55쪽 **Lecture 18** **1-1** (1) ㄴ, ㅁ (2) ㄱ, ㄹ (3) ㄷ, ㅂ
1-2 (1) $k<\frac{9}{4}$ (2) $\frac{9}{4}$ (3) $k>\frac{9}{4}$

56쪽 **유형 Q+Q** **01** ② **02** 5 **03** -2 **04** 2
05 ③ **06** ③ **07** $\sqrt{5}-\sqrt{7}$ **08** $x=-3$ 또는 $x=2$
09 ③ **10** ③ **11** ① **12** 7 **13** ⑤ **14** -3
15 1 **16** 6 **17** ③ **18** 서로 다른 두 허근 **19** ③
20 정삼각형 **21** ⑤ **22** ④

60쪽 **Lecture 19** **1-1** (1) $\alpha+\beta=-5$, $\alpha\beta=1$
(2) $\alpha+\beta=\frac{4}{3}$, $\alpha\beta=\frac{2}{3}$
1-2 (1) 2 (2) -24 (3) 11 (4) $\frac{2}{3}$

2-1 (1) $x^2+2x-15=0$ (2) $x^2-\frac{3}{4}x+\frac{1}{8}=0$ (3) $x^2-2x-1=0$
(4) $x^2-2x+2=0$
2-2 $3x^2-4x+1=0$

61쪽 **Lecture 20** **1-1** (1) $(x+4i)(x-4i)$
(2) $(x+5+4\sqrt{2})(x+5-4\sqrt{2})$
2-1 $3-\sqrt{5}$, $3-\sqrt{5}$, $3-\sqrt{5}$, -6, 4
2-2 (1) $1+4i$ (2) $a=-2$, $b=17$

62쪽 **유형 Q+Q** **01** 12 **02** $\sqrt{2}$ **03** ④ **04** 18
05 ④ **06** ② **07** ⑤ **08** 3 **09** ⑤ **10** ③
11 $x^2-6x+8=0$ **12** $2x^2+3x+6=0$ **13** ② **14** -2
15 2 **16** 2 **17** ① **18** ⑤ **19** ① **20** -16
21 ⑤ **22** ④

66쪽 **중단원 마무리** **01** $x=\sqrt{3}$ 또는 $x=2$ **02** ② **03** -2
04 ③ **05** ③ **06** 6 cm **07** ④ **08** ①
09 ㄱ, ㄴ, ㄹ **10** ② **11** 7 **12** 0 **13** ③
14 23 **15** ⑤ **16** 10 **17** ② **18** ⑤ **19** ②
20 ① **21** $\frac{31}{9}$ **22** ③ **23** -4 **24** -11

05 이차방정식과 이차함수

70쪽 **Lecture 21** **1-1** (1) $y=(x+2)^2-5$ (2) $(-2, -5)$
(3) $x=-2$
1-2 (1) $(0, 2)$, $x=0$ (2) $(-5, -3)$, $x=-5$
(3) $(-1, 1)$, $x=-1$ (4) $(1, 4)$, $x=1$

71쪽 **Lecture 22** **1-1** (1) -3 (2) $-\frac{4}{3}$, 2
2-1 (1) $k<4$ (2) 4 (3) $k>4$ **2-2** $k\geq-\frac{9}{4}$

72쪽 **Lecture 23** **1-1** (1) -4, -1 (2) 2
1-2 (1) 한 점에서 만난다.(접한다.) (2) 서로 다른 두 점에서 만난다.
1-3 (1) $k>-\frac{5}{4}$ (2) $-\frac{5}{4}$ (3) $k<-\frac{5}{4}$

73쪽 **유형 Q+Q** **01** ① **02** 5 **03** 2 **04** ③
05 $(1, -2)$ **06** ③ **07** ① **08** -2
09 $-2<k<6$ **10** $y=3x$ **11** ②

75쪽 **Lecture 24** **1-1** (1) 최솟값: 5, $x=1$
(2) 최댓값: -6, $x=-4$ (3) 최댓값: 7, $x=0$ (4) 최솟값: -1, $x=5$
1-2 (1) $y=4(x-1)^2-3$ (2) -3, $x=1$
1-3 (1) 최솟값: -2 (2) 최솟값: 3 (3) 최댓값: -7 (4) 최댓값: 11

76쪽 **Lecture 25** **1-1** 3, 4, -3, -4, 0, 0, -4
1-2 (1) 최댓값: -1, 최솟값: -3 (2) 최댓값: 3, 최솟값: -5
(3) 최댓값: -5, 최솟값: -9 (4) 최댓값: 2, 최솟값: -7

77쪽 **유형 Q+Q** **01** ③ **02** ④ **03** 14 **04** 4
05 ① **06** 4 **07** ① **08** ① **09** ④ **10** 4, 4
11 $\frac{7}{2}$ **12** 60만 원

79쪽 **중단원 마무리** **01** 2 **02** ④ **03** 2 **04** $(0, 3)$
05 ③ **06** 0 **07** 11 **08** ① **09** -4 **10** ②
11 ⑤ **12** ② **13** ② **14** 54 **15** ④ **16** $\frac{33}{4}$
17 110 **18** ⑤

06 여러 가지 방정식

82쪽 **Lecture 26** **1-1** (1) $x=-2$ 또는 $x=1\pm\sqrt{3}i$
(2) $x=-3$ 또는 $x=0$ 또는 $x=3$
1-2 (1) $x=1$ 또는 $x=\frac{-3\pm\sqrt{13}}{2}$
(2) $x=-3$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$
1-3 X^2-2X-3, $X-3$, 3, 3, 2, $\pm\sqrt{2}$, $\pm\sqrt{2}$

83쪽 **Lecture 27** **1-1** X^2-5X+6, $X-3$, 3, 3, $\pm\sqrt{3}$
2-1 8, 8, $X-4$, 4, 4, 1, $2\pm\sqrt{3}$, $2\pm\sqrt{3}$

84쪽 **유형 Q+Q** **01** 6 **02** ④ **03** -2 **04** ①
05 3 **06** $2\sqrt{6}$ **07** ④ **08** -5 **09** ③ **10** -1, 2
11 ④ **12** 1 **13** $-\frac{3}{4}$ **14** 2 **15** 4

86쪽 **Lecture 28** **1-1** (1) 8 (2) 6 (3) 4 (4) $\frac{3}{2}$
2-1 $x^3-5x^2-2x+24=0$ **3-1** $a=-7$, $b=-3$

87쪽 **Lecture 29** **1-1** (1) 1 (2) -1 (3) -1 (4) -1
1-2 (1) 1 (2) -1 (3) 1 (4) 0 **1-3** (1) 1 (2) -1 (3) 0 (4) -1

88쪽 **유형 Q+Q** **01** ② **02** ③ **03** $x^3-2x^2-3x+1=0$
04 $x^3-3x^2-2x+5=0$ **05** 14 **06** 3 **07** ⑤ **08** ⑤

89쪽 **Lecture 30** **1-1** (1) $\begin{cases} x=1+\sqrt{2} \\ y=\sqrt{2} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=1-\sqrt{2} \\ y=-\sqrt{2} \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x=\frac{2}{5} \\ y=-\frac{11}{5} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$

1-2 (1) $\begin{cases} x=\sqrt{5}i \\ y=-\sqrt{5}i \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-\sqrt{5}i \\ y=\sqrt{5}i \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=\sqrt{3} \\ y=\sqrt{3} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-\sqrt{3} \\ y=-\sqrt{3} \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x=\sqrt{11} \\ y=-\sqrt{11} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-\sqrt{11} \\ y=\sqrt{11} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2\sqrt{2} \\ y=\sqrt{2} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-2\sqrt{2} \\ y=-\sqrt{2} \end{cases}$

1-3 (1) $\begin{cases} x=-2 \\ y=5 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=5 \\ y=-2 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x=-3 \\ y=2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2 \\ y=-3 \end{cases}$

90쪽 유형 Q+Q **01** ⑤ **02** $\begin{cases} x=-\frac{4}{3} \\ y=\frac{2}{3} \end{cases}$ **03** ③
04 8 **05** $(-4, -3)$, $(-3, -4)$, $(3, 4)$, $(4, 3)$ **06** 12
07 ① **08** 3 **09** 120 m^2 **10** 82 **11** 2 cm

92쪽 중단원 마무리 **01** ④ **02** ① **03** 0 **04** 1
05 3 **06** ② **07** ⑤ **08** ③ **09** 13 **10** ④
11 ② **12** 4 **13** ③ **14** 8 **15** ① **16** 3
17 7 **18** 9 m

07 일차부등식

96쪽 Lecture 31 **1-1** (1) $<$ (2) $>$
1-2 (1) $0\le x-1\le 2$ (2) $2\le 2x\le 6$ (3) $-3\le -x\le -1$ (4) $\frac{1}{3}\le\frac{1}{x}\le 1$
2-1 (1) $x<-9$ (2) $x\ge 1$ (3) $x\le\frac{3}{5}$ (4) $x<-\frac{3}{2}$
2-2 (1) $x<\frac{a+1}{a}$ (2) 모든 실수 (3) $x>\frac{a+1}{a}$

97쪽 Lecture 32 **1-1** (1) $1<x\le 5$ (2) $x<-1$
1-2 (1) $x\le -5$ (2) $-4\le x<2$ (3) $-6<x<-5$ (4) $x\ge 3$
1-3 (1) $-8\le x<-1$ (2) $x>2$

98쪽 유형 Q+Q **01** ④ **02** ④ **03** ② **04** 1
05 1 **06** 2

99쪽 Lecture 33 **1-1** (1) $x=-3$ (2) 해는 없다. (3) 해는 없다. (4) $x=2$
1-2 (1) $x=3$ (2) 해는 없다. (3) $x=1$ (4) 해는 없다.

100쪽 Lecture 34 **1-1** (1) $-4\le x<2$ (2) $-7<x<1$

2-1 (1) $x<-2$ 또는 $x>2$ (2) $-1\le x\le 11$
2-2 -2, -1, -1, 0, 0, 1, -2, 1

101쪽 유형 Q+Q **01** ⑤ **02** $x=2$ **03** 25 **04** ②
05 ④ **06** 5 **07** ④ **08** $a\ge 11$ **09** ① **10** -12
11 7개 **12** ① **13** 8 **14** ⑤ **15** 0 **16** 8
17 ① **18** ② **19** -2 **20** -8

104쪽 중단원 마무리 **01** ㄱ, ㄴ **02** 14 **03** ② **04** ①
05 $\frac{1}{2}$ **06** ⑤ **07** ③ **08** -15 **09** 2 **10** ⑤
11 ② **12** 20 cm 초과 26 cm 이하 **13** 19 **14** ③
15 $x=2$ **16** ⑤ **17** 4 **18** ④

08 이차부등식

108쪽 Lecture 35 **1-1** (1) ○ (2) × (3) ○ (4) ×
2-1 (1) $x<-1$ 또는 $x>1$ (2) $-1\le x\le 1$
2-2 (1) $-3\le x\le 1$ (2) $x<-2$ 또는 $x>2$

109쪽 Lecture 36 **1-1** (1) $2<x<4$ (2) 모든 실수 (3) 해는 없다.
1-2 (1) $x\le 1$ 또는 $x\ge 8$ (2) $x=4$ (3) $x\ne -5$인 모든 실수 (4) 모든 실수
2-1 (1) $x^2-5x<0$ (2) $x^2-4x-21\ge 0$ (3) $x^2>0$ (4) $x^2-4x+4\le 0$

110쪽 Lecture 37 **1-1** (1) $k>1$ (2) $-6<k<2$
1-2 $0<k\le 2$ **1-3** $-\sqrt{2}<k<\sqrt{2}$

111쪽 유형 Q+Q **01** ④ **02** ② **03** -7 **04** ③
05 -18 **06** ① **07** $-2\le x\le -1$ **08** 10 **09** 18
10 3 **11** 25 **12** ⑤ **13** ①
14 $-3<a<0$ 또는 $a>0$ **15** $3\le k\le 5$
16 $-6\le a<0$ **17** ③ **18** ⑤ **19** ①
20 $1<a<2$ **21** $-3<x<4$ **22** ⑤
23 $-2<a<10$ **24** -4 **25** ② **26** ②

115쪽 Lecture 38 **1-1** -5, 1, -2, 1 **1-2** $2<x\le 3$
2-1 2, -4, 3, -4, 2, 3 **2-2** $-5\le x<-4$ 또는 $2<x\le 3$

116쪽 유형 Q+Q **01** $-6\le x<-4$ **02** ①
03 $0\le a\le 5$ **04** 5 **05** ④ **06** ① **07** 24
08 3

117쪽 Lecture 39 **1-1** $\ge$, $\le$, $>$, $>$, $<$, $\le$ **1-2** $k\ge 5$

2-1 $-8\le k<-4$ **2-2** $k\le -2$

118쪽 유형 Q+Q **01** ① **02** ③ **03** $\frac{3}{4}<k\le 1$ 또는 $k\ge 3$

04 ③ **05** 3 **06** 10

119쪽 중단원 마무리 **01** ⑤ **02** 모든 실수

03 $-7\le x\le 2$ **04** ③ **05** 18 **06** ③ **07** ②

08 ② **09** 22 **10** 21 **11** $1<m<9$ **12** ④

13 ② **14** 30 **15** 60 cm 이상 80 cm 이하 **16** ②

17 2 **18** 25

09 평면좌표

124쪽 Lecture 40 **1-1** (1) 7 (2) 6 **1-2** -5, 3

2-1 (1) $3\sqrt{2}$ (2) 10 (3) 13 (4) $2\sqrt{13}$

125쪽 유형 Q+Q **01** 3 **02** 16 **03** ④ **04** ⑤

05 1 **06** $\left(\frac{7}{3}, \frac{7}{3}\right)$ **07** ④ **08** ⑤ **09** 5

10 ② **11** 15 **12** $\frac{3}{2}$

13 (가) M (나) $(-c, 0)$ (다) $2(a^2+b^2+c^2)$ (라) $a^2+b^2+c^2$

14 (가) B (나) (a, b) (다) $x^2+y^2+(x-a)^2+(y-b)^2$

(라) $x^2+y^2+(x-a)^2+(y-b)^2$

127쪽 Lecture 41 **1-1** (1) 4 (2) -3 **1-2** 8

2-1 (1) 8 (2) -3 **2-2** 3

128쪽 Lecture 42 **1-1** (1) $(3, -1)$ (2) $\left(2, -\frac{1}{2}\right)$ (3) $(-13, 7)$

1-2 $a=-1$, $b=4$ **2-1** (1) $(2, 1)$ (2) $(-1, 5)$

2-2 $a=1$, $b=-1$

129쪽 유형 Q+Q **01** (가) 점 D (나) 점 F **02** ④ **03** 23

04 ③ **05** 13 **06** ④ **07** $(9, 3)$ **08** ① **09** 4

10 $(9, 18)$ **11** $(7, 10)$ **12** ③ **13** (1) 2 : 1 (2) $\left(-\frac{7}{3}, -\frac{1}{3}\right)$

14 ①

131쪽 중단원 마무리 **01** ③ **02** ② **03** 12초 **04** ④

05 3 **06** 20 **07** ③ **08** $(1, 2)$ **09** ③ **10** ③

11 $\frac{5}{11}<a<\frac{4}{5}$ **12** 점 D, 점 H **13** ④ **14** $(2, 1)$

15 ③ **16** $(-2, 1)$ **17** C$(7, 0)$, D$(3, 6)$ **18** ③

19 ①

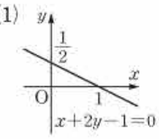
10 직선의 방정식

134쪽 Lecture 43 **1-1** (1) $y=-2x+5$ (2) $y=5$ (3) $y=-9$

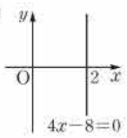
2-1 (1) $y=-x+3$ (2) $y=4x+17$

3-1 (1) $\frac{x}{5}+\frac{y}{3}=1$ (2) $-\frac{x}{2}+\frac{y}{7}=1$

135쪽 Lecture 44 **1-1** (1)



(2)



1-2 제1사분면, 제2사분면, 제3사분면

2-1 (1) $(-7, 4)$ (2) $(1, 3)$

3-1 (1) $x-y=0$ (2) $4x-3y+11=0$

136쪽 유형 Q+Q **01** ③ **02** $y=3x-2$ **03** -2

04 ③ **05** ① **06** $\frac{x}{3}+\frac{y}{8}=1$ **07** 5 **08** ②

09 $y=-2x+3$ **10** -4 **11** ② **12** ④ **13** ①

14 $y=-5x+4$ **15** ② **16** $\frac{1}{2}$ **17** 13 **18** ③

139쪽 Lecture 45 **1-1** (1) 1 (2) 11 **1-2** (1) 7 (2) $\frac{3}{2}$

2-1 $y=2x+3$ **2-2** $y=-5x+4$

140쪽 유형 Q+Q **01** 1 **02** $\frac{2}{5}$ **03** 1

04 -1, $-\frac{1}{2}$, 2 **05** -4 **06** ② **07** 1 **08** ②

141쪽 Lecture 46 **1-1** (1) $\sqrt{5}$ (2) $2\sqrt{2}$

1-2 -25, -5 **2-1** (1) $2\sqrt{5}$ (2) $\sqrt{10}$ **2-2** $\frac{\sqrt{10}}{2}$

142쪽 유형 Q+Q **01** $\sqrt{13}$ **02** $\frac{1}{5}$ **03** 11 **04** ③

05 ② **06** $\frac{\sqrt{13}}{3}$ **07** $x+y=0$ 또는 $x-y+2=0$ **08** ③

143쪽 중단원 마무리 **01** ④ **02** 3 **03** $y=x+6$

04 $\frac{x}{6}+\frac{y}{2}=1$ **05** ① **06** ③ **07** 제2사분면

08 $\sqrt{10}$ **09** 3 **10** ④ **11** 10 **12** ④ **13** ②

14 $(4, 3)$ **15** ③ **16** $y=-3x-30$, $y=-3x+30$ **17** 2

18 ④ **19** ③

11 원의 방정식

146쪽 **Lecture 47** **1-1** (1) $(x-2)^2+(y+3)^2=1$
(2) $(x-4)^2+y^2=8$ (3) $x^2+y^2=25$
1-2 $(x+1)^2+(y-2)^2=25$
2-1 (1) $(x-1)^2+(y-4)^2=16$ (2) $(x-3)^2+(y+5)^2=9$
(3) $(x+2)^2+(y-2)^2=4$
2-2 (1) $(x-3)^2+(y-3)^2=9$ (2) $(x+3)^2+(y-3)^2=9$
(3) $(x+3)^2+(y+3)^2=9$ (4) $(x-3)^2+(y+3)^2=9$

147쪽 **Lecture 48** **1-1** 풀이 95쪽 **1-2** $k<25$
2-1 $2x+2y+1=0$ **2-2** $3x-y-1=0$

148쪽 **유형 Q+Q** **01** ③ **02** $(x-2)^2+y^2=29$ **03** 16
04 ③ **05** ③ **06** $(x+2)^2+(y+5)^2=13$ **07** 10
08 ② **09** ② **10** 6 **11** ② **12** ③ **13** ③
14 ⑤ **15** 12 **16** ⑤ **17** (가) 2 (나) 11 (다) 3 (라) 20
18 $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y-2)^2=4$ **19** 3 **20** ② **21** ②
22 4

152쪽 **Lecture 49** **1-1** (1) 만나지 않는다.
(2) 한 점에서 만난다. (접한다.)
1-2 (1) 서로 다른 두 점에서 만난다. (2) 만나지 않는다.
1-3 (1) $-\sqrt{10}<k<\sqrt{10}$ (2) $\pm\sqrt{10}$ (3) $k<-\sqrt{10}$ 또는 $k>\sqrt{10}$

153쪽 **유형 Q+Q** **01** -8 **02** ④ **03** ④ **04** 10
05 2 **06** ② **07** 4 **08** ② **09** ④ **10** 9
11 ③ **12** ⑤

155쪽 **Lecture 50** **1-1** (1) $y=-3x\pm2\sqrt{10}$ (2) $y=2x\pm5$
2-1 (1) $3x-y=-10$ (2) $2x+y=-10$
3-1 (1) $x_1x+y_1y=2$ (2) $x_1=-1$, $y_1=-1$ 또는 $x_1=-1$, $y_1=1$
(3) $x+y=-2$, $x-y=-2$

156쪽 **유형 Q+Q** **01** $y=-\frac{1}{4}x\pm\frac{17}{4}$ **02** ④ **03** $(4, 6)$
04 ③ **05** ② **06** 1

157쪽 **중단원 마무리** **01** ⑤ **02** 8 **03** ② **04** 10
05 ③ **06** 25 **07** ③ **08** 7 **09** ① **10** ③
11 $(x-1)^2+y^2=2$ **12** 6 **13** ① **14** π **15** ②
16 ③ **17** 25 **18** 3 **19** ③ **20** 18 **21** ④
22 ① **23** 18

12 도형의 이동

162쪽 **Lecture 51** **1-1** (1) $(2, 4)$ (2) $(3, -11)$
1-2 (1) $(12, -3)$ (2) $(6, -10)$ **1-3** $a=3$, $b=5$
1-4 (1) $(2, 2)$ (2) $(-8, 1)$

163쪽 **Lecture 52** **1-1** (1) $x-2y+9=0$
(2) $(x-4)^2+(y+3)^2=9$ (3) $y=x^2+2x+10$
1-2 $2x-3y-18=0$ **1-3** $a=-2$, $b=3$ **1-4** $y=3x^2+6x+7$

164쪽 **유형 Q+Q** **01** $a=-4$, $b=-3$ **02** ④ **03** 2
04 ④ **05** 16 **06** $(-5, 9)$ **07** 11 **08** ④

165쪽 **Lecture 53** **1-1** (1) $(-3, -2)$ (2) $(3, 2)$ (3) $(3, -2)$
(4) $(2, -3)$
1-2 $(-6, 3)$ **1-3** $(-8, -5)$

166쪽 **Lecture 54** **1-1** (1) $2x+y+3=0$ (2) $2x+y-3=0$
(3) $2x-y-3=0$ (4) $x-2y-3=0$
1-2 $(x-4)^2+(y-1)^2=5$ **1-3** $y=x^2-x+2$

167쪽 **Lecture 55** **1-1** $(1, 6)$ **1-2** $(-7, 5)$
2-1 $\frac{-5+q}{2}$, $\frac{-5+q}{2}$, -1, -6, -2 **2-2** $(5, 2)$

168쪽 **유형 Q+Q** **01** 8 **02** ④ **03** $y=5x-11$
04 ② **05** ④ **06** -6 **07** $\frac{1}{2}$ **08** 5 **09** 4
10 ③ **11** ⑤ **12** ① **13** 1 **14** ② **15** ③
16 10 **17** $\sqrt{34}$ **18** ③

171쪽 **중단원 마무리** **01** 15 **02** ③ **03** 5 **04** ③
05 ⑤ **06** -15 **07** ② **08** ② **09** ③ **10** 4
11 -11 **12** ② **13** ① **14** -3 **15** ②
16 $(-5, 3)$ **17** 10 **18** $3\sqrt{10}$

01 다항식의 연산

W 2쪽 01 다항식의 덧셈과 뺄셈

01 (1) $2x^3+(2y+6)x-y^3-2y^2+3$ (2) $2x^3+6x+3+2xy-2y^2-y^3$
02 (1) $-2x^2+4x+5$ (2) $4x^2+12xy-8y^3$
03 (1) $4x^3+2x^2+9x-6$ (2) $-12x^3+2x^2-3x+14$ **04** ③
05 ④, ②, ③, ① **06** ④ **07** ① **08** -24 **09** ②
10 $3x^2+3x+3$ **11** $A=x^2-2x+4$, $B=6x^2-7x+11$ **12** ⑤

W 4쪽 02 다항식의 곱셈

01 (1) $8x^2-2xy-3y^2$ (2) x^3-x^2+x+14 **02** (1) 14 (2) -15
03 (1) x^2+6x+9 (2) x^2-49 (3) $x^2+4x-12$ (4) $15x^2-11x+2$
(5) $x^2-4xy+2x+4y^2-4y+1$ (6) $64x^3+48x^2+12x+1$ (7) x^3-125
(8) $x^3-13x-12$ (9) $x^3-y^3-8z^3-6xyz$ (10) x^4+4x^2+16
04 8 **05** (1) 5 (2) 6 (3) $-10\sqrt{2}$ **06** (1) $\sqrt{13}$ (2) $10\sqrt{13}$
07 $3x^3-11x^2+9x-1$ **08** $2x^3-12x^2+10x+25$
09 $17x^2+9xy+7x+7y-2$ **10** ③ **11** ② **12** ④
13 73 **14** ① **15** $6x^2+xy-5zx-y^2+10yz-25z^2$ **16** ③
17 ② **18** $\frac{10}{3}$ **19** $34\sqrt{5}$ **20** ② **21** 7 **22** ①
23 39 **24** ④ **25** 254 **26** $14x^2-7x-42$ **27** 14
28 ③

W 8쪽 03 다항식의 나눗셈

01 (1) 몫: $2x^2-8x+11$, 나머지: -4 (2) 몫: $-3x^2+1$, 나머지: $x-3$
02 (1) $Q=x^2-6x+24$, $R=-90$,
$x^3-2x^2+6=(x+4)(x^2-6x+24)-90$
(2) $Q=2x^2+2x-3$, $R=-x+5$,
$2x^4+5x^3+12x-10=(x^2-x+5)(2x^2+2x-3)-x+5$
03 -8 **04** ② **05** 17 **06** x^2-4x+5 **07** ③
08 ③ **09** -1 **10** ① **11** 6 **12** ③

02 나머지정리와 인수분해

W 10쪽 04 항등식

01 ㄴ, ㄹ **02** (1) $a=0$, $b=0$, $c=6$ (2) $a=-1$, $b=-4$, $c=3$
03 $a=3$, $b=1$, $c=9$ **04** $a=5$, $b=-3$, $c=1$
05 $a=3$, $b=-1$, $c=-2$ **06** ③ **07** $\frac{1}{2}$ **08** 6
09 ① **10** ② **11** 1 **12** 81 **13** ⑤ **14** 0
15 ⑤ **16** 12 **17** ① **18** ①

W 13쪽 05 나머지정리

01 (1) -12 (2) 0 **02** (1) 0 (2) -2
03 (1) 몫: $2x^2+x+4$, 나머지: 1 (2) 몫: $3x^2-3x+1$, 나머지: -8
04 ② **05** 12 **06** ③ **07** 5 **08** ② **09** ②
10 x^2-x+2 **11** $-2x^2+3x+3$ **12** ③ **13** -4
14 ⑤ **15** 3 **16** ② **17** -5 **18** ③
19 (1) 128 (2) 31 **20** ① **21** ③ **22** ① **23** -4
24 $\frac{1}{4}$ **25** 10 **26** ② **27** 2 **28** -1 **29** ④
30 (1) $a=\frac{1}{2}$, $b=1$, $c=1$, $d=4$ (2) x^2+x+2 **31** 9 **32** ③

W 18쪽 06 인수분해

01 (1) $(x+2)^2$ (2) $(2y+1)(4y-5)$ (3) $(x+2y-3z)^2$ (4) $(3x-1)^3$
(5) $(x-2y)(x^2+2xy+4y^2)$
(6) $(x-y+2z)(x^2+y^2+4z^2+xy+2yz-2zx)$
(7) $(4x^2+2xy+y^2)(4x^2-2xy+y^2)$
02 (1) $(x^2-2x+2)(x^2-2x-4)$ (2) $(x+3)(x-2)(x+2)(x-3)$
(3) $(x-y+1)(3x+y+2)$ (4) $(x+2)(x-1)^2$
(5) $(x+1)(x-1)(x^2-x-1)$
03 ③ **04** ② **05** $(x+y)(x-y)(y+z)$ **06** ②
07 ② **08** ㄱ, ㄴ, ㄷ **09** ④ **10** 21 **11** ①
12 ① **13** 13 **14** 3 **15** ⑤ **16** ③
17 $(x+y)(y-z)(x-y+2z)$ **18** $2x-2y+6$ **19** ⑤
20 ④ **21** -1 **22** ① **23** 4 **24** ① **25** ①
26 ④ **27** $16\sqrt{5}$ **28** ⑤ **29** ④ **30** 4000

03 복소수

W 23쪽 07 복소수의 사칙연산

01 (1) 실수부분: 2, 허수부분: 6 (2) 실수부분: 5, 허수부분: -1
(3) 실수부분: $4-\sqrt{7}$, 허수부분: 0 (4) 실수부분: $-\frac{3}{2}$, 허수부분: $\frac{1}{2}$
02 (1) ㄱ, ㄷ, ㅁ (2) ㄴ, ㄹ, ㅂ (3) ㄴ, ㅂ
03 (1) $a=0$, $b=-3$ (2) $a=-2$, $b=-5$ (3) $a=3$, $b=-6$
(4) $a=1$, $b=2$
04 (1) $a=6$, $b=-5$ (2) $a=9$, $b=3$ (3) $a=-8$, $b=0$ (4) $a=3$, $b=7$
05 (1) $8-4i$ (2) $4+2i$ (3) $2+2i$ **06** (1) $3+i$ (2) $-\frac{1}{5}-\frac{3}{5}i$
07 (1) $3+2i$ (2) $-1+4i$ (3) $-\frac{1}{5}+\frac{7}{5}i$ (4) $-\frac{1}{5}+\frac{7}{5}i$

08 (1) $-i$ (2) -1 (3) 16 (4) 0 **09** ② **10** 12 **11** ③

12 -1 **13** 4 **14** ③ **15** ⑤ **16** -4 **17** $\frac{1}{4}$

18 ⑤ **19** 2 **20** ① **21** ② **22** 82 **23** ③

24 ⑤ **25** ④ **26** ③ **27** -32 **28** ② **29** 4

30 ⑤ **31** $\frac{4}{5}+\frac{7}{5}i$ **32** ⑤ **33** ③ **34** -6

35 2 **36** ④ **37** ② **38** ④ **39** -1 **40** ③

41 ③ **42** 5 **43** 0

W 30쪽 08 음수의 제곱근

01 (1) $\pm 2i$ (2) $\pm 2\sqrt{2}i$ (3) $\pm \frac{1}{4}i$ (4) $\pm \frac{5}{6}i$ **02** ㄷ, ㄹ, ㅂ

03 ⑤ **04** 0 **05** a^2-a **06** ①, ④ **07** $-b$

04 이차방정식

W 31쪽 09 이차방정식의 근과 판별식

01 (1) $x=-4$ 또는 $x=5$, 실근 (2) $x=\frac{3}{2}$, 실근

(3) $x=\frac{3\pm\sqrt{13}}{2}$, 실근 (4) $x=\frac{-1\pm\sqrt{23}i}{6}$, 허근

02 (1) 서로 다른 두 실근 (2) 중근 (3) 서로 다른 두 허근

03 (1) $k>-\frac{1}{8}$ (2) $-\frac{1}{8}$ (3) $k<-\frac{1}{8}$ **04** ①

05 $x=-\sqrt{2}$ 또는 $x=-1$ **06** ① **07** ① **08** $3\sqrt{3}$

09 ③ **10** ③ **11** ④ **12** $x=-4$ 또는 $x=4$

13 $x=1$ 또는 $x=2$ **14** ③ **15** 14 cm **16** ③ **17** -3

18 ① **19** ② **20** 2 **21** ⑤ **22** ②

23 서로 다른 두 허근 **24** 서로 다른 두 허근 **25** ①

26 서로 다른 두 실근 **27** 예각삼각형 **28** $\sqrt{5}b$ **29** ①

30 ④

W 36쪽 10 이차방정식의 근과 계수의 관계

01 (1) -2 (2) $\frac{1}{3}$ (3) -5

02 (1) $x^2+2x-8=0$ (2) $x^2-4x+1=0$ (3) $x^2-6x+10=0$

03 (1) $(x+1-\sqrt{2}i)(x+1+\sqrt{2}i)$ (2) $2\left(x-\frac{1+\sqrt{31}i}{4}\right)\left(x-\frac{1-\sqrt{31}i}{4}\right)$

04 (1) $2-3i$ (2) $a=-4$, $b=13$ **05** 30 **06** ③ **07** ②

08 ① **09** 16 **10** -76 **11** -3 **12** ④ **13** ②

14 10 **15** ② **16** $\frac{22}{3}$ **17** ② **18** ⑤

19 $x^2-9x+20=0$ **20** -12 **21** ⑤ **22** $x^2+2x+11=0$

23 합: 4, 곱: 12 **24** ④ **25** $\frac{1}{3}$ **26** 합: 6, 곱: 11

27 ⑤ **28** -4 **29** 1 **30** $x^2-2x+\frac{7}{3}$ **31** 1

32 $x=-2$ 또는 $x=0$ **33** ①

05 이차방정식과 이차함수

W 41쪽 11 이차방정식과 이차함수

01 (1) $(2, 0)$, $x=2$ (2) $(-6, -5)$, $x=-6$ (3) $(-1, -11)$, $x=-1$

(4) $(-4, 5)$, $x=-4$

02 (1) 2 (2) 0 **03** (1) $k<1$ (2) 1 (3) $k>1$

04 (1) 서로 다른 두 점에서 만난다. (2) 만나지 않는다.

05 (1) $k>\frac{3}{4}$ (2) $\frac{3}{4}$ (3) $k<\frac{3}{4}$ **06** ③ **07** 46 **08** 2

09 9 **10** 1 **11** 4 **12** ② **13** ③ **14** ②

15 -2 **16** -5 **17** $-\frac{3}{2}$ **18** ② **19** ③ **20** $\frac{1}{2}$

21 ③

W 44쪽 12 이차함수의 최대, 최소

01 (1) 최솟값: 4, $x=2$ (2) 최댓값: -5, $x=-6$

02 (1) 최솟값: $-\frac{17}{4}$ (2) 최솟값: 7 (3) 최댓값: 6 (4) 최댓값: -4

03 (1) 최댓값: 0, 최솟값: -4 (2) 최댓값: 3, 최솟값: -3

(3) 최댓값: $\frac{7}{2}$, 최솟값: $\frac{3}{2}$ (4) 최댓값: 6, 최솟값: 2

04 ③ **05** 7 **06** -5, 2 **07** ③ **08** 4 **09** 0

10 12 **11** ② **12** 2 **13** ⑤ **14** 7 **15** ③

16 ① **17** -3 **18** ③ **19** 20 **20** 225 cm²

06 여러 가지 방정식

W 47쪽 13 삼차방정식과 사차방정식

01 (1) $x=0$ 또는 $x=1$ 또는 $x=3$

(2) $x=-2$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=5$

(3) $x=-4$ 또는 $x=-2$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=1$

02 (1) $x=\pm 2i$ 또는 $x=\pm\sqrt{3}$ (2) $x=-1\pm\sqrt{2}$ 또는 $x=1\pm\sqrt{2}$

(3) $x=\frac{-5\pm\sqrt{21}}{2}$ 또는 $x=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$

(4) $x=-2$ 또는 $x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$

03 ① **04** -8 **05** ⑤ **06** ② **07** ② **08** 13

09 ② **10** $-2\sqrt{5}$ **11** -6 **12** ① **13** ② **14** -4

15 -6 **16** ③ **17** $\frac{1}{3}$ **18** ① **19** $\frac{20}{9}$ **20** ①

21 3 **22** ② **23** ②

W 51쪽 14 삼차방정식의 근의 성질

01 (1) -3, -5, 2 (2) 2, $\frac{4}{3}$, 0 **02** $x^3-2x^2-3x+6=0$

03 (1) $-1-3i$, 1 (2) $a=8$, $b=-10$ **04** (1) -1 (2) -1 (3) 1 (4) -1

05 -1 **06** 1 **07** ① **08** $x^3-4x^2-7x-4=0$ **09** ③

10 3 **11** ① **12** ③ **13** ④ **14** 50

W 53쪽 **15** 연립이차방정식

01 (1) $\begin{cases} x=\frac{17}{5} \\ y=-\frac{4}{5} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-5 \\ y=2 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-1 \\ y=-1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=4 \\ y=2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-4 \\ y=-2 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x=3 \\ y=5 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=5 \\ y=3 \end{cases}$

02 -1 **03** $a=-5$, $b=9$ **04** 8, 9 **05** ② **06** ①

07 $\begin{cases} x=4 \\ y=6 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=6 \\ y=4 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-6 \\ y=-4 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-4 \\ y=-6 \end{cases}$ **08** ①

09 $\frac{1}{2}$ **10** 1 **11** ④ **12** 12 cm **13** ⑤

07 일차부등식

W 55쪽 **16** 연립일차부등식

01 (1) $a-2b<-b$ (2) $a^2>ab$

02 (1) $x>-11$ (2) $x\geq 0$ (3) $x<1$ (4) $x\geq -7$

03 풀이 152쪽 **04** (1) $3\leq x<4$ (2) $1<x\leq \frac{9}{2}$ (3) $x>4$ (4) $x\leq 2$

05 ② **06** ㄱ, ㄷ **07** $x<a+2b$ **08** $x>4$ **09** ①

10 ③ **11** -1 **12** ⑤ **13** ②

W 57쪽 **17** 여러 가지 부등식

01 (1) $x=4$ (2) 해는 없다. (3) $x=2$ (4) 해는 없다.

02 (1) $3\leq x<4$ (2) $2\leq x\leq 9$

03 (1) $x\leq -\frac{10}{3}$ 또는 $x\geq -2$ (2) $3<x<9$ **04** ③ **05** ④

06 -3 **07** ⑤ **08** 13 **09** 16 **10** ④ **11** -3

12 ⑤ **13** $a<-5$ **14** ② **15** 7 **16** $-\frac{3}{2}\leq a<-1$

17 ⑤ **18** $\frac{45}{2}<x<45$ **19** 16명 이상 19명 이하 **20** ②

21 2 **22** ② **23** -28 **24** ③ **25** $a\leq 6$ **26** ④

27 ① **28** $x>-1$

08 이차부등식

W 61쪽 **18** 이차부등식

01 ㄱ, ㄹ **02** (1) $x<-6$ 또는 $x>-1$ (2) $-5\leq x\leq 1$

03 (1) $-2<x<4$ (2) $x=-3$ (3) $x\neq 7$인 모든 실수 (4) 해는 없다.

04 (1) $x^2+x-2\leq 0$ (2) $x^2-6x+9>0$

05 (1) $-\frac{3}{4}\leq k\leq 1$ (2) $-2\leq k\leq 3$ **06** $x\leq a$ 또는 $x\geq c$

07 $x<-3$ 또는 $-1<x<1$ 또는 $x>2$ **08** ① **09** 4

10 ② **11** -14 **12** ④ **13** $\frac{1}{3}<x<2$ **14** ④

15 $-1\leq x\leq 1$ **16** ③ **17** -2 **18** ③ **19** ①

20 8 **21** $k>-\frac{1}{4}$ **22** ⑤

23 $-1<a<3$ 또는 $a>3$ **24** $0<a<16$ **25** ⑤

26 ① **27** 20 **28** 10 **29** -2 **30** $1<k<8$

31 ② **32** ① **33** ③ **34** -18 **35** $-7<k<-3$

36 ③ **37** ③ **38** 10만 원 이상 13만 원 이하 **39** $\frac{2}{5}$초

40 ④

W 67쪽 **19** 연립이차부등식

01 (1) $x<-\frac{3}{2}$ (2) 해는 없다.

02 (1) $-2\leq x\leq 0$ 또는 $2\leq x\leq 4$ (2) $x<-6$ 또는 $x>3$

03 4 **04** -2 **05** ④ **06** ① **07** $a\leq 3$ **08** ②

09 $-2<k\leq -1$ **10** $1\leq a<2$ 또는 $6<a\leq 7$ **11** ②

12 10 **13** 4000원 이상 4500원 이하

W 69쪽 **20** 이차방정식의 실근의 부호

01 $-5<k\leq -4$ **02** $k<\frac{3}{2}$ **03** $-11<k\leq 7$

04 $-1<k<5$ **05** ③ **06** 3 **07** ⑤

08 $-1<k\leq -\frac{2}{3}$ **09** ④ **10** ⑤ **11** ① **12** ④

13 -3

09 평면좌표

W 71쪽 **21** 두 점 사이의 거리

01 (1) 2 (2) 11 **02** 4 **03** (1) 5 (2) 10 (3) $2\sqrt{6}$

04 -19, 15 **05** -7 **06** ② **07** 5 **08** ③

09 $20\sqrt{5}$ m **10** $(0, 2)$ **11** $5\sqrt{2}$ **12** ② **13** ①

14 ② **15** $4\sqrt{3}$ **16** ⑤ **17** 5 **18** ④ **19** $(1, 2)$

20 ② **21** (가) D (나) $(-2c, 0)$ (다) $3(a^2+b^2+2c^2)$ (라) $a^2+b^2+2c^2$

22 풀이 167쪽

W 74쪽 **22** 선분의 내분점과 외분점

01 (1) 0 (2) $\frac{3}{2}$ (3) 14

02 (1) $\left(-\frac{1}{2}, 4\right)$ (2) $(1, 3)$ (3) $(10, -3)$

03 (1) $a=-5$, $b=14$ (2) $a=-4$, $b=-8$ **04** (가) 점 F (나) 점 A

05 ⑤ **06** ④ **07** $\frac{17}{2}$ **08** ① **09** ②

10 $(13, -7)$ **11** ③ **12** 7 **13** $(-2, -2)$

14 $(-10, 13)$, $(2, 1)$ **15** 58 **16** ④ **17** $(1, 3)$

18 ③ **19** $(5, -4)$ **20** ② **21** ② **22** $\frac{\sqrt{58}}{2}$

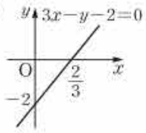
10 직선의 방정식

W 77쪽 23 직선의 방정식

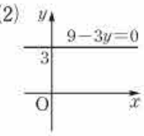
01 (1) $y=\sqrt{3}x-2$ (2) $x=3$ (3) $x=-6$

02 (1) $y=2x+3$ (2) $\frac{x}{4}-\frac{y}{5}=1$

03 (1)



(2)



04 $(-2, 1)$

05 $11x-4y+1=0$ **06** ① **07** $(-3, 8)$ **08** ③ **09** ②

10 5 **11** $y=-5x+3$ **12** ④ **13** -15 **14** ③

15 $y=3x+2$ **16** ④ **17** 1 **18** $\frac{6}{5}$ **19** ①

20 -1 **21** ② **22** 제1사분면, 제3사분면 **23** ④

24 제4사분면 **25** -1 **26** ② **27** $\frac{4}{3}$

28 $-1<m<\frac{1}{5}$ **29** ① **30** ②

W 82쪽 24 두 직선의 평행과 수직

01 (1) -2 (2) -6 **02** $y=4x+10$ **03** ④ **04** $\frac{1}{2}$

05 ④ **06** ⑤ **07** ① **08** $-\frac{8}{3}$ **09** $y=-\frac{1}{6}x+\frac{4}{3}$

10 $y=3x-4$ **11** $(2, 0)$ **12** $y=-3x+16$ **13** ③

W 84쪽 25 점과 직선 사이의 거리

01 (1) $\frac{7}{13}$ (2) $6\sqrt{2}$ **02** 4 **03** (1) $\sqrt{13}$ (2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

04 $(0, -2)$, $(0, 8)$ **05** ④ **06** $y=-3x$, $y=\frac{1}{3}x$ **07** ④

08 $\frac{5}{4}$ **09** ④ **10** ② **11** $2\sqrt{5}$ **12** 18 **13** ①

14 ② **15** $5x+7y-1=0$

11 원의 방정식

W 86쪽 26 원의 방정식

01 (1) $(x+5)^2+(y-4)^2=9$ (2) $x^2+y^2=49$ (3) $(x-3)^2+(y+1)^2=10$

02 (1) $(x-2)^2+(y+6)^2=36$ (2) $(x+7)^2+(y+4)^2=49$
(3) $(x-5)^2+(y+5)^2=25$

03 $k<5$ **04** $6x-4y+7=0$ **05** -4 **06** ③

07 $(x+1)^2+(y-6)^2=45$ **08** $x^2+(y-1)^2=13$ **09** ①

10 ④ **11** 14 **12** ① **13** 10π **14** ④ **15** 9

16 $(x+5)^2+(y-6)^2=25$ **17** ③ **18** $(x-2)^2+(y-2)^2=4$

19 ④ **20** ㄱ, ㄴ, ㄹ **21** ① **22** $-\frac{3}{4}$, 1

23 $(x+3)^2+(y-6)^2=36$ **24** $y=2x+3$

25 ⑤ **26** ④ **27** 5 **28** ② **29** ④ **30** 20

31 ⑤ **32** 2 **33** 18π **34** ④ **35** 2 **36** -8

37 ④

W 92쪽 27 원과 직선의 위치 관계

01 (1) 서로 다른 두 점에서 만난다. (2) 만나지 않는다.

02 (1) 서로 다른 두 점에서 만난다. (2) 한 점에서 만난다. (접한다.)

03 (1) $-2\sqrt{13}<k<2\sqrt{13}$ (2) $\pm2\sqrt{13}$ (3) $k<-2\sqrt{13}$ 또는 $k>2\sqrt{13}$

04 5 **05** $m<-\sqrt{2}$ 또는 $m>\sqrt{2}$ **06** ② **07** ④

08 ① **09** 9π **10** ⑤ **11** -2 **12** $\frac{37}{4}\pi$ **13** ④

14 $\sqrt{23}$ **15** ② **16** $20\sqrt{3}$ **17** ③ **18** ②

19 $k<-14$ 또는 $k>6$ **20** ② **21** ④ **22** 14

W 95쪽 28 원의 접선의 방정식

01 (1) $y=5x\pm3\sqrt{26}$ (2) $y=-4x\pm17$

02 (1) $3x-2y=13$ (2) $4x+3y=-25$

03 $x-2y=5$, $2x+y=5$ **04** ③ **05** -1 **06** ⑤

07 -6 **08** $y=\frac{5}{2}x-\frac{29}{2}$ **09** ⑤ **10** ④ **11** 2

12 ③

12 도형의 이동

W 97쪽 29 평행이동

01 (1) $(-7, 8)$ (2) $(6, -9)$ **02** $(3, 9)$

03 (1) $3x-y+3=0$ (2) $(x+7)^2+(y+3)^2=6$ (3) $y=x^2-4x-8$

04 $(x+3)^2+(y-6)^2=10$ **05** ① **06** $\sqrt{29}$ **07** ④

08 6 **09** 5 **10** $\frac{3}{2}$ **11** ② **12** ② **13** ⑤

14 -8 **15** ③ **16** 6

W 99쪽 30 대칭이동

01 (1) $(5, 9)$ (2) $(-5, -9)$ (3) $(-5, 9)$ (4) $(-9, 5)$ **02** $(7, -4)$

03 (1) $(x+2)^2+(y+6)^2=3$ (2) $(x-2)^2+(y-6)^2=3$
(3) $(x-2)^2+(y+6)^2=3$ (4) $(x-6)^2+(y+2)^2=3$

04 $3x-y-1=0$ **05** $(-7, 6)$ **06** $(5, -4)$

07 ③ **08** ① **09** ② **10** 제4사분면 **11** ⑤

12 ② **13** 1 **14** 1 **15** 2 **16** ②

17 $3x+2y=0$ **18** $(-3, 0)$, $(3, 0)$ **19** ③ **20** -3

21 ① **22** ② **23** 7 **24** ② **25** ② **26** ②

27 ④ **28** $\frac{3}{8}$ **29** 5 **30** 6 **31** ⑤ **32** $\sqrt{3}$

33 ② **34** ④ **35** ④ **36** $\sqrt{34}$

Lecture Book

01 다항식의 연산

01 다항식의 덧셈과 뺄셈

Lecture 01 다항식의 덧셈과 뺄셈 6쪽

1-1 답 (1) $-7x^3-x^2+2x+9$
(2) $9+2x-x^2-7x^3$

1-2 답 (1) $2y^2+y+9+3xy-5x^2+x^3$
(2) $2y^2+(3x+1)y+x^3-5x^2+9$

x에 대하여 정리할 때, x가 아닌 문자로 이루어진 항은 상수항으로 생각한다.

2-1 (2) $(x^2-2xy-3y^2)-(x^2-4xy+2y^2)$
$=x^2-2xy-3y^2-x^2+4xy-2y^2$
$=2xy-5y^2$
답 (1) $4x^3+x^2-x+1$ (2) $2xy-5y^2$

2-2 (1) $A+B$
$=(x^3-2x^2+3x-4)+(5x^2-3x-1)$
$=x^3+3x^2-5$
(2) $2A-B$
$=2(x^3-2x^2+3x-4)-(5x^2-3x-1)$
$=2x^3-4x^2+6x-8-5x^2+3x+1$
$=2x^3-9x^2+9x-7$
답 (1) x^3+3x^2-5 (2) $2x^3-9x^2+9x-7$

기본+표준 유형 Q+Q 7쪽

01 ④ $x^4+x^3-2x^2-2$ 답 ④

내림차순으로 정리 ➡ 차수가 점점 낮아진다.

02 ① $x^3+2x^2y-xy^3+y+1$
② $2x^2y^3+y^2-xy+x^2+5$
④ $2a^2+(-b+3)a-3b^3-7b+3$
⑤ $(a-1)b^2+(2a-3)b+a^2-a+4$
답 ③

03 $(3A-4B)-(2A-B)$
$=3A-4B-2A+B$
$=A-3B$
$=x^3-4x^2+3x-6-3(x^3+x^2-2)$
$=x^3-4x^2+3x-6-3x^3-3x^2+6$
$=-2x^3-7x^2+3x$
답 ②

먼저 주어진 식을 간단히 정리한 후 두 다항식 A, B를 대입하여 동류항끼리 정리한다.

04 $(A+3B)-(2A-C)$
$=A+3B-2A+C$
$=-A+3B+C$
$=-(x^3-x^2+2)+3(-x^3+3x+7)+(2x^2-x+4)$
$=-x^3+x^2-2-3x^3+9x+21+2x^2-x+4$
$=-4x^3+3x^2+8x+23$
따라서 $a=-4$, $b=3$, $c=8$, $d=23$이므로
$a+b+c+d=30$ 답 30

05 $2X-B=-A+3B$에서
$2X=-A+4B$
$\therefore X=-\frac{1}{2}A+2B$
$=-\frac{1}{2}(-4x^2+6xy+4y^2)$
$+2\left(\frac{1}{2}x^2-2xy+\frac{1}{2}y^2\right)$
$=2x^2-3xy-2y^2+x^2-4xy+y^2$
$=3x^2-7xy-y^2$
답 $3x^2-7xy-y^2$

06 $A+B=-3x^2+4xy-3y^2$ …… ㉠
$A-B=x^2-3y^2$ …… ㉡
㉠+㉡을 하면
$2A=-2x^2+4xy-6y^2$
$\therefore A=-x^2+2xy-3y^2$
이것을 ㉠에 대입하면
$-x^2+2xy-3y^2+B=-3x^2+4xy-3y^2$
$\therefore B=-3x^2+4xy-3y^2-(-x^2+2xy-3y^2)$
$=-3x^2+4xy-3y^2+x^2-2xy+3y^2$
$=-2x^2+2xy$
답 $A=-x^2+2xy-3y^2$, $B=-2x^2+2xy$

07 $2A+B=4x^2+9xy-3y^2$ …… ㉠
$-A+3B=5x^2-8xy+5y^2$ …… ㉡
㉠$+2\times$㉡을 하면
$7B=14x^2-7xy+7y^2$
$\therefore B=2x^2-xy+y^2$
이것을 ㉠에 대입하면
$2A+2x^2-xy+y^2=4x^2+9xy-3y^2$
$2A=4x^2+9xy-3y^2-(2x^2-xy+y^2)$
$=4x^2+9xy-3y^2-2x^2+xy-y^2$
$=2x^2+10xy-4y^2$
$\therefore A=x^2+5xy-2y^2$
$\therefore B-A=2x^2-xy+y^2-(x^2+5xy-2y^2)$
$=2x^2-xy+y^2-x^2-5xy+2y^2$
$=x^2-6xy+3y^2$
답 $x^2-6xy+3y^2$

02 다항식의 곱셈

Lecture 02 다항식의 곱셈 8쪽

1-1 (2) $(x+y)(2x-3y)=2x^2-3xy+2xy-3y^2$
$=2x^2-xy-3y^2$
(3) $(a+1)(3a^2-5a+2)$
$=3a^3-5a^2+2a+3a^2-5a+2$
$=3a^3-2a^2-3a+2$
(4) $(a-1)(a+2)(a+3)$
$=(a^2+2a-a-2)(a+3)$
$=(a^2+a-2)(a+3)$
$=a^3+3a^2+a^2+3a-2a-6$
$=a^3+4a^2+a-6$
답 (1) $2x^3-3x^2+4x$　(2) $2x^2-xy-3y^2$
(3) $3a^3-2a^2-3a+2$　(4) a^3+4a^2+a-6

1-2 답 분배법칙, 교환법칙, 결합법칙, 분배법칙

2-1 $(x+y+2)(5x-2y+1)$의 전개식에서
(1) x항은　$x\cdot1+2\cdot5x=11x$
따라서 x의 계수는 11이다.
(2) xy항은　$x\cdot(-2y)+y\cdot5x=3xy$
따라서 xy의 계수는 3이다.
답 (1) 11　(2) 3

주어진 식을 전개하면
$5x^2+3xy-2y^2+11x-3y+2$

모든 항을 전개하지 않고 x항이 나오는 경우만 계산한다.

2-2 (1) $(x+3y-6)(2x+5y+7)$의 전개식에서 y항은
$3y\cdot7-6\cdot5y=-9y$
따라서 y의 계수는 -9이다.
(2) $(x^2+2x-3)(3x^2+4x+6)$의 전개식에서 x^3항은
$x^2\cdot4x+2x\cdot3x^2=10x^3$
따라서 x^3의 계수는 10이다.
답 (1) -9　(2) 10

Lecture 03 곱셈 공식 9쪽

1-1 답 (1) x^2-4x+4
(2) x^2-16
(3) $x^2-2x-35$
(4) $6x^2-7x-5$
(5) $x^2+y^2+2xy+12x+12y+36$
(6) $27x^3-27x^2+9x-1$
(7) x^3+8
(8) x^3-2x^2-5x+6
(9) $x^3-y^3+z^3+3xyz$
(10) x^4+9x^2+81

1-2 (1) $(a+b)^2(a-b)^2=\{(a+b)(a-b)\}^2$
$=(a^2-b^2)^2$
$=a^4-2a^2b^2+b^4$
(2) $(a+b)(a-b)(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$
$=\{(a+b)(a^2-ab+b^2)\}\{(a-b)(a^2+ab+b^2)\}$
$=(a^3+b^3)(a^3-b^3)$
$=a^6-b^6$
답 (1) $a^4-2a^2b^2+b^4$　(2) a^6-b^6

2-1 $(x+y)(x-y)=x^2-y^2$
$=(2\sqrt{3})^2-(\sqrt{7})^2=5$　답 5

2-2 $(x-y)^3=x^3-3x^2y+3xy^2-y^3$
$=x^3-y^3-3xy(x-y)$
$=10-3\cdot(-7)=31$　답 31

Lecture 04 곱셈 공식의 변형 10쪽

1-1 (1) $x^2+y^2=(x-y)^2+2xy$
$=(-3)^2+2\cdot2=13$
(2) $(x-y)^2=(x+y)^2-4xy$
$=2^2-4\cdot(-1)=8$
(3) $x^3-y^3=(x-y)^3+3xy(x-y)$
$=1^3+3\cdot(-6)\cdot1=-17$
(4) $x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)$
$=5^2-2\cdot12=1$
답 (1) 13　(2) 8　(3) -17　(4) 1

1-2 $x+y=(\sqrt{3}-1)+(\sqrt{3}+1)=2\sqrt{3}$,
$xy=(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)=2$
(1) $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$
$=(2\sqrt{3})^2-2\cdot2=8$
(2) $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$
$=(2\sqrt{3})^3-3\cdot2\cdot2\sqrt{3}=12\sqrt{3}$
답 (1) 8　(2) $12\sqrt{3}$

2-1 (1) $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=4^2-2=14$
(2) $\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4=4^2-4=12$
답 (1) 14　(2) 12

쌤 한마디

곱셈 공식을 변형한 다음 식
$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=(a-b)^2+2ab$,
$(a+b)^2=(a-b)^2+4ab$,
$(a-b)^2=(a+b)^2-4ab$
에 a 대신 x를, b 대신 $\frac{1}{x}$을 대입하면
$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2$,
$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+4$,
$\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4$

2-2 (1) $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2$

$=5^2+2=27$

(2) $x^3-\frac{1}{x^3}=\left(x-\frac{1}{x}\right)^3+3\left(x-\frac{1}{x}\right)$

$=5^3+3\cdot5=140$

답 (1) 27 (2) 140

기본+표준 유형 Q+Q

ⓛ 11쪽

01 $(x+2y)(3x+y)-(3x^2-2xy+y^2)$

$=3x^2+7xy+2y^2-3x^2+2xy-y^2$

$=9xy+y^2$ 답 ⑤

02 $AC-AB$

$=(x+1)(x^2-4x+3)-(x+1)(x^3+2x-4)$

$=(x^3-3x^2-x+3)-(x^4+x^3+2x^2-2x-4)$

$=x^3-3x^2-x+3-x^4-x^3-2x^2+2x+4$

$=-x^4-5x^2+x+7$ 답 $-x^4-5x^2+x+7$

다른 풀이 $AC-AB$

$=A(C-B)$

$=(x+1)\{(x^2-4x+3)-(x^3+2x-4)\}$

$=(x+1)(-x^3+x^2-6x+7)$

$=-x^4-5x^2+x+7$

03 $(x^3+3x^2-2x+1)(x+1)$의 전개식에서 x^3항은

$x^3\cdot1+3x^2\cdot x=4x^3$

따라서 x^3의 계수는 4이다. 답 4

04 $(3x^2+x+k)(x^2-2x-4)$의 전개식에서 x^2항은

$3x^2\cdot(-4)+x\cdot(-2x)+k\cdot x^2=(k-14)x^2$

이때 x^2의 계수가 -18이므로

$k-14=-18$ $\therefore k=-4$ 답 ①

05 $(2+x)^3+(2-x)^3$

$=8+12x+6x^2+x^3+8-12x+6x^2-x^3$

$=16+12x^2$

$=16+12\cdot5=76$ 답 ③

06 $(x^2-4)(x^2+2x+4)(x^2-2x+4)$

$=(x+2)(x-2)(x^2+2x+4)(x^2-2x+4)$

$=\{(x+2)(x^2-2x+4)\}\{(x-2)(x^2+2x+4)\}$

$=(x^3+8)(x^3-8)$

$=x^6-64$ 답 ①

07 $(3a+2b-c)^2$

$=9a^2+4b^2+c^2+2(6ab-2bc-3ca)$

$=49+2\cdot4=57$ 답 57

Q BOX

상수항끼리 더한 값이 같아지도록 다항식을 2개씩 짝 지어 전개한다.

$(x+y)^2$
$=x^2+2xy+y^2$
에서
x^2+y^2
$=(x+y)^2-2xy$

$x^2-2x+1=0$에 $x=0$을 대입하면 $1\neq0$이므로
$x\neq0$

08 $x-2y=t$로 놓으면

(주어진 식)$=\{(x-2y)-z\}\{(x-2y)+z\}$

$=(t-z)(t+z)$

$=t^2-z^2$

$=(x-2y)^2-z^2$

$=x^2+4y^2-z^2-4xy$

답 $x^2+4y^2-z^2-4xy$

09 $(x+5)(x+4)(x-2)(x-3)$

$=\{(x+5)(x-3)\}\{(x+4)(x-2)\}$

$=(x^2+2x-15)(x^2+2x-8)$

$x^2+2x=t$로 놓으면

(주어진 식)$=(t-15)(t-8)$

$=t^2-23t+120$

$=(x^2+2x)^2-23(x^2+2x)+120$

$=x^4+4x^3+4x^2-23x^2-46x+120$

$=x^4+4x^3-19x^2-46x+120$

답 ④

10 $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$에서

$10=4^2-2xy,\quad 2xy=6$

$\therefore xy=3$

$\therefore x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$

$=4^3-3\cdot3\cdot4=28$ 답 ④

11 $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\frac{x^2+y^2}{xy}$ ······ ㉠

이때

$x+y=(\sqrt{2}+1)+(\sqrt{2}-1)=2\sqrt{2}$,

$xy=(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)=1$

이므로

$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$

$=(2\sqrt{2})^2-2\cdot1=6$

따라서 ㉠에서 구하는 값은

$\frac{6}{1}=6$ 답 ①

다른 풀이 $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}+\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$

$=\frac{(\sqrt{2}+1)^2+(\sqrt{2}-1)^2}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}$

$=\frac{(2+2\sqrt{2}+1)+(2-2\sqrt{2}+1)}{2-1}$

$=6$

12 $x^3-\frac{1}{x^3}=\left(x-\frac{1}{x}\right)^3+3\left(x-\frac{1}{x}\right)$

$=(-3)^3+3\cdot(-3)=-36$ 답 -36

13 $x\neq0$이므로 $x^2-2x+1=0$의 양변을 x로 나누면

$x-2+\frac{1}{x}=0$ $\therefore x+\frac{1}{x}=2$

$\therefore x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2$

$=2^2-2=2$ 답 ①

쌤 한마디

$x^2-px\pm1=0$ (p는 상수)의 양변을 x로 나누면

$x-p\pm\dfrac{1}{x}=0 \qquad \therefore x\pm\dfrac{1}{x}=p$

14 $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$에서

$20=4^2-2(ab+bc+ca)$

$2(ab+bc+ca)=-4$

$\therefore ab+bc+ca=-2$

$\therefore \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{ab+bc+ca}{abc}$

$=\dfrac{-2}{-2}=1$ 　답 1

15 $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$

$=a^2-2ab+b^2+b^2-2bc+c^2+c^2-2ca+a^2$

$=2(a^2+b^2+c^2)-2(ab+bc+ca)$ ⋯⋯ ㉠

이때 $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$에서

$37=7^2-2(ab+bc+ca)$

$2(ab+bc+ca)=12$

$\therefore ab+bc+ca=6$

따라서 ㉠에서 구하는 값은

$2\cdot37-2\cdot6=62$ 　답 ⑤

16 $99\times10101=(100-1)(100^2+100+1)$

$=100^3-1$

$=999999$ 　답 ②

17 $(4+3)(4^2+3^2)(4^4+3^4)$

$=(4-3)(4+3)(4^2+3^2)(4^4+3^4)$

$=(4^2-3^2)(4^2+3^2)(4^4+3^4)$

$=(4^4-3^4)(4^4+3^4)$

$=4^8-3^8=2^{16}-3^8$ 　답 ②

18 직사각형의 가로의 길이를 a, 세로의 길이를 b라 하면 직사각형의 넓이는 ab이다.

직사각형의 대각선의 길이가 12이므로

$a^2+b^2=12^2=144$

또 직사각형의 둘레의 길이가 32이므로

$2(a+b)=32 \qquad \therefore a+b=16$

이때 $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$에서

$144=16^2-2ab, \qquad 2ab=112$

$\therefore ab=56$

따라서 직사각형의 넓이는 56이다. 　답 ④

19 직육면체의 밑면의 가로의 길이를 a, 세로의 길이를 b, 높이를 c라 하면 직육면체의 대각선의 길이는 $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$이다.

직육면체의 겉넓이가 14이므로

$2(ab+bc+ca)=14$

Q BOX

직육면체는 길이가 같은 모서리가 4개씩 있다.

$(x-1)(3x^2+x+6)+7$
$=3x^3+x^2+6x-3x^2-x-6+7$
$=3x^3-2x^2+5x+1$
임을 확인할 수 있다.

$4+3$
$=1\cdot(4+3)$
$=(4-3)(4+3)$

내림차순으로 정리한다.

또 모든 모서리의 길이의 합이 24이므로

$4(a+b+c)=24 \qquad \therefore a+b+c=6$

$\therefore a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$

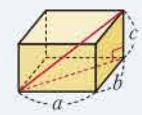
$=6^2-14=22$

따라서 직육면체의 대각선의 길이는 $\sqrt{22}$이다.

답 $\sqrt{22}$

쌤 한마디

오른쪽 직육면체에서 겉넓이와 대각선의 길이는 다음과 같이 나타낼 수 있다.



① (겉넓이)

$=$(밑넓이)$\cdot2+$(옆넓이)

$=2ab+c(2a+2b)$

$=2(ab+bc+ca)$

② (대각선의 길이)

$=\sqrt{(\text{밑면의 대각선의 길이})^2+(\text{높이})^2}$

$=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

03 다항식의 나눗셈

Lecture 05 다항식의 나눗셈 　L 14쪽

1-1 답 (1) 2, $-2x^2-6x$, 몫: x^2-2x, 나머지: 7

(2) 3, $2x^3+2x^2-2x$, $3x^2+3x-3$, $-x+2$, 몫: $2x+3$, 나머지: $-x+2$

1-2 (1)

$$\begin{array}{r} 3x^2+x+6 \\ x-1\overline{\big)\,3x^3-2x^2+5x+1} \\ \underline{3x^3-3x^2} \\ x^2+5x \\ \underline{x^2-x} \\ 6x+1 \\ \underline{6x-6} \\ 7 \end{array}$$

(2)

$$\begin{array}{r} -4x^2+2x+3 \\ 2x^2+x+1\overline{\big)\,-8x^4+4x^2+x-2} \\ \underline{-8x^4-4x^3-4x^2} \\ 4x^3+8x^2+x \\ \underline{4x^3+2x^2+2x} \\ 6x^2-x-2 \\ \underline{6x^2+3x+3} \\ -4x-5 \end{array}$$

답 (1) 몫: $3x^2+x+6$, 나머지: 7

(2) 몫: $-4x^2+2x+3$, 나머지: $-4x-5$

2-1

$$\begin{array}{r} 2x^2-2x+4 \\ 2x^2+2x-1\overline{\big)\,4x^4+2x^2+2x-8} \\ \underline{4x^4+4x^3-2x^2} \\ -4x^3+4x^2+2x \\ \underline{-4x^3-4x^2+2x} \\ 8x^2-8 \\ \underline{8x^2+8x-4} \\ -8x-4 \end{array}$$

따라서 $Q=2x^2-2x+4$, $R=-8x-4$이므로

$4x^4+2x^2+2x-8$
$=(2x^2+2x-1)(2x^2-2x+4)-8x-4$

답 $Q=2x^2-2x+4$, $R=-8x-4$,
$4x^4+2x^2+2x-8$
$=(2x^2+2x-1)(2x^2-2x+4)-8x-4$

2-2 $P(x)=(x^2-2)(2x+1)+x$
$=2x^3+x^2-4x-2+x$
$=2x^3+x^2-3x-2$ 답 $2x^3+x^2-3x-2$

기본+표준 유형 Q+Q

15쪽

01

$$\begin{array}{r} x+3 \\ x^2+3x-1\overline{)\,x^3+6x^2+7x+2} \\ \underline{x^3+3x^2-x} \\ 3x^2+8x+2 \\ \underline{3x^2+9x-3} \\ -x+5 \end{array}$$

따라서 몫은 $x+3$, 나머지는 $-x+5$이므로

$a=1$, $b=3$, $c=-1$, $d=5$

$\therefore ab+cd=-2$ 답 -2

02

$$\begin{array}{r} 3x+5 \\ x^2-2x+1\overline{)\,3x^3-x^2+7} \\ \underline{3x^3-6x^2+3x} \\ 5x^2-3x+7 \\ \underline{5x^2-10x+5} \\ 7x+2 \end{array}$$

따라서 $7x+2=7x+k$이므로

$k=2$ 답 ②

03 $x^3+3x^2-6x+1=A(x+1)+9$이므로

$A(x+1)=x^3+3x^2-6x-8$

$\therefore A=(x^3+3x^2-6x-8)\div(x+1)$

$$\begin{array}{r} x^2+2x-8 \\ x+1\overline{)\,x^3+3x^2-6x-8} \\ \underline{x^3+x^2} \\ 2x^2-6x \\ \underline{2x^2+2x} \\ -8x-8 \\ \underline{-8x-8} \\ 0 \end{array}$$

$\therefore A=x^2+2x-8$ 답 ④

04 $P(x)=(x+2)(5x-3)+3=5x^2+7x-3$이므로

$$\begin{array}{r} 5x+12 \\ x-1\overline{)\,5x^2+7x-3} \\ \underline{5x^2-5x} \\ 12x-3 \\ \underline{12x-12} \\ 9 \end{array}$$

따라서 $P(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 몫은 $5x+12$, 나머지는 9이다. 답 몫: $5x+12$, 나머지: 9

05

$$\begin{array}{r} 3x+4 \\ x^2-2x+b\overline{)\,3x^3-2x^2+ax+16} \\ \underline{3x^3-6x^2+3bx} \\ 4x^2+(a-3b)x+16 \\ \underline{4x^2-8x+4b} \\ (a-3b+8)x+16-4b \end{array}$$

이때 나머지가 0이어야 하므로

$a-3b+8=0$, $16-4b=0$

따라서 $a=4$, $b=4$이므로

$a+b=8$ 답 8

06 $P(x)$를 $x-\frac{1}{4}$로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 R이므로

$P(x)=\left(x-\frac{1}{4}\right)Q(x)+R$
$=\frac{1}{4}(4x-1)Q(x)+R$
$=(4x-1)\cdot\frac{1}{4}Q(x)+R$

따라서 $P(x)$를 $4x-1$로 나누었을 때의 몫은 $\frac{1}{4}Q(x)$, 나머지는 R이다. 답 ①

07 $P(x)$를 $2x+3$으로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 R이므로

$P(x)=(2x+3)Q(x)+R$
$=2\left(x+\frac{3}{2}\right)Q(x)+R$
$=\left(x+\frac{3}{2}\right)\cdot 2Q(x)+R$

따라서 $P(x)$를 $x+\frac{3}{2}$으로 나누었을 때의 몫은 $2Q(x)$, 나머지는 R이므로

$a=2$, $b=1$ 답 $a=2$, $b=1$

중단원 마무리

16쪽

01 전략 구하는 식을 간단히 한 후 세 다항식 A, B, C를 대입한다.

풀이 $(A+2B)-(B+C)$
$=A+2B-B-C$
$=A+B-C$
$=(x^2-xy+2y^2)+(x^2+xy+y^2)-(x^2-y^2)$
$=x^2-xy+2y^2+x^2+xy+y^2-x^2+y^2$
$=x^2+4y^2$ 답 ③

Q BOX: 주어진 식에 바로 대입하는 것보다 주어진 식을 간단히 정리한 후 대입하는 것이 계산이 더 편리하다.

02 전략 주어진 표에서 첫 번째 줄 가장 왼쪽 칸에 알맞은 다항식을 먼저 구한다.

풀이

A		
$2x-2$	$2x^2+4x$	
$f(x)$		$-x^2+x-3$

앞의 표에서

$A+(2x^2+4x)+(-x^2+x-3)=6x^2+12x$

이므로

$A=(6x^2+12x)-(2x^2+4x)-(-x^2+x-3)$
$=6x^2+12x-2x^2-4x+x^2-x+3$
$=5x^2+7x+3$

이때 $(5x^2+7x+3)+(2x-2)+f(x)=6x^2+12x$이므로

$f(x)=(6x^2+12x)-(5x^2+7x+3)-(2x-2)$
$=6x^2+12x-5x^2-7x-3-2x+2$
$=x^2+3x-1$

$\therefore f(10)=10^2+3\cdot10-1=129$

답 129

03 전략 주어진 두 식을 A, B에 대한 연립방정식으로 생각하여 두 다항식 A, B를 구한다.

풀이 $A+B=x^2+5x-4$ ⋯⋯ ㉠

$2A-B=5x^2+4x+1$ ⋯⋯ ㉡

㉠+㉡을 하면 $3A=6x^2+9x-3$

$\therefore A=2x^2+3x-1$

이것을 ㉠에 대입하면

$(2x^2+3x-1)+B=x^2+5x-4$

$\therefore B=(x^2+5x-4)-(2x^2+3x-1)$
$=x^2+5x-4-2x^2-3x+1$
$=-x^2+2x-3$ ⋯ ❶

$\therefore A+3B=(2x^2+3x-1)+3(-x^2+2x-3)$
$=2x^2+3x-1-3x^2+6x-9$
$=-x^2+9x-10$ ⋯ ❷

따라서 $a=-1$, $b=9$, $c=-10$이므로

$a+b+c=-2$ ⋯ ❸

답 -2

단계	채점 기준	비율
❶	두 다항식 A, B를 구할 수 있다.	50 %
❷	$A+3B$를 계산할 수 있다.	40 %
❸	$a+b+c$의 값을 구할 수 있다.	10 %

04 전략 x^3항은 (상수항)×(x^3항), (x항)×(x^2항), (x^2항)×(x항), (x^3항)×(상수항)에서 나올 수 있으므로 각 다항식에서 이 항들만 선택하여 곱한다.

풀이 $(1+x+x^2+x^3+x^4)^2$

$=(1+x+x^2+x^3+x^4)(1+x+x^2+x^3+x^4)$

이 식의 전개식에서 x^3항은

$1\cdot x^3+x\cdot x^2+x^2\cdot x+x^3\cdot1=4x^3$

따라서 x^3의 계수는 4이다.

답 4

쌤 한마디

$(1+x+x^2+x^3+x^4)^2$을 전개할 때, x^4항은 x^3의 계수에 영향을 주지 않으므로 $(1+x+x^2+x^3)^2$의 전개식에서 x^3의 계수를 구해도 된다.

Q BOX

다음과 같이 x, y의 분모를 유리화하여 $x+y$, xy의 값을 구할 수도 있다.

$x=\dfrac{2-\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}$
$=2-\sqrt{3}$,

$y=\dfrac{2+\sqrt{3}}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}$
$=2+\sqrt{3}$

이므로

$x+y=4$, $xy=1$

상수항의 합 또는 곱이 같은 식끼리 짝 지어 전개하면 공통부분이 생긴다.

05 전략 계수의 부호에 주의하여 곱셈 공식에 대입한다.

풀이 ④ $(x-3y)(x^2+3xy+9y^2)=x^3-27y^3$

답 ④

06 전략 주어진 식을 전개하여 x의 계수를 a에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 $(ax+2)^3+(x-1)^2$

$=a^3x^3+6a^2x^2+12ax+8+x^2-2x+1$
$=a^3x^3+(6a^2+1)x^2+(12a-2)x+9$

따라서 $12a-2=34$이므로 $12a=36$

$\therefore a=3$

답 ②

07 전략 곱셈 공식 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$을 이용한다.

풀이 $(2-x)(2+x)(4+x^2)(16+x^4)$

$=(4-x^2)(4+x^2)(16+x^4)$
$=(16-x^4)(16+x^4)$
$=256-x^8$
$=256-56=200$

답 200

08 전략 먼저 $x+y$, xy의 값을 구한 후 구하는 식을 $x+y$, xy에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 $x+y=\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}$

$=\dfrac{2-\sqrt{3}+2+\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}=4$,

$xy=\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}\cdot\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}$

$=\dfrac{1}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}=1$ ⋯ ❶

이므로

$x^3+x^2y+xy^2+y^3=x^2(x+y)+y^2(x+y)$
$=(x+y)(x^2+y^2)$
$=(x+y)\{(x+y)^2-2xy\}$
$=4\cdot(4^2-2\cdot1)=56$ ⋯ ❷

답 56

단계	채점 기준	비율
❶	$x+y$, xy의 값을 구할 수 있다.	50 %
❷	$x^3+x^2y+xy^2+y^3$의 값을 구할 수 있다.	50 %

09 전략 공통부분이 생기도록 적당히 항을 묶은 후 곱셈 공식을 이용한다.

풀이 $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$

$=\{(x+1)(x+4)\}\{(x+2)(x+3)\}$
$=(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)$

$x^2+5x=t$로 놓으면

(주어진 식)$=(t+4)(t+6)$
$=t^2+10t+24$
$=(x^2+5x)^2+10(x^2+5x)+24$
$=x^4+10x^3+25x^2+10x^2+50x+24$
$=x^4+10x^3+35x^2+50x+24$

따라서 $a=10$, $b=35$, $c=24$이므로

$a-b+c=-1$ 답 ③

10 전략 $x^3-y^3=(x-y)^3+3xy(x-y)$임을 이용하여 먼저 xy의 값을 구한다.

풀이 $x^3-y^3=(x-y)^3+3xy(x-y)$에서

$18=3^3+3xy\cdot3$, $9xy=-9$

$\therefore xy=-1$

$\therefore x^2+y^2=(x-y)^2+2xy$

$=3^2+2\cdot(-1)=7$ 답 ①

11 전략 $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2$, $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+4$임을 이용한다.

풀이 $x^4-\frac{1}{x^4}=\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)$

$=\left(x-\frac{1}{x}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)$ …… ㉠

이때 $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2=2^2+2=6$이고,

$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+4=2^2+4=8$이므로

$x+\frac{1}{x}=2\sqrt{2}$ ($\because x>0$)

따라서 ㉠에서 구하는 값은

$2\cdot2\sqrt{2}\cdot6=24\sqrt{2}$ 답 ④

12 전략 $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$임을 이용한다.

풀이 $(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2$

$=a^2+2ab+b^2+b^2+2bc+c^2+c^2+2ca+a^2$

$=2(a^2+b^2+c^2)+2(ab+bc+ca)$ …… ㉠

이때 $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$에서

$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$

$=2^2-2\cdot1=2$

따라서 ㉠에서 구하는 값은

$2\cdot2+2\cdot1=6$ 답 6

13 전략 $x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)$임을 이용한다.

풀이 $x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)$ …… ㉠

이때 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{10}$에서

$\frac{xy+yz+zx}{xyz}=\frac{1}{10}$, $\frac{xy+yz+zx}{50}=\frac{1}{10}$

$\therefore xy+yz+zx=5$

따라서 ㉠에서 구하는 값은

$(-8)^2-2\cdot5=54$ 답 ②

Q BOX

$(x-y)^3$
$=x^3-3x^2y+3xy^2-y^3$
$=x^3-y^3-3xy(x-y)$
에서
x^3-y^3
$=(x-y)^3+3xy(x-y)$

(직육면체의 겉넓이)
=(밑넓이)×2
+(옆넓이)

$B\overline{)A}$ 몫 C, D, 나머지 E
⇒ $D=BC$,
$E=A-D$,
$A=BC+E$

14 전략 주어진 식에서 공통부분을 한 문자로 치환한 후 곱셈 공식을 이용하여 전개한다.

풀이 $a+b=X$, $a-b=Y$로 놓으면

$(a+b+c)(a+b-c)+(a-b+c)(a-b-c)$

$=(X+c)(X-c)+(Y+c)(Y-c)$

$=X^2-c^2+Y^2-c^2$

$=(a+b)^2-c^2+(a-b)^2-c^2$

$=a^2+2ab+b^2-c^2+a^2-2ab+b^2-c^2$

$=2a^2+2b^2-2c^2$

즉 $2a^2+2b^2-2c^2=0$이므로 $c^2=a^2+b^2$

따라서 주어진 삼각형은 빗변의 길이가 c인 직각삼각형이다. 답 ⑤

15 전략 직육면체의 세 모서리의 길이를 a, b, c라 하고 주어진 조건을 a, b, c에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 직육면체의 세 모서리의 길이를 a, b, c라 하면 직육면체의 겉넓이는 $2(ab+bc+ca)$이다.

직육면체의 모든 모서리 길이의 합이 20이므로

$4(a+b+c)=20$ $\therefore a+b+c=5$

또 $\overline{AG}=\sqrt{13}$이므로

$\sqrt{a^2+b^2+c^2}=\sqrt{13}$ $\therefore a^2+b^2+c^2=13$

이때 $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$에서

$2(ab+bc+ca)=(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)$

$=5^2-13=12$ 답 ②

16 전략 다항식의 나눗셈은 자연수의 나눗셈과 같은 방법으로 계산한다.

풀이 $(x^2-a)\times bx=4x^3-8x$에서

$bx^3-abx=4x^3-8x$

$\therefore a=2$, $b=4$

$(5x^2+3x-9)-(cx^2-2c)=dx+e$에서

$5x^2+3x-9-cx^2+2c=dx+e$

$(5-c)x^2+3x+(2c-9)=dx+e$

$\therefore c=5$, $d=3$, $e=1$

$\therefore a+b+c+d+e=15$ 답 15

17 전략 주어진 다항식의 나눗셈을 자연수의 나눗셈과 같은 방법으로 계산하여 $Q(x)$, $R(x)$를 구한다.

풀이

$$\begin{array}{r} -2x+1 \\ -x^2+2x+3\,\overline{)\,2x^3-5x^2-3x+6} \\ \underline{2x^3-4x^2-6x} \\ -x^2+3x+6 \\ \underline{-x^2+2x+3} \\ x+3 \end{array}$$

따라서 $Q(x)=-2x+1$, $R(x)=x+3$이므로 ··· ❶

$Q(0)+R(1)=1+4=5$ ··· ❷

답 5

단계	채점 기준	비율
❶	$Q(x)$, $R(x)$를 구할 수 있다.	70 %
❷	$Q(0)+R(1)$의 값을 구할 수 있다.	30 %

18 전략 각 다항식을 내림차순으로 정리한 후 자연수의 나눗셈과 같은 방법으로 계산한다.

풀이 $P(x)+4x=(3x^3+x+11)+4x$
$=3x^3+5x+11$

이므로

$$\begin{array}{r} 3x+3 \\ x^2-x+1 \overline{) 3x^3 +5x+11} \\ \underline{3x^3-3x^2+3x } \\ 3x^2+2x+11 \\ \underline{3x^2-3x+3} \\ 5x+8 \end{array}$$

따라서 $5x+8=5x+a$이므로

$a=8$ 답 ④

19 전략 다항식 A를 다항식 B로 나누었을 때의 몫을 Q, 나머지를 R라 하면 $A=BQ+R$임을 이용한다.

풀이 $f(x)$를 $5x-1$로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 R이므로

$f(x)=(5x-1)Q(x)+R$

$\therefore xf(x)=x(5x-1)Q(x)+xR$

$=5x\left(x-\frac{1}{5}\right)Q(x)+xR$

$=5x\left(x-\frac{1}{5}\right)Q(x)+xR-\frac{1}{5}R+\frac{1}{5}R$

$=5x\left(x-\frac{1}{5}\right)Q(x)+\left(x-\frac{1}{5}\right)R+\frac{1}{5}R$

$=\left(x-\frac{1}{5}\right)\{5xQ(x)+R\}+\frac{1}{5}R$

따라서 $xf(x)$를 $x-\frac{1}{5}$로 나누었을 때의 몫은 $5xQ(x)+R$, 나머지는 $\frac{1}{5}R$이다. 답 ③

Q BOX

$3x-2=0$에서
$x=\frac{2}{3}$
즉 x의 값이 $\frac{2}{3}$일 때에만 등식이 성립하므로 방정식이다.

다항식의 곱셈 공식은 모두 항등식이다.

공통부분 $x-\frac{1}{5}$을 만들기 위해 $\frac{1}{5}R$를 빼고 더한다.

$a-b=-3$에서
$a=b-3$
$a=b-3$을 $3a+2b=1$에 대입하면
$3(b-3)+2b=1$
$5b=10 \quad \therefore b=2$
$b=2$를 $a=b-3$에 대입하면 $a=-1$

02 나머지정리와 인수분해

04 항등식

Lecture 06 항등식 20쪽

1-1 답 (1) × (2) ○ (3) × (4) ○

1-2 답 ㄱ, ㄷ

2-1 (1) 주어진 등식이 x에 대한 항등식이므로
$a-1=0,\ b=0,\ c+5=0$
$\therefore a=1,\ b=0,\ c=-5$

(2) 주어진 등식이 x에 대한 항등식이므로
$a=3,\ b+1=-4,\ 1=c$
$\therefore a=3,\ b=-5,\ c=1$

답 (1) $a=1,\ b=0,\ c=-5$
(2) $a=3,\ b=-5,\ c=1$

2-2 (1) 주어진 등식이 x, y에 대한 항등식이므로
$a=0,\ b=0,\ c+2=0$
$\therefore a=0,\ b=0,\ c=-2$

(2) 주어진 등식이 x, y에 대한 항등식이므로
$a-3=1,\ 2b=-1,\ c-7=1$
$\therefore a=4,\ b=-\frac{1}{2},\ c=8$

답 (1) $a=0,\ b=0,\ c=-2$
(2) $a=4,\ b=-\frac{1}{2},\ c=8$

Lecture 07 미정계수법 21쪽

1-1 (1) 주어진 등식에서 좌변을 전개하여 정리하면
$(a+b)x-a+4=2x-5$
이 등식이 x에 대한 항등식이므로
$a+b=2,\ -a+4=-5$
$\therefore a=9,\ b=-7$

(2) 주어진 등식에서 좌변을 전개하여 정리하면
$(a-b)x+3a+2b=-3x+1$
이 등식이 x에 대한 항등식이므로
$a-b=-3,\ 3a+2b=1$
위의 두 등식을 연립하여 풀면
$a=-1,\ b=2$

답 (1) $a=9,\ b=-7$ (2) $a=-1,\ b=2$

1-2 (1) 주어진 등식에서 좌변을 전개하여 정리하면
$x^2-4x+5=ax^2+bx+c$
이 등식이 x에 대한 항등식이므로
$a=1,\ b=-4,\ c=5$

(2) 주어진 등식에서 우변을 전개하여 정리하면

$x^2+ax-4=bx^2+(-3b+1)x+c-3$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$1=b,\ a=-3b+1,\ -4=c-3$

$\therefore\ a=-2,\ b=1,\ c=-1$

답 (1) $a=1,\ b=-4,\ c=5$
(2) $a=-2,\ b=1,\ c=-1$

2-1 (1) 주어진 등식의 양변에 $x=-2$를 대입하면

$3b=-6 \quad \therefore\ b=-2$

주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$3a=9 \quad \therefore\ a=3$

(2) 주어진 등식의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$b=1+7+6=14$

주어진 등식의 양변에 $x=0$을 대입하면

$6=1+a+b, \quad 6=1+a+14$

$\therefore\ a=-9$

답 (1) $a=3,\ b=-2$ (2) $a=-9,\ b=14$

2-2 (1) 주어진 등식의 양변에 $x=0$을 대입하면

$-b=1 \quad \therefore\ b=-1$

주어진 등식의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$2c=2 \quad \therefore\ c=1$

주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$2a=2 \quad \therefore\ a=1$

(2) 주어진 등식의 양변에 $x=0$을 대입하면

$3=-3c \quad \therefore\ c=-1$

주어진 등식의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$1-a+3=0 \quad \therefore\ a=4$

주어진 등식의 양변에 $x=3$을 대입하면

$9+3a+3=12b, \quad 9+12+3=12b$

$\therefore\ b=2$

답 (1) $a=1,\ b=-1,\ c=1$
(2) $a=4,\ b=2,\ c=-1$

기본+표준 유형 Q+Q

22쪽

01 주어진 등식에서 우변을 전개하여 정리하면

$x^3+ax+10=x^3+(b+c)x^2+(bc-5)x-5b$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$0=b+c,\ a=bc-5,\ 10=-5b$

$\therefore\ a=-9,\ b=-2,\ c=2$

$\therefore\ a-2b+c=-9-2\cdot(-2)+2=-3$ 답 -3

02 $a(x-y)+b(2x+y)-3=4x-y+c$에서

$(a+2b)x+(-a+b)y-3=4x-y+c$

이 등식이 $x,\ y$에 대한 항등식이므로

$a+2b=4,\ -a+b=-1,\ -3=c$

$\therefore\ a=2,\ b=1,\ c=-3$

$\therefore\ a+b+c=0$ 답 0

03 주어진 등식의 양변에 $x=2$를 대입하면

$c=7$

주어진 등식의 양변에 $x=0$을 대입하면

$-2b+c=1, \quad -2b=-6 \quad \therefore\ b=3$

주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$-a-b+c=2 \quad \therefore\ a=2$

$\therefore\ ab+c=13$ 답 13

04 주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$0=9+b \quad \therefore\ b=-9$

주어진 등식의 양변에 $x=-2$를 대입하면

$-21=-3a+b, \quad 3a=12$

$\therefore\ a=4$

$\therefore\ ab=-36$ 답 -36

05 주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{10}=2^{10}=1024$ 답 ⑤

06 주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$a_0+a_1+a_2+\cdots+a_8=(-2)^4=16$ ...... ㉠

주어진 등식의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$a_0-a_1+a_2-\cdots+a_8=0$ ...... ㉡

㉠+㉡을 하면

$2(a_0+a_2+a_4+a_6+a_8)=16$

$\therefore\ a_0+a_2+a_4+a_6+a_8=8$ 답 8

07 $x^3+ax^2+bx+c=(x^2+x+1)(x-3)+x+5$

이 등식의 우변을 정리하면

$x^3+ax^2+bx+c=x^3-2x^2-x+2$

따라서 $a=-2,\ b=-1,\ c=2$이므로

$abc=4$ 답 4

다른 풀이 x^3+ax^2+bx+c

$=(x^2+x+1)(x-3)+x+5$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로 양변에 $x=0$을 대입하면

$c=-3+5=2$

양변에 $x=1$을 대입하면

$1+a+b+c=0 \quad \therefore\ a+b=-3$ ...... ㉠

양변에 $x=-1$을 대입하면

$-1+a-b+c=0$

$\therefore\ a-b=-1$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-2,\ b=-1$

$\therefore\ abc=4$

> ㉠+㉡을 하면
> $2a=-4$
> $\therefore\ a=-2$
> $a=-2$를 ㉠에 대입하면
> $-2+b=-3$
> $\therefore\ b=-1$

08 x^3+ax^2+b를 x^2-3x+1로 나누었을 때의 몫을 $x+c$ (c는 상수)라 하면

x^3+ax^2+b

$=(x^2-3x+1)(x+c)+11x+4$

이 등식의 우변을 정리하면

> x^3+ax^2+b에서 x^3의 계수가 1이고, x^2-3x+1에서 x^2의 계수가 1이므로 몫의 x의 계수는 1이다.

$x^3+ax^2+b=x^3+(c-3)x^2+(12-3c)x+c+4$
이 등식이 x에 대한 항등식이므로
$a=c-3,\ 0=12-3c,\ b=c+4$
$\therefore a=1,\ b=8,\ c=4$
$\therefore b-a=7$ 답 ③

x^3+x^2+8을 x^2-3x+1로 나누었을 때의 몫은 $x+4$, 나머지는 $11x+4$이다.

05 나머지정리

Lecture 08 나머지정리와 인수정리 23쪽

1-1 (1) $P(2)=4-14+3=-7$
(2) $P\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}-7\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+3=\frac{27}{4}$
답 (1) -7 (2) $\frac{27}{4}$

1-2 (1) $P(-1)=-3$이므로
$2-a+1=-3\quad \therefore a=6$
(2) $P(3)=1$이므로
$27-9a+9+1=1,\quad 9a=36$
$\therefore a=4$
답 (1) 6 (2) 4

2-1 $P(2)=0$이므로
$8-12+a=0\quad \therefore a=4$ 답 4

2-2 $P(-1)=0$이므로
$3+5-a-6=0\quad \therefore a=2$ 답 2

Lecture 09 조립제법 24쪽

1-1 답 (1) 2, 1, 2, 7, 몫: x^2+3x+2, 나머지: 7
(2) -3, 0, 18, -24, -6, 8, -9,
몫: $2x^2-6x+8$, 나머지: -9

1-2
$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & -4 & -3 & 15 \\ & & -2 & 12 & -18 \\ \hline & 1 & -6 & 9 & -3 \end{array}$$
$\therefore$ 몫: x^2-6x+9, 나머지: -3
답 몫: x^2-6x+9, 나머지: -3

2-1 답 -3, 2, -1, -2, -2, -4,
$4x^2-2x-4$, 1, $2x^2-x-2$, 1
몫: $2x^2-x-2$, 나머지: -1

2-2
$$\begin{array}{r|rrrr} -\frac{3}{2} & 6 & 3 & -1 & 6 \\ & & -9 & 9 & -12 \\ \hline & 6 & -6 & 8 & -6 \end{array}$$
$\therefore 6x^3+3x^2-x+6$
$=\left(x+\frac{3}{2}\right)(6x^2-6x+8)-6$
$=(2x+3)(3x^2-3x+4)-6$
$\therefore$ 몫: $3x^2-3x+4$, 나머지: -6
답 몫: $3x^2-3x+4$, 나머지: -6

기본+표준 유형 Q+Q 25쪽

01 $P(x)=x^3+ax^2+bx+2$라 하면 $P(1)=2$, $P(2)=14$이므로
$1+a+b+2=2,\ 8+4a+2b+2=14$
$\therefore a+b=-1,\ 2a+b=2$
위의 두 식을 연립하여 풀면
$a=3,\ b=-4$ 답 $a=3,\ b=-4$

02 $P(-2)=-3$이므로 구하는 나머지는
$-3P(-2)=-3\cdot(-3)=9$ 답 9

$(x-1)P(x)$의 x 대신 -2를 대입한다.

03 $P(x)$를 $(x+1)(x-3)$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)라 하면
$P(x)=(x+1)(x-3)Q(x)+ax+b$
이때 $P(-1)=9,\ P(3)=-7$이므로
$-a+b=9,\ 3a+b=-7$
위의 두 식을 연립하여 풀면
$a=-4,\ b=5$
따라서 구하는 나머지는 $-4x+5$이다. 답 ②

나누는 식이 이차식이므로 나머지는 일차 이하의 다항식이다.

04 $P(x)$를 $(x+4)(x-1)$로 나누었을 때의 몫을 $Q_1(x)$라 하면
$P(x)=(x+4)(x-1)Q_1(x)-5$
이므로 $P(-4)=-5,\ P(1)=-5$
$P(x)$를 $(x+2)(x+1)$로 나누었을 때의 몫을 $Q_2(x)$라 하면
$P(x)=(x+2)(x+1)Q_2(x)+8x-4$
이므로 $P(-2)=-20,\ P(-1)=-12$
$P(x)$를 x^2+x-2로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)라 하면
$P(x)=(x^2+x-2)Q(x)+ax+b$
$=(x+2)(x-1)Q(x)+ax+b$
이때 $P(1)=-5,\ P(-2)=-20$이므로
$a+b=-5,\ -2a+b=-20$
위의 두 식을 연립하여 풀면
$a=5,\ b=-10$
따라서 구하는 나머지는 $5x-10$이다. 답 $5x-10$

$P(x)$에 $x=-2$, $x=-1$을 각각 대입하면
$P(-2)$
$=8\cdot(-2)-4$
$=-20$,
$P(-1)$
$=8\cdot(-1)-4$
$=-12$

05 $x^{15}+x^{12}+x^9+x^6+x^3$을 x^3-x로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)라 하면
$x^{15}+x^{12}+x^9+x^6+x^3$
$=(x^3-x)Q(x)+ax^2+bx+c$
$=x(x+1)(x-1)Q(x)+ax^2+bx+c$ …… ㉠

나누는 식이 삼차식이므로 나머지는 이차 이하의 다항식이다.

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면

$c=0$

㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$-1=a-b+c \quad \therefore a-b=-1 \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$5=a+b+c \quad \therefore a+b=5 \quad \cdots\cdots$ ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$a=2, b=3$

따라서 $R(x)=2x^2+3x$이므로

$R(1)=5$

답 ⑤

06 $P(x)$를 $x(x-2)$로 나누었을 때의 몫을 $Q_1(x)$라 하면

$P(x)=x(x-2)Q_1(x)$

이므로 $\quad P(0)=0,\ P(2)=0$

$P(x)$를 $(x-2)(x-3)$으로 나누었을 때의 몫을 $Q_2(x)$라 하면

$P(x)=(x-2)(x-3)Q_2(x)+3x-6$

이므로 $\quad P(2)=0,\ P(3)=3$

$P(x)$를 $x(x-2)(x-3)$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 ax^2+bx+c (a, b, c는 상수)라 하면

$P(x)=x(x-2)(x-3)Q(x)+ax^2+bx+c$

$\cdots\cdots$ ㉠

㉠의 양변에 $x=0$, $x=2$, $x=3$을 각각 대입하면

$P(0)=c,\ P(2)=4a+2b+c,\ P(3)=9a+3b+c$

즉 $c=0$, $4a+2b+c=0$, $9a+3b+c=3$이므로

$2a+b=0,\ 3a+b=1$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=1, b=-2$

따라서 구하는 나머지는 x^2-2x이다.

답 ④

07 $xP(x+2)$를 $x-3$으로 나누었을 때의 나머지는

$3P(3+2)=3P(5) \quad \cdots\cdots$ ㉠

한편 $P(x)$를 $x-5$로 나누었을 때의 나머지가 3이므로 $\quad P(5)=3$

따라서 ㉠에서 구하는 나머지는

$3\cdot3=9$

답 9

다른 풀이 $P(x)$를 $x-5$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$P(x)=(x-5)Q(x)+3$

이 등식의 x 대신 $x+2$를 대입하면

$P(x+2)=(x-3)Q(x+2)+3$

양변에 x를 곱하면

$xP(x+2)=x(x-3)Q(x+2)+3x$

이때 $x(x-3)Q(x+2)$는 $x-3$으로 나누어떨어지므로 $xP(x+2)$를 $x-3$으로 나누었을 때의 나머지는 $3x$를 $x-3$으로 나누었을 때의 나머지와 같다.

따라서 구하는 나머지는

$3\cdot3=9$

Q BOX

$P(x)$를 $x+3$으로 나누었을 때의 나머지가 12이므로
$P(-3)=12$

$Q(x)$를 $x-5$로 나누었을 때의 나머지가 2이므로
$Q(5)=2$

$4a+2b+c=0$에 $c=0$을 대입하면
$4a+2b=0$
$\therefore 2a+b=0$
$9a+3b+c=3$에 $c=0$을 대입하면
$9a+3b=3$
$\therefore 3a+b=1$

(나머지)≥0이어야 한다.

$3x$에 $x=3$을 대입하면
$3\cdot3=9$

08 $P(3x-10)$을 $x-4$로 나누었을 때의 나머지는

$P(3\cdot4-10)=P(2) \quad \cdots\cdots$ ㉠

한편 $P(x)$를 $(x+2)(x-2)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$P(x)=(x+2)(x-2)Q(x)+4x-5$

이므로

$P(2)=3$

따라서 ㉠에서 구하는 나머지는 3이다.

답 3

09 $P(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 4이므로

$P(x)=(x-1)Q(x)+4 \quad \cdots\cdots$ ㉠

이때 $P(-3)=12$이고, $Q(x)$를 $x+3$으로 나누었을 때의 나머지는 $Q(-3)$이므로 ㉠의 양변에 $x=-3$을 대입하면

$-4Q(-3)+4=12$

$4Q(-3)=-8 \quad \therefore Q(-3)=-2$

따라서 구하는 나머지는 -2이다.

답 -2

10 $P(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 3이므로

$P(x)=(x+1)Q(x)+3$

이때 $Q(5)=2$이므로 $P(x)$를 $x-5$로 나누었을 때의 나머지는

$P(5)=6Q(5)+3=6\cdot2+3=15$

답 15

11 (1) $(x-1)^{15}$을 x로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R (R는 상수)라 하면

$(x-1)^{15}=xQ(x)+R \quad \cdots\cdots$ ㉠

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면

$R=-1$

따라서 구하는 나머지는 -1이다.

(2) ㉠의 양변에 $x=88$을 대입하면

$87^{15}=88Q(88)-1$

$=88\{Q(88)-1\}+88-1$

$=88\{Q(88)-1\}+87$

따라서 구하는 나머지는 87이다.

답 (1) -1 (2) 87

12 $3x^{10}$을 $x+1$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R (R는 상수)라 하면

$3x^{10}=(x+1)Q(x)+R \quad \cdots\cdots$ ㉠

㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$R=3$

㉠의 양변에 $x=14$를 대입하면

$3\cdot14^{10}=15Q(14)+3$

따라서 $3\cdot14^{10}$을 15로 나누었을 때의 나머지는 3이다.

답 ②

13 $P(x)=x^4-x^3+ax^2-7x-10$이라 하면 $P(x)$가 $x+2$로 나누어떨어지므로 $\quad P(-2)=0$

$16+8+4a+14-10=0$

$4a=-28 \qquad \therefore a=-7$ 　　답 ①

14 $P(x)=ax^3+bx^2+3x+9$라 하면 $P(x)$가 $x-1$, $x-3$으로 각각 나누어떨어지므로

$P(1)=0$, $P(3)=0$

$a+b+3+9=0$, $27a+9b+9+9=0$

$\therefore a+b=-12$, $3a+b=-2$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=5$, $b=-17$

$\therefore a-b=22$ 　　답 ④

15 $P(x)=x^3+4x^2+ax+b$라 하면 $P(x)$가 x^2+2x-3, 즉 $(x+3)(x-1)$로 나누어떨어지므로

$P(-3)=0$, $P(1)=0$

$-27+36-3a+b=0$, $1+4+a+b=0$

$\therefore 3a-b=9$, $a+b=-5$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=1$, $b=-6$

$\therefore a-b=7$ 　　답 ②

16 $P(x)=2x^3+7x^2+ax+b$라 하면 $P(x)$가 x^2+5x+6, 즉 $(x+3)(x+2)$로 나누어떨어지므로

$P(-3)=0$, $P(-2)=0$

$-54+63-3a+b=0$, $-16+28-2a+b=0$

$\therefore 3a-b=9$, $2a-b=12$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=-3$, $b=-18$

따라서 다항식 $x^2-2ax+b$, 즉 $x^2+6x-18$을 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는

$1^2+6\cdot1-18=-11$ 　　답 -11

17 x^3+ax^2+5x+b를 $x-2$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 조립제법을 이용하여 구하면 다음과 같다.

2	1	a	5	b
		2	$2a+4$	$4a+18$
	1	$a+2$	$2a+9$	$4a+b+18$

따라서 $k=2$, $c=2$, $2a+4=-2$, $4a+18=6$, $a+2=-1$, $2a+9=d$, $4a+b+18=12$이므로

$k=2$, $a=-3$, $b=6$, $c=2$, $d=3$ 　　답 ③

Q BOX

$4a+18=6$을 $4a+b+18=12$에 대입하면

$b+6=12$

$\therefore b=6$

18 주어진 조립제법을 완성하면 다음과 같다.

-1	1	-3	4	-8
		-1	4	-8
3	1	-4	8	-16
		3	-3	
	1	-1	5	

다항식 x^3-3x^2+4x-8을 $x+1$로 나누었을 때의 몫 $Q(x)$는

$Q(x)=x^2-4x+8$

$Q(x)$를 $x-3$으로 나누었을 때의 몫 $Q'(x)$는

$Q'(x)=x-1$ 　　답 $x-1$

19 주어진 조립제법을 완성하면 오른쪽과 같으므로

-2	1	5	3
		-2	-6
-2	1	3	-3
		-2	
	1	1	

x^2+5x+3

$=(x+2)(x+3)-3$

$=(x+2)\{(x+2)+1\}-3$

$=(x+2)^2+(x+2)-3$

$\therefore a=1$, $b=1$, $c=-3$

답 $a=1$, $b=1$, $c=-3$

쌤 한마디

$x^2+5x+3=1\cdot(x+2)^2+1\cdot(x+2)-3$과 같이 다항식을 $x+2$에 대하여 내림차순으로 정리한 식에서 계수 1, 1, -3은 조립제법을 연속으로 이용하면 쉽게 구할 수 있다.

20 오른쪽 조립제법에서

1	3	0	-2
		3	3
1	3	3	1
		3	
	3	6	

$3x^2-2$

$=(x-1)(3x+3)+1$

$=(x-1)\{3(x-1)+6\}+1$

$=3(x-1)^2+6(x-1)+1$

따라서 $a=3$, $b=6$, $c=1$이므로

$a-b-c=-4$ 　　답 ①

06 인수분해

Lecture 10 인수분해

28쪽

1-1 답 (1) $ab(b-4a)$ 　(2) $(a+b)(x-y)$

Q BOX

$a(x-y)-b(y-x)$

$=a(x-y)+b(x-y)$

$=(a+b)(x-y)$

1-2 답 (1) $(a-5)^2$ 　(2) $2(x-3y)^2$

(3) $(x+4)(x-4)$ 　(4) $(4y+1)(2y-3)$

1-3 (1) $a^2+4b^2+4c^2+4ab-8bc-4ca$

$=a^2+(2b)^2+(-2c)^2+2\cdot a\cdot 2b+2\cdot 2b\cdot(-2c)+2\cdot(-2c)\cdot a$

$=(a+2b-2c)^2$

(2) $x^3+6x^2+12x+8=x^3+3\cdot x^2\cdot 2+3\cdot x\cdot 2^2+2^3$

$=(x+2)^3$

(3) $8a^3-36a^2b+54ab^2-27b^3$

$=(2a)^3-3\cdot(2a)^2\cdot 3b+3\cdot 2a\cdot(3b)^2-(3b)^3$

$=(2a-3b)^3$

(4) $x^3+64=x^3+4^3$

$=(x+4)(x^2-4x+16)$

(5) $x^3+y^3+6xy-8$
$=x^3+y^3+(-2)^3-3\cdot x\cdot y\cdot(-2)$
$=(x+y-2)(x^2+y^2-xy+2x+2y+4)$
(6) $81x^4+9x^2+1=(3x)^4+(3x)^2+1$
$=(9x^2+3x+1)(9x^2-3x+1)$

답 (1) $(a+2b-2c)^2$
(2) $(x+2)^3$
(3) $(2a-3b)^3$
(4) $(x+4)(x^2-4x+16)$
(5) $(x+y-2)(x^2+y^2-xy+2x+2y+4)$
(6) $(9x^2+3x+1)(9x^2-3x+1)$

Lecture 11 여러 가지 식의 인수분해

29쪽

1-1 (1) $x^2-x=X$로 놓으면
(주어진 식)$=X^2-X-6$
$=(X+2)(X-3)$
$=(x^2-x+2)(x^2-x-3)$
(2) $x(x-1)(x-2)(x-3)-24$
$=\{x(x-3)\}\{(x-1)(x-2)\}-24$
$=(x^2-3x)(x^2-3x+2)-24$
$x^2-3x=X$로 놓으면
(주어진 식)$=X(X+2)-24$
$=X^2+2X-24$
$=(X+6)(X-4)$
$=(x^2-3x+6)(x^2-3x-4)$
$=(x+1)(x-4)(x^2-3x+6)$

답 (1) $(x^2-x+2)(x^2-x-3)$
(2) $(x+1)(x-4)(x^2-3x+6)$

상수항의 합이 같아지도록 짝을 짓는다.

2-1 (1) $x^2=X$로 놓으면
$x^4+3x^2-28=X^2+3X-28$
$=(X+7)(X-4)$
$=(x^2+7)(x^2-4)$
$=(x+2)(x-2)(x^2+7)$
(2) $x^4+7x^2+16=(x^4+8x^2+16)-x^2$
$=(x^2+4)^2-x^2$
$=(x^2+x+4)(x^2-x+4)$

답 (1) $(x+2)(x-2)(x^2+7)$
(2) $(x^2+x+4)(x^2-x+4)$

3-1 $x^2+y^2+2xy+5x+5y-6$
$=x^2+(2y+5)x+y^2+5y-6$
$=x^2+(2y+5)x+(y+6)(y-1)$
$=(x+y+6)(x+y-1)$

답 $(x+y+6)(x+y-1)$

4-1 답 $x+1$, $x+1$, x^2-2x-4, $x+1$, x^2-2x-4

Q BOX

기본+표준 유형 Q+Q

30쪽

01 $12x-3xy-4zx+xyz=x(12-3y-4z+yz)$
$=x\{3(4-y)-z(4-y)\}$
$=x(4-y)(3-z)$
따라서 인수인 것은 ③이다. 답 ③

02 $x^2-xy+2x-2y=x(x-y)+2(x-y)$
$=(x+2)(x-y)$
답 $(x+2)(x-y)$

공통부분이 생기도록 두 항씩 짝을 짓는다.

03 ① $x^2-8xy+16y^2=(x-4y)^2$
③ $9a^2+12ab+4b^2=(3a+2b)^2$
④ $a^3-9a^2b+27ab^2-27b^3=(a-3b)^3$
⑤ $x^4+4x^2+16=(x^2+2x+4)(x^2-2x+4)$
답 ②

04 x^6-y^6
$=(x^3)^2-(y^3)^2$
$=(x^3+y^3)(x^3-y^3)$
$=(x+y)(x^2-xy+y^2)(x-y)(x^2+xy+y^2)$
답 ④

05 $4x^2+y^2+9z^2+4xy-6yz-12zx$
$=(2x)^2+y^2+(-3z)^2+2\cdot 2x\cdot y+2\cdot y\cdot(-3z)$
$+2\cdot(-3z)\cdot 2x$
$=(2x+y-3z)^2$
따라서 $a=1$, $b=-3$이므로
$ab=-3$ 답 -3

06 $x^2+6x=X$로 놓으면
(주어진 식)$=(X+4)(X-6)-11$
$=X^2-2X-35$
$=(X+5)(X-7)$
$=(x^2+6x+5)(x^2+6x-7)$
$=(x+5)(x+1)(x+7)(x-1)$
따라서 인수가 아닌 것은 ①이다. 답 ①

07 $(x+5)(x+2)(x+1)(x-2)+35$
$=\{(x+5)(x-2)\}\{(x+2)(x+1)\}+35$
$=(x^2+3x-10)(x^2+3x+2)+35$
$x^2+3x=X$로 놓으면
(주어진 식)$=(X-10)(X+2)+35$
$=X^2-8X+15$
$=(X-3)(X-5)$
$=(x^2+3x-3)(x^2+3x-5)$
따라서 $a=-3$, $b=3$이므로
$a+b=0$ 답 0

08 $x^2=X$로 놓으면

$x^4-10x^2+9=X^2-10X+9$
$=(X-1)(X-9)$
$=(x^2-1)(x^2-9)$
$=(x+1)(x-1)(x+3)(x-3)$

이때 $a<b<c<d$이므로

$a=-3,\ b=-1,\ c=1,\ d=3$

$\therefore\ ab+cd=6$

답 6

09 $x^4-12x^2y^2+16y^4$
$=(x^4-8x^2y^2+16y^4)-4x^2y^2$
$=(x^2-4y^2)^2-(2xy)^2$
$=(x^2+2xy-4y^2)(x^2-2xy-4y^2)$

따라서 인수인 것은 ④이다.

답 ④

10 주어진 식을 y에 대하여 내림차순으로 정리하면

$x^3-xy^2-xz^2+xyz+y^2z-yz^2$
$=(-x+z)y^2+(xz-z^2)y+x^3-xz^2$
$=-(x-z)y^2+(x-z)yz+x(x+z)(x-z)$
$=-(x-z)\{y^2-yz-x(x+z)\}$
$=-(x-z)(y+x)\{y-(x+z)\}$
$=-(x-z)(x+y)(y-x-z)$
$=(x+y)(x-z)(x-y+z)$

답 ④

x의 차수는 3, y와 z의 차수는 2이므로 y 또는 z에 대한 내림차순으로 정리한 후 인수분해한다.

11 주어진 식을 x에 대하여 내림차순으로 정리하면

$x^2+xy-2y^2+5x+y+6$
$=x^2+(y+5)x-(2y^2-y-6)$
$=x^2+(y+5)x-(2y+3)(y-2)$
$=\{x+(2y+3)\}\{x-(y-2)\}$
$=(x+2y+3)(x-y+2)$

따라서 $a=2,\ b=-1,\ c=2$이므로

$2a-b-c=3$

답 3

y에 대하여 내림차순으로 정리한 후 인수분해해도 결과는 같다.

12 $P(x)=6x^4+5x^3-15x^2+4$라 하면

$P(1)=6+5-15+4=0$

$P(-2)=96-40-60+4=0$

조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

1	6	5	−15	0	4
		6	11	−4	−4
−2	6	11	−4	−4	0
		−12	2	4	
	6	−1	−2	0	

$\therefore\ 6x^4+5x^3-15x^2+4$
$=(x-1)(x+2)(6x^2-x-2)$
$=(x-1)(x+2)(2x+1)(3x-2)$

따라서 인수가 아닌 것은 ②이다.

답 ②

13 $P(x)$가 $x-2$를 인수로 가지므로

$P(2)=0$

$8-2+a=0\qquad \therefore\ a=-6$

따라서 $P(x)=x^3-x-6$이므로 조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

2	1	0	−1	−6
		2	4	6
	1	2	3	0

$\therefore\ x^3-x-6=(x-2)(x^2+2x+3)$

답 $a=-6,\ (x-2)(x^2+2x+3)$

14 주어진 식을 a에 대하여 내림차순으로 정리하면

$a^2b+ab^2+b^2c-bc^2-c^2a-ca^2$
$=(b-c)a^2+(b^2-c^2)a+bc(b-c)$
$=(b-c)\{a^2+(b+c)a+bc\}$
$=(b-c)(a+b)(a+c)=0$

이때 $a+b>0,\ a+c>0$이므로

$b-c=0\qquad \therefore\ b=c$

따라서 주어진 삼각형은 $b=c$인 이등변삼각형이다.

답 ②

삼각형의 세 변의 길이는 양수이므로
$a>0,\ b>0,\ c>0$
$\therefore\ a+b>0,\ a+c>0$

15 주어진 식을 c에 대하여 내림차순으로 정리하면

$a^3+b^3+a^2b+ab^2-ac^2-bc^2$
$=-(a+b)c^2+a^3+b^3+a^2b+ab^2$
$=-(a+b)c^2+(a+b)(a^2-ab+b^2)+ab(a+b)$
$=(a+b)(a^2+b^2-c^2)=0$

이때 $a+b>0$이므로

$a^2+b^2-c^2=0\qquad \therefore\ a^2+b^2=c^2$

따라서 주어진 삼각형은 빗변의 길이가 c인 직각삼각형이다.

답 빗변의 길이가 c인 직각삼각형

직각삼각형에서 직각을 낀 두 변의 길이를 각각 a, b라 하고 빗변의 길이를 c라 하면
$a^2+b^2=c^2$
이 성립한다.

16 $x^3+2x^2y+2xy^2+y^3$
$=x^3+y^3+2xy(x+y)$
$=(x+y)(x^2-xy+y^2)+2xy(x+y)$
$=(x+y)(x^2+xy+y^2)$
$=(x+y)\{(x+y)^2-xy\}\qquad \cdots\cdots$ ㉠

이때

$x+y=(2+\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})=4,$

$xy=(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=1$

이므로 ㉠에서 구하는 값은

$4\cdot(4^2-1)=60$

답 60

다른 풀이 $x^3+2x^2y+2xy^2+y^3$
$=(x^3+3x^2y+3xy^2+y^3)-x^2y-xy^2$
$=(x+y)^3-xy(x+y)\qquad \cdots\cdots$ ㉡

이때 $x+y=4,\ xy=1$이므로 ㉡에서 구하는 값은

$4^3-1\cdot4=60$

17 $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$
$=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}\qquad \cdots\cdots$ ㉠

이때 $a-b=5-\sqrt{2},\ b-c=5+\sqrt{2}$를 변끼리 더하면

$a-c=10$

(좌변)
$=(a-b)+(b-c)$
$=a-c,$
(우변)
$=(5-\sqrt{2})+(5+\sqrt{2})$
$=10$

이므로 ㉠에서 구하는 값은

$$\frac{1}{2}\{(5-\sqrt{2})^2+(5+\sqrt{2})^2+(-10)^2\}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 154=77$$ 답 77

18 $999=x$로 놓으면

$$(\text{주어진 식})=\frac{x^3+1}{(x-1)x+1}$$

$$=\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x^2-x+1}$$

$$=x+1$$

$$=999+1=1000$$ 답 ④

19 $20=x$로 놓으면

$20\cdot 21\cdot 22\cdot 23+1$

$=x(x+1)(x+2)(x+3)+1$

$=\{x(x+3)\}\{(x+1)(x+2)\}+1$

$=(x^2+3x)(x^2+3x+2)+1$

$x^2+3x=t$로 놓으면

$t(t+2)+1=t^2+2t+1=(t+1)^2$

$=(x^2+3x+1)^2$

$=(20^2+3\cdot 20+1)^2$

$=461^2$

$\therefore \sqrt{20\cdot 21\cdot 22\cdot 23+1}=\sqrt{461^2}=461$ 답 461

중단원 마무리

33쪽

01 전략 주어진 등식의 좌변을 k에 대하여 정리한 후 항등식의 성질을 이용한다.

풀이 주어진 등식의 좌변을 k에 대하여 정리하면

$(x^2+2x-3)k+(2y-8)=0$

이 등식이 k에 대한 항등식이므로

$x^2+2x-3=0,\ 2y-8=0$

(i) $x^2+2x-3=0$에서 $(x+3)(x-1)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=1$

(ii) $2y-8=0$에서 $y=4$

(i), (ii)에서 x, y는 자연수이므로

$x=1,\ y=4$

답 $x=1,\ y=4$

02 전략 주어진 등식의 양변에 좌변을 0이 되도록 하는 x의 값을 대입한다.

풀이 주어진 등식의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$0=1+a+b \qquad \therefore a+b=-1 \quad \cdots\cdots ㉠$

주어진 등식의 양변에 $x^2=3$을 대입하면

$0=9+3a+b \qquad \therefore 3a+b=-9 \quad \cdots\cdots ㉡$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-4,\ b=3$

$\therefore a-b=-7$ 답 ①

Q BOX

실수 k의 값에 관계없이 항상 성립하는 등식 ➡ k에 대한 항등식

$f(2)-g(2)=2-5$
$=-3$

$f(x)-g(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지는 $f(-1)-g(-1)$이다.

$P(x)$와 $G(x)$에서 x^3의 계수는 같다.

03 전략 주어진 등식의 우변이 $a_0-a_1+\cdots-a_{11}+a_{12}$가 되도록 하는 x의 값을 양변에 대입한다.

풀이 주어진 등식의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$a_0-a_1+a_2-a_3+\cdots-a_{11}+a_{12}=0$ 답 0

04 전략 다항식 $A(x)$를 다항식 $B(x)(B(x)\neq 0)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)$라 하면 $A(x)=B(x)Q(x)+R(x)$임을 이용한다.

풀이 x^3+ax+b를 x^2+2x-1로 나누었을 때의 몫을 $x+c$ (c는 상수)라 하면

$x^3+ax+b=(x^2+2x-1)(x+c)+4$

$=x^3+(c+2)x^2+(2c-1)x-c+4$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$0=c+2,\ a=2c-1,\ b=-c+4$

$\therefore a=-5,\ b=6,\ c=-2$

$\therefore a+b=1$ 답 1

05 전략 다항식 $P(x)$를 $x-k$로 나누었을 때의 나머지는 $P(k)$임을 이용한다.

풀이 $P(x)=x^2+ax+4$라 하면 $P(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는

$P(1)=1+a+4=a+5$

$P(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지는

$P(2)=4+2a+4=2a+8$

이때 $P(1)=P(2)$이므로

$a+5=2a+8 \qquad \therefore a=-3$ 답 ①

06 전략 (이차식)−(일차식)=(이차식)임을 이용하여 $f(x)-g(x)$를 x에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 $f(x)$는 이차식, $g(x)$는 일차식이므로

$f(x)-g(x)=0$은 이차방정식이다.

조건 (가)에서

$f(x)-g(x)=a(x-1)^2$ (a는 0이 아닌 상수) $\cdots\cdots ㉠$

조건 (나)에서 $f(2)=2,\ g(2)=5$

㉠의 양변에 $x=2$를 대입하면

$f(2)-g(2)=a \qquad \therefore a=-3$

따라서 $f(x)-g(x)=-3(x-1)^2$이므로 구하는 나머지는

$f(-1)-g(-1)=-3\cdot(-2)^2=-12$ 답 ③

07 전략 다항식 $P(x)$에 대하여 $P(k)=0$이면 $P(x)$는 $x-k$를 인수로 가짐을 이용한다.

풀이 $P(0)=P(1)=P(3)=k$ (k는 상수)라 하면

$P(0)-k=0,\ P(1)-k=0,\ P(3)-k=0$

즉 $G(x)=P(x)-k$라 하면 $G(0)=G(1)=G(3)=0$

이고 $G(x)$의 x^3의 계수가 1이므로

$G(x)=x(x-1)(x-3)$

$\therefore P(x)=x(x-1)(x-3)+k$

이때 $P(x)$는 $x+1$로 나누어떨어지므로

$P(-1)=0$

$-1\cdot(-2)\cdot(-4)+k=0$

$\therefore k=8$

따라서 $P(x)=x(x-1)(x-3)+8$이므로

$P(2)=2\cdot1\cdot(-1)+8=6$ 답 6

08 전략 $P(5)=10$, $P(-3)=-6$임을 이용하여 $R(x)$를 구한다.

풀이 $P(x)$를 $(x-5)(x+3)$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, $R(x)=ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$P(x)=(x-5)(x+3)Q(x)+ax+b$

이때 $P(5)=10$, $P(-3)=-6$이므로

$5a+b=10$, $-3a+b=-6$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=2$, $b=0$

따라서 $R(x)=2x$이므로

$R(1)=2$ 답 ③

09 전략 나머지를 ax^2+bx+c (a, b, c는 상수)로 놓고, 몫과 나머지를 이용하여 식을 세운다.

풀이 $P(x)$를 $(x-2)^2(x+1)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 ax^2+bx+c (a, b, c는 상수)라 하면

$P(x)=(x-2)^2(x+1)Q(x)+ax^2+bx+c$ …… ㉠

$P(x)$를 $(x-2)^2$으로 나누었을 때의 나머지가 $x-3$이므로 ㉠에서 ax^2+bx+c를 $(x-2)^2$으로 나누었을 때의 나머지가 $x-3$이다.

$\therefore ax^2+bx+c=a(x-2)^2+x-3$

이것을 ㉠에 대입하면

$P(x)=(x-2)^2(x+1)Q(x)+a(x-2)^2+x-3$

한편 $P(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지가 5이므로

$P(-1)=9a-4=5$ $\therefore a=1$

따라서 구하는 나머지는

$(x-2)^2+x-3=x^2-3x+1$ 답 ④

10 전략 다항식 $P(x+a)$를 $x+k$로 나누었을 때의 나머지는 $P(-k+a)$임을 이용한다.

풀이 $P(x+889)$를 $x+890$으로 나누었을 때의 나머지가 2이므로

$P(-890+889)=P(-1)=2$

$-a+1+b=2$ $\therefore a-b=-1$ …… ㉠

$P(x+890)$을 $x+889$로 나누었을 때의 나머지가 8이므로

$P(-889+890)=P(1)=8$

$a+1+b=8$ $\therefore a+b=7$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=3$, $b=4$

$\therefore ab=12$ 답 ④

Q BOX

x^3+ax^2-2x+5에 $a=0$을 대입하면 x^3-2x+5

$Q(x)$를 $x+2$로 나누었을 때의 나머지는 $Q(-2)$이다.

$P(x)=(x-6)Q(x)$에서 x 대신 x^2-5x를 대입한다.

11 전략 다항식 $P(x)$를 $x-k$로 나누었을 때의 나머지는 $P(k)$임을 이용하여 $Q(-2)$의 값을 구한다.

풀이 x^3+ax^2-2x+5를 $x-1$로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 4이므로

$x^3+ax^2-2x+5=(x-1)Q(x)+4$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$1+a-2+5=4$ $\therefore a=0$ ··· ❶

㉠의 양변에 $x=-2$를 대입하면

$-8+4+5=-3Q(-2)+4$

$3Q(-2)=3$ $\therefore Q(-2)=1$

따라서 구하는 나머지는 1이다. ··· ❷

답 1

단계	채점 기준	비율
❶	a의 값을 구할 수 있다.	50 %
❷	$Q(x)$를 $x+2$로 나누었을 때의 나머지를 구할 수 있다.	50 %

12 전략 $x^{20}+x^{10}+x^5+1$을 $x+1$로 나누었을 때의 나머지를 구한다.

풀이 $x^{20}+x^{10}+x^5+1$을 $x+1$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R (R는 상수)라 하면

$x^{20}+x^{10}+x^5+1=(x+1)Q(x)+R$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$R=1+1-1+1=2$

㉠의 양변에 $x=34$를 대입하면

$34^{20}+34^{10}+34^5+1=35Q(34)+2$

따라서 구하는 나머지는 2이다. 답 ②

13 전략 다항식 $P(x)$에 대하여 $P(k)=0$이면 $P(x)$는 $x-k$로 나누어떨어짐을 이용한다.

풀이 $P(6)=0$이므로 $P(x)$는 $x-6$으로 나누어떨어진다.

$P(x)$를 $x-6$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$P(x)=(x-6)Q(x)$

$\therefore P(x^2-5x)=(x^2-5x-6)Q(x^2-5x)$

$=(x+1)(x-6)Q(x^2-5x)$

따라서 항상 $P(x^2-5x)$의 인수인 것은 ①이다. 답 ①

14 전략 조립제법을 이용하여 x^4+ax+b를 인수분해한다.

풀이 x^4+ax+b가 $(x-2)^2$으로 나누어떨어질 때의 몫이 $Q(x)$이므로

$x^4+ax+b=(x-2)^2Q(x)$

조립제법을 이용하여 x^4+ax+b를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr}
2 & 1 & 0 & 0 & a & b \\
 & & 2 & 4 & 8 & 2a+16 \\
\hline
2 & 1 & 2 & 4 & a+8 & \boxed{2a+b+16} \\
 & & 2 & 8 & 24 & \\
\hline
 & 1 & 4 & 12 & \boxed{a+32} &
\end{array}$$

x^4+ax+b가 $(x-2)^2$으로 나누어떨어지므로

$2a+b+16=0$, $a+32=0$

$\therefore\ a=-32,\ b=48$

따라서 $x^4-32x+48=(x-2)^2(x^2+4x+12)$이므로

$Q(x)=x^2+4x+12$

$\therefore\ a+b+Q(2)=-32+48+24=40$ 　 답 40

$Q(2)=4+8+12$
$=24$

15 전략 조립제법을 이용하여 주어진 등식의 좌변을 인수분해한다.

풀이

1	1	3	−1	−3
		1	4	3
	1	4	3	0

위의 조립제법에서

$x^3+3x^2-x-3=(x-1)(x^2+4x+3)$
$=(x-1)(x+1)(x+3)$
$=(x^2-1)(x+3)$

따라서 $P(x)=x+3$이므로 　 $P(1)=4$ 　 답 ④

참고 다항식 $P(x)$는 x^3+3x^2-x-3을 x^2-1로 나누었을 때의 몫과 같으므로 다항식의 나눗셈을 이용하여 $P(x)$를 구할 수도 있다.

$(x^2-1)(x+3)$
$=(x^2-1)P(x)$
이므로
$P(x)=x+3$

16 전략 조립제법을 연속으로 이용하여 미정계수를 구한다.

풀이

1	1	3	−8	−6
		1	4	−4
1	1	4	−4	−10
		1	5	
1	1	5	1	
		1		
	1	6		

위의 조립제법에서

x^3+3x^2-8x-6
$=(x-1)(x^2+4x-4)-10$
$=(x-1)\{(x-1)(x+5)+1\}-10$
$=(x-1)[(x-1)\{(x-1)+6\}+1]-10$
$=(x-1)\{(x-1)^2+6(x-1)+1\}-10$
$=(x-1)^3+6(x-1)^2+(x-1)-10$

따라서 $a=6,\ b=1,\ c=-10$이므로

$a+2b+c=-2$ 　 답 −2

다른 풀이 주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$c=-10$

주어진 등식의 양변에 $x=0$을 대입하면

$a-b=5$ 　 …… ㉠

주어진 등식의 양변에 $x=2$를 대입하면

$a+b=7$ 　 …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 　 $a=6,\ b=1$

$\therefore\ a+2b+c=-2$

17 전략 네 일차식의 곱에서 공통부분이 생기도록 두 개씩 짝을 지어 전개한 후 주어진 식을 변형한다.

풀이 $(x-1)(x-3)(x-5)(x-7)+k$

$=\{(x-1)(x-7)\}\{(x-3)(x-5)\}+k$

$=(x^2-8x+7)(x^2-8x+15)+k$ 　 …➊

$x^2-8x=X$로 놓으면

$(x^2-8x+7)(x^2-8x+15)+k$
$=(X+7)(X+15)+k$
$=X^2+22X+105+k$ 　 …… ㉠

주어진 식이 x에 대한 이차식의 완전제곱식으로 인수분해되려면 ㉠이 X에 대한 일차식의 완전제곱식으로 인수분해되어야 한다.

따라서 $105+k=11^2$이므로 　 $k=16$ 　 …➋

답 16

단계	채점 기준	비율
➊	공통부분이 생기도록 전개할 수 있다.	40 %
➋	k의 값을 구할 수 있다.	60 %

18 전략 주어진 다항식의 이차항을 적당히 분리한 후 A^2-B^2 꼴로 변형하여 인수분해한다.

풀이 $x^4+7x^2+16=(x^4+8x^2+16)-x^2$
$=(x^2+4)^2-x^2$
$=(x^2+x+4)(x^2-x+4)$

따라서 $a=1,\ b=4$이므로 　 $a+b=5$ 　 답 ①

19 전략 주어진 식을 전개한 다음 한 문자에 대하여 내림차순으로 정리한다.

풀이 $[a,\ b,\ c]+[b,\ -c,\ -a]+[c,\ a,\ -b]$
$=a^2(b+c)+b^2(-c-a)+c^2(a-b)$
$=a^2b+a^2c-b^2c-ab^2+ac^2-bc^2$
$=(b+c)a^2-(b^2-c^2)a-bc(b+c)$
$=(b+c)a^2-(b+c)(b-c)a-bc(b+c)$
$=(b+c)\{a^2-(b-c)a-bc\}$
$=(b+c)(a-b)(a+c)$
$=(a-b)(b+c)(c+a)$ 　 답 ④

20 전략 $x,\ y$에 대한 다항식을 인수분해한 후 y 대신 yz를 대입한다.

풀이 $2x^2+5xy+3y^2-8x-11y+6$
$=2x^2+(5y-8)x+3y^2-11y+6$
$=2x^2+(5y-8)x+(y-3)(3y-2)$
$=(x+\boxed{y-3})(2x+\boxed{3y-2})$

위의 식에 y 대신 yz를 대입하면

$2x^2+5xyz+3y^2z^2-8x-11yz+6$
$=(x+yz-3)(2x+\boxed{3yz-2})$

따라서 $A=y-3,\ B=3y-2,\ C=3yz-2$이므로

$3A-B+C=3(y-3)-(3y-2)+(3yz-2)$
$=3y-9-3y+2+3yz-2$
$=3yz-9$ 　 답 $3yz-9$

21 전략 주어진 다항식을 인수분해 한 후 $P(a)\neq0$이면 $P(x)$는 $x-a$를 인수로 갖지 않음을 이용한다.

풀이 $x^4-3x^3+4x=x(x^3-3x^2+4)$

$H(x)=x^3-3x^2+4$라 하면

$H(-1)=-1-3+4=0$

조립제법을 이용하여 $H(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & -3 & 0 & 4 \\ & & -1 & 4 & -4 \\ \hline & 1 & -4 & 4 & \boxed{0} \end{array}$$

$x^3-3x^2+4=(x+1)(x^2-4x+4)$
$=(x+1)(x-2)^2$
$\therefore x^4-3x^3+4x=x(x+1)(x-2)^2$ ⋯ ❶

$P(x)$, $Q(x)$는 각각 이차항의 계수가 1인 이차식이고 $P(2)\neq0$, $Q(-1)\neq0$이므로

$P(x)=x(x+1)$, $Q(x)=(x-2)^2$ ⋯ ❷
$\therefore P(-2)+Q(3)=2+1=3$ ⋯ ❸

답 3

단계	채점 기준	비율
❶	주어진 식을 인수분해할 수 있다.	40 %
❷	$P(x)$, $Q(x)$를 구할 수 있다.	40 %
❸	$P(-2)+Q(3)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

22 전략 주어진 식의 좌변을 인수분해한 후 식을 변형하여 실수의 성질을 이용한다.

풀이 $a^3+b^3+c^3-3abc$
$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$
$=(a+b+c)\cdot\frac{1}{2}(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca)$
$=(a+b+c)\cdot\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$
$=\frac{1}{2}(a+b+c)\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$

즉 $\frac{1}{2}(a+b+c)\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}=0$이고 $a+b+c>0$이므로

$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$
$a-b=0$, $b-c=0$, $c-a=0$
$\therefore a=b=c$

따라서 주어진 삼각형은 정삼각형이다. 답 정삼각형

23 전략 인수분해 공식과 곱셈 공식을 이용하여 주어진 값을 이용할 수 있도록 식을 변형한다.

풀이 $(a^3-b^3)(a^3+b^3)$
$=(a-b)(a^2+ab+b^2)(a+b)(a^2-ab+b^2)$
$=(a-b)(a+b)(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$
$=(a^2-b^2)(a^4+a^2b^2+b^4)$
$=(a^2-b^2)\{(a^2-b^2)^2+3a^2b^2\}$
$=3\cdot\{3^2+3\cdot(2\sqrt{3})^2\}=135$ 답 ⑤

24 전략 $x^4-y^4=(x^2+y^2)(x^2-y^2)$
$=(x^2+y^2)(x+y)(x-y)$
임을 이용하여 주어진 등식의 좌변을 인수분해한다.

풀이 $11^4-6^4=(11^2+6^2)(11^2-6^2)$
$=157\cdot(11+6)(11-6)$
$=5\cdot17\cdot157$

따라서 $a=5$, $b=17$이므로 $a+b=22$ 답 ②

Q BOX

$P(x)$는 $x-2$를 인수로 갖지 않고, $Q(x)$는 $x+1$을 인수로 갖지 않는다.

$P(-2)$
$=-2\cdot(-2+1)$
$=2$,
$Q(3)=(3-2)^2=1$

ㄷ. $-1+i^2=-1-1$
$=-2$
ㅁ. $i-\sqrt{2}i=(1-\sqrt{2})i$

$b=2$를 $a+b=-1$에 대입하면
$a+2=-1$
$\therefore a=-3$

A, B, C가 실수일 때, $A^2+B^2+C^2=0$이면 $A=B=C=0$

$-2a+b=6$ ⋯ ㉠
$3a-4b=-4$ ⋯ ㉡
㉠×4+㉡을 하면
$-5a=20$
$\therefore a=-4$
$a=-4$를 ㉠에 대입하면
$8+b=6$
$\therefore b=-2$

복소수의 사칙연산은 i를 문자처럼 생각하고 계산한다.

03 복소수

07 복소수의 사칙연산

Lecture 12 복소수 Ⓛ 40쪽

1-1 답 (1) 실수부분: 1, 허수부분: 3
(2) 실수부분: 4, 허수부분: -7
(3) 실수부분: $\frac{3}{2}$, 허수부분: $-\frac{5}{2}$
(4) 실수부분: $\sqrt{6}$, 허수부분: 0

2-1 답 (1) ㄱ, ㄷ, ㅁ (2) ㄴ, ㄹ

2-2 답 ㄱ, ㄹ, ㅁ

Lecture 13 복소수가 서로 같을 조건, 켤레복소수 Ⓛ 41쪽

1-1 (3) $a-1=3$, $b+2=8$이므로
$a=4$, $b=6$
(4) $2a+1=5$, $b-9=-4$이므로
$a=2$, $b=5$
답 (1) $a=2$, $b=-3$ (2) $a=0$, $b=-6$
(3) $a=4$, $b=6$ (4) $a=2$, $b=5$

1-2 (1) $a+b=-1$, $b-7=-5$이므로
$a=-3$, $b=2$
(2) $-2a+b=6$, $3a-4b=-4$이므로 두 식을 연립하여 풀면
$a=-4$, $b=-2$
답 (1) $a=-3$, $b=2$ (2) $a=-4$, $b=-2$

2-1 답 (1) $1-4i$ (2) $2i-3$ (3) -12 (4) $-9i$

2-2 답 (1) $a=3$, $b=6$ (2) $a=7$, $b=1$
(3) $a=\sqrt{2}$, $b=0$ (4) $a=7$, $b=-5$

Lecture 14 복소수의 사칙연산 Ⓛ 42쪽

1-1 (1) $(1-2i)+(3+i)=(1+3)+(-2+1)i$
$=4-i$
(2) $(6+4i)+(-7-10i)=(6-7)+(4-10)i$
$=-1-6i$
(3) $(-4+3i)-(5-8i)=(-4-5)+\{3-(-8)\}i$
$=-9+11i$

(4) $(9-3i)-(5-7i)=(9-5)+\{-3-(-7)\}i$
$=4+4i$

답 (1) $4-i$ (2) $-1-6i$ (3) $-9+11i$ (4) $4+4i$

1-2 $(4-9i)-(-5+3i)+(-11-2i)$
$=\{4-(-5)-11\}+(-9-3-2)i$
$=-2-14i$

답 $-2-14i$

2-1 (1) $(2+i)(1+4i)=2+8i+i+4i^2$
$=2+9i+4\cdot(-1)$
$=-2+9i$

(2) $(5-i)(-1-3i)=-5-15i+i+3i^2$
$=-5-14i+3\cdot(-1)$
$=-8-14i$

(3) $(4-i)^2=16-8i+i^2=16-8i-1=15-8i$

(4) $(3+2i)(3-2i)=9-4i^2=9-4\cdot(-1)=13$

답 (1) $-2+9i$ (2) $-8-14i$ (3) $15-8i$ (4) 13

2-2 (1) $\dfrac{2}{1+i}=\dfrac{2(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\dfrac{2(1-i)}{1-i^2}$
$=\dfrac{2(1-i)}{1+1}=1-i$

(2) $\dfrac{3i}{1-2i}=\dfrac{3i(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)}=\dfrac{3i+6i^2}{1-4i^2}$
$=\dfrac{3i-6}{1+4}=-\dfrac{6}{5}+\dfrac{3}{5}i$

(3) $\dfrac{1-i}{3+2i}=\dfrac{(1-i)(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)}=\dfrac{3-2i-3i+2i^2}{9-4i^2}$
$=\dfrac{3-5i-2}{9+4}=\dfrac{1}{13}-\dfrac{5}{13}i$

(4) $\dfrac{6+i}{2i}=\dfrac{(6+i)i}{2i\cdot i}=\dfrac{6i+i^2}{2i^2}=\dfrac{6i-1}{-2}=\dfrac{1}{2}-3i$

답 (1) $1-i$ (2) $-\dfrac{6}{5}+\dfrac{3}{5}i$ (3) $\dfrac{1}{13}-\dfrac{5}{13}i$ (4) $\dfrac{1}{2}-3i$

Lecture 15 켤레복소수의 성질

43쪽

1-1 (2) $\overline{(\overline{z})}=z=5-2i$

(3) $z+\overline{z}=(5-2i)+(5+2i)=10$

(4) $z\overline{z}=(5-2i)(5+2i)=25-4i^2=25+4=29$

답 (1) $5+2i$ (2) $5-2i$ (3) 10 (4) 29

1-2 (1) $z_1+z_2=(3+4i)+(-2+i)=1+5i$이므로
$\overline{z_1+z_2}=1-5i$

(2) $\overline{z_1}-\overline{z_2}=(3-4i)-(-2-i)=5-3i$

$\overline{z_1}-\overline{z_2}=\overline{z_1-z_2}$를 계산해도 된다.

(3) $z_1z_2=(3+4i)(-2+i)=-6+3i-8i+4i^2$
$=-6-5i-4=-10-5i$

이므로 $\overline{z_1z_2}=-10+5i$

(4) $\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}=(3-4i)(-2-i)=-6-3i+8i+4i^2$
$=-6+5i-4=-10+5i$

답 (1) $1-5i$ (2) $5-3i$ (3) $-10+5i$ (4) $-10+5i$

Q BOX

$i^4=1$이므로
$(i^4)^4\cdot i^2=1^4\cdot i^2$
$=i^2$
$=-1$

2-1 (1) $i^{18}=(i^4)^4\cdot i^2=-1$

(2) $(-i)^{13}=-i^{13}=-(i^4)^3\cdot i=-i$

(3) $i^{20}+i^{30}=(i^4)^5+(i^4)^7\cdot i^2=1+(-1)=0$

(4) $i^{25}=(i^4)^6\cdot i=i$이므로
$\dfrac{1}{i^{25}}=\dfrac{1}{i}=\dfrac{i}{i^2}=-i$

답 (1) -1 (2) $-i$ (3) 0 (4) $-i$

2-2 (1) $(1+i)^2=1+2i+i^2=2i$이므로
$(1+i)^4=\{(1+i)^2\}^2=(2i)^2=4i^2=-4$

(2) $\dfrac{1-i}{1+i}=\dfrac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=\dfrac{-2i}{2}=-i$이므로
$\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^6=(-i)^6=i^6=i^4\cdot i^2=-1$

답 (1) -4 (2) -1

기본+표준 유형 Q+Q

44쪽

01 ④ $2-i$의 실수부분은 2, 허수부분은 -1이다.

답 ④

02 허수는 $-2i$, $1+i$, $5+\sqrt{-1}=5+i$의 3개이다.

$3+i^2=3-1=2$이므로 실수이다.

답 3

03 $(3+5i)-2(1-i)+(4i-7)$
$=3+5i-2+2i+4i-7$
$=-6+11i$

답 ⑤

04 $(5-i)(3+2i)+\dfrac{4+3i}{2-i}$
$=15+10i-3i+2+\dfrac{(4+3i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}$
$=17+7i+\dfrac{8+4i+6i-3}{4+1}$
$=17+7i+1+2i=18+9i$

답 $18+9i$

05 $z=1-\sqrt{2}i$에서 $z-1=-\sqrt{2}i$

양변을 제곱하면 $z^2-2z+1=-2$

$\therefore z^2-2z=-3$

$\therefore z^2-2z+5=-3+5=2$

답 ⑤

다른 풀이 $z^2-2z+5=(1-\sqrt{2}i)^2-2(1-\sqrt{2}i)+5$
$=1-2\sqrt{2}i-2-2+2\sqrt{2}i+5$
$=2$

06 $x=\dfrac{5+i}{1-i}=\dfrac{(5+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=2+3i$에서
$x-2=3i$

양변을 제곱하면 $\quad x^2-4x+4=-9$

$\therefore x^2-4x+13=0$

$\therefore x^3-4x^2+14x-3=x(x^2-4x+13)+x-3$

$=x-3=2+3i-3$

$=-1+3i$ 답 ③

07 $z=x(2-i)+3(-4+i)=(2x-12)+(-x+3)i$

z^2이 음의 실수가 되려면 z는 순허수이어야 하므로

$2x-12=0,\ -x+3\neq0$

$\therefore x=6$ 답 6

08 z^2이 실수가 되려면 z의 실수부분이 0 또는 허수부분이 0이어야 하므로

$a^2-5a+6=0$ 또는 $a-2=0$

$\therefore a=2$ 또는 $a=3$

따라서 모든 실수 a의 값의 합은

$2+3=5$ 답 ③

09 $x(3-2i)-y(2+i)=5-i$에서

$3x-2xi-2y-yi=5-i$

$(3x-2y)+(-2x-y)i=5-i$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$3x-2y=5,\ -2x-y=-1$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$x=1,\ y=-1$

$\therefore x^2+y^2=2$ 답 ①

10 $x^2+y^2i-2x+2yi-3-8i=0$에서

$(x^2-2x-3)+(y^2+2y-8)i=0$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$x^2-2x-3=0,\ y^2+2y-8=0$

$x^2-2x-3=0$에서 $\quad (x+1)(x-3)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=3$

$y^2+2y-8=0$에서 $\quad (y+4)(y-2)=0$

$\therefore y=-4$ 또는 $y=2$

$\therefore xy=-12$ 또는 $xy=-2$ 또는 $xy=4$

또는 $xy=6$

따라서 xy의 값이 될 수 없는 것은 ②이다. 답 ②

11 $\bar{z}=2-3i$에서 $\quad z=2+3i$

따라서 $(x-4)+(2x-y-1)i=2+3i$이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$x-4=2,\ 2x-y-1=3$

$\therefore x=6,\ y=8$ 답 $x=6,\ y=8$

12 $z=1-i$에서 $\bar{z}=1+i$이므로

$z+\bar{z}=(1-i)+(1+i)=2,$

$z\bar{z}=(1-i)(1+i)=1+1=2$

$\therefore z^2\bar{z}+z\bar{z}^2=z\bar{z}(z+\bar{z})=2\cdot2=4$ 답 4

Q BOX

복소수와 그 켤레복소수의 합과 곱은 항상 실수이다.

복소수 $z=a+bi$ (a, b는 실수)에 대하여 z^2이 음의 실수

➡ z가 순허수

➡ $a=0,\ b\neq0$

$(a-2)(a-3)=0$

$-2x-y=-1$에서

$y=-2x+1$이므로

$3x-2y=5$에 대입하면

$3x-2(-2x+1)=5$

$7x=7 \quad \therefore x=1$

$x=1$을 $y=-2x+1$에 대입하면

$y=-1$

13 $\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}=\dfrac{x^2+y^2}{xy}$

$=\dfrac{(x+y)^2-2xy}{xy}$ ...... ㉠

$x+y=(2+i)+(2-i)=4,\ xy=(2+i)(2-i)=5$이므로 ㉠에서

$\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}=\dfrac{4^2-2\cdot5}{5}=\dfrac{6}{5}$ 답 ②

다른 풀이 $\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}=\dfrac{2-i}{2+i}+\dfrac{2+i}{2-i}$

$=\dfrac{(2-i)^2+(2+i)^2}{(2+i)(2-i)}$

$=\dfrac{4-4i-1+4+4i-1}{5}$

$=\dfrac{6}{5}$

14 $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$ ...... ㉠

$x+y=\dfrac{1-i}{4}+\dfrac{1+i}{4}=\dfrac{1}{2},\ xy=\dfrac{1-i}{4}\cdot\dfrac{1+i}{4}=\dfrac{1}{8}$

이므로 ㉠에서

$x^3+y^3=\left(\dfrac{1}{2}\right)^3-3\cdot\dfrac{1}{8}\cdot\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{16}$ 답 ⑤

15 $z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면

$\bar{z}=a-bi$

ㄱ. $z=-\bar{z}$에서 $\quad a+bi=-(a-bi)$

$2a=0 \quad \therefore a=0$

따라서 z는 0 또는 순허수이다.

ㄴ. $z\bar{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2=0$이면

$a=0,\ b=0 \quad \therefore z=0$

따라서 $z\bar{z}=0$이면 $z=0$이다.

ㄷ. $\bar{z}=a-bi$가 순허수이면 $\quad a=0,\ b\neq0$

따라서 $z=bi$이므로 z도 순허수이다.

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ④

16 $z=\bar{z}$이고 $z\neq0$이므로 z는 0이 아닌 실수이다.

$z=(2x^2-3x-2)+(x^2-4)i$에서

$2x^2-3x-2\neq0,\ x^2-4=0$

$2x^2-3x-2\neq0$에서 $\quad (2x+1)(x-2)\neq0$

$\therefore x\neq-\dfrac{1}{2},\ x\neq2$ ...... ㉠

$x^2-4=0$에서 $\quad x^2=4$

$\therefore x=\pm2$ ...... ㉡

㉠, ㉡에서 $\quad x=-2$ 답 -2

17 $\alpha\bar{\alpha}+\bar{\alpha}\beta+\alpha\bar{\beta}+\beta\bar{\beta}=\bar{\alpha}(\alpha+\beta)+\bar{\beta}(\alpha+\beta)$

$=(\alpha+\beta)(\bar{\alpha}+\bar{\beta})$

$=(\alpha+\beta)(\overline{\alpha+\beta})$

$=(5+3i)(5-3i)$

$=34$ 답 ④

18 $(z_1-1)(z_2+1)$

$=z_1z_2+(z_1-z_2)-1$ ...... ㉠

$\overline{z_1}-\overline{z_2}=\overline{z_1-z_2}=4-3i$이므로

$z_1-z_2=4+3i$

$\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}=\overline{z_1z_2}=-6+2i$이므로

$z_1z_2=-6-2i$

따라서 ㉠에서

$(z_1-1)(z_2+1)=(-6-2i)+(4+3i)-1$

$=-3+i$ 답 $-3+i$

19 $z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면 $\overline{z}=a-bi$이므로

$(2-i)z+3i\overline{z}=-2-4i$에서

$(2-i)(a+bi)+3i(a-bi)=-2-4i$

$2a+2bi-ai+b+3ai+3b=-2-4i$

$(2a+4b)+(2a+2b)i=-2-4i$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$2a+4b=-2$, $2a+2b=-4$

$\therefore a+2b=-1$, $a+b=-2$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=-3$, $b=1$

$\therefore z=-3+i$ 답 ②

Q BOX

$a+2b=-1$,
$a+b=-2$를 변끼리 빼면
$b=1$
$b=1$을 $a+b=-2$에 대입하면
$a+1=-2$
$\therefore a=-3$

20 $z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면 $\overline{z}=a-bi$이므로

$z+\overline{z}=2$, $z\overline{z}=10$에서

$(a+bi)+(a-bi)=2$, $(a+bi)(a-bi)=10$

$2a=2$, $a^2+b^2=10$

$\therefore a=1$, $b=\pm3$

$\therefore z=1\pm3i$ 답 $1\pm3i$

21 $i=i^5=i^9=\cdots=i^{2021}$, $i^2=i^6=i^{10}=\cdots=i^{2022}=-1$,

$i^3=i^7=i^{11}=\cdots=i^{2023}=-i$, $i^4=i^8=i^{12}=\cdots=i^{2024}=1$

이므로

$i+i^2+i^3+\cdots+i^{2024}$

$=(i-1-i+1)+(i-1-i+1)+\cdots+(i-1-i+1)$

$=0$ 답 ③

22 $i=i^5=i^9$, $i^2=i^6=-1$, $i^3=i^7=-i$, $i^4=i^8=1$

이므로

$\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\cdots+\frac{1}{i^9}$

$=\left(\frac{1}{i}-1-\frac{1}{i}+1\right)+\left(\frac{1}{i}-1-\frac{1}{i}+1\right)+\frac{1}{i}$

$=\frac{1}{i}=\frac{i}{i^2}=-i$

따라서 $-i=a+bi$이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$a=0$, $b=-1$

$\therefore a+b=-1$ 답 -1

23 $(1-i)^{100}=\{(1-i)^2\}^{50}=(-2i)^{50}=(2i)^{50}$

$=2^{50}\cdot(i^4)^{12}\cdot i^2=-2^{50}$,

$(1+i)^{100}=\{(1+i)^2\}^{50}=(2i)^{50}$

$=2^{50}\cdot(i^4)^{12}\cdot i^2=-2^{50}$

$\therefore (1-i)^{100}-(1+i)^{100}=-2^{50}-(-2^{50})=0$

답 ③

24 $\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=\frac{-2i}{2}=-i$,

$\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\frac{2i}{2}=i$

$\therefore \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{20}+\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{20}=(-i)^{20}+i^{20}$

$=i^{20}+i^{20}$

$=(i^4)^5+(i^4)^5$

$=2$ 답 ⑤

08 음수의 제곱근

Lecture 16 음수의 제곱근

48쪽

1-1 (2) $\sqrt{-16}=\sqrt{16}i=4i$

(3) $-\sqrt{-24}=-\sqrt{24}i=-2\sqrt{6}i$

(4) $\sqrt{-\frac{4}{9}}=\sqrt{\frac{4}{9}}i=\frac{2}{3}i$

답 (1) $\sqrt{7}i$ (2) $4i$ (3) $-2\sqrt{6}i$ (4) $\frac{2}{3}i$

1-2 (1) $\pm\sqrt{-18}=\pm\sqrt{18}i=\pm3\sqrt{2}i$

(2) $\pm\sqrt{-\frac{1}{25}}=\pm\sqrt{\frac{1}{25}}i=\pm\frac{1}{5}i$

답 (1) $\pm3\sqrt{2}i$ (2) $\pm\frac{1}{5}i$

쌤 한마디

a의 제곱근

실수 a에 대하여 제곱하여 a가 되는 수를 a의 제곱근이라 한다.

즉 $x^2=a$일 때 x를 a의 제곱근이라 한다.

2-1 (1) $\sqrt{-2}\sqrt{-5}=\sqrt{2}i\cdot\sqrt{5}i=\sqrt{10}i^2=-\sqrt{10}$

(2) $\sqrt{3}\sqrt{-12}=\sqrt{3}\sqrt{12}i=\sqrt{36}i=6i$

(3) $\frac{\sqrt{-30}}{\sqrt{-5}}=\frac{\sqrt{30}i}{\sqrt{5}i}=\sqrt{6}$

(4) $\frac{\sqrt{21}}{\sqrt{-7}}=\frac{\sqrt{21}}{\sqrt{7}i}=\frac{\sqrt{3}i}{i^2}=-\sqrt{3}i$

답 (1) $-\sqrt{10}$ (2) $6i$ (3) $\sqrt{6}$ (4) $-\sqrt{3}i$

① $a<0$, $b<0$일 때
$\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$
② $a>0$, $b<0$일 때
$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\frac{a}{b}}$

2-2 $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$에서

$a<0$, $b<0$ 또는 $a=0$ 또는 $b=0$

따라서 구하는 순서쌍 (a, b)는 ㄱ, ㄹ, ㅁ이다.

답 ㄱ, ㄹ, ㅁ

$a=0$일 때,
$\sqrt{a}\sqrt{b}=0\cdot\sqrt{b}=0$,
$-\sqrt{ab}=-\sqrt{0\cdot b}=0$
이므로 b의 값에 관계없이 주어진 등식이 성립한다.

기본+표준 유형 Q+Q

49쪽

01 ① $\sqrt{-3}\sqrt{5}=\sqrt{-15}$

③ $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{-5}}=-\sqrt{-\dfrac{3}{5}}$

④ $\dfrac{\sqrt{-3}}{\sqrt{-5}}=\sqrt{\dfrac{3}{5}}$

⑤ $\dfrac{\sqrt{-3}}{\sqrt{5}}=\sqrt{-\dfrac{3}{5}}$ 답 ②

02 $\sqrt{-2}\sqrt{-8}+\sqrt{-4}\sqrt{9}+\dfrac{\sqrt{-12}}{\sqrt{-3}}+\dfrac{\sqrt{100}}{\sqrt{-4}}$

$=-\sqrt{16}+\sqrt{-36}+\sqrt{4}-\sqrt{-25}$

$=-4+6i+2-5i$

$=-2+i$

따라서 $-2+i=a+bi$이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$a=-2,\ b=1$

$\therefore ab=-2$ 답 ①

03 $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$에서

$a<0,\ b<0\ (\because ab\neq0)$

따라서 $-a>0$이므로

$\dfrac{\sqrt{-a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{-\dfrac{a}{b}}$ 답 ①

04 $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\dfrac{a}{b}}$에서

$a>0,\ b<0\ (\because ab\neq0)$

따라서 $a-b>0$이므로

$\sqrt{(a-b)^2}-|b|=(a-b)-(-b)$

$=a$ 답 a

쌤 한마디

$\sqrt{x^2}$의 성질

$\sqrt{x^2}=\begin{cases} x\ (x\geq0) & ⇨\ \sqrt{(\text{양수})^2}=(\text{양수}),\ \sqrt{0^2}=0 \\ -x\ (x<0) & ⇨\ \sqrt{(\text{음수})^2}=-(\text{음수}) \end{cases}$

중단원 마무리

50쪽

01 전략 실수부분이 0인 허수를 찾는다.

풀이 순허수는 $4i$, $\sqrt{5}i$, $-\sqrt{-1}=-i$의 3개이다. 답 3

02 전략 허수단위 i를 문자처럼 생각하여 주어진 식을 전개한다.

풀이 $(1+i)\left(1-\dfrac{1}{i}\right)=1-\dfrac{1}{i}+i-1=-\dfrac{1}{i}+i$

$=-\dfrac{i}{i^2}+i=2i$ 답 ⑤

Q BOX

① $a<0$, $b<0$ 이외의 경우에는 $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$

② $a>0$, $b<0$ 이외의 경우에는 $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$ (단, $b\neq0$)

① $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

② $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

$a=ki$ (k는 실수)라 하면

$a^2=(ki)^2=k^2i^2=-k^2$

$b=mi$, $c=ni$ (m, n은 실수)라 하면

$bc=mi\cdot ni=-mn$

$|x|=\begin{cases} x & (x\geq0) \\ -x & (x<0) \end{cases}$

$i^2=-1$이므로 실수이다.

03 전략 주어진 규칙에 따라 $f(1,\ 2)$, $f(2,\ 4)$, $\cdots$, $f(10,\ 20)$을 복소수로 나타낸 후 분모의 켤레복소수를 분자, 분모에 곱하여 식을 간단히 한다.

풀이 $f(1,\ 2)+f(2,\ 4)+f(3,\ 6)+\cdots+f(10,\ 20)$

$=\dfrac{1+2i}{1-2i}+\dfrac{2+4i}{2-4i}+\dfrac{3+6i}{3-6i}+\cdots+\dfrac{10+20i}{10-20i}$

$=\dfrac{1+2i}{1-2i}+\dfrac{1+2i}{1-2i}+\dfrac{1+2i}{1-2i}+\cdots+\dfrac{1+2i}{1-2i}$

$=10\cdot\dfrac{1+2i}{1-2i}=10\cdot\dfrac{(1+2i)^2}{(1-2i)(1+2i)}$

$=10\cdot\dfrac{-3+4i}{5}=-6+8i$ 답 ②

04 전략 a^2-bc의 값이 최소인 것은 a^2이 최소이고 bc가 최대인 경우임을 이용한다.

풀이 a^2-bc는 a^2이 최소이고 bc가 최대일 때 최솟값을 갖는다.

다트판에 적힌 6개의 복소수 중 제곱의 값이 가장 작은 것은 허수부분의 절댓값이 가장 큰 경우이므로 a^2의 최솟값은

$(5i)^2=-25$

한편 다트판에 적힌 6개의 복소수 중 두 수의 곱이 가장 큰 것은 허수부분의 곱이 음수이면서 그 절댓값이 가장 큰 경우이므로 bc의 최댓값은

$5i\cdot(-4i)=-20i^2=20$

따라서 a^2-bc의 최솟값은

$-25-20=-45$ 답 ③

쌤 한마디

허수에서는 대소 관계가 존재하지 않는다. 그러나 주어진 다트판에 적힌 수는 0 또는 순허수이므로 a^2, bc는 모두 실수이다.
따라서 a^2-bc의 최솟값이 존재한다.

05 전략 주어진 복소수를 (실수부분)+(허수부분)i의 꼴로 정리한 후 허수부분이 0임을 이용한다.

풀이 $x(1+xi)-(i-3)$

$=x+x^2i-i+3$

$=(x+3)+(x^2-1)i$ …… ㉠

㉠이 실수가 되려면 ㉠의 허수부분이 0이어야 하므로

$x^2-1=0,\quad (x+1)(x-1)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=1$

따라서 모든 실수 x의 값의 합은 0이다. 답 0

06 전략 주어진 등식의 좌변을 (실수부분)+(허수부분)i의 꼴로 정리한 후 복소수가 서로 같을 조건을 이용한다.

풀이 $\dfrac{2a}{1-i}+3i=2+bi$에서

$\dfrac{2a(1+i)}{(1-i)(1+i)}+3i=2+bi$

$a(1+i)+3i=2+bi$

$a+(a+3)i=2+bi$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$a=2,\ a+3=b$

$\therefore a=2,\ b=5$

$\therefore a+b=7$ 답 ②

07 전략 먼저 $x^3+x^2y-xy^2-y^3$을 인수분해하여 간단히 한 후 주어진 x, y의 값을 대입한다.

풀이 $x^3+x^2y-xy^2-y^3$

$=x^2(x+y)-y^2(x+y)$

$=(x^2-y^2)(x+y)$

$=(x-y)(x+y)^2$ …… ㉠

$x=-2+3i$, $y=2+3i$이므로

$x-y=-4,\ x+y=6i$

따라서 ㉠에서

$x^3+x^2y-xy^2-y^3=(-4)\cdot(6i)^2=144$ 답 ①

08 전략 $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$의 값을 이용한다.

풀이 $\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2-\alpha\beta$

$=(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta$ …… ㉠

··· ❶

$\alpha+\beta=\dfrac{1+i}{2i}+\dfrac{i-1}{2i}=1,$

$\alpha\beta=\dfrac{1+i}{2i}\cdot\dfrac{i-1}{2i}=\dfrac{-1-1}{-4}=\dfrac{1}{2}$ ··· ❷

이므로 ㉠에서

$\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2=1^2-\dfrac{1}{2}$

$=\dfrac{1}{2}$ ··· ❸

답 $\dfrac{1}{2}$

단계	채점 기준	비율
❶	주어진 식을 변형할 수 있다.	30 %
❷	$\alpha+\beta$, $\alpha\beta$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸	주어진 식의 값을 구할 수 있다.	30 %

09 전략 $\bar{z}=a-bi$임을 이용하여 $\dfrac{z}{\bar{z}}$를 구한 후 실수부분이 0이 되기 위한 a, b의 조건을 찾는다.

풀이 $\dfrac{z}{\bar{z}}=\dfrac{a+bi}{a-bi}=\dfrac{(a+bi)^2}{(a-bi)(a+bi)}$

$=\dfrac{a^2+2abi-b^2}{a^2+b^2}=\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}+\dfrac{2ab}{a^2+b^2}i$

이므로 $\dfrac{z}{\bar{z}}$의 실수부분이 0이 되려면

$a^2-b^2=0$, 즉 $(a+b)(a-b)=0$

이어야 한다.

이때 a, b가 자연수이므로 $a-b=0$

$\therefore a=b$

또 a, b는 5 이하의 자연수이므로 조건을 만족시키는 복소수 z는

$1+i,\ 2+2i,\ 3+3i,\ 4+4i,\ 5+5i$

의 5개이다. 답 ⑤

Q BOX

$z_1=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면

$z_1\overline{z_1}$

$=(a+bi)(a-bi)$

$=a^2+b^2$

$z_1\overline{z_2}=1$에서

$z_1=\dfrac{1}{\overline{z_2}}$이므로

$\overline{z_1}=\overline{\left(\dfrac{1}{\overline{z_2}}\right)}=\dfrac{1}{z_2}$

임을 이용할 수도 있다.

실수의 켤레복소수는 자기 자신이다.

① $-4+1=-3$

$z=a-i$이므로

$\bar{z}=a+i$

10 전략 복소수의 연산과 켤레복소수의 성질을 이용한다.

풀이 ㄱ. $\overline{z_1}=z_2$이면 $z_1z_2=z_1\overline{z_1}$이므로 z_1z_2는 실수이다.

ㄴ. $\overline{z_1}+\overline{z_2}=0$이면

$z_1+z_2=\overline{(\overline{z_1}+\overline{z_2})}=\bar{0}=0$

ㄷ. $z_1\overline{z_2}=1$이면 $\dfrac{1}{z_1}=\overline{z_2}$

$\overline{(z_1\overline{z_2})}=1$에서 $\overline{z_1}z_2=1$이므로 $\overline{z_1}=\dfrac{1}{z_2}$

$\therefore \overline{z_1}+\dfrac{1}{z_1}=\dfrac{1}{z_2}+\overline{z_2}=\overline{z_2}+\dfrac{1}{z_2}$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

11 전략 $\overline{(\alpha+\bar{\beta})}=\bar{\alpha}+\beta$, $\overline{(\alpha\bar{\beta})}=\bar{\alpha}\beta$임을 이용한다.

풀이 $\dfrac{1}{\bar{\alpha}}+\dfrac{1}{\beta}=\dfrac{\bar{\alpha}+\beta}{\bar{\alpha}\beta}$ …… ㉠

$\alpha+\bar{\beta}=i$이므로 $\bar{\alpha}+\beta=\overline{(\alpha+\bar{\beta})}=\bar{i}=-i$

$\alpha\bar{\beta}=-1$이므로 $\bar{\alpha}\beta=\overline{(\alpha\bar{\beta})}=\overline{-1}=-1$

따라서 ㉠에서

$\dfrac{1}{\bar{\alpha}}+\dfrac{1}{\beta}=\dfrac{-i}{-1}=i$ 답 ④

12 전략 $z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하고 주어진 식을 간단히 정리한 후 a, b 사이의 관계식을 구한다.

풀이 $z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면 $\bar{z}=a-bi$이므로

$\dfrac{z}{1+i}+\dfrac{\bar{z}}{1-i}$

$=\dfrac{a+bi}{1+i}+\dfrac{a-bi}{1-i}$

$=\dfrac{(a+bi)(1-i)+(a-bi)(1+i)}{(1+i)(1-i)}$

$=\dfrac{a-ai+bi+b+a+ai-bi+b}{2}$

$=a+b$

$\therefore a+b=4$

따라서 $a+b=4$를 만족시키지 않는 것은 ①이다.

답 ①

13 전략 $z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하고 주어진 조건을 이용하여 a, b의 값을 구한다.

풀이 $z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면

$(-2+i)+z=-2+i+a+bi$

$=(a-2)+(b+1)i$

조건 (가)에서 이 복소수가 음의 실수이므로

$a-2<0,\ b+1=0$

$\therefore a<2,\ b=-1$

조건 (나)에서 $z\bar{z}=8$이므로

$(a-i)(a+i)=8$

$a^2+1=8,\quad a^2=7$

$\therefore a=\pm\sqrt{7}$

그런데 $a<2$이므로 $a=-\sqrt{7}$

따라서 $z=-\sqrt{7}-i$이므로

$z+\bar{z}=(-\sqrt{7}-i)+(-\sqrt{7}+i)$

$=-2\sqrt{7}$ 답 $-2\sqrt{7}$

14 전략 i^n (n은 자연수)의 값은 i, -1, $-i$, 1이 이 순서대로 반복되어 나타남을 이용한다.

풀이 $i=i^5=i^9=\cdots$, $i^2=i^6=i^{10}=\cdots=-1$,
$i^3=i^7=i^{11}=\cdots=-i$, $i^4=i^8=i^{12}=\cdots=1$이므로

$$\begin{aligned}&1+i+i^2+i^3+\cdots\\&=1+i-1-i+1+i-1-i+\cdots\\&=(1+i-1-i)+(1+i-1-i)+\cdots\end{aligned}$$

따라서 $f(k)=0$이 되려면 k는 4로 나누었을 때의 나머지가 3이어야 한다. ··· ❶

이때 k는 50 이하의 자연수이므로 3, 7, 11, ···, 47의 12개이다. ··· ❷

답 12

단계	채점 기준	비율
❶	$f(k)=0$을 만족시키는 k의 조건을 구할 수 있다.	70 %
❷	k의 개수를 구할 수 있다.	30 %

15 전략 복소수의 덧셈에서 교환법칙, 결합법칙이 성립함을 이용하여 식을 정리한다.

풀이 $i=i^5=\cdots=i^{17}$, $i^2=i^6=\cdots=i^{18}=-1$,
$i^3=i^7=\cdots=i^{19}=-i$, $i^4=i^8=\cdots=i^{16}=1$이므로

$$\begin{aligned}&(i+i^2)+(i^2+i^3)+(i^3+i^4)+\cdots+(i^{18}+i^{19})\\&=(i+i^2+i^3+\cdots+i^{18})+(i^2+i^3+i^4+\cdots+i^{19})\\&=(i^{17}+i^{18})+(i^{18}+i^{19})\\&=(i-1)+(-1-i)\\&=-2\end{aligned}$$

따라서 $-2=a+bi$이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$a=-2$, $b=0$

$\therefore 4(a+b)^2=16$ 답 16

다른 풀이 $i+i^{19}=i+(-i)=0$이므로

$$\begin{aligned}&(i+i^2)+(i^2+i^3)+(i^3+i^4)+\cdots+(i^{18}+i^{19})\\&=i+\{(i^2+i^2)+(i^3+i^3)+(i^4+i^4)+\cdots+(i^{18}+i^{18})\}\\&\quad+i^{19}\\&=(i^2+i^2)+(i^3+i^3)+(i^4+i^4)+\cdots+(i^{18}+i^{18})\\&=2(i^2+i^3+i^4+\cdots+i^{18})=2\cdot i^{18}\\&=2\cdot i^2=2\cdot(-1)=-2\end{aligned}$$

따라서 $a=-2$, $b=0$이므로 $4(a+b)^2=16$

16 전략 $a<0$, $b<0$일 때, $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$임을 이용한다.

풀이 $3=\sqrt{9}=\sqrt{(-3)(-3)}=-\sqrt{-3}\sqrt{-3}$
$=-(\sqrt{-3})^2=-(-3)=3$ 답 ③

17 전략 복소수의 사칙연산을 이용하여 먼저 z를 $a+bi$ (a, b는 실수) 꼴로 나타낸다.

풀이
$$\begin{aligned}z&=\frac{2-\sqrt{-12}}{2+\sqrt{-12}}=\frac{2-2\sqrt{3}i}{2+2\sqrt{3}i}=\frac{1-\sqrt{3}i}{1+\sqrt{3}i}\\&=\frac{(1-\sqrt{3}i)^2}{(1+\sqrt{3}i)(1-\sqrt{3}i)}=\frac{1-2\sqrt{3}i-3}{4}\\&=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\end{aligned}$$

Q BOX

$i+i^2+i^3+\cdots+i^{18}$
$=(i+i^2+i^3+i^4)$
$+\cdots$
$+(i^{13}+i^{14}+i^{15}+i^{16})$
$+i^{17}+i^{18}$
$=i^{17}+i^{18}$,
$i^2+i^3+i^4+\cdots+i^{19}$
$=(i^2+i^3+i^4+i^5)$
$+\cdots$
$+(i^{14}+i^{15}+i^{16}+i^{17})$
$+i^{18}+i^{19}$
$=i^{18}+i^{19}$

$b<0$, $c>0$이므로
$c-b>0$

$$\begin{aligned}\therefore z\bar{z}&=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\cdot\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\\&=\frac{1+3}{4}=1\end{aligned}$$
답 ③

18 전략 음수의 제곱근의 성질을 이용하여 먼저 a, b, c의 부호를 구한다.

풀이 $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$에서
$a<0$, $b<0$ ($\because ab\neq0$)

$\dfrac{\sqrt{c}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\dfrac{c}{b}}$에서
$b<0$, $c>0$ ($\because bc\neq0$)

$\therefore \sqrt{a^2}-\sqrt{b^2}+|c-b|=-a-(-b)+(c-b)$
$=-a+c$ 답 ②

19 전략 음수의 제곱근의 성질과 복소수가 서로 같을 조건을 이용한다.

풀이 $\sqrt{x}\sqrt{y}=-\sqrt{xy}$에서
$x<0$, $y<0$ 또는 $x=0$ 또는 $y=0$ ······ ㉠

$x^2+2x-(y+3)i=15+4i$에서 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$x^2+2x=15$, $-(y+3)=4$

$x^2+2x=15$에서 $x^2+2x-15=0$
$(x+5)(x-3)=0$ $\therefore x=-5$ ($\because$ ㉠)

$-(y+3)=4$에서 $y+3=-4$
$\therefore y=-7$

따라서 $x=-5$, $y=-7$이므로
$xy=35$ 답 ④

L 03 복소수

04 이차방정식

09 이차방정식의 근과 판별식

Lecture 17 이차방정식의 풀이 54쪽

1-1 (1) $x^2-6x+8=0$에서 $(x-2)(x-4)=0$

$\therefore x=2$ 또는 $x=4$

(2) $9x^2-1=0$에서 $(3x+1)(3x-1)=0$

$\therefore x=-\frac{1}{3}$ 또는 $x=\frac{1}{3}$

(3) $x^2-2x+1=0$에서 $(x-1)^2=0$ $\therefore x=1$

(4) $3x^2-5x-2=0$에서 $(3x+1)(x-2)=0$

$\therefore x=-\frac{1}{3}$ 또는 $x=2$

답 (1) $x=2$ 또는 $x=4$ (2) $x=-\frac{1}{3}$ 또는 $x=\frac{1}{3}$

(3) $x=1$ (4) $x=-\frac{1}{3}$ 또는 $x=2$

1-2 (1) $x=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot1\cdot(-6)}}{2\cdot1}=\frac{-3\pm\sqrt{33}}{2}$

(2) $x=-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-1\cdot7}=1\pm\sqrt{6}i$

(3) $x=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot2\cdot(-5)}}{2\cdot2}=\frac{1\pm\sqrt{41}}{4}$

(4) $x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-3\cdot2}}{3}=\frac{-2\pm\sqrt{2}i}{3}$

답 (1) $x=\frac{-3\pm\sqrt{33}}{2}$ (2) $x=1\pm\sqrt{6}i$

(3) $x=\frac{1\pm\sqrt{41}}{4}$ (4) $x=\frac{-2\pm\sqrt{2}i}{3}$

1-3 (1) $x^2-4x+4=0$에서 $(x-2)^2=0$

$\therefore x=2$

따라서 주어진 이차방정식의 근은 실근이다.

(2) $x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot5\cdot1}}{2\cdot5}=\frac{-1\pm\sqrt{19}i}{10}$

따라서 주어진 이차방정식의 근은 허근이다.

답 (1) $x=2$, 실근 (2) $x=\frac{-1\pm\sqrt{19}i}{10}$, 허근

Lecture 18 이차방정식의 근의 판별 55쪽

1-1 보기에 주어진 각 이차방정식의 판별식을 D라 하면

ㄱ. $\frac{D}{4}=(-3)^2-1\cdot9=0$

ㄴ. $D=(-9)^2-4\cdot1\cdot(-1)=85>0$

ㄷ. $\frac{D}{4}=(-3)^2-7\cdot2=-5<0$

ㄹ. $D=1^2-4\cdot1\cdot\frac{1}{4}=0$

ㅁ. $D=0^2-4\cdot5\cdot(-1)=20>0$

ㅂ. $D=(-1)^2-4\cdot2\cdot3=-23<0$

(1) 서로 다른 두 실근을 가지면 $D>0$이므로

ㄴ, ㅁ

(2) 중근을 가지면 $D=0$이므로 ㄱ, ㄹ

(3) 서로 다른 두 허근을 가지면 $D<0$이므로

ㄷ, ㅂ

답 (1) ㄴ, ㅁ (2) ㄱ, ㄹ (3) ㄷ, ㅂ

Q BOX

x^2의 계수와 상수항의 부호가 다르므로 ㄴ, ㅁ은 서로 다른 두 실근을 가짐을 알 수 있다.

x의 계수가 짝수인 이차방정식
$ax^2+2b'x+c=0$
의 근은
$x=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}$

쌤 한마디

ㄱ에서 $D=(-6)^2-4\cdot1\cdot9=0$임을 이용해도 되지만 $\frac{D}{4}$를 이용하면 계산이 더 간단하다.

1-2 이차방정식 $x^2-3x+k=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-3)^2-4\cdot1\cdot k=9-4k$

(1) 서로 다른 두 실근을 가지려면 $D>0$이어야 하므로

$D=9-4k>0$ $\therefore k<\frac{9}{4}$

(2) 중근을 가지려면 $D=0$이어야 하므로

$D=9-4k=0$ $\therefore k=\frac{9}{4}$

(3) 서로 다른 두 허근을 가지려면 $D<0$이어야 하므로

$D=9-4k<0$ $\therefore k>\frac{9}{4}$

답 (1) $k<\frac{9}{4}$ (2) $\frac{9}{4}$ (3) $k>\frac{9}{4}$

기본+표준 유형 Q+Q 56쪽

01 $2(x-1)^2+1=6+x$에서

$2(x^2-2x+1)+1=6+x$

$2x^2-5x-3=0$, $(2x+1)(x-3)=0$

$\therefore x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=3$ 답 ②

02 $(x+1)(4x-3)=11$에서 $4x^2+x-3=11$

$4x^2+x-14=0$, $(x+2)(4x-7)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=\frac{7}{4}$

따라서 $\alpha=-2$, $\beta=\frac{7}{4}$이므로

$\alpha+4\beta=5$ 답 5

03 $x=\frac{-5\pm\sqrt{5^2-4\cdot1\cdot7}}{2\cdot1}=\frac{-5\pm\sqrt{3}i}{2}$

따라서 $a=-5$, $b=3$이므로

$a+b=-2$ 답 -2

04 $2x(x-3)=-2x+1$에서

$2x^2-6x=-2x+1$, $2x^2-4x-1=0$

$\therefore x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-2\cdot(-1)}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{6}}{2}$

따라서 $\alpha=\frac{2-\sqrt{6}}{2}$이므로 $2\alpha=2-\sqrt{6}$

$\therefore 2\alpha+\sqrt{6}=2$ 답 2

05 이차방정식 $x^2-2kx-k+5=0$의 한 근이 -2이므로

$(-2)^2-2k\cdot(-2)-k+5=0$

$3k+9=0 \quad \therefore k=-3$

$k=-3$을 주어진 이차방정식에 대입하면

$x^2+6x+8=0, \quad (x+4)(x+2)=0$

$\therefore x=-4$ 또는 $x=-2$

따라서 다른 한 근은 -4이다. 답 ③

06 이차방정식 $3x^2-(k+1)x+k-6=0$의 한 근이 $k-2$이므로

$3(k-2)^2-(k+1)(k-2)+k-6=0$

$k^2-5k+4=0, \quad (k-1)(k-4)=0$

$\therefore k=1$ 또는 $k=4$

따라서 모든 실수 k의 값의 합은

$1+4=5$ 답 ③

07 (i) $x<-\frac{1}{2}$일 때, $x^2-(2x+1)=5$이므로

$x^2-2x-6=0 \quad \therefore x=1\pm\sqrt{7}$

그런데 $x<-\frac{1}{2}$이므로 $\quad x=1-\sqrt{7}$

(ii) $x\geq-\frac{1}{2}$일 때, $x^2+(2x+1)=5$이므로

$x^2+2x-4=0 \quad \therefore x=-1\pm\sqrt{5}$

그런데 $x\geq-\frac{1}{2}$이므로 $\quad x=-1+\sqrt{5}$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 근은

$x=1-\sqrt{7}$ 또는 $x=-1+\sqrt{5}$

$\therefore \alpha+\beta=\sqrt{5}-\sqrt{7}$ 답 $\sqrt{5}-\sqrt{7}$

08 $\sqrt{(x-2)^2}=x^2-4$에서 $\quad |x-2|=x^2-4$

(i) $x<2$일 때, $-(x-2)=x^2-4$이므로

$x^2+x-6=0, \quad (x+3)(x-2)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=2$

그런데 $x<2$이므로 $\quad x=-3$

(ii) $x\geq2$일 때, $x-2=x^2-4$이므로

$x^2-x-2=0, \quad (x+1)(x-2)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=2$

그런데 $x\geq2$이므로 $\quad x=2$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 근은

$x=-3$ 또는 $x=2$ 답 $x=-3$ 또는 $x=2$

09 처음 정사각형의 한 변의 길이를 x cm라 하면 새로 만들어진 직사각형의 가로의 길이는 $(x+2)$ cm, 세로의 길이는 $(x-3)$ cm이므로

$(x+2)(x-3)=24, \quad x^2-x-30=0$

$(x+5)(x-6)=0 \quad \therefore x=-5$ 또는 $x=6$

그런데 $x>3$이므로 $\quad x=6$

따라서 처음 정사각형의 한 변의 길이는 6 cm이므로 처음 정사각형의 넓이는 36 cm^{2}이다. 답 ③

QBOX

$x=-2$를 $x^2-2kx-k+5=0$에 대입하면 등식이 성립한다.

$20-2x>0$에서 $x<10$

절댓값 기호를 포함한 방정식은 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 x의 값을 기준으로 범위를 나누어서 푼다.

길이는 양수이므로 $x-3>0$ $\therefore x>3$

계수가 실수인 이차방정식이 실근을 갖지 않으면 서로 다른 두 허근을 갖는다.

10 길의 폭을 x m라 하면 남은 땅의 가로, 세로의 길이는 각각 $(26-x)$ m, $(20-2x)$ m이므로

$(26-x)(20-2x)=264$

$x^2-36x+128=0, \quad (x-4)(x-32)=0$

$\therefore x=4$ 또는 $x=32$

그런데 $0<x<10$이므로 $\quad x=4$

따라서 구하는 길의 폭은 4 m이다. 답 ③

11 주어진 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(7-2k)^2-4k^2>0$

$49-28k>0 \quad \therefore k<\frac{7}{4}$

따라서 자연수 k는 1의 1개이다. 답 ①

12 주어진 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(-5)^2-4(k-1)\geq0$

$29-4k\geq0 \quad \therefore k\leq\frac{29}{4}$

따라서 가장 큰 정수 k의 값은 7이다. 답 7

13 주어진 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=a^2-4(a+3)=0, \quad a^2-4a-12=0$

$(a+2)(a-6)=0 \quad \therefore a=6 \ (\because a>0)$

$a=6$을 주어진 방정식에 대입하면

$x^2+6x+9=0, \quad (x+3)^2=0$

$\therefore x=-3$

따라서 $m=-3$이므로

$a+m=3$ 답 ⑤

14 주어진 방정식이 이차방정식이므로

$k^2-1\neq0, \quad (k+1)(k-1)\neq0$

$\therefore k\neq-1, k\neq1$ …… ㉠

주어진 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(k-1)^2-2(k^2-1)=0$

$k^2+2k-3=0, \quad (k+3)(k-1)=0$

$\therefore k=-3$ 또는 $k=1$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $\quad k=-3$ 답 -3

15 주어진 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=\{-(1-2k)\}^2-4k^2<0$

$1-4k<0 \quad \therefore k>\frac{1}{4}$

따라서 가장 작은 정수 k의 값은 1이다. 답 1

16 주어진 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=3^2-(-k+13)<0$

$k-4<0 \quad \therefore k<4$

따라서 자연수 k는 1, 2, 3이므로 구하는 합은

$1+2+3=6$ 답 6

17 주어진 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-a)^2-(a^2+5a-5)=-5a+5$

$a<1$일 때 $-5a+5>0$이므로 주어진 방정식은 서로 다른 두 실근을 갖는다. 답 ③

$a<1$에서 $-5a>-5$
$\therefore -5a+5>0$

18 이차방정식 $x^2-2ax-b^2-2=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$\frac{D_1}{4}=(-a)^2-(-b^2-2)=0$

$\therefore a^2=-b^2-2$ …… ㉠

이차방정식 $x^2+4ax+4b-5=0$의 판별식을 D_2라 하면

$\frac{D_2}{4}=(2a)^2-(4b-5)$

$=4(-b^2-2)-(4b-5)$ ($\because$ ㉠)

$=-4b^2-4b-3$

$=-4\left(b+\frac{1}{2}\right)^2-2<0$

따라서 이차방정식 $x^2+4ax+4b-5=0$은 서로 다른 두 허근을 갖는다. 답 서로 다른 두 허근

$\left(b+\frac{1}{2}\right)^2\geq 0$이므로
$-4\left(b+\frac{1}{2}\right)^2\leq 0$
$\therefore -4\left(b+\frac{1}{2}\right)^2-2<0$

19 주어진 이차방정식의 판별식을 D라 하면

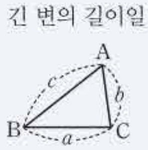
$\frac{D}{4}=b^2-(a^2-c^2)<0$

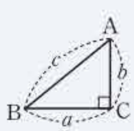
$\therefore b^2+c^2<a^2$

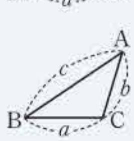
따라서 a, b, c를 세 변의 길이로 하는 삼각형은 둔각삼각형이다. 답 ③

쌤 한마디

$\triangle$ABC에서 $\overline{AB}=c$, $\overline{BC}=a$, $\overline{CA}=b$이고 c가 가장 긴 변의 길이일 때,


$a^2+b^2>c^2$ ➡ $\triangle$ABC는 예각삼각형


$a^2+b^2=c^2$ ➡ $\triangle$ABC는 직각삼각형


$a^2+b^2<c^2$ ➡ $\triangle$ABC는 둔각삼각형

20 주어진 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\{-(a+b+c)\}^2-3(ab+bc+ca)=0$

$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$

$2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca=0$

$(a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)+(c^2-2ca+a^2)=0$

$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$

이때 a, b, c가 실수이므로

$a-b=0$, $b-c=0$, $c-a=0$

$\therefore a=b=c$

따라서 a, b, c를 세 변의 길이로 하는 삼각형은 정삼각형이다. 답 정삼각형

21 주어진 식이 이차식이므로

$k\neq 0$ …… ㉠

또 주어진 이차식이 완전제곱식이 되려면 이차방정식 $kx^2+kx+2=0$이 중근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=k^2-4\cdot k\cdot 2=0$

$k^2-8k=0$, $k(k-8)=0$

$\therefore k=0$ 또는 $k=8$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $k=8$ 답 ⑤

22 주어진 이차식이 완전제곱식이 되려면 x에 대한 이차방정식 $x^2+2kx+2k^2-5k+4=0$이 중근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=k^2-(2k^2-5k+4)=0$

$k^2-5k+4=0$, $(k-1)(k-4)=0$

$\therefore k=1$ 또는 $k=4$

따라서 모든 실수 k의 값의 합은

$1+4=5$ 답 ④

10 이차방정식의 근과 계수의 관계

Lecture 19 이차방정식의 근과 계수의 관계 60쪽

1-1 (1) 이차방정식 $x^2+5x+1=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-\frac{5}{1}=-5$, $\alpha\beta=\frac{1}{1}=1$

(2) 이차방정식 $3x^2-4x+2=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-\frac{-4}{3}=\frac{4}{3}$, $\alpha\beta=\frac{2}{3}$

답 (1) $\alpha+\beta=-5$, $\alpha\beta=1$
(2) $\alpha+\beta=\frac{4}{3}$, $\alpha\beta=\frac{2}{3}$

1-2 이차방정식 $x^2+4x+6=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-\frac{4}{1}=-4$, $\alpha\beta=\frac{6}{1}=6$

(1) $\alpha+\beta+\alpha\beta=-4+6=2$

(2) $\alpha^2\beta+\alpha\beta^2=\alpha\beta(\alpha+\beta)=6\cdot(-4)=-24$

(3) $(\alpha-1)(\beta-1)=\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1$
$=6-(-4)+1=11$

(4) $\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}$
$=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}$
$=\frac{(-4)^2-2\cdot6}{6}=\frac{2}{3}$

답 (1) 2 (2) -24 (3) 11 (4) $\frac{2}{3}$

2-1 (1) $x^2-(-5+3)x+(-5)\cdot3=0$
$\therefore x^2+2x-15=0$
(2) $x^2-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)x+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}=0$
$\therefore x^2-\frac{3}{4}x+\frac{1}{8}=0$
(3) $x^2-\{(1+\sqrt{2})+(1-\sqrt{2})\}x+(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})=0$
$\therefore x^2-2x-1=0$
(4) $x^2-\{(1+i)+(1-i)\}x+(1+i)(1-i)=0$
$\therefore x^2-2x+2=0$

답 (1) $x^2+2x-15=0$ (2) $x^2-\frac{3}{4}x+\frac{1}{8}=0$
(3) $x^2-2x-1=0$ (4) $x^2-2x+2=0$

$(1+i)(1-i)$
$=1-i^2$
$=1-(-1)$
$=2$

2-2 $3\left\{x^2-\left(1+\frac{1}{3}\right)x+1\cdot\frac{1}{3}\right\}=0$이므로
$3\left(x^2-\frac{4}{3}x+\frac{1}{3}\right)=0$
$\therefore 3x^2-4x+1=0$ 답 $3x^2-4x+1=0$

Lecture 20 이차식의 인수분해, 이차방정식의 켤레근

61쪽

1-1 (1) $x^2+16=0$에서 $x^2=-16$
$\therefore x=\pm4i$
$\therefore x^2+16=(x+4i)(x-4i)$
(2) $x^2+10x-7=0$에서 근의 공식에 의하여
$x=-5\pm\sqrt{5^2-1\cdot(-7)}=-5\pm4\sqrt{2}$
$\therefore x^2+10x-7=(x+5+4\sqrt{2})(x+5-4\sqrt{2})$

답 (1) $(x+4i)(x-4i)$
(2) $(x+5+4\sqrt{2})(x+5-4\sqrt{2})$

2-1 답 $3-\sqrt{5}$, $3-\sqrt{5}$, $3-\sqrt{5}$, -6, 4

2-2 (1) a, b는 실수이고 주어진 이차방정식의 한 근이 $1-4i$이므로 다른 한 근은 $1+4i$이다.
(2) 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$(1-4i)+(1+4i)=-a$,
$(1-4i)(1+4i)=b$
$\therefore a=-2$, $b=17$

답 (1) $1+4i$ (2) $a=-2$, $b=17$

기본+표준 유형 Q+Q

62쪽

01 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=-\frac{-9}{3}=3$, $\alpha\beta=\frac{5}{3}$
$\therefore \alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$
$=3^3-3\cdot\frac{5}{3}\cdot3=12$ 답 12

02 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=-\frac{4}{2}=-2$, $\alpha\beta=\frac{1}{2}$
$\therefore (\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$
$=(-2)^2-4\cdot\frac{1}{2}=2$
$\therefore |\alpha-\beta|=\sqrt{2}$ 답 $\sqrt{2}$

03 α, β가 주어진 이차방정식의 두 근이므로
$\alpha^2-\alpha-4=0$, $\beta^2-\beta-4=0$
$\therefore \alpha^2-2\alpha-2=-\alpha+2$, $\beta^2-2\beta-2=-\beta+2$
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=1$, $\alpha\beta=-4$
$\therefore (\alpha^2-2\alpha-2)(\beta^2-2\beta-2)=(-\alpha+2)(-\beta+2)$
$=\alpha\beta-2(\alpha+\beta)+4$
$=-4-2\cdot1+4$
$=-2$ 답 ④

$\alpha^2-\alpha-4=0$에서
$\alpha^2=\alpha+4$
$\therefore \alpha^2-2\alpha-2$
$=\alpha+4-2\alpha-2$
$=-\alpha+2$

04 α는 주어진 이차방정식의 근이므로
$\alpha^2-5\alpha+7=0$ $\therefore \alpha^2=5\alpha-7$
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=5$
$\therefore \alpha^2+5\beta=5\alpha-7+5\beta=5(\alpha+\beta)-7$
$=5\cdot5-7=18$ 답 18

05 주어진 이차방정식의 두 근을 α, $\alpha+2$라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+(\alpha+2)=2k$ $\therefore \alpha=k-1$ ······ ㉠
$\alpha(\alpha+2)=4k-1$ ······ ㉡
㉠을 ㉡에 대입하면
$(k-1)(k+1)=4k-1$, $k^2-1=4k-1$
$k^2-4k=0$, $k(k-4)=0$
$\therefore k=0$ 또는 $k=4$
따라서 모든 실수 k의 값의 합은 4이다. 답 ④

두 근을 $\alpha-2$, α로 놓을 수도 있다.

다른 풀이 주어진 이차방정식의 두 근을 α, $\beta(\alpha>\beta)$라 하면 $\alpha-\beta=2$이고 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=2k$, $\alpha\beta=4k-1$
이때 $(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$이므로
$2^2=(2k)^2-4(4k-1)$
$k^2-4k=0$, $k(k-4)=0$
$\therefore k=0$ 또는 $k=4$
따라서 모든 실수 k의 값의 합은 4이다.

06 주어진 이차방정식의 두 근을 α, $3\alpha\ (\alpha\neq0)$라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+3\alpha=-4m \quad \therefore \alpha=-m \quad \cdots\cdots ㉠$

$\alpha\cdot3\alpha=m^2+8 \quad \therefore 3\alpha^2=m^2+8 \quad \cdots\cdots ㉡$

㉠을 ㉡에 대입하면

$3\cdot(-m)^2=m^2+8, \quad 2m^2=8$

$m^2=4 \quad \therefore m=-2$ 또는 $m=2$

따라서 양수 m의 값은 2이다. 답 ②

07 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=3k,\ \alpha\beta=5k+1$

$\therefore \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$

$=(3k)^2-2(5k+1)$

$=9k^2-10k-2$

이때 $\alpha^2+\beta^2=17$이므로

$9k^2-10k-2=17, \quad 9k^2-10k-19=0$

$(k+1)(9k-19)=0$

$\therefore k=-1$ 또는 $k=\frac{19}{9}$

따라서 음수 k의 값은 -1이다. 답 ⑤

08 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2k-1,\ \alpha\beta=k$

$\therefore \alpha^2\beta+\alpha\beta^2-\alpha-\beta=\alpha\beta(\alpha+\beta)-(\alpha+\beta)$

$=k(2k-1)-(2k-1)$

$=2k^2-3k+1$

이때 $\alpha^2\beta+\alpha\beta^2-\alpha-\beta=10$이므로

$2k^2-3k+1=10, \quad 2k^2-3k-9=0$

$(2k+3)(k-3)=0$

$\therefore k=-\frac{3}{2}$ 또는 $k=3$

따라서 정수 k의 값은 3이다. 답 3

09 이차방정식 $x^2+ax-11=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-a,\ \alpha\beta=-11 \quad \cdots\cdots ㉠$

이차방정식 $x^2+9x+b=0$의 두 근이 $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$(\alpha+\beta)+\alpha\beta=-9,\ (\alpha+\beta)\alpha\beta=b \quad \cdots\cdots ㉡$

㉠을 ㉡에 대입하면

$-a-11=-9,\ 11a=b$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=-2,\ b=-22$

$\therefore a-b=20$ 답 ⑤

10 이차방정식 $3x^2+ax+1=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-\frac{a}{3},\ \alpha\beta=\frac{1}{3} \quad \cdots\cdots ㉠$

이차방정식 $x^2+4x-b=0$의 두 근이 $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=-4,\ \frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta}=-b$

$\therefore \alpha+\beta=-4\alpha\beta,\ \alpha\beta=-\frac{1}{b} \quad \cdots\cdots ㉡$

㉠을 ㉡에 대입하면

$-\frac{a}{3}=-\frac{4}{3},\ \frac{1}{3}=-\frac{1}{b} \quad \therefore a=4,\ b=-3$

$\therefore a+b=1$ 답 ③

11 이차방정식 $x^2-4x+2=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=4,\ \alpha\beta=2$

따라서 $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$, 즉 4, 2를 두 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은

$x^2-(4+2)x+4\cdot2=0 \quad \therefore x^2-6x+8=0$

답 $x^2-6x+8=0$

12 이차방정식 $2x^2-x+5=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=\frac{1}{2},\ \alpha\beta=\frac{5}{2}$

$\therefore (\alpha-1)+(\beta-1)=\alpha+\beta-2=-\frac{3}{2}$,

$(\alpha-1)(\beta-1)=\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1=3$

따라서 $\alpha-1$, $\beta-1$을 두 근으로 하고 x^2의 계수가 2인 이차방정식은

$2\left(x^2+\frac{3}{2}x+3\right)=0 \quad \therefore 2x^2+3x+6=0$

답 $2x^2+3x+6=0$

13 원래의 이차방정식을 $x^2+ax+b=0$ (a, b는 상수)이라 하자.

세리는 b를 바르게 보고 풀었으므로 두 근의 곱은

$b=-4\cdot2=-8$

윤호는 a를 바르게 보고 풀었으므로 두 근의 합은

$-a=(1+\sqrt{5}i)+(1-\sqrt{5}i)=2 \quad \therefore a=-2$

따라서 구하는 이차방정식은

$x^2-2x-8=0$ 답 ②

14 소은이는 a, c를 바르게 보고 풀었으므로 두 근의 곱은

$\frac{c}{a}=-3\cdot4=-12 \quad \therefore c=-12a \quad \cdots\cdots ㉠$

진주는 a, b를 바르게 보고 풀었으므로 두 근의 합은

$-\frac{b}{a}=(2+\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})=4$

$\therefore b=-4a \quad \cdots\cdots ㉡$

㉠, ㉡을 $ax^2+bx+c=0$에 대입하면

$ax^2-4ax-12a=0$

$a\neq0$이므로 양변을 a로 나누면

$x^2-4x-12=0, \quad (x+2)(x-6)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=6$

따라서 음수인 근은 -2이다. 답 -2

Q BOX

양변에 $\alpha\beta$를 곱한다.

$\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1$
$=\frac{5}{2}-\frac{1}{2}+1$
$=3$

$-a-11=-9$에서
$a=-2$
$a=-2$를 $11a=b$에
대입하면
$b=-22$

$ax^2+bx+c=0$이 이차방정식이므로
$a\neq0$

15 $f(\alpha)=0,\ f(\beta)=0$이므로 $f(5x-2)=0$이려면

$5x-2=\alpha$ 또는 $5x-2=\beta$

$\therefore x=\dfrac{\alpha+2}{5}$ 또는 $x=\dfrac{\beta+2}{5}$

따라서 이차방정식 $f(5x-2)=0$의 두 근의 합은

$$\frac{\alpha+2}{5}+\frac{\beta+2}{5}=\frac{\alpha+\beta+4}{5}=\frac{6+4}{5}=2$$

답 2

다른 풀이 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이 $\alpha,\ \beta$이므로

$f(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)\ (a\neq0)$

로 놓으면 $f(5x-2)=0$에서

$a(5x-2-\alpha)(5x-2-\beta)=0$

$\therefore x=\dfrac{\alpha+2}{5}$ 또는 $x=\dfrac{\beta+2}{5}$

따라서 이차방정식 $f(5x-2)=0$의 두 근의 합은

$$\frac{\alpha+2}{5}+\frac{\beta+2}{5}=\frac{\alpha+\beta+4}{5}=\frac{6+4}{5}=2$$

16 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근을 $\alpha,\ \beta$라 하면

$\alpha\beta=32$

$f(\alpha)=0,\ f(\beta)=0$이므로 $f(4x)=0$이려면

$4x=\alpha$ 또는 $4x=\beta$ $\quad\therefore x=\dfrac{\alpha}{4}$ 또는 $x=\dfrac{\beta}{4}$

따라서 이차방정식 $f(4x)=0$의 두 근의 곱은

$\dfrac{\alpha}{4}\cdot\dfrac{\beta}{4}=\dfrac{\alpha\beta}{16}=\dfrac{32}{16}=2$ 답 2

17 $x^2-2x+4=0$에서 근의 공식에 의하여

$x=-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-1\cdot4}=1\pm\sqrt{3}i$

$\therefore x^2-2x+4=\{x-(1+\sqrt{3}i)\}\{x-(1-\sqrt{3}i)\}$

$=(x-1-\sqrt{3}i)(x-1+\sqrt{3}i)$

답 ①

18 $x^2+4x+8=0$에서 근의 공식에 의하여

$x=-2\pm\sqrt{2^2-1\cdot8}=-2\pm2i$

$\therefore x^2+4x+8=\{x-(-2+2i)\}\{x-(-2-2i)\}$

$=(x+2-2i)(x+2+2i)$

따라서 인수인 것은 ⑤이다. 답 ⑤

19 $f(\alpha)=f(\beta)=-1$이므로

$f(\alpha)+1=0,\ f(\beta)+1=0$

따라서 이차방정식 $f(x)+1=0$의 두 근이 $\alpha,\ \beta$이고, $f(x)$의 x^2의 계수가 1이므로

$f(x)+1=(x-\alpha)(x-\beta)=x^2-5x-7$

따라서 $f(x)=x^2-5x-8$이므로

$f(2)=4-10-8=-14$ 답 ①

20 $f(\alpha)=2,\ f(\beta)=2$이므로

$f(\alpha)-2=0,\ f(\beta)-2=0$

따라서 이차방정식 $f(x)-2=0$, 즉 $x^2+x-5=0$의 두 근이 $\alpha,\ \beta$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-1,\ \alpha\beta=-5$

Q BOX

x^2의 계수를 유리수로 고치기 위해 양변에 $2+\sqrt{3}$을 곱한다.

$\alpha,\ \beta$는 이차방정식 $x^2-5x-7=0$의 두 근이다.

$\therefore \alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

$=(-1)^3-3\cdot(-5)\cdot(-1)$

$=-16$ 답 -16

21 $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}=\dfrac{1-\sqrt{2}}{(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})}=-1+\sqrt{2}$

$a,\ b$가 유리수이면 $ab,\ a-b$도 유리수이므로 이차방정식 $x^2+abx+a-b=0$의 한 근이 $-1+\sqrt{2}$이면 다른 한 근은 $-1-\sqrt{2}$이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(-1+\sqrt{2})+(-1-\sqrt{2})=-ab,$

$(-1+\sqrt{2})(-1-\sqrt{2})=a-b$

이므로 $\quad ab=2,\ a-b=-1$

$\therefore a^2+b^2=(a-b)^2+2ab$

$=(-1)^2+2\cdot2=5$ 답 ⑤

22 $\dfrac{b-i}{1+i}=\dfrac{(b-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\dfrac{(b-1)-(b+1)i}{2}$

$a,\ b$가 실수이므로 이차방정식 $x^2-4x+a=0$의 한 근이 $\dfrac{(b-1)-(b+1)i}{2}$이면 다른 한 근은 $\dfrac{(b-1)+(b+1)i}{2}$이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\frac{(b-1)-(b+1)i}{2}+\frac{(b-1)+(b+1)i}{2}=4$$

$b-1=4 \qquad \therefore b=5$

즉 두 근은 $2-3i,\ 2+3i$이므로

$a=(2-3i)(2+3i)=13$

$\therefore a-b=8$ 답 ④

중단원 마무리

66쪽

01 **전략** x^2의 계수를 유리수로 고친 후 인수분해를 이용하여 근을 구한다.

풀이 주어진 방정식의 양변에 $2+\sqrt{3}$을 곱하면

$(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})x^2-(2+\sqrt{3})x$

$+(2+\sqrt{3})(-6+4\sqrt{3})=0$

$x^2-(2+\sqrt{3})x+2\sqrt{3}=0$

$(x-\sqrt{3})(x-2)=0$

$\therefore x=\sqrt{3}$ 또는 $x=2$ 답 $x=\sqrt{3}$ 또는 $x=2$

02 **전략** 근의 공식을 이용하여 주어진 이차방정식의 해를 구한다.

풀이 $x^2-2x+5=0$에서

$x=-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-1\cdot5}=1\pm2i$

따라서 $a=1,\ b=2$이므로

$a+b=3$ 답 ②

03 전략 주어진 이차방정식에 $x=2$를 대입하여 얻은 식이 k에 대한 항등식임을 이용한다.

풀이 이차방정식 $kx^2+ax-(k+1)a^2+8=0$의 한 근이 2이므로

$4k+2a-(k+1)a^2+8=0$

$(4-a^2)k+(-a^2+2a+8)=0$

이 등식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$4-a^2=0,\ -a^2+2a+8=0$

(i) $4-a^2=0$에서 $a^2-4=0$

$(a+2)(a-2)=0$ $\therefore a=-2$ 또는 $a=2$

(ii) $-a^2+2a+8=0$에서 $a^2-2a-8=0$

$(a+2)(a-4)=0$ $\therefore a=-2$ 또는 $a=4$

(i), (ii)에서 $a=-2$ 답 -2

04 전략 $x=2+\sqrt{3}$을 주어진 이차방정식에 대입하여 b, c를 a에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 이차방정식 $ax^2+\sqrt{3}bx+c=0$의 한 근이 $2+\sqrt{3}$이므로

$a(2+\sqrt{3})^2+\sqrt{3}b(2+\sqrt{3})+c=0$

$7a+4\sqrt{3}a+2\sqrt{3}b+3b+c=0$

$\therefore (7a+3b+c)+(4a+2b)\sqrt{3}=0$

a, b, c가 유리수이므로

$7a+3b+c=0,\ 4a+2b=0$

$\therefore b=-2a,\ c=-a$

따라서 주어진 방정식은 $ax^2-2\sqrt{3}ax-a=0$, 즉 $x^2-2\sqrt{3}x-1=0$이므로

$x=-(-\sqrt{3})\pm\sqrt{(-\sqrt{3})^2-1\cdot(-1)}=\sqrt{3}\pm2$

따라서 $\beta=-2+\sqrt{3}$이므로

$\alpha+\dfrac{1}{\beta}=2+\sqrt{3}+\dfrac{1}{-2+\sqrt{3}}=0$ 답 ③

쌤 한마디

$\sqrt{3}b$가 무리수이므로 주어진 방정식의 계수가 모두 유리수인 것은 아니다. 따라서 이차방정식의 다른 한 근 β를 $\beta=2-\sqrt{3}$으로 생각하지 않도록 주의한다.

05 전략 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 x의 값을 기준으로 범위를 나누어서 푼다.

풀이 (i) $x<0$일 때, $2x^2-7x-4=0$이므로

$(2x+1)(x-4)=0$ $\therefore x=-\dfrac{1}{2}$ 또는 $x=4$

그런데 $x<0$이므로 $x=-\dfrac{1}{2}$

(ii) $x\ge0$일 때, $2x^2+7x-4=0$이므로

$(x+4)(2x-1)=0$ $\therefore x=-4$ 또는 $x=\dfrac{1}{2}$

그런데 $x\ge0$이므로 $x=\dfrac{1}{2}$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 근은

$x=-\dfrac{1}{2}$ 또는 $x=\dfrac{1}{2}$

따라서 두 근의 차는 $\dfrac{1}{2}-\left(-\dfrac{1}{2}\right)=1$ 답 ③

Q BOX

(사다리꼴의 넓이)
$=\dfrac{1}{2}\times\{$(윗변의 길이)
$+$(아랫변의 길이)$\}$
$\times$(높이)

$4a+2b=0$에서
$2b=-4a$
$\therefore b=-2a$
$b=-2a$를
$7a+3b+c=0$에 대입하면
$7a-6a+c=0$
$\therefore c=-a$

$\dfrac{1}{-2+\sqrt{3}}$
$=\dfrac{-2-\sqrt{3}}{(-2+\sqrt{3})(-2-\sqrt{3})}$
$=-2-\sqrt{3}$

$a+2=0$에서 $a=-2$
$a=-2$를 $2a+a=0$에 대입하면
$-4+a=0$
$\therefore a=4$

다른 풀이 $x^2=|x|^2$이므로 주어진 방정식은

$2|x|^2+7|x|-4=0,$ $(|x|+4)(2|x|-1)=0$

그런데 $|x|\ge0$이므로 $|x|=\dfrac{1}{2}$

$\therefore x=-\dfrac{1}{2}$ 또는 $x=\dfrac{1}{2}$

따라서 두 근의 차는 $\dfrac{1}{2}-\left(-\dfrac{1}{2}\right)=1$

06 전략 사다리꼴의 넓이를 구하는 공식을 이용하여 이차방정식을 세운다.

풀이 사다리꼴의 윗변의 길이를 x cm라 하면 높이는 x cm, 아랫변의 길이는 $(x+2)$ cm이므로

$\dfrac{1}{2}\{x+(x+2)\}\cdot x=42$ ···· ❶

$x^2+x-42=0,$ $(x+7)(x-6)=0$

$\therefore x=-7$ 또는 $x=6$

그런데 $x>0$이므로 $x=6$

따라서 윗변의 길이는 6 cm이다. ···· ❷

답 6 cm

단계	채점 기준	비율
❶	윗변의 길이를 x cm라 하고 이차방정식을 세울 수 있다.	50 %
❷	윗변의 길이를 구할 수 있다.	50 %

07 전략 이차방정식의 판별식을 D라 할 때, 이차방정식이 실근을 가질 조건은 $D\ge0$임을 이용한다.

풀이 $(x+2)^2+(2x+a)^2=0$에서

$x^2+4x+4+4x^2+4ax+a^2=0$

$\therefore 5x^2+4(1+a)x+4+a^2=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=\{2(1+a)\}^2-5(4+a^2)\ge0$

$4+8a+4a^2-20-5a^2\ge0$

$a^2-8a+16\le0,$ $(a-4)^2\le0$

$\therefore a=4$ 답 ④

다른 풀이 주어진 방정식의 실근을 $x=\alpha$라 하면

$(\alpha+2)^2+(2\alpha+a)^2=0$

이므로 $\alpha+2=0,\ 2\alpha+a=0$

$\therefore \alpha=-2,\ a=4$

쌤 한마디

A, B가 실수일 때
① $A^2\le0$이면 $A=0$
② $A^2+B^2=0$이면 $A=0,\ B=0$

08 전략 이차방정식의 판별식을 D라 할 때, 이차방정식이 중근을 가질 조건은 $D=0$임을 이용한다.

풀이 주어진 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=k^2-(3k-2)=0$

$k^2-3k+2=0,$ $(k-1)(k-2)=0$

$\therefore k=1$ 또는 $k=2$

따라서 모든 실수 k의 값의 합은

$1+2=3$ 답 ①

09 전략 주어진 이차방정식의 판별식의 부호를 조사한다.

풀이 $\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}=-\sqrt{\frac{b}{a}}$에서 $a<0,\ b>0$

ㄱ. 이차방정식 $x^2+ax-b=0$의 판별식을 D_1라 하면 $D_1=a^2+4b>0$

이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.

$a<0,\ b>0$에서 $a^2>0,\ 4b>0$이므로 $a^2+4b>0$

ㄴ. 이차방정식 $ax^2+bx+1=0$의 판별식을 D_2라 하면

$D_2=b^2-4a>0$

이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.

$a<0,\ b>0$에서 $b^2>0,\ -4a>0$이므로 $b^2-4a>0$

ㄷ. 이차방정식 $x^2-2ax+b=0$의 판별식을 D_3이라 하면

$$\frac{D_3}{4}=(-a)^2-b=a^2-b$$

a^2-b의 값의 부호는 알 수 없으므로 이 이차방정식의 근은 판별할 수 없다.

ㄹ. 이차방정식 $x^2+2bx+a=0$의 판별식을 D_4라 하면

$$\frac{D_4}{4}=b^2-a>0$$

이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.

이상에서 항상 서로 다른 두 실근을 갖는 이차방정식은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다. 답 ㄱ, ㄴ, ㄹ

10 전략 이차식 $P(x)$가 완전제곱식이면 이차방정식 $P(x)=0$이 중근을 갖는다.

풀이 주어진 이차식이 완전제곱식이면 이차방정식 $(a+c)x^2-2bx+a-c=0$이 중근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(-b)^2-(a+c)(a-c)=0$$

$$b^2-(a^2-c^2)=0 \qquad \therefore a^2=b^2+c^2$$

따라서 $a,\ b,\ c$를 세 변의 길이로 하는 삼각형은 빗변의 길이가 a인 직각삼각형이므로 그 넓이는

$\frac{1}{2}bc$ 답 ②

11 전략 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용한다.

풀이 이차방정식 $x^2-ax+a-3=0$의 두 근을 $\alpha,\ \beta$라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=a,\ \alpha\beta=a-3$$

이때 두 근의 합이 10이므로

$$a=10$$

따라서 두 근의 곱은

$\alpha\beta=a-3=10-3=7$ 답 7

12 전략 절댓값 기호를 없앤 후 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용한다.

풀이 $|x^2-3x|=1$에서 $x^2-3x=\pm1$

(i) $x^2-3x=1$, 즉 $x^2-3x-1=0$의 두 근을 $\alpha,\ \beta$라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=3,\ \alpha\beta=-1$$

(ii) $x^2-3x=-1$, 즉 $x^2-3x+1=0$의 두 근을 $\gamma,\ \delta$라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\gamma+\delta=3,\ \gamma\delta=1$$

(i), (ii)에서

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\delta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}+\frac{\gamma+\delta}{\gamma\delta}$$

$$=\frac{3}{-1}+\frac{3}{1}=0$$ 답 0

13 전략 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 한 근이 α이면 $a\alpha^2+b\alpha+c=0$임을 이용하여 주어진 식을 간단히 한다.

풀이 α가 주어진 이차방정식의 근이므로

$$\alpha^2-3\alpha-2=0 \qquad \therefore \alpha^2-3\alpha=2$$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=3,\ \alpha\beta=-2$$

이므로

$$\begin{aligned}\alpha^3-3\alpha^2+\alpha\beta+2\beta&=\alpha(\alpha^2-3\alpha)+\alpha\beta+2\beta\\&=2\alpha+\alpha\beta+2\beta\\&=2(\alpha+\beta)+\alpha\beta\\&=2\cdot3-2=4\end{aligned}$$ 답 ③

14 전략 조건 (가)를 만족시키는 $\alpha,\ \beta$의 값을 모두 구하고 근과 계수의 관계를 이용하여 조건 (나)를 만족시키는 $p,\ q$의 값을 구한다.

풀이 조건 (가)에서 $\alpha,\ \beta$가 될 수 있는 수는

2, 3, 5, 7

소수 ➡ 1보다 큰 자연수 중에서 1과 자기 자신만을 약수로 갖는 수

한편 이차방정식 $x^2-px+q=0$의 두 근이 $\alpha,\ \beta$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$p=\alpha+\beta,\ q=\alpha\beta$$

이때 조건 (나)에서 q는 30보다 큰 자연수이므로

$$q=5\cdot7=35$$

$$\therefore p=5+7=12$$

$\therefore q-p=23$ 답 23

15 전략 주어진 식을 $\alpha+\beta,\ \alpha\beta$에 대한 식으로 변형한 후 근과 계수의 관계를 이용한다.

풀이 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=1,\ \alpha\beta=\frac{a}{2}$$

$|\alpha|+|\beta|=3$의 양변을 제곱하면

$$|\alpha|^2+2|\alpha||\beta|+|\beta|^2=9$$

$|\alpha|^2=\alpha^2,\ |\beta|^2=\beta^2,\ |\alpha||\beta|=|\alpha\beta|$

$$\alpha^2+2|\alpha\beta|+\beta^2=9$$

$$(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+2|\alpha\beta|=9$$

$$1^2-2\cdot\frac{a}{2}+2\cdot\left|\frac{a}{2}\right|=9$$

$$\therefore a-|a|=-8$$

이때 $a\geq0$이면 $a-|a|=0$이므로

$$a<0$$

따라서 $a-(-a)=-8$이므로

$2a=-8 \quad \therefore a=-4$ 답 ⑤

16 전략 $\alpha^3+\beta^3$을 $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$에 대한 식으로 변형한 후 근과 계수의 관계를 이용한다.

풀이 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2,\ \alpha\beta=\dfrac{k}{2}$

$\therefore \alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

$=2^3-3\cdot\dfrac{k}{2}\cdot 2=8-3k$

이때 $\alpha^3+\beta^3=7$이므로

$8-3k=7, \quad 3k=1$

$\therefore k=\dfrac{1}{3}$

$\therefore 30k=10$ 답 10

17 전략 근과 계수의 관계를 이용하여 α, β에 대한 식을 세운다.

풀이 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-a,\ \alpha\beta=b$ …… ㉠

이차방정식 $x^2-3bx+a-1=0$의 두 근이 $\alpha-1$, $\beta-1$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$(\alpha-1)+(\beta-1)=3b,\ (\alpha-1)(\beta-1)=a-1$

$\therefore \alpha+\beta-2=3b,\ \alpha\beta-(\alpha+\beta)+1=a-1$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$-a-2=3b,\ b+a+1=a-1$

$\therefore a=4,\ b=-2$

$\therefore ab=-8$ 답 ②

18 전략 두 수 a, b를 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은 $x^2-(a+b)x+ab=0$이다.

풀이 이차방정식 $x^2+x-1=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-1,\ \alpha\beta=-1$

$\therefore \dfrac{1+\alpha}{1+\beta}+\dfrac{1+\beta}{1+\alpha}$

$=\dfrac{(1+\alpha)^2+(1+\beta)^2}{(1+\beta)(1+\alpha)}$

$=\dfrac{1+2\alpha+\alpha^2+1+2\beta+\beta^2}{1+\alpha+\beta+\alpha\beta}$

$=\dfrac{2+2(\alpha+\beta)+(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{1+(\alpha+\beta)+\alpha\beta}$

$=\dfrac{2+2\cdot(-1)+(-1)^2-2\cdot(-1)}{1-1-1}=-3,$

$\dfrac{1+\alpha}{1+\beta}\cdot\dfrac{1+\beta}{1+\alpha}=1$

따라서 $\dfrac{1+\alpha}{1+\beta}$, $\dfrac{1+\beta}{1+\alpha}$를 두 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은

$x^2+3x+1=0$ 답 ⑤

Q BOX

$b+a+1=a-1$에서
$b=-2$
$b=-2$를 $-a-2=3b$에 대입하면
$-a-2=-6$
$\therefore a=4$

19 전략 $\overline{AE}=\alpha$, $\overline{AH}=\beta$라 하고 직사각형 PFCG의 둘레의 길이와 넓이를 이용하여 $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$의 값을 구한다.

풀이 $\overline{AE}=\alpha$, $\overline{AH}=\beta$라 하면

$\overline{PF}=10-\alpha,\ \overline{PG}=10-\beta$

직사각형 PFCG의 둘레의 길이가 28이므로

$2\{(10-\alpha)+(10-\beta)\}=28$

$20-(\alpha+\beta)=14 \quad \therefore \alpha+\beta=6$

또 직사각형 PFCG의 넓이가 46이므로

$(10-\alpha)(10-\beta)=46$

$100-10(\alpha+\beta)+\alpha\beta=46$

$100-10\cdot 6+\alpha\beta=46 \quad \therefore \alpha\beta=6$

따라서 $\overline{AE}$, $\overline{AH}$의 길이 α, β를 두 근으로 하고 이차항의 계수가 1인 이차방정식은

$x^2-6x+6=0$ 답 ②

20 전략 두 근의 합과 곱을 이용하여 b, c를 a에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 근의 공식을 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-ac}}{a}$로 잘못 적용하여 얻은 두 근이 -3, 2이므로

$\dfrac{-b+\sqrt{b^2-ac}}{a}+\dfrac{-b-\sqrt{b^2-ac}}{a}=(-3)+2$에서

$\dfrac{-2b}{a}=-1 \quad \therefore b=\dfrac{1}{2}a$ …… ㉠

$\dfrac{-b+\sqrt{b^2-ac}}{a}\cdot\dfrac{-b-\sqrt{b^2-ac}}{a}=-3\cdot 2$에서

$\dfrac{b^2-(b^2-ac)}{a^2}=\dfrac{c}{a}=-6\ (\because a\neq 0)$

$\therefore c=-6a$ …… ㉡

㉠, ㉡을 $ax^2+bx+c=0$에 대입하면

$ax^2+\dfrac{1}{2}ax-6a=0$

따라서 주어진 이차방정식의 두 근의 곱은

$\dfrac{-6a}{a}=-6$ 답 ①

21 전략 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이 m, n이면 $f(ax+b)=0$의 두 근은 $\dfrac{m-b}{a}$, $\dfrac{n-b}{a}$임을 이용한다.

풀이 $f(4-5\alpha)=0,\ f(4-5\beta)=0$이므로 $f(3x)=0$이려면

$3x=4-5\alpha$ 또는 $3x=4-5\beta$

$\therefore x=\dfrac{4-5\alpha}{3}$ 또는 $x=\dfrac{4-5\beta}{3}$

따라서 이차방정식 $f(3x)=0$의 두 근의 곱은

$\dfrac{4-5\alpha}{3}\cdot\dfrac{4-5\beta}{3}=\dfrac{16-20(\alpha+\beta)+25\alpha\beta}{9}$

$=\dfrac{16-20\cdot(-1)+25\cdot\left(-\dfrac{1}{5}\right)}{9}$

$=\dfrac{31}{9}$ 답 $\dfrac{31}{9}$

22 전략 근의 공식을 이용하여 인수분해한다.

풀이 $\frac{1}{3}x^2-2x+1=0$, 즉 $x^2-6x+3=0$에서 근의 공식에 의하여

$x=-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-1\cdot 3}=3\pm\sqrt{6}$

$\therefore \frac{1}{3}x^2-2x+1$

$=\frac{1}{3}\{x-(3+\sqrt{6})\}\{x-(3-\sqrt{6})\}$

$=\frac{1}{3}(x-3-\sqrt{6})(x-3+\sqrt{6})$

따라서 $a=3$, $b=6$이므로 $b-a=3$ 답 ③

양변에 3을 곱하여 x^2의 계수를 정수로 고친다.

23 전략 먼저 주어진 근의 분모를 유리화한 후 이차방정식의 켤레근의 성질을 이용한다.

풀이 $\frac{1}{2-\sqrt{3}}=\frac{2+\sqrt{3}}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}=2+\sqrt{3}$

a, b가 유리수이므로 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 한 근이 $2+\sqrt{3}$이면 다른 한 근은 $2-\sqrt{3}$이다. ··· ❶

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(2+\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})=-a$, $(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=b$

$\therefore a=-4,\ b=1$ ··· ❷

$\therefore ab=-4$ ··· ❸

답 -4

단계	채점 기준	비율
❶	다른 한 근을 구할 수 있다.	50 %
❷	a, b의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸	ab의 값을 구할 수 있다.	10 %

24 전략 이차방정식의 켤레근의 성질을 이용한다.

풀이 m, n이 실수이므로 이차방정식 $x^2+mx+n=0$의 한 근이 $-1+3i$이면 다른 한 근은 $-1-3i$이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(-1+3i)+(-1-3i)=-m$,

$(-1+3i)(-1-3i)=n$

$\therefore m=2,\ n=10$ ··· ❶

$\therefore \frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{10}=\frac{3}{5}$,

$\frac{1}{m}\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10}=\frac{1}{20}$

$\frac{1}{m}$, $\frac{1}{n}$을 두 근으로 하고 x^2의 계수가 20인 이차방정식은 $20\left(x^2-\frac{3}{5}x+\frac{1}{20}\right)=0$

$\therefore 20x^2-12x+1=0$ ··· ❷

따라서 $a=-12$, $b=1$이므로

$a+b=-11$ ··· ❸

답 -11

$(-1+3i)(-1-3i)$
$=(-1)^2-(3i)^2$
$=1-(-9)$
$=10$

단계	채점 기준	비율
❶	m, n의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷	$\frac{1}{m}$, $\frac{1}{n}$을 두 근으로 하고 x^2의 계수가 20인 이차방정식을 구할 수 있다.	40 %
❸	$a+b$의 값을 구할 수 있다.	20 %

05 이차방정식과 이차함수

11 이차방정식과 이차함수

Lecture 21 이차함수의 그래프 70쪽

1-1 답 (1) $y=(x+2)^2-5$ (2) $(-2,\ -5)$
(3) $x=-2$

$y=x^2+4x-1$
$=(x^2+4x+4)$
$-4-1$
$=(x+2)^2-5$

1-2 (3) $y=-x^2-2x=-(x+1)^2+1$
이므로 꼭짓점의 좌표는 $(-1,\ 1)$, 축의 방정식은 $x=-1$이다.

(4) $y=3x^2-6x+7=3(x-1)^2+4$
이므로 꼭짓점의 좌표는 $(1,\ 4)$, 축의 방정식은 $x=1$이다.

답 (1) $(0,\ 2)$, $x=0$
(2) $(-5,\ -3)$, $x=-5$
(3) $(-1,\ 1)$, $x=-1$
(4) $(1,\ 4)$, $x=1$

Lecture 22 이차방정식과 이차함수의 관계 71쪽

1-1 (1) 이차방정식 $x^2+6x+9=0$에서
$(x+3)^2=0$ $\therefore x=-3$

(2) 이차방정식 $-3x^2+2x+8=0$에서
$3x^2-2x-8=0$, $(3x+4)(x-2)=0$
$\therefore x=-\frac{4}{3}$ 또는 $x=2$

답 (1) -3 (2) $-\frac{4}{3}$, 2

$y=ax^2+bx+c$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표는 $ax^2+bx+c=0$의 실근과 같다.

2-1 이차방정식 $x^2+4x+k=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=2^2-1\cdot k=4-k$

(1) $\frac{D}{4}=4-k>0$ $\therefore k<4$

(2) $\frac{D}{4}=4-k=0$ $\therefore k=4$

(3) $\frac{D}{4}=4-k<0$ $\therefore k>4$

답 (1) $k<4$ (2) 4 (3) $k>4$

2-2 이차방정식 $x^2+3x-k=0$의 판별식을 D라 하면
$D=3^2-4\cdot 1\cdot(-k)=9+4k$

주어진 이차함수의 그래프가 x축과 만나려면 $D\geq 0$이어야 하므로

$9+4k\geq 0$ $\therefore k\geq -\frac{9}{4}$

답 $k\geq -\frac{9}{4}$

Lecture 23 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계

72쪽

1-1 (1) $x^2+4x+3=-x-1$에서

$x^2+5x+4=0,\quad (x+4)(x+1)=0$

$\therefore x=-4$ 또는 $x=-1$

(2) $-x^2+7x+5=3x+9$에서

$x^2-4x+4=0,\quad (x-2)^2=0$

$\therefore x=2$

답 (1) $-4,\ -1$ (2) 2

1-2 (1) 이차방정식 $x^2-2x+6=4x-3$, 즉

$x^2-6x+9=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-3)^2-1\cdot 9=0$

따라서 주어진 이차함수의 그래프와 직선은 한 점에서 만난다.(접한다.)

(2) 이차방정식 $-3x^2-x+5=-2x+4$, 즉

$3x^2-x-1=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-1)^2-4\cdot 3\cdot(-1)=13>0$

따라서 주어진 이차함수의 그래프와 직선은 서로 다른 두 점에서 만난다.

답 (1) 한 점에서 만난다.(접한다.)
(2) 서로 다른 두 점에서 만난다.

1-3 이차방정식 $x^2-x+1=2x+k$, 즉

$x^2-3x+1-k=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-3)^2-4\cdot 1\cdot(1-k)=5+4k$

(1) $D=5+4k>0\quad \therefore k>-\frac{5}{4}$

(2) $D=5+4k=0\quad \therefore k=-\frac{5}{4}$

(3) $D=5+4k<0\quad \therefore k<-\frac{5}{4}$

답 (1) $k>-\frac{5}{4}$ (2) $-\frac{5}{4}$ (3) $k<-\frac{5}{4}$

기본+표준 유형 Q+Q

73쪽

01 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근이 2, 4이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$2+4=-a,\ 2\cdot 4=b\quad \therefore a=-6,\ b=8$

$\therefore a+b=2$

답 ①

02 이차방정식 $x^2-ax+3a=0$의 두 근이 1, b이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$1+b=a,\ 1\cdot b=3a$

$\therefore a-b=1,\ 3a-b=0$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=-\frac{1}{2},\ b=-\frac{3}{2}$

이차함수 $y=x^2-2bx+8a$, 즉 $y=x^2+3x-4$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표는 이차방정식 $x^2+3x-4=0$의 근이므로

Q BOX

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$에서
① 두 근의 합: $-\frac{b}{a}$
② 두 근의 곱: $\frac{c}{a}$

두 식을 변끼리 빼면
$-2a=1$
$\therefore a=-\frac{1}{2}$
$a=-\frac{1}{2}$을 $a-b=1$에 대입하면
$-\frac{1}{2}-b=1$
$\therefore b=-\frac{3}{2}$

$(x+4)(x-1)=0\quad \therefore x=-4$ 또는 $x=1$

따라서 두 점 사이의 거리는

$1-(-4)=5$

답 5

03 이차방정식 $x^2-2kx+k+2=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$\frac{D_1}{4}=(-k)^2-(k+2)=0$

$k^2-k-2=0,\quad (k+1)(k-2)=0$

$\therefore k=-1$ 또는 $k=2$ ...... ㉠

이차방정식 $-3x^2+x+k=0$의 판별식을 D_2라 하면

$D_2=1^2-4\cdot(-3)\cdot k>0$

$1+12k>0\quad \therefore k>-\frac{1}{12}$ ...... ㉡

㉠, ㉡에서 $k=2$

답 2

04 이차방정식 $x^2+3x+k-1=0$의 판별식을 D라 하면

$D=3^2-4(k-1)<0$

$13-4k<0\quad \therefore k>\frac{13}{4}$

따라서 가장 작은 정수 k의 값은 4이다.

답 ③

05 이차방정식 $2x^2-3x-1=ax-5$, 즉

$2x^2-(a+3)x+4=0$의 한 근이 2이므로 다른 한 근을 α라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

방정식의 두 근이 두 점 A, B의 x좌표이다.

$2\alpha=2\quad \therefore \alpha=1$

따라서 점 B의 x좌표는 1이므로 y좌표는

$2\cdot 1^2-3\cdot 1-1=-2$

$\therefore \mathrm{B}(1,\ -2)$

답 $(1,\ -2)$

다른 풀이 이차방정식 $2x^2-3x-1=ax-5$, 즉

$2x^2-(a+3)x+4=0$의 한 근이 2이므로

$2\cdot 2^2-2(a+3)+4=0,\quad 6-2a=0$

$\therefore a=3$

따라서 이차방정식 $2x^2-6x+4=0$, 즉 $x^2-3x+2=0$에서

$(x-1)(x-2)=0\quad \therefore x=1$ 또는 $x=2$

즉 점 B의 좌표는 $(1,\ -2)$이다.

$y=3x-5$에 $x=1$을 대입하면 $y=-2$

06 이차방정식 $2x^2+ax+1=3x+b$, 즉

$2x^2+(a-3)x+1-b=0$의 두 근이 -2, 1이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$-2+1=-\frac{a-3}{2},\ -2\cdot 1=\frac{1-b}{2}$

$a-3=2,\ 1-b=-4\quad \therefore a=5,\ b=5$

$\therefore \frac{a}{b}=1$

답 ③

07 이차방정식 $-x^2-kx+3=x+4$, 즉

$x^2+(k+1)x+1=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(k+1)^2-4=0$

$k^2+2k-3=0,\quad (k+3)(k-1)=0$

$\therefore k=1\ (\because k>0)$

답 ①

08 이차방정식 $x^2-2kx+2=-x-k^2$, 즉
$x^2+(1-2k)x+k^2+2=0$의 판별식을 D라 하면

$$D=(1-2k)^2-4(k^2+2)>0$$

$$-4k-7>0 \qquad \therefore k<-\frac{7}{4}$$

따라서 가장 큰 정수 k의 값은 -2이다. 답 -2

09 이차함수의 그래프가 직선보다 항상 위쪽에 있으면 이차함수의 그래프와 직선은 만나지 않는다.
이차방정식 $x^2+kx+5=2x+1$, 즉
$x^2+(k-2)x+4=0$의 판별식을 D라 하면

$$D=(k-2)^2-4\cdot4<0$$

$$k^2-4k-12<0, \qquad (k+2)(k-6)<0$$

$$\therefore -2<k<6$$

답 $-2<k<6$

10 기울기가 3인 직선의 방정식을 $y=3x+b$라 하자.
이 직선이 이차함수 $y=x^2-x+4$의 그래프에 접하므로 이차방정식 $x^2-x+4=3x+b$, 즉 $x^2-4x+4-b=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(-2)^2-(4-b)=0 \qquad \therefore b=0$$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$$y=3x$$

답 $y=3x$

11 점 $(1, 4)$를 지나는 직선의 방정식을
$y=a(x-1)+4$라 하자.
이 직선이 이차함수 $y=2x^2-x+3$의 그래프에 접하므로 이차방정식 $2x^2-x+3=a(x-1)+4$, 즉
$2x^2-(1+a)x+a-1=0$의 판별식을 D라 하면

$$D=\{-(1+a)\}^2-4\cdot2\cdot(a-1)=0$$

$$a^2-6a+9=0, \qquad (a-3)^2=0$$

$$\therefore a=3$$

따라서 직선의 방정식은 $y=3(x-1)+4=3x+1$이므로 구하는 y절편은 1이다. 답 ②

12 이차함수의 최대, 최소

Lecture 24 이차함수의 최대, 최소

75쪽

1-1 답 (1) 최솟값: 5, $x=1$
(2) 최댓값: -6, $x=-4$
(3) 최댓값: 7, $x=0$
(4) 최솟값: -1, $x=5$

1-2 (1) $y=4x^2-8x+1=4(x-1)^2-3$
(2) $x=1$일 때 최솟값은 -3이다.
답 (1) $y=4(x-1)^2-3$ (2) -3, $x=1$

1-3 (1) $y=x^2+6x+7=(x+3)^2-2$
따라서 $x=-3$일 때 최솟값은 -2이다.
(2) $y=5x^2-10x+8=5(x-1)^2+3$
따라서 $x=1$일 때 최솟값은 3이다.
(3) $y=-2x^2-4x-9=-2(x+1)^2-7$
따라서 $x=-1$일 때 최댓값은 -7이다.
(4) $y=-3x^2+12x-1=-3(x-2)^2+11$
따라서 $x=2$일 때 최댓값은 11이다.
답 (1) 최솟값: -2 (2) 최솟값: 3
(3) 최댓값: -7 (4) 최댓값: 11

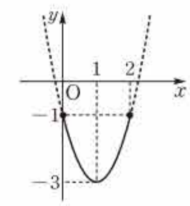
Lecture 25 제한된 범위에서의 이차함수의 최대, 최소

76쪽

1-1 답 3, 4, -3, -4, 0, 0, -4

1-2 (1) $0\le x\le 2$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고

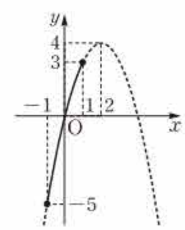
꼭짓점의 x좌표가 1이므로 이 범위에 속한다.



$f(0)=-1$, $f(1)=-3$,
$f(2)=-1$
따라서 $f(x)$의 최댓값은 -1, 최솟값은 -3이다.

(2) $-1\le x\le 1$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고

꼭짓점의 x좌표가 2이므로 이 범위에 속하지 않는다.

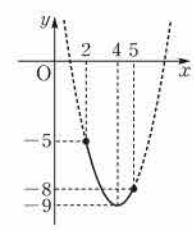


$f(-1)=-5$,
$f(1)=3$
따라서 $f(x)$의 최댓값은 3, 최솟값은 -5이다.

(3) $f(x)=x^2-8x+7=(x-4)^2-9$

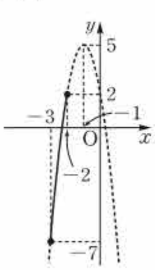
$y=ax^2+bx+c$ 꼴의 최대, 최소는 $y=a(x-p)^2+q$ 꼴로 변형하여 구한다.

$2\le x\le 5$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고



$f(2)=-5$, $f(4)=-9$,
$f(5)=-8$
따라서 $f(x)$의 최댓값은 -5, 최솟값은 -9이다.

(4) $f(x)=-3x^2-6x+2=-3(x+1)^2+5$
$-3\le x\le -2$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고



$f(-3)=-7$, $f(-2)=2$
따라서 $f(x)$의 최댓값은 2, 최솟값은 -7이다.

답 (1) 최댓값: -1, 최솟값: -3
(2) 최댓값: 3, 최솟값: -5
(3) 최댓값: -5, 최솟값: -9
(4) 최댓값: 2, 최솟값: -7

기본+표준 유형 Q+Q

77쪽

01 $y=-2x^2+8x-1=-2(x-2)^2+7$이므로
$M=7$

$y=3x^2+6x-5=3(x+1)^2-8$이므로

$m=-8$

$\therefore M+m=-1$ 답 ③

02 ① $y=(x-1)^2+5$의 최솟값은 5이다.

② $y=3(x+2)^2-7$의 최솟값은 -7이다.

③ $y=\frac{1}{2}x^2+3x+1=\frac{1}{2}(x+3)^2-\frac{7}{2}$

이므로 최솟값은 $-\frac{7}{2}$이다.

④ $y=x^2-2x+9=(x-1)^2+8$

이므로 최솟값은 8이다.

⑤ $y=4x^2-8x-2=4(x-1)^2-6$

이므로 최솟값은 -6이다.

따라서 최솟값이 가장 큰 것은 ④이다. 답 ④

03 $y=-2x^2+4x+k-7$

$=-2(x-1)^2+k-5$

이므로 $x=1$에서 최댓값 $k-5$를 갖는다.

즉 $k-5=9$이므로 $k=14$ 답 14

04 이차함수 $y=x^2+ax+b$가 $x=2$에서 최솟값 -5를 가지므로

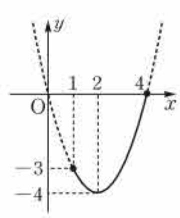
$x^2+ax+b=(x-2)^2-5=x^2-4x-1$

따라서 $a=-4$, $b=-1$이므로 $ab=4$ 답 4

05 $f(x)=x^2-4x$

$=(x-2)^2-4$

$1\le x\le 4$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고



$f(1)=-3$, $f(2)=-4$,

$f(4)=0$

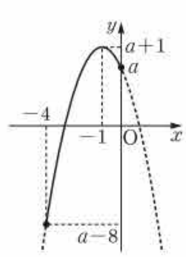
따라서 $M=0$, $m=-4$이므로

$M+m=-4$ 답 ①

06 $f(x)=-x^2-2x+a$

$=-(x+1)^2+a+1$

$-4\le x\le 0$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $x=-4$에서 최솟값 $a-8$을 가지므로

$a-8=-5$ $\therefore a=3$

즉 $f(x)=-(x+1)^2+4$이므로 $x=-1$에서 최댓값 4를 갖는다. 답 4

07 $x^2+2x=t$로 놓으면

$t=(x+1)^2-1\ge -1$

이때 주어진 함수는

$y=t^2-4t-5=(t-2)^2-9\ (t\ge -1)$

따라서 $t=2$에서 최솟값 -9를 갖는다. 답 ①

Q BOX

08 $2x-1=t$로 놓으면 $x=1$일 때 $t=1$, $x=4$일 때 $t=7$이므로 $1\le t\le 7$

이때 주어진 함수는

$y=t^2-6t+4=(t-3)^2-5\ (1\le t\le 7)$

따라서 $t=7$에서 최댓값 11, $t=3$에서 최솟값 -5를 가지므로 구하는 합은

$11+(-5)=6$ 답 ①

09 $2x-y=4$에서 $y=2x-4$

$\therefore xy=x(2x-4)=2x^2-4x=2(x-1)^2-2$

이때 $0\le x\le 3$이므로 $x=3$일 때 최댓값은 6, $x=1$일 때 최솟값은 -2이다.

따라서 구하는 합은 $6+(-2)=4$ 답 ④

10 합이 8이 되는 두 실수를 x, y라 하면

$x+y=8$ $\therefore y=8-x$

$\therefore xy=x(8-x)=-x^2+8x=-(x-4)^2+16$

따라서 $x=4$일 때 최댓값이 16이므로 곱이 최대가 되는 두 실수는 4, 4이다. 답 4, 4

$x=4$일 때, $y=8-4=4$

11 점 A의 좌표를 $(t,\ t^2-4t+4)(0<t<2)$라 하면

점 A는 제1사분면 위의 점이고 점 $B(t,\ 0)$에 대하여 $\overline{OB}<2$이므로 $0<t<2$

$\overline{OB}=t$, $\overline{AB}=t^2-4t+4$

따라서 직사각형 OBAC의 둘레의 길이를 y라 하면

$y=2(t+t^2-4t+4)$

$=2t^2-6t+8$

$=2\left(t-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{7}{2}$

즉 y는 $t=\frac{3}{2}$에서 최솟값 $\frac{7}{2}$을 가지므로 직사각형 OBAC의 둘레의 길이의 최솟값은 $\frac{7}{2}$이다. 답 $\frac{7}{2}$

12 $y=-3x^2+36x-48=-3(x-6)^2+60$

이므로 $x=6$에서 최댓값 60을 갖는다.

따라서 수익의 최댓값은 60만 원이다.

답 60만 원

중단원 마무리

79쪽

01 전략 주어진 두 점의 x좌표가 방정식 $2x^2+ax+b=0$의 실근임을 이용한다.

풀이 이차함수 $y=2x^2+ax+b$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표가 -1, 3이므로 -1, 3은 이차방정식 $2x^2+ax+b=0$의 두 근이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-1+3=-\frac{a}{2}$, $-1\cdot 3=\frac{b}{2}$

이므로 $a=-4$, $b=-6$

$\therefore a-b=2$ 답 2

02 전략 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 만나려면 이차방정식 $f(x)=0$의 판별식 D가 $D\geq 0$이어야 함을 이용한다.

풀이 이차방정식 $x^2+(2m-3)x+m^2-m+1=0$의 판별식을 D라 하면

이차방정식이 실근을 가져야 한다.

$$D=(2m-3)^2-4(m^2-m+1)\geq 0$$

$$-8m+5\geq 0 \qquad \therefore m\leq \frac{5}{8}$$

따라서 실수 m의 최댓값은 $\frac{5}{8}$이다. 답 ④

03 전략 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=g(x)$의 교점의 x좌표가 α, β이면 방정식 $f(x)=g(x)$의 두 실근이 α, β임을 이용한다.

풀이 이차함수 $y=-x^2+ax+b$의 그래프와 직선 $y=x+1$의 두 교점의 x좌표가 -1, 1이므로 이차방정식 $-x^2+ax+b=x+1$, 즉 $x^2+(1-a)x+1-b=0$의 두 근이 -1, 1이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$-1+1=-(1-a),\ -1\cdot 1=1-b$$

$$\therefore a=1,\ b=2$$

$$\therefore ab=2$$ 답 2

04 전략 직선 $y=2x+k$가 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 꼭짓점을 지남을 이용한다.

풀이 $f(x)=x^2+4x+3=(x+2)^2-1$

직선 $y=2x+k$가 점 P$(-2,\ -1)$을 지나므로

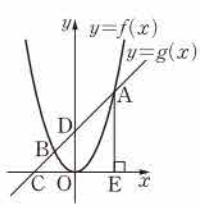
$$-1=2\cdot(-2)+k \qquad \therefore k=3$$

$x^2+4x+3=2x+3$에서 $x^2+2x=0$

$$x(x+2)=0 \qquad \therefore x=0 \text{ 또는 } x=-2$$

따라서 점 Q의 좌표는 $(0,\ 3)$ 답 $(0,\ 3)$

05 전략 직선 $y=g(x)$의 x절편과 y절편으로부터 두 점 C, D의 좌표를 구하고, 이차방정식 $f(x)=g(x)$의 두 근으로부터 두 점 A, B의 x좌표를 구한다.



풀이 직선 $y=g(x)$가 x축과 만나는 점이 C이므로 $g(x)=0$에서

$$ax+2a^2=0$$

$$a(x+2a)=0$$

$$\therefore x=-2a\ (\because a>0)$$

$$\therefore \text{C}(-2a,\ 0)$$

또 직선 $y=g(x)$가 y축과 만나는 점이 D이므로

$$\text{D}(0,\ 2a^2)$$

한편 두 함수 $f(x)=x^2$, $g(x)=ax+2a^2$의 그래프가 만나는 두 점 A, B의 x좌표는 이차방정식 $x^2=ax+2a^2$, 즉 $x^2-ax-2a^2=0$의 두 근이다.

$x^2-ax-2a^2=0$에서 $(x+a)(x-2a)=0$

$$\therefore x=-a \text{ 또는 } x=2a$$

이때 점 A는 제1사분면 위에 있으므로

$$\text{A}(2a,\ 4a^2)$$

또 점 A에서 x축에 내린 수선의 발이 E이므로

$$\text{E}(2a,\ 0)$$

따라서

$$S_1=\frac{1}{2}\cdot\overline{\text{OC}}\cdot\overline{\text{OD}}=\frac{1}{2}\cdot 2a\cdot 2a^2=2a^3,$$

$$S_2=\frac{1}{2}\cdot(\overline{\text{OD}}+\overline{\text{AE}})\cdot\overline{\text{OE}}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot(2a^2+4a^2)\cdot 2a=6a^3$$

이므로 $S_2=3S_1$ $\therefore k=3$ 답 ③

다른 풀이 $\triangle\text{COD}\backsim\triangle\text{CEA}$ (AA 닮음)이므로 닮음비는 C$(-2a,\ 0)$, E$(2a,\ 0)$에서

$\angle$DCO는 공통, $\angle$COD$=\angle$CEA$=90°$

$$\overline{\text{CO}}:\overline{\text{CE}}=1:2$$

따라서 넓이의 비는 $1^2:2^2=1:4$이므로

$$S_1:S_2=1:3, \quad S_2=3S_1 \quad \therefore k=3$$

06 전략 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=g(x)$의 위치 관계는 이차방정식 $f(x)=g(x)$의 판별식을 이용한다.

풀이 이차방정식 $x^2+2kx+k=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$$\frac{D_1}{4}=k^2-k=0, \qquad k(k-1)=0$$

$$\therefore k=0 \text{ 또는 } k=1 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

또 이차방정식 $x^2+2kx+k=(2k-1)x$, 즉 $x^2+x+k=0$의 판별식을 D_2라 하면

$$D_2=1^2-4k>0, \qquad 1-4k>0$$

$$\therefore k<\frac{1}{4} \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서 $k=0$ 답 0

07 전략 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=g(x)$가 만나지 않으려면 이차방정식 $f(x)=g(x)$의 판별식 D가 $D<0$이어야 함을 이용한다.

풀이 이차함수 $y=x^2-2ax+2a^2+5$의 그래프와 직선 $y=2x+k$가 만나지 않아야 하므로 이차방정식 $x^2-2ax+2a^2+5=2x+k$, 즉 $x^2-2(a+1)x+2a^2+5-k=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=\{-(a+1)\}^2-(2a^2+5-k)<0$$

$$\therefore k<a^2-2a+4$$

(i) $a=1$일 때, $k<3$이므로 $f(1)=2$

$1-2+4=3$

(ii) $a=2$일 때, $k<4$이므로 $f(2)=3$

$4-4+4=4$

(iii) $a=3$일 때, $k<7$이므로 $f(3)=6$

$9-6+4=7$

이상에서 $f(1)+f(2)+f(3)=11$ 답 11

08 전략 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=g(x)$가 접하면 이차방정식 $f(x)=g(x)$가 중근을 가짐을 이용한다.

풀이 기울기가 5인 직선의 y절편을 k라 하면 이차함수 $f(x)=x^2-3x+17$의 그래프와 직선 $y=5x+k$가 한 점에서 만난다.

이차방정식 $x^2-3x+17=5x+k$, 즉

$x^2-8x+17-k=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-4)^2-(17-k)=0$

$-1+k=0 \qquad \therefore k=1$

따라서 구하는 직선의 y절편은 1이다. 답 ①

09 전략 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=g(x)$가 접하면 이차방정식 $f(x)=g(x)$의 판별식 D가 $D=0$임을 이용한다.

풀이 기울기가 6인 직선의 방정식을 $y=6x+a$라 하면 이 직선이 이차함수 $y=3x^2$의 그래프에 접하므로 이차방정식 $3x^2=6x+a$, 즉 $3x^2-6x-a=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$\frac{D_1}{4}=(-3)^2-3\cdot(-a)=0$

$9+3a=0$

$\therefore a=-3$ ··· ❶

따라서 직선 $y=6x-3$이 이차함수 $y=-x^2-kx-k-8$의 그래프에 접하므로 이차방정식 $-x^2-kx-k-8=6x-3$, 즉 $x^2+(k+6)x+k+5=0$의 판별식을 D_2라 하면

$D_2=(k+6)^2-4(k+5)=0$

$k^2+8k+16=0, \qquad (k+4)^2=0$

$\therefore k=-4$ ··· ❷

답 -4

단계	채점 기준	비율
❶	a의 값을 구할 수 있다.	50 %
❷	k의 값을 구할 수 있다.	50 %

10 전략 먼저 이차함수의 식을 $y=k(x-p)^2+q$ 꼴로 변형한다.

풀이 $y=-x^2-4ax+8a-6$

$=-(x+2a)^2+4a^2+8a-6$

이므로 $x=-2a$에서 최댓값 $4a^2+8a-6$을 갖는다.

따라서 $m=4a^2+8a-6=4(a+1)^2-10$이므로 m은 $a=-1$에서 최솟값 -10을 갖는다. 답 ②

Q BOX

$y=-x^2-4ax+8a-6$
$=-(x^2+4ax+4a^2)+4a^2+8a-6$
$=-(x+2a)^2+4a^2+8a-6$

11 전략 조건 (나), (다)를 이용하여 $f(x)=a(x-p)^2+q$ 꼴로 나타낸다.

풀이 조건 (나), (다)에 의하여

$f(x)=a(x-2)^2-4 \ (a>0)$

조건 (가)에서 $f(1)=-2$이므로

$a-4=-2 \qquad \therefore a=2$

따라서 $f(x)=2(x-2)^2-4$이므로

$f(4)=2\cdot 2^2-4=4$ 답 ⑤

쌤 한마디

이차함수의 그래프의 축의 방정식이 $x=p$이면 이 그래프의 꼭짓점의 x좌표가 p이다.

Q BOX

$f(x)\geq 2$이므로
($f(x)$의 최솟값)≥ 2
$g(x)\leq 6$이므로
($g(x)$의 최댓값)≤ 6

12 전략 $f(x)$, $g(x)$를 $y=k(x-p)^2+q$ 꼴로 변형한 후 각각 최솟값, 최댓값을 구한다.

풀이 $f(x)=2x^2-4x-3a-2=2(x-1)^2-3a-4$

이므로 $f(x)$는 $x=1$에서 최솟값 $-3a-4$를 갖는다.

즉 $-3a-4\geq 2$이므로

$-3a\geq 6 \qquad \therefore a\leq -2$

$g(x)=-x^2-6x+2b-5=-(x+3)^2+2b+4$

이므로 $g(x)$는 $x=-3$에서 최댓값 $2b+4$를 갖는다.

즉 $2b+4\leq 6$이므로

$2b\leq 2 \qquad \therefore b\leq 1$

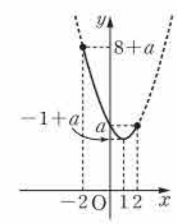
따라서 $a+b$는 $a=-2$, $b=1$일 때 최댓값 -1을 갖는다. 답 ②

13 전략 $f(x)$를 $f(x)=(x-p)^2+q$ 꼴로 변형한 후 꼭짓점의 x좌표가 주어진 범위에 속하는지 확인한다.

풀이 $f(x)=x^2-2x+a$

$=(x-1)^2-1+a$

이므로 $-2\leq x\leq 2$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $x=-2$에서 최댓값 $8+a$를 갖고, $x=1$에서 최솟값 $-1+a$를 가지므로

$(8+a)+(-1+a)=21$

$2a=14 \qquad \therefore a=7$ 답 ②

14 전략 두 수 α, β를 근으로 하는 이차방정식은 $a(x-\alpha)(x-\beta)=0 \ (a\neq 0)$임을 이용한다.

풀이 방정식 $f(x)=0$의 두 근이 -2, 4이므로

$f(x)=a(x+2)(x-4)$

$=a(x^2-2x-8)$

$=a(x-1)^2-9a \ (a\neq 0)$

$5\leq x\leq 8$에서

(i) $a<0$일 때,

함수 $f(x)$는 $x=5$에서 최댓값 $7a$를 가지므로

$7a=80 \qquad \therefore a=\frac{80}{7}$

이때 $a<0$이므로 조건을 만족시키는 a의 값은 존재하지 않는다.

(ii) $a>0$일 때,

함수 $f(x)$는 $x=8$에서 최댓값 $40a$를 가지므로

$40a=80 \qquad \therefore a=2$

(i), (ii)에서 $a=2$이므로

$f(x)=2(x+2)(x-4)$

$\therefore f(-5)=2\cdot(-3)\cdot(-9)=54$ 답 54

15 전략 먼저 $x^2+4x=t$로 놓고 t의 값의 범위를 구한다.

풀이 $x^2+4x=t$로 놓으면

$t=(x+2)^2-4\geq -4$

이때 주어진 함수는

$y=-t^2-2t$
$\quad=-(t+1)^2+1\ (t\geq-4)$

따라서 $t=-1$일 때 최댓값은 1이다. 답 ④

16 전략 먼저 $y^2\geq0$임을 이용하여 x의 값의 범위를 구한다.

풀이 $x+y^2=2$에서 $\quad y^2=2-x$ ······ ㉠

y가 실수이므로 $\quad y^2=2-x\geq0$

$\therefore x\leq2$ ··· ❶

㉠을 $-x^2+3y^2$에 대입하면

$-x^2+3(2-x)=-x^2-3x+6$
$\quad=-\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{33}{4}$

이때 $x\leq2$이므로 $x=-\frac{3}{2}$일 때 최댓값은 $\frac{33}{4}$이다. ··· ❷

답 $\frac{33}{4}$

단계	채점 기준	비율
❶	x의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❷	$-x^2+3y^2$의 최댓값을 구할 수 있다.	60 %

17 전략 인상되는 가격을 x만 원이라 하고 전체 판매 금액을 x에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 인상되는 가격을 x만 원, 전체 판매 금액을 y만 원이라 하면

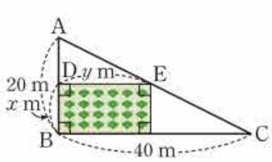
$y=(100+x)(2400-20x)$
$\quad=-20x^2+400x+240000$
$\quad=-20(x-10)^2+242000$

따라서 가격을 10만 원 인상했을 때 전체 판매 금액이 최대이므로 A의 가격은 110만 원이다.

$\therefore a=110$ 답 110

18 전략 텃밭의 세로의 길이를 x m라 하고 텃밭의 넓이를 x에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 오른쪽 그림과 같은 직각삼각형 ABC에서 $\overline{BD}=x$ m, $\overline{DE}=y$ m라 하면



△ADE∽△ABC (AA 닮음)이므로

$\overline{AD}:\overline{AB}=\overline{DE}:\overline{BC}$

즉 $(20-x):20=y:40$이므로

$y=40-2x$

이때 변의 길이는 양수이므로 $\quad 0<x<20$

텃밭의 넓이는

$xy=x(40-2x)$
$\quad=-2x^2+40x$
$\quad=-2(x-10)^2+200$

이때 $0<x<20$이므로 $x=10$일 때 최댓값은 200이다.

따라서 텃밭의 최대 넓이는 200 m^{2}이다.

답 ⑤

Q BOX

a^3+b^3
$=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ (a, b, c, d는 정수)일 때, $f(\alpha)=0$을 만족시키는 α의 값은 $\pm\frac{(d\text{의 약수})}{(a\text{의 약수})}$ 중에서 찾을 수 있다.

∠A는 공통,
∠ADE=∠ABC
$=90°$

$y=40-2x>0$이므로
$-2x>-40$
$\therefore x<20$

06 여러 가지 방정식

13 삼차방정식과 사차방정식

Lecture 26 삼차방정식과 사차방정식 L 82쪽

1-1 (1) $x^3+8=0$의 좌변을 인수분해하면

$(x+2)(x^2-2x+4)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=1\pm\sqrt{3}i$

(2) $x^4-9x^2=0$의 좌변을 인수분해하면

$x^2(x^2-9)=0$

$x^2(x+3)(x-3)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=0$ 또는 $x=3$

답 (1) $x=-2$ 또는 $x=1\pm\sqrt{3}i$
(2) $x=-3$ 또는 $x=0$ 또는 $x=3$

1-2 (1) $P(x)=x^3+2x^2-4x+1$로 놓으면

$P(1)=1+2-4+1=0$

조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 2 & -4 & 1 \\ & & 1 & 3 & -1 \\ \hline & 1 & 3 & -1 & 0 \end{array}$$

$\therefore P(x)=(x-1)(x^2+3x-1)$

따라서 주어진 방정식은

$(x-1)(x^2+3x-1)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=\frac{-3\pm\sqrt{13}}{2}$

(2) $P(x)=x^4+x^3-7x^2-x+6$으로 놓으면

$P(1)=1+1-7-1+6=0$,

$P(-1)=1-1-7+1+6=0$

조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & 1 & -7 & -1 & 6 \\ & & 1 & 2 & -5 & -6 \\ \hline -1 & 1 & 2 & -5 & -6 & 0 \\ & & -1 & -1 & 6 & \\ \hline & 1 & 1 & -6 & 0 & \end{array}$$

$\therefore P(x)=(x-1)(x+1)(x^2+x-6)$
$\quad=(x-1)(x+1)(x+3)(x-2)$

따라서 주어진 방정식은

$(x-1)(x+1)(x+3)(x-2)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$

답 (1) $x=1$ 또는 $x=\frac{-3\pm\sqrt{13}}{2}$
(2) $x=-3$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$

1-3 답 X^2-2X-3, $X-3$, 3, 3, 2, $\pm\sqrt{2}$, $\pm\sqrt{2}$

Lecture 27 특수한 형태의 사차방정식의 풀이 83쪽

1-1 답 X^2-5X+6, $X-3$, 3, 3, $\pm\sqrt{3}$

2-1 답 8, 8, $X-4$, 4, 4, 1, $2\pm\sqrt{3}$, $2\pm\sqrt{3}$

기본+표준 유형 Q+Q 84쪽

01 $x^3-x^2-9x+9=0$에서

$x^2(x-1)-9(x-1)=0$, $(x-1)(x^2-9)=0$

$(x-1)(x+3)(x-3)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=1$ 또는 $x=3$

따라서 가장 큰 근은 3, 가장 작은 근은 -3이므로

$\alpha=3$, $\beta=-3$ $\therefore \alpha-\beta=6$ 답 6

02 $P(x)=x^4-4x^3-x^2+10x+6$으로 놓으면

$P(-1)=1+4-1-10+6=0$,

$P(3)=81-108-9+30+6=0$

조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

-1	1	-4	-1	10	6
		-1	5	-4	-6
3	1	-5	4	6	0
		3	-6	-6	
	1	-2	-2	0	

$\therefore P(x)=(x+1)(x-3)(x^2-2x-2)$

즉 주어진 방정식은

$(x+1)(x-3)(x^2-2x-2)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=3$ 또는 $x=1\pm\sqrt{3}$

따라서 모든 실근의 합은

$-1+3+(1+\sqrt{3})+(1-\sqrt{3})=4$ 답 ④

03 $x^2-2x=X$로 놓으면 주어진 방정식은

$X^2-7X-8=0$, $(X+1)(X-8)=0$

$\therefore X=-1$ 또는 $X=8$

(i) $X=-1$일 때, $x^2-2x+1=0$에서

$(x-1)^2=0$ $\therefore x=1$

(ii) $X=8$일 때, $x^2-2x-8=0$에서

$(x+2)(x-4)=0$ $\therefore x=-2$ 또는 $x=4$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 음의 근은

-2 답 -2

04 $x^2+x=X$로 놓으면 주어진 방정식은

$(X-3)(X-5)=3$, $X^2-8X+12=0$

$(X-2)(X-6)=0$ $\therefore X=2$ 또는 $X=6$

(i) $X=2$일 때, $x^2+x-2=0$에서

$(x+2)(x-1)=0$ $\therefore x=-2$ 또는 $x=1$

(ii) $X=6$일 때, $x^2+x-6=0$에서

$(x+3)(x-2)=0$ $\therefore x=-3$ 또는 $x=2$

(i), (ii)에서

$x=-3$ 또는 $x=-2$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$

$\therefore |\alpha|+|\beta|+|\gamma|+|\delta|$

$=|-3|+|-2|+|1|+|2|=8$ 답 ①

05 $x^2=X$로 놓으면 주어진 방정식은

$X^2-10X+9=0$, $(X-1)(X-9)=0$

$\therefore X=1$ 또는 $X=9$

즉 $x^2=1$ 또는 $x^2=9$이므로 $x=\pm1$ 또는 $x=\pm3$

따라서 주어진 방정식의 자연수인 해는 1, 3이므로 구하는 곱은 $1\cdot3=3$ 답 3

06 $x^4-14x^2+25=0$에서

$(x^4-10x^2+25)-4x^2=0$

$(x^2-5)^2-(2x)^2=0$

$(x^2+2x-5)(x^2-2x-5)=0$

$\therefore x^2+2x-5=0$ 또는 $x^2-2x-5=0$

$\therefore x=-1\pm\sqrt{6}$ 또는 $x=1\pm\sqrt{6}$

Q BOX: $-1-\sqrt{6}<0$, $-1+\sqrt{6}>0$, $1-\sqrt{6}<0$, $1+\sqrt{6}>0$

따라서 주어진 방정식의 양수인 근은 $-1+\sqrt{6}$, $1+\sqrt{6}$이므로 구하는 합은

$(-1+\sqrt{6})+(1+\sqrt{6})=2\sqrt{6}$ 답 $2\sqrt{6}$

쌤 한마디

$x^4+\square+25$가 완전제곱식으로 인수분해되려면

$\square=\pm10x^2$

이어야 한다. 이때

$x^4-14x^2+25=(x^4+10x^2+25)-24x^2$

은 A^2-B^2 꼴로 인수분해되지 않으므로

$x^4-14x^2+25=(x^4-10x^2+25)-4x^2$

으로 변형한다.

07 방정식 $x^4-4x^3+2x^2-4x+1=0$의 양변을 x^2으로 나누면

Q BOX: $x=0$을 주어진 방정식에 대입하면 (좌변)$=1$, (우변)$=0$ 이므로 $x\neq0$

$x^2-4x+2-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}=0$

$x^2+\frac{1}{x^2}-4\left(x+\frac{1}{x}\right)+2=0$

$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4\left(x+\frac{1}{x}\right)=0$

$x+\frac{1}{x}=X$로 놓으면 $X^2-4X=0$

$X(X-4)=0$ $\therefore X=0$ 또는 $X=4$

(i) $X=0$일 때, $x+\frac{1}{x}=0$에서

$x^2+1=0$, $x^2=-1$ $\therefore x=\pm i$

(ii) $X=4$일 때, $x+\frac{1}{x}=4$에서

$x^2-4x+1=0$ $\therefore x=2\pm\sqrt{3}$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 실근은 $2\pm\sqrt{3}$이다.

답 ④

08 방정식 $x^4+5x^3-4x^2+5x+1=0$의 양변을 x^2으로 나누면

$x^2+5x-4+\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}=0$

$x^2+\frac{1}{x^2}+5\left(x+\frac{1}{x}\right)-4=0$

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+5\left(x+\frac{1}{x}\right)-6=0$$

$x+\frac{1}{x}=X$로 놓으면

$X^2+5X-6=0,\qquad (X+6)(X-1)=0$

$\therefore X=-6$ 또는 $X=1$

(i) $X=-6$일 때, $x+\frac{1}{x}=-6$에서

$x^2+6x+1=0\qquad \therefore x=-3\pm2\sqrt{2}$

(ii) $X=1$일 때, $x+\frac{1}{x}=1$에서

$x^2-x+1=0\qquad \therefore x=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 두 실근의 합은

$a=(-3+2\sqrt{2})+(-3-2\sqrt{2})=-6$

두 허근의 곱은

$b=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\cdot\frac{1-\sqrt{3}i}{2}=1$

$\therefore a+b=-5$ 답 -5

09 $3x^3-kx^2-(k+2)x+3=0$의 한 근이 1이므로

$3-k-(k+2)+3=0$

$4-2k=0\qquad \therefore k=2$

즉 주어진 방정식은

$3x^3-2x^2-4x+3=0$

이므로 조립제법을 이용하여 좌변을 인수분해하면

1	3	-2	-4	3
		3	1	-3
	3	1	-3	0

$(x-1)(3x^2+x-3)=0$

이때 α, β는 방정식 $3x^2+x-3=0$의 두 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-\frac{1}{3}$ 답 ③

10 방정식 $x^4-5x^3+ax^2+bx-6=0$의 두 근이 1, 3이므로

$1-5+a+b-6=0$에서

$a+b=10$ …… ㉠

$81-135+9a+3b-6=0$에서

$3a+b=20$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=5,\ b=5$

즉 주어진 방정식은 $x^4-5x^3+5x^2+5x-6=0$이므로 조립제법을 이용하여 좌변을 인수분해하면

1	1	-5	5	5	-6
		1	-4	1	6
3	1	-4	1	6	0
		3	-3	-6	
	1	-1	-2	0	

따라서 주어진 방정식은

$(x-1)(x-3)(x^2-x-2)=0$

$\therefore (x-1)(x-3)(x+1)(x-2)=0$

따라서 주어진 방정식의 나머지 두 근은

$x=-1$ 또는 $x=2$ 답 $-1,\ 2$

QBOX

㉡−㉠을 하면

$2a=10\quad \therefore a=5$

$a=5$를 ㉠에 대입하면

$5+b=10\quad \therefore b=5$

상자의 높이

11 $P(x)=x^3-5x^2+(k-6)x+k$로 놓으면

$P(-1)=-1-5-(k-6)+k=0$

조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

-1	1	-5	$k-6$	k
		-1	6	$-k$
	1	-6	k	0

$\therefore P(x)=(x+1)(x^2-6x+k)$

따라서 주어진 방정식은

$(x+1)(x^2-6x+k)=0$

이 방정식의 근이 모두 실수가 되려면 이차방정식 $x^2-6x+k=0$이 실근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-3)^2-k\ge0$

$\therefore k\le9$ 답 ④

12 $x^3+2x^2+kx+2k=0$에서

$x^2(x+2)+k(x+2)=0$

$\therefore (x^2+k)(x+2)=0$

이 방정식이 한 개의 실근과 두 개의 허근을 가지려면 이차방정식 $x^2+k=0$이 두 개의 허근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=0^2-4\cdot1\cdot k<0\qquad \therefore k>0$

따라서 정수 k의 최솟값은 1이다. 답 1

13 $P(x)=x^3-2x^2-(3+2k)x+6k$로 놓으면

$P(3)=27-18-9-6k+6k=0$

조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

3	1	-2	$-(3+2k)$	$6k$
		3	3	$-6k$
	1	1	$-2k$	0

$\therefore P(x)=(x-3)(x^2+x-2k)$

따라서 주어진 방정식은

$(x-3)(x^2+x-2k)=0$

이 방정식이 중근을 가지려면

(i) 방정식 $x^2+x-2k=0$이 $x=3$을 근으로 가질 때,

$9+3-2k=0\qquad \therefore k=6$

(ii) 방정식 $x^2+x-2k=0$이 중근을 가질 때,

이 방정식의 판별식을 D라 하면

$D=1^2-4\cdot1\cdot(-2k)=0\qquad \therefore k=-\frac{1}{8}$

(i), (ii)에서 모든 실수 k의 값의 곱은

$6\cdot\left(-\frac{1}{8}\right)=-\frac{3}{4}$ 답 $-\frac{3}{4}$

14 상자의 밑면의 가로의 길이는 $(14-2x)$ cm, 세로의 길이는 $(10-2x)$ cm이므로

$x(14-2x)(10-2x)=120$

$x(7-x)(5-x)=30$

$\therefore x^3-12x^2+35x-30=0$

$P(x)=x^3-12x^2+35x-30$으로 놓으면

06 여러 가지 방정식

$P(2)=8-48+70-30=0$

조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & -12 & 35 & -30 \\ & & 2 & -20 & 30 \\ \hline & 1 & -10 & 15 & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore P(x)=(x-2)(x^2-10x+15)$

따라서 방정식은

$(x-2)(x^2-10x+15)=0$

$\therefore x=2$ 또는 $x=5\pm\sqrt{10}$

그런데 x는 자연수이므로 $x=2$ 답 2

15 $\pi x^2(x-1)=48\pi$이므로 $x^3-x^2-48=0$

$P(x)=x^3-x^2-48$로 놓으면

$P(4)=64-16-48=0$

조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 4 & 1 & -1 & 0 & -48 \\ & & 4 & 12 & 48 \\ \hline & 1 & 3 & 12 & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore P(x)=(x-4)(x^2+3x+12)$

따라서 방정식은

$(x-4)(x^2+3x+12)=0$

$\therefore x=4$ ($\because x^2+3x+12>0$) 답 4

$x^2+3x+12$
$=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{39}{4}$
>0

14 삼차방정식의 근의 성질

Lecture 28 삼차방정식의 근과 계수의 관계 86쪽

1-1 (4) $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$

답 (1) 8 (2) 6 (3) 4 (4) $\frac{3}{2}$

2-1 x^3의 계수가 1이고 세 근이 -2, 3, 4인 삼차방정식은

$x^3-(-2+3+4)x^2+(-2\cdot3+3\cdot4-2\cdot4)x$
$-(-2)\cdot3\cdot4=0$

$\therefore x^3-5x^2-2x+24=0$

답 $x^3-5x^2-2x+24=0$

3-1 계수가 유리수이고 주어진 방정식의 한 근이 $1+\sqrt{2}$이므로 $1-\sqrt{2}$도 근이다.

따라서 주어진 방정식의 세 근이 -3, $1+\sqrt{2}$, $1-\sqrt{2}$이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-3(1+\sqrt{2})+(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})$
$+(1-\sqrt{2})\cdot(-3)=a$,

$-3(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})=-b$

$\therefore a=-7$, $b=-3$ 답 $a=-7$, $b=-3$

Q BOX

$\omega^2+\omega+1=0$에서
$\omega^2+1=-\omega$

ω, $\overline{\omega}$는 이차방정식 $x^2-x+1=0$의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여
$\omega\overline{\omega}=1$ $\therefore \overline{\omega}=\frac{1}{\omega}$

Lecture 29 방정식 $x^3=1$의 허근의 성질 87쪽

1-1 $x^3=1$에서 $x^3-1=0$

$\therefore (x-1)(x^2+x+1)=0$

(1) $\omega^3=1$이므로 $\omega^6=(\omega^3)^2=1$

(2) ω는 $x^2+x+1=0$의 한 허근이므로

$\omega^2+\omega+1=0$ $\therefore \omega^2+\omega=-1$

(3) $\omega^{20}+\omega^{10}=(\omega^3)^6\cdot\omega^2+(\omega^3)^3\cdot\omega=\omega^2+\omega=-1$

(4) $\omega+\frac{1}{\omega}=\frac{\omega^2+1}{\omega}=\frac{-\omega}{\omega}=-1$

답 (1) 1 (2) -1 (3) -1 (4) -1

1-2 $x^3=1$에서 $x^3-1=0$

$\therefore (x-1)(x^2+x+1)=0$

(1) $\omega^3=1$이므로 $\omega^9=(\omega^3)^3=1$

(2), (3) ω는 $x^2+x+1=0$의 한 허근이고, ω의 켤레복소수 $\overline{\omega}$도 $x^2+x+1=0$의 허근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\omega+\overline{\omega}=-1$, $\omega\overline{\omega}=1$

(4) $\omega^5+\omega^4+\omega^3=\omega^3(\omega^2+\omega+1)=0$

답 (1) 1 (2) -1 (3) 1 (4) 0

1-3 $x^3=-1$에서 $x^3+1=0$

$\therefore (x+1)(x^2-x+1)=0$

(1) $\omega^3=-1$이므로

$\omega^{12}=(\omega^3)^4=1$

(2) ω는 $x^2-x+1=0$의 한 허근이므로

$\omega^2-\omega+1=0$ $\therefore \omega^2-\omega=-1$

(3) $\omega^8-\omega^7+\omega^6=\omega^6(\omega^2-\omega+1)=0$

(4) $\frac{\overline{\omega}}{\omega^2}=\frac{1}{\omega}\cdot\frac{1}{\omega^2}=\frac{1}{\omega^3}=-1$

답 (1) 1 (2) -1 (3) 0 (4) -1

기본+표준 유형 Q+Q 88쪽

01 삼차방정식 $x^3+x^2-4x+2=0$의 세 근이 α, β, γ이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=-1$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-4$

$\therefore \alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$
$=(-1)^2-2\cdot(-4)$
$=9$

답 ②

02 주어진 삼차방정식의 세 근을 α, 2α, $3\alpha(\alpha\neq0)$라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+2\alpha+3\alpha=6$, $6\alpha=6$ $\therefore \alpha=1$

따라서 세 근이 1, 2, 3이므로

$1\cdot2+2\cdot3+3\cdot1=a$, $1\cdot2\cdot3=-b$

$\therefore a=11$, $b=-6$

$\therefore a-b=17$ 답 ③

03 삼차방정식 $x^3-3x^2-2x+1=0$의 세 근이 α, β, γ이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta+\gamma=3,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-2,\ \alpha\beta\gamma=-1$$

$$\therefore \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}=\frac{-2}{-1}=2,$$

$$\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\beta}\cdot\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\gamma}\cdot\frac{1}{\alpha}=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha\beta\gamma}=\frac{3}{-1}=-3,$$

$$\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta}\cdot\frac{1}{\gamma}=\frac{1}{\alpha\beta\gamma}=-1$$

따라서 $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$, $\frac{1}{\gamma}$을 세 근으로 하고 x^3의 계수가 1인 삼차방정식은

$x^3-2x^2-3x+1=0$ 　　답 $x^3-2x^2-3x+1=0$

04 삼차방정식 $x^3-5x+1=0$의 세 근이 α, β, γ이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta+\gamma=0,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-5,\ \alpha\beta\gamma=-1$$

$$\therefore (\alpha+1)+(\beta+1)+(\gamma+1)=\alpha+\beta+\gamma+3=3,$$

$$(\alpha+1)(\beta+1)+(\beta+1)(\gamma+1)+(\gamma+1)(\alpha+1)$$
$$=\alpha\beta+\alpha+\beta+1+\beta\gamma+\beta+\gamma+1+\gamma\alpha+\gamma+\alpha+1$$
$$=(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+2(\alpha+\beta+\gamma)+3$$
$$=-5+2\cdot0+3=-2,$$

전개하여 동류항끼리 계산한다.

$$(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)$$
$$=\alpha\beta\gamma+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+(\alpha+\beta+\gamma)+1$$
$$=-1+(-5)+0+1=-5$$

따라서 $\alpha+1$, $\beta+1$, $\gamma+1$을 세 근으로 하고 x^3의 계수가 1인 삼차방정식은

$x^3-3x^2-2x+5=0$ 　　답 $x^3-3x^2-2x+5=0$

05 a, b가 유리수이고 주어진 방정식의 한 근이 $2-\sqrt{3}$이므로 $2+\sqrt{3}$도 근이다.
나머지 한 근을 α라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+(2+\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})=-a$ 　　…… ㉠

$\alpha(2+\sqrt{3})+(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})+\alpha(2-\sqrt{3})=b$ 　　…… ㉡

$\alpha(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=-2$ 　　…… ㉢

㉢에서 　$\alpha=-2$

$\alpha=-2$를 ㉠, ㉡에 대입하면 　$a=-2$, $b=-7$

$\therefore ab=14$ 　　답 14

06 $P(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c는 실수)라 하면 방정식 $P(x)=0$의 한 근이 $1+i$이므로 $1-i$도 근이다.
따라서 주어진 방정식의 세 근이 -2, $1+i$, $1-i$이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$-2+(1+i)+(1-i)=-a,$$
$$-2\cdot(1+i)+(1+i)(1-i)+(1-i)\cdot(-2)=b,$$
$$-2\cdot(1+i)(1-i)=-c$$
$$\therefore a=0,\ b=-2,\ c=4$$

따라서 $P(x)=x^3-2x+4$이므로

$P(1)=1-2+4=3$ 　　답 3

07 $x^3=1$에서 　$x^3-1=0$

$\therefore (x-1)(x^2+x+1)=0$

①, ② ω는 $x^2+x+1=0$의 한 허근이고, ω의 켤레복소수인 $\overline{\omega}$도 $x^2+x+1=0$의 허근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\omega+\overline{\omega}=-1$, $\omega\overline{\omega}=1$

④ $\omega^3=1$이므로 　$\omega^2=\frac{1}{\omega}$

⑤ $\omega^2+\overline{\omega}^2=(\omega+\overline{\omega})^2-2\omega\overline{\omega}$
$=(-1)^2-2\cdot1=-1$

답 ⑤

08 $x^3=-1$에서 　$x^3+1=0$

$\therefore (x+1)(x^2-x+1)=0$

따라서 ω는 $x^2-x+1=0$의 한 허근이므로

$\omega^2-\omega+1=0$

$\therefore \frac{\omega^2}{\omega-1}+\frac{\omega}{1+\omega^2}=\frac{\omega^2}{\omega^2}+\frac{\omega}{\omega}=2$ 　　답 ⑤

15 연립이차방정식

Lecture 30 연립이차방정식 　89쪽

1-1 (1) $x-y=1$에서 　$x-1=y$ 　　…… ㉠

㉠을 $(x-1)^2+y^2=4$에 대입하면

$y^2+y^2=4$, 　$y^2=2$

$\therefore y=\pm\sqrt{2}$, $x=1\pm\sqrt{2}$ (복호동순)

따라서 주어진 연립방정식의 해는

$\begin{cases} x=1+\sqrt{2} \\ y=\sqrt{2} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=1-\sqrt{2} \\ y=-\sqrt{2} \end{cases}$

(2) $2x-y=3$에서 　$y=2x-3$ 　　…… ㉠

㉠을 $x^2+y^2=5$에 대입하면

$x^2+(2x-3)^2=5$, 　$5x^2-12x+4=0$

$(5x-2)(x-2)=0$ 　$\therefore x=\frac{2}{5}$ 또는 $x=2$

$x=\frac{2}{5}$를 ㉠에 대입하면 　$y=-\frac{11}{5}$

$x=2$를 ㉠에 대입하면 　$y=1$

따라서 주어진 연립방정식의 해는

$\begin{cases} x=\frac{2}{5} \\ y=-\frac{11}{5} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$

답 (1) $\begin{cases} x=1+\sqrt{2} \\ y=\sqrt{2} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=1-\sqrt{2} \\ y=-\sqrt{2} \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x=\frac{2}{5} \\ y=-\frac{11}{5} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$

1-2 (1) $x^2-y^2=0$에서 $(x+y)(x-y)=0$

$\therefore x=-y$ 또는 $x=y$

(i) $x=-y$를 $2x^2+4xy-y^2=15$에 대입하면

$2y^2-4y^2-y^2=15$

$-3y^2=15$, $y^2=-5$

$\therefore y=\pm\sqrt{5}i$, $x=\mp\sqrt{5}i$ (복호동순)

(ii) $x=y$를 $2x^2+4xy-y^2=15$에 대입하면

$2y^2+4y^2-y^2=15$

$5y^2=15$, $y^2=3$

$\therefore y=\pm\sqrt{3}$, $x=\pm\sqrt{3}$ (복호동순)

(i), (ii)에서 주어진 연립방정식의 해는

$\begin{cases}x=\sqrt{5}i\\y=-\sqrt{5}i\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=-\sqrt{5}i\\y=\sqrt{5}i\end{cases}$

또는 $\begin{cases}x=\sqrt{3}\\y=\sqrt{3}\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=-\sqrt{3}\\y=-\sqrt{3}\end{cases}$

(2) $x^2-xy-2y^2=0$에서

$(x+y)(x-2y)=0$

$\therefore x=-y$ 또는 $x=2y$

(i) $x=-y$를 $3x^2-y^2=22$에 대입하면

$3y^2-y^2=22$, $2y^2=22$, $y^2=11$

$\therefore y=\pm\sqrt{11}$, $x=\mp\sqrt{11}$ (복호동순)

(ii) $x=2y$를 $3x^2-y^2=22$에 대입하면

$12y^2-y^2=22$, $11y^2=22$, $y^2=2$

$\therefore y=\pm\sqrt{2}$, $x=\pm2\sqrt{2}$ (복호동순)

(i), (ii)에서 주어진 연립방정식의 해는

$\begin{cases}x=\sqrt{11}\\y=-\sqrt{11}\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=-\sqrt{11}\\y=\sqrt{11}\end{cases}$

또는 $\begin{cases}x=2\sqrt{2}\\y=\sqrt{2}\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=-2\sqrt{2}\\y=-\sqrt{2}\end{cases}$

답 풀이 참조

1-3 (1) x, y는 이차방정식 $t^2-3t-10=0$의 두 근이므로

$(t+2)(t-5)=0$ $\therefore t=-2$ 또는 $t=5$

따라서 주어진 연립방정식의 해는

$\begin{cases}x=-2\\y=5\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=5\\y=-2\end{cases}$

(2) $x-xy+y=5$에서 $x+y=-1$이므로

$xy=-6$

즉 x, y는 이차방정식 $t^2+t-6=0$의 두 근이므로

$(t+3)(t-2)=0$ $\therefore t=-3$ 또는 $t=2$

따라서 주어진 연립방정식의 해는

$\begin{cases}x=-3\\y=2\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=2\\y=-3\end{cases}$

답 (1) $\begin{cases}x=-2\\y=5\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=5\\y=-2\end{cases}$

(2) $\begin{cases}x=-3\\y=2\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=2\\y=-3\end{cases}$

Q BOX

일반적으로 상수항이 0인 이차식을 인수분해한다.

$x=2-y$로 변형해도 된다.

$x=-y$에서
$y=\sqrt{5}i$일 때 $x=-\sqrt{5}i$
$y=-\sqrt{5}i$일 때 $x=\sqrt{5}i$

$t^2-(x+y)t+xy=0$

기본+표준 유형 Q+Q

90쪽

01 $\begin{cases}x+y=2 & \cdots\cdots ㉠\\x^2+xy-y^2=4 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$

㉠에서 $y=2-x$ ⋯⋯ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$x^2+x(2-x)-(2-x)^2=4$

$x^2-6x+8=0$, $(x-2)(x-4)=0$

$\therefore x=2$ 또는 $x=4$

이것을 ㉢에 대입하면 주어진 연립방정식의 해는

$x=2$, $y=0$ 또는 $x=4$, $y=-2$

따라서 $\alpha=4$, $\beta=-2$이므로 $\alpha-\beta=6$ 답 ⑤

02 $x=-2$, $y=0$을 $\begin{cases}x-y=a\\x^2-xy+3y^2=b\end{cases}$에 대입하면

$a=-2$, $b=4$

$\therefore \begin{cases}x-y=-2 & \cdots\cdots ㉠\\x^2-xy+3y^2=4 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$

㉠에서 $y=x+2$ ⋯⋯ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$x^2-x(x+2)+3(x+2)^2=4$

$3x^2+10x+8=0$, $(x+2)(3x+4)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=-\frac{4}{3}$

$x=-\frac{4}{3}$를 ㉢에 대입하면 $y=\frac{2}{3}$

따라서 나머지 한 근은

$\begin{cases}x=-\frac{4}{3}\\y=\frac{2}{3}\end{cases}$ 답 $\begin{cases}x=-\frac{4}{3}\\y=\frac{2}{3}\end{cases}$

03 $\begin{cases}4x^2-y^2=0 & \cdots\cdots ㉠\\x^2-xy+y^2=21 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$

㉠에서 $(2x+y)(2x-y)=0$

$\therefore y=-2x$ 또는 $y=2x$

(i) $y=-2x$를 ㉡에 대입하면

$x^2+2x^2+4x^2=21$, $x^2=3$

$\therefore x=\pm\sqrt{3}$, $y=\mp2\sqrt{3}$ (복호동순)

(ii) $y=2x$를 ㉡에 대입하면

$x^2-2x^2+4x^2=21$, $x^2=7$

$\therefore x=\pm\sqrt{7}$, $y=\pm2\sqrt{7}$ (복호동순)

(i), (ii)에서 해가 아닌 것은 ③이다. 답 ③

04 $\begin{cases}2x^2-3xy+y^2=0 & \cdots\cdots ㉠\\x^2+y^2=20 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$

㉠에서 $(2x-y)(x-y)=0$

$\therefore y=2x$ 또는 $y=x$

(i) $y=2x$를 ㉡에 대입하면

$x^2+4x^2=20$, $x^2=4$

$\therefore x=\pm2$, $y=\pm4$ (복호동순)

(ii) $y=x$를 ㉡에 대입하면

$x^2+x^2=20$, $x^2=10$

$\therefore x=\pm\sqrt{10}$, $y=\pm\sqrt{10}$ (복호동순)

(i), (ii)에서 x, y는 정수이므로

$x=\pm 2$, $y=\pm 4$ (복호동순)

$\therefore xy=8$ 답 8

05 $x+y=u$, $xy=v$로 놓으면 주어진 연립방정식은

$\begin{cases} u^2-2v=25 & \cdots\cdots ㉠ \\ v=12 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$

㉡을 ㉠에 대입하면

$u^2-24=25$, $u^2=49$ $\therefore u=\pm 7$

(i) $u=7$, $v=12$, 즉 $x+y=7$, $xy=12$일 때

x, y는 이차방정식 $t^2-7t+12=0$의 두 근이므로

$(t-3)(t-4)=0$ $\therefore t=3$ 또는 $t=4$

$\therefore \begin{cases} x=3 \\ y=4 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=4 \\ y=3 \end{cases}$

(ii) $u=-7$, $v=12$, 즉 $x+y=-7$, $xy=12$일 때

x, y는 이차방정식 $t^2+7t+12=0$의 두 근이므로

$(t+4)(t+3)=0$ $\therefore t=-4$ 또는 $t=-3$

$\therefore \begin{cases} x=-4 \\ y=-3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-3 \\ y=-4 \end{cases}$

(i), (ii)에서 구하는 순서쌍 (x, y)는

$(-4, -3)$, $(-3, -4)$, $(3, 4)$, $(4, 3)$

답 $(-4, -3)$, $(-3, -4)$, $(3, 4)$, $(4, 3)$

06 $x+y=u$, $xy=v$로 놓으면 주어진 연립방정식은

$\begin{cases} u-v=-2 & \cdots\cdots ㉠ \\ u^2-4v=4 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

$x^2-2xy+y^2$
$=(x+y)^2-4xy$

㉠에서 $v=u+2$ ⋯⋯ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하여 정리하면

$u^2-4u-12=0$, $(u+2)(u-6)=0$

$\therefore u=-2$ 또는 $u=6$

이것을 ㉢에 대입하면

$u=-2$, $v=0$ 또는 $u=6$, $v=8$

(i) $u=-2$, $v=0$, 즉 $x+y=-2$, $xy=0$일 때

x, y는 이차방정식 $t^2+2t=0$의 두 근이므로

$t(t+2)=0$ $\therefore t=0$ 또는 $t=-2$

$\therefore \begin{cases} x=0 \\ y=-2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-2 \\ y=0 \end{cases}$

(ii) $u=6$, $v=8$, 즉 $x+y=6$, $xy=8$일 때

x, y는 이차방정식 $t^2-6t+8=0$의 두 근이므로

$(t-2)(t-4)=0$ $\therefore t=2$ 또는 $t=4$

$\therefore \begin{cases} x=2 \\ y=4 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=4 \\ y=2 \end{cases}$

(i), (ii)에서 x^2-y^2의 값은 $x=4$, $y=2$일 때 최대이므로 구하는 최댓값은

$4^2-2^2=12$ 답 12

07 $\begin{cases} x^2+y^2=8 & \cdots\cdots ㉠ \\ x+y=k & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉡에서 $y=-x+k$

이것을 ㉠에 대입하면 $x^2+(-x+k)^2=8$

$\therefore 2x^2-2kx+k^2-8=0$

이를 만족시키는 x의 값이 오직 한 개 존재해야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-k)^2-2(k^2-8)=0$

$k^2-2k^2+16=0$, $k^2=16$ $\therefore k=\pm 4$

따라서 모든 실수 k의 값의 곱은

$4\cdot(-4)=-16$ 답 ①

08 $\begin{cases} x+y=4 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-xy+k=0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $y=4-x$

이것을 ㉡에 대입하면

$x^2-x(4-x)+k=0$ $\therefore 2x^2-4x+k=0$

이를 만족시키는 실수 x의 값이 존재해야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-2)^2-2\cdot k\ge 0$ $\therefore k\le 2$

따라서 자연수 k는 1, 2이므로 그 합은

$1+2=3$ 답 3

09 처음 땅의 가로의 길이를 x m, 세로의 길이를 y m라 하면

$\begin{cases} x^2+y^2=17^2 & \cdots\cdots ㉠ \\ (x-2)(y+2)=xy+10 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉡에서 $xy+2x-2y-4=xy+10$

$\therefore y=x-7$ ⋯⋯ ㉢

㉢을 ㉠에 대입하면

$x^2+(x-7)^2=289$, $x^2-7x-120=0$

$(x+8)(x-15)=0$ $\therefore x=-8$ 또는 $x=15$

그런데 $x>2$이므로 $x=15$

$x-2>0$이므로
$x>2$

$x=15$를 ㉢에 대입하면 $y=8$

따라서 처음 땅의 넓이는

$xy=15\cdot 8=120\ (\text{m}^2)$ 답 $120\ \text{m}^2$

10 두 자리 자연수의 십의 자리의 숫자를 x, 일의 자리의 숫자를 y라 하면

$\begin{cases} x^2+y^2=68 & \cdots\cdots ㉠ \\ (10y+x)+(10x+y)=110 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

일의 자리의 숫자와 십의 자리의 숫자를 바꾼 수

㉡에서 $y=10-x$ ⋯⋯ ㉢

㉢을 ㉠에 대입하면

$x^2+(10-x)^2=68$, $x^2-10x+16=0$

$(x-2)(x-8)=0$ $\therefore x=2$ 또는 $x=8$

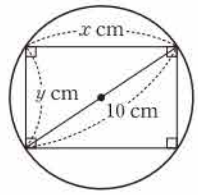
$x=2$를 ㉢에 대입하면 $y=8$

$x=8$을 ㉢에 대입하면 $y=2$

그런데 $x>y$이므로 $x=8$, $y=2$

따라서 처음 수는 82이다. 답 82

11 넓이가 $25\pi\ \text{cm}^2$인 원의 반지름의 길이는 5 cm이다.



원에 내접하는 직사각형의 가로의 길이를 x cm, 세로의 길이를 y cm라 하면 직사각형의 둘레의 길이가 28 cm이므로

$2(x+y)=28 \qquad \therefore\ y=14-x \qquad \cdots\cdots$ ㉠

직사각형의 대각선의 길이가 원의 지름의 길이와 같으므로

$x^2+y^2=10^2 \qquad \therefore\ x^2+y^2=100 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$x^2+(14-x)^2=100, \qquad x^2-14x+48=0$

$(x-6)(x-8)=0 \qquad \therefore\ x=6$ 또는 $x=8$

$x=6$을 ㉠에 대입하면 $\quad y=8$

$x=8$을 ㉠에 대입하면 $\quad y=6$

따라서 직사각형의 이웃하는 두 변의 길이의 차는

$8-6=2\ (\text{cm})$ 답 2 cm

중단원 마무리

L 92쪽

01 전략 인수정리와 조립제법을 이용하여 주어진 방정식의 좌변을 인수분해한다.

풀이 $P(x)=x^4-5x^3+5x^2+5x-6$으로 놓으면

$P(1)=1-5+5+5-6=0,$

$P(-1)=1+5+5-5-6=0$

조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & -5 & 5 & 5 & -6 \\ & & 1 & -4 & 1 & 6 \\ \hline -1 & 1 & -4 & 1 & 6 & 0 \\ & & -1 & 5 & -6 & \\ \hline & 1 & -5 & 6 & 0 & \end{array}$$

$\therefore\ P(x)=(x-1)(x+1)(x^2-5x+6)$

$\qquad\quad =(x-1)(x+1)(x-2)(x-3)$

즉 주어진 방정식은

$(x-1)(x+1)(x-2)(x-3)=0$

$\therefore\ x=-1$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=3$

따라서 $\alpha=-1,\ \beta=3$이므로 $\quad \beta-\alpha=4$ 답 ④

02 전략 공통부분이 나오도록 묶어서 전개한 후 공통부분을 한 문자로 치환하여 인수분해한다.

풀이 $(x^2-4x+3)(x^2-6x+8)=120$에서

$(x-1)(x-3)(x-2)(x-4)=120$

$\{(x-1)(x-4)\}\{(x-2)(x-3)\}=120$

$(x^2-5x+4)(x^2-5x+6)=120$

$x^2-5x=X$로 놓으면 $\quad (X+4)(X+6)=120$

$X^2+10X-96=0, \qquad (X-6)(X+16)=0$

$(x^2-5x-6)(x^2-5x+16)=0$

$(x+1)(x-6)(x^2-5x+16)=0$

Q BOX

상수항의 합이 같아지도록 두 개씩 짝을 짓는다.

판별식을 D라 하면

$D=(-5)^2-4\cdot1\cdot16$

$\quad=-39<0$

이므로 이 이차방정식은 허근을 갖는다.

이때 ω는 방정식 $x^2-5x+16=0$의 한 허근이므로

$\omega^2-5\omega+16=0$

$\therefore\ \omega^2-5\omega=-16$ 답 ①

03 전략 주어진 방정식을 $A^2-B^2=0$ 꼴로 변형한 후 인수분해한다.

풀이 $x^4+6x^2+25=0$에서

$(x^4+10x^2+25)-4x^2=0$

$(x^2+5)^2-(2x)^2=0$

$(x^2+2x+5)(x^2-2x+5)=0$

$\therefore\ x^2+2x+5=0$ 또는 $x^2-2x+5=0$

방정식 $x^2+2x+5=0$의 두 근을 $\alpha,\ \beta$, 방정식 $x^2-2x+5=0$의 두 근을 $\gamma,\ \delta$라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-2,\ \alpha\beta=5,\ \gamma+\delta=2,\ \gamma\delta=5$

$$\therefore\ \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\delta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}+\frac{\gamma+\delta}{\gamma\delta}$$

$$=\frac{-2}{5}+\frac{2}{5}=0$$ 답 0

04 전략 주어진 방정식의 양변을 x^2으로 나눈 후 $x+\frac{1}{x}=X$로 치환하여 인수분해한다.

풀이 방정식 $2x^4-x^3-6x^2-x+2=0$의 양변을 x^2으로 나누면

$$2x^2-x-6-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}=0$$

$$2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-\left(x+\frac{1}{x}\right)-6=0$$

$$2\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-\left(x+\frac{1}{x}\right)-10=0$$

$x+\frac{1}{x}=X$로 놓으면

$2X^2-X-10=0, \qquad (X+2)(2X-5)=0$

$\therefore\ X=-2$ 또는 $X=\frac{5}{2}$

(i) $X=-2$일 때, $x+\frac{1}{x}=-2$에서

$x^2+2x+1=0, \qquad (x+1)^2=0$

$\therefore\ x=-1$

(ii) $X=\frac{5}{2}$일 때, $x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2}$에서

$2x^2-5x+2=0, \qquad (2x-1)(x-2)=0$

$\therefore\ x=\frac{1}{2}$ 또는 $x=2$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 서로 다른 정수인 근은 $-1,\ 2$이므로 그 합은

$-1+2=1$ 답 1

05 전략 방정식 $P(x)=0$의 한 근이 α이면 $P(\alpha)=0$임을 이용한다.

풀이 주어진 방정식의 두 근이 $-1,\ 2$이므로

$-1-a-b+1+3b=0$에서

$-a+2b=0 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$8-4a+2b-2+3b=0$에서

$-4a+5b=-6$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=4,\ b=2$

즉 주어진 방정식은 $x^3-4x^2+x+6=0$이므로 조립제법을 이용하여 좌변을 인수분해하면

-1	1	-4	1	6
		-1	5	-6
2	1	-5	6	0
		2	-6	
	1	-3	0	

$(x+1)(x-2)(x-3)=0$에서

$x=-1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=3$

따라서 나머지 한 근은 3이다. 답 3

㉠×4−㉡을 하면
$3b=6 \quad \therefore b=2$
$b=2$를 ㉠에 대입하면
$-a+4=0$
$\therefore a=4$

06 전략 $f(a)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해한다.

풀이 $f(a)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

a	1	$-(a+4)$	$4a-5$	$5a$
		a	$-4a$	$-5a$
	1	-4	-5	0

$\therefore f(x)=(x-a)(x^2-4x-5)$

$=(x-a)(x+1)(x-5)$

$f(x)=0$에서

$x=a$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=5$

한편 $f(a+3)=0$에서 $a+3$은 방정식 $f(x)=0$의 근이므로

$a+3=-1$ 또는 $a+3=5$

$\therefore a=-4$ 또는 $a=2$

따라서 실수 a의 값의 합은

$-4+2=-2$ 답 ②

07 전략 주어진 방정식의 좌변을 인수분해한 후 이차방정식의 판별식을 이용하여 조건을 만족시키는 a의 값을 찾는다.

풀이 $P(x)=x^3-(6+a)x^2+7ax-a^2$으로 놓으면

$P(a)=a^3-6a^2-a^3+7a^2-a^2=0$

조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

a	1	$-(6+a)$	$7a$	$-a^2$
		a	$-6a$	a^2
	1	-6	a	0

$\therefore P(x)=(x-a)(x^2-6x+a)$

즉 주어진 방정식은

$(x-a)(x^2-6x+a)=0$

이 방정식이 서로 다른 세 실근을 가지려면 이차방정식 $x^2-6x+a=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-3)^2-a>0 \quad \therefore a<9$ …… ㉠

한편 이차방정식 $x^2-6x+a=0$이 $x=a$를 근으로 갖지 않아야 하므로

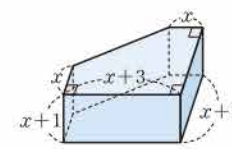
$a^2-6a+a\neq0, \quad a^2-5a\neq0$

$a(a-5)\neq0 \quad \therefore a\neq0,\ a\neq5$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 자연수 a는 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8의 7개이다. 답 ⑤

08 전략 오각기둥의 부피를 이용하여 x에 대한 삼차방정식을 세운다.

풀이 주어진 전개도로 오각기둥을 만들면 오른쪽 그림과 같다.



이 오각기둥의 부피가 108이므로

$\left[x(x+3)+\frac{1}{2}\{x+(x+3)\}\cdot2\right](x+1)=108$

$(x^2+5x+3)(x+1)=108$

$x^3+6x^2+8x-105=0$ …… ㉠

$f(x)=x^3+6x^2+8x-105$라 하면

$f(3)=27+54+24-105=0$

이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

3	1	6	8	-105
		3	27	105
	1	9	35	0

$\therefore f(x)=(x-3)(x^2+9x+35)$

따라서 방정식 ㉠은

$(x-3)(x^2+9x+35)=0$

$\therefore x=3\ (\because x^2+9x+35>0)$ 답 ③

09 전략 이차방정식과 삼차방정식의 근과 계수의 관계를 이용한다.

풀이 이차방정식 $x^2-3x+a=0$의 두 근을 $\alpha,\ \beta$, 삼차방정식 $x^3-4x^2+bx-5=0$의 세 근을 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$라 하면 이차방정식과 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=3,\ \alpha+\beta+\gamma=4$

이므로 $\gamma=1$

또 $\alpha\beta=a,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=b,\ \alpha\beta\gamma=5$이므로

$a+3=b,\ a=5 \quad \therefore a=5,\ b=8$

$\therefore a+b=13$ 답 13

$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=b$에서
$\alpha\beta+\beta+\alpha=b$
$\therefore a+3=b$

10 전략 절댓값이 같고 부호가 서로 다른 두 근을 α, $-\alpha\ (\alpha>0)$로 놓은 후 삼차방정식의 근과 계수의 관계를 이용한다.

풀이 주어진 삼차방정식의 세 근을 $\alpha,\ -\alpha,\ \beta\ (\alpha>0)$라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+(-\alpha)+\beta=2,\ \alpha\cdot(-\alpha)\cdot\beta=-18$

$\therefore \alpha=3,\ \beta=2$

따라서 세 근이 $-3,\ 2,\ 3$이므로

$k=-3\cdot2+2\cdot3+3\cdot(-3)=-9$ 답 ④

주어진 방정식에 $x=2$를 대입하여 k의 값을 구할 수도 있다.
즉 $8-8+2k+18=0$에서
$k=-9$

11 전략 세 수 $a,\ b,\ c$를 근으로 하고 x^3의 계수가 1인 삼차방정식은 $x^3-(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x-abc=0$임을 이용한다.

풀이 삼차방정식 $x^3+5x^2-x-3=0$의 세 근이 α, β, γ이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=-5$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-1$, $\alpha\beta\gamma=3$

$\therefore (-\alpha)+(-\beta)+(-\gamma)=-(\alpha+\beta+\gamma)=5$,

$(-\alpha)\cdot(-\beta)+(-\beta)\cdot(-\gamma)+(-\gamma)\cdot(-\alpha)$
$=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-1$,

$(-\alpha)\cdot(-\beta)\cdot(-\gamma)=-\alpha\beta\gamma=-3$

따라서 $-\alpha$, $-\beta$, $-\gamma$를 세 근으로 하고 x^3의 계수가 1인 삼차방정식은

$x^3-5x^2-x+3=0$ 답 ②

12 **전략** 먼저 주어진 조건을 이용하여 방정식 $P(x)=0$의 세 근을 찾는다.

풀이 조건 (가)에서 $P(x)$는 $x-2$를 인수로 가지므로 2는 방정식 $P(x)=0$의 한 근이다.

$P(x)$
$=(x-2)(x^2+ax+b)$

조건 (나)에서 방정식 $P(x)=0$의 한 근이 $4i$이고 계수가 모두 실수이므로 $-4i$도 근이다.

즉 방정식 $P(x)=0$의 세 근이 2, $4i$, $-4i$이므로

$P(x)=(x-2)(x-4i)(x+4i)$ ··· ❶

$\therefore P(2x)=(2x-2)(2x-4i)(2x+4i)$
$=8(x-1)(x-2i)(x+2i)$

방정식 $P(2x)=0$에서

$8(x-1)(x-2i)(x+2i)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=2i$ 또는 $x=-2i$ ··· ❷

따라서 구하는 모든 근의 곱은

$1\cdot2i\cdot(-2i)=4$ ··· ❸

답 4

단계	채점 기준	비율
❶	삼차식 $P(x)$를 구할 수 있다.	40 %
❷	방정식 $P(2x)=0$의 근을 구할 수 있다.	40 %
❸	모든 근의 곱을 구할 수 있다.	20 %

13 **전략** 방정식 $x^3=1$의 한 허근이 ω이면 $\omega^3=1$, $\omega^2+\omega+1=0$임을 이용한다.

풀이 $x^3=1$에서 $x^3-1=0$, 즉 $(x-1)(x^2+x+1)=0$이므로 ω는 $x^2+x+1=0$의 한 허근이다.

$\therefore \omega^2+\omega+1=0$, $\omega^3=1$

이때

$f(1)=\frac{1+\omega}{\omega^2}=\frac{-\omega^2}{\omega^2}=-1$,

$f(2)=\frac{1+\omega^2}{\omega^4}=\frac{-\omega}{\omega}=-1$,

$f(3)=\frac{1+\omega^3}{\omega^6}=2$,

$f(4)=\frac{1+\omega^4}{\omega^8}=\frac{1+\omega}{\omega^2}=f(1)$,

$f(5)=\frac{1+\omega^5}{\omega^{10}}=\frac{1+\omega^2}{\omega^4}=f(2)$,

$f(6)=\frac{1+\omega^6}{\omega^{12}}=\frac{1+\omega^3}{\omega^6}=f(3)$,

$\vdots$

이므로

$f(1)=f(4)=f(7)=f(10)=f(13)=-1$,
$f(2)=f(5)=f(8)=f(11)=f(14)=-1$,
$f(3)=f(6)=f(9)=f(12)=f(15)=2$

$\therefore f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(15)$
$=(-1-1+2)\cdot5=0$

답 ③

14 **전략** 먼저 일차방정식을 한 문자에 대하여 정리한 후 이차방정식에 대입하여 해를 구한다.

풀이 $\begin{cases} x-y=2 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+3y^2=12 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $x=y+2$ ······ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$(y+2)^2+3y^2=12$, $y^2+y-2=0$

$(y+2)(y-1)=0$ $\therefore y=-2$ 또는 $y=1$

$y=-2$를 ㉢에 대입하면 $x=0$

$y=1$을 ㉢에 대입하면 $x=3$

그런데 $\alpha>0$, $\beta>0$이므로 $\alpha=3$, $\beta=1$

$\therefore \alpha^2-\beta^2=8$ 답 8

15 **전략** 한 이차방정식의 이차식을 인수분해하여 일차방정식을 얻은 후 다른 이차방정식에 대입하여 푼다.

풀이 $\begin{cases} x^2+y^2=40 & \cdots\cdots ㉠ \\ 4x^2+y^2=4xy & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉡에서 $4x^2-4xy+y^2=0$, $(2x-y)^2=0$

$\therefore y=2x$ ······ ㉢

㉢을 ㉠에 대입하면

$x^2+4x^2=40$, $x^2=8$ $\therefore x=\pm2\sqrt{2}$

이것을 ㉢에 대입하면 주어진 연립방정식의 해는

$x=\pm2\sqrt{2}$, $y=\pm4\sqrt{2}$ (복호동순)

$\therefore \alpha\beta=16$ 답 ①

16 **전략** $x+y=u$, $xy=v$로 놓고 x, y가 이차방정식 $t^2-ut+v=0$의 두 근임을 이용한다.

풀이 $x+y=u$, $xy=v$로 놓으면 주어진 연립방정식은

$\begin{cases} u+v=9 & \cdots\cdots ㉠ \\ uv=20 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

$x^2y+xy^2=xy(x+y)$
$=uv$

㉠에서 $v=9-u$ ······ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$u(9-u)=20$, $u^2-9u+20=0$

$(u-4)(u-5)=0$ $\therefore u=4$ 또는 $u=5$

$u=4$를 ㉢에 대입하면 $v=5$

$u=5$를 ㉢에 대입하면 $v=4$ ··· ❶

(i) $u=4$, $v=5$, 즉 $x+y=4$, $xy=5$일 때

x, y는 이차방정식 $t^2-4t+5=0$의 두 근이므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-2)^2-1\cdot5=-1<0$

즉 방정식 $t^2-4t+5=0$은 서로 다른 두 허근을 갖는다.

(ii) $u=5$, $v=4$, 즉 $x+y=5$, $xy=4$일 때

x, y는 이차방정식 $t^2-5t+4=0$의 두 근이므로

$(t-1)(t-4)=0$ $\quad\therefore t=1$ 또는 $t=4$

$\therefore \begin{cases} x=1 \\ y=4 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=4 \\ y=1 \end{cases}$ ⋯ ❷

(i), (ii)에서 $x>y$이므로

$x=4$, $y=1$

$\therefore x-y=3$ ⋯ ❸

답 3

단계	채점 기준	비율
❶	u, v의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷	연립방정식을 만족시키는 실수 x, y의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸	$x-y$의 값을 구할 수 있다.	10 %

17 전략 먼저 일차방정식을 한 문자에 대하여 정리한 후 이차방정식에 대입한다.

풀이 $\begin{cases} 2x-y=5 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-2y=k & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $\quad y=2x-5$

이것을 ㉡에 대입하면

$x^2-2(2x-5)=k$

$\therefore x^2-4x+10-k=0$ $\cdots\cdots$ ㉢

주어진 연립방정식이 오직 한 쌍의 해를 가지려면 이차방정식 ㉢이 중근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-2)^2-(10-k)=0$

$-6+k=0$ $\quad\therefore k=6$

$k=6$을 ㉢에 대입하면

$x^2-4x+4=0$, $\quad (x-2)^2=0$

$\therefore x=2$

$x=2$를 $y=2x-5$에 대입하면 $\quad y=-1$

따라서 $\alpha=2$, $\beta=-1$이므로

$\alpha+\beta+k=2+(-1)+6=7$

답 7

18 전략 처음 화단의 가로, 세로의 길이를 각각 x m, y m로 놓고 연립방정식을 세운다.

풀이 처음 화단의 가로, 세로의 길이를 각각 x m, y m라 하면

$\begin{cases} 2(x+y)=26 \\ 2x\cdot 3y=216 \end{cases}$, 즉 $\begin{cases} x+y=13 \\ xy=36 \end{cases}$

이를 만족시키는 x, y는 t에 대한 이차방정식 $t^2-13t+36=0$의 두 근이므로

$(t-4)(t-9)=0$ $\quad\therefore t=4$ 또는 $t=9$

$\therefore \begin{cases} x=4 \\ y=9 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=9 \\ y=4 \end{cases}$

이때 $x>y$이므로 처음 화단의 가로의 길이는 9 m이다.

답 9 m

07 일차부등식

16 연립일차부등식

Lecture 31 부등식의 기본 성질과 풀이

96쪽

1-1 (1) $a<b$에서 $\quad 2a<2b$

$\therefore 2a-7<2b-7$

(2) $a<b$에서 $\quad -\frac{a}{3}>-\frac{b}{3}$

$\therefore -\frac{a}{3}+1>-\frac{b}{3}+1$

답 (1) $<$ (2) $>$

1-2 답 (1) $0\le x-1\le 2$ (2) $2\le 2x\le 6$ (3) $-3\le -x\le -1$ (4) $\frac{1}{3}\le\frac{1}{x}\le 1$

2-1 (1) $4x-5>6x+13$에서 $\quad -2x>18$

$\therefore x<-9$

(2) $2(x-1)\le 3(x+2)-9$에서

$2x-2\le 3x-3$, $\quad -x\le -1$

$\therefore x\ge 1$

(3) $1-0.4x\ge 0.1x+0.7$에서

양변에 10을 곱한다.

$10-4x\ge x+7$, $\quad -5x\ge -3$

$\therefore x\le\frac{3}{5}$

(4) $\frac{5}{4}+\frac{3}{2}x<x+\frac{1}{2}$에서 $\quad 5+6x<4x+2$

양변에 4, 2의 최소공배수 4를 곱한다.

$2x<-3$ $\quad\therefore x<-\frac{3}{2}$

답 (1) $x<-9$ (2) $x\ge 1$ (3) $x\le\frac{3}{5}$ (4) $x<-\frac{3}{2}$

2-2 (2) $a=0$일 때, $0<1$이므로 해는 모든 실수이다.

답 (1) $x<\frac{a+1}{a}$ (2) 모든 실수 (3) $x>\frac{a+1}{a}$

Lecture 32 연립일차부등식

97쪽

1-1 답 (1) $1<x\le 5$ (2) $x<-1$

1-2 (1) $x+1\le -4$에서 $\quad x\le -5$

$3x<9$에서 $\quad x<3$

따라서 연립부등식의 해는

$x\le -5$

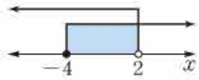
(2) $2x+7\ge -1$에서 $\quad 2x\ge -8$

$\therefore x\ge -4$

$5x<10$에서 $\quad x<2$

따라서 연립부등식의 해는

$-4\le x<2$



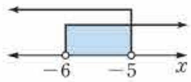
(3) $x+3<-2$에서 $\quad x<-5$

$3x+8>2(x+1)$에서 $\quad 3x+8>2x+2$

$\therefore x>-6$

따라서 연립부등식의 해는

$-6<x<-5$



(4) $4(x-2)\ge 2(x-1)$에서

$4x-8\ge 2x-2$

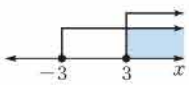
$2x\ge 6 \quad \therefore x\ge 3$

$x+6\le 3(x+4)$에서 $\quad x+6\le 3x+12$

$-2x\le 6 \quad \therefore x\ge -3$

따라서 연립부등식의 해는

$x\ge 3$



답 (1) $x\le -5$ (2) $-4\le x<2$
(3) $-6<x<-5$ (4) $x\ge 3$

1-3 (1) $0.8x+1.5\ge -4.9$에서 $\quad 8x+15\ge -49$

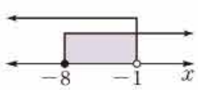
$8x\ge -64 \quad \therefore x\ge -8$

$\frac{2}{3}x+\frac{1}{6}<\frac{1}{6}x-\frac{1}{3}$에서 $\quad 4x+1<x-2$

$3x<-3 \quad \therefore x<-1$

따라서 연립부등식의 해는

$-8\le x<-1$



(2) $0.3(2-x)<0.1x-0.2$에서

$3(2-x)<x-2, \quad 6-3x<x-2$

$-4x<-8 \quad \therefore x>2$

$7+\frac{5}{2}x\ge 0.5(x-6)$에서

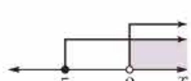
$0.5=\frac{1}{2}$이므로 양변에 2를 곱한다.

$14+5x\ge x-6, \quad 4x\ge -20$

$\therefore x\ge -5$

따라서 연립부등식의 해는

$x>2$



답 (1) $-8\le x<-1$ (2) $x>2$

기본+표준 유형 Q+Q

98쪽

01 ① $a>b$에서 $\quad a-3>b-3$

② $a>b$에서 $\quad -2a<-2b \quad \therefore 5-2a<5-2b$

③ $a>b$에서 $\quad 3a>3b \quad \therefore 3a+4>3b+4$

④ $a>b$에서 $\quad -\frac{a}{2}<-\frac{b}{2}$

$\therefore -\frac{a}{2}+1<-\frac{b}{2}+1$

⑤ $a=1$, $b=-1$이면 $a>b$이지만 $\frac{6}{a}-1>\frac{6}{b}-1$이다.

$\frac{6}{a}-1=\frac{6}{1}-1=5$,
$\frac{6}{b}-1=\frac{6}{-1}-1$
$=-7$

답 ④

02 ㄱ. $b<0$이므로 $a<b$의 양변을 b로 나누면

$\frac{a}{b}>1$

ㄴ. $a<b$에서 $\quad -a>-b$

이때 $-a>0$, $-b>0$이므로 $\quad -\frac{1}{a}<-\frac{1}{b}$

양변에 -1을 곱하면 $\quad \frac{1}{a}>\frac{1}{b}$

ㄷ. $|a|>|b|$이므로 $\quad a^2>b^2$

$ab>0$이므로 양변을 ab로 나누면 $\quad \frac{a}{b}>\frac{b}{a}$

$a<0$, $b<0$이므로
$ab>0$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ④

03 부등식 $ax\ge b$의 해가 $x\le 1$이므로

$a<0$, $\frac{b}{a}=1 \quad \therefore a<0,\ b=a$

부등식 $ax\ge b$의 부등호의 방향과 해 $x\le 1$의 부등호의 방향이 반대이므로 x의 계수는 음수이다.

따라서 $ax\le a-3b$에서

$ax\le -2a$

이때 $a<0$이므로 $\quad x\ge -2$ 답 ②

쌤 한마디

부등식 $ax\ge b$의 해가 주어졌을 때, 상수 a, b의 조건은 다음과 같다.

부등식 $ax\ge b$의 해가
- $x\ge a$ ⇨ $a>0$, $\frac{b}{a}=a$
- $x\le a$ ⇨ $a<0$, $\frac{b}{a}=a$
- 없다. ⇨ $a=0$, $b>0$
- 모든 실수이다. ⇨ $a=0$, $b\le 0$

04 $a^2x+2a\le x$에서 $\quad (a^2-1)x\le -2a$

이 부등식의 해가 존재하지 않으려면

$a^2-1=0$, $-2a<0$

$(a+1)(a-1)=0$, $a>0$

$a=-1$일 때, 주어진 부등식의 해는 모든 실수이다.

$\therefore a=1$ 답 1

05 $5x+2>8x-7$에서 $\quad -3x>-9$

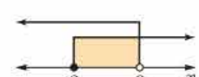
$\therefore x<3$

$-2(x+1)\ge 4-5x$에서 $\quad -2x-2\ge 4-5x$

$3x\ge 6 \quad \therefore x\ge 2$

따라서 연립부등식의 해는

$2\le x<3$



즉 $a=2$, $b=3$이므로

$b-a=1$ 답 1

06 $0.4x-0.7<\frac{3}{2}x+\frac{2}{5}$에서 $\quad 4x-7<15x+4$

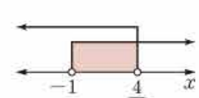
$-11x<11 \quad \therefore x>-1$

$\frac{1}{2}x-\frac{5}{3}<-1$에서 $\quad 3x-10<-6$

$3x<4 \quad \therefore x<\frac{4}{3}$

따라서 연립부등식의 해는

$-1<x<\frac{4}{3}$



이므로 정수 x는 0, 1의 2개이다. 답 2

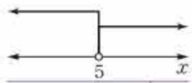
17 여러 가지 부등식

Lecture 33 특수한 해를 갖는 연립일차부등식 99쪽

1-1 (3) $2x-9>1$에서

$2x>10$ $\quad\therefore x>5$

따라서 연립부등식의 해는 없다.



공통부분이 없다.

답 (1) $x=-3$ (2) 해는 없다.
(3) 해는 없다. (4) $x=2$

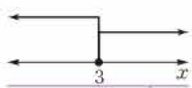
1-2 (1) $-x\le 4x-15$에서 $\quad -5x\le -15$

$\therefore x\ge 3$

$5x+8\le 3x+14$에서 $\quad 2x\le 6$

$\therefore x\le 3$

따라서 연립부등식의 해는 $x=3$



공통부분이 3뿐이다.

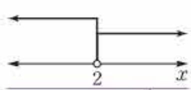
(2) $-2x+5<x-1$에서 $\quad -3x<-6$

$\therefore x>2$

$4x-1<2x+3$에서 $\quad 2x<4$

$\therefore x<2$

따라서 연립부등식의 해는 없다.



공통부분이 없다.

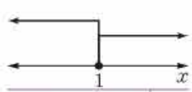
(3) $3x+4\ge 7x$에서 $\quad -4x\ge -4$

$\therefore x\le 1$

$x-5\ge -2(x+1)$에서 $\quad x-5\ge -2x-2$

$3x\ge 3$ $\quad\therefore x\ge 1$

따라서 연립부등식의 해는 $x=1$



공통부분이 1뿐이다.

(4) $1+3(x-2)\ge 2x$에서 $\quad 3x-5\ge 2x$

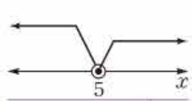
$\therefore x\ge 5$

$5(x+1)<4(x-3)+22$에서

$5x+5<4x+10$

$\therefore x<5$

따라서 연립부등식의 해는 없다.



공통부분이 없다.

답 (1) $x=3$ (2) 해는 없다.
(3) $x=1$ (4) 해는 없다.

Lecture 34 여러 가지 부등식 100쪽

1-1 (1) 주어진 부등식에서

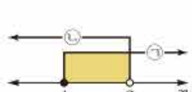
$$\begin{cases} 2x\le 3x+4 & \cdots\cdots ㉠ \\ 3x+4<10 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $\quad -x\le 4$ $\quad\therefore x\ge -4$

㉡에서 $\quad 3x<6$ $\quad\therefore x<2$

따라서 주어진 부등식의 해는

$-4\le x<2$



(2) 주어진 부등식에서

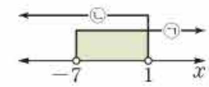
$$\begin{cases} x-4<2x+3 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x+3<-x+6 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $\quad -x<7$ $\quad\therefore x>-7$

㉡에서 $\quad 3x<3$ $\quad\therefore x<1$

따라서 주어진 부등식의 해는

$-7<x<1$



답 (1) $-4\le x<2$ (2) $-7<x<1$

2-1 (2) $|5-x|\le 6$에서 $\quad -6\le 5-x\le 6$

$-11\le -x\le 1$ $\quad\therefore -1\le x\le 11$

답 (1) $x<-2$ 또는 $x>2$ (2) $-1\le x\le 11$

2-2 답 -2, -1, -1, 0, 0, 1, -2, 1

기본+표준 유형 Q+Q 101쪽

01 $x+5\le -2x-7$에서 $\quad 3x\le -12$

$\therefore x\le -4$

$2(3x+1)\ge 4(x-1)+6$에서

$6x+2\ge 4x+2$, $\quad 2x\ge 0$

$\therefore x\ge 0$

따라서 연립부등식의 해는 없다.

답 ⑤

02 $\frac{9}{5}x-1\ge x+\frac{3}{5}$에서 $\quad 9x-5\ge 5x+3$

$4x\ge 8$ $\quad\therefore x\ge 2$

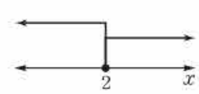
$0.2x-0.1\le -0.3(x-3)$에서

$2x-1\le -3(x-3)$, $\quad 2x-1\le -3x+9$

$5x\le 10$ $\quad\therefore x\le 2$

따라서 연립부등식의 해는

$x=2$



답 $x=2$

03 주어진 부등식에서

$$\begin{cases} -x+1<3(x-3) & \cdots\cdots ㉠ \\ 3(x-3)\le 2x+1 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $\quad -x+1<3x-9$

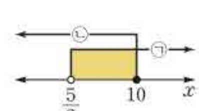
$-4x<-10$ $\quad\therefore x>\frac{5}{2}$

㉡에서 $\quad 3x-9\le 2x+1$

$\therefore x\le 10$

따라서 주어진 부등식의 해는

$\frac{5}{2}<x\le 10$



즉 $a=\frac{5}{2}$, $b=10$이므로

$ab=25$

답 25

04 주어진 부등식에서

$$\begin{cases} x-0.1\le\frac{1}{5}x+0.7 & \cdots\cdots ㉠ \\ \frac{1}{5}x+0.7<\frac{3}{2}x+2 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $10x-1\le 2x+7$

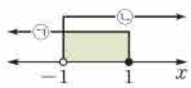
$8x\le 8$ $\quad\therefore x\le 1$

㉡에서 $2x+7<15x+20$

$-13x<13$ $\quad\therefore x>-1$

따라서 주어진 부등식의 해는

$-1<x\le 1$



이므로 정수 x는 0, 1의 2개이다.

답 ②

05 $2x-a\le 5x+a+4$에서 $\quad -3x\le 2a+4$

$\therefore x\ge -\frac{2a+4}{3}$

$3(x-2)<x+8$에서 $\quad 3x-6<x+8$

$2x<14$ $\quad\therefore x<7$

이때 연립부등식의 해가 $-2\le x<7$이므로

$-\frac{2a+4}{3}=-2,\quad 2a+4=6$

$2a=2$ $\quad\therefore a=1$

답 ④

$x\ge -\frac{2a+4}{3}$는 $x\ge -2$와 같으므로 $-\frac{2a+4}{3}=-2$

06 $3x+b>0$에서 $\quad 3x>-b$ $\quad\therefore x>-\frac{b}{3}$

$x-2a\ge 0$에서 $\quad x\ge 2a$

주어진 그림에서 각 부등식의 해가 $x>-1$, $x\ge 4$이므로

$-\frac{b}{3}=-1$, $2a=4$

$\therefore a=2,\ b=3$

$\therefore a+b=5$

답 5

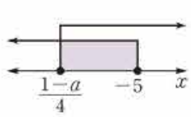
07 $2x-7\ge 4x+3$에서 $\quad -2x\ge 10$

$\therefore x\le -5$

$5x+1\ge x-a+2$에서 $\quad 4x\ge 1-a$

$\therefore x\ge\frac{1-a}{4}$

이때 연립부등식이 해를 갖도록 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로



$\frac{1-a}{4}\le -5,\quad 1-a\le -20$

$-a\le -21$ $\quad\therefore a\ge 21$

따라서 정수 a의 최솟값은 21이다.

답 ④

$\frac{1-a}{4}=-5$이면 주어진 연립부등식은 $\begin{cases} x\le -5 \\ x\ge -5 \end{cases}$ $\therefore x=-5$

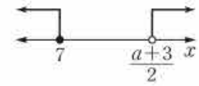
08 $3x-1\le 2(x+3)$에서 $\quad 3x-1\le 2x+6$

$\therefore x\le 7$

$4x-3>2x+a$에서 $\quad 2x>a+3$

$\therefore x>\frac{a+3}{2}$

이때 연립부등식이 해를 갖지 않도록 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로



$\frac{a+3}{2}\ge 7,\quad a+3\ge 14$

$\therefore a\ge 11$

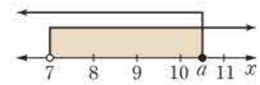
답 $a\ge 11$

$\frac{a+3}{2}=7$이면 주어진 연립부등식은 $\begin{cases} x\le 7 \\ x>7 \end{cases}$ 따라서 해가 없다.

09 $x+5<2(x-1)$에서 $\quad x+5<2x-2$

$-x<-7$ $\quad\therefore x>7$

이때 연립부등식을 만족시키는 정수 x가 3개이므로 오른쪽 그림에서



$10\le a<11$

답 ①

쌤 한마디

$a=11$이면 연립부등식의 해가 $7<x\le 11$이므로 정수인 해가 8, 9, 10, 11의 4개이다. 즉 주어진 조건을 만족시키지 않는다.
이와 같이 정수인 해의 개수가 주어진 연립부등식에서 미지수의 값의 범위를 구할 때에는 양 끝 값의 포함 여부를 반드시 확인하도록 한다.

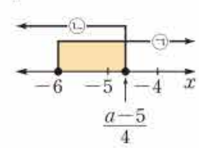
10 주어진 부등식에서

$$\begin{cases} x-7\le 3x+5 & \cdots\cdots ㉠ \\ 3x+5\le -x+a & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $-2x\le 12$ $\quad\therefore x\ge -6$

㉡에서 $4x\le a-5$ $\quad\therefore x\le\frac{a-5}{4}$

이때 주어진 부등식을 만족시키는 정수 x가 2개이므로 오른쪽 그림에서



$-5\le\frac{a-5}{4}<-4$

$-20\le a-5<-16$

$\therefore -15\le a<-11$

따라서 정수 a의 최댓값은 -12이다.

답 -12

$\frac{a-5}{4}=-4$이면 주어진 부등식의 해가 $-6\le x\le -4$이므로 정수인 해가 -6, -5, -4의 3개이다.

11 빵을 x개 산다고 하면 우유는 $(12-x)$개 살 수 있으므로

$8800\le 1000x+600(12-x)\le 10000$

$8800\le 400x+7200\le 10000$

$1600\le 400x\le 2800$

$\therefore 4\le x\le 7$

따라서 빵은 최대 7개 살 수 있다.

답 7개

12 연속하는 세 홀수를 $x-2$, x, $x+2$라 하면

$48<(x-2)+x+(x+2)<54$

$48<3x<54$ $\quad\therefore 16<x<18$

x는 홀수이므로 $\quad x=17$

따라서 연속하는 세 홀수는 15, 17, 19이므로 가장 작은 수는 15이다.

답 ①

쌤 한마디

① 연속하는 세 정수에 대한 문제
⇨ 세 수를 $x-1$, x, $x+1$로 놓고 식을 세운다.
② 연속하는 세 짝수 (또는 홀수)에 대한 문제
⇨ 세 수를 $x-2$, x, $x+2$로 놓고 식을 세운다.

13 학생 수를 x라 하면 사탕은 $(4x+12)$개이므로
$6(x-1)+1\le 4x+12<6(x-1)+5$,
즉 $\begin{cases} 6(x-1)+1\le 4x+12 & \cdots\cdots ㉠ \\ 4x+12<6(x-1)+5 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$
㉠에서 $6x-5\le 4x+12$
$2x\le 17$ $\therefore x\le \frac{17}{2}$
㉡에서 $4x+12<6x-1$
$-2x<-13$ $\therefore x>\frac{13}{2}$
따라서 연립부등식의 해는
$\frac{13}{2}<x\le \frac{17}{2}$
이므로 최대 학생 수는 8이다. 답 8

x는 자연수이므로 x의 값은 7, 8이다.

14 의자의 개수를 x라 하면 학생은 $(7x+9)$명이므로
$8(x-3)+1\le 7x+9\le 8(x-3)+8$,
즉 $\begin{cases} 8(x-3)+1\le 7x+9 & \cdots\cdots ㉠ \\ 7x+9\le 8(x-3)+8 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$
㉠에서 $8x-23\le 7x+9$ $\therefore x\le 32$
㉡에서 $7x+9\le 8x-16$
$-x\le -25$ $\therefore x\ge 25$
따라서 연립부등식의 해는
$25\le x\le 32$
이므로 의자의 개수가 될 수 없는 것은 ⑤이다. 답 ⑤

쌤 한마디

8명씩 앉으면 의자가 2개 남으므로 8명씩 앉은 의자의 개수는 $x-3$이고, 마지막 1개의 의자에는 최소 1명에서 최대 8명까지 앉을 수 있다.

15 $|5x-2|<13$에서
$-13<5x-2<13$, $-11<5x<15$
$\therefore -\frac{11}{5}<x<3$
따라서 모든 정수 x의 값의 합은
$(-2)+(-1)+0+1+2=0$ 답 0

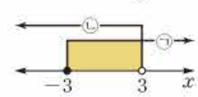
16 $|x-4|\ge a$에서
$x-4\le -a$ 또는 $x-4\ge a$
$\therefore x\le 4-a$ 또는 $x\ge 4+a$
이때 부등식의 해가 $x\le 2$ 또는 $x\ge b$이므로
$4-a=2$, $4+a=b$
위의 두 식을 연립하여 풀면
$a=2$, $b=6$
$\therefore a+b=8$ 답 8

Q BOX

절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 x의 값을 경계로 하여 x의 값의 범위를 나눈다.

17 $|2x-3|\le x+8$에서
(i) $2x-3\ge 0$, 즉 $x\ge \frac{3}{2}$일 때,
$2x-3\le x+8$ $\therefore x\le 11$
그런데 $x\ge \frac{3}{2}$이므로 $\frac{3}{2}\le x\le 11$
(ii) $2x-3<0$, 즉 $x<\frac{3}{2}$일 때,
$-(2x-3)\le x+8$, $-2x+3\le x+8$
$-3x\le 5$ $\therefore x\ge -\frac{5}{3}$
그런데 $x<\frac{3}{2}$이므로 $-\frac{5}{3}\le x<\frac{3}{2}$
(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는
$-\frac{5}{3}\le x\le 11$
따라서 $a=-\frac{5}{3}$, $b=11$이므로
$3ab=-55$ 답 ①

18 $4x+1\ge 3x-2$에서 $x\ge -3$ $\cdots\cdots$ ㉠
$|1-x|<5-x$에서
(i) $1-x\ge 0$, 즉 $x\le 1$일 때,
$1-x<5-x$에서 $1<5$이므로 $x\le 1$에서 주어진 부등식은 항상 성립한다.
(ii) $1-x<0$, 즉 $x>1$일 때,
$-(1-x)<5-x$, $-1+x<5-x$
$2x<6$ $\therefore x<3$
그런데 $x>1$이므로 $1<x<3$
(i), (ii)에서 부등식 $|1-x|<5-x$의 해는
$x<3$ $\cdots\cdots$ ㉡
㉠, ㉡에서 연립부등식의 해는
$-3\le x<3$



이므로 정수 x는 -3, -2, -1, 0, 1, 2의 6개이다. 답 ②

19 $|x+2|+|x|<4$에서
(i) $x<-2$일 때,
$-(x+2)-x<4$, $-2x-2<4$
$-2x<6$ $\therefore x>-3$
그런데 $x<-2$이므로 $-3<x<-2$
(ii) $-2\le x<0$일 때,
$x+2-x<4$에서 $2<4$이므로 $-2\le x<0$에서 주어진 부등식은 항상 성립한다.
(iii) $x\ge 0$일 때,
$x+2+x<4$, $2x+2<4$
$2x<2$ $\therefore x<1$
그런데 $x\ge 0$이므로 $0\le x<1$
이상에서 주어진 부등식의 해는
$-3<x<1$
따라서 정수 x의 최솟값은 -2이다. 답 -2

$|x+2|=-(x+2)$, $|x|=-x$

$|x+2|=x+2$, $|x|=-x$

$|x+2|=x+2$, $|x|=x$

07 일차부등식

20 $|x-3|+2\geq 2|x+1|$에서

(i) $x<-1$일 때,

$-(x-3)+2\geq -2(x+1)$

$-x+5\geq -2x-2 \quad \therefore x\geq -7$

그런데 $x<-1$이므로 $\quad -7\leq x<-1$

(ii) $-1\leq x<3$일 때,

$-(x-3)+2\geq 2(x+1)$

$-x+5\geq 2x+2, \quad -3x\geq -3$

$\therefore x\leq 1$

그런데 $-1\leq x<3$이므로 $\quad -1\leq x\leq 1$

(iii) $x\geq 3$일 때,

$x-3+2\geq 2(x+1)$

$x-1\geq 2x+2, \quad -x\geq 3$

$\therefore x\leq -3$

그런데 $x\geq 3$이므로 해는 없다.

이상에서 주어진 부등식의 해는

$-7\leq x\leq 1$

따라서 $a=-7$, $b=1$이므로

$a-b=-8$ 답 -8

Q BOX

$|x-3|=-(x-3)$, $|x+1|=-(x+1)$

$|x-3|=-(x-3)$, $|x+1|=x+1$

$|x-3|=x-3$, $|x+1|=x+1$

중단원 마무리

104쪽

01 전략 부등식의 기본 성질을 이용한다.

풀이 ㄱ. $0<a<1$에서 $\quad 0<a^2<1$

$b<-1$에서 $\quad b^2>1$

$\therefore a^2<b^2$

ㄴ. $0<a<1$에서 $\quad a^2<a$

$b<-1$에서 $\quad ab<-a \quad \therefore a<-ab$

$\therefore a^2<-ab$

ㄷ. $0<a<1$에서 $\quad \frac{1}{a}>1$

$b<-1$에서 $\quad -1<\frac{1}{b}<0$

$\therefore \frac{1}{a}+\frac{1}{b}>0$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ㄱ, ㄴ

다른 풀이 ㄴ. $b<-1$에서 $-b>1$이므로

$a<-b \quad \therefore a^2<-ab$

$a>0$이므로 부등식의 양변에 a를 곱해도 부등호의 방향은 바뀌지 않는다.

$a<1$이고 $1<-b$이므로 $a<-b$

02 전략 주어진 등식을 이용하여 부등식을 간단히 한 후 x의 계수의 부호를 확인한다.

풀이 $a+b=0$에서 $\quad b=-a$ ...... ㉠

㉠을 주어진 부등식에 대입하면

$(3a+a)x>2a-5a+7$

$\therefore 4ax>-3a+7$

이때 부등식의 해가 $x<-1$이므로 $\quad a<0$

$\therefore x<\frac{-3a+7}{4a}$ ···· ❶

따라서 $\frac{-3a+7}{4a}=-1$이므로

$-3a+7=-4a \quad \therefore a=-7$

$a=-7$을 ㉠에 대입하면 $\quad b=7$ ···· ❷

$\therefore b-a=14$ ···· ❸

답 14

단계	채점 기준	비율
❶	부등식의 해를 a를 사용하여 나타낼 수 있다.	50 %
❷	실수 a, b의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸	$b-a$의 값을 구할 수 있다.	10 %

03 전략 부등식 $Ax<B$가 해를 갖지 않을 조건은 $A=0$, $B\leq 0$임을 이용한다.

풀이 $ax+4<x+b$에서 $\quad (a-1)x<b-4$

이 부등식이 해를 갖지 않으려면

$a-1=0$, $b-4\leq 0$

$\therefore a=1$, $b\leq 4$

이때 b의 최댓값은 4이므로 $a+b$의 최댓값은

$1+4=5$ 답 ②

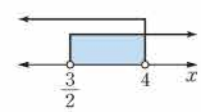
04 전략 각 부등식의 해를 수직선 위에 나타내어 공통부분을 찾는다.

풀이 $x+3<3x$에서 $\quad -2x<-3 \quad \therefore x>\frac{3}{2}$

$3x+4<2x+8$에서 $\quad x<4$

따라서 연립부등식의 해는

$\frac{3}{2}<x<4$



즉 $a=\frac{3}{2}$, $b=4$이므로

$ab=6$ 답 ①

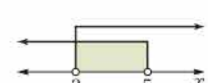
05 전략 연립부등식을 만족시키는 정수 x의 값을 구한 후 일차방정식에 대입한다.

풀이 $3x-4<x+6$에서 $\quad 2x<10 \quad \therefore x<5$

$4(x-2)>-(x-7)$에서 $\quad 4x-8>-x+7$

$5x>15 \quad \therefore x>3$

따라서 주어진 연립부등식의 해는 $\quad 3<x<5$



이므로 연립부등식을 만족시키는 정수 x는 4이다.

$x=4$를 $ax+3=5$에 대입하면

$4a+3=5 \quad \therefore a=\frac{1}{2}$ 답 $\frac{1}{2}$

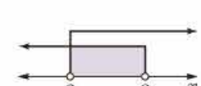
06 전략 각 부등식의 해를 수직선 위에 나타내어 공통부분을 찾는다.

풀이 ① $x-3<0$에서 $\quad x<3$

$3x>6$에서 $\quad x>2$

따라서 연립부등식의 해는

$2<x<3$

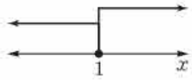


② $5-3x\geq 2$에서 $\quad -3x\geq -3 \quad \therefore x\leq 1$

$2x+7\geq 9$에서 $\quad 2x\geq 2 \quad \therefore x\geq 1$

따라서 연립부등식의 해는

$x=1$

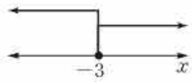


③ $2+3x \geq -1+2x$에서　　$x \geq -3$

$x-5 \geq 3x+1$에서　　$-2x \geq 6$　　$\therefore x \leq -3$

따라서 연립부등식의 해는

$x=-3$



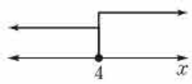
④ $2(x-2) \leq x$에서　　$2x-4 \leq x$　　$\therefore x \leq 4$

$3x+2 \geq 2(x+3)$에서　　$3x+2 \geq 2x+6$

$\therefore x \geq 4$

따라서 연립부등식의 해는

$x=4$



⑤ $\frac{3}{2}x < 5+\frac{2}{3}x$에서　　$9x < 30+4x$

$5x < 30$　　$\therefore x < 6$

$0.1x-4 \geq 3.2-0.8x$에서　　$x-40 \geq 32-8x$

$9x \geq 72$　　$\therefore x \geq 8$

따라서 연립부등식의 해는 없다.

답 ⑤

07 전략 y를 x에 대한 식으로 나타낸 후 주어진 부등식에 대입하여 x에 대한 연립부등식으로 바꾸어 푼다.

풀이 $4x+y=3$에서　　$y=3-4x$

이것을 주어진 부등식에 대입하면

$3x-7 \leq (3-4x)-3 < 4(x+4)$

$\therefore 3x-7 \leq -4x < 4x+16,$

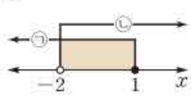
즉 $\begin{cases} 3x-7 \leq -4x & \cdots\cdots ㉠ \\ -4x < 4x+16 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서　　$7x \leq 7$　　$\therefore x \leq 1$

㉡에서　　$-8x < 16$　　$\therefore x > -2$

따라서 주어진 부등식의 해는

$-2 < x \leq 1$



이므로 정수 x는 -1, 0, 1의 3개이고 구하는 해의 개수는 3이다.　　답 ③

Q BOX: $x=-1$, $y=7$ 또는 $x=0$, $y=3$ 또는 $x=1$, $y=-1$

08 전략 주어진 부등식을 $\begin{cases} A<B \\ B<C \end{cases}$ 꼴로 나타낸 후 연립부등식을 푼다.

풀이 주어진 부등식에서

$\begin{cases} 3x+a < x+9 & \cdots\cdots ㉠ \\ x+9 < 2(x-4)+b & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서　　$2x < 9-a$　　$\therefore x < \frac{9-a}{2}$

㉡에서　　$x+9 < 2x-8+b$

$-x < b-17$　　$\therefore x > 17-b$

이때 주어진 부등식의 해가 $2 < x < 5$이므로

$\frac{9-a}{2}=5$, $17-b=2$

$9-a=10$, $b=15$

$\therefore a=-1$, $b=15$

$\therefore ab=-15$　　답 -15

Q BOX: $x < \frac{9-a}{2}$는 $x<5$와 같으므로 $\frac{9-a}{2}=5$ / $x > 17-b$는 $x>2$와 같으므로 $17-b=2$

09 전략 각 부등식을 푼 후 주어진 해와 비교한다.

풀이 $2x-1 \leq \frac{3x+1}{8}+\frac{1}{2}x$에서

$8(2x-1) \leq 3x+1+4x$

$16x-8 \leq 7x+1$,　　$9x \leq 9$

$\therefore x \leq 1$

$3(x+1)-5 \geq a-x$에서　　$3x-2 \geq a-x$

$4x \geq a+2$　　$\therefore x \geq \frac{a+2}{4}$　　··· ❶

이때 연립부등식의 해가 $x=1$이므로

$\frac{a+2}{4}=1$,　　$a+2=4$

$\therefore a=2$　　··· ❷

답 2

단계	채점 기준	비율
❶	각 부등식의 해를 구할 수 있다.	60 %
❷	실수 a의 값을 구할 수 있다.	40 %

10 전략 각 부등식의 해를 구한 후 공통부분이 있도록 한다.

풀이 $x+2>3$에서　　$x>1$

$3x<a+1$에서　　$x<\frac{a+1}{3}$

연립부등식이 해를 가지려면 해는

$1<x<\frac{a+1}{3}$

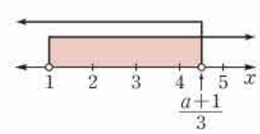
이어야 한다.

이때 연립부등식을 만족시키는 모든 정수 x의 값의 합이 9가 되어야 하므로 정수 x의 값은

2, 3, 4

Q BOX: $x>1$이므로 2부터 차례로 정수를 더하여 그 합이 9가 되는 경우를 찾는다.

따라서 오른쪽 그림에서



$4<\frac{a+1}{3} \leq 5$

$12<a+1 \leq 15$

$\therefore 11<a \leq 14$

즉 자연수 a의 최댓값은 14이다.　　답 ⑤

11 전략 부등식의 해를 수직선 위에 나타내어 정수 x가 2개가 되도록 하는 a의 값의 범위를 구한다.

풀이 주어진 부등식에서

$\begin{cases} \frac{x+a}{3} \leq \frac{7-x}{4} & \cdots\cdots ㉠ \\ \frac{7-x}{4} < 2x-5 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서　　$4(x+a) \leq 3(7-x)$

$4x+4a \leq 21-3x$,　　$7x \leq 21-4a$

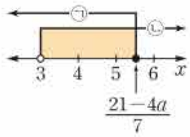
$\therefore x \leq \frac{21-4a}{7}$

㉡에서　　$7-x < 4(2x-5)$

$7-x < 8x-20$,　　$-9x < -27$

$\therefore x>3$

이때 주어진 부등식을 만족시키는 정수 x가 2개이므로 오른쪽 그림에서



$5\le\frac{21-4a}{7}<6$

$\frac{21-4a}{7}=6$이면 주어진 부등식의 해는 $3<x\le6$ 이므로 정수인 해는 4, 5, 6의 3개이다.

$35\le21-4a<42,\qquad 14\le-4a<21$

$\therefore -\frac{21}{4}<a\le-\frac{7}{2}$

따라서 실수 a의 최댓값은 $-\frac{7}{2}$이다. 답 ②

12 전략 세로의 길이를 x cm라 하고 둘레의 길이가 120 cm임을 이용하여 가로의 길이를 x로 나타낸 후 부등식을 세운다.

풀이 세로의 길이를 x cm라 하면 가로의 길이는

$\frac{1}{2}(120-2x)=60-x\,(\text{cm})$

이므로

$x+8\le60-x<2x,$

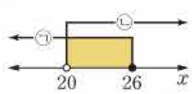
즉 $\begin{cases}x+8\le60-x & \cdots\cdots ㉠\\ 60-x<2x & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$

㉠에서 $\quad 2x\le52\qquad\therefore x\le26$

㉡에서 $\quad -3x<-60\qquad\therefore x>20$

따라서 연립부등식의 해는

$20<x\le26$



이므로 세로의 길이는 20 cm 초과 26 cm 이하이다. 답 20 cm 초과 26 cm 이하

13 전략 방의 개수를 x라 하고 학생 수를 x로 나타낸 후 부등식을 세운다.

풀이 방의 개수를 x라 하면 학생 수는 $4x+10$이므로

$5(x-2)+1\le4x+10\le5(x-2)+5,$

즉 $\begin{cases}5(x-2)+1\le4x+10 & \cdots\cdots ㉠\\ 4x+10\le5(x-2)+5 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$

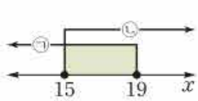
㉠에서 $\quad 5x-9\le4x+10\qquad\therefore x\le19$

㉡에서 $\quad 4x+10\le5x-5$

$-x\le-15\qquad\therefore x\ge15$

따라서 연립부등식의 해는

$15\le x\le19$



이므로 방의 최대 개수는 19이다. 답 19

14 전략 부등식 $|x-k|\le l\,(l>0)$의 해는 $k-l\le x\le k+l$임을 이용한다.

풀이 $|3x-2|\le a$에서 $\qquad -a\le3x-2\le a$

$-a+2\le3x\le a+2$

$\therefore \frac{-a+2}{3}\le x\le\frac{a+2}{3}$

이때 부등식의 해가 $b\le x\le2$이므로

$\frac{-a+2}{3}=b,\ \frac{a+2}{3}=2$

$\therefore a=4,\ b=-\frac{2}{3}$

$\therefore a+b=\frac{10}{3}$ 답 ③

15 전략 절댓값은 항상 0 이상임을 이용한다.

풀이 $|x-a|\ge0$이므로 주어진 부등식이 오직 한 개의 해를 가지려면

$a^2-2a=0,\qquad a(a-2)=0$

$\therefore a=2\,(\because a\ne0)$ ⋯ ❶

따라서 $|x-a|\le a^2-2a$, 즉 $|x-2|\le0$에서

$x=2$ ⋯ ❷

답 $x=2$

단계	채점 기준	비율
❶	a의 값을 구할 수 있다.	70 %
❷	부등식의 해를 구할 수 있다.	30 %

16 전략 $|ax+b|<cx+d$ 꼴의 부등식은 x의 값의 범위를 $x\ge-\frac{b}{a}$, $x<-\frac{b}{a}$로 나누어 푼다.

풀이 $x>|3x+1|-7$에서

(i) $3x+1\ge0$, 즉 $x\ge-\frac{1}{3}$일 때,

$x>3x+1-7,\qquad x>3x-6$

$-2x>-6\qquad\therefore x<3$

그런데 $x\ge-\frac{1}{3}$이므로 $\qquad -\frac{1}{3}\le x<3$

(ii) $3x+1<0$, 즉 $x<-\frac{1}{3}$일 때,

$x>-(3x+1)-7,\qquad x>-3x-8$

$4x>-8\qquad\therefore x>-2$

그런데 $x<-\frac{1}{3}$이므로 $\qquad -2<x<-\frac{1}{3}$

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는

$-2<x<3$

따라서 모든 정수 x의 값의 합은

$-1+0+1+2=2$ 답 ⑤

17 전략 $|x-a|+|x-b|<c\ (a<b)$ 꼴의 부등식은 x의 값의 범위를 $x<a$, $a\le x<b$, $x\ge b$로 나누어 푼다.

풀이 $|x+1|+|x-2|<5$에서

(i) $x<-1$일 때,

$|x+1|=-(x+1)$, $|x-2|=-(x-2)$

$-(x+1)-(x-2)<5,\qquad -2x+1<5$

$-2x<4\qquad\therefore x>-2$

그런데 $x<-1$이므로 $\qquad -2<x<-1$

(ii) $-1\le x<2$일 때,

$|x+1|=x+1$, $|x-2|=-(x-2)$

$x+1-(x-2)<5$에서 $3<5$이므로 $-1\le x<2$에서 주어진 부등식은 항상 성립한다.

(iii) $x \ge 2$일 때,

$x+1+x-2<5$, $2x-1<5$

$2x<6$ $\therefore x<3$

그런데 $x \ge 2$이므로 $2 \le x<3$

이상에서 주어진 부등식의 해는

$-2<x<3$

이므로 정수 x는 -1, 0, 1, 2의 4개이다. 답 4

18 전략 먼저 $\sqrt{A^2}=|A|$임을 이용하여 주어진 부등식을 정리한다.

풀이 $\sqrt{x^2-6x+9}=\sqrt{(x-3)^2}=|x-3|$이므로 주어진 부등식은

$|x+2|+|x-3|<x+5$

(i) $x<-2$일 때,

$-(x+2)-(x-3)<x+5$

$-2x+1<x+5$, $-3x<4$

$\therefore x>-\frac{4}{3}$

그런데 $x<-2$이므로 해는 없다.

(ii) $-2 \le x<3$일 때,

$x+2-(x-3)<x+5$

$5<x+5$ $\therefore x>0$

그런데 $-2 \le x<3$이므로 $0<x<3$

(iii) $x \ge 3$일 때,

$x+2+x-3<x+5$

$2x-1<x+5$ $\therefore x<6$

그런데 $x \ge 3$이므로 $3 \le x<6$

이상에서 주어진 부등식의 해는

$0<x<6$ 답 ④

Q BOX

$|x+1|=x+1$, $|x-2|=x-2$

$x=4$이면 좌변이 0이므로 주어진 부등식이 성립한다.

$x=-5$이면 좌변이 0이므로 주어진 부등식이 성립하지 않는다.

그래프가 아래로 볼록하고, x축과 만나지 않는다.

08 이차부등식

18 이차부등식

Lecture 35 이차부등식과 이차함수의 관계 108쪽

1-1 (1) $x^2+5<2x-x^2$에서 $2x^2-2x+5<0$

(2) $x(x-6) \ge x^2+1$에서 $x^2-6x \ge x^2+1$

$\therefore -6x-1 \ge 0$

(3) $2x^2+1 \le 2x(3-x)$에서

$2x^2+1 \le 6x-2x^2$ $\therefore 4x^2-6x+1 \le 0$

(4) $3(x^2-1)>4(x^2+1)-x^2$에서

$3x^2-3>3x^2+4$ $\therefore -7>0$

답 (1) ○ (2) × (3) ○ (4) ×

2-1 답 (1) $x<-1$ 또는 $x>1$ (2) $-1 \le x \le 1$

2-2 답 (1) $-3 \le x \le 1$ (2) $x<-2$ 또는 $x>2$

Lecture 36 이차부등식의 풀이와 작성 109쪽

1-1 답 (1) $2<x<4$ (2) 모든 실수 (3) 해는 없다.

1-2 (2) $(x-4)^2 \ge 0$

따라서 $(x-4)^2 \le 0$의 해는 $x=4$이다.

(3) $x^2+10x+25=(x+5)^2 \ge 0$

따라서 $x^2+10x+25>0$의 해는 $x \ne -5$인 모든 실수이다.

(4) $-x^2+6x-10<0$에서 $x^2-6x+10>0$

그런데 $x^2-6x+10=(x-3)^2+1 \ge 1$이므로 주어진 부등식의 해는 모든 실수이다.

답 (1) $x \le 1$ 또는 $x \ge 8$ (2) $x=4$
(3) $x \ne -5$인 모든 실수 (4) 모든 실수

2-1 (1) $x(x-5)<0$에서 $x^2-5x<0$

(2) $(x+3)(x-7) \ge 0$에서 $x^2-4x-21 \ge 0$

(4) $(x-2)^2 \le 0$에서 $x^2-4x+4 \le 0$

답 (1) $x^2-5x<0$ (2) $x^2-4x-21 \ge 0$
(3) $x^2>0$ (4) $x^2-4x+4 \le 0$

Lecture 37 이차부등식이 항상 성립할 조건 110쪽

1-1 (1) 모든 실수 x에 대하여 주어진 부등식이 성립하려면 이차함수 $y=x^2+2x+k$의 그래프가 x축보다 항상 위쪽에 있어야 하므로 이차방정식 $x^2+2x+k=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=1^2-1 \cdot k<0$

$1-k<0$ $\therefore k>1$

(2) 모든 실수 x에 대하여 주어진 부등식이 성립하려면 이차함수 $y=-x^2+kx+k-3$의 그래프가 x축보다 항상 아래쪽에 있어야 하므로 이차방정식 $-x^2+kx+k-3=0$의 판별식을 D라 하면

$D=k^2-4\cdot(-1)\cdot(k-3)<0$

$k^2+4k-12<0$, $(k+6)(k-2)<0$

$\therefore -6<k<2$

답 (1) $k>1$ (2) $-6<k<2$

1-2 주어진 이차부등식이 x의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$k>0$ …… ㉠

이차함수 $y=kx^2+2kx+2$의 그래프가 x축에 접하거나 x축보다 항상 위쪽에 있어야 하므로 이차방정식 $kx^2+2kx+2=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=k^2-k\cdot 2\leq 0$

$k^2-2k\leq 0$, $k(k-2)\leq 0$

$\therefore 0\leq k\leq 2$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $0<k\leq 2$

답 $0<k\leq 2$

1-3 주어진 이차부등식의 해가 존재하지 않으려면 이차부등식 $-x^2+4kx-8<0$이 항상 성립해야 한다.
따라서 이차함수 $y=-x^2+4kx-8$의 그래프가 x축보다 항상 아래쪽에 있어야 하므로 이차방정식 $-x^2+4kx-8=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(2k)^2-(-1)\cdot(-8)<0$

$4k^2-8<0$, $4(k+\sqrt{2})(k-\sqrt{2})<0$

$\therefore -\sqrt{2}<k<\sqrt{2}$

답 $-\sqrt{2}<k<\sqrt{2}$

기본+표준 유형 Q+Q

111쪽

01 부등식 $f(x)<g(x)$의 해는 $y=f(x)$의 그래프가 $y=g(x)$의 그래프보다 아래쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위이므로

$1<x<2$

답 ④

02 부등식 $0<g(x)<f(x)$의 해는 직선 $y=g(x)$가 x축보다 위쪽에 있고 $y=f(x)$의 그래프보다 아래쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위이므로

$x<-2$ $\therefore a=-2$

답 ②

03 $x^2-3x-10>0$에서 $(x+2)(x-5)>0$

$\therefore x<-2$ 또는 $x>5$

따라서 $\alpha=-2$, $\beta=5$이므로

$\alpha-\beta=-7$

답 -7

04 ① $x^2-2x+1=(x-1)^2\geq 0$

따라서 $x^2-2x+1\leq 0$의 해는 $x=1$이다.

② $x^2+6x+12=(x+3)^2+3\geq 3$

따라서 $x^2+6x+12>0$의 해는 모든 실수이다.

③ $-x^2+x-5\geq 0$에서 $x^2-x+5\leq 0$

그런데 $x^2-x+5=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{19}{4}\geq\frac{19}{4}$이므로 주어진 부등식의 해는 없다.

④ $-2x^2+2x+1\geq\frac{3}{2}$에서 $2x^2-2x+\frac{1}{2}\leq 0$

그런데 $2x^2-2x+\frac{1}{2}=2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\geq 0$이므로 주어진 부등식의 해는 $x=\frac{1}{2}$이다.

⑤ $2x^2-8<3x(x+2)+1$에서

$2x^2-8<3x^2+6x+1$ $\therefore x^2+6x+9>0$

그런데 $x^2+6x+9=(x+3)^2\geq 0$이므로 주어진 부등식의 해는 $x\neq -3$인 모든 실수이다.

답 ③

05 해가 $-1\leq x\leq 5$이고 x^2의 계수가 2인 이차부등식은

$2(x+1)(x-5)\leq 0$ $\therefore 2x^2-8x-10\leq 0$

이 부등식이 $2x^2+ax+b\leq 0$과 같으므로

$a=-8$, $b=-10$

$\therefore a+b=-18$

답 -18

다른 풀이 이차방정식 $2x^2+ax+b=0$의 두 근이 -1, 5이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-\frac{a}{2}=4$, $\frac{b}{2}=-5$

(두 근의 합)$=-1+5$
$=4$,
(두 근의 곱)$=-1\cdot 5$
$=-5$

$\therefore a=-8$, $b=-10$

$\therefore a+b=-18$

06 해가 $x<b$ 또는 $x>4$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x-b)(x-4)>0$

$\therefore x^2-(b+4)x+4b>0$

이 부등식이 $x^2-6x+a>0$과 같으므로

$b+4=6$, $4b=a$ $\therefore a=8$, $b=2$

$\therefore ab=16$

답 ①

다른 풀이 이차방정식 $x^2-6x+a=0$의 두 근이 b, 4이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$6=b+4$, $a=4b$ $\therefore a=8$, $b=2$

$\therefore ab=16$

07 $f(x)<0$의 해가 $-3<x<-1$이므로

$f(x)=a(x+3)(x+1)$ $(a>0)$

이라 하면

$f(2x+1)=a(2x+4)(2x+2)$

$f(2x+1)$
$=a(2x+1+3)$
$\times(2x+1+1)$
$=a(2x+4)(2x+2)$

$=4a(x+2)(x+1)$

부등식 $f(2x+1)\leq 0$, 즉 $4a(x+2)(x+1)\leq 0$에서

$(x+2)(x+1)\leq 0$ ($\because a>0$)

$\therefore -2\leq x\leq -1$

답 $-2\leq x\leq -1$

08 $f(x)<0$의 해가 $x<-6$ 또는 $x>5$이므로
$$f(x)=a(x+6)(x-5)\ (a<0)$$
라 하면
$$f(-x)=a(-x+6)(-x-5)=a(x-6)(x+5)$$
부등식 $f(-x)>0$, 즉 $a(x-6)(x+5)>0$에서
$$(x-6)(x+5)<0\ (\because a<0)$$
$$\therefore -5<x<6$$
따라서 정수 x는 $-4, -3, -2, \cdots, 5$의 10개이다.

답 10

09 $x^2-|x|-6\le0$에서

(i) $x\ge0$일 때,

$|x|=x$

$x^2-x-6\le0$, $(x+2)(x-3)\le0$

$\therefore -2\le x\le3$

그런데 $x\ge0$이므로 $0\le x\le3$

(ii) $x<0$일 때,

$|x|=-x$

$x^2+x-6\le0$, $(x+3)(x-2)\le0$

$\therefore -3\le x\le2$

그런데 $x<0$이므로 $-3\le x<0$

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는
$$-3\le x\le3$$
따라서 $\alpha=-3$, $\beta=3$이므로
$$\alpha^2+\beta^2=18$$
답 18

다른 풀이 $|x|^2=x^2$이므로 주어진 부등식은
$$|x|^2-|x|-6\le0,\quad (|x|+2)(|x|-3)\le0$$
$|x|+2>0$이므로 $|x|-3\le0$
$$|x|\le3\quad \therefore -3\le x\le3$$
따라서 $\alpha=-3$, $\beta=3$이므로 $\alpha^2+\beta^2=18$

10 $|2x^2-1|>7$에서
$$2x^2-1<-7 \text{ 또는 } 2x^2-1>7$$
(i) $2x^2-1<-7$일 때, $2x^2+6<0$

그런데 $2x^2+6\ge6$이므로 해는 없다.

(ii) $2x^2-1>7$일 때, $2x^2-8>0$

$2(x+2)(x-2)>0$

$\therefore x<-2$ 또는 $x>2$

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는
$$x<-2 \text{ 또는 } x>2$$
따라서 자연수 x의 최솟값은 3이다.

답 3

11 이차부등식 $x^2-10x+a\le0$의 해가 오직 한 개 존재하므로 이차방정식 $x^2-10x+a=0$의 판별식을 D라 하면
$$\frac{D}{4}=(-5)^2-1\cdot a=0$$
$$25-a=0\quad \therefore a=25$$
답 25

12 이차부등식 $(k+1)x^2-2x+k+1\ge0$의 해가 오직 한 개 존재하려면
$$k+1<0\quad \therefore k<-1 \quad \cdots\cdots ㉠$$
이차방정식 $(k+1)x^2-2x+k+1=0$의 판별식을 D라 하면
$$\frac{D}{4}=(-1)^2-(k+1)^2=0$$
$$k^2+2k=0,\quad k(k+2)=0$$
$$\therefore k=-2 \text{ 또는 } k=0 \quad \cdots\cdots ㉡$$
㉠, ㉡에서 $k=-2$

답 ⑤

13 이차부등식 $x^2-3x+k<0$이 해를 가지려면 이차방정식 $x^2-3x+k=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면
$$D=(-3)^2-4\cdot1\cdot k>0,\quad 9-4k>0$$
$$-4k>-9\quad \therefore k<\frac{9}{4}$$
따라서 자연수 k는 1, 2이므로 구하는 합은
$$1+2=3$$
답 ①

14 $ax^2+6x+a>0$에서

$a=0$이면 주어진 부등식이 이차부등식이 아니므로 $a\ne0$이다.

(i) $a>0$일 때,

이차함수 $y=ax^2+6x+a$의 그래프는 아래로 볼록하므로 주어진 이차부등식은 항상 해를 갖는다.

(ii) $a<0$일 때,

주어진 이차부등식이 해를 가지려면 이차방정식 $ax^2+6x+a=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면
$$\frac{D}{4}=3^2-a\cdot a>0,\quad 9-a^2>0$$
$$(a+3)(a-3)<0\quad \therefore -3<a<3$$
그런데 $a<0$이므로 $-3<a<0$

(i), (ii)에서 a의 값의 범위는
$$-3<a<0 \text{ 또는 } a>0$$
답 $-3<a<0$ 또는 $a>0$

15 $x^2+2(k-2)x+4k-11\ge0$의 해가 모든 실수이어야 하므로 이차방정식 $x^2+2(k-2)x+4k-11=0$의 판별식을 D라 하면

$y=x^2+2(k-2)x+4k-11$의 그래프가 아래로 볼록하고, x축에 접하거나 x축과 만나지 않는다.
$$\frac{D}{4}=(k-2)^2-(4k-11)\le0$$
$$k^2-8k+15\le0,\quad (k-3)(k-5)\le0$$
$$\therefore 3\le k\le5$$
답 $3\le k\le5$

16 모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $3ax^2-2ax-2\le0$이 성립해야 하므로

$y=3ax^2-2ax-2$의 그래프가 위로 볼록하고, x축에 접하거나 x축과 만나지 않는다.
$$a<0 \quad \cdots\cdots ㉠$$
이차방정식 $3ax^2-2ax-2=0$의 판별식을 D라 하면
$$\frac{D}{4}=(-a)^2-3a\cdot(-2)\le0$$
$$a^2+6a\le0,\quad a(a+6)\le0$$
$$\therefore -6\le a\le0 \quad \cdots\cdots ㉡$$
㉠, ㉡에서 $-6\le a<0$

답 $-6\le a<0$

17 주어진 이차부등식이 해를 갖지 않으려면 이차부등식 $x^2-4ax-a^2+a+6>0$이 항상 성립해야 한다.
이차방정식 $x^2-4ax-a^2+a+6=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-2a)^2-(-a^2+a+6)<0$

$5a^2-a-6<0$,　　$(a+1)(5a-6)<0$

$\therefore\ -1<a<\frac{6}{5}$

따라서 $m=-1$, $M=\frac{6}{5}$이므로

$m+M=\frac{1}{5}$　　답 ③

Q BOX: $y=x^2-4ax-a^2+a+6$의 그래프가 아래로 볼록하고, x축과 만나지 않는다.

18 주어진 이차부등식이 해를 갖지 않으려면 이차부등식 $kx^2-8x+3k+2<0$이 항상 성립해야 한다.

$\therefore\ k<0$　　…… ㉠

이차방정식 $kx^2-8x+3k+2=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-4)^2-k(3k+2)<0$

$3k^2+2k-16>0$,　　$(3k+8)(k-2)>0$

$\therefore\ k<-\frac{8}{3}$ 또는 $k>2$　　…… ㉡

㉠, ㉡에서　$k<-\frac{8}{3}$

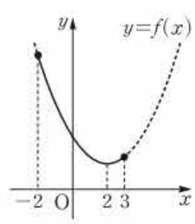
따라서 정수 k의 최댓값은 -3이다.　　답 ⑤

Q BOX: $y=kx^2-8x+3k+2$의 그래프가 위로 볼록하고, x축과 만나지 않는다.

19 $f(x)=x^2-4x-a^2+8$이라 하면

$f(x)=(x-2)^2-a^2+4$

$-2\le x\le 3$에서 $f(x)>0$이어야 하므로 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 한다.



$-2\le x\le 3$에서 $f(x)$는 $x=2$일 때 최소이므로 $f(2)>0$에서

$-a^2+4>0$

$(a+2)(a-2)<0$

$\therefore\ -2<a<2$

따라서 정수 a는 -1, 0, 1의 3개이다.　　답 ①

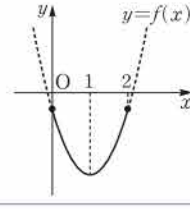
20 $x^2-3x+a^2<-x^2+x+3a-2$에서

$2x^2-4x+a^2-3a+2<0$

$f(x)=2x^2-4x+a^2-3a+2$라 하면

$f(x)=2(x-1)^2+a^2-3a$

$0\le x\le 2$에서 $f(x)<0$이어야 하므로 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 한다.



$0\le x\le 2$에서 $f(x)$는 $x=0$ 또는 $x=2$일 때 최대이므로 $f(0)<0$에서

$a^2-3a+2<0$,　　$(a-1)(a-2)<0$

$\therefore\ 1<a<2$　　답 $1<a<2$

Q BOX: $f(2)<0$임을 이용할 수도 있다.

21 $y=x^2+x-8$의 그래프가 직선 $y=2x+4$보다 아래쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위는 부등식 $x^2+x-8<2x+4$의 해와 같으므로

$x^2-x-12<0$,　　$(x+3)(x-4)<0$

$\therefore\ -3<x<4$　　답 $-3<x<4$

22 $y=-x^2+ax+b$의 그래프가 직선 $y=-x+7$보다 위쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위는 부등식

$-x^2+ax+b>-x+7$,

즉 $x^2-(a+1)x+7-b<0$　　…… ㉠

의 해와 같으므로 ㉠의 해가 $2<x<5$이다.
이때 해가 $2<x<5$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x-2)(x-5)<0$　　$\therefore\ x^2-7x+10<0$

이 부등식이 ㉠과 같으므로

$a+1=7$, $7-b=10$

따라서 $a=6$, $b=-3$이므로

$a-b=9$　　답 ⑤

23 $y=-3x^2+4x-1$의 그래프가 직선 $y=ax+2$보다 항상 아래쪽에 있으려면 모든 실수 x에 대하여

$-3x^2+4x-1<ax+2$,

즉 $3x^2+(a-4)x+3>0$

이 성립해야 한다.
이차방정식 $3x^2+(a-4)x+3=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(a-4)^2-4\cdot 3\cdot 3<0$

$a^2-8a-20<0$,　　$(a+2)(a-10)<0$

$\therefore\ -2<a<10$　　답 $-2<a<10$

쌤 한마디

'항상 아래쪽에 있도록'이라는 말에서 '부등식이 항상 성립하도록'이라는 말을 떠올릴 수 있어야 한다. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 함수 $y=g(x)$의 그래프보다 항상 아래쪽에 있다는 것은 모든 실수 x에 대하여 부등식 $f(x)<g(x)$가 성립함을 뜻한다.
따라서 부등식 $f(x)-g(x)<0$이 항상 성립할 조건을 이용한다.

24 $y=x^2-2x+6$의 그래프가 직선 $y=ax-3$보다 항상 위쪽에 있으려면 모든 실수 x에 대하여

$x^2-2x+6>ax-3$, 즉 $x^2-(a+2)x+9>0$

이 성립해야 한다.
이차방정식 $x^2-(a+2)x+9=0$의 판별식을 D라 하면

$D=\{-(a+2)\}^2-4\cdot 1\cdot 9<0$

$a^2+4a-32<0$,　　$(a+8)(a-4)<0$

$\therefore\ -8<a<4$

따라서 정수 a의 최댓값은 3, 최솟값은 -7이므로 구하는 합은

$3+(-7)=-4$　　답 -4

25 하루 판매액이 160만 원 이상이 되려면

$(11-x)(14+2x)\ge 160$

$-2x^2+8x+154\ge 160$

$x^2-4x+3\le 0,\qquad (x-1)(x-3)\le 0$

$\therefore\ 1\le x\le 3$

따라서 $a=1$, $b=3$이므로

$a+b=4$ 답 ②

Q BOX

늘어난 판매량

인하된 가격

$1\le x\le 3$에서
$-3\le -x\le -1$
$\therefore\ 8\le 11-x\le 10$
따라서 하루 판매액이 160만 원 이상이 되도록 하는 안마기 한 개의 가격은 8만 원 이상 10만 원 이하이다.

26 공원의 넓이는 $100\cdot 80=8000\,(\mathrm{m}^2)$이고 길과 공원을 포함한 넓이는

$(2x+100)(2x+80)\,(\mathrm{m}^2)$

이므로 길의 넓이는

$(2x+100)(2x+80)-8000\,(\mathrm{m}^2)$

이때 길의 넓이가 $1900\ \mathrm{m}^2$ 이하이어야 하므로

$(2x+100)(2x+80)-8000\le 1900$

$4x^2+360x-1900\le 0$

$x^2+90x-475\le 0,\qquad (x+95)(x-5)\le 0$

$\therefore\ -95\le x\le 5$

그런데 $x>0$이므로 $\quad 0<x\le 5$

따라서 x의 최댓값은 5이다. 답 ②

길의 폭은 양수이므로
$x>0$

19 연립이차부등식

Lecture 38 연립이차부등식

115쪽

1-1 답 -5, 1, -2, 1

1-2 $x^2-4x+3\le 0$에서 $\qquad (x-1)(x-3)\le 0$

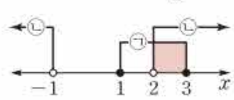
$\therefore\ 1\le x\le 3$ …… ㉠

$x^2-x-2>0$에서 $\qquad (x+1)(x-2)>0$

$\therefore\ x<-1$ 또는 $x>2$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$2<x\le 3$



답 $2<x\le 3$

2-1 답 2, -4, 3, -4, 2, 3

2-2 $-2x<x^2-8$에서 $\qquad x^2+2x-8>0$

$(x+4)(x-2)>0$

$\therefore\ x<-4$ 또는 $x>2$ …… ㉠

$x^2-8\le -2x+7$에서 $\qquad x^2+2x-15\le 0$

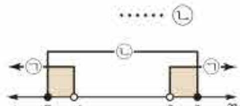
$(x+5)(x-3)\le 0$

$\therefore\ -5\le x\le 3$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$-5\le x<-4$

또는 $2<x\le 3$



답 $-5\le x<-4$ 또는 $2<x\le 3$

기본+표준 유형 Q+Q

116쪽

01 $x^2+3x-4>0$에서 $\qquad (x+4)(x-1)>0$

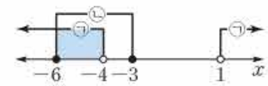
$\therefore\ x<-4$ 또는 $x>1$ …… ㉠

$x^2+9x+18\le 0$에서 $\qquad (x+6)(x+3)\le 0$

$\therefore\ -6\le x\le -3$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$-6\le x<-4$



답 $-6\le x<-4$

02 $3x^2-5x-4\le 2(x-1)^2$에서

$3x^2-5x-4\le 2x^2-4x+2$

$x^2-x-6\le 0,\qquad (x+2)(x-3)\le 0$

$\therefore\ -2\le x\le 3$ …… ㉠

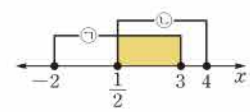
$2(x-1)^2\le 5x-2$에서 $\qquad 2x^2-4x+2\le 5x-2$

$2x^2-9x+4\le 0,\qquad (2x-1)(x-4)\le 0$

$\therefore\ \frac{1}{2}\le x\le 4$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$\frac{1}{2}\le x\le 3$



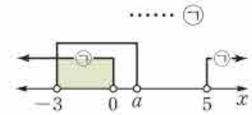
따라서 정수 x는 1, 2, 3이므로 구하는 합은

$1+2+3=6$ 답 ①

03 $x^2-5x>0$에서 $\qquad x(x-5)>0$

$\therefore\ x<0$ 또는 $x>5$ …… ㉠

㉠과 $(x+3)(x-a)<0$의 해의 공통부분이 $-3<x<0$이려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$0\le a\le 5$ 답 $0\le a\le 5$

쌤 한마디

부등식 문제에서 어떤 범위의 경계가 되는 값의 포함 여부는 그 값을 부등식에 대입하여 주어진 조건을 만족시키는지 확인하여 정한다.
이 문제에서 $a=0$이면 $(x-3)(x-a)<0$의 해가 $-3<x<0$이므로 ㉠과의 공통부분이 $-3<x<0$이 된다. 또 $a=5$이면 $(x-3)(x-a)<0$의 해가 $-3<x<5$이므로 ㉠과의 공통부분이 $-3<x<0$이 된다. 즉 $a=0$, $a=5$는 모두 주어진 조건을 만족시키므로 a의 값의 범위에 포함된다.

04 $(x-a)(x-b)>0$에서

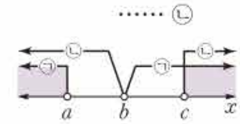
$x<a$ 또는 $x>b$ …… ㉠

$(x-b)(x-c)>0$에서

$x<b$ 또는 $x>c$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$x<a$ 또는 $x>c$



이므로

$a=2,\ c=8$

즉 이차부등식 $x^2+2x-8<0$에서

$(x+4)(x-2)<0 \qquad \therefore -4<x<2$

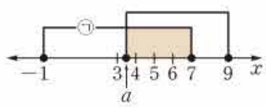
따라서 정수 x는 $-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1$의 5개이다.

답 5

05 $x^2-6x-7\le0$에서 $\qquad (x+1)(x-7)\le0$

$\therefore -1\le x\le7 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

㉠과 $(x-a)(x-9)\le0$을 동시에 만족시키는 정수 x의 개수가 4이려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$3<a\le4$

답 ④

$a=3$이면 연립부등식의 해는 $3\le x\le7$ 이므로 정수 x의 개수는 5이다.

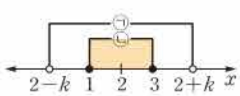
06 $|x-2|<k$에서 $\qquad -k<x-2<k$

$\therefore 2-k<x<2+k \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$x^2-4x+3\le0$에서 $\qquad (x-1)(x-3)\le0$

$\therefore 1\le x\le3 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 정수 x의 개수가 3이려면 오른쪽 그림과 같아야 한다.



(i) $2-k<1$에서 $\qquad k>1$

(ii) $2+k>3$에서 $\qquad k>1$

(i), (ii)에서 $\qquad k>1$

따라서 자연수 k의 최솟값은 2이다.

답 ①

07 $x,\ x+2,\ x+4$는 변의 길이이므로

$x>0 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

세 변 중 가장 긴 변의 길이는 $x+4$이므로

$x+4<x+(x+2) \qquad \therefore x>2 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

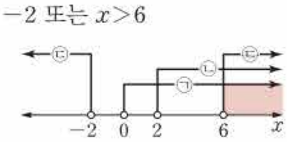
삼각형이 만들어지려면 (가장 긴 변의 길이) $<$(나머지 두 변의 길이의 합)이어야 한다.

예각삼각형이 되려면

$(x+4)^2<x^2+(x+2)^2$

$x^2-4x-12>0, \qquad (x+2)(x-6)>0$

$\therefore x<-2$ 또는 $x>6 \qquad \cdots\cdots$ ㉢



㉠, ㉡, ㉢의 공통부분을 구하면

$x>6$

따라서 한 자리 자연수 x는 7, 8, 9이므로 구하는 합은

$7+8+9=24$

답 24

쌤 한마디

삼각형의 변의 길이와 모양

삼각형의 세 변의 길이가 $a,\ b,\ c\ (a\le b\le c)$일 때

① $c^2<a^2+b^2$ ⇨ 예각삼각형

② $c^2=a^2+b^2$ ⇨ 빗변의 길이가 c인 직각삼각형

③ $c^2>a^2+b^2$ ⇨ 둔각삼각형

08 새로 만든 직육면체의 밑면의 가로의 길이와 세로의 길이, 높이는 각각 $a+3,\ a,\ a-2$이므로

$a-2>0 \qquad \therefore a>2 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

이 직육면체의 부피는 $a(a+3)(a-2)$이고 처음 정육면체의 부피는 a^3이므로

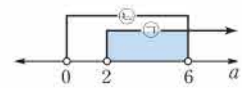
$a(a+3)(a-2)<a^3$

$a^2-6a<0, \qquad a(a-6)<0$

$\therefore 0<a<6 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$2<a<6$



따라서 자연수 a는 3, 4, 5의 3개이다.

답 3

20 이차방정식의 실근의 부호

Lecture 39 이차방정식의 실근의 부호 117쪽

1-1 답 $\ge,\ \le,\ >,\ >,\ <,\ \le$

1-2 이차방정식 $x^2+(k-1)x+4=0$의 판별식을 D, 두 근을 $\alpha,\ \beta$라 하면

(i) $D=(k-1)^2-4\cdot1\cdot4\ge0$

$k^2-2k-15\ge0, \qquad (k+3)(k-5)\ge0$

$\therefore k\le-3$ 또는 $k\ge5$

(ii) $\alpha+\beta=-k+1<0 \qquad \therefore k>1$

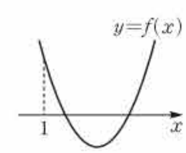
(iii) $\alpha\beta=4>0$

이상에서 공통부분을 구하면

$k\ge5$

답 $k\ge5$

2-1 $f(x)=x^2-6x+1-k$라 하면 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이 모두 1보다 크므로 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



(i) 이차방정식 $f(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=(-3)^2-1\cdot(1-k)\ge0$

$k+8\ge0 \qquad \therefore k\ge-8$

(ii) $f(1)=1-6+1-k>0 \qquad \therefore k<-4$

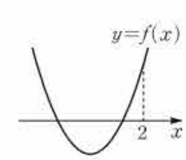
(iii) 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식은 $x=3$이고 $3>1$이다.

이상에서 공통부분을 구하면

$-8\le k<-4$

답 $-8\le k<-4$

2-2 $f(x)=x^2-2kx+k+6$이라 하면 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이 모두 2보다 작으므로 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



(i) 이차방정식 $f(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-k)^2-1\cdot(k+6)\geq 0$

$k^2-k-6\geq 0,\qquad (k+2)(k-3)\geq 0$

$\therefore\ k\leq -2$ 또는 $k\geq 3$ ...... ㉠

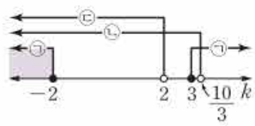
(ii) $f(2)=4-4k+k+6>0,\qquad 3k<10$

$\therefore\ k<\frac{10}{3}$ ...... ㉡

(iii) 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식이 $x=k$이므로

$k<2$ ...... ㉢

이상에서 공통부분을 구하면



$k\leq -2$

답 $k\leq -2$

기본+표준 유형 Q+Q 118쪽

01 이차방정식 $x^2+2kx-2k+8=0$이 실근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

주어진 이차방정식이 서로 다른 두 실근을 갖거나 중근을 갖는다.

$\frac{D}{4}=k^2-1\cdot(-2k+8)\geq 0$

$k^2+2k-8\geq 0,\qquad (k+4)(k-2)\geq 0$

$\therefore\ k\leq -4$ 또는 $k\geq 2$

따라서 $\alpha=-4,\ \beta=2$이므로

$\alpha-\beta=-6$

답 ①

02 이차방정식 $x^2+ax+2a-3=0$이 허근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=a^2-4\cdot 1\cdot(2a-3)<0$

$a^2-8a+12<0,\qquad (a-2)(a-6)<0$

$\therefore\ 2<a<6$

따라서 정수 a는 3, 4, 5의 3개이다.

답 ③

03 이차방정식 $x^2-2kx+4k-3=0$의 판별식을 D, 두 근을 $\alpha,\ \beta$라 하면 두 근이 모두 양수이므로

(i) $\frac{D}{4}=(-k)^2-1\cdot(4k-3)\geq 0$

이차방정식의 근의 부호는 실근인 경우에만 생각할 수 있다.

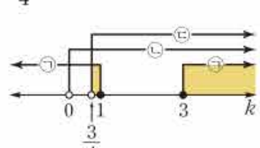
$k^2-4k+3\geq 0,\qquad (k-1)(k-3)\geq 0$

$\therefore\ k\leq 1$ 또는 $k\geq 3$ ...... ㉠

(ii) $\alpha+\beta=2k>0\qquad \therefore\ k>0$ ...... ㉡

(iii) $\alpha\beta=4k-3>0,\qquad 4k>3$

$\therefore\ k>\frac{3}{4}$ ...... ㉢



이상에서 공통부분을 구하면

$\frac{3}{4}<k\leq 1$ 또는 $k\geq 3$

답 $\frac{3}{4}<k\leq 1$ 또는 $k\geq 3$

Q BOX

04 이차방정식 $x^2-(k^2-4k)x-k^2+9=0$의 두 근을 $\alpha,\ \beta$라 하면 두 근의 부호가 서로 다르므로

$\alpha\beta=-k^2+9<0,\qquad k^2-9>0$

$(k+3)(k-3)>0$

$\therefore\ k<-3$ 또는 $k>3$ ...... ㉠

또 두 근의 절댓값이 같으므로

$\alpha+\beta=k^2-4k=0,\qquad k(k-4)=0$

$\alpha\beta<0$이고 $|\alpha|=|\beta|$이므로
$\alpha=-\beta$
$\therefore\ \alpha+\beta=0$

$\therefore\ k=0$ 또는 $k=4$ ...... ㉡

㉠, ㉡에서 $\quad k=4$

답 ③

쌤 한마디

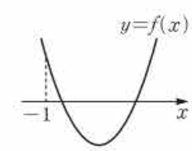
이차방정식의 두 근이 서로 다른 부호일 때

① |양수인 근|=|음수인 근|
(두 근의 합)=0, (두 근의 곱)<0

② |양수인 근|>|음수인 근|
(두 근의 합)>0, (두 근의 곱)<0

③ |양수인 근|<|음수인 근|
(두 근의 합)<0, (두 근의 곱)<0

05 $f(x)=x^2-2mx-m+12$라 하면 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이 모두 -1보다 크므로 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



(i) 이차방정식 $f(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-m)^2-1\cdot(-m+12)\geq 0$

$m^2+m-12\geq 0,\qquad (m+4)(m-3)\geq 0$

$\therefore\ m\leq -4$ 또는 $m\geq 3$ ...... ㉠

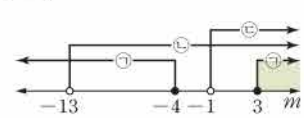
(ii) $f(-1)=1+2m-m+12>0$

$m+13>0\qquad \therefore\ m>-13$ ...... ㉡

(iii) 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식이 $x=m$이므로

이차함수 $f(x)=ax^2+bx+c$의 그래프의 축의 방정식은 $x=-\frac{b}{2a}$이다.

$m>-1$ ...... ㉢



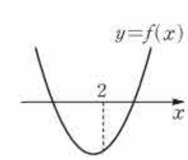
이상에서 공통부분을 구하면

$m\geq 3$

따라서 정수 m의 최솟값은 3이다.

답 3

06 $f(x)=x^2-2(k-4)x+2k$라 하면 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근 사이에 2가 있으므로 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



즉 $f(2)<0$이어야 하므로

$4-4(k-4)+2k<0$

$-2k<-20\qquad \therefore\ k>10$

$\therefore\ \alpha=10$

답 10

08 이차부등식

중단원 마무리

119쪽

01 전략 부등식 $f(x)\le g(x)$의 해는 $y=f(x)$의 그래프가 $y=g(x)$의 그래프보다 아래쪽에 있거나 만나는 부분의 x의 값의 범위임을 이용한다.

풀이 ㄱ. $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 x축과 서로 다른 두 점에서 만나므로 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 D라 하면

$D=b^2-4ac>0$

ㄴ. $f(x)=ax^2+bx+c$라 하면 직선 $y=px+q$의 y절편 q가 양수이므로

$f(q)=aq^2+bq+c>0$

ㄷ. $ax^2+(b-p)x+c-q\le 0$에서

$ax^2+bx+c-(px+q)\le 0$

$\therefore ax^2+bx+c\le px+q$

부등식 $ax^2+bx+c\le px+q$의 해는 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 직선 $y=px+q$보다 아래쪽에 있거나 만나는 부분의 x의 값의 범위이므로 $\alpha\le x\le\beta$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

다른 풀이 ㄷ. $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 직선 $y=px+q$의 교점의 x좌표가 α, β이므로 이차방정식 $ax^2+bx+c=px+q$, 즉 $ax^2+(b-p)x+c-q=0$의 해는 $x=\alpha$ 또는 $x=\beta$이다.

$\therefore ax^2+(b-p)x+c-q=a(x-\alpha)(x-\beta)$

따라서 $ax^2+(b-p)x+c-q\le 0$에서

$a(x-\alpha)(x-\beta)\le 0$

이때 $a>0$이므로 부등식의 해는 $\alpha\le x\le\beta$

02 전략 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$이 중근을 가지면 $b^2-4ac=0$임을 이용한다.

풀이 이차방정식 $x^2+6x+11-k=0$이 중근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=3^2-1\cdot(11-k)=0$

$\therefore k=2$

따라서 주어진 부등식은 $-2x^2+10x-14<0$

$\therefore x^2-5x+7>0$

그런데 $x^2-5x+7=\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\ge\frac{3}{4}$이므로 이 이차부등식의 해는 모든 실수이다.

답 모든 실수

03 전략 해가 $x<\alpha$ 또는 $x>\beta\ (\alpha<\beta)$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은 $(x-\alpha)(x-\beta)>0$임을 이용한다.

풀이 $ax^2+bx+16>0$의 해가 $x<2$ 또는 $x>\frac{8}{3}$이므로

$a>0$

해가 $x<2$ 또는 $x>\frac{8}{3}$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x-2)\left(x-\frac{8}{3}\right)>0 \qquad \therefore x^2-\frac{14}{3}x+\frac{16}{3}>0$

양변에 a를 곱하면

$ax^2-\frac{14}{3}ax+\frac{16}{3}a>0$

이 부등식이 $ax^2+bx+16>0$과 같으므로

$-\frac{14}{3}a=b,\ \frac{16}{3}a=16$

$\therefore a=3,\ b=-14$

따라서 $x^2+(2a-1)x+b\le 0$, 즉 $x^2+5x-14\le 0$에서

$(x+7)(x-2)\le 0$

$\therefore -7\le x\le 2$

답 $-7\le x\le 2$

04 전략 이차함수 $f(x)=p(x-\alpha)(x-\beta)$에 대하여 $f(x-a)=p(x-a-\alpha)(x-a-\beta)$임을 이용한다.

풀이 $f(x)=x^2-x-12=(x+3)(x-4)$이므로

$f(x-1)=(x+2)(x-5)$

부등식 $f(x-1)<0$, 즉 $(x+2)(x-5)<0$에서

$-2<x<5$

따라서 정수 x는 $-1, 0, 1, \cdots, 4$이므로 구하는 합은

$-1+0+1+\cdots+4=9$

답 ③

05 전략 이차식 $f(x)$에 대하여 $|f(x)|>c\ (c>0)$이면 $f(x)<-c$ 또는 $f(x)>c$임을 이용한다.

풀이 $|x^2-3|>6$에서

$x^2-3<-6$ 또는 $x^2-3>6$ ··· ❶

(i) $x^2-3<-6$일 때, $x^2+3<0$

그런데 $x^2+3\ge 3$이므로 부등식 $x^2+3<0$의 해는 없다.

(ii) $x^2-3>6$일 때, $x^2-9>0$

$(x+3)(x-3)>0 \qquad \therefore x<-3$ 또는 $x>3$

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는

$x<-3$ 또는 $x>3$ ··· ❷

따라서 $\alpha=-3$, $\beta=3$이므로

$\alpha^2+\beta^2=(-3)^2+3^2=18$ ··· ❸

답 18

단계	채점 기준	비율
❶	주어진 부등식을 변형할 수 있다.	30 %
❷	주어진 부등식의 해를 구할 수 있다.	50 %
❸	$\alpha^2+\beta^2$의 값을 구할 수 있다.	20 %

06 전략 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 D라 할 때, 이차부등식 $ax^2+bx+c\ge 0$의 해가 한 개이면 $a<0$, $D=0$임을 이용한다.

풀이 이차부등식 $-x^2+kx-3\ge 0$의 해가 오직 한 개 존재하므로 이차방정식 $-x^2+kx-3=0$의 판별식을 D라 하면

$D=k^2-4\cdot(-1)\cdot(-3)=0$

$k^2-12=0, \qquad (k+2\sqrt{3})(k-2\sqrt{3})=0$

Q BOX

$x>0$에서 $f(x)>0$

$a(x-\alpha)(x-\beta)\le 0$에서 $a>0$이므로 $(x-\alpha)(x-\beta)\le 0$ $\therefore \alpha\le x\le\beta$

$a>0$이므로 부등호의 방향이 바뀌지 않는다.

$f(x-1)$
$=(x-1+3)$
$\times(x-1-4)$
$=(x+2)(x-5)$

$y=-x^2+kx-3$의 그래프가 위로 볼록하고, x축에 접한다.

$\therefore k=-2\sqrt{3}$ 또는 $k=2\sqrt{3}$

따라서 모든 실수 k의 값의 곱은

$-2\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{3}=-12$ 답 ③

07 전략 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 D라 할 때, 이차부등식 $ax^2+bx+c>0$이 해를 가지면 $a>0$ 또는 $a<0$, $D>0$임을 이용한다.

풀이 (i) $k>0$일 때,

이차함수 $y=kx^2+3x+4k$의 그래프는 아래로 볼록하므로 주어진 이차부등식은 항상 해를 갖는다.

(ii) $k<0$일 때,

주어진 이차부등식이 해를 가지려면 이차방정식 $kx^2+3x+4k=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=3^2-4\cdot k\cdot 4k>0$, $9-16k^2>0$

$(4k+3)(4k-3)<0$ $\therefore -\frac{3}{4}<k<\frac{3}{4}$

그런데 $k<0$이므로 $-\frac{3}{4}<k<0$

(i), (ii)에서 k의 값의 범위는

$-\frac{3}{4}<k<0$ 또는 $k>0$ 답 ②

Q BOX

$k=0$이면 주어진 부등식이 이차부등식이 아니므로 $k\neq0$이다.

08 전략 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 D라 할 때, 실수 x의 값에 관계없이 이차부등식 $ax^2+bx+c\le0$이 항상 성립하면 $a<0$, $D\le0$임을 이용한다.

풀이 실수 x의 값에 관계없이 이차부등식 $(k+1)x^2+4(k+1)x-7\le0$이 항상 성립해야 하므로

$k+1<0$ $\therefore k<-1$ …… ㉠

이차방정식 $(k+1)x^2+4(k+1)x-7=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\{2(k+1)\}^2-(k+1)\cdot(-7)\le0$

$4k^2+15k+11\le0$, $(4k+11)(k+1)\le0$

$\therefore -\frac{11}{4}\le k\le-1$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $-\frac{11}{4}\le k<-1$

따라서 정수 k는 -2의 1개이다. 답 ②

$y=(k+1)x^2+4(k+1)x-7$의 그래프가 위로 볼록하고, x축에 접하거나 x축과 만나지 않는다.

09 전략 이차부등식 $ax^2+bx+c<0$의 해가 없으면 이차부등식 $ax^2+bx+c\ge0$이 항상 성립함을 이용한다.

풀이 주어진 이차부등식이 해를 갖지 않으려면 이차부등식 $x^2+8x+(a-6)\ge0$이 항상 성립해야 한다.

이차방정식 $x^2+8x+(a-6)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=4^2-1\cdot(a-6)\le0$

$-a+22\le0$ $\therefore a\ge22$

따라서 실수 a의 최솟값은 22이다. 답 22

$y=x^2+8x+(a-6)$의 그래프가 아래로 볼록하고, x축에 접하거나 x축과 만나지 않는다.

10 전략 함수 $y=f(x)$의 그래프가 함수 $y=g(x)$의 그래프보다 위쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위는 부등식 $f(x)>g(x)$의 해와 같음을 이용한다.

풀이 $y=2x^2+3x-1$의 그래프가 $y=x^2+ax+b$의 그래프보다 위쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위는 부등식

$2x^2+3x-1>x^2+ax+b$,

즉 $x^2+(3-a)x-(1+b)>0$ …… ㉠

의 해와 같으므로 ㉠의 해가 $x<-5$ 또는 $x>4$이다. ➊

해가 $x<-5$ 또는 $x>4$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x+5)(x-4)>0$ $\therefore x^2+x-20>0$ ➋

이 부등식이 ㉠과 같으므로

$3-a=1$, $1+b=20$

따라서 $a=2$, $b=19$이므로

$a+b=21$ ➌

답 21

단계	채점 기준	비율
➊	주어진 조건을 만족시키는 이차부등식을 세울 수 있다.	40 %
➋	해가 $x<-5$ 또는 $x>4$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식을 세울 수 있다.	30 %
➌	$a+b$의 값을 구할 수 있다.	30 %

11 전략 함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축보다 항상 위쪽에 있으면 모든 실수 x에 대하여 부등식 $f(x)>0$이 성립함을 이용한다.

풀이 $y=4x^2+2(m-3)x+m$의 그래프가 x축보다 항상 위쪽에 있으려면 모든 실수 x에 대하여

$4x^2+2(m-3)x+m>0$

이 성립해야 한다.

이차방정식 $4x^2+2(m-3)x+m=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(m-3)^2-4m<0$

$m^2-10m+9<0$, $(m-1)(m-9)<0$

$\therefore 1<m<9$ 답 $1<m<9$

12 전략 A 지점과 보관창고 사이의 거리를 x km라 하고 운송비의 조건을 이용하여 x에 대한 부등식을 세운다.

풀이 보관창고가 A 지점에서 x km 떨어져 있다고 하면 보관창고와 B 지점 사이의 거리는

$(10+x)$ km

보관창고와 C 지점 사이의 거리는

$(20-x)$ km

이때 보관창고는 A와 C 사이에 있으므로

$0<x<20$ …… ㉠

A 지점의 공장에서 하루에 생산된 제품의 운송비는

$100x^2$원

B 지점의 공장에서 하루에 생산된 제품의 운송비는

$200(10+x)^2$원

C 지점의 공장에서 하루에 생산된 제품의 운송비는

$300(20-x)^2$원

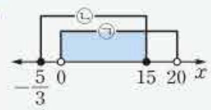
하루에 드는 총 운송비가 155000원 이하가 되어야 하므로

$100x^2+200(10+x)^2+300(20-x)^2\le 155000$

$3x^2-40x-75\le 0, \qquad (3x+5)(x-15)\le 0$

$\therefore -\frac{5}{3}\le x\le 15$ ...... ㉡

㉠, ㉡에서 $\quad 0<x\le 15$



따라서 보관창고는 A 지점에서 최대 15 km 떨어진 지점까지 지을 수 있다. 답 ④

13 전략 이차부등식 $x^2+ax+b\ge 0$이 항상 성립하려면 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 판별식 D에 대하여 $D\le 0$이어야 함을 이용한다.

풀이 모든 실수 x에 대하여 $-x^2+3x+2\le mx+n$, 즉 $x^2+(m-3)x+n-2\ge 0$이 성립하므로 이차방정식 $x^2+(m-3)x+n-2=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$D_1=(m-3)^2-4\cdot 1\cdot(n-2)\le 0$

$m^2-6m-4n+17\le 0$

$\therefore 4n\ge m^2-6m+17$ ...... ㉠

모든 실수 x에 대하여 $mx+n\le x^2-x+4$, 즉 $x^2-(m+1)x+4-n\ge 0$이 성립하므로 이차방정식 $x^2-(m+1)x+4-n=0$의 판별식을 D_2라 하면

$D_2=\{-(m+1)\}^2-4\cdot 1\cdot(4-n)\le 0$

$m^2+2m+4n-15\le 0$

$\therefore 4n\le -m^2-2m+15$ ...... ㉡

㉠, ㉡에서

$m^2-6m+17\le 4n\le -m^2-2m+15$ ...... ㉢

이므로

$m^2-6m+17\le -m^2-2m+15$

$2m^2-4m+2\le 0, \qquad 2(m-1)^2\le 0$

$\therefore m=1$

이것을 ㉢에 대입하면

$12\le 4n\le 12, \quad 4n=12 \quad \therefore n=3$

$\therefore m^2+n^2=1^2+3^2=10$ 답 ②

14 전략 인수분해를 이용하여 각 부등식의 해를 구한 후 n의 값의 범위에 따라 경우를 나누어 생각한다.

풀이 $x^2-10x+21\le 0$에서 $\quad (x-3)(x-7)\le 0$

$\therefore 3\le x\le 7$

$x^2-2(n-1)x+n^2-2n\ge 0$에서

$\{x-(n-2)\}(x-n)\ge 0$

$\therefore x\le n-2$ 또는 $x\ge n$

(i) $1\le n\le 3$인 경우

주어진 연립이차부등식을 만족시키는 정수 x의 개수는 5이다.

3, 4, 5, 6, 7의 5개

(ii) $4\le n\le 8$인 경우

주어진 연립이차부등식을 만족시키는 정수 x의 개수는 4이다.

$n=4$이면 4, 5, 6, 7의 4개
$n=5$이면 3, 5, 6, 7의 4개
$n=6$이면 3, 4, 6, 7의 4개
$n=7$이면 3, 4, 5, 7의 4개
$n=8$이면 3, 4, 5, 6의 4개

(iii) $n\ge 9$인 경우

주어진 연립이차부등식을 만족시키는 정수 x의 개수는 5이다.

3, 4, 5, 6, 7의 5개

이상에서 n의 값의 범위는

$4\le n\le 8$

따라서 자연수 n은 4, 5, 6, 7, 8이므로 구하는 합은

$4+5+6+7+8=30$ 답 30

15 전략 두 타일의 가로의 길이를 x cm로 놓고, 연립이차부등식을 세운다.

풀이 두 타일 A와 B의 가로의 길이를 x cm라 하면 A의 세로의 길이는 $(x+20)$ cm이므로

$x(x+20)\ge 4800, \qquad x^2+20x-4800\ge 0$

$(x+80)(x-60)\ge 0$

$\therefore x\le -80$ 또는 $x\ge 60$

그런데 $x>0$이므로

타일의 가로의 길이이므로 양수이어야 한다.

$x\ge 60$ ...... ㉠

B의 세로의 길이는 $(x-30)$ cm이므로

$x(x-30)\le 4000, \qquad x^2-30x-4000\le 0$

$(x+50)(x-80)\le 0$

$\therefore -50\le x\le 80$

그런데 $x>30$이므로

$x-30>0$이므로 $x>30$

$30<x\le 80$ ...... ㉡

㉠, ㉡에서

$60\le x\le 80$

따라서 타일의 가로의 길이의 범위는 60 cm 이상 80 cm 이하이다. 답 60 cm 이상 80 cm 이하

16 전략 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 D라 할 때, 이 이차방정식이 서로 다른 두 실근을 가지면 $D>0$임을 이용한다.

풀이 이차방정식 $x^2+2(k-2)x-k^2+4=0$이 서로 다른 두 실근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(k-2)^2-1\cdot(-k^2+4)>0$

$2k^2-4k>0, \qquad 2k(k-2)>0$

$\therefore k<0$ 또는 $k>2$

따라서 $\alpha=0$, $\beta=2$이므로

$\beta-\alpha=2$ 답 ②

17 전략 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라 할 때, 두 근의 부호가 서로 다르면 $\alpha\beta<0$임을 이용한다.

풀이 이차방정식 $x^2-2(k-1)x+2k^2+k-3=0$의 두 근을 α, β라 하면 두 근의 부호가 서로 다르므로

$\alpha\beta=2k^2+k-3<0, \qquad (2k+3)(k-1)<0$

$\therefore -\frac{3}{2}<k<1$ ...... ㉠

또 음수인 근의 절댓값이 양수인 근보다 크므로

(두 근의 합)<0

$\alpha+\beta=2(k-1)<0$

$k-1<0 \qquad \therefore k<1$ ...... ㉡

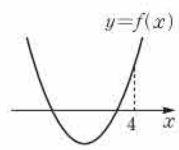
㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$-\frac{3}{2}<k<1$

따라서 정수 k는 -1, 0의 2개이다. 답 2

18 전략 이차방정식 $ax^2+bx+c=0\,(a>0)$의 판별식을 D라 하고, $f(x)=ax^2+bx+c$라 할 때, 두 근이 모두 p보다 작으면 $D\geq0$, $f(p)>0$, $-\frac{b}{2a}<p$임을 이용한다.

풀이 $f(x)=x^2+2kx-9k+10$이라 하면 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이 모두 4보다 작으므로 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



(i) 이차방정식 $f(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=k^2-1\cdot(-9k+10)\geq0$

$k^2+9k-10\geq0$, $(k+10)(k-1)\geq0$

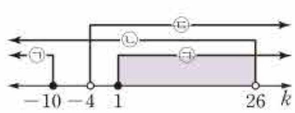
$\therefore k\leq-10$ 또는 $k\geq1$ ······ ㉠ ··· ❶

(ii) $f(4)=16+8k-9k+10>0$

$-k>-26$ $\therefore k<26$ ······ ㉡ ··· ❷

(iii) 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식이 $x=-k$이므로

$-k<4$ $\therefore k>-4$ ······ ㉢ ··· ❸



이상에서 공통부분을 구하면

$1\leq k<26$

따라서 정수 k의 최댓값은 25이다. ··· ❹

답 25

단계	채점 기준	비율
❶	이차방정식의 판별식을 이용하여 k의 값의 범위를 구할 수 있다.	30 %
❷	함숫값을 이용하여 k의 값의 범위를 구할 수 있다.	30 %
❸	축의 방정식을 이용하여 k의 값의 범위를 구할 수 있다.	30 %
❹	정수 k의 최댓값을 구할 수 있다.	10 %

Q BOX

정수 k는 $1, 2, 3, \cdots, 25$이다.

$4-x=-7$에서 $x=11$

09 평면좌표

21 두 점 사이의 거리

Lecture 40 두 점 사이의 거리

124쪽

1-1 (1) $\overline{AB}=|9-2|=7$

(2) $\overline{OA}=|-6|=6$

답 (1) 7 (2) 6

1-2 $\overline{AB}=|a-(-1)|=|a+1|$이므로 $\overline{AB}=4$에서

$|a+1|=4$

$a+1=-4$ 또는 $a+1=4$

$\therefore a=-5$ 또는 $a=3$ 답 -5, 3

2-1 (1) $\overline{AB}=\sqrt{\{1-(-2)\}^2+(6-3)^2}=3\sqrt{2}$

(2) $\overline{AB}=\sqrt{(-6-4)^2+(8-8)^2}=10$

(3) $\overline{OA}=\sqrt{(-5)^2+(-12)^2}=13$

(4) $\overline{AB}=\sqrt{(-4-2)^2+\{-1-(-5)\}^2}=2\sqrt{13}$

답 (1) $3\sqrt{2}$ (2) 10 (3) 13 (4) $2\sqrt{13}$

기본+표준 유형 Q+Q

125쪽

01 $\overline{AB}=|4-x|$이므로 $\overline{AB}=7$에서

$|4-x|=7$

$4-x=-7$ 또는 $4-x=7$

$\therefore x=-3\ (\because x<0)$

$\therefore \overline{OA}=|-3|=3$ 답 3

02 $\overline{AB}=|8-3|=5$, $\overline{BC}=|x-8|$이므로 $\overline{AB}+\overline{BC}=14$에서

$5+|x-8|=14$, $|x-8|=9$

$x-8=-9$ 또는 $x-8=9$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=17$

따라서 구하는 합은 $-1+17=16$ 답 16

03 $\overline{AB}=2\sqrt{5}$이므로

$\sqrt{(a-4)^2+(-2)^2}=2\sqrt{5}$

양변을 제곱하면

$(a-4)^2+4=20$

$a^2-8a=0$, $a(a-8)=0$

$\therefore a=8\ (\because a>0)$ 답 ④

04 ① $\overline{OA}=\sqrt{1^2+5^2}=\sqrt{26}$

② $\overline{OB}=\sqrt{3^2+(-2)^2}=\sqrt{13}$

③ $\overline{OC}=\sqrt{(-6)^2+(-3)^2}=3\sqrt{5}$

④ $\overline{AB}=\sqrt{(3-1)^2+(-2-5)^2}=\sqrt{53}$

⑤ $\overline{BC}=\sqrt{(-6-3)^2+(-3+2)^2}=\sqrt{82}$

따라서 선분의 길이가 가장 긴 것은 ⑤이다. 답 ⑤

05 $\overline{AP}=\overline{BP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로

$(a+1)^2+(-4)^2=(a-5)^2+(-2)^2$

$a^2+2a+17=a^2-10a+29, \quad 12a=12$

$\therefore a=1$ 답 1

06 $P(a, a)$라 하면 $\overline{AP}=\overline{BP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로

$(a-7)^2+(a-4)^2=(a-6)^2+(a+1)^2$

$2a^2-22a+65=2a^2-10a+37$

$-12a=-28 \quad \therefore a=\frac{7}{3}$

따라서 점 P의 좌표는

$\left(\frac{7}{3}, \frac{7}{3}\right)$ 답 $\left(\frac{7}{3}, \frac{7}{3}\right)$

07 $\overline{AB}=\sqrt{(2+1)^2+(1+3)^2}=5$,

$\overline{BC}=\sqrt{(6-2)^2+(-2-1)^2}=5$,

$\overline{CA}=\sqrt{(-1-6)^2+(-3+2)^2}=5\sqrt{2}$

$\therefore \overline{AB}=\overline{BC}, \overline{CA}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2$

따라서 △ABC는 ∠B=90°인 직각이등변삼각형이다.

답 ④

08 $\overline{AC}=\overline{BC}$에서 $\overline{AC}^2=\overline{BC}^2$이므로

$4^2+(a-3)^2=(4-3)^2+(a-2)^2$

$a^2-6a+25=a^2-4a+5$

$-2a=-20 \quad \therefore a=10$ 답 ⑤

09 $\overline{OP}+\overline{PA}\ge\overline{OA}=\sqrt{3^2+4^2}=5$

따라서 $\overline{OP}+\overline{PA}$의 최솟값은 5이다. 답 5

10 $\overline{AP}+\overline{PB}\ge\overline{AB}$

$=\sqrt{(a+2+1)^2+(4-3+a)^2}$

$=\sqrt{2a^2+8a+10}$

$=\sqrt{2(a+2)^2+2}$

따라서 $a=-2$일 때 $\overline{AP}+\overline{PB}$의 최솟값은 $\sqrt{2}$이다.

답 ②

11 $P(a, 0)$이라 하면

$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$

$=\{(a+6)^2+(-2)^2\}+\{(a+4)^2+(-3)^2\}$

$=2a^2+20a+65$

$=2(a+5)^2+15$

따라서 $a=-5$일 때 $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$의 최솟값은 15이다.

답 15

12 점 P가 직선 $y=x-1$ 위의 점이므로 $P(a, a-1)$이라 하면

$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$

$=\{(a-1)^2+(a+4)^2\}+\{(a-2)^2+(a-7)^2\}$

$=4a^2-12a+70$

$=4\left(a-\frac{3}{2}\right)^2+61$

따라서 $a=\frac{3}{2}$일 때 $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$의 최솟값이 61이므로

점 P의 x좌표는 $\frac{3}{2}$이다. 답 $\frac{3}{2}$

13 직선 BC를 x축, 선분 BC의 수직이등분선을 y축으로 하는 좌표평면을 잡으면 점 $\boxed{\text{M}}$이 원점이다.

이때 삼각형 ABC의 두 꼭짓점 A, C의 좌표를 각각 (a, b), $(c, 0)$이라 하면 꼭짓점 B의 좌표는

$\boxed{(-c, 0)}$이므로

$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2$

$=\{(a+c)^2+b^2\}+\{(a-c)^2+b^2\}$

$=(a^2+2ac+c^2+b^2)+(a^2-2ac+c^2+b^2)$

$=\boxed{2(a^2+b^2+c^2)}$,

$\overline{AM}^2+\overline{BM}^2=(a^2+b^2)+c^2=\boxed{a^2+b^2+c^2}$

$\therefore \overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{AM}^2+\overline{BM}^2)$

답 (가) M (나) $(-c, 0)$
(다) $2(a^2+b^2+c^2)$ (라) $a^2+b^2+c^2$

14 직선 BC를 x축, 직선 AB를 y축으로 하는 좌표평면을 잡으면 점 $\boxed{\text{B}}$가 원점이다.

이때 직사각형 ABCD의 두 꼭짓점 A, C의 좌표를 각각 $(0, b)$, $(a, 0)$이라 하면 꼭짓점 D의 좌표는

$\boxed{(a, b)}$이므로 점 P의 좌표를 (x, y)라 하면

$\overline{PA}^2+\overline{PC}^2=x^2+(y-b)^2+(x-a)^2+y^2$

$=\boxed{x^2+y^2+(x-a)^2+(y-b)^2}$,

$\overline{PB}^2+\overline{PD}^2=\boxed{x^2+y^2+(x-a)^2+(y-b)^2}$

$\therefore \overline{PA}^2+\overline{PC}^2=\overline{PB}^2+\overline{PD}^2$

답 (가) B (나) (a, b)
(다) $x^2+y^2+(x-a)^2+(y-b)^2$
(라) $x^2+y^2+(x-a)^2+(y-b)^2$

Q BOX

점 P의 x좌표를 a라 하면 점 P가 직선 $y=x$ 위의 점이므로 y좌표도 a이다.

이와 같은 삼각형의 성질을 파푸스(Pappus) 정리 또는 중선 정리라 한다.

$\overline{OP}+\overline{PA}$의 값이 최소일 때, 점 P는 $\overline{OA}$ 위의 점이다.

$2a^2+8a+10$
$=2(a^2+4a+4-4)+10$
$=2(a^2+4a+4)-8+10$
$=2(a+2)^2+2$

$4a^2-12a+70$
$=4\left(a^2-3a+\frac{9}{4}-\frac{9}{4}\right)+70$
$=4\left(a^2-3a+\frac{9}{4}\right)-9+70$
$=4\left(a-\frac{3}{2}\right)^2+61$

22 선분의 내분점과 외분점

Lecture 41 수직선 위의 선분의 내분점과 외분점

127쪽

1-1 (1) $\frac{1\cdot6+2\cdot3}{1+2}=4$

(2) $\frac{3\cdot1+2\cdot(-9)}{3+2}=-3$

답 (1) 4 (2) −3

1-2 $\frac{a+(-4)}{2}=2$이므로 $a=8$ 답 8

2-1 (1) $\frac{2\cdot5-1\cdot2}{2-1}=8$

(2) $\frac{1\cdot(-6)-3\cdot(-4)}{1-3}=-3$

답 (1) 8 (2) -3

2-2 $\frac{3a-5\cdot(-1)}{3-5}=-7$이므로 $a=3$

답 3

Lecture 42 좌표평면 위의 선분의 내분점과 외분점

128쪽

1-1 (1) $\frac{2\cdot5+1\cdot(-1)}{2+1}=3$, $\frac{2\cdot(-2)+1\cdot1}{2+1}=-1$

$\therefore (3, -1)$

(2) $\frac{-1+5}{2}=2$, $\frac{1-2}{2}=-\frac{1}{2}$

$\therefore \left(2, -\frac{1}{2}\right)$

$\overline{\text{AB}}$의 중점은 $\overline{\text{AB}}$를 1 : 1로 내분하는 점이다.

(3) $\frac{2\cdot5-3\cdot(-1)}{2-3}=-13$, $\frac{2\cdot(-2)-3\cdot1}{2-3}=7$

$\therefore (-13, 7)$

답 (1) $(3, -1)$ (2) $\left(2, -\frac{1}{2}\right)$ (3) $(-13, 7)$

1-2 $\frac{8+b}{2}=6$, $\frac{a+9}{2}=4$이므로

$8+b=12$, $a+9=8$

$\therefore a=-1, b=4$ 답 $a=-1$, $b=4$

2-1 (1) $\frac{0+4+2}{3}=2$, $\frac{0+5-2}{3}=1$

$\therefore (2, 1)$

(2) $\frac{-2+5-6}{3}=-1$, $\frac{6+2+7}{3}=5$

$\therefore (-1, 5)$

답 (1) $(2, 1)$ (2) $(-1, 5)$

2-2 $\frac{a+2+3}{3}=2$, $\frac{4-3+b}{3}=0$이므로

$a+5=6$, $b+1=0$

$\therefore a=1, b=-1$ 답 $a=1$, $b=-1$

기본+표준 유형 Q+Q

129쪽

01 답 (가) 점 D (나) 점 F

02 ④ 점 G는 선분 BD를 5 : 3으로 외분하는 점이다.

답 ④

03 $a=\frac{3\cdot9+1\cdot(-3)}{3+1}=6$

$b=\frac{5\cdot9-2\cdot(-3)}{5-2}=17$

$\therefore a+b=23$ 답 23

쌤 한마디

수직선 위의 두 점 $\text{A}(x_1)$, $\text{B}(x_2)$에 대하여 선분 AB를 $m : n$으로 내분하는 점 P와 외분하는 점 Q의 좌표는 다음과 같이 기억하면 편리하다.

① $m : n$, $\text{A}(x_1)$ $\text{B}(x_2)$ ○ $\text{P}\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n}\right)$ ← 엇갈리게 곱하여 더한다.

② $m : n$, $\text{A}(x_1)$ $\text{B}(x_2)$ ○ $\text{Q}\left(\frac{mx_2-nx_1}{m-n}\right)$ ← 엇갈리게 곱하여 뺀다.

04 $\frac{2\cdot4+3\cdot(-6)}{2+3}=-2$이므로 $\text{P}(-2)$

$\frac{2\cdot4-3\cdot(-6)}{2-3}=-26$이므로 $\text{Q}(-26)$

$\therefore \overline{\text{PQ}}=|-2-(-26)|=24$

답 ③

05 $\frac{4\cdot b+1\cdot(-3)}{4+1}=5$, $\frac{4\cdot9+1\cdot a}{4+1}=8$이므로

$4b-3=25$, $36+a=40$

$\therefore a=4, b=7$

$\text{A}(-3, 4)$, $\text{B}(7, 9)$이고, $\overline{\text{AB}}$를 1 : 2로 외분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{1\cdot7-2\cdot(-3)}{1-2}, \frac{1\cdot9-2\cdot4}{1-2}\right)$ $\therefore (-13, -1)$

따라서 $x=-13$, $y=-1$이므로

$xy=13$ 답 13

06 $\overline{\text{AB}}$를 $2 : k$로 외분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{2\cdot0-k\cdot2}{2-k}, \frac{2\cdot5-k\cdot0}{2-k}\right)$

$\therefore \left(\frac{-2k}{2-k}, \frac{10}{2-k}\right)$

이 점이 직선 $y=-x$ 위에 있으므로

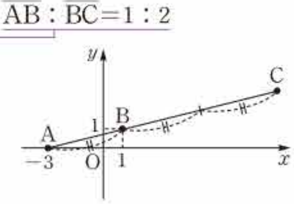
$\frac{10}{2-k}=\frac{2k}{2-k}$, $2k=10$ ($\because k\neq2$)

$\therefore k=5$ 답 ④

07 $2\overline{\text{AB}}=\overline{\text{BC}}$에서 $\overline{\text{AB}} : \overline{\text{BC}}=1 : 2$

$ad=bc$이면 $a : b=c : d$

점 C의 x좌표가 양수이므로 오른쪽 그림과 같이 점 C는 $\overline{\text{AB}}$를 3 : 2로 외분하는 점이다.



따라서 점 C의 좌표는

$\left(\frac{3\cdot1-2\cdot(-3)}{3-2}, \frac{3\cdot1-2\cdot0}{3-2}\right)$ $\therefore (9, 3)$

답 $(9, 3)$

다른 풀이 $\overline{AB}:\overline{BC}=1:2$에서 점 B는 $\overline{AC}$를 $1:2$로 내분하는 점이므로 점 C의 좌표를 (a, b)라 하면

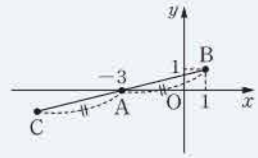
$$\frac{1\cdot a+2\cdot(-3)}{1+2}=1,\ \frac{1\cdot b+2\cdot 0}{1+2}=1$$

$\therefore a=9,\ b=3$

따라서 점 C의 좌표는 $(9, 3)$이다.

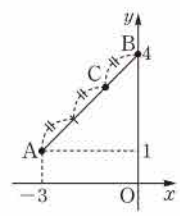
쌤 한마디

$\overline{AB}:\overline{BC}=1:2$일 때, 오른쪽 그림과 같이 점 C가 $\overline{AB}$를 $1:2$로 외분하는 점인 경우도 있다. 이때 점 C의 x좌표는 음수이다.



08 $\overline{AB}=3\overline{BC}$에서 $\overline{AB}:\overline{BC}=3:1$

$a<0$, 즉 점 C의 x좌표가 음수이므로 오른쪽 그림과 같이 점 C는 $\overline{AB}$를 $2:1$로 내분하는 점이다.



따라서

$$a=\frac{2\cdot 0+1\cdot(-3)}{2+1}=-1,$$

$$b=\frac{2\cdot 4+1\cdot 1}{2+1}=3$$

이므로 $ab=-3$ 답 ①

09 $\triangle ABC$의 무게중심의 좌표가 $(4, -4)$이므로

$$\frac{a+3+(3b+1)}{3}=4,$$

$$\frac{-1-2b+(-3a-1)}{3}=-4$$

$\therefore a+3b=8,\ 3a+2b=10$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=2,\ b=2$

$\therefore a+b=4$ 답 4

10 $\triangle OAB$의 무게중심의 좌표는 $(6, 12)$이므로

$$\frac{0+x_1+x_2}{3}=6,\ \frac{0+y_1+y_2}{3}=12$$

$x_1+x_2=18,\ y_1+y_2=36$

$$\therefore \frac{x_1+x_2}{2}=9,\ \frac{y_1+y_2}{2}=18$$

따라서 $\overline{AB}$의 중점의 좌표는 $(9, 18)$이다.

답 $(9, 18)$

11 점 D의 좌표를 (a, b)라 하면 두 대각선 AC, BD의 중점이 일치하므로

$$\frac{-4+1}{2}=\frac{-10+a}{2},\ \frac{3-1}{2}=\frac{-8+b}{2}$$

$\therefore a=7,\ b=10$

따라서 점 D의 좌표는 $(7, 10)$이다. 답 $(7, 10)$

12 두 대각선 AC, BD의 중점이 일치하므로 중점의 x좌표에서

$$\frac{a-5}{2}=\frac{-4+b}{2}\quad \therefore b=a-1 \quad \cdots\cdots ㉠$$

Q BOX

$\overline{BC}=\overline{CD}$임을 이용하여 b의 값을 먼저 구할 수도 있다.

$\frac{a-6}{3}=1$에서

$a-6=3 \quad \therefore a=9$

$\frac{b}{3}=1$에서 $b=3$

$\begin{cases} a+3b=8 & \cdots ㉠ \\ 3a+2b=10 & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠$\times 3-$㉡을 하면

$7b=14 \quad \therefore b=2$

$b=2$를 ㉠에 대입하면

$a+6=8 \quad \therefore a=2$

$-\frac{3}{2}=\frac{-10+a}{2}$에서

$-10+a=-3$

$\therefore a=7$

$1=\frac{-8+b}{2}$에서

$-8+b=2$

$\therefore b=10$

또 $\overline{AB}=\overline{BC}$에서 $\overline{AB}^2=\overline{BC}^2$이므로

$$(-4-a)^2+(8-9)^2=(-5+4)^2+(1-8)^2$$

$a^2+8a-33=0, \quad (a+11)(a-3)=0$

$\therefore a=3\ (\because a>0)$

$a=3$을 ㉠에 대입하면 $b=2$

$\therefore a^2+b^2=13$ 답 ③

13 (1) $\overline{AD}$는 $\angle A$의 이등분선이므로

$\overline{BD}:\overline{CD}=\overline{AB}:\overline{AC}$

이때

$\overline{AB}=\sqrt{(-7+3)^2+(-3-3)^2}=2\sqrt{13},$

$\overline{AC}=\sqrt{3^2+(1-3)^2}=\sqrt{13}$

이므로 $\overline{BD}:\overline{CD}=2\sqrt{13}:\sqrt{13}=2:1$

(2) 점 D는 $\overline{BC}$를 $2:1$로 내분하는 점이므로 점 D의 좌표는

$$\left(\frac{2\cdot 0+1\cdot(-7)}{2+1},\ \frac{2\cdot 1+1\cdot(-3)}{2+1}\right)$$

$$\therefore \left(-\frac{7}{3},\ -\frac{1}{3}\right)$$

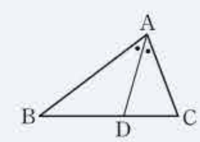
답 (1) $2:1$ (2) $\left(-\frac{7}{3},\ -\frac{1}{3}\right)$

쌤 한마디

삼각형의 내각의 이등분선

삼각형 ABC에서 $\angle A$의 이등분선과 변 BC의 교점을 D라 하면

$\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{BD}:\overline{CD}$



14 $\overline{AD}$는 $\angle A$의 이등분선이므로

$\overline{BD}:\overline{CD}=\overline{AB}:\overline{AC}$

이때

$\overline{AB}=\sqrt{(1+2)^2+(-1+5)^2}=5,$

$\overline{AC}=\sqrt{(-8+2)^2+(3+5)^2}=10$

이므로 $\overline{BD}:\overline{CD}=5:10=1:2$

즉 점 D는 $\overline{BC}$를 $1:2$로 내분하는 점이므로 점 D의 좌표는

$$\left(\frac{1\cdot(-8)+2\cdot 1}{1+2},\ \frac{1\cdot 3+2\cdot(-1)}{1+2}\right)$$

$$\therefore \left(-2,\ \frac{1}{3}\right)$$

답 ①

중단원 마무리

131쪽

01 **전략** 두 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$에 대하여 $\overline{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$임을 이용한다.

풀이 $\overline{AB}=\sqrt{13}$이므로

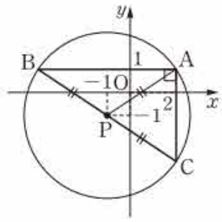
$\sqrt{(-2)^2+a^2}=\sqrt{13}$

양변을 제곱하면 $4+a^2=13$

$a^2=9 \quad \therefore a=3\ (\because a>0)$ 답 ③

02 전략 삼각형의 외심의 성질을 이용하여 먼저 △ABC가 어떤 삼각형인지를 파악한다.

풀이 △ABC의 외심을 P라 하면 점 P에서 각 꼭짓점까지의 거리가 같으므로 점 P는 $\overline{BC}$의 중점이다.



따라서 $\overline{BC}$는 △ABC의 외접원의 지름이므로 △ABC는 $\overline{BC}$를 빗변으로 하는 직각삼각형이다.

$$\therefore \overline{AB}^2+\overline{AC}^2=\overline{BC}^2=(2\overline{AP})^2$$
$$=4\overline{AP}^2$$
$$=4\{(-1-2)^2+(-1-1)^2\}$$
$$=52$$

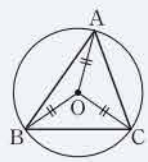
답 ②

쌤 한마디

삼각형의 외심의 성질

삼각형 ABC의 외심 O에서 세 꼭짓점에 이르는 거리는 모두 같다.

⊙ $\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}$



03 전략 t초 후 두 사람 사이의 거리를 t에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 직선 OQ를 x축, 직선 OP를 y축으로 하는 좌표평면을 잡으면 t초 후 원혁이와 지안이의 위치는 각각

$(0,\ 20-t)$, $(-20+2t,\ 0)$

원혁이와 지안이 사이의 거리는

$$\sqrt{(-20+2t)^2+(-20+t)^2}$$
$$=\sqrt{5t^2-120t+800}$$
$$=\sqrt{5(t-12)^2+80}\ (\mathrm{m})$$

따라서 원혁이와 지안이 사이의 거리는 12초 후에 가장 가까워진다.

답 12초

04 전략 $\overline{AP}=\overline{BP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$임을 이용한다.

풀이 P$(a,\ 0)$이라 하면 $\overline{AP}=\overline{BP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로

$$(a-3)^2+4^2=(a-6)^2+2^2$$
$$a^2-6a+25=a^2-12a+40$$
$$6a=15 \qquad \therefore a=\frac{5}{2}$$

따라서 $\mathrm{P}\left(\frac{5}{2},\ 0\right)$이므로 $\quad \overline{OP}=\frac{5}{2}$

답 ④

05 전략 삼각형의 외심에서 세 꼭짓점에 이르는 거리는 모두 같음을 이용한다.

풀이 삼각형 ABC의 외심 P에서 세 꼭짓점까지의 거리가 모두 같으므로

외접원의 반지름의 길이

$$\overline{PA}=\overline{PB}=\overline{PC} \qquad \therefore \overline{PA}^2=\overline{PB}^2=\overline{PC}^2$$

$\overline{PA}^2=\overline{PB}^2$에서

$$(a-3)^2+(b-1)^2=(a-2)^2+b^2$$
$$2a+2b=6 \qquad \therefore a+b=3 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$\overline{PB}^2=\overline{PC}^2$에서

$$(a-2)^2+b^2=(a+1)^2+(b-3)^2$$
$$6a-6b=-6 \qquad \therefore a-b=-1 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1,\ b=2$

QBOX
㉠+㉡을 하면
$2a=2 \quad \therefore a=1$
$a=1$을 ㉠에 대입하면
$1+b=3 \quad \therefore b=2$

$$\therefore a+b=3$$

답 3

06 전략 먼저 △ABC의 세 변의 길이를 이용하여 △ABC가 어떤 삼각형인지 파악한다.

풀이 $\overline{AB}=\sqrt{(-1+3)^2+(-1-5)^2}=2\sqrt{10}$,

$\overline{BC}=\sqrt{(3+1)^2+(7+1)^2}=4\sqrt{5}$,

$\overline{CA}=\sqrt{(-3-3)^2+(5-7)^2}=2\sqrt{10}$

$$\therefore \overline{AB}=\overline{CA},\ \overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{CA}^2$$

따라서 △ABC는 ∠A=90°인 직각이등변삼각형이므로 △ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{CA}=\frac{1}{2}\cdot2\sqrt{10}\cdot2\sqrt{10}=20$$

답 20

07 전략 주어진 식을 선분의 길이의 합으로 나타낸다.

풀이 A$(-2,\ 6)$, B$(a,\ b)$, C$(1,\ 3)$이라 하면

$$\sqrt{(a+2)^2+(b-6)^2}=\overline{AB},$$
$$\sqrt{(a-1)^2+(b-3)^2}=\overline{BC}$$
$$\therefore \sqrt{(a+2)^2+(b-6)^2}+\sqrt{(a-1)^2+(b-3)^2}$$
$$=\overline{AB}+\overline{BC}$$
$$\geq\overline{AC}$$
$$=\sqrt{(1+2)^2+(3-6)^2}$$
$$=3\sqrt{2}$$

따라서 주어진 식의 최솟값은 $3\sqrt{2}$이다.

답 ③

08 전략 점 P의 좌표를 $(a,\ b)$라 하고 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2$을 a, b에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 P$(a,\ b)$라 하면

$$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2$$
$$=\{(a+2)^2+(b-1)^2\}+\{(a-2)^2+b^2\}$$
$$+\{(a-3)^2+(b-5)^2\}$$
$$=3a^2-6a+3b^2-12b+43$$
$$=3(a-1)^2+3(b-2)^2+28 \qquad \cdots ❶$$

이때 $(a-1)^2\geq0$, $(b-2)^2\geq0$이므로

$$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2\geq28$$

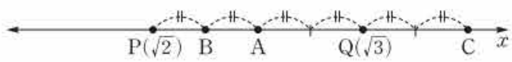
따라서 $a=1$, $b=2$일 때 주어진 식의 최솟값은 28이므로 점 P의 좌표는 $(1,\ 2)$이다. $\cdots$ ❷

답 $(1,\ 2)$

단계	채점 기준	비율
❶	점 P의 좌표를 $(a,\ b)$라 하고, 두 점 사이의 거리 공식을 이용하여 이차식을 세울 수 있다.	60 %
❷	$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2$의 값이 최소일 때의 점 P의 좌표를 구할 수 있다.	40 %

09 전략 수직선 위의 선분의 내분점과 외분점의 좌표를 구하는 공식을 이용한다.

풀이 점 A는 $\overline{PQ}$의 중점, 점 B는 $\overline{PQ}$를 $1:3$으로 내분하는 점, 점 C는 $\overline{PQ}$를 $3:1$로 외분하는 점이므로 세 점 A, B, C를 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



따라서 왼쪽에 있는 점부터 순서대로 나열하면 B, A, C이다.

답 ③

10 전략 좌표평면 위의 선분의 내분점과 외분점의 좌표를 구하는 공식을 이용한다.

풀이 $\overline{AB}$를 $1:2$로 외분하는 점 P의 좌표는

$$\left(\frac{1\cdot(-1)-2\cdot2}{1-2},\ \frac{1\cdot5-2\cdot0}{1-2}\right)$$

$\therefore (5,\ -5)$

따라서 $\overline{OP}$를 $3:2$로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{3\cdot5+2\cdot0}{3+2},\ \frac{3\cdot(-5)+2\cdot0}{3+2}\right)$$

$\therefore (3,\ -3)$

답 ③

11 전략 좌표평면 위의 선분의 내분점의 좌표를 구하는 공식을 이용하여 내분점의 좌표를 a로 나타낸다.

풀이 $\overline{AB}$를 $(1-a):a$로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{(1-a)\cdot5+a\cdot(-6)}{(1-a)+a},\ \frac{(1-a)\cdot(-4)+a\cdot1}{(1-a)+a}\right)$$

$\therefore (5-11a,\ -4+5a)$ ⋯ ❶

이 점이 제3사분면 위에 있으므로

$5-11a<0,\ -4+5a<0$

$\therefore \frac{5}{11}<a<\frac{4}{5}$ ⋯ ❷

답 $\frac{5}{11}<a<\frac{4}{5}$

단계	채점 기준	비율
❶	$\overline{AB}$를 $(1-a):a$로 내분하는 점의 좌표를 구할 수 있다.	50 %
❷	a의 값의 범위를 구할 수 있다.	50 %

12 전략 먼저 $2\overline{AF}=5\overline{FP}$를 $\overline{AF}:\overline{FP}=m:n$ 꼴로 나타낸다.

풀이 $2\overline{AF}=5\overline{FP}$에서 $\overline{AF}:\overline{FP}=5:2$

따라서 점 P의 위치로 알맞은 것은 $\overline{AF}$를 $3:2$로 내분하는 점 D 또는 $7:2$로 외분하는 점 H이다.

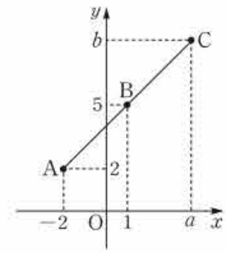
답 점 D, 점 H

13 전략 $\triangle OAC:\triangle OBC=2:1$이므로 $\overline{AC}:\overline{BC}=2:1$임을 이용한다.

풀이 $\triangle OAC$의 넓이가 $\triangle OBC$의 넓이의 2배이므로

$\overline{AC}:\overline{BC}=2:1$

$a>0$에서 점 C는 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AB}$를 $2:1$로 외분하는 점이므로



$$a=\frac{2\cdot1-1\cdot(-2)}{2-1}=4,$$

$$b=\frac{2\cdot5-1\cdot2}{2-1}=8$$

$\therefore b-a=4$

답 ④

다른 풀이 $\triangle OAC$의 넓이가 $\triangle OBC$의 넓이의 2배이므로 $\overline{AC}:\overline{BC}=2:1$

$a>0$에서 점 B는 $\overline{AC}$를 $1:1$로 내분하는 점, 즉 $\overline{AC}$의 중점이므로

$$\frac{-2+a}{2}=1,\ \frac{2+b}{2}=5$$

$\therefore a=4,\ b=8$

$\therefore b-a=4$

14 전략 세 점 $A(x_1,\ y_1)$, $B(x_2,\ y_2)$, $C(x_3,\ y_3)$을 꼭짓점으로 하는 $\triangle ABC$의 무게중심의 좌표는 $\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\ \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$임을 이용한다.

풀이 점 C의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면 $\triangle ABC$의 무게중심이 $G(4,\ -4)$이므로

$$\frac{3+7+a}{3}=4,\ \frac{-9-4+b}{3}=-4$$

$\therefore a=2,\ b=1$

따라서 점 C의 좌표는

$(2,\ 1)$

답 $(2,\ 1)$

15 전략 두 점 M, N의 좌표를 이용하여 두 점 B, C의 x좌표, y좌표의 합을 구한다.

풀이 두 꼭짓점 B, C의 좌표를 각각 $(a_1,\ b_1)$, $(a_2,\ b_2)$라 하면 $\triangle ABC$의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{1+a_1+a_2}{3},\ \frac{6+b_1+b_2}{3}\right) \quad \cdots\cdots ㉠$$

두 점 $M(x_1,\ y_1)$, $N(x_2,\ y_2)$의 x좌표는 각각

$x_1=\frac{1+a_1}{2}$, $x_2=\frac{1+a_2}{2}$이므로

$$x_1+x_2=1+\frac{a_1+a_2}{2}$$

$\therefore a_1+a_2=2\ (\because x_1+x_2=2)$

또 두 점 $M(x_1,\ y_1)$, $N(x_2,\ y_2)$의 y좌표는 각각

$y_1=\frac{6+b_1}{2}$, $y_2=\frac{6+b_2}{2}$이므로

$$y_1+y_2=6+\frac{b_1+b_2}{2}$$

$\therefore b_1+b_2=-4\ (\because y_1+y_2=4)$

따라서 ㉠에서 구하는 좌표는

$\left(\frac{1+2}{3},\ \frac{6-4}{3}\right)\quad \therefore \left(1,\ \frac{2}{3}\right)$

답 ③

QBOX

점 C가 $\overline{AB}$를 $2:1$로 내분하는 점이면

$a=\frac{2\cdot1+1\cdot(-2)}{2+1}=0$

$\frac{10+a}{3}=4$에서

$a+10=12$

$\therefore a=2$

$\frac{-13+b}{3}=-4$에서

$b-13=-12$

$\therefore b=1$

(x좌표)<0,
(y좌표)<0

$5-11a<0$에서

$-11a<-5$

$\therefore a>\frac{5}{11}$

$-4+5a<0$에서

$5a<4\quad \therefore a<\frac{4}{5}$

높이가 같은 두 삼각형의 넓이의 비는 밑변의 길이의 비와 같다.

16 전략 먼저 좌표평면 위의 선분의 내분점의 좌표를 구하는 공식을 이용하여 세 점 D, E, F의 좌표를 구한다.

풀이 $\overline{AB}$를 $3:1$로 내분하는 점 D의 좌표는

$$\left(\frac{3\cdot(-6)+1\cdot2}{3+1},\ \frac{3\cdot5+1\cdot1}{3+1}\right)$$

$\therefore (-4,\ 4)$

$\overline{BC}$를 $3:1$로 내분하는 점 E의 좌표는

$$\left(\frac{3\cdot(-2)+1\cdot(-6)}{3+1},\ \frac{3\cdot(-3)+1\cdot5}{3+1}\right)$$

$\therefore (-3,\ -1)$

$\overline{CA}$를 $3:1$로 내분하는 점 F의 좌표는

$$\left(\frac{3\cdot2+1\cdot(-2)}{3+1},\ \frac{3\cdot1+1\cdot(-3)}{3+1}\right)$$

$\therefore (1,\ 0)$

따라서 $\triangle DEF$의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{-4-3+1}{3},\ \frac{4-1+0}{3}\right) \quad \therefore (-2,\ 1)$$

답 $(-2,\ 1)$

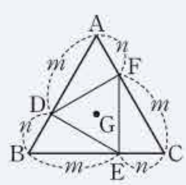
다른 풀이 $\triangle DEF$의 무게중심은 $\triangle ABC$의 무게중심과 일치하므로 구하는 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{2-6-2}{3},\ \frac{1+5-3}{3}\right) \quad \therefore (-2,\ 1)$$

쌤 한마디

삼각형의 무게중심의 성질

$\triangle ABC$의 세 변 AB, BC, CA를 $m:n(m>0,\ n>0)$으로 내분하는 점을 각각 D, E, F라 할 때, $\triangle ABC$와 $\triangle DEF$의 무게중심은 일치한다.



17 전략 평행사변형의 두 대각선의 중점은 일치함을 이용한다.

풀이 $C(x_1,\ y_1)$, $D(x_2,\ y_2)$라 하면 두 대각선 AC, BD의 교점은 각각 $\overline{AC}$, $\overline{BD}$의 중점과 일치한다. ···➊

$\overline{AC}$의 중점의 좌표는 $\left(\frac{-1+x_1}{2},\ \frac{3+y_1}{2}\right)$이므로

$$\frac{-1+x_1}{2}=3,\ \frac{3+y_1}{2}=\frac{3}{2}$$

$\therefore x_1=7,\ y_1=0$

$\therefore C(7,\ 0)$ ···➋

$\frac{-1+x_1}{2}=3$에서
$-1+x_1=6$
$\therefore x_1=7$
$\frac{3+y_1}{2}=\frac{3}{2}$에서
$3+y_1=3$
$\therefore y_1=0$

또 $\overline{BD}$의 중점의 좌표는 $\left(\frac{3+x_2}{2},\ \frac{-3+y_2}{2}\right)$이므로

$$\frac{3+x_2}{2}=3,\ \frac{-3+y_2}{2}=\frac{3}{2}$$

$\therefore x_2=3,\ y_2=6$

$\therefore D(3,\ 6)$ ···➌

답 $C(7,\ 0)$, $D(3,\ 6)$

단계	채점 기준	비율
➊	두 대각선 AC, BD의 교점은 각각 $\overline{AC}$, $\overline{BD}$의 중점과 일치함을 알 수 있다.	20 %
➋	점 C의 좌표를 구할 수 있다.	40 %
➌	점 D의 좌표를 구할 수 있다.	40 %

18 전략 $\overline{AC}$의 중점을 D라 하면 $\overline{AB}:\overline{BC}=\overline{AD}:\overline{CD}=1:1$임을 이용한다.

풀이 $\overline{AC}$의 중점을 D라 하면 $\overline{BD}$는 $\angle ABC$의 이등분선이므로

$$\overline{AB}:\overline{BC}=\overline{AD}:\overline{CD}=1:1$$

이때

$$\overline{AB}=\sqrt{(-3)^2+(-a)^2}=\sqrt{9+a^2},$$
$$\overline{BC}=\sqrt{(1+3)^2}=4$$

이므로

$$\sqrt{9+a^2}:4=1:1$$
$$\sqrt{9+a^2}=4$$

양변을 제곱하면

$$9+a^2=16,\quad a^2=7$$

$\therefore a=\sqrt{7}\ (\because a>0)$

답 ③

19 전략 높이가 같은 두 삼각형의 넓이의 비는 밑변의 길이의 비와 같음을 이용한다.

풀이 $\triangle ABD:\triangle ACD=p:q$에서

$$\overline{BD}:\overline{CD}=p:q$$

또 $\overline{AD}$는 $\angle A$의 이등분선이므로

$$\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{BD}:\overline{CD}$$

이때

$$\overline{AB}=\sqrt{(4+1)^2+(-5-7)^2}=13,$$
$$\overline{AC}=\sqrt{(5+1)^2+(-1-7)^2}=10$$

이므로

$$\overline{BD}:\overline{CD}=13:10$$

따라서 $p=13$, $q=10$이므로

$$p-q=3$$

답 ①

10 직선의 방정식

23 직선의 방정식

Lecture 43 직선의 방정식 134쪽

1-1 (1) $y-3=-2(x-1)$ $\quad\therefore y=-2x+5$

답 (1) $y=-2x+5$

(2) $y=5$ (3) $y=-9$

x축에 평행한 직선이다.

2-1 (1) $y-1=\dfrac{-1-1}{4-2}(x-2)$ $\quad\therefore y=-x+3$

(2) $y+3=\dfrac{-7+3}{-6+5}(x+5)$ $\quad\therefore y=4x+17$

답 (1) $y=-x+3$ (2) $y=4x+17$

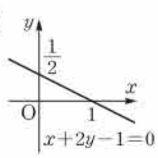
3-1 (2) x절편이 -2, y절편이 7이므로

$-\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{7}=1$

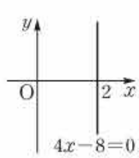
답 (1) $\dfrac{x}{5}+\dfrac{y}{3}=1$ (2) $-\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{7}=1$

Lecture 44 일차방정식 $ax+by+c=0$이 나타내는 도형 135쪽

1-1 답 (1)



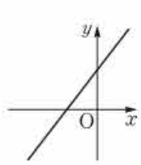
(2)



1-2 직선 $ax+by+c=0$에서 $b\neq0$이므로

$y=-\dfrac{a}{b}x-\dfrac{c}{b}$

이때 $-\dfrac{a}{b}>0$, $-\dfrac{c}{b}>0$이므로 주어진 직선의 기울기와 y절편은 모두 양수이다.



따라서 주어진 직선은 오른쪽 그림과 같이 제1사분면, 제2사분면, 제3사분면을 지난다.

답 제1사분면, 제2사분면, 제3사분면

2-1 (1) 주어진 직선이 항상 지나는 점은 두 직선

$x+y+3=0$, $x+2y-1=0$

의 교점이다.

위의 두 식을 연립하여 풀면

$x=-7$, $y=4$

따라서 구하는 점의 좌표는 $(-7, 4)$

$\begin{cases} x+y+3=0 & \cdots ㉠ \\ x+2y-1=0 & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠−㉡을 하면

$-y+4=0$

$\therefore y=4$

$y=4$를 ㉠에 대입하면

$x+7=0$

$\therefore x=-7$

(2) 주어진 직선이 항상 지나는 점은 두 직선

$2x-y+1=0$, $x+y-4=0$

의 교점이다.

위의 두 식을 연립하여 풀면

$x=1$, $y=3$

따라서 구하는 점의 좌표는 $(1, 3)$

답 (1) $(-7, 4)$ (2) $(1, 3)$

3-1 (1) 주어진 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식을

$x+y-6+k(x-2y+3)=0$ (k는 실수) $\cdots\cdots$ ㉠

으로 놓으면 직선 ㉠이 점 P(0, 0)을 지나므로

$-6+3k=0$ $\quad\therefore k=2$

$k=2$를 ㉠에 대입하면 구하는 직선의 방정식은

$x+y-6+2(x-2y+3)=0$

$\therefore x-y=0$

(2) 주어진 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식을

$x+2y+4+k(-3x+5y-7)=0$ (k는 실수) $\cdots\cdots$ ㉠

으로 놓으면 직선 ㉠이 점 P(−2, 1)을 지나므로

$4+4k=0$ $\quad\therefore k=-1$

$k=-1$을 ㉠에 대입하면 구하는 직선의 방정식은

$x+2y+4-(-3x+5y-7)=0$

$\therefore 4x-3y+11=0$

답 (1) $x-y=0$ (2) $4x-3y+11=0$

다른 풀이 (1) $x+y-6=0$, $x-2y+3=0$을 연립하여 풀면

$x=3$, $y=3$

즉 두 직선 $x+y-6=0$, $x-2y+3=0$의 교점의 좌표는

$(3, 3)$

따라서 두 점 (3, 3), P(0, 0)을 지나는 직선의 방정식은

$y=x$ $\quad\therefore x-y=0$

주어진 두 직선의 교점의 좌표를 구한 후 교점과 점 P를 지나는 직선의 방정식을 구할 수도 있다.

기본+표준 유형 Q+Q 136쪽

01 기울기가 −4이고 x절편이 5인 직선의 방정식은

$y-0=-4(x-5)$

$\therefore y=-4x+20$

따라서 $a=-4$, $b=20$이므로

$b-a=24$

답 ③

02 두 점 (−3, 2), (7, 6)을 잇는 선분의 중점의 좌표는 $\left(\dfrac{-3+7}{2}, \dfrac{2+6}{2}\right)$ $\quad\therefore (2, 4)$

따라서 점 $(2, 4)$를 지나고 기울기가 3인 직선의 방정식은

$y-4=3(x-2)$ $\quad\therefore y=3x-2$

답 $y=3x-2$

03 두 점 $(-5, 8)$, $(2, -6)$을 지나는 직선의 방정식은

$y-8=\dfrac{-6-8}{2+5}(x+5)$ $\quad\therefore y=-2x-2$

따라서 구하는 y절편은 -2이다.

답 -2

04 두 점 $(1, -2)$, $(-1, 4)$를 지나는 직선의 방정식은

$y+2=\dfrac{4+2}{-1-1}(x-1)$ $\quad\therefore y=-3x+1$

이 직선이 점 $(a, -4a-2)$를 지나므로

$-4a-2=-3a+1$ $\quad\therefore a=-3$

답 ③

05 x절편이 2, y절편이 5인 직선의 방정식은

$\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{5}=1$

이 직선이 점 $(4, a)$를 지나므로

$\dfrac{4}{2}+\dfrac{a}{5}=1$, $\quad\dfrac{a}{5}=-1$ $\quad\therefore a=-5$

답 ①

06 직선 $\dfrac{x}{3}-\dfrac{y}{2}=1$의 x절편이 3이므로

P$(3, 0)$

직선 $\dfrac{x}{7}+\dfrac{y}{4}=2$, 즉 $\dfrac{x}{14}+\dfrac{y}{8}=1$의 y절편이 8이므로

Q$(0, 8)$

따라서 직선 PQ의 방정식은

$\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{8}=1$

답 $\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{8}=1$

> 우변이 1이 되도록 양변을 2로 나눈다.

07 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으려면 직선 AB와 직선 BC의 기울기가 같아야 하므로

$\dfrac{2+1}{-1+3}=\dfrac{k-2}{1+1}$, $\quad k-2=3$

$\therefore k=5$

답 5

08 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으려면 직선 AC와 직선 BC의 기울기가 같아야 하므로

$\dfrac{(2k-1)-5}{-2+1}=\dfrac{11-5}{k+1}$, $\quad -2k+6=\dfrac{6}{k+1}$

$-2k^2+4k=0$, $\quad -2k(k-2)=0$

$\therefore k=2\ (\because k\neq0)$

답 ②

> $k=-1$이면
> A$(-2, -3)$,
> B$(-1, 11)$,
> C$(-1, 5)$
> 따라서 세 점 A, B, C는 한 직선 위에 있지 않다.
> $\therefore k\neq-1$

09 직선 l이 $\triangle$ABC의 넓이를 이등분하려면 $\overline{\text{BC}}$의 중점을 지나야 한다.

$\overline{\text{BC}}$의 중점의 좌표는

$\left(\dfrac{-2+4}{2}, \dfrac{-1+3}{2}\right)$ $\quad\therefore (1, 1)$

따라서 직선 l은 두 점 A$(-1, 5)$, $(1, 1)$을 지나므로 직선 l의 방정식은

$y-1=\dfrac{1-5}{1+1}(x-1)$

$\therefore y=-2x+3$

답 $y=-2x+3$

10 B$(1, 2)$, D$(3, 4)$이므로 $\overline{\text{BD}}$의 중점의 좌표는

$\left(\dfrac{1+3}{2}, \dfrac{2+4}{2}\right)$ $\quad\therefore (2, 3)$

> 정사각형의 넓이를 이등분하는 직선은 정사각형의 대각선의 중점을 지난다.

> A$(1, 4)$, C$(3, 2)$이므로 $\overline{\text{AC}}$의 중점의 좌표는
> $\left(\dfrac{1+3}{2}, \dfrac{4+2}{2}\right)$
> $\therefore (2, 3)$
> 따라서 두 대각선의 중점은 일치한다.

두 점 $(0, 0)$, $(2, 3)$을 지나는 직선의 방정식은

$y=\dfrac{3}{2}x$

따라서 이 직선이 점 $(k, -6)$을 지나므로

$\dfrac{3}{2}k=-6$ $\quad\therefore k=-4$

답 -4

11 $ac=0$에서 $\quad a=0$ 또는 $c=0$

그런데 $ab>0$에서 $a\neq0$이므로

$c=0$

따라서 직선 $ax+by+c=0$에서 $b\neq0$, $c=0$이므로

$y=-\dfrac{a}{b}x$

이때 $-\dfrac{a}{b}<0$이므로 직선 $ax+by+c=0$은 기울기가 음수이고 원점을 지난다.

> $ab>0$에서 $\dfrac{a}{b}>0$
> $\therefore -\dfrac{a}{b}<0$

따라서 주어진 직선의 개형은 ②와 같다.

답 ②

12 직선 $ax+by-c=0$에서 $b\neq0$이므로

$y=-\dfrac{a}{b}x+\dfrac{c}{b}$

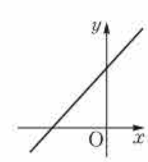
이때 $ac<0$, $bc>0$이므로 $\quad ab<0$

> a와 c의 부호가 다르고, b와 c의 부호가 같으므로 a와 b의 부호가 다르다.

$\therefore -\dfrac{a}{b}>0$, $\dfrac{c}{b}>0$

즉 직선 $ax+by-c=0$의 기울기와 y절편은 모두 양수이다.

따라서 주어진 직선은 오른쪽 그림과 같이 제4사분면을 지나지 않는다.



답 ④

13 주어진 식을 k에 대하여 정리하면

$(x-2y-3)k+(x+3y+7)=0$

이 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$x-2y-3=0$, $x+3y+7=0$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$x=-1$, $y=-2$

따라서 $a=-1$, $b=-2$이므로 $\quad ab=2$

답 ①

14 주어진 식을 k에 대하여 정리하면

$(2x+3y+1)k+(-2x+y+3)=0$

이 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$2x+3y+1=0,\ -2x+y+3=0$

위의 두 식을 연립하여 풀면　$x=1,\ y=-1$

따라서 $\mathrm{P}(1,\ -1)$이므로 기울기가 -5이고 점 P를 지나는 직선의 방정식은

$y+1=-5(x-1)$　$\therefore\ y=-5x+4$

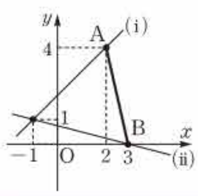
답 $y=-5x+4$

15 직선 $y=m(x+1)+1$에서

$m(x+1)-(y-1)=0$　…… ㉠

이므로 직선 ㉠은 m의 값에 관계없이 항상 점 $(-1,\ 1)$을 지난다.

오른쪽 그림에서



(i) 직선 ㉠이 점 A$(2,\ 4)$를 지날 때,

$3m-3=0$

$\therefore\ m=1$

㉠에 $x=2,\ y=4$를 대입한다.

(ii) 직선 ㉠이 점 B$(3,\ 0)$을 지날 때,

$4m+1=0$　$\therefore\ m=-\frac{1}{4}$

㉠에 $x=3,\ y=0$을 대입한다.

(i), (ii)에서 구하는 m의 값의 범위는

$-\frac{1}{4}\le m\le 1$

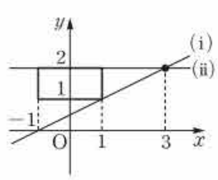
답 ②

16 직선 $m(x-3)-y+2=0$에서

$m(x-3)-(y-2)=0$　…… ㉠

이므로 직선 ㉠은 m의 값에 관계없이 항상 점 $(3,\ 2)$를 지난다.

오른쪽 그림에서



(i) 직선 ㉠이 점 $(1,\ 1)$을 지날 때,

$-2m+1=0$

$\therefore\ m=\frac{1}{2}$

㉠에 $x=1,\ y=1$을 대입한다.

(ii) 직선 ㉠이 점 $(1,\ 2)$를 지날 때,

$-2m=0$　$\therefore\ m=0$

㉠에 $x=1,\ y=2$를 대입한다.

(i), (ii)에서 m의 값의 범위는

$0\le m\le\frac{1}{2}$

따라서 m의 최댓값은 $\frac{1}{2}$, 최솟값은 0이므로 구하는 합은 $\frac{1}{2}$이다.

답 $\frac{1}{2}$

17 주어진 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식을

$3x-y+2+k(2x+3y-5)=0$ (k는 실수)　…… ㉠

으로 놓으면 직선 ㉠이 점 $(-1,\ 2)$를 지나므로

$-3-k=0$　$\therefore\ k=-3$

$k=-3$을 ㉠에 대입하면

$3x-y+2-3(2x+3y-5)=0$

$\therefore\ 3x+10y-17=0$

따라서 $a=3,\ b=10$이므로

$a+b=13$

답 13

다른 풀이 $3x-y+2=0,\ 2x+3y-5=0$을 연립하여 풀면　$x=-\frac{1}{11},\ y=\frac{19}{11}$

즉 두 직선 $3x-y+2=0,\ 2x+3y-5=0$의 교점의 좌표는

$\left(-\frac{1}{11},\ \frac{19}{11}\right)$

따라서 두 점 $\left(-\frac{1}{11},\ \frac{19}{11}\right)$, $(-1,\ 2)$를 지나는 직선의 방정식은

$$y-2=\frac{\frac{19}{11}-2}{-\frac{1}{11}+1}(x+1)$$

$\therefore\ 3x+10y-17=0$

18 주어진 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식을

$2x+5y+5+k(x-y+6)=0$ (k는 실수)　…… ㉠

으로 놓으면 직선 ㉠이 점 $(1,\ 4)$를 지나므로

$27+3k=0$　$\therefore\ k=-9$

$k=-9$를 ㉠에 대입하면

$2x+5y+5-9(x-y+6)=0$

$\therefore\ x-2y+7=0$

③ $0-2\cdot4+7\ne0$

답 ③

24 두 직선의 평행과 수직

Lecture 45 두 직선의 평행과 수직

139쪽

1-1 (1) $-2=k-3$이므로　$k=1$

(2) $\frac{1}{3}=\frac{4}{k+1}\ne\frac{-1}{6}$이므로 $\frac{1}{3}=\frac{4}{k+1}$에서

$k+1=12$　$\therefore\ k=11$

$\frac{4}{k+1}\ne\frac{-1}{6}$에서

$-k-1\ne24$

$\therefore\ k\ne-25$

답 (1) 1　(2) 11

1-2 (1) $-\frac{1}{7}k=-1$이므로　$k=7$

(2) $3(k-1)+k\cdot(-1)=0$이므로

$2k=3$　$\therefore\ k=\frac{3}{2}$

답 (1) 7　(2) $\frac{3}{2}$

2-1 직선 $y=2x+1$과 평행한 직선의 기울기는 2이다.

따라서 점 $(-1,\ 1)$을 지나고 기울기가 2인 직선의 방정식은

$y-1=2(x+1)$　$\therefore\ y=2x+3$

답 $y=2x+3$

2-2 직선 $x-5y=0$, 즉 $y=\frac{1}{5}x$에 수직인 직선의 기울기는 -5이다.
따라서 점 $(0, 4)$를 지나고 기울기가 -5인 직선의 방정식은
$$y-4=-5(x-0) \qquad \therefore y=-5x+4$$
답 $y=-5x+4$

> 수직인 직선의 기울기를 m이라 하면
> $\frac{1}{5}m=-1$
> $\therefore m=-5$

기본+표준 유형 Q+Q

140쪽

01 두 직선 $x+ay-3=0$, $2x+by-5=0$이 수직이므로
$$1\cdot2+a\cdot b=0$$
$$\therefore ab+2=0 \qquad \cdots\cdots ㉠$$
두 직선 $x+ay-3=0$, $x+(b+3)y=0$이 평행하므로
$$1=\frac{a}{b+3} \qquad \therefore a=b+3 \qquad \cdots\cdots ㉡$$
㉡을 ㉠에 대입하면
$$(b+3)b+2=0, \qquad b^2+3b+2=0$$
$$(b+2)(b+1)=0$$
$$\therefore b=-2 \text{ 또는 } b=-1$$
따라서 $a=1$, $b=-2$ 또는 $a=2$, $b=-1$이므로
$$|a+b|=1$$
답 1

02 두 직선 $(k+3)x+4y-6=0$, $kx-y+2=0$이 평행하려면
$$\frac{k+3}{k}=\frac{4}{-1}\neq\frac{-6}{2}$$
$$-k-3=4k \qquad \therefore k=-\frac{3}{5}$$
$$\therefore \alpha=-\frac{3}{5}$$
두 직선 $(k+3)x+4y-6=0$, $kx-y+2=0$이 수직이려면
$$(k+3)\cdot k+4\cdot(-1)=0$$
$$k^2+3k-4=0, \qquad (k+4)(k-1)=0$$
$$\therefore k=-4 \text{ 또는 } k=1$$
$$\therefore \beta=1\ (\because \beta>0)$$
$$\therefore \alpha+\beta=\frac{2}{5}$$
답 $\frac{2}{5}$

03 주어진 세 직선이 한 점에서 만나려면 직선 $ax-y+2=0$이 두 직선 $x+y-4=0$, $2x-y+1=0$의 교점을 지나야 한다.
$x+y-4=0$, $2x-y+1=0$을 연립하여 풀면
$$x=1, y=3$$
직선 $ax-y+2=0$이 점 $(1, 3)$을 지나므로
$$a-3+2=0 \qquad \therefore a=1$$
답 1

04 주어진 세 직선이 삼각형을 이루지 않는 경우는 다음과 같다.

> 두 직선 $y=2x+6$, $y=-x$가 평행하지 않으므로 세 직선이 모두 평행한 경우는 생각하지 않는다.

> 세 직선이 한 점에서 만나는 경우

(i) 직선 $y=kx+1$이 두 직선 $y=2x+6$, $y=-x$의 교점을 지날 때,
$y=2x+6$, $y=-x$를 연립하여 풀면
$$x=-2, y=2$$
따라서 직선 $y=kx+1$이 점 $(-2, 2)$를 지나야 하므로
$$2=-2k+1 \qquad \therefore k=-\frac{1}{2}$$

> 세 직선 중 두 직선이 평행한 경우

(ii) 직선 $y=kx+1$이 직선 $y=2x+6$ 또는 직선 $y=-x$와 평행할 때,
$$k=2 \text{ 또는 } k=-1$$
(i), (ii)에서 구하는 k의 값은
$$-1, -\frac{1}{2}, 2$$
답 $-1, -\frac{1}{2}, 2$

쌤 한마디

서로 다른 세 직선이 삼각형을 이루지 않는 경우는 다음과 같다.

① 세 직선이 한 점에서 만날 때
➡ 한 직선이 나머지 두 직선의 교점을 지난다.

② 세 직선 중 두 직선이 평행할 때
➡ 두 직선의 기울기는 같고, 나머지 한 직선의 기울기는 다르다.

③ 세 직선이 모두 평행할 때
➡ 세 직선의 기울기가 모두 같다.

05 두 점 $(-2, 2)$, $(1, a)$를 지나는 직선이 직선 $8x-ay-3=0$, 즉 $y=\frac{8}{a}x-\frac{3}{a}$과 평행하므로
$$\frac{a-2}{1+2}=\frac{8}{a}, \qquad a(a-2)=24$$
$$a^2-2a-24=0, \qquad (a+4)(a-6)=0$$
$$\therefore a=-4\ (\because a<0)$$
답 -4

06 직선 $x+4y-3=0$, 즉 $y=-\frac{1}{4}x+\frac{3}{4}$에 수직인 직선의 기울기는 4이다.

> 수직인 직선의 기울기를 m이라 하면
> $-\frac{1}{4}m=-1$
> $\therefore m=4$

따라서 점 $(2, 5)$를 지나고 기울기가 4인 직선의 방정식은
$$y-5=4(x-2) \qquad \therefore y=4x-3$$
이 직선이 점 $(a, -11)$을 지나므로
$$-11=4a-3 \qquad \therefore a=-2$$
답 ②

다른 풀이 두 점 $(2, 5)$, $(a, -11)$을 지나는 직선이 직선 $x+4y-3=0$, 즉 $y=-\frac{1}{4}x+\frac{3}{4}$에 수직이므로
$$\frac{-11-5}{a-2}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)=-1$$
$$\frac{4}{a-2}=-1, \qquad a-2=-4$$
$$\therefore a=-2$$

07 $\overline{AB}$의 중점의 좌표는

$\left(\frac{-1+3}{2}, \frac{4+6}{2}\right)$　　$\therefore (1, 5)$

직선 AB의 기울기는　$\frac{6-4}{3+1}=\frac{1}{2}$

따라서 $\overline{AB}$의 수직이등분선은 점 $(1, 5)$를 지나고 기울기가 -2인 직선이므로 수직이등분선의 방정식은

$y-5=-2(x-1)$　　$\therefore 2x+y=7$

따라서 $a=2$, $b=1$이므로

$a-b=1$　　　　답 1

08 $\overline{AB}$의 중점의 좌표는

$\left(\frac{-4+2}{2}, \frac{5+3}{2}\right)$　　$\therefore (-1, 4)$

직선 AB의 기울기는　$\frac{3-5}{2+4}=-\frac{1}{3}$

따라서 $\overline{AB}$의 수직이등분선은 점 $(-1, 4)$를 지나고 기울기가 3인 직선이므로 수직이등분선의 방정식은

$y-4=3(x+1)$　　$\therefore y=3x+7$

이 직선이 점 $(a, 4)$를 지나므로

$4=3a+7$　　$\therefore a=-1$

답 ②

25 점과 직선 사이의 거리

Lecture 46 점과 직선 사이의 거리

141쪽

1-1 (1) $\frac{|2\cdot3+1\cdot2-3|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\sqrt{5}$

(2) 점 $(-2, 4)$와 직선 $y=-x+6$, 즉 $x+y-6=0$ 사이의 거리는

$\frac{|1\cdot(-2)+1\cdot4-6|}{\sqrt{1^2+1^2}}=2\sqrt{2}$

답 (1) $\sqrt{5}$　(2) $2\sqrt{2}$

1-2 $\frac{|3\cdot1-4\cdot(-3)+k|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=2$이므로

$|k+15|=10$

$k+15=-10$ 또는 $k+15=10$

$\therefore k=-25$ 또는 $k=-5$

답 -25, -5

$|A|=B$
$\Rightarrow A=B$ 또는 $A=-B$

2-1 (1) 주어진 두 직선이 평행하므로 두 직선 사이의 거리는 직선 $x-2y=0$ 위의 한 점 $(0, 0)$과 직선 $x-2y-10=0$ 사이의 거리와 같다.

$\frac{1}{1}=\frac{-2}{-2}\neq\frac{0}{-10}$

따라서 구하는 거리는

$\frac{|-10|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=2\sqrt{5}$

(2) 주어진 두 직선이 평행하므로 두 직선 사이의 거리는 직선 $y=-3x+1$ 위의 한 점 $(0, 1)$과 직선 $y=-3x-9$, 즉 $3x+y+9=0$ 사이의 거리와 같다.

기울기가 -3으로 같고, y절편이 각각 1, -9로 다르다.

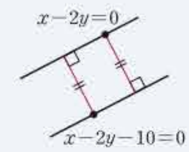
따라서 구하는 거리는

$\frac{|3\cdot0+1\cdot1+9|}{\sqrt{3^2+1^2}}=\sqrt{10}$

답 (1) $2\sqrt{5}$　(2) $\sqrt{10}$

쌤 한마디

(1)에서 직선 $x-2y-10=0$ 위의 한 점과 직선 $x-2y=0$ 사이의 거리를 구해도 그 결과는 같다.



2-2 주어진 두 직선이 평행하므로 두 직선 사이의 거리는 직선 $\frac{1}{3}x+y-1=0$ 위의 한 점 $(0, 1)$과 직선 $x+3y-8=0$ 사이의 거리와 같다.

$\frac{\frac{1}{3}}{1}=\frac{1}{3}\neq\frac{-1}{-8}$

따라서 구하는 거리는

$\frac{|1\cdot0+3\cdot1-8|}{\sqrt{1^2+3^2}}=\frac{\sqrt{10}}{2}$　　　답 $\frac{\sqrt{10}}{2}$

기본+표준 유형 Q+Q

142쪽

01 두 점 $(-1, 4)$, $(3, -2)$를 지나는 직선의 방정식은

$y-4=\frac{-2-4}{3+1}(x+1)$　　$\therefore 3x+2y-5=0$

따라서 점 $(4, 3)$과 직선 $3x+2y-5=0$ 사이의 거리는

$\frac{|3\cdot4+2\cdot3-5|}{\sqrt{3^2+2^2}}=\sqrt{13}$　　　답 $\sqrt{13}$

02 점 $(0, k)$에서 두 직선 $4x-y-1=0$, $x+4y+2=0$에 이르는 거리가 같으므로

$\frac{|4\cdot0-1\cdot k-1|}{\sqrt{4^2+(-1)^2}}=\frac{|1\cdot0+4\cdot k+2|}{\sqrt{1^2+4^2}}$

$|-k-1|=|4k+2|$

$-k-1=4k+2$ 또는 $-k-1=-(4k+2)$

$\therefore k=-\frac{3}{5}$ 또는 $k=-\frac{1}{3}$

따라서 모든 k의 값의 곱은　$\frac{1}{5}$　　　답 $\frac{1}{5}$

03 $\overline{AB}=\sqrt{(3+1)^2+(7-1)^2}=2\sqrt{13}$

직선 AB의 방정식은

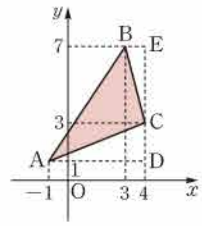
$y-1=\frac{7-1}{3+1}(x+1)$　　$\therefore 3x-2y+5=0$

점 C와 직선 AB 사이의 거리는

$\frac{|3\cdot4-2\cdot3+5|}{\sqrt{3^2+(-2)^2}}=\frac{11\sqrt{13}}{13}$

$\therefore \triangle ABC=\frac{1}{2}\cdot2\sqrt{13}\cdot\frac{11\sqrt{13}}{13}=11$　　　답 11

다른 풀이 오른쪽 그림에서



$\triangle ABC$
$=\square ADEB-\triangle BCE-\triangle ADC$
$=\frac{1}{2}\cdot(1+5)\cdot 6$
$\quad -\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 4-\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 2$
$=18-2-5$
$=11$

04 $\overline{AB}=\sqrt{3^2+6^2}=3\sqrt{5}$

직선 AB의 방정식은

$$-\frac{x}{3}+\frac{y}{6}=1 \qquad \therefore 2x-y+6=0$$

x절편이 -3, y절편이 6인 직선의 방정식

점 C와 직선 AB 사이의 거리는

$$\frac{|2\cdot 3-1\cdot a+6|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{|12-a|}{\sqrt{5}}$$

$\triangle ABC$의 넓이가 15이므로

$$\frac{1}{2}\cdot 3\sqrt{5}\cdot\frac{|12-a|}{\sqrt{5}}=15, \qquad |12-a|=10$$

$12-a=-10$ 또는 $12-a=10$

$\therefore a=22$ 또는 $a=2$

따라서 구하는 모든 a의 값의 합은

$22+2=24$

답 ③

05 주어진 두 직선이 평행하므로 직선 $7x+y+6=0$ 위의 한 점 $(0, -6)$과 직선 $7x+y+a=0$ 사이의 거리가 $\sqrt{2}$이다.

$$\frac{|7\cdot 0+1\cdot(-6)+a|}{\sqrt{7^2+1^2}}=\sqrt{2}, \qquad |a-6|=10$$

$a-6=-10$ 또는 $a-6=10$

$\therefore a=-4$ 또는 $a=16$

그런데 $a>0$이므로

$a=16$

답 ②

06 두 직선 $6x+(k-1)y+1=0$, $2x-3y-4=0$이 평행하므로

$$\frac{6}{2}=\frac{k-1}{-3}\neq\frac{1}{-4}$$

$k-1=-9 \qquad \therefore k=-8$

$\frac{k-1}{-3}\neq\frac{1}{-4}$에서
$-4k+4\neq -3$
$-4k\neq -7$
$\therefore k\neq\frac{7}{4}$

따라서 직선 $2x-3y-4=0$ 위의 한 점 $(2, 0)$과 직선 $6x-9y+1=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|6\cdot 2-9\cdot 0+1|}{\sqrt{6^2+(-9)^2}}=\frac{\sqrt{13}}{3}$$

답 $\frac{\sqrt{13}}{3}$

07 점 $P(x, y)$에서 두 직선에 이르는 거리가 같으므로

$$\frac{|x+3y-2|}{\sqrt{1^2+3^2}}=\frac{|3x+y+2|}{\sqrt{3^2+1^2}}$$

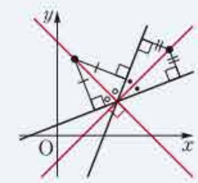
$|x+3y-2|=|3x+y+2|$

$x+3y-2=\pm(3x+y+2)$

$\therefore x+y=0$ 또는 $x-y+2=0$

답 $x+y=0$ 또는 $x-y+2=0$

쌤 한마디



오른쪽 그림과 같이 한 점에서 만나는 두 직선으로부터 같은 거리에 있는 점이 나타내는 도형은 두 직선이 이루는 각의 이등분선이다. 이때 두 직선이 한 점에서 만나면 두 쌍의 맞꼭지각이 생기므로 두 직선으로부터 같은 거리에 있는 점이 나타내는 도형은 서로 수직인 두 개의 직선이다.

08 점 P의 좌표를 (x, y)라 하면 $\overline{PA}=\overline{PB}$이므로

$$\sqrt{(x+2)^2+(y-1)^2}=\sqrt{(x-3)^2+(y-4)^2}$$

양변을 제곱하면

$(x+2)^2+(y-1)^2=(x-3)^2+(y-4)^2$

$x^2+4x+4+y^2-2y+1=x^2-6x+9+y^2-8y+16$

$\therefore 5x+3y-10=0$

따라서 직선 $5x+3y-10=0$과 점 $(7, 3)$ 사이의 거리는

$$\frac{|5\cdot 7+3\cdot 3-10|}{\sqrt{5^2+3^2}}=\sqrt{34}$$

답 ③

중단원 마무리

143쪽

01 **전략** 점 (x_1, y_1)을 지나고 x축에 수직인 직선의 방정식은 $x=x_1$임을 이용한다.

풀이 점 $(-4, 5)$를 지나고 x축에 수직인 직선의 방정식은

y축에 평행한 직선이다.

$x=-4 \qquad \therefore x+4=0$

이 방정식이 $x+ay+b=0$과 같으므로

$a=0$, $b=4$

$\therefore a+b=4$

답 ④

02 **전략** 두 점 (x_1, y_1), (x_2, y_2)를 지나는 직선의 방정식은 $y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$ $(x_1\neq x_2)$임을 이용한다.

풀이 두 점 $(-2, -3)$, $(2, 5)$를 지나는 직선의 방정식은

$$y+3=\frac{5+3}{2+2}(x+2)$$

$\therefore y=2x+1$

이 직선이 점 $(a, 7)$을 지나므로

$7=2a+1 \qquad \therefore a=3$

답 3

03 **전략** 세 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$을 꼭짓점으로 하는 $\triangle ABC$의 무게중심의 좌표는 $\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$임을 이용한다.

풀이 △ABC의 무게중심 G의 좌표는

$\left(\frac{-2-5+1}{3}, \frac{9-4+7}{3}\right)$ $\quad\therefore (-2, 4)$ ⋯ ❶

따라서 직선 CG의 방정식은

$y-7=\frac{7-4}{1+2}(x-1)$ $\quad\therefore y=x+6$ ⋯ ❷

답 $y=x+6$

단계	채점 기준	비율
❶	무게중심 G의 좌표를 구할 수 있다.	30 %
❷	직선 CG의 방정식을 구할 수 있다.	70 %

04 **전략** x절편이 m, y절편이 n인 직선의 방정식은 $\frac{x}{m}+\frac{y}{n}=1$ $(m\neq0, n\neq0)$임을 이용한다.

풀이 y절편을 a $(a\neq0)$라 하면 x절편은 $3a$이므로 직선 l의 방정식은

$\frac{x}{3a}+\frac{y}{a}=1$

이 직선이 점 $(9, -1)$을 지나므로

$\frac{9}{3a}+\frac{-1}{a}=1, \quad \frac{2}{a}=1 \quad \therefore a=2$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$\frac{x}{6}+\frac{y}{2}=1$

답 $\frac{x}{6}+\frac{y}{2}=1$

05 **전략** 서로 다른 세 점이 한 직선 위에 있으려면 어느 두 점을 지나는 두 직선의 기울기가 같아야 함을 이용한다.

풀이 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으려면 직선 AB와 직선 BC의 기울기가 같아야 하므로

$\frac{1-a}{1+1}=\frac{-7-1}{a-1}, \quad \frac{1-a}{2}=\frac{-8}{a-1}$

$(1-a)(a-1)=-16, \quad a^2-2a-15=0$

$(a+3)(a-5)=0$

$\therefore a=-3$ 또는 $a=5$

그런데 $a>0$이므로 $\quad a=5$

답 ①

06 **전략** 직사각형의 넓이를 이등분하는 직선은 직사각형의 두 대각선의 교점을 지남을 이용한다.

풀이 직사각형의 넓이를 이등분하는 직선은 직사각형의 두 대각선의 교점을 지난다.

□OABC의 두 대각선의 교점은 $\overline{\mathrm{OB}}$의 중점과 같고 B(6, 5)이므로 그 좌표는

직사각형의 두 대각선은 서로를 이등분한다.

$\left(\frac{0+6}{2}, \frac{0+5}{2}\right)$, 즉 $\left(3, \frac{5}{2}\right)$

□FADE의 두 대각선의 교점은 $\overline{\mathrm{DF}}$의 중점과 같고 D(6, 3), F(4, 0)이므로 그 좌표는

$\left(\frac{6+4}{2}, \frac{3+0}{2}\right)$, 즉 $\left(5, \frac{3}{2}\right)$

따라서 □OABC, □FADE의 넓이를 모두 이등분하는 직선 l은 두 점 $\left(3, \frac{5}{2}\right)$, $\left(5, \frac{3}{2}\right)$을 지나므로 직선 l의 기울기는

$\frac{\frac{3}{2}-\frac{5}{2}}{5-3}=-\frac{1}{2}$

답 ③

07 **전략** 주어진 그림에서 직선의 기울기와 y절편이 모두 음수임을 이용한다.

풀이 직선 $ax+by+c=0$, 즉 $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$의 기울기와 y절편이 모두 음수이므로

$-\frac{a}{b}<0, \; -\frac{c}{b}<0$

즉 $ab>0$, $bc>0$이므로

a와 b의 부호가 같고, b와 c의 부호가 같으므로 a와 c의 부호가 같다.

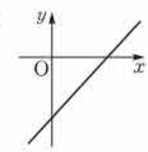
$ac>0$

직선 $bx-cy-a=0$에서 $c\neq0$이므로

$y=\frac{b}{c}x-\frac{a}{c}$

이때 $\frac{b}{c}>0$, $-\frac{a}{c}<0$이므로 직선 $bx-cy-a=0$의 기울기는 양수이고 y절편은 음수이다.

따라서 직선 $bx-cy-a=0$의 개형은 오른쪽 그림과 같이 제2사분면을 지나지 않는다.



답 제2사분면

08 **전략** 직선 $ax+by+c+k(a'x+b'y+c')=0$은 실수 k의 값에 관계없이 항상 두 직선 $ax+by+c=0$, $a'x+b'y+c'=0$의 교점을 지남을 이용한다.

풀이 주어진 식을 k에 대하여 정리하면

$(2x+y+5)k+(x-y+4)=0$

이 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$2x+y+5=0, \; x-y+4=0$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$x=-3, \; y=1$

$\begin{cases} 2x+y+5=0 & \cdots ㉠ \\ x-y+4=0 & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠+㉡을 하면

$3x+9=0$

$\therefore x=-3$

$x=-3$을 ㉠에 대입하면

$y-1=0$

$\therefore y=1$

따라서 점 P$(-3, 1)$이므로 점 P와 원점 사이의 거리는

$\sqrt{(-3)^2+1^2}=\sqrt{10}$

답 $\sqrt{10}$

09 **전략** 먼저 주어진 직선이 m의 값에 관계없이 항상 지나는 점의 좌표를 구한 후 이 직선이 제3사분면을 지나지 않도록 좌표평면 위에 나타내어 본다.

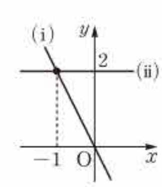
풀이 직선 $(m+1)x+y+m-1=0$에서

$(x+1)m+(x+y-1)=0$ ⋯⋯ ㉠

$x+1=0$, $x+y-1=0$에서 $\quad x=-1, \; y=2$

즉 직선 ㉠은 m의 값에 관계없이 항상 점 $(-1, 2)$를 지난다.

오른쪽 그림에서



(i) 직선 ㉠이 원점을 지날 때,

$m-1=0 \quad \therefore m=1$

(ii) 직선 ㉠이 x축에 평행할 때,

직선 ㉠이 점 $(0, 2)$를 지난다.

$m+1=0 \quad \therefore m=-1$

(i), (ii)에서 m의 값의 범위는

$-1\leq m\leq1$

따라서 정수 m은 $-1, 0, 1$의 3개이다.

답 3

10 전략 두 직선 $ax+by+c=0$, $a'x+b'y+c'=0$의 교점을 지나는 직선의 방정식은
$ax+by+c+k(a'x+b'y+c')=0$ (k는 실수)임을 이용한다.

풀이 주어진 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식을

$x-2y+2+k(2x+y-6)=0$ (k는 실수) ...... ㉠

으로 놓으면 직선 ㉠이 점 $(4, 0)$을 지나므로

$6+2k=0$ $\quad\therefore k=-3$

$k=-3$을 ㉠에 대입하면

$-5x-5y+20=0$

$\therefore x+y-4=0$

따라서 구하는 y절편은 4이다. 답 ④

11 전략 두 직선이 서로 평행할 때와 수직일 때의 조건을 생각한다.

풀이 두 직선 $ax-y+2=0$, $(b+4)x+y-1=0$이 평행하므로

$\frac{a}{b+4}=\frac{-1}{1}\neq\frac{2}{-1}$, $\quad a=-b-4$

$\therefore a+b=-4$ ⋯ ❶

두 직선 $ax-y+2=0$, $bx+3y-1=0$이 수직이므로

$a\cdot b+(-1)\cdot 3=0$

$\therefore ab=3$ ⋯ ❷

$\therefore a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$

$=(-4)^2-2\cdot 3$

$=10$ ⋯ ❸

답 10

단계	채점 기준	비율
❶	$a+b$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷	ab의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸	a^2+b^2의 값을 구할 수 있다.	20 %

다른 풀이 두 직선 $ax-y+2=0$, $(b+4)x+y-1=0$이 평행하므로

$\frac{a}{b+4}=\frac{-1}{1}\neq\frac{2}{-1}$

$\therefore a=-b-4$ ...... ㉠

두 직선 $ax-y+2=0$, $bx+3y-1=0$이 수직이므로

$ab=3$ ...... ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$(-b-4)b=3$, $\quad b^2+4b+3=0$

$(b+3)(b+1)=0$ $\quad\therefore b=-3$ 또는 $b=-1$

따라서 $a=-1$, $b=-3$ 또는 $a=-3$, $b=-1$이므로

$a^2+b^2=10$

12 전략 세 직선으로 둘러싸인 도형이 직각삼각형이 되려면 세 직선 중 어느 두 직선이 수직이어야 함을 이용한다.

풀이 주어진 세 직선으로 둘러싸인 도형이 직각삼각형이 되려면 세 직선 중 어느 두 직선이 수직이어야 한다.

(i) 두 직선 $5x-2y+1=0$, $ax+y-3=0$이 수직일 때,

$5a-2=0$ $\quad\therefore a=\frac{2}{5}$

(ii) 두 직선 $x-4y+2=0$, $ax+y-3=0$이 수직일 때,

$a-4=0$ $\quad\therefore a=4$

(i), (ii)에서 정수 a의 값은 4이다. 답 ④

쌤 한마디

두 직선 $5x-2y+1=0$, $x-4y+2=0$은 수직이 아니므로 (i), (ii)의 경우만 생각한다.

13 전략 기울기가 m, y절편이 n인 직선과 y축에서 수직으로 만나는 직선의 방정식은 $y=-\frac{1}{m}x+n$임을 이용한다.

풀이 직선 $(3k+2)x-y+2=0$, 즉 $y=(3k+2)x+2$의 기울기는 $3k+2$, y절편은 2이므로 이 직선과 y축에서 수직으로 만나는 직선의 방정식은

(수직으로 만나는 직선의 기울기는 $-\frac{1}{3k+2}$이다.)

$y=-\frac{1}{3k+2}x+2$

이 직선이 점 $(1, 0)$을 지나므로

$0=-\frac{1}{3k+2}+2$, $\quad\frac{1}{3k+2}=2$

$6k+4=1$ $\quad\therefore k=-\frac{1}{2}$ 답 ②

14 전략 직선 AH는 점 $(2, 1)$을 지나고 직선 $y=-x+7$과 수직임을 이용한다.

풀이 직선 $y=-x+7$에 수직인 직선 AH의 기울기는 1이므로 직선 AH의 방정식은

(기울기가 1이고 점 $(2, 1)$을 지나는 직선)

$y-1=x-2$ $\quad\therefore y=x-1$

점 H는 두 직선 $y=-x+7$, $y=x-1$의 교점이므로 두 직선의 방정식을 연립하여 풀면

$x=4$, $y=3$

($-x+7=x-1$에서 $-2x=-8$ $\therefore x=4$ / $x=4$를 $y=-x+7$에 대입하면 $y=3$)

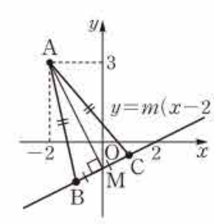
따라서 점 H의 좌표는

$(4, 3)$ 답 $(4, 3)$

15 전략 $\overline{BC}$의 중점을 M이라 하면 직선 AM은 $\overline{BC}$의 수직이등분선임을 이용한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 $\overline{BC}$의 중점을 M이라 하면 점 M은 y축 위에 있고, △ABC가 $\overline{AB}=\overline{AC}$인 이등변삼각형이므로 직선 AM은 $\overline{BC}$의 수직이등분선이다.

(이등변삼각형에서 꼭짓점과 밑변의 중점을 이은 직선은 밑변과 수직이다.)



이때 직선 BC의 기울기가 m이므로 직선 AM의 기울기는 $-\frac{1}{m}$이다.

따라서 점 A$(-2, 3)$을 지나고 기울기가 $-\frac{1}{m}$인 직선 AM의 방정식은

$y-3=-\frac{1}{m}(x+2)$

$\therefore y=-\frac{1}{m}x-\frac{2}{m}+3$

두 직선 AM, BC의 y절편은 각각 $-\frac{2}{m}+3$, $-2m$이므로

$-\frac{2}{m}+3=-2m$, $\quad 2m^2+3m-2=0$

$(m+2)(2m-1)=0$

$\therefore m=-2$ 또는 $m=\frac{1}{2}$

그런데 $m>0$이므로 $\quad m=\frac{1}{2}$

답 ③

QBOX

직선 $y=m(x-2)$, 즉 $y=mx-2m$의 y절편은 $-2m$이다.

$\frac{2}{3}x-y=1$에서

$2x-3y=3$

$\therefore 2x-3y-3=0$

풀이 두 직선 $2x-3y-3=0$, $2x-3y+10=0$에서

$\frac{2}{2}=\frac{-3}{-3}\neq\frac{-3}{10}$

이므로 두 직선은 평행하다.

따라서 직선 $\frac{2}{3}x-y=1$ 위의 한 점 $(0, -1)$과 직선 $2x-3y+10=0$ 사이의 거리는

$\frac{|2\cdot 0-3\cdot(-1)+10|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}}=\sqrt{13}$

답 ④

16 **전략** 주어진 직선의 기울기를 구한 후 점과 직선 사이의 거리 공식을 이용한다.

풀이 직선 $3x+y-2=0$, 즉 $y=-3x+2$의 기울기는 -3이다.

구하는 직선의 방정식을 $y=-3x+k$라 하면 원점과 직선 $y=-3x+k$, 즉 $3x+y-k=0$ 사이의 거리가 $3\sqrt{10}$이므로

$\frac{|-k|}{\sqrt{3^2+1^2}}=3\sqrt{10}$, $\quad |k|=30$

$\therefore k=-30$ 또는 $k=30$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$y=-3x-30$ 또는 $y=-3x+30$

답 $y=-3x-30$, $y=-3x+30$

17 **전략** 먼저 직선 $y=-x+4$와 두 직선 $y=\frac{1}{3}x$, $y=x$의 교점의 좌표를 각각 구한다.

풀이 두 직선 $y=\frac{1}{3}x$, $y=-x+4$의 교점을 A라 하면

A$(3, 1)$

$\therefore \overline{OA}=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$ ··· ❶

두 직선 $y=-x+4$, $y=x$의 교점을 B라 하면

B$(2, 2)$

점 B$(2, 2)$와 직선 $y=\frac{1}{3}x$, 즉 $x-3y=0$ 사이의 거리는

$\frac{|1\cdot 2-3\cdot 2|}{\sqrt{1^2+(-3)^2}}=\frac{2\sqrt{10}}{5}$ ··· ❷

$\therefore \triangle OAB=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{10}\cdot\frac{2\sqrt{10}}{5}=2$ ··· ❸

답 2

단계	채점 기준	비율
❶	$\overline{OA}$의 길이를 구할 수 있다.	30 %
❷	점 B와 직선 $y=\frac{1}{3}x$ 사이의 거리를 구할 수 있다.	50 %
❸	$\triangle$OAB의 넓이를 구할 수 있다.	20 %

QBOX

$\frac{1}{3}x=-x+4$에서

$\frac{4}{3}x=4 \quad \therefore x=3$

$x=3$을 $y=\frac{1}{3}x$에 대입하면 $\quad y=1$

$-x+4=x$에서

$-2x=-4$

$\therefore x=2$

$x=2$를 $y=x$에 대입하면 $\quad y=2$

직선 OA

18 **전략** 평행한 두 직선 사이의 거리는 한 직선 위의 점과 나머지 직선 사이의 거리를 이용하여 구한다.

19 **전략** 두 직선이 이루는 각의 이등분선 위의 점에서 두 직선에 이르는 거리는 같음을 이용한다.

풀이 두 직선이 이루는 각의 이등분선 위의 점을 P(x, y)라 하면 점 P에서 두 직선에 이르는 거리가 같으므로

$\frac{|2x+5y-8|}{\sqrt{2^2+5^2}}=\frac{|5x-2y+6|}{\sqrt{5^2+(-2)^2}}$

$|2x+5y-8|=|5x-2y+6|$

$2x+5y-8=\pm(5x-2y+6)$

$\therefore 7x+3y-2=0$ 또는 $3x-7y+14=0$

따라서 주어진 두 직선이 이루는 각을 이등분하는 직선의 방정식은 ㄱ, ㄹ이다.

답 ③

11 원의 방정식

26 원의 방정식

Lecture 47 원의 방정식

146쪽

1-1 답 (1) $(x-2)^2+(y+3)^2=1$
(2) $(x-4)^2+y^2=8$
(3) $x^2+y^2=25$

1-2 두 점 $(-1, 2)$, $(3, 5)$ 사이의 거리는
$\sqrt{(3+1)^2+(5-2)^2}=5$
이므로 구하는 원의 방정식은
$(x+1)^2+(y-2)^2=25$
답 $(x+1)^2+(y-2)^2=25$

원의 중심인 점 $(-1, 2)$와 원 위의 점 $(3, 5)$ 사이의 거리는 원의 반지름의 길이와 같다.

2-1 답 (1) $(x-1)^2+(y-4)^2=16$
(2) $(x-3)^2+(y+5)^2=9$
(3) $(x+2)^2+(y-2)^2=4$

2-2 (1) 중심의 좌표가 $(3, 3)$이므로 원의 방정식은
$(x-3)^2+(y-3)^2=9$
(2) 중심의 좌표가 $(-3, 3)$이므로 원의 방정식은
$(x+3)^2+(y-3)^2=9$
(3) 중심의 좌표가 $(-3, -3)$이므로 원의 방정식은
$(x+3)^2+(y+3)^2=9$
(4) 중심의 좌표가 $(3, -3)$이므로 원의 방정식은
$(x-3)^2+(y+3)^2=9$

(x좌표)>0, (y좌표)>0
(x좌표)<0, (y좌표)>0
(x좌표)<0, (y좌표)<0
(x좌표)>0, (y좌표)<0

답 (1) $(x-3)^2+(y-3)^2=9$
(2) $(x+3)^2+(y-3)^2=9$
(3) $(x+3)^2+(y+3)^2=9$
(4) $(x-3)^2+(y+3)^2=9$

Lecture 48 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$이 나타내는 도형

147쪽

1-1 (1) $x^2+y^2-2x-3=0$에서
$(x^2-2x+1)+y^2=4$
$\therefore (x-1)^2+y^2=4$
따라서 주어진 방정식은 중심이 점 $(1, 0)$이고 반지름의 길이가 2인 원을 나타낸다.
(2) $x^2+y^2+8x-6y+9=0$에서
$(x^2+8x+16)+(y^2-6y+9)=16$
$\therefore (x+4)^2+(y-3)^2=16$
따라서 주어진 방정식은 중심이 점 $(-4, 3)$이고 반지름의 길이가 4인 원을 나타낸다.
답 풀이 참조

1-2 $x^2+y^2+10x+k=0$에서
$(x^2+10x+25)+y^2=-k+25$
$\therefore (x+5)^2+y^2=-k+25$
이 방정식이 원을 나타내려면
$-k+25>0$ $\quad\therefore k<25$
답 $k<25$

쌤 한마디

$x^2+y^2+Ax+By+C=0$이 나타내는 도형
$x^2+y^2+Ax+By+C=0$에서
$$\left(x+\frac{A}{2}\right)^2+\left(y+\frac{B}{2}\right)^2=\frac{A^2+B^2-4C}{4}$$
① $A^2+B^2-4C>0$ ⇨ 원
② $A^2+B^2-4C=0$ ⇨ 점
③ $A^2+B^2-4C<0$
⇨ 식을 만족시키는 실수 x, y가 존재하지 않는다.

2-1 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은
$x^2+y^2-1-(x^2+y^2-2x-2y-2)=0$
$\therefore 2x+2y+1=0$
답 $2x+2y+1=0$

두 원의 공통인 현의 방정식

2-2 두 원의 공통인 현의 방정식은
$x^2+y^2+2x+6y+9-(x^2+y^2-4x+8y+11)=0$
$\therefore 3x-y-1=0$
답 $3x-y-1=0$

기본+표준 유형 Q+Q

148쪽

01 원 $(x-1)^2+(y+3)^2=6$의 중심의 좌표는
$(1, -3)$
두 점 $(1, -3)$, $(1, -2)$ 사이의 거리는
$|-2-(-3)|=1$
따라서 원의 방정식은
$(x-1)^2+(y+3)^2=1$
이고 이 원이 점 $(0, a)$를 지나므로
$(0-1)^2+(a+3)^2=1$, $\quad (a+3)^2=0$
$\therefore a=-3$
답 ③

다른 풀이 원 $(x-1)^2+(y+3)^2=6$의 중심의 좌표는
$(1, -3)$
따라서 중심이 점 $(1, -3)$인 원이 두 점 $(1, -2)$, $(0, a)$를 지나므로
$\sqrt{(1-1)^2+(-2+3)^2}=\sqrt{(0-1)^2+(a+3)^2}$
양변을 제곱하여 정리하면
$(a+3)^2=0$ $\quad\therefore a=-3$

02 직선 $\frac{x}{2}+\frac{y}{5}=1$이 x축, y축과 만나는 점의 좌표는 각각
$(2, 0)$, $(0, 5)$
이 두 점 사이의 거리는
$\sqrt{(0-2)^2+(5-0)^2}=\sqrt{29}$

x절편이 a, y절편이 b인 직선의 방정식은
$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$
(단, $a\neq0$, $b\neq0$)

따라서 구하는 원의 방정식은

$(x-2)^2+y^2=29$ 　　답 $(x-2)^2+y^2=29$

03 원의 중심이 x축 위에 있으므로 　$b=0$

원 $(x-a)^2+y^2=c$가 점 $(1, 3)$을 지나므로

$(1-a)^2+3^2=c$

$\therefore a^2-2a+10=c$ 　…… ㉠

또 원이 점 $(6, -2)$를 지나므로

$(6-a)^2+(-2)^2=c$

$\therefore a^2-12a+40=c$ 　…… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=3, c=13$

$\therefore a+b+c=16$ 　　답 16

다른 풀이 원의 중심을 $A(a, 0)$이라 하고 $B(1, 3)$, $C(6, -2)$라 하면 $\overline{AB}=\overline{AC}$이므로

$\sqrt{(1-a)^2+3^2}=\sqrt{(6-a)^2+(-2)^2}$

양변을 제곱하여 정리하면

$10a=30$ 　$\therefore a=3$

따라서 원의 중심은 $A(3, 0)$이고 반지름의 길이는

$\overline{AB}=\sqrt{(1-3)^2+3^2}=\sqrt{13}$

이므로 원의 방정식은

$(x-3)^2+y^2=13$

따라서 $a=3$, $b=0$, $c=13$이므로 　$a+b+c=16$

04 원의 중심의 좌표를 (a, a), 반지름의 길이를 r라 하면 원의 방정식은

$(x-a)^2+(y-a)^2=r^2$

이 원이 점 $(-1, 6)$을 지나므로

$(-1-a)^2+(6-a)^2=r^2$

$\therefore 2a^2-10a+37=r^2$ 　…… ㉠

또 원이 점 $(3, -2)$를 지나므로

$(3-a)^2+(-2-a)^2=r^2$

$\therefore 2a^2-2a+13=r^2$ 　…… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=3, r^2=25$

따라서 구하는 원의 넓이는 25π이다. 　　답 ③

반지름의 길이가 r인 원의 넓이는 πr^2이다.

05 원의 중심의 좌표는

$\left(\frac{4+8}{2}, \frac{-5-2}{2}\right)$ 　$\therefore \left(6, -\frac{7}{2}\right)$

원의 반지름의 길이는

$\frac{\sqrt{(8-4)^2+(-2+5)^2}}{2}=\frac{5}{2}$

따라서 $a=6$, $b=-\frac{7}{2}$, $r=\frac{5}{2}$이므로

$a+b+r=5$ 　　답 ③

06 원의 중심의 좌표는

$\left(\frac{-5+1}{2}, \frac{-7-3}{2}\right)$ 　$\therefore (-2, -5)$

원의 반지름의 길이는

$\frac{\sqrt{(1+5)^2+(-3+7)^2}}{2}=\sqrt{13}$

따라서 구하는 원의 방정식은

$(x+2)^2+(y+5)^2=13$

답 $(x+2)^2+(y+5)^2=13$

07 원의 중심을 $P(a, b)$라 하면

$\overline{PA}=\overline{PB}=\overline{PC}$

$\overline{PA}=\overline{PB}$에서 $\overline{PA}^2=\overline{PB}^2$이므로

$(a+1)^2+(b-3)^2=(a-2)^2+(b-4)^2$

$\therefore 3a+b-5=0$ 　…… ㉠

$\overline{PB}=\overline{PC}$에서 $\overline{PB}^2=\overline{PC}^2$이므로

$(a-2)^2+(b-4)^2=(a-3)^2+(b-3)^2$

$\therefore a-b+1=0$ 　…… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 　$a=1, b=2$

따라서 원의 반지름의 길이는

$\overline{PA}=\sqrt{(1+1)^2+(2-3)^2}=\sqrt{5}$

이므로 　$c=(\sqrt{5})^2=5$

$\therefore abc=10$ 　　답 10

$\overline{PB}$, $\overline{PC}$의 길이를 이용하여 반지름의 길이를 구할 수도 있다.

08 원의 중심을 $P(a, b)$라 하면

$\overline{PA}=\overline{PB}=\overline{PC}$

$\overline{PA}=\overline{PB}$에서 $\overline{PA}^2=\overline{PB}^2$이므로

$a^2+(b+6)^2=(a-4)^2+(b-2)^2$

$\therefore a+2b+2=0$ 　…… ㉠

$\overline{PA}=\overline{PC}$에서 $\overline{PA}^2=\overline{PC}^2$이므로

$a^2+(b+6)^2=(a-7)^2+(b-1)^2$

$\therefore a+b-1=0$ 　…… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 　$a=4, b=-3$

원의 중심은 $P(4, -3)$이고 반지름의 길이는

$\overline{PB}=|-3-2|=5$

이므로 원의 방정식은 　$(x-4)^2+(y+3)^2=25$

이 원이 점 $(1, k)$를 지나므로

$9+(k+3)^2=25$, 　$(k+3)^2=16$

$k+3=\pm 4$ 　$\therefore k=-7$ 또는 $k=1$

따라서 모든 k의 값의 곱은 -7이다. 　　답 ②

09 중심이 점 $(3, a)$이고 x축에 접하는 원의 반지름의 길이는 $|a|$이므로 원의 방정식은

$(x-3)^2+(y-a)^2=a^2$

이 원이 점 $(5, -2)$를 지나므로

$4+(-2-a)^2=a^2$, 　$4a+8=0$

$\therefore a=-2$ 　　답 ②

a의 값이 양수인지 음수인지 알 수 없으므로 반지름의 길이는 $|a|$이다.

10 원의 중심이 제1사분면 위에 있으므로 반지름의 길이를 r라 하면 원의 방정식은

$(x-r)^2+(y-r)^2=r^2$

이 원이 점 $(1, 2)$를 지나므로

$(1-r)^2+(2-r)^2=r^2$

$r^2-6r+5=0$,　　$(r-1)(r-5)=0$

$\therefore r=1$ 또는 $r=5$

따라서 두 원의 반지름의 길이의 합은 6이다.

답 6

11 $x^2+y^2+12x-4y+a=0$에서

$(x+6)^2+(y-2)^2=40-a$

이 원의 중심의 좌표는 $(-6, 2)$이므로

$b=-6$, $c=2$

또 반지름의 길이는 $\sqrt{40-a}$이므로

$\sqrt{40-a}=6$,　　$40-a=36$　　$\therefore a=4$

$\therefore a-b+c=12$

답 ②

$a<40$이므로 $40-a>0$

12 $x^2+y^2+ax-10y+9=0$에서

$\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+(y-5)^2=\frac{a^2}{4}+16$

직선 $y=-3x-4$가 이 원의 중심 $\left(-\frac{a}{2}, 5\right)$를 지나므로

$5=-3\cdot\left(-\frac{a}{2}\right)-4$,　　$\frac{3}{2}a=9$

$\therefore a=6$

답 ③

$a^2\geq0$이므로 $\frac{a^2}{4}+16>0$

13 $x^2+y^2-6x+k=0$에서

$(x^2-6x+9)+y^2=-k+9$

$\therefore (x-3)^2+y^2=-k+9$

이 방정식이 나타내는 도형이 원이 되려면

$-k+9>0$　　$\therefore k<9$

따라서 자연수 k는 $1, 2, 3, \cdots, 8$의 8개이다.

답 ③

14 $x^2+y^2-2(k+1)y+2k^2-8k+1=0$에서

$x^2+\{y-(k+1)\}^2=-2k^2+8k-1+(k+1)^2$

$\therefore x^2+(y-k-1)^2=-k^2+10k$

이 방정식이 반지름의 길이가 4 이하인 원을 나타내려면

$0<-k^2+10k\leq16$

$-k^2+10k>0$에서　　$k(k-10)<0$

$\therefore 0<k<10$　　…… ㉠

$-k^2+10k\leq16$에서　　$k^2-10k+16\geq0$

$(k-2)(k-8)\geq0$

$\therefore k\leq2$ 또는 $k\geq8$　　…… ㉡

㉠, ㉡에서 공통부분을 구하면

$0<k\leq2$ 또는 $8\leq k<10$

따라서 실수 k의 값이 될 수 있는 것은 ⑤이다.

답 ⑤

15 원점 O와 원의 중심 $(6, -8)$ 사이의 거리는

$\sqrt{6^2+(-8)^2}=10$

이때 원의 반지름의 길이가 2이므로 $\overline{OP}$의 길이의 최댓값은

$10+2=12$

답 12

16 점 $A(-3, 6)$과 원의 중심 $(0, 0)$ 사이의 거리는

$\sqrt{(-3)^2+6^2}=3\sqrt{5}$

이때 원의 반지름의 길이가 r, $\overline{AP}$의 길이의 최솟값이 $2\sqrt{5}$이므로

$3\sqrt{5}-r=2\sqrt{5}$　　$\therefore r=\sqrt{5}$

답 ⑤

17 $\overline{AP}:\overline{BP}=1:2$이므로

$2\overline{AP}=\overline{BP}$　　$\therefore 4\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$

점 P의 좌표를 (x, y)라 하면

$4\{(x+2)^2+(y-\boxed{2})^2\}=(x-1)^2+(y-8)^2$

$4x^2+4y^2+16x-16y+32=x^2+y^2-2x-16y+65$

$x^2+y^2+6x-\boxed{11}=0$

$(x^2+6x+9)+y^2=11+9$

$\therefore (x+\boxed{3})^2+y^2=\boxed{20}$

$\therefore$ (가) 2　(나) 11　(다) 3　(라) 20

답 (가) 2　(나) 11　(다) 3　(라) 20

18 점 P의 좌표를 (a, b)라 하고, $\overline{AP}$의 중점을 $Q(x, y)$라 하면

$x=\frac{3+a}{2}$, $y=\frac{1+b}{2}$

$\therefore a=2x-3$, $b=2y-1$　　…… ㉠

점 $P(a, b)$가 원 $x^2+y^2+4x-6y-3=0$ 위의 점이므로

$a^2+b^2+4a-6b-3=0$

$(a^2+4a+4)+(b^2-6b+9)=3+4+9$

$\therefore (a+2)^2+(b-3)^2=16$　　…… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$(2x-1)^2+(2y-4)^2=16$

$\therefore \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y-2)^2=4$

답 $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y-2)^2=4$

19 $(x-a)^2+(y+1)^2=6$에서

$x^2+y^2-2ax+2y+a^2-5=0$

따라서 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$x^2+y^2-9-(x^2+y^2-2ax+2y+a^2-5)=0$

$\therefore 2ax-2y-a^2-4=0$

이 직선이 직선 $3x-y+5=0$과 평행하므로

$\frac{2a}{3}=\frac{-2}{-1}\neq\frac{-a^2-4}{5}$　　$\therefore a=3$

답 3

두 직선 $ax+by+c=0$, $a'x+b'y+c'=0$ $(abc\neq0,\ a'b'c'\neq0)$이 평행하다.

➡ $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$

20 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$x^2+y^2+x-ay-(x^2+y^2-ax+y-1)=0$

$\therefore (1+a)x-(a+1)y+1=0$

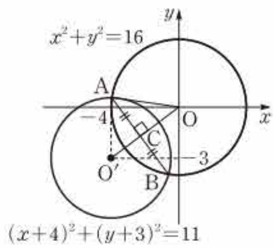
11 원의 방정식

이 직선이 점 $(4,\ 3)$을 지나므로

$4(1+a)-3(a+1)+1=0 \qquad \therefore a=-2$

답 ②

21 오른쪽 그림과 같이 두 원 $x^2+y^2=16$, $(x+4)^2+(y+3)^2=11$의 중심을 각각 O, O′이라 하고, 두 원의 교점을 A, B, $\overline{OO'}$과 $\overline{AB}$의 교점을 C라 하자.



$(x+4)^2+(y+3)^2=11$에서

$x^2+y^2+8x+6y+14=0$

이므로 두 원의 공통인 현의 방정식은

$x^2+y^2-16-(x^2+y^2+8x+6y+14)=0$

$8x+6y+30=0 \qquad \therefore 4x+3y+15=0$

점 O와 직선 $4x+3y+15=0$ 사이의 거리는

$$\overline{OC}=\frac{|15|}{\sqrt{4^2+3^2}}=3$$

직각삼각형 OAC에서 $\overline{OA}=4$이므로

원 $x^2+y^2=16$의 반지름의 길이

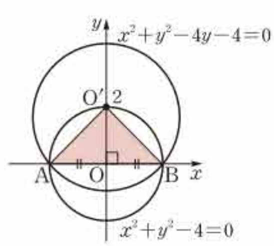
$$\overline{AC}=\sqrt{\overline{OA}^2-\overline{OC}^2}=\sqrt{4^2-3^2}=\sqrt{7}$$

따라서 공통인 현의 길이는

$\overline{AB}=2\overline{AC}=2\sqrt{7}$

답 ②

22 두 원 O, O'의 공통인 현의 방정식은



x^2+y^2-4
$-(x^2+y^2-4y-4)$
$=0$

$4y=0 \qquad \therefore y=0$

원 O의 반지름의 길이가 2이므로

$\overline{AO}=2$

$\therefore \overline{AB}=2\overline{AO}=4$

$\therefore \triangle O'AB=\frac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot\overline{OO'}=\frac{1}{2}\cdot4\cdot2=4$ 　답 4

27 원과 직선의 위치 관계

Lecture 49 원과 직선의 위치 관계 Ⓛ 152쪽

1-1 (1) 원의 중심 $(0,\ 0)$과 직선 $y=x-4$, 즉 $x-y-4=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|-4|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$$

이때 원의 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$이므로 원과 직선은 만나지 않는다.

$2\sqrt{2}>\sqrt{2}$

(2) 원의 중심 $(1,\ 0)$과 직선 $2x-y-7=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|2\cdot1-1\cdot0-7|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$$

이때 원의 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$이므로 원과 직선은 한 점에서 만난다. (접한다.)

$\sqrt{5}=\sqrt{5}$

답 (1) 만나지 않는다.
(2) 한 점에서 만난다. (접한다.)

1-2 (1) $y=x+1$을 $x^2+y^2=4$에 대입하면

$x^2+(x+1)^2=4$

$\therefore 2x^2+2x-3=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

원과 직선의 교점의 개수
① $D>0$ ➡ 2개
② $D=0$ ➡ 1개
③ $D<0$ ➡ 0개

$$\frac{D}{4}=1^2-2\cdot(-3)=7>0$$

따라서 원과 직선은 서로 다른 두 점에서 만난다.

(2) $2x+y-5=0$, 즉 $y=-2x+5$를 $x^2+y^2+2x-4=0$에 대입하면

$x^2+(-2x+5)^2+2x-4=0$

$\therefore 5x^2-18x+21=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(-9)^2-5\cdot21=-24<0$$

따라서 원과 직선은 만나지 않는다.

답 (1) 서로 다른 두 점에서 만난다.
(2) 만나지 않는다.

1-3 원의 중심 $(0,\ 0)$과 직선 $3x-y+k=0$ 사이의 거리는

이차방정식의 판별식을 이용하여 실수 k의 값 또는 k의 값의 범위를 구할 수도 있다.

$$\frac{|k|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\frac{|k|}{\sqrt{10}}$$

(1) 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면

$\frac{|k|}{\sqrt{10}}<1, \qquad |k|<\sqrt{10}$

$\therefore -\sqrt{10}<k<\sqrt{10}$

(2) 원과 직선이 한 점에서 만나려면

$\frac{|k|}{\sqrt{10}}=1, \qquad |k|=\sqrt{10}$

$\therefore k=-\sqrt{10}$ 또는 $k=\sqrt{10}$

(3) 원과 직선이 만나지 않으려면

$\frac{|k|}{\sqrt{10}}>1, \qquad |k|>\sqrt{10}$

$\therefore k<-\sqrt{10}$ 또는 $k>\sqrt{10}$

답 (1) $-\sqrt{10}<k<\sqrt{10}$
(2) $\pm\sqrt{10}$
(3) $k<-\sqrt{10}$ 또는 $k>\sqrt{10}$

기본+표준 유형 Q+Q Ⓛ 153쪽

01 원의 중심 $(1,\ 0)$과 직선 $4x-y+k=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|4\cdot1-1\cdot0+k|}{\sqrt{4^2+(-1)^2}}=\frac{|4+k|}{\sqrt{17}}$$

이때 원의 반지름의 길이가 $\sqrt{17}$이므로 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면

$$\frac{|4+k|}{\sqrt{17}}<\sqrt{17}, \qquad |4+k|<17$$

$$-17<4+k<17 \qquad \therefore -21<k<13$$

따라서 $a=-21$, $b=13$이므로

$$a+b=-8$$

답 -8

Q BOX

원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면
(원의 중심과 직선 사이의 거리)
<(원의 반지름의 길이)
이어야 한다.

다른 풀이 $4x-y+k=0$에서 $\qquad y=4x+k$

이 식을 원의 방정식에 대입하면

$$(x-1)^2+(4x+k)^2=17$$

$$\therefore 17x^2+2(4k-1)x+k^2-16=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D라 할 때, 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면

$$\frac{D}{4}=(4k-1)^2-17(k^2-16)>0$$

$$k^2+8k-273<0, \qquad (k+21)(k-13)<0$$

$$\therefore -21<k<13$$

02 $x^2+y^2-8x+4y+7=0$에서

$$(x^2-8x+16)+(y^2+4y+4)=-7+16+4$$

$$\therefore (x-4)^2+(y+2)^2=13$$

원의 중심 $(4,\ -2)$와 직선 $3x+2y+k=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|3\cdot4+2\cdot(-2)+k|}{\sqrt{3^2+2^2}}=\frac{|8+k|}{\sqrt{13}}$$

이때 원의 반지름의 길이가 $\sqrt{13}$이므로 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면

$$\frac{|8+k|}{\sqrt{13}}<\sqrt{13}, \qquad |8+k|<13$$

$$-13<8+k<13 \qquad \therefore -21<k<5$$

따라서 정수 k는 -20, -19, -18, $\cdots$, 4의 25개이다.

답 ④

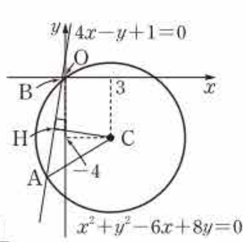
03 $x^2+y^2-6x+8y=0$에서

$$(x^2-6x+9)+(y^2+8y+16)=9+16$$

$$\therefore (x-3)^2+(y+4)^2=25$$

원과 직선이 한 점에서 만나려면
(원의 중심과 직선 사이의 거리)
=(원의 반지름의 길이)
이어야 한다.

오른쪽 그림과 같이 원의 중심을 $C(3,\ -4)$라 하고, 점 C에서 직선 $4x-y+1=0$에 내린 수선의 발을 H라 하면



$$\overline{CH}=\frac{|4\cdot3-(-4)+1|}{\sqrt{4^2+(-1)^2}}=\sqrt{17}$$

직각삼각형 CAH에서 $\overline{CA}=5$이므로

원 $(x-3)^2+(y+4)^2=25$의 반지름의 길이

$$\overline{AH}=\sqrt{\overline{CA}^2-\overline{CH}^2}=\sqrt{5^2-(\sqrt{17})^2}=2\sqrt{2}$$

$$\therefore \overline{AB}=2\overline{AH}=4\sqrt{2}$$

답 ④

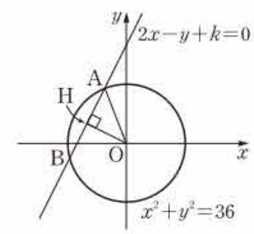
Q 쌤 한마디

현의 성질

① 원의 중심에서 현에 그은 수선은 그 현을 이등분한다.
반대로 원에서 현의 수직이등분선은 그 원의 중심을 지난다.

② 한 원 또는 합동인 두 원에서 중심으로부터 같은 거리에 있는 두 현의 길이는 서로 같다.
반대로 한 원 또는 합동인 두 원에서 길이가 같은 두 현은 원의 중심으로부터 같은 거리에 있다.

04 오른쪽 그림과 같이 원과 직선의 두 교점을 A, B라 하고, 원의 중심 $O(0,\ 0)$에서 직선 $2x-y+k=0$에 내린 수선의 발을 H라 하면



$$\overline{AH}=\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}\cdot8=4$$

직각삼각형 OAH에서 $\overline{OA}=6$이므로

$$\overline{OH}=\sqrt{\overline{OA}^2-\overline{AH}^2}=\sqrt{6^2-4^2}=2\sqrt{5}$$

따라서 원의 중심 $O(0,\ 0)$과 직선 $2x-y+k=0$ 사이의 거리가 $2\sqrt{5}$이므로

$$\frac{|k|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=2\sqrt{5}, \qquad |k|=10$$

$$\therefore k=10\ (\because k>0)$$

답 10

05 원의 중심 $(0,\ 0)$과 직선 $y=2x+2\sqrt{5}$, 즉 $2x-y+2\sqrt{5}=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|2\sqrt{5}|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=2$$

이때 원의 반지름의 길이가 r이므로 원과 직선이 한 점에서 만나려면

$$r=2$$

답 2

다른 풀이 $y=2x+2\sqrt{5}$를 $x^2+y^2=r^2$에 대입하면

$$x^2+(2x+2\sqrt{5})^2=r^2$$

$$\therefore 5x^2+8\sqrt{5}x+20-r^2=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면 원과 직선이 한 점에서 만나므로

$$\frac{D}{4}=(4\sqrt{5})^2-5(20-r^2)=0$$

$$5r^2-20=0, \qquad r^2=4$$

$$\therefore r=2\ (\because r>0)$$

06 원의 중심 $(-2,\ 1)$과 직선 $x+4y+k=0$ 사이의 거리는

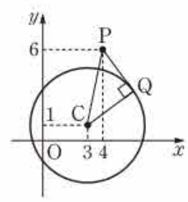
$$\frac{|1\cdot(-2)+4\cdot1+k|}{\sqrt{1^2+4^2}}=\frac{|2+k|}{\sqrt{17}}$$

이때 원의 반지름의 길이가 $\sqrt{17}$이므로 원과 직선이 접하려면

$\frac{|2+k|}{\sqrt{17}}=\sqrt{17}$, $\quad |2+k|=17$

$2+k=\pm17 \quad \therefore k=-19\ (\because k<0)$ 답 ②

07 오른쪽 그림과 같이 원의 중심을 C(3, 1)이라 하면



$\overline{CP}=\sqrt{(4-3)^2+(6-1)^2}$

$=\sqrt{26}$

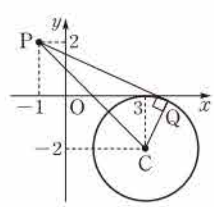
직각삼각형 CQP에서

$\overline{PQ}=\sqrt{\overline{CP}^2-\overline{CQ}^2}$

$=\sqrt{(\sqrt{26})^2-(\sqrt{10})^2}=4$ 답 4

원 $(x-3)^2+(y-1)^2=10$의 반지름의 길이

08 오른쪽 그림과 같이 원의 중심을 C(3, −2)라 하면



$\overline{CP}$

$=\sqrt{(3+1)^2+(-2-2)^2}$

$=4\sqrt{2}$

직각삼각형 CQP에서 $\overline{CQ}=r$이므로

$r^2+(2\sqrt{7})^2=(4\sqrt{2})^2$, $\quad r^2=4$

$\therefore r=2\ (\because r>0)$ 답 ②

09 $x^2+y^2-8x+14=0$에서

$(x^2-8x+16)+y^2=-14+16$

$\therefore (x-4)^2+y^2=2$

원의 중심 (4, 0)과 직선 $x+y-k=0$ 사이의 거리는

$\frac{|4-k|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{|4-k|}{\sqrt{2}}$

이때 원의 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$이므로 원과 직선이 만나지 않으려면

$\frac{|4-k|}{\sqrt{2}}>\sqrt{2}$, $\quad |4-k|>2$

$4-k<-2$ 또는 $4-k>2$

$\therefore k<2$ 또는 $k>6$

원과 직선이 만나지 않으려면 (원의 중심과 직선 사이의 거리) > (원의 반지름의 길이)이어야 한다.

따라서 주어진 조건을 만족시키는 k의 값이 아닌 것은 ④이다. 답 ④

다른 풀이 $y=-x+k$를 $x^2+y^2-8x+14=0$에 대입하면

$x^2+(-x+k)^2-8x+14=0$

$\therefore 2x^2-2(k+4)x+k^2+14=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면 원과 직선이 만나지 않으므로

$\frac{D}{4}=(k+4)^2-2(k^2+14)<0$

$k^2-8k+12>0$, $\quad (k-2)(k-6)>0$

$\therefore k<2$ 또는 $k>6$

10 원의 중심 $(0, a)$와 직선 $x-2y=-1$, 즉 $x-2y+1=0$ 사이의 거리는

$\frac{|-2a+1|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{|2a-1|}{\sqrt{5}}$

이때 원의 반지름의 길이가 $3\sqrt{5}$이므로 원과 직선이 만나지 않으려면

$\frac{|2a-1|}{\sqrt{5}}>3\sqrt{5}$, $\quad |2a-1|>15$

$2a-1<-15$ 또는 $2a-1>15$

$\therefore a<-7$ 또는 $a>8$

따라서 자연수 a의 최솟값은 9이다. 답 9

11 원의 중심 (4, 1)과 직선 $3x+y+7=0$ 사이의 거리는

$\frac{|3\cdot4+1\cdot1+7|}{\sqrt{3^2+1^2}}=2\sqrt{10}$

이때 반지름의 길이가 $\sqrt{10}$이므로

$M=2\sqrt{10}+\sqrt{10}=3\sqrt{10}$,

$m=2\sqrt{10}-\sqrt{10}=\sqrt{10}$ 답 ③

12 원의 중심 (0, 0)과 직선 $4x-3y+k=0$ 사이의 거리는

$\frac{|k|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\frac{|k|}{5}$

이때 원의 반지름의 길이가 3이고, 원 위의 점 P와 직선 사이의 거리의 최댓값이 7이므로

$\frac{|k|}{5}+3=7$, $\quad |k|=20$

$\therefore k=20\ (\because k>0)$ 답 ⑤

28 원의 접선의 방정식

Lecture 50 원의 접선의 방정식 155쪽

1-1 (1) $y=-3x\pm2\cdot\sqrt{(-3)^2+1}$에서

$y=-3x\pm2\sqrt{10}$

(2) $y=2x\pm\sqrt{5}\cdot\sqrt{2^2+1}$에서

$y=2x\pm5$

답 (1) $y=-3x\pm2\sqrt{10}$ (2) $y=2x\pm5$

2-1 (1) $-3x+y=10$에서 $\quad 3x-y=-10$

(2) $-4x-2y=20$에서 $\quad 2x+y=-10$

답 (1) $3x-y=-10$ (2) $2x+y=-10$

3-1 (2) 직선 $x_1x+y_1y=2$가 점 (−2, 0)을 지나므로

$-2x_1=2 \quad \therefore x_1=-1$

또 점 $(-1, y_1)$은 원 $x^2+y^2=2$ 위의 점이므로

$(-1)^2+y_1^2=2$, $\quad y_1^2=1 \quad \therefore y_1=\pm1$

$\therefore x_1=-1, y_1=-1$ 또는 $x_1=-1, y_1=1$

(3) $x_1=-1$, $y_1=-1$일 때, $x+y=-2$
$x_1=-1$, $y_1=1$일 때, $x-y=-2$

답 (1) $x_1x+y_1y=2$
(2) $x_1=-1$, $y_1=-1$ 또는 $x_1=-1$, $y_1=1$
(3) $x+y=-2$, $x-y=-2$

기본+표준 유형 Q+Q

156쪽

01 직선 $y=4x+2$에 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{4}$이므로 접선의 방정식은

$$y=-\frac{1}{4}x\pm\sqrt{17}\cdot\sqrt{\left(-\frac{1}{4}\right)^2+1}$$

$$\therefore y=-\frac{1}{4}x\pm\frac{17}{4}$$

답 $y=-\frac{1}{4}x\pm\frac{17}{4}$

두 직선이 수직
➡ 두 직선의 기울기의 곱은 -1이다.

02 직선 $x+2y+6=0$, 즉 $y=-\frac{1}{2}x-3$과 평행한 직선의 기울기는 $-\frac{1}{2}$이므로 접선의 방정식은

$$y=-\frac{1}{2}x\pm\sqrt{5}\cdot\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+1}$$

$$\therefore y=-\frac{1}{2}x\pm\frac{5}{2}$$

직선 $y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$가 점 $(1, a)$를 지나면

$$a=-\frac{1}{2}+\frac{5}{2}=2$$

직선 $y=-\frac{1}{2}x-\frac{5}{2}$가 점 $(1, a)$를 지나면

$$a=-\frac{1}{2}-\frac{5}{2}=-3$$

이때 $a>0$이므로 $a=2$

답 ④

두 직선 $y=mx+n$, $y=m'x+n'$이 평행
➡ $m=m'$, $n\neq n'$

03 원 $x^2+y^2=26$ 위의 점 $(-1, 5)$에서의 접선의 방정식은

$-x+5y=26$ $\therefore x-5y=-26$ …… ㉠

또 점 $(5, 1)$에서의 접선의 방정식은

$5x+y=26$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$x=4$, $y=6$

따라서 두 접선의 교점의 좌표는 $(4, 6)$이다.

답 $(4, 6)$

㉠+㉡×5를 하면
$26x=104$
$\therefore x=4$
$x=4$를 ㉡에 대입하면
$20+y=26$
$\therefore y=6$

04 점 $(-8, k)$가 원 $x^2+y^2=80$ 위의 점이므로

$(-8)^2+k^2=80$, $k^2=16$

$\therefore k=4$ ($\because k>0$)

원 $x^2+y^2=80$ 위의 점 $(-8, 4)$에서의 접선의 방정식은

$-8x+4y=80$ $\therefore y=2x+20$

따라서 구하는 y절편은 20이다.

답 ③

05 접점의 좌표를 (x_1, y_1)이라 하면 접선의 방정식은

$x_1x+y_1y=10$

이 직선이 점 $(2, -4)$를 지나므로

$2x_1-4y_1=10$ $\therefore x_1=2y_1+5$ …… ㉠

또 점 (x_1, y_1)은 원 $x^2+y^2=10$ 위의 점이므로

$x_1^2+y_1^2=10$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $(2y_1+5)^2+y_1^2=10$

$y_1^2+4x_1+3=0$, $(y_1+3)(y_1+1)=0$

$\therefore y_1=-3$ 또는 $y_1=-1$

$y_1=-3$을 ㉠에 대입하면 $x_1=-1$

$y_1=-1$을 ㉠에 대입하면 $x_1=3$

따라서 접선의 방정식은

$x+3y+10=0$, $3x-y-10=0$

즉 $a=10$, $b=-1$이므로

$a-b=11$

답 ②

다른 풀이 접선의 기울기를 m이라 하면 기울기가 m이고 점 $(2, -4)$를 지나는 직선의 방정식은

$y+4=m(x-2)$

$\therefore mx-y-2m-4=0$ …… ㉠

원의 중심 $(0, 0)$과 직선 ㉠ 사이의 거리는

$$\frac{|-2m-4|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\frac{|2m+4|}{\sqrt{m^2+1}}$$

원의 반지름의 길이가 $\sqrt{10}$이므로 원과 직선이 접하려면

$$\frac{|2m+4|}{\sqrt{m^2+1}}=\sqrt{10}, \quad |2m+4|=\sqrt{10}\cdot\sqrt{m^2+1}$$

양변을 제곱하면

$4m^2+16m+16=10m^2+10$

$3m^2-8m-3=0$, $(3m+1)(m-3)=0$

$\therefore m=-\frac{1}{3}$ 또는 $m=3$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하여 정리하면 접선의 방정식은

$x+3y+10=0$, $3x-y-10=0$

06 기울기가 m인 접선의 방정식은

$y=mx$ $\therefore mx-y=0$

원의 중심 $(1, 3)$과 접선 $mx-y=0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이와 같으므로

$$\frac{|m-3|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\sqrt{2}, \quad |m-3|=\sqrt{2}\cdot\sqrt{m^2+1}$$

양변을 제곱하면

$m^2-6m+9=2m^2+2$

$m^2+6m-7=0$, $(m+7)(m-1)=0$

$\therefore m=1$ ($\because m>0$)

답 1

중단원 마무리

157쪽

01 전략 먼저 원의 반지름의 길이를 r라 하고 원의 방정식을 구한다.

풀이 원의 반지름의 길이를 r라 하면 원의 방정식은

$(x+1)^2+(y-4)^2=r^2$

$\therefore x^2+y^2+2x-8y+17-r^2=0$

이 식이 $x^2+y^2+ax-8y+4a=0$과 일치하므로

$2=a$, $17-r^2=4a$

$\therefore a=2$, $r^2=9$

따라서 주어진 원의 방정식은

$(x+1)^2+(y-4)^2=9$

⑤ $x=2$, $y=4$를 $(x+1)^2+(y-4)^2=9$에 대입하면

$(2+1)^2+(4-4)^2=9$

이므로 점 $(2, 4)$는 원 위의 점이다. 답 ⑤

02 **전략** 원의 중심의 좌표를 $(a, a-4)$, 반지름의 길이를 r라 하고 원의 방정식을 세운 후 원이 지나는 두 점의 좌표를 대입한다.

풀이 원의 중심의 좌표를 $(a, a-4)$, 반지름의 길이를 r라 하면 원의 방정식은

$(x-a)^2+\{y-(a-4)\}^2=r^2$

이 원이 점 $(-1, -2)$를 지나므로

$(-1-a)^2+(2-a)^2=r^2$

$\therefore 2a^2-2a+5=r^2$ ...... ㉠

또 이 원이 점 $(4, 3)$을 지나므로

$(4-a)^2+(7-a)^2=r^2$

$\therefore 2a^2-22a+65=r^2$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3$, $r^2=17$

따라서 원의 방정식은

$(x-3)^2+(y+1)^2=17$ ··· ❶

위의 식에 $y=0$을 대입하면

$(x-3)^2+1=17$, $(x-3)^2=16$

$x-3=\pm4$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=7$

즉 원이 x축과 만나는 두 점의 좌표는

$(-1, 0)$, $(7, 0)$ ··· ❷

이므로 구하는 거리는

$|7-(-1)|=8$ ··· ❸

답 8

단계	채점 기준	비율
❶	원의 방정식을 구할 수 있다.	50 %
❷	원이 x축과 만나는 두 점의 좌표를 구할 수 있다.	30 %
❸	원이 x축과 만나는 두 점 사이의 거리를 구할 수 있다.	20 %

03 **전략** 두 점 B, C를 지름의 양 끝 점으로 하는 원의 중심은 $\overline{BC}$의 중점임을 이용한다.

풀이 $\overline{AB}$를 $3:2$로 외분하는 점 C의 좌표는

$\left(\frac{3\cdot2-2\cdot1}{3-2}, \frac{3\cdot1-2\cdot3}{3-2}\right)$ $\therefore (4, -3)$

두 점 $B(2, 1)$, $C(4, -3)$을 지름의 양 끝 점으로 하는 원의 중심의 좌표는

$\left(\frac{2+4}{2}, \frac{1-3}{2}\right)$ $\therefore (3, -1)$

Q BOX

x축과 y축에 동시에 접하는 원에서
$|$(중심의 x좌표)$|$
$=|$(중심의 y좌표)$|$
$=$(반지름의 길이)

㉠$-$㉡을 하면
$20a-60=0$
$\therefore a=3$
$a=3$을 ㉠에 대입하면
$r^2=17$

두 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$에 대하여 선분 AB를 $m:n\ (m>0,\ n>0)$으로 외분하는 점의 좌표는
$\left(\frac{mx_2-nx_1}{m-n}, \frac{my_2-ny_1}{m-n}\right)$
(단, $m\neq n$)

따라서 $a=3$, $b=-1$이므로

$a+b=2$ 답 ②

04 **전략** 원의 중심에서 세 점까지의 거리가 각각 같음을 이용한다.

풀이 $O(0, 0)$, $A(6, 0)$, $B(-4, 4)$, $P(p, q)$라 하면

$\overline{PO}=\overline{PA}=\overline{PB}$

$\overline{PO}=\overline{PA}$에서 $\overline{PO}^2=\overline{PA}^2$이므로

$p^2+q^2=(p-6)^2+q^2$, $-12p+36=0$

$\therefore p=3$

$\overline{PO}=\overline{PB}$에서 $\overline{PO}^2=\overline{PB}^2$이므로

$p^2+q^2=(p+4)^2+(q-4)^2$

$\therefore p-q+4=0$

$p=3$을 위의 식에 대입하면 $3-q+4=0$

$\therefore q=7$

$\therefore p+q=10$ 답 10

05 **전략** 원의 중심의 좌표를 $(a, 3a-4)$로 놓고 x축과 y축에 동시에 접할 조건을 이용한다.

풀이 원의 중심의 좌표를 $(a, 3a-4)$라 하면 이 원이 x축과 y축에 동시에 접하므로

$|a|=|3a-4|$ $\therefore a=\pm(3a-4)$

(i) $a=-(3a-4)$일 때, $4a=4$

$\therefore a=1$

따라서 원의 중심의 좌표는 $(1, -1)$이고, 반지름의 길이는 1이므로 둘레의 길이는

$2\pi\cdot1=2\pi$

(ii) $a=3a-4$일 때, $-2a=-4$

$\therefore a=2$

따라서 원의 중심의 좌표는 $(2, 2)$이고, 반지름의 길이는 2이므로 둘레의 길이는

$2\pi\cdot2=4\pi$

(i), (ii)에서 구하는 두 원의 둘레의 길이의 합은

$2\pi+4\pi=6\pi$

답 ③

다른 풀이 x축과 y축에 동시에 접하는 원의 중심은 직선 $y=x$ 또는 $y=-x$ 위에 있다.

(i) 원의 중심이 직선 $y=x$ 위에 있을 때,

$3x-4=x$에서 $2x=4$

$\therefore x=2$

즉 원의 중심의 좌표는 $(2, 2)$이고, 반지름의 길이는 2이므로 둘레의 길이는

$2\pi\cdot2=4\pi$

(ii) 원의 중심이 직선 $y=-x$ 위에 있을 때,

$3x-4=-x$에서 $4x=4$

$\therefore x=1$

즉 원의 중심의 좌표는 $(1, -1)$이고, 반지름의 길이는 1이므로 둘레의 길이는

$2\pi\cdot1=2\pi$

(i), (ii)에서 구하는 두 원의 둘레의 길이의 합은

$4\pi+2\pi=6\pi$

06 전략 주어진 방정식을 $(x-p)^2+(y-q)^2=r^2\,(r>0)$ 꼴로 변형한 후 원의 넓이는 πr^2임을 이용한다.

풀이 $x^2+y^2-8x+6y=0$에서

$(x^2-8x+16)+(y^2+6y+9)=16+9$

$\therefore (x-4)^2+(y+3)^2=25$

따라서 원의 넓이는 25π이므로

$k=25$ 답 25

07 전략 원의 중심의 좌표를 구한 후 중심이 제3사분면 위에 있음을 이용하여 k의 값의 범위를 구한다.

풀이 $x^2+y^2+kx+4y+1=0$에서

$\left(x^2+kx+\frac{k^2}{4}\right)+(y^2+4y+4)=-1+\frac{k^2}{4}+4$

$\therefore \left(x+\frac{k}{2}\right)^2+(y+2)^2=\frac{k^2}{4}+3$

원의 중심 $\left(-\frac{k}{2},\ -2\right)$가 제3사분면 위에 있으므로

$(x$좌표$)<0$, $(y$좌표$)<0$

$-\frac{k}{2}<0 \qquad \therefore k>0$

또 원이 x축에 접하므로 $\sqrt{\frac{k^2}{4}+3}=2$

x축에 접하는 원에서 (반지름의 길이) $=|$(중심의 y좌표)$|$

$\frac{k^2}{4}+3=4, \qquad k^2=4$

$\therefore k=2\ (\because k>0)$ 답 ③

08 전략 주어진 방정식을 $(x-p)^2+(y-q)^2=r$ 꼴로 변형한 후 $r>0$이어야 함을 이용한다.

풀이 $x^2+y^2+6ax+2ay-10+11a^2=0$에서

$(x^2+6ax+9a^2)+(y^2+2ay+a^2)$

$=10-11a^2+9a^2+a^2$

$\therefore (x+3a)^2+(y+a)^2=10-a^2$

이 방정식이 원을 나타내려면

$10-a^2>0, \qquad a^2<10$

$\therefore -\sqrt{10}<a<\sqrt{10}$ ⋯ ❶

따라서 정수 a는 $-3,\ -2,\ -1,\ \cdots,\ 3$의 7개이다.

⋯ ❷

답 7

단계	채점 기준	비율
❶	a의 값의 범위를 구할 수 있다.	80 %
❷	정수 a의 개수를 구할 수 있다.	20 %

09 전략 원 밖의 한 점 A와 원의 중심 사이의 거리를 d, 원의 반지름의 길이를 r라 하면 원 위의 점 P에 대하여 $\overline{AP}$의 길이의 최솟값은 $d-r$임을 이용한다.

풀이 점 $A(4,\ 3)$과 원의 중심 $(0,\ 0)$ 사이의 거리는

$\sqrt{4^2+3^2}=5$

이때 원의 반지름의 길이가 4이므로 $\overline{AP}$의 길이의 최솟값은

$5-4=1$ 답 ①

10 전략 $\sqrt{(a-1)^2+(b+1)^2}$의 값은 두 점 $(1,\ -1)$, $(a,\ b)$ 사이의 거리와 같음을 이용한다.

풀이 $\sqrt{(a-1)^2+(b+1)^2}$의 값은 두 점 $(1,\ -1)$, $P(a,\ b)$ 사이의 거리와 같으므로 구하는 최댓값은 원 $(x+3)^2+(y-2)^2=4$ 위의 점 $P(a,\ b)$와 점 $(1,\ -1)$ 사이의 거리의 최댓값과 같다.

점 $(1,\ -1)$과 원의 중심 $(-3,\ 2)$ 사이의 거리는

$\sqrt{(-3-1)^2+(2+1)^2}=5$

이때 원의 반지름의 길이가 2이므로 구하는 최댓값은

$5+2=7$ 답 ③

11 전략 $P(x,\ y)$라 하고 주어진 조건을 이용하여 x, y 사이의 관계식을 구한다.

풀이 $P(x,\ y)$라 하면 $\overline{PA}^2+3\overline{PB}^2=20$에서

$(x+2)^2+y^2+3\{(x-2)^2+y^2\}=20$

$4x^2+4y^2-8x+16=20, \qquad x^2+y^2-2x-1=0$

$\therefore (x-1)^2+y^2=2$ 답 $(x-1)^2+y^2=2$

12 전략 먼저 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식을 구한다.

풀이 $(x-3)^2+(y+1)^2=23$에서

$x^2+y^2-6x+2y-13=0$

따라서 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$x^2+y^2-25-(x^2+y^2-6x+2y-13)=0$

$6x-2y-12=0 \qquad \therefore y=3x-6$ ⋯ ❶

이 직선의 x절편은 2, y절편은 -6이므로

$A(2,\ 0),\ B(0,\ -6)$ ⋯ ❷

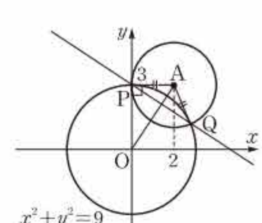
$\therefore \triangle OAB=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 6=6$ ⋯ ❸

답 6

단계	채점 기준	비율
❶	두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식을 구할 수 있다.	60 %
❷	두 점 A, B의 좌표를 구할 수 있다.	20 %
❸	△OAB의 넓이를 구할 수 있다.	20 %

13 전략 직선 PQ는 점 A를 중심으로 하고 $\overline{AP}$를 반지름으로 하는 원과 원 $x^2+y^2=9$의 교점을 지나는 직선임을 이용한다.

풀이 직선 PQ는 점 A를 중심으로 하고 $\overline{AP}$를 반지름으로 하는 원과 원 $x^2+y^2=9$의 교점을 지나는 직선이다.



직각삼각형 OAP에서

$\overline{OA}=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$, $\overline{OP}=3$이므로

원 $x^2+y^2=9$의 반지름의 길이

$\overline{AP}=\sqrt{\overline{OA}^2-\overline{OP}^2}$

$=\sqrt{(\sqrt{13})^2-3^2}=2$

11 원의 방정식

점 A(2, 3)을 중심으로 하고 $\overline{\mathrm{AP}}$를 반지름으로 하는 원의 방정식은

$(x-2)^2+(y-3)^2=4$

$\therefore x^2+y^2-4x-6y+9=0$

따라서 직선 PQ는 두 원 $x^2+y^2-9=0$, $x^2+y^2-4x-6y+9=0$의 교점을 지나는 직선이므로 그 방정식은

$x^2+y^2-9-(x^2+y^2-4x-6y+9)=0$

$\therefore 2x+3y-9=0$

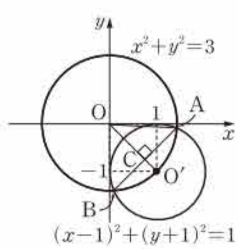
즉 $a=3$, $b=-9$이므로

$a+b=-6$ 답 ①

14 전략 두 원의 교점을 지나는 원의 넓이가 최소가 되려면 공통인 현이 그 원의 지름이어야 함을 이용한다.

풀이 두 원의 교점을 지나는 원의 넓이가 최소가 되려면 공통인 현이 그 원의 지름이어야 한다.

오른쪽 그림과 같이 두 원 $x^2+y^2=3$, $(x-1)^2+(y+1)^2=1$의 중심을 각각 O, O′이라 하고, 두 원의 교점을 A, B, $\overline{\mathrm{OO'}}$과 $\overline{\mathrm{AB}}$의 교점을 C라 하자.



$(x-1)^2+(y+1)^2=1$에서

$x^2+y^2-2x+2y+1=0$

이므로 두 원의 공통인 현의 방정식은

$x^2+y^2-3-(x^2+y^2-2x+2y+1)=0$

$2x-2y-4=0 \qquad \therefore x-y-2=0$

$\therefore \overline{\mathrm{OC}}=\dfrac{|-2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\sqrt{2}$

직각삼각형 OAC에서 $\overline{\mathrm{OA}}=\sqrt{3}$이므로

원 $x^2+y^2=3$의 반지름의 길이

$\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2}=1$

따라서 넓이가 최소인 원의 반지름의 길이가 1이므로 구하는 넓이는

$\pi\cdot 1^2=\pi$ 답 π

15 전략 원의 중심과 직선 사이의 거리가 원의 반지름의 길이보다 작아야 함을 이용한다.

풀이 원의 중심 $(-4, 2)$와 직선 $y=-\dfrac{3}{4}x+\dfrac{5}{4}$, 즉 $3x+4y-5=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|3\cdot(-4)+4\cdot 2-5|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\dfrac{9}{5}$

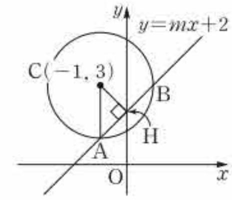
이때 원의 반지름의 길이가 r이므로

$r>\dfrac{9}{5}$

따라서 자연수 r의 최솟값은 2이다. 답 ②

16 전략 원의 중심에서 현에 그은 수선은 그 현을 이등분함을 이용한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 원 $(x+1)^2+(y-3)^2=4$의 중심을 C$(-1, 3)$이라 하고 점 C에서 직선 $y=mx+2$, 즉 $mx-y+2=0$에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\overline{\mathrm{AH}}=\dfrac{1}{2}\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{2}$

직각삼각형 CAH에서 $\overline{\mathrm{CA}}=2$이므로

원 $(x+1)^2+(y-3)^2=4$의 반지름의 길이

$\overline{\mathrm{CH}}=\sqrt{\overline{\mathrm{CA}}^2-\overline{\mathrm{AH}}^2}=\sqrt{2^2-(\sqrt{2})^2}=\sqrt{2}$

이때 점 C$(-1, 3)$과 직선 $mx-y+2=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|-m-3+2|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\dfrac{|m+1|}{\sqrt{m^2+1}}$

따라서 $\dfrac{|m+1|}{\sqrt{m^2+1}}=\sqrt{2}$이므로

$|m+1|=\sqrt{2}\cdot\sqrt{m^2+1}$

양변을 제곱하면

$m^2+2m+1=2m^2+2$

$m^2-2m+1=0, \qquad (m-1)^2=0$

$\therefore m=1$ 답 ③

17 전략 원의 방정식과 직선의 방정식을 연립하여 얻은 이차방정식의 판별식이 0임을 이용한다.

주어진 원과 직선이 접한다.

풀이 $f(x)=ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$f(-5)f(5)=(-5a+b)(5a+b)$

$=-25a^2+b^2$ …… ㉠

$y=ax+b$를 $x^2+y^2=25$에 대입하면

$x^2+(ax+b)^2=25$

$\therefore (a^2+1)x^2+2abx+b^2-25=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면 원과 직선이 접하므로

$\dfrac{D}{4}=(ab)^2-(a^2+1)(b^2-25)=0$

$25a^2-b^2+25=0$

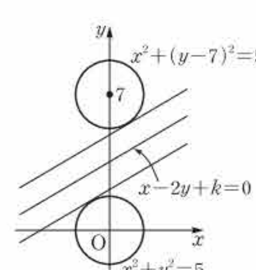
$\therefore -25a^2+b^2=25$

따라서 ㉠에서

$f(-5)f(5)=25$ 답 25

18 전략 기울기가 m이고 두 원 C_1, C_2 사이를 지나는 직선은 기울기가 m인 두 원 C_1, C_2의 접선 사이에 있음을 이용한다.

풀이 직선 $x-2y+k=0$, 즉 $y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{k}{2}$가 두 원 $x^2+y^2=5$, $x^2+(y-7)^2=5$ 사이를 지나려면 이 직선이 오른쪽 그림과 같이 기울기가 $\dfrac{1}{2}$인 두 원의 접선 사이에 있어야 한다.



원 $x^2+y^2=5$의 중심 $(0,\ 0)$과 직선 $x-2y+k=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|k|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{|k|}{\sqrt{5}}$$

원의 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$이므로 원과 직선이 접하려면

$$\frac{|k|}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}, \qquad |k|=5$$

$\therefore k=-5$ 또는 $k=5$

이때 직선이 원 $x^2+y^2=5$의 위쪽에서 접할 때의 k의 값이 5이므로

$k>5$ …… ㉠

원 $x^2+(y-7)^2=5$의 중심 $(0,\ 7)$과 직선 $x-2y+k=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|-2\cdot7+k|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{|-14+k|}{\sqrt{5}}$$

원의 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$이므로 원과 직선이 접하려면

$$\frac{|-14+k|}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}, \qquad |-14+k|=5$$

$-14+k=-5$ 또는 $-14+k=5$

$\therefore k=9$ 또는 $k=19$

이때 직선이 원 $x^2+(y-7)^2=5$의 아래쪽에서 접할 때의 k의 값이 9이므로

$k<9$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $\quad 5<k<9$

따라서 정수 k는 6, 7, 8의 3개이다. 답 3

19 전략 원 위의 점 A와 직선 $y=x-6$ 사이의 거리의 최솟값과 최댓값을 구한다.

풀이 원의 중심 $(0,\ 0)$과 직선 $y=x-6$, 즉 $x-y-6=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|-6|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=3\sqrt{2}$$

이때 원의 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$이므로 원 위의 점 A와 직선 BC 사이의 거리의 최솟값과 최댓값은 각각

$3\sqrt{2}-\sqrt{2}=2\sqrt{2},\ 3\sqrt{2}+\sqrt{2}=4\sqrt{2}$

따라서 정삼각형 ABC의 높이가 $2\sqrt{2}$, $4\sqrt{2}$일 때 넓이가 각각 최소와 최대이므로 넓이의 최솟값과 최댓값의 비는

$(2\sqrt{2})^2:(4\sqrt{2})^2=1:4$

$\therefore a=4$ 답 ③

닮은 두 도형의 닮음비가 $m:n$이면 넓이의 비는 $m^2:n^2$이다.

20 전략 원 $x^2+y^2=r^2$에 접하고 기울기가 m인 직선의 방정식은 $y=mx\pm r\sqrt{m^2+1}$임을 이용한다.

풀이 직선 $y=x+2$와 평행한 직선의 기울기는 1이므로 접선의 방정식은

$y=x\pm3\cdot\sqrt{1^2+1} \qquad \therefore y=x\pm3\sqrt{2}$

따라서 $k=3\sqrt{2}$ 또는 $k=-3\sqrt{2}$이므로

$k^2=18$ 답 18

$k^2=(3\sqrt{2})^2=18$, $k^2=(-3\sqrt{2})^2=18$

21 전략 두 점 P, Q에서의 접선의 방정식을 각각 구한 후 두 직선의 관계를 생각한다.

풀이 원 $x^2+y^2=13$ 위의 점 $\mathrm{P}(3,\ 2)$에서의 접선의 방정식은

$3x+2y=13$ …… ㉠

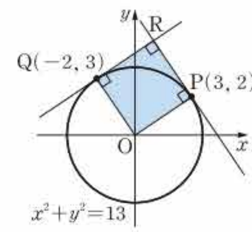
원 $x^2+y^2=13$ 위의 점 $\mathrm{Q}(-2,\ 3)$에서의 접선의 방정식은

$-2x+3y=13$ …… ㉡

이때 $3\cdot(-2)+2\cdot3=0$이므로 두 직선 ㉠, ㉡은 서로 수직이다.

직선 ㉠의 기울기는 $-\frac{3}{2}$, 직선 ㉡의 기울기는 $\frac{2}{3}$이므로 $-\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}=-1$ 임을 이용하여 판단할 수도 있다.

따라서 오른쪽 그림과 같이 □OPRQ는 원의 반지름의 길이 $\sqrt{13}$을 한 변의 길이로 하는 정사각형이므로 구하는 넓이는



$\sqrt{13}\cdot\sqrt{13}=13$

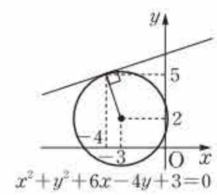
답 ④

22 전략 원의 중심과 원 위의 점 A를 지나는 직선은 점 A에서의 접선과 서로 수직임을 이용한다.

풀이 $x^2+y^2+6x-4y+3=0$ 에서

$(x+3)^2+(y-2)^2=10$

원의 중심 $(-3,\ 2)$와 점 $(-4,\ 5)$를 지나는 직선의 기울기는



$$\frac{5-2}{-4+3}=-3$$

따라서 점 $(-4,\ 5)$에서의 접선의 기울기는 $\frac{1}{3}$이므로 접선의 방정식은

$y-5=\frac{1}{3}(x+4) \qquad \therefore y=\frac{1}{3}x+\frac{19}{3}$

이 직선이 점 $(a,\ 7)$을 지나므로

$7=\frac{1}{3}a+\frac{19}{3} \qquad \therefore a=2$ 답 ①

23 전략 접점의 좌표를 $(x_1,\ y_1)$이라 하고 접선의 방정식을 구한다.

풀이 접점의 좌표를 $(x_1,\ y_1)$이라 하면 접선의 방정식은 $\quad x_1x+y_1y=1$

이 직선이 점 $(0,\ 3)$을 지나므로

$3y_1=1 \qquad \therefore y_1=\frac{1}{3}$

점 $\left(x_1,\ \frac{1}{3}\right)$은 원 $x^2+y^2=1$ 위의 점이므로

$x_1^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2=1, \qquad x_1^2=\frac{8}{9}$

$\therefore x_1=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$ 또는 $x_1=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

따라서 접선의 방정식은

$2\sqrt{2}x-y=-3,\ 2\sqrt{2}x+y=3$

이므로 접선이 x축과 만나는 점의 x좌표는

$k=-\frac{3\sqrt{2}}{4}$ 또는 $k=\frac{3\sqrt{2}}{4}$

$\therefore 16k^2=18$ 답 18

12 도형의 이동

29 평행이동

Lecture 51 점의 평행이동 162쪽

1-1 (1) $(-2+4,\ 3+1)$ $\quad \therefore (2,\ 4)$
(2) $(5-2,\ -8-3)$ $\quad \therefore (3,\ -11)$
답 (1) $(2,\ 4)$ (2) $(3,\ -11)$

1-2 (1) $(9+3,\ 1-4)$ $\quad \therefore (12,\ -3)$
(2) $(3+3,\ -6-4)$ $\quad \therefore (6,\ -10)$
답 (1) $(12,\ -3)$ (2) $(6,\ -10)$

$(x,\ y) \longrightarrow (x+3,\ y-4)$는 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -4만큼 평행이동하는 것을 나타낸다.

1-3 $-1+a=2,\ 4+b=9$이므로
$a=3,\ b=5$ 답 $a=3,\ b=5$

1-4 (1) $x-2=0,\ y+5=7$이므로
$x=2,\ y=2$ $\quad \therefore (2,\ 2)$
(2) $x-2=-10,\ y+5=6$이므로
$x=-8,\ y=1$ $\quad \therefore (-8,\ 1)$
답 (1) $(2,\ 2)$ (2) $(-8,\ 1)$

Lecture 52 도형의 평행이동 163쪽

1-1 (1) $(x-2)-2(y-4)+3=0$
$\therefore x-2y+9=0$
(2) $\{(x-3)-1\}^2+\{(y+2)+1\}^2=9$
$\therefore (x-4)^2+(y+3)^2=9$
(3) $y-5=(x+1)^2+4$
$\therefore y=x^2+2x+10$
답 (1) $x-2y+9=0$
(2) $(x-4)^2+(y+3)^2=9$
(3) $y=x^2+2x+10$

쌤 한마디

도형을 평행이동해도 다음은 변하지 않는다.
① 직선 ◎ 직선의 기울기
② 원 ◎ 원의 반지름의 길이
③ 포물선 ◎ 포물선의 폭

1-2 $2(x-5)-3(y+3)+1=0$
$\therefore 2x-3y-18=0$ 답 $2x-3y-18=0$

1-3 원 $(x+3)^2+(y-2)^2=4$가 평행이동 $(x,\ y) \longrightarrow (x+a,\ y+b)$에 의하여 옮겨지는 원의 방정식은
$\{(x-a)+3\}^2+\{(y-b)-2\}^2=4$
$\therefore (x-a+3)^2+(y-b-2)^2=4$
이 원이 원 $(x+5)^2+(y-5)^2=4$와 일치하므로
$-a+3=5,\ -b-2=-5$
$\therefore a=-2,\ b=3$ 답 $a=-2,\ b=3$

1-4 주어진 포물선을 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동하면 원래의 포물선과 일치하므로 구하는 포물선의 방정식은
$y-4=3(x+1)^2$
$\therefore y=3x^2+6x+7$ 답 $y=3x^2+6x+7$

주어진 평행이동은 도형을 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -4만큼 평행이동한다.

기본+표준 유형 Q+Q 164쪽

01 $a-3=-7,\ 5-8=b$이므로
$a=-4,\ b=-3$ 답 $a=-4,\ b=-3$

02 점 $(4,\ 9)$를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 점의 좌표가 $(-1,\ 2)$라 하면
$4+m=-1,\ 9+n=2$
$\therefore m=-5,\ n=-7$
따라서 점 $(a,\ b)$를 x축의 방향으로 -5만큼, y축의 방향으로 -7만큼 평행이동한 점의 좌표는
$(a-5,\ b-7)$
이 점이 점 $(2,\ -6)$과 일치하므로
$a-5=2,\ b-7=-6$
$\therefore a=7,\ b=1$
$\therefore a+b=8$ 답 ④

03 직선 $4x-3y-6=0$을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 직선의 방정식은
$4(x-a)-3(y+1)-6=0$
$\therefore 4x-3y-4a-9=0$
이 직선이 점 $(2,\ -3)$을 지나므로
$8+9-4a-9=0$ $\quad \therefore a=2$ 답 2

04 점 $(2,\ -1)$을 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 점의 좌표가 $(-2,\ 5)$라 하면
$2+m=-2,\ -1+n=5$
$\therefore m=-4,\ n=6$
따라서 직선 $2x+ay+b=0$을 x축의 방향으로 -4만큼, y축의 방향으로 6만큼 평행이동한 직선의 방정식은
$2(x+4)+a(y-6)+b=0$
$\therefore 2x+ay+8-6a+b=0$

이 직선이 직선 $2x-3y+14=0$과 일치하므로

$a=-3,\ 8-6a+b=14$

$\therefore a=-3,\ b=-12$

$\therefore a-b=9$ 답 ④

05 $x^2+y^2+6x-4y+a=0$에서

$(x+3)^2+(y-2)^2=13-a$

원 $(x+3)^2+(y-2)^2=13-a$를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 원의 방정식은

$(x-1+3)^2+(y+4-2)^2=13-a$

$\therefore (x+2)^2+(y+2)^2=13-a$

이 원이 원 $(x+2)^2+(y+b)^2=5$와 일치하므로

$2=b,\ 13-a=5 \quad \therefore a=8,\ b=2$

$\therefore ab=16$ 답 16

06 $x^2+y^2+4x-8y+11=0$에서

$(x+2)^2+(y-4)^2=9$

원 $(x+2)^2+(y-4)^2=9$를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 5만큼 평행이동한 원의 방정식은

$(x+3+2)^2+(y-5-4)^2=9$

$\therefore (x+5)^2+(y-9)^2=9$

따라서 구하는 원의 중심의 좌표는

$(-5,\ 9)$ 답 $(-5,\ 9)$

07 $y=(x-2)^2+7$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 a만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y-a=(x+1-2)^2+7$

$\therefore y=(x-1)^2+a+7$

이 그래프가 $y=(x-b)^2-3$의 그래프와 일치하므로

$a+7=-3,\ b=1$

$\therefore a=-10,\ b=1$

$\therefore b-a=11$ 답 11

다른 풀이 이차함수 $y=(x-2)^2+7$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는

$(2,\ 7)$

평행이동한 그래프의 꼭짓점의 좌표는

$(2-1,\ 7+a) \quad \therefore (1,\ a+7)$

한편 이차함수 $y=(x-b)^2-3$의 그래프의 꼭짓점의 좌표가 $(b,\ -3)$이므로

$1=b,\ a+7=-3 \quad \therefore a=-10,\ b=1$

$\therefore b-a=11$

08 포물선 $y=2x^2-16x+23$, 즉 $y=2(x-4)^2-9$를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 $a+5$만큼 평행이동한 포물선의 방정식은

$y-(a+5)=2(x-a-4)^2-9$

$\therefore y=2(x-a-4)^2+a-4$

Q BOX

도형 $f(x,\ y)=0$을 도형 $f(x+3,\ y-5)=0$으로 옮기는 평행이동

➡ x 대신 $x+3$, y 대신 $y-5$를 대입

➡ x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 5만큼 평행이동

점 $(a,\ b)$를 x축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$(a,\ -b)$

이 점을 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$(-a,\ b)$

➡ y축에 대한 대칭이동과 같다.

점 $(a,\ b)$를 y축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$(-a,\ b)$

이 점을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$(b,\ -a)$

$y=2x^2-16x+23$
$=2(x^2-8x+16-16)+23$
$=2(x-4)^2-32+23$
$=2(x-4)^2-9$

이 포물선의 꼭짓점 $(a+4,\ a-4)$가 x축 위에 있으므로

$a-4=0 \quad \therefore a=4$

따라서 이 꼭짓점의 x좌표는

$4+4=8$ 답 ④

다른 풀이 $y=2x^2-16x+23$에서

$y=2(x-4)^2-9$

이므로 포물선의 꼭짓점의 좌표는 $(4,\ -9)$

점 $(4,\ -9)$를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 $a+5$만큼 평행이동한 점의 좌표는

$(4+a,\ -9+a+5) \quad \therefore (4+a,\ -4+a)$

이 점이 x축 위에 있으므로

$-4+a=0 \quad \therefore a=4$

30 대칭이동

Lecture 53 점의 대칭이동

165쪽

1-1 답 (1) $(-3,\ -2)$ (2) $(3,\ 2)$
(3) $(3,\ -2)$ (4) $(2,\ -3)$

1-2 점 $(6,\ 3)$을 x축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(6,\ -3)$

이 점을 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$(-6,\ 3)$ 답 $(-6,\ 3)$

1-3 점 $(5,\ -8)$을 y축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(-5,\ -8)$

이 점을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$(-8,\ -5)$ 답 $(-8,\ -5)$

Lecture 54 도형의 대칭이동

166쪽

1-1 (1) $2x-(-y)+3=0 \quad \therefore 2x+y+3=0$

(2) $2\cdot(-x)-y+3=0 \quad \therefore 2x+y-3=0$

(3) $2\cdot(-x)-(-y)+3=0 \quad \therefore 2x-y-3=0$

(4) $2y-x+3=0 \quad \therefore x-2y-3=0$

답 (1) $2x+y+3=0$ (2) $2x+y-3=0$
(3) $2x-y-3=0$ (4) $x-2y-3=0$

1-2 원 $(x-1)^2+(y+4)^2=5$를 x축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$(x-1)^2+(-y+4)^2=5$

$\therefore (x-1)^2+(y-4)^2=5$

이 원을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$(y-1)^2+(x-4)^2=5$

$\therefore (x-4)^2+(y-1)^2=5$

답 $(x-4)^2+(y-1)^2=5$

1-3 포물선 $y=-x^2+x-2$를 y축에 대하여 대칭이동한 포물선의 방정식은

$y=-(-x)^2+(-x)-2$

$\therefore y=-x^2-x-2$

이 포물선을 원점에 대하여 대칭이동한 포물선의 방정식은

$-y=-(-x)^2-(-x)-2$

$\therefore y=x^2-x+2$ 답 $y=x^2-x+2$

Q BOX

도형 $f(x, y)=0$을 y축에 대하여 대칭이동하면

$f(-x, y)=0$

이 도형을 원점에 대하여 대칭이동하면

$f(x, -y)=0$

➡ x축에 대한 대칭이동과 같다.

Lecture 55 점 또는 직선에 대한 대칭이동

167쪽

1-1 $\left(\frac{4-2}{2}, \frac{7+5}{2}\right)$ $\therefore (1, 6)$ 답 $(1, 6)$

1-2 구하는 점의 좌표를 (a, b)라 하면

$\frac{-1+a}{2}=-4$, $\frac{1+b}{2}=3$

$\therefore a=-7, b=5$

따라서 구하는 점의 좌표는

$(-7, 5)$ 답 $(-7, 5)$

2-1 답 $\frac{-5+q}{2}$, $\frac{-5+q}{2}$, -1, -6, -2

2-2 점 $\mathrm{P}(1, 4)$를 직선 $y=2x-3$에 대하여 대칭이동한 점을 $\mathrm{Q}(p, q)$라 하자.

$\overline{\mathrm{PQ}}$의 중점의 좌표는

$\left(\frac{1+p}{2}, \frac{4+q}{2}\right)$

이 점이 직선 $y=2x-3$ 위의 점이므로

$\frac{4+q}{2}=2\cdot\frac{1+p}{2}-3$

$\therefore 2p-q=8$ ······ ㉠

또 직선 PQ는 직선 $y=2x-3$과 수직이므로

$\frac{q-4}{p-1}\cdot 2=-1$

$\therefore p+2q=9$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$p=5, q=2$

따라서 구하는 점의 좌표는

$(5, 2)$ 답 $(5, 2)$

㉠$\times 2+$㉡을 하면

$5p=25$ $\therefore p=5$

$p=5$를 ㉠에 대입하면

$10-q=8$ $\therefore q=2$

기본+표준 유형 Q+Q

168쪽

01 점 (a, b)를 x축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$(a, -b)$

이 점을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$(-b, a)$

이 점이 점 $(-6, 2)$와 일치하므로

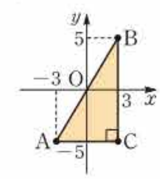
$-b=-6, a=2$ $\therefore a=2, b=6$

$\therefore a+b=8$ 답 8

02 점 $(-3, 5)$를 x축, y축, 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 각각

$\mathrm{A}(-3, -5)$, $\mathrm{B}(3, 5)$, $\mathrm{C}(3, -5)$

따라서 △ABC는 오른쪽 그림과 같으므로



$\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\cdot\overline{\mathrm{AC}}\cdot\overline{\mathrm{BC}}$

$=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 10=30$

답 ④

△ABC는 ∠C=90°인 직각삼각형이다.

03 직선 $y=-5x+2$를 y축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$y=5x+2$

이므로 이 직선과 평행한 직선의 기울기는 5이다.

따라서 점 $(2, -1)$을 지나고 기울기가 5인 직선의 방정식은

$y+1=5(x-2)$ $\therefore y=5x-11$

답 $y=5x-11$

점 (x_1, y_1)을 지나고 기울기가 m인 직선의 방정식은

$y-y_1=m(x-x_1)$

04 직선 $4x+3y-8=0$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 직선 l_1의 방정식은

$3x+4y-8=0$

직선 l_1을 원점에 대하여 대칭이동한 직선 l_2의 방정식은

$-3x-4y-8=0$ $\therefore 3x+4y+8=0$

따라서 직선 l_2의 y절편은 -2이다. 답 ②

05 중심의 좌표가 $(5, -4)$이고 반지름의 길이가 r인 원의 방정식은

$(x-5)^2+(y+4)^2=r^2$

이 원을 x축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$(x-5)^2+(-y+4)^2=r^2$

$\therefore (x-5)^2+(y-4)^2=r^2$

이 원이 점 $(3, 7)$을 지나므로

$(3-5)^2+(7-4)^2=r^2$, $r^2=13$

$\therefore r=\sqrt{13}$ $(\because r>0)$ 답 ④

06 원 $(x+6)^2+(y-2)^2=5$를 원점에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$(-x+6)^2+(-y-2)^2=5$

$\therefore (x-6)^2+(y+2)^2=5$

이 원을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$(y-6)^2+(x+2)^2=5$

$\therefore (x+2)^2+(y-6)^2=5$

이 원의 중심 $(-2, 6)$이 직선 $y=ax+b$ 위에 있으므로 $-2a+b=6$

$\therefore 2a-b=-6$ 답 -6

07 $y=x^2+4kx-2$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$-y=x^2+4kx-2$

$\therefore y=-x^2-4kx+2$

$=-(x+2k)^2+4k^2+2$

이 그래프의 꼭짓점 $(-2k, 4k^2+2)$가 직선 $y=2x+5$ 위에 있으므로

$4k^2+2=-4k+5,\quad 4k^2+4k-3=0$

$(2k+3)(2k-1)=0$

$\therefore k=\frac{1}{2}\ (\because k>0)$ 답 $\frac{1}{2}$

다른 풀이 $y=x^2+4kx-2$

$=(x+2k)^2-4k^2-2$

이므로 포물선의 꼭짓점의 좌표는

$(-2k, -4k^2-2)$

이 꼭짓점을 x축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$(-2k, 4k^2+2)$

이 점이 직선 $y=2x+5$ 위에 있으므로

$4k^2+2=-4k+5,\quad 4k^2+4k-3=0$

$(2k+3)(2k-1)=0$

$\therefore k=\frac{1}{2}\ (\because k>0)$

Q BOX

포물선의 대칭이동은 포물선의 꼭짓점의 대칭이동으로 생각할 수 있다.

대칭이동한 포물선의 꼭짓점의 좌표

08 포물선 $y=x^2+ax-b$를 원점에 대하여 대칭이동한 포물선의 방정식은

$-y=(-x)^2+a\cdot(-x)-b$

$\therefore y=-x^2+ax+b=-\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\frac{a^2}{4}+b$

이 포물선의 꼭짓점의 좌표는

$\left(\frac{a}{2}, \frac{a^2}{4}+b\right)$

이 점이 점 $(-1, -6)$과 일치하므로

$\frac{a}{2}=-1,\ \frac{a^2}{4}+b=-6\qquad \therefore a=-2,\ b=-7$

$\therefore a-b=5$ 답 5

09 점 $(a, -3)$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$(-3, a)$

이 점을 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 점의 좌표는

$(-5, a+4)$

이 점이 점 $(-5, b)$와 일치하므로

$a+4=b\qquad \therefore b-a=4$ 답 4

10 직선 $y=-3x+4$를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$y+1=-3(x-2)+4$

$\therefore y=-3x+9$

이 직선을 y축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$y=3x+9$

따라서 이 직선의 x절편은

$0=3x+9\qquad \therefore x=-3$ 답 ③

11 방정식 $f(x, y)=0$이 나타내는 도형을 y축에 대하여 대칭이동하면

$f(-x, y)=0$

이 방정식이 나타내는 도형을 y축의 방향으로 -1만큼 평행이동하면

$f(-x, y+1)=0$

따라서 방정식 $f(-x, y+1)=0$이 나타내는 도형은 주어진 도형을 y축에 대하여 대칭이동한 후 y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 ⑤이다. 답 ⑤

다른 풀이 주어진 도형은 네 직선

$x=1,\ x=3,\ y=0,\ y=1$ ······ ㉠

로 둘러싸인 도형이다.

㉠의 네 식에 x 대신 $-x$, y 대신 $y+1$을 각각 대입하면

$-x=1,\ -x=3,\ y+1=0,\ y+1=1$

$\therefore x=-1,\ x=-3,\ y=-1,\ y=0$

따라서 방정식 $f(-x, y+1)=0$이 나타내는 도형은 ⑤이다.

쌤 한마디

방정식 $f(-x, y+1)=0$이 나타내는 도형은 주어진 도형을 y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 후 y축에 대하여 대칭이동한 것과도 같다. 즉

$f(x, y)=0 \longrightarrow f(x, y+1)=0$

$\longrightarrow f(-x, y+1)=0$

12 방정식 $g(x, y)=0$이 나타내는 도형은 방정식 $f(x, y)=0$이 나타내는 도형을 x축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

방정식 $f(x, y)=0$이 나타내는 도형을 x축에 대하여 대칭이동하면

$f(x, -y)=0$

방정식 $f(x,\ -y)=0$이 나타내는 도형을 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동하면

$f(x-1,\ -(y+1))=0$

$\therefore f(x-1,\ -y-1)=0$ 　　답 ①

13 두 점 $(a,\ 8)$, $(-3,\ b)$를 잇는 선분의 중점의 좌표가 $(-2,\ 5)$이므로

$\frac{a-3}{2}=-2,\ \frac{8+b}{2}=5$

$\therefore a=-1,\ b=2$

$\therefore a+b=1$ 　　답 1

14 $x^2+y^2-6y+2=0$에서

$x^2+(y-3)^2=7$

이 원의 중심 $(0,\ 3)$을 점 $(-1,\ 4)$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면

$\frac{0+a}{2}=-1,\ \frac{3+b}{2}=4$

$\therefore a=-2,\ b=5$

따라서 대칭이동한 원의 중심의 좌표는 $(-2,\ 5)$이고, 반지름의 길이는 $\sqrt{7}$이므로 원의 방정식은

$(x+2)^2+(y-5)^2=7$ 　　답 ②

원을 대칭이동해도 원의 반지름의 길이는 변하지 않는다.

15 두 점 $(2,\ -3)$, $(-6,\ 1)$을 잇는 선분의 중점의 좌표는

$\left(\frac{2-6}{2},\ \frac{-3+1}{2}\right)$ 　$\therefore (-2,\ -1)$

이 점이 직선 $y=ax+b$ 위의 점이므로

$-1=-2a+b$ 　　…… ㉠

또 두 점 $(2,\ -3)$, $(-6,\ 1)$을 지나는 직선이 직선 $y=ax+b$와 수직이므로

$\frac{1+3}{-6-2}\cdot a=-1$ 　$\therefore a=2$

수직인 두 직선의 기울기의 곱은 -1이다.

$a=2$를 ㉠에 대입하여 풀면 　$b=3$

$\therefore ab=6$ 　　답 ③

16 원 $(x-2)^2+(y-3)^2=9$의 중심 $(2,\ 3)$을 직선 $y=-x+1$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 $(p,\ q)$라 하면 두 점 $(2,\ 3)$, $(p,\ q)$를 잇는 선분의 중점의 좌표는

$\left(\frac{2+p}{2},\ \frac{3+q}{2}\right)$

이 점이 직선 $y=-x+1$ 위의 점이므로

$\frac{3+q}{2}=-\frac{2+p}{2}+1$

$\therefore p+q=-3$ 　　…… ㉠

또 두 점 $(2,\ 3)$, $(p,\ q)$를 지나는 직선이 직선 $y=-x+1$에 수직이므로

$\frac{q-3}{p-2}\cdot(-1)=-1$

$\therefore p-q=-1$ 　　…… ㉡

Q BOX

㉠+㉡을 하면

$2p=-4$

$\therefore p=-2$

$p=-2$를 ㉠에 대입하면

$-2+q=-3$

$\therefore q=-1$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$p=-2,\ q=-1$

따라서 대칭이동한 원의 중심의 좌표는 $(-2,\ -1)$이고, 반지름의 길이는 3이므로 원의 방정식은

$(x+2)^2+(y+1)^2=9$

$\therefore x^2+y^2+4x+2y-4=0$

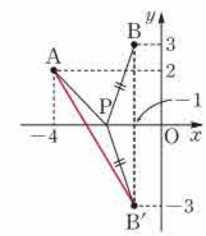
즉 $a=4,\ b=2,\ c=-4$이므로

$a+b-c=10$ 　　답 10

17 점 B를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 B′이라 하면

B′$(-1,\ -3)$

오른쪽 그림에서 $\overline{PB}=\overline{PB'}$이므로



$\overline{AP}+\overline{PB}=\overline{AP}+\overline{PB'}$

$\geq\overline{AB'}$

$=\sqrt{3^2+(-5)^2}$

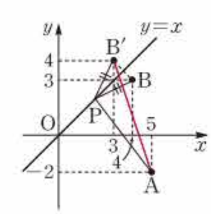
$=\sqrt{34}$

따라서 구하는 최솟값은 $\sqrt{34}$이다. 　　답 $\sqrt{34}$

18 점 B$(4,\ 3)$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 B′이라 하면

B′$(3,\ 4)$

오른쪽 그림에서 $\overline{PB}=\overline{PB'}$이므로



$\overline{AP}+\overline{BP}=\overline{AP}+\overline{PB'}$

$\geq\overline{AB'}$

$=\sqrt{(-2)^2+6^2}$

$=2\sqrt{10}$

따라서 구하는 최솟값은 $2\sqrt{10}$이다. 　　답 ③

중단원 마무리

171쪽

01 전략 점 $(x,\ y)$를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 점의 좌표는 $(x+p,\ y+q)$임을 이용한다.

풀이 점 $(7,\ -9)$를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 $a+3$만큼 평행이동한 점의 좌표는

$(7+a,\ -9+a+3)$

$\therefore (a+7,\ a-6)$

이 점이 점 $(b,\ -2)$와 같으므로

$a+7=b,\ a-6=-2$

$\therefore a=4,\ b=11$

$\therefore a+b=15$ 　　답 15

02 전략 점 A와 원의 중심 사이의 거리가 반지름의 길이와 같음을 이용하여 원의 방정식을 세우고 두 점 B, C의 좌표를 원의 방정식에 대입한다.

풀이 점 $A(-2, 1)$을 x축의 방향으로 m만큼 평행이동한 점 B의 좌표는

$(-2+m, 1)$

점 $B(-2+m, 1)$을 y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 점 C의 좌표는

$(-2+m, 1+n)$

세 점 A, B, C를 지나는 원의 중심을 $D(3, 2)$라 하면 반지름의 길이가 $\overline{AD}$의 길이와 같으므로 반지름의 길이는

$\overline{AD}=\sqrt{(3+2)^2+(2-1)^2}=\sqrt{26}$

따라서 원의 방정식은

$(x-3)^2+(y-2)^2=26$

점 B는 원 위의 점이므로

$(-2+m-3)^2+(1-2)^2=26$

$m^2-10m=0, \quad m(m-10)=0$

$\therefore m=10 \ (\because m>0)$

또 점 C는 원 위의 점이므로

$(8-3)^2+(1+n-2)^2=26$

$n^2-2n=0, \quad n(n-2)=0$

$\therefore n=2 \ (\because n>0)$

$\therefore mn=20$

답 ③

$m=10$이므로 점 C의 좌표는 $(8, 1+n)$

03 전략 직선 $ax+by+c=0$을 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 직선의 방정식은 $a(x-p)+b(y-q)+c=0$임을 이용한다.

풀이 직선 $kx-y+2k-3=0$을 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$k(x-m)-(y-4)+2k-3=0$

$\therefore kx-y-km+2k+1=0$

이 직선이 직선 $3x-y+2=0$과 일치하므로

$k=3, \ -km+2k+1=2$

따라서 $k=3$, $m=\frac{5}{3}$이므로

$km=5$

답 5

$k=3$을 $-km+2k+1=2$에 대입하면
$-3m+7=2$
$-3m=-5$
$\therefore m=\frac{5}{3}$

04 전략 두 원이 평행이동에 의하여 완전히 겹쳐지려면 두 원의 반지름의 길이가 같아야 함을 이용한다.

풀이 평행이동하여 원 $(x-6)^2+(y+3)^2=25$와 완전히 겹쳐지려면 반지름의 길이가 5로 같아야 한다.

ㄱ. 원 $x^2+y^2=25$의 반지름의 길이가 5이므로 평행이동하여 주어진 원과 완전히 겹쳐진다.

ㄴ. 원 $(x+4)^2+y^2=16$의 반지름의 길이가 4이므로 평행이동하여도 주어진 원과 완전히 겹쳐지지 않는다.

ㄷ. $x^2+y^2-10x+2y+1=0$에서

$(x-5)^2+(y+1)^2=25$

따라서 반지름의 길이가 5이므로 평행이동하여 주어진 원과 완전히 겹쳐진다.

ㄹ. $x^2+y^2-4x-8y+15=0$에서

$(x-2)^2+(y-4)^2=5$

따라서 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$이므로 평행이동하여도 주어진 원과 완전히 겹쳐지지 않는다.

이상에서 평행이동하여 주어진 원과 완전히 겹쳐지는 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

05 전략 원의 넓이가 직선에 의하여 이등분되려면 원의 중심이 그 직선 위에 있어야 함을 이용한다.

풀이 원 $(x+1)^2+(y+2)^2=9$를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 a만큼 평행이동한 원 C의 방정식은

$(x-3+1)^2+(y-a+2)^2=9$

$\therefore (x-2)^2+(y-a+2)^2=9$

원 C의 넓이가 직선 $3x+4y-7=0$에 의하여 이등분되려면 원 C의 중심 $(2, a-2)$가 이 직선 위에 있어야 하므로

$6+4(a-2)-7=0, \quad 4a-9=0$

$\therefore a=\frac{9}{4}$

답 ⑤

06 전략 $y=(x+p)^2+q$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 그래프의 식은 $y-n=(x-m+p)^2+q$임을 이용한다.

풀이 $y=x^2-6x$, 즉 $y=(x-3)^2-9$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y-b=(x-a-3)^2-9$

$\therefore y=(x-a-3)^2+b-9$

이 그래프가 $y=x^2+8x+17$, 즉 $y=(x+4)^2+1$의 그래프와 일치하므로

$-a-3=4, \ b-9=1$

$\therefore a=-7, \ b=10$ ··· ❶

따라서 직선 $y=-5x+10$을 x축의 방향으로 -7만큼, y축의 방향으로 10만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$y-10=-5(x+7)+10$

$\therefore y=-5x-15$ ··· ❷

즉 구하는 y절편은 -15이다. ··· ❸

답 -15

단계	채점 기준	비율
❶	a, b의 값을 구할 수 있다.	50 %
❷	평행이동한 직선의 방정식을 구할 수 있다.	40 %
❸	평행이동한 직선의 y절편을 구할 수 있다.	10 %

07 전략 점 (x, y)를 y축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(-x, y)$임을 이용한다.

풀이 점 $A(-3, 1)$을 y축에 대하여 대칭이동한 점 P의 좌표는 $(3, 1)$

점 B(1, k)를 y축의 방향으로 -5만큼 평행이동한 점 Q의 좌표는

$(1,\ k-5)$

직선 BP와 직선 PQ가 서로 수직이려면

$\frac{1-k}{2} \cdot \frac{6-k}{2} = -1$

$k^2-7k+10=0, \qquad (k-2)(k-5)=0$

$\therefore k=2$ 또는 $k=5$

따라서 모든 실수 k의 값의 곱은

$2 \cdot 5 = 10$ 답 ②

08 전략 네 점 P, Q, R, S를 꼭짓점으로 하는 사각형은 직사각형임을 이용한다.

풀이 Q(a, $-b$), R($-a$, b), S($-a$, $-b$)이고, 네 점 P, Q, R, S를 꼭짓점으로 하는 사각형의 넓이가 12이므로

$2|a| \cdot 2|b| = 12 \qquad \therefore |ab|=3$ 답 ②

09 전략 도형 $f(x,\ y)=0$을 y축에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은 $f(-x,\ y)=0$임을 이용한다.

풀이 직선 $y=-5x+k$를 y축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$y=5x+k$

이 직선이 점 $(-2,\ 4)$를 지나므로

$4=-10+k \qquad \therefore k=14$ 답 ③

10 전략 원과 직선이 만나지 않으려면 원의 중심과 직선 사이의 거리가 반지름의 길이보다 길어야 함을 이용한다.

풀이 직선 $3x-y-a=0$을 원점에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$-3x+y-a=0$

$\therefore 3x-y+a=0$ ···· ❶

이 직선이 원 $(x-2)^2+(y+1)^2=10$과 만나지 않으므로

$\frac{|3 \cdot 2-1 \cdot (-1)+a|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}} > \sqrt{10}, \qquad |7+a|>10$

$7+a<-10$ 또는 $7+a>10$

$\therefore a<-17$ 또는 $a>3$ ···· ❷

따라서 자연수 a의 최솟값은 4이다. ···· ❸

답 4

단계	채점 기준	비율
❶	직선 $3x-y-a=0$을 원점에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식을 구할 수 있다.	40 %
❷	원과 직선이 만나지 않도록 하는 a의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❸	자연수 a의 최솟값을 구할 수 있다.	20 %

11 전략 도형 $f(x,\ y)=0$을 x축에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은 $f(x,\ -y)=0$임을 이용한다.

Q BOX

직선 BP의 기울기는 $\frac{1-k}{3-1}=\frac{1-k}{2}$,

직선 PQ의 기울기는 $\frac{k-5-1}{1-3}=\frac{6-k}{2}$

원의 대칭이동은 원의 중심의 대칭이동으로 생각할 수 있다.

가로, 세로의 길이가 각각 $\overline{PR}$, $\overline{PQ}$인 직사각형이다.

이동한 포물선의 꼭짓점의 좌표를 구하면 되므로 포물선의 꼭짓점의 대칭이동과 평행이동으로 생각한다.

원의 중심의 좌표가 $(2,\ -1)$이고 반지름의 길이가 $\sqrt{10}$이다.

풀이 원 $(x-4)^2+(y+a)^2=9$를 x축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$(x-4)^2+(-y+a)^2=9$

$\therefore (x-4)^2+(y-a)^2=9$

이 원이 원 $(x+b)^2+(y+7)^2=9$와 일치하므로

$a=-7,\ b=-4$

$\therefore a+b=-11$ 답 -11

다른 풀이 원 $(x-4)^2+(y+a)^2=9$의 중심의 좌표는

$(4,\ -a)$

이 점을 x축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$(4,\ a)$

이 점이 원 $(x+b)^2+(y+7)^2=9$의 중심 $(-b,\ -7)$과 일치하므로

$a=-7,\ b=-4$

$\therefore a+b=-11$

12 전략 도형 $f(x,\ y)=0$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은 $f(y,\ x)=0$임을 이용한다.

풀이 원 $x^2+y^2-10x-6y+16=0$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$x^2+y^2-6x-10y+16=0$

이 원이 y축과 만나는 점의 y좌표는

$y^2-10y+16=0, \qquad (y-2)(y-8)=0$

$\therefore y=2$ 또는 $y=8$

따라서 두 교점 사이의 거리는

$8-2=6$ 답 ②

13 전략 이동하는 순서에 주의하여 포물선의 꼭짓점이 대칭이동과 평행이동한 점의 좌표를 구한다.

풀이 포물선 $y=(x-a)^2-5$의 꼭짓점 $(a,\ -5)$를 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$(-a,\ 5)$

이 점을 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 점의 좌표는

$(3-a,\ 4)$

따라서 점 $(3-a,\ 4)$가 직선 $y=-x+2$ 위에 있으므로

$4=a-1 \qquad \therefore a=5$ 답 ①

14 전략 평행이동한 직선의 방정식과 대칭이동한 직선의 방정식을 차례대로 구한다.

풀이 직선 $3x-4y+6=0$이 평행이동

$(x,\ y) \longrightarrow (x+a,\ y-2)$에 의하여 옮겨지는 직선의 방정식은

$3(x-a)-4(y+2)+6=0$

$\therefore 3x-4y-3a-2=0$

이 직선을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$4x-3y+3a+2=0$

이 직선이 직선 $4x-3y-7=0$과 일치하므로

$3a+2=-7 \quad \therefore a=-3$ 답 -3

15 전략 방정식 $f(x, y)=0$이 나타내는 도형을 방정식 $f(x+1, 2-y)=0$이 나타내는 도형으로 옮기는 평행이동과 대칭이동을 생각한다.

풀이 방정식 $f(x, y)=0$이 나타내는 도형을 x축에 대하여 대칭이동하면 $f(x, -y)=0$

이 방정식이 나타내는 도형을 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동하면

$f(x+1, -(y-2))=0$, 즉 $f(x+1, 2-y)=0$

따라서 방정식 $f(x+1, 2-y)=0$이 나타내는 도형은 방정식 $f(x, y)=0$이 나타내는 도형을 x축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 ②이다. 답 ②

16 전략 점 P를 직선 l에 대하여 대칭이동한 점을 P′이라 하면 $\overline{PP'}$의 중점은 직선 l 위의 점이고, 직선 PP′은 직선 l과 수직임을 이용한다.

풀이 점 $(3, -1)$을 직선 $y=2x+3$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 (a, b)라 하면 두 점 $(3, -1)$, (a, b)를 이은 선분의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{3+a}{2}, \frac{-1+b}{2}\right)$$

이 점이 직선 $y=2x+3$ 위의 점이므로

$$\frac{-1+b}{2}=2\cdot\frac{3+a}{2}+3$$

$\therefore 2a-b=-13$ …… ㉠

또 두 점 $(3, -1)$, (a, b)를 지나는 직선이 직선 $y=2x+3$과 수직이므로

$\dfrac{b+1}{a-3}\cdot 2=-1 \quad \therefore a+2b=1$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-5, b=3$

㉠×2+㉡을 하면
$5a=-25$
$\therefore a=-5$
$a=-5$를 ㉠에 대입하면 $-10-b=-13$
$\therefore b=3$

따라서 대칭이동한 점의 좌표는 $(-5, 3)$이다.

답 $(-5, 3)$

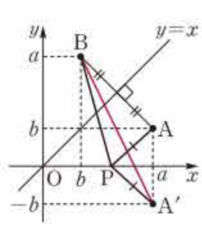
17 전략 점 A를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 A′이라 하면 $\overline{AP}+\overline{PB}\geq\overline{A'B}$임을 이용한다.

풀이 $A(a, b)$ $(a>0, b>0)$라 하면 점 A를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점은

B(b, a)

점 A를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 A′이라 하면

A′$(a, -b)$



위의 그림에서 $\overline{AP}=\overline{A'P}$이므로

$$\begin{aligned}\overline{AP}+\overline{PB}&=\overline{A'P}+\overline{PB}\\&\geq\overline{A'B}\\&=\sqrt{(b-a)^2+(a+b)^2}\\&=\sqrt{2(a^2+b^2)}\end{aligned}$$

$\overline{AP}+\overline{PB}$의 최솟값이 $10\sqrt{2}$이므로

$\sqrt{2(a^2+b^2)}=10\sqrt{2}$

양변을 제곱하여 정리하면

$a^2+b^2=100$

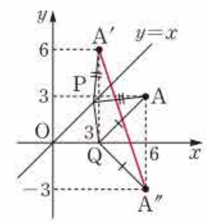
이때 $\overline{OA}=\sqrt{a^2+b^2}$이므로

$\overline{OA}=\sqrt{100}=10$ 답 10

18 전략 점 A(6, 3)을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 A′, x축에 대하여 대칭이동한 점을 A″이라 하면 $\overline{AP}+\overline{PQ}+\overline{QA}\geq\overline{A'A''}$임을 이용한다.

풀이 점 A(6, 3)을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 A′이라 하면

A′(3, 6) ➊



점 A(6, 3)을 x축에 대하여 대칭이동한 점을 A″이라 하면

A″(6, −3) ➋

위의 그림에서 $\overline{AP}=\overline{A'P}$, $\overline{QA}=\overline{QA''}$이므로

$$\begin{aligned}\overline{AP}+\overline{PQ}+\overline{QA}&=\overline{A'P}+\overline{PQ}+\overline{QA''}\\&\geq\overline{A'A''}\\&=\sqrt{3^2+(-9)^2}\\&=3\sqrt{10}\end{aligned}$$

두 점 A′, A″을 지나는 직선 위에 두 점 P, Q가 있을 때, $\overline{AP}+\overline{PQ}+\overline{QA}$의 길이가 최소이다.

따라서 구하는 최솟값은 $3\sqrt{10}$이다. ➌

답 $3\sqrt{10}$

단계	채점 기준	비율
➊	점 A를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 구할 수 있다.	30 %
➋	점 A를 x축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 구할 수 있다.	30 %
➌	$\overline{AP}+\overline{PQ}+\overline{QA}$의 최솟값을 구할 수 있다.	40 %

Work Book

01 다항식의 연산

01 다항식의 덧셈과 뺄셈

W 2쪽

01 답 (1) $2x^3+(2y+6)x-y^3-2y^2+3$

(2) $2x^3+6x+3+2xy-2y^2-y^3$

02 (2) $(3x^2+5xy-2y^3)-(-x^2-7xy+6y^3)$

$=3x^2+5xy-2y^3+x^2+7xy-6y^3$

$=4x^2+12xy-8y^3$

답 (1) $-2x^2+4x+5$ (2) $4x^2+12xy-8y^3$

03 (1) $A-B=(2x^2+6x-1)-(-4x^3-3x+5)$

$=2x^2+6x-1+4x^3+3x-5$

$=4x^3+2x^2+9x-6$

(2) $A+3B=2x^2+6x-1+3(-4x^3-3x+5)$

$=2x^2+6x-1-12x^3-9x+15$

$=-12x^3+2x^2-3x+14$

답 (1) $4x^3+2x^2+9x-6$

(2) $-12x^3+2x^2-3x+14$

04 ③ $-5-a+2a^3-a^4$

답 ③

05 답 ④, ②, ③, ①

06 $(5A+B)-(4A+3B)$

$=5A+B-4A-3B=A-2B$

$=(3x^2-xy+4y^2)-2(-2xy+y^2)$

$=3x^2-xy+4y^2+4xy-2y^2$

$=3x^2+3xy+2y^2$ 답 ④

07 $A+2B-C$

$=(4x^3+x^2+1)+2(-2x^2+3x+4)-(x^2-6x-3)$

$=4x^3+x^2+1-4x^2+6x+8-x^2+6x+3$

$=4x^3-4x^2+12x+12$

따라서 $a=4$, $b=-4$, $c=12$, $d=12$이므로

$a+b+c+d=24$ 답 ①

08 $3A-(B-2C)$

$=3A-B+2C$

$=3(x^3-3x^2+x)-(2x^2+x+5)+2(x^3-4)$

$=3x^3-9x^2+3x-2x^2-x-5+2x^3-8$

$=5x^3-11x^2+2x-13$

따라서 x^2의 계수는 -11, 상수항은 -13이므로 구하는 합은

$-11+(-13)=-24$ 답 -24

Q BOX

y에 대하여 정리할 때, y가 아닌 문자로 이루어진 항은 상수항으로 생각한다.

먼저 주어진 식을 간단히 정리한 후 세 다항식 A, B, C를 대입하여 동류항끼리 정리한다.

09 $A=\dfrac{X+3B}{2}$에서 $2A=X+3B$

$\therefore X=2A-3B$

$=2(3x^2-2xy+y^2)-3(4x^2+xy-5y^2)$

$=6x^2-4xy+2y^2-12x^2-3xy+15y^2$

$=-6x^2-7xy+17y^2$ 답 ②

10 $(x^2-4x+1)+X+(-x^2-6x-1)=6x^2-9x+6$

이므로 $X-10x=6x^2-9x+6$

$\therefore X=6x^2-9x+6-(-10x)$

$=6x^2-9x+6+10x$

$=6x^2+x+6$

다음과 같이 한가운데에 있는 다항식을 A라 하자.

		x^2-4x+1
$-2x^2-7x-2$	A	X
Y		$-x^2-6x-1$

$(-2x^2-7x-2)+A+(6x^2+x+6)=6x^2-9x+6$이므로

$A+4x^2-6x+4=6x^2-9x+6$

$\therefore A=6x^2-9x+6-(4x^2-6x+4)$

$=6x^2-9x+6-4x^2+6x-4$

$=2x^2-3x+2$

$(x^2-4x+1)+(2x^2-3x+2)+Y=6x^2-9x+6$이므로

$Y+3x^2-7x+3=6x^2-9x+6$

$\therefore Y=6x^2-9x+6-(3x^2-7x+3)$

$=6x^2-9x+6-3x^2+7x-3$

$=3x^2-2x+3$

$\therefore X-Y=(6x^2+x+6)-(3x^2-2x+3)$

$=6x^2+x+6-3x^2+2x-3$

$=3x^2+3x+3$ 답 $3x^2+3x+3$

11 $-3A+B=3x^2-x-1$ …… ㉠

$A-B=-5x^2+5x-7$ …… ㉡

㉠+㉡을 하면

$-2A=-2x^2+4x-8$

$\therefore A=x^2-2x+4$

이것을 ㉡에 대입하면

$x^2-2x+4-B=-5x^2+5x-7$

$\therefore B=x^2-2x+4-(-5x^2+5x-7)$

$=x^2-2x+4+5x^2-5x+7$

$=6x^2-7x+11$

답 $A=x^2-2x+4$, $B=6x^2-7x+11$

12 $A+2B=x^2-9xy+8y^2$ …… ㉠

$2A-B=7x^2+2xy-9y^2$ …… ㉡

㉠×2−㉡을 하면

$5B=-5x^2-20xy+25y^2$

$\therefore B=-x^2-4xy+5y^2$

이것을 ㉠에 대입하면

$A+2(-x^2-4xy+5y^2)=x^2-9xy+8y^2$

$\therefore A=x^2-9xy+8y^2-2(-x^2-4xy+5y^2)$
$=x^2-9xy+8y^2+2x^2+8xy-10y^2$
$=3x^2-xy-2y^2$
$\therefore A+B=(3x^2-xy-2y^2)+(-x^2-4xy+5y^2)$
$=2x^2-5xy+3y^2$ 답 ⑤

02 다항식의 곱셈

4쪽

01 (1) $(2x+y)(4x-3y)=8x^2-6xy+4xy-3y^2$
$=8x^2-2xy-3y^2$
(2) $(x^2-3x+7)(x+2)$
$=x^3+2x^2-3x^2-6x+7x+14$
$=x^3-x^2+x+14$
답 (1) $8x^2-2xy-3y^2$ (2) x^3-x^2+x+14

02 (1) $(x+2y-1)(6x+2y+3)$의 전개식에서 xy항은
$x\cdot 2y+2y\cdot 6x=14xy$
따라서 xy의 계수는 14이다.
(2) $(2x^2+x-4)(5x^2+3x+1)$의 전개식에서 x^2항은
$2x^2\cdot 1+x\cdot 3x-4\cdot 5x^2=-15x^2$
따라서 x^2의 계수는 -15이다.
답 (1) 14 (2) -15

주어진 식을 전개하면
$6x^2+14xy+4y^2-3x+4y-3$

03 답 (1) x^2+6x+9
(2) x^2-49
(3) $x^2+4x-12$
(4) $15x^2-11x+2$
(5) $x^2-4xy+2x+4y^2-4y+1$
(6) $64x^3+48x^2+12x+1$
(7) x^3-125
(8) $x^3-13x-12$
(9) $x^3-y^3-8z^3-6xyz$
(10) x^4+4x^2+16

04 $(x+y)^2=x^2+y^2+2xy$
$=4+2\cdot 2=8$ 답 8

05 (1) $(x+y)^2=(x-y)^2+4xy$
$=3^2+4\cdot(-1)=5$
(2) $x^2+y^2+z^2=(x-y-z)^2+2(xy-yz+zx)$
$=4^2+2\cdot(-5)=6$
(3) $x-y=(1-\sqrt{2})-(1+\sqrt{2})=-2\sqrt{2}$,
$xy=(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})=-1$이므로
$x^3-y^3=(x-y)^3+3xy(x-y)$
$=(-2\sqrt{2})^3+3\cdot(-1)\cdot(-2\sqrt{2})$
$=-10\sqrt{2}$
답 (1) 5 (2) 6 (3) $-10\sqrt{2}$

$(x-y-z)^2$
$=x^2+y^2+z^2+2(-xy+yz-zx)$
$=x^2+y^2+z^2-2(xy-yz+zx)$

06 (1) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+4=3^2+4=13$
이므로
$x+\frac{1}{x}=\sqrt{13}$ ($\because x>0$)
(2) $x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)$
$=(\sqrt{13})^3-3\cdot\sqrt{13}=10\sqrt{13}$
답 (1) $\sqrt{13}$ (2) $10\sqrt{13}$

07 $A+BC$
$=(x^3-2x+2)+(x^2-5x+3)(2x-1)$
$=x^3-2x+2+2x^3-11x^2+11x-3$
$=3x^3-11x^2+9x-1$
답 $3x^3-11x^2+9x-1$

08 $[x-4, -x^2+2x+3]$
$=1-2(x-4)(-x^2+2x+3)$
$=1-2(-x^3+6x^2-5x-12)$
$=1+2x^3-12x^2+10x+24$
$=2x^3-12x^2+10x+25$
답 $2x^3-12x^2+10x+25$

09 $(5x+3y-1)(4x+2)-(x+y)(3x-1)$
$=20x^2+6x+12xy+6y-2-(3x^2-x+3xy-y)$
$=20x^2+6x+12xy+6y-2-3x^2+x-3xy+y$
$=17x^2+9xy+7x+7y-2$
답 $17x^2+9xy+7x+7y-2$

10 $(x-2y+5)(2x+6y-3)$의 전개식에서 xy항은
$x\cdot 6y-2y\cdot 2x=2xy$
따라서 xy의 계수는 2이다. 답 ③

11 $(x^2-2x+k)(4x^2+3x-1)$의 전개식에서 x항은
$-2x\cdot(-1)+k\cdot 3x=(3k+2)x$
이때 x의 계수가 -7이므로
$3k+2=-7$, $3k=-9$
$\therefore k=-3$ 답 ②

12 $(2x+y-3z)(4x^2+y^2+9z^2-2xy+3yz+6zx)$
$=(2x)^3+y^3+(-3z)^3-3\cdot 2x\cdot y\cdot(-3z)$
$=8x^3+y^3-27z^3+18xyz$ 답 ④

13 $(a^2+a+1)(a^2-a+1)(a^4-a^2+1)$
$=(a^4+a^2+1)(a^4-a^2+1)$
$=a^8+a^4+1$
$=(a^4)^2+a^4+1$
$=8^2+8+1=73$ 답 73

14 $(a+4b+c)^2=a^2+16b^2+c^2+2(4ab+4bc+ca)$
이므로
$9^2=a^2+16b^2+c^2+2\cdot 25$
$\therefore a^2+16b^2+c^2=31$ 답 ①

15 $(2x+y-5z)(3x-y+5z)$

$=\{2x+(y-5z)\}\{3x-(y-5z)\}$

$y-5z=t$로 놓으면

$(2x+t)(3x-t)$

$=6x^2+tx-t^2$

$=6x^2+(y-5z)x-(y-5z)^2$

$=6x^2+xy-5zx-y^2+10yz-25z^2$

답 $6x^2+xy-5zx-y^2+10yz-25z^2$

16 $(x+2y+z)(-x+2y+z)(x-2y+z)(x+2y-z)$

$=\{(2y+z)+x\}\{(2y+z)-x\}$

$\times\{x-(2y-z)\}\{x+(2y-z)\}$

$=\{(2y+z)^2-x^2\}\{x^2-(2y-z)^2\}$

$=-\{x^2-(2y+z)^2\}\{x^2-(2y-z)^2\}$

$=-x^4+\{(2y+z)^2+(2y-z)^2\}x^2$

$-\{(2y+z)(2y-z)\}^2$

$=-x^4+(4y^2+4yz+z^2+4y^2-4yz+z^2)x^2$

$-(4y^2-z^2)^2$

$=-x^4+2(4y^2+z^2)x^2-(16y^4-8y^2z^2+z^4)$

$=-x^4-16y^4-z^4+8x^2y^2+8y^2z^2+2z^2x^2$

따라서 y^2z^2의 계수는 8, z^2x^2의 계수는 2이므로 구하는 합은

$8+2=10$ 답 ③

17 $x^2+y^2=(x-y)^2+2xy$이므로

$9=1^2+2xy,\quad 2xy=8$

$\therefore xy=4$

$\therefore x^3-y^3=(x-y)^3+3xy(x-y)$

$=1^3+3\cdot4\cdot1$

$=13$ 답 ②

18 $x-y=2$, $xy=3$이므로

$\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}=\dfrac{x^2+y^2}{xy}=\dfrac{(x-y)^2+2xy}{xy}$

$=\dfrac{2^2+2\cdot3}{3}=\dfrac{10}{3}$ 답 $\dfrac{10}{3}$

19 $a+b=(\sqrt{5}+2)+(\sqrt{5}-2)=2\sqrt{5}$,

$ab=(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)=5-4=1$이므로

$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$

$=(2\sqrt{5})^3-3\cdot1\cdot2\sqrt{5}$

$=34\sqrt{5}$ 답 $34\sqrt{5}$

20 $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2=x^2+\dfrac{1}{x^2}+2=3+2=5$

그런데 $x>0$이므로

$x+\dfrac{1}{x}=\sqrt{5}$

$\therefore x^3+\dfrac{1}{x^3}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$

$=(\sqrt{5})^3-3\cdot\sqrt{5}$

$=2\sqrt{5}$ 답 ②

Q BOX

$x^2-x-1=0$에 $x=0$을 대입하면 $-1\neq0$이므로
$x\neq0$

두 수 x, y의 차가 2이므로
$|x-y|=2$
이때 $x>y$이므로
$x-y=2$

$a+b$, ab의 값이 간단하므로 a, b의 값을 직접 대입하는 것보다 주어진 식을 $a+b$, ab를 포함한 식으로 변형하여 대입하는 것이 더 편리하다.

21 $x\neq0$이므로 $x^2-x-1=0$의 양변을 x로 나누면

$x-1-\dfrac{1}{x}=0\quad \therefore x-\dfrac{1}{x}=1$

$\therefore x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2+2$

$=1^2+2=3$

$\therefore x^4+\dfrac{1}{x^4}=\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)^2-2$

$=3^2-2=7$ 답 7

22 $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$

$=3^2-2\cdot(-2)=13$

이고

$a^3+b^3+c^3-3abc$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

이므로

$-12-3abc=3\cdot\{13-(-2)\}$

$-3abc=57\quad \therefore abc=-19$ 답 ①

23 $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$

$=\dfrac{1}{2}(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca)$

$=\dfrac{1}{2}\{(a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)$

$+(a^2-2ac+c^2)\}$

$=\dfrac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(a-c)^2\}$ ...... ㉠

이때

$a-c=(a-b)+(b-c)$

$=(\sqrt{10}+3)+(\sqrt{10}-3)=2\sqrt{10}$

이므로 ㉠에서 구하는 값은

$\dfrac{1}{2}\{(\sqrt{10}+3)^2+(\sqrt{10}-3)^2+(2\sqrt{10})^2\}$

$=\dfrac{1}{2}\cdot78=39$ 답 39

24 $\left(1+\dfrac{1}{3}\right)\left(1+\dfrac{1}{3^2}\right)\left(1+\dfrac{1}{3^4}\right)\left(1+\dfrac{1}{3^8}\right)$

$=\dfrac{3}{2}\left(1-\dfrac{1}{3}\right)\left(1+\dfrac{1}{3}\right)\left(1+\dfrac{1}{3^2}\right)\left(1+\dfrac{1}{3^4}\right)\left(1+\dfrac{1}{3^8}\right)$

$=\dfrac{3}{2}\left(1-\dfrac{1}{3^2}\right)\left(1+\dfrac{1}{3^2}\right)\left(1+\dfrac{1}{3^4}\right)\left(1+\dfrac{1}{3^8}\right)$

$=\dfrac{3}{2}\left(1-\dfrac{1}{3^4}\right)\left(1+\dfrac{1}{3^4}\right)\left(1+\dfrac{1}{3^8}\right)$

$=\dfrac{3}{2}\left(1-\dfrac{1}{3^8}\right)\left(1+\dfrac{1}{3^8}\right)$

$=\dfrac{3}{2}\left(1-\dfrac{1}{3^{16}}\right)$ 답 ④

25 $\dfrac{254^3}{253\times255+1}=\dfrac{254^3}{(254-1)(254+1)+1}$

$=\dfrac{254^3}{(254^2-1)+1}$

$=254$ 답 254

26 구하는 도형의 부피는

(직육면체의 부피)−(정육면체의 부피)

$=(x-2)(x+5)^2-(x-2)^3$

$=(x-2)(x^2+10x+25)-(x^3-6x^2+12x-8)$

$=(x^3+8x^2+5x-50)-(x^3-6x^2+12x-8)$

$=x^3+8x^2+5x-50-x^3+6x^2-12x+8$

$=14x^2-7x-42$

답 $14x^2-7x-42$

27 직사각형의 가로의 길이를 a, 세로의 길이를 b라 하면 직사각형의 넓이는 ab이다.

직사각형의 대각선의 길이는 사분원의 반지름의 길이와 같으므로

$a^2+b^2=6^2=36$

또 직사각형의 가로와 세로의 길이의 합이 8이므로

$a+b=8$

이때 $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$에서

$36=8^2-2ab,\quad 2ab=28$

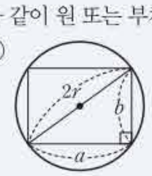
$\therefore ab=14$

따라서 직사각형의 넓이는 14이다. 답 14

쌤 한마디

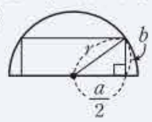
가로의 길이가 a, 세로의 길이가 b인 직사각형이 아래와 같이 원 또는 부채꼴에 내접할 때, 다음이 성립한다.

①



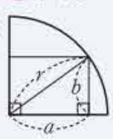
$a^2+b^2=(2r)^2$

②



$\left(\dfrac{a}{2}\right)^2+b^2=r^2$

③



$a^2+b^2=r^2$

28 두 구의 반지름의 길이를 각각 a, b라 하면 두 구의 부피의 합은 $\frac{4}{3}\pi(a^3+b^3)$이다.

두 구의 지름의 길이의 합이 10이므로

$2(a+b)=10 \qquad \therefore a+b=5$

또 두 구의 겉넓이의 합이 52π이므로

$4\pi(a^2+b^2)=52\pi \qquad \therefore a^2+b^2=13$

이때 $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$에서

$13=5^2-2ab,\quad 2ab=12$

$\therefore ab=6$

$\therefore a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$

$=5^3-3\cdot6\cdot5$

$=35$

따라서 두 구의 부피의 합은

$\frac{4}{3}\pi\cdot35=\frac{140}{3}\pi$ 답 ③

Q BOX

① (직육면체의 부피)
=(가로의 길이)
×(세로의 길이)
×(높이)
② (정육면체의 부피)
=(모서리의 길이)^3

(삼차식)÷(일차식)
➡ 몫: 이차식,
나머지: 상수

반지름의 길이가 r인 구에 대하여
(부피)$=\frac{4}{3}\pi r^3$,
(겉넓이)$=4\pi r^2$

03 다항식의 나눗셈

Ⓦ 8쪽

01 (1)

$$
\begin{array}{r}
2x^2-8x+11 \\
x+1\,\overline{)\,2x^3-6x^2+3x+7} \\
2x^3+2x^2 \\ \hline
-8x^2+3x \\
-8x^2-8x \\ \hline
11x+7 \\
11x+11 \\ \hline
-4
\end{array}
$$

(2)

$$
\begin{array}{r}
-3x^2\qquad+1 \\
4x^2+2x+1\,\overline{)\,-12x^4-6x^3+x^2+3x-2} \\
-12x^4-6x^3-3x^2 \\ \hline
4x^2+3x-2 \\
4x^2+2x+1 \\ \hline
x-3
\end{array}
$$

답 (1) 몫: $2x^2-8x+11$, 나머지: -4
(2) 몫: $-3x^2+1$, 나머지: $x-3$

02 (1)

$$
\begin{array}{r}
x^2-6x+24 \\
x+4\,\overline{)\,x^3-2x^2\qquad+6} \\
x^3+4x^2 \\ \hline
-6x^2 \\
-6x^2-24x \\ \hline
24x+6 \\
24x+96 \\ \hline
-90
\end{array}
$$

따라서 $Q=x^2-6x+24$, $R=-90$이므로

$x^3-2x^2+6=(x+4)(x^2-6x+24)-90$

(2)

$$
\begin{array}{r}
2x^2+2x-3 \\
x^2-x+5\,\overline{)\,2x^4\qquad+5x^2+12x-10} \\
2x^4-2x^3+10x^2 \\ \hline
2x^3-5x^2+12x \\
2x^3-2x^2+10x \\ \hline
-3x^2+2x-10 \\
-3x^2+3x-15 \\ \hline
-x+5
\end{array}
$$

따라서 $Q=2x^2+2x-3$, $R=-x+5$이므로

$2x^4+5x^2+12x-10$

$=(x^2-x+5)(2x^2+2x-3)-x+5$

답 (1) $Q=x^2-6x+24$, $R=-90$,
$x^3-2x^2+6=(x+4)(x^2-6x+24)-90$
(2) $Q=2x^2+2x-3$, $R=-x+5$,
$2x^4+5x^2+12x-10$
$=(x^2-x+5)(2x^2+2x-3)-x+5$

03

$$
\begin{array}{r}
x^2-7x+10 \\
x+2\,\overline{)\,x^3-5x^2-4x+3} \\
x^3+2x^2 \\ \hline
-7x^2-4x \\
-7x^2-14x \\ \hline
10x+3 \\
10x+20 \\ \hline
-17
\end{array}
$$

따라서 $a=-7$, $b=-14$, $c=10$, $d=20$, $e=-17$이므로 $a+b+c+d+e=-8$ 답 -8

04 ②

$$\begin{array}{r} x^2+2x+8 \\ x-2\overline{)\,x^3 \qquad\quad +4x+\ 3} \\ \underline{x^3-2x^2 \qquad\qquad\quad} \\ 2x^2+4x \qquad \\ \underline{2x^2-4x \qquad} \\ 8x+\ 3 \\ \underline{8x-16} \\ 19 \end{array}$$

➡ 몫: x^2+2x+8, 나머지: 19 　　답 ②

05

$$\begin{array}{r} x^2+8x+2 \\ x-1\overline{)\,x^3+7x^2-6x+3} \\ \underline{x^3-\ x^2 \qquad\qquad} \\ 8x^2-6x \qquad \\ \underline{8x^2-8x \qquad} \\ 2x+3 \\ \underline{2x-2} \\ 5 \end{array}$$

따라서 $Q(x)=x^2+8x+2$, $R=5$이므로

$Q(2)-R=22-5=17$ 　　답 17

$Q(2)=2^2+8\cdot2+2$
$=22$

06 $2x^3-7x^2+6x+5=(2x+1)P(x)$이므로

$P(x)=(2x^3-7x^2+6x+5)\div(2x+1)$

$$\begin{array}{r} x^2-4x+\ 5 \\ 2x+1\overline{)\,2x^3-7x^2+\ 6x+5} \\ \underline{2x^3+\ x^2 \qquad\qquad\quad} \\ -8x^2+\ 6x \qquad \\ \underline{-8x^2-\ 4x \qquad} \\ 10x+5 \\ \underline{10x+5} \\ 0 \end{array}$$

$\therefore P(x)=x^2-4x+5$ 　　답 x^2-4x+5

07

$$\begin{array}{r} x^2 \qquad +a \\ 3x-1\overline{)\,3x^3-x^2+3ax-1} \\ \underline{3x^3-x^2 \qquad\qquad\quad} \\ 3ax-1 \\ \underline{3ax-a} \\ a-1 \end{array}$$

이때 몫이 x^2+4, 나머지가 b이므로

$a=4$, $a-1=b$

$\therefore a=4$, $b=3$

$\therefore a-b=1$ 　　답 ③

08 $P(x)=(x^2+2x-1)(x+1)+x-7$

$=x^3+3x^2+2x-8$

$$\begin{array}{r} x+3 \\ x^2+2\overline{)\,x^3+3x^2+2x-\ 8} \\ \underline{x^3+ \qquad +2x \qquad} \\ 3x^2 \qquad -\ 8 \\ \underline{3x^2 \qquad +\ 6} \\ -14 \end{array}$$

따라서 구하는 나머지는 -14이다. 　　답 ③

09

$$\begin{array}{r} 3x+a+3 \\ x^2-x-1\overline{)\,3x^3+ \qquad ax^2+ \qquad 5ax- \qquad 2} \\ \underline{3x^3- \qquad 3x^2- \qquad 3x \qquad\qquad} \\ (a+3)x^2+(5a+3)x- \qquad 2 \\ \underline{(a+3)x^2-\ (a+3)x-(a+3)} \\ 6(a+1)x+\ \ a+1 \end{array}$$

이때 나머지가 0이므로

$a+1=0$ 　$\therefore a=-1$ 　　답 -1

10 $P(x)$를 $x+\frac{1}{3}$로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 R이므로

$P(x)=\left(x+\frac{1}{3}\right)Q(x)+R$

$=\frac{1}{3}(3x+1)Q(x)+R$

$=(3x+1)\cdot\frac{1}{3}Q(x)+R$

따라서 $P(x)$를 $3x+1$로 나누었을 때의 몫은 $\frac{1}{3}Q(x)$, 나머지는 R이다. 　　답 ①

11 $P(x)$를 $5x-2$로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 R이므로

$P(x)=(5x-2)Q(x)+R$

$=5\left(x-\frac{2}{5}\right)Q(x)+R$

$=\left(x-\frac{2}{5}\right)\cdot5Q(x)+R$

따라서 $P(x)$를 $x-\frac{2}{5}$로 나누었을 때의 몫은 $5Q(x)$, 나머지는 R이므로

$a=5$, $b=1$

$\therefore a+b=6$ 　　답 6

12 $P(x)$를 $ax+1$로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 R이므로

$P(x)=(ax+1)Q(x)+R$

$\therefore xP(x)=x(ax+1)Q(x)+Rx$

$=ax\left(x+\frac{1}{a}\right)Q(x)+Rx+\frac{1}{a}R-\frac{1}{a}R$

공통부분 $x+\frac{1}{a}$을 만들기 위해 $\frac{1}{a}R$를 더하고 뺀다.

$=ax\left(x+\frac{1}{a}\right)Q(x)+R\left(x+\frac{1}{a}\right)-\frac{1}{a}R$

$=\left(x+\frac{1}{a}\right)\{axQ(x)+R\}-\frac{1}{a}R$

따라서 $P(x)$를 $x+\frac{1}{a}$로 나누었을 때의 몫은 $axQ(x)+R$, 나머지는 $-\frac{1}{a}R$이다. 　　답 ③

02 나머지정리와 인수분해

04 항등식

W 10쪽

01 답 ㄴ, ㄹ

02 (1) 주어진 등식이 x, y에 대한 항등식이므로

$a=0$, $-b=0$, $c-6=0$

$\therefore a=0, b=0, c=6$

(2) 주어진 등식이 x, y에 대한 항등식이므로

$a+2=1$, $b=-4$, $3c-1=8$

$\therefore a=-1, b=-4, c=3$

답 (1) $a=0, b=0, c=6$
(2) $a=-1, b=-4, c=3$

03 주어진 등식에서 우변을 전개하여 정리하면

$x^3+ax^2+bx+c=x^3+3x^2+x+9$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$a=3, b=1, c=9$

답 $a=3, b=1, c=9$

04 주어진 등식의 양변에 $x=0$을 대입하면

$-2b=6 \qquad \therefore b=-3$

주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$3c=3-6+6 \qquad \therefore c=1$

주어진 등식의 양변에 $x=-2$를 대입하면

$6a=12+12+6 \qquad \therefore a=5$

답 $a=5, b=-3, c=1$

05 주어진 등식에서 좌변을 전개하여 정리하면

$ax^2+(2-a)x-2=3x^2+bx+c$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$a=3$, $2-a=b$, $-2=c$

$\therefore a=3, b=-1, c=-2$

답 $a=3, b=-1, c=-2$

06 주어진 등식의 좌변을 x, y에 대하여 정리하면

$(a+2b)x+(-3a+3b)y+c=3x+9y+5$

이 등식이 x, y에 대한 항등식이므로

$a+2b=3$, $-3a+3b=9$, $c=5$

$a+2b=3$, $-3a+3b=9$를 연립하여 풀면

$a=-1, b=2$

$\therefore a+b+c=6$

답 ③

07 주어진 등식의 좌변을 k에 대하여 정리하면

$(x^2+y^2-5)k+x-y-2=0$

이 등식이 k에 대한 항등식이므로

$x^2+y^2-5=0$, $x-y-2=0$

$\therefore x^2+y^2=5, x-y=2$

Q BOX

ㄱ, ㄷ은 각각 특정한 x의 값을 대입하였을 때에만 성립하므로 방정식이다.

㉠+㉡을 하면
$3a=15 \quad \therefore a=5$
$a=5$를 ㉡에 대입하면
$5+b=9 \quad \therefore b=4$

㉠+㉡을 하면
$2b=4 \quad \therefore b=2$
$b=2$를 ㉠에 대입하면
$2+c=5 \quad \therefore c=3$

이때 $x^2+y^2=(x-y)^2+2xy$이므로

$5=2^2+2xy, \qquad 2xy=1$

$\therefore xy=\frac{1}{2}$

답 $\frac{1}{2}$

08 주어진 등식의 양변에 $x=0$을 대입하면

$8=2c \qquad \therefore c=4$

주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$1=-b \qquad \therefore b=-1$

주어진 등식의 양변에 $x=2$를 대입하면

$2=2a \qquad \therefore a=1$

$\therefore a-b+c=6$

답 6

09 주어진 등식의 양변에 $x=-2$를 대입하면

$0=16-16+4a-2b-12$

$\therefore 2a-b=6$ ...... ㉠

주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$0=1+2+a+b-12$

$\therefore a+b=9$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=5, b=4$

$\therefore a-b=1$

답 ①

10 주어진 등식의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$2-7+a=1 \qquad \therefore a=6$

주어진 등식의 양변에 $x=0$을 대입하면

$a=b+c+1 \qquad \therefore b+c=5$ ...... ㉠

주어진 등식의 양변에 $x=-2$를 대입하면

$8-14+a=b-c+1$

$\therefore b-c=-1$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$b=2, c=3$

$\therefore ab-c=9$

답 ②

11 주어진 등식의 양변에 $x=2$를 대입하면

$a_0+a_1+\cdots+a_{19}+a_{20}=1^{10}=1$

답 1

12 주어진 등식의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$a_0-a_1+a_2-a_3+\cdots+a_8=3^4=81$

답 81

13 주어진 등식의 양변에 $x=0$을 대입하면

$a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{10}=1$

주어진 등식의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$a_0=1-5+1=-3$

$\therefore a_1+a_2+\cdots+a_{10}=1-(-3)=4$

답 ⑤

14 주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$a_0+a_1+a_2+\cdots+a_6=1^3=1$ ...... ㉠

주어진 등식의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$a_0-a_1+a_2-\cdots+a_6=(-1)^3=-1$ ...... ㉡

㉠+㉡을 하면

$2(a_0+a_2+a_4+a_6)=0$

$\therefore a_0+a_2+a_4+a_6=0$ 답 0

15 $5x^3+ax^2-4x+2$를 x^2-3으로 나누었을 때의 나머지를 $px+q$ (p, q는 상수)라 하면

$5x^3+ax^2-4x+2=(x^2-3)(5x+3)+px+q$

이 등식의 우변을 정리하면

$5x^3+ax^2-4x+2$

$=5x^3+3x^2+(p-15)x+q-9$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$a=3$, $-4=p-15$, $2=q-9$

$\therefore a=3$, $p=11$, $q=11$

따라서 $a=3$이고 나머지는 $11x+11$이다. 답 ⑤

16 x^3+ax^2+bx+4를 $(x+2)(x-1)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

x^3+ax^2+bx+4

$=(x+2)(x-1)Q(x)+2x-4$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로 양변에 $x=-2$를 대입하면

$-8+4a-2b+4=-8$

$\therefore 2a-b=-2$ …… ㉠

양변에 $x=1$을 대입하면

$1+a+b+4=-2$

$\therefore a+b=-7$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-3$, $b=-4$

$\therefore ab=12$ 답 12

17 $2x^3+ax^2+4x+b$를 $(x+2)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $2x+c$ (c는 상수)라 하면

$2x^3+ax^2+4x+b=(x+2)^2(2x+c)$

이 등식의 우변을 정리하면

$2x^3+ax^2+4x+b$

$=2x^3+(c+8)x^2+(4c+8)x+4c$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$a=c+8$, $4=4c+8$, $b=4c$

$\therefore a=7$, $b=-4$, $c=-1$

$\therefore a+b=3$ 답 ①

18 x^4+x^3+ax+b를 x^2+x+1로 나누었을 때의 몫을 x^2+cx+d (c, d는 상수)라 하면

x^4+x^3+ax+b

$=(x^2+x+1)(x^2+cx+d)$

이 등식의 우변을 정리하면

x^4+x^3+ax+b

$=x^4+(c+1)x^3+(c+d+1)x^2+(c+d)x+d$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$1=c+1$, $0=c+d+1$, $a=c+d$, $b=d$

$\therefore a=-1$, $b=-1$, $c=0$, $d=-1$

$\therefore a^2+b^2=(-1)^2+(-1)^2=2$ 답 ①

Q BOX

㉠+㉡을 하면

$3a=9$ $\therefore a=-3$

$a=-3$을 ㉡에 대입하면

$-3+b=-7$

$\therefore b=-4$

$2x^3+ax^2+4x+b$에서 x^3의 계수가 2이고, $(x+2)^2$에서 x^2의 계수가 1이므로 몫의 x의 계수는 2이다.

$2x^3+7x^2+4x-4$가 $(x+2)^2$으로 나누어떨어질 때, 몫은 $2x-1$이다.

05 나머지정리

W 13쪽

01 (1) $P(-1)=2-9-5=-12$

(2) $P\left(\frac{1}{2}\right)=2\cdot\frac{1}{4}+9\cdot\frac{1}{2}-5=0$

답 (1) -12 (2) 0

02 (1) $P(1)=5$이므로

$3+2+a=5$ $\therefore a=0$

(2) $P(-2)=0$이므로

$16-24-2a+4=0$, $2a=-4$

$\therefore a=-2$ 답 (1) 0 (2) -2

03 (1)

$$\begin{array}{r|rrrr} -3 & 2 & 7 & 7 & 13 \\ & & -6 & -3 & -12 \\ \hline & 2 & 1 & 4 & \boxed{1} \end{array}$$

$\therefore$ 몫: $2x^2+x+4$, 나머지: 1

(2)

$$\begin{array}{r|rrrr} -\frac{1}{2} & 6 & -3 & -1 & -7 \\ & & -3 & 3 & -1 \\ \hline & 6 & -6 & 2 & \boxed{-8} \end{array}$$

$\therefore 6x^3-3x^2-x-7$

$=\left(x+\frac{1}{2}\right)(6x^2-6x+2)-8$

$=(2x+1)(3x^2-3x+1)-8$

$\therefore$ 몫: $3x^2-3x+1$, 나머지: -8

답 (1) 몫: $2x^2+x+4$, 나머지: 1

(2) 몫: $3x^2-3x+1$, 나머지: -8

04 $P(2)=P(-1)$이므로

$8-4+2a+4=-1-1-a+4$

$3a=-6$ $\therefore a=-2$ 답 ②

05 $P(3)=18$이므로 $27+27+3a-12=18$

$3a=-24$ $\therefore a=-8$

$\therefore P(x)=x^3+3x^2-8x-12$

따라서 구하는 나머지는

$P(-3)=-27+27+24-12=12$ 답 12

06 $P(-1)=4$, $Q(-1)=-3$이므로 구하는 나머지는

$5P(-1)+4Q(-1)=5\cdot4+4\cdot(-3)$

$=8$ 답 ③

07 $P(x)$를 x^2-x-6, 즉 $(x+2)(x-3)$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, $R(x)=ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$P(x)=(x+2)(x-3)Q(x)+ax+b$

이때 $P(-2)=-1$, $P(3)=4$이므로

$-2a+b=-1$, $3a+b=4$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=1$

따라서 $R(x)=x+1$이므로 $R(4)=5$ 답 5

08 $P(x)$를 $(x+5)(x-1)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$$P(x)=(x+5)(x-1)Q(x)+ax+4$$

이때 $P(-5)=9$이므로

$$-5a+4=9 \qquad \therefore a=-1$$

따라서 $P(x)=(x+5)(x-1)Q(x)-x+4$이므로

$$b=P(1)=-1+4=3$$

$$\therefore a+b=2$$

답 ②

09 $P(x)$를 x^2-4x+3으로 나누었을 때의 몫을 $Q_1(x)$라 하면

$$P(x)=(x^2-4x+3)Q_1(x)+2x+1$$
$$=(x-1)(x-3)Q_1(x)+2x+1$$

이므로 $P(1)=3$, $P(3)=7$

Q BOX: $P(x)$에 $x=1$, $x=3$을 각각 대입하면 $P(1)=2\cdot1+1=3$, $P(3)=2\cdot3+1=7$

$P(x)$를 x^2+3x+2로 나누었을 때의 몫을 $Q_2(x)$라 하면

$$P(x)=(x^2+3x+2)Q_2(x)-4x-1$$
$$=(x+1)(x+2)Q_2(x)-4x-1$$

이므로 $P(-1)=3$, $P(-2)=7$

Q BOX: $P(x)$에 $x=-1$, $x=-2$를 각각 대입하면 $P(-1)=-4\cdot(-1)-1=3$, $P(-2)=-4\cdot(-2)-1=7$

$P(x)$를 x^2-2x-3으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$$P(x)=(x^2-2x-3)Q(x)+ax+b$$
$$=(x+1)(x-3)Q(x)+ax+b$$

이때 $P(3)=7$, $P(-1)=3$이므로

$$3a+b=7,\ -a+b=3$$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=4$

따라서 구하는 나머지는 $x+4$이다.

답 ②

10 $P(x)$를 $x(x-1)$로 나누었을 때의 몫을 $Q_1(x)$라 하면

$$P(x)=x(x-1)Q_1(x)+2$$

이므로 $P(0)=2$, $P(1)=2$

$P(x)$를 $x+3$으로 나누었을 때의 나머지가 14이므로

$$P(-3)=14$$

$P(x)$를 $x(x+3)(x-1)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 ax^2+bx+c (a, b, c는 상수)라 하면

$$P(x)=x(x+3)(x-1)Q(x)+ax^2+bx+c \qquad \cdots\cdots ㉠$$

㉠의 양변에 $x=0$, $x=1$, $x=-3$을 각각 대입하면

$$P(0)=c,\ P(1)=a+b+c,\ P(-3)=9a-3b+c$$

즉 $c=2$, $a+b+c=2$, $9a-3b+c=14$이므로

$$a+b=0,\ 3a-b=4$$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=-1$

따라서 구하는 나머지는 x^2-x+2이다.

답 x^2-x+2

11 $P(x)$를 x^2-2x로 나누었을 때의 몫을 $Q_1(x)$라 하면

$$P(x)=(x^2-2x)Q_1(x)-x+3$$
$$=x(x-2)Q_1(x)-x+3$$

이므로 $P(0)=3$, $P(2)=1$

Q BOX: $P(x)$에 $x=0$, $x=2$를 각각 대입하면 $P(0)=0+3=3$, $P(2)=-2+3=1$

$P(x)$를 $x+2$로 나누었을 때의 나머지가 -11이므로

$$P(-2)=-11$$

$P(x)$를 x^3-4x로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 ax^2+bx+c (a, b, c는 상수)라 하면

$$P(x)=(x^3-4x)Q(x)+ax^2+bx+c$$
$$=x(x+2)(x-2)Q(x)+ax^2+bx+c \qquad \cdots\cdots ㉠$$

㉠의 양변에 $x=0$, $x=2$, $x=-2$를 각각 대입하면

$$P(0)=c,\ P(2)=4a+2b+c,$$
$$P(-2)=4a-2b+c$$

즉 $c=3$, $4a+2b+c=1$, $4a-2b+c=-11$이므로

$$2a+b=-1,\ 2a-b=-7$$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$$a=-2,\ b=3$$

따라서 구하는 나머지는 $-2x^2+3x+3$이다.

답 $-2x^2+3x+3$

12 $P(x)$를 $(x+1)(x^2-x+1)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)라 하면

$$P(x)=(x+1)(x^2-x+1)Q(x)+ax^2+bx+c \qquad \cdots\cdots ㉠$$

이때 $(x+1)(x^2-x+1)Q(x)$는 x^2-x+1로 나누어떨어지므로 $P(x)$를 x^2-x+1로 나누었을 때의 나머지는 ax^2+bx+c를 x^2-x+1로 나누었을 때의 나머지와 같다.

즉 ax^2+bx+c를 x^2-x+1로 나누었을 때의 나머지가 $-2x+4$이므로

$$ax^2+bx+c=a(x^2-x+1)-2x+4$$

이 식을 ㉠에 대입하면

$$P(x)=(x+1)(x^2-x+1)Q(x)$$
$$+a(x^2-x+1)-2x+4$$

한편 $P(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지가 -3이므로

$$P(-1)=-3, \qquad 3a+6=-3$$
$$3a=-9 \qquad \therefore a=-3$$

따라서 $R(x)=-3x^2+x+1$이므로

Q BOX: $R(x)=-3(x^2-x+1)-2x+4=-3x^2+x+1$

$$R(1)=-3+1+1=-1$$

답 ③

13 $P(3x+1)$을 $x+2$로 나누었을 때의 나머지는

$$P(3\cdot(-2)+1)=P(-5) \qquad \cdots\cdots ㉠$$

한편 $P(x)$를 $x+5$로 나누었을 때의 나머지가 -4이므로 $P(-5)=-4$

따라서 ㉠에서 구하는 나머지는 -4이다.

답 -4

14 $(x+1)P(x+6)$을 $x+3$으로 나누었을 때의 나머지는

$$-2P(-3+6)=-2P(3) \qquad \cdots\cdots ㉠$$

한편 $P(x)$를 $x-3$으로 나누었을 때의 나머지가 -2이므로 $\quad P(3)=-2$

따라서 ㉠에서 구하는 나머지는

$-2\cdot(-2)=4$ 답 ⑤

다른 풀이 $P(x)$를 $x-3$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$P(x)=(x-3)Q(x)-2$

이 등식의 x 대신 $x+6$을 대입하면

$P(x+6)=(x+3)Q(x+6)-2$

양변에 $x+1$을 곱하면

$(x+1)P(x+6)=(x+1)(x+3)Q(x+6)$
$\qquad -2(x+1)$

이때 $(x+1)(x+3)Q(x+6)$은 $x+3$으로 나누어떨어지므로 $(x+1)P(x+6)$을 $x+3$으로 나누었을 때의 나머지는 $-2(x+1)$을 $x+3$으로 나누었을 때의 나머지와 같다.

따라서 구하는 나머지는

$-2\cdot(-2)=4$

15 $P(2x-5)$를 $2x-3$으로 나누었을 때의 나머지는

$P\left(2\cdot\frac{3}{2}-5\right)=P(-2)$ …… ㉠

한편 $P(x)$를 $3x^2+5x-2$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$P(x)=(3x^2+5x-2)Q(x)+2x+7$
$\quad=(x+2)(3x-1)Q(x)+2x+7$

이므로 $\quad P(-2)=3$

따라서 ㉠에서 구하는 나머지는 3이다. 답 3

16 $P(x)=x^4+6x+5$라 하면 $P(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지는

$P(-1)=1-6+5=0$

이므로

$x^4+6x+5=(x+1)Q(x)$ …… ㉠

$Q(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지는 $Q(2)$이므로 ㉠의 양변에 $x=2$를 대입하면

$16+12+5=3Q(2)$

$3Q(2)=33 \quad \therefore Q(2)=11$

따라서 구하는 나머지는 11이다. 답 ②

17 x^3-3x^2+ax+6을 $x+2$로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 8이므로

$x^3-3x^2+ax+6=(x+2)Q(x)+8$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=-2$를 대입하면

$-8-12-2a+6=8$

$-2a=22 \quad \therefore a=-11$

$Q(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는 $Q(1)$이므로 ㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$1-3-11+6=3Q(1)+8$

$3Q(1)=-15 \quad \therefore Q(1)=-5$

따라서 구하는 나머지는 -5이다. 답 -5

Q BOX

$-2(x+1)$에 $x=-3$을 대입하면
$-2\cdot(-3+1)$
$=-2\cdot(-2)$
$=4$

$a=-11$이므로 ㉠의 좌변의 식은
$x^3-3x^2-11x+6$

㉠+㉡을 하면
$4a=-16$
$\therefore a=-4$
$a=-4$를 ㉠에 대입하면 $-4-b=7$
$\therefore b=-11$

18 $P(x)$를 $x+3$으로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 7이므로

$P(x)=(x+3)Q(x)+7$

$Q(x)$를 $x+4$로 나누었을 때의 몫을 $Q'(x)$라 하면 나머지가 11이므로

$Q(x)=(x+4)Q'(x)+11$

$\therefore P(x)=(x+3)\{(x+4)Q'(x)+11\}+7$
$\qquad=(x+3)(x+4)Q'(x)+11x+40$

따라서 $P(x)$를 $(x+3)(x+4)$로 나누었을 때의 나머지가 $11x+40$이므로

$a=11,\ b=40$

$\therefore 5a-b=15$ 답 ③

19 (1) x^7을 $x-2$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R (R는 상수)라 하면

$x^7=(x-2)Q(x)+R$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=2$를 대입하면

$R=2^7=128$

따라서 구하는 나머지는 128이다.

(2) ㉠의 양변에 $x=99$를 대입하면

$99^7=97Q(99)+128$
$\quad=97\{Q(99)+1\}+31$

따라서 구하는 나머지는 31이다.

답 (1) 128 (2) 31

20 x^{12}을 $x+1$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R (R는 상수)라 하면

$x^{12}=(x+1)Q(x)+R$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$R=1$

㉠의 양변에 $x=67$을 대입하면

$67^{12}=68Q(67)+1$

따라서 67^{12}을 68로 나누었을 때의 나머지는 1이다.

답 ①

21 $P(x)=x^3+ax^2+2x-8$이라 하면 $P(x)$가 $x-1$을 인수로 가지므로 $\quad P(1)=0$

$1+a+2-8=0 \quad \therefore a=5$ 답 ③

22 $P(x)=x^3+ax^2+bx-6$이라 하면 $P(x)$가 $x+1$로 나누어떨어지므로 $\quad P(-1)=0$

$-1+a-b-6=0$

$\therefore a-b=7$ …… ㉠

$P(x)$를 $x-3$으로 나누었을 때의 나머지가 -48이므로 $\quad P(3)=-48$

$27+9a+3b-6=-48$

$\therefore 3a+b=-23$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-4,\ b=-11$

$\therefore b-3a=1$ 답 ①

23 $P(x)=x^3+6x^2+ax+b$라 하면 $P(x)$가 $x+2$, $x+3$을 인수로 가지므로

$P(-2)=0$, $P(-3)=0$

$-8+24-2a+b=0$, $-27+54-3a+b=0$

$\therefore 2a-b=16$, $3a-b=27$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=11$, $b=6$

따라서 x^2-ax+b, 즉 $x^2-11x+6$을 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는

$1-11+6=-4$ 답 -4

다른 풀이 x^3+6x^2+ax+b가 $x+2$, $x+3$을 인수로 가지므로

$x^3+6x^2+ax+b=(x+2)(x+3)(x+k)$ (k는 상수)

라 하면

x^3+6x^2+ax+b

$=x^3+(k+5)x^2+(5k+6)x+6k$

이 등식은 x에 대한 항등식이므로

$6=k+5$, $a=5k+6$, $b=6k$

$\therefore k=1$, $a=11$, $b=6$

따라서 x^2-ax+b, 즉 $x^2-11x+6$을 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는

$1-11+6=-4$

24 $P(x)=(ax^2+3)(ax-5)+6ax$라 하면 $P(x)$가 $x-2$로 나누어떨어지므로 $P(2)=0$

$(4a+3)(2a-5)+12a=0$

$8a^2-2a-15=0$, $(4a+5)(2a-3)=0$

$\therefore a=-\frac{5}{4}$ 또는 $a=\frac{3}{2}$

따라서 모든 상수 a의 값의 합은

$-\frac{5}{4}+\frac{3}{2}=\frac{1}{4}$ 답 $\frac{1}{4}$

25 $P(x)=2x^3+ax^2-9x+b$라 하면 $P(x)$가 $(x+2)(x-1)$로 나누어떨어지므로

$P(-2)=0$, $P(1)=0$

$-16+4a+18+b=0$, $2+a-9+b=0$

$\therefore 4a+b=-2$, $a+b=7$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=-3$, $b=10$

$\therefore P(x)=2x^3-3x^2-9x+10$

따라서 $P(x)$를 $x-3$으로 나누었을 때의 나머지는

$P(3)=54-27-27+10=10$ 답 10

26 $P(x)$가 x^2-2x-3, 즉 $(x+1)(x-3)$으로 나누어떨어지므로

$P(-1)=0$, $P(3)=0$

$-3-7-a+b=0$, $81-63+3a+b=0$

$\therefore a-b=-10$, $3a+b=-18$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=-7$, $b=3$

$\therefore P(x)=3x^3-7x^2-7x+3$

따라서 $P(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지는

$P(2)=24-28-14+3=-15$ 답 ②

27 $P(x)-2$가 x^2-5x+6, 즉 $(x-2)(x-3)$으로 나누어떨어지므로 $P(2)-2=0$, $P(3)-2=0$

$\therefore P(2)=2$, $P(3)=2$

$P(x+4)$를 x^2+3x+2로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$P(x+4)=(x^2+3x+2)Q(x)+ax+b$

$=(x+2)(x+1)Q(x)+ax+b$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=-2$, $x=-1$을 각각 대입하면

$P(2)=-2a+b$, $P(3)=-a+b$

즉 $-2a+b=2$, $-a+b=2$이므로 이 두 식을 연립하여 풀면 $a=0$, $b=2$

따라서 구하는 나머지는 2이다. 답 2

28 $P(x)=x^3+ax^2+bx-4$라 하면 $P(x)$가 x^2-1, 즉 $(x+1)(x-1)$로 나누어떨어지므로

$P(-1)=0$, $P(1)=0$

$-1+a-b-4=0$, $1+a+b-4=0$

$\therefore a-b=5$, $a+b=3$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=4$, $b=-1$

$Q(x)=ax^2+3x+b$, 즉 $Q(x)=4x^2+3x-1$이라 하면 $Q(\alpha)=0$이므로

$4\alpha^2+3\alpha-1=0$, $(\alpha+1)(4\alpha-1)=0$

$\therefore \alpha=-1$ ($\because$ α는 정수) 답 -1

29 주어진 조립제법을 완성하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & -4 & 0 & 1 \\ & & 2 & -4 & -8 \\ \hline & 1 & -2 & -4 & \boxed{-7} \end{array}$$

$\therefore a=2$, $b=0$, $c=-2$, $d=-4$, $e=-8$

답 ④

30 (1) 주어진 조립제법을 완성하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{r|rrrr} \frac{1}{2} & 2 & 1 & 3 & -3 \\ & & 1 & 1 & 2 \\ \hline & 2 & 2 & 4 & \boxed{-1} \end{array}$$

$\therefore a=\frac{1}{2}$, $b=1$, $c=1$, $d=4$

(2) $P(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)(2x^2+2x+4)-1$

$=(2x-1)(x^2+x+2)-1$

따라서 구하는 몫은 x^2+x+2이다.

답 (1) $a=\frac{1}{2}$, $b=1$, $c=1$, $d=4$

(2) x^2+x+2

Q BOX

나누는 식이 이차식이므로 나머지는 일차 이하의 다항식이다.

$f(x)$
$=\left(x+\frac{b}{a}\right)Q(x)+R(x)$
$=\frac{1}{a}(ax+b)Q(x)+R(x)$
이므로 $f(x)$를 $ax+b$로 나누었을 때의 몫은 $\frac{1}{a}Q(x)$이다.

31

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 1 & -1 & 5 \\ & & -1 & 0 & 1 \\ \hline -1 & 1 & 0 & -1 & \boxed{6} \\ & & -1 & 1 & \\ \hline -1 & 1 & -1 & \boxed{0} & \\ & & -1 & & \\ \hline & 1 & \boxed{-2} & & \end{array}$$

위의 조립제법에서

x^3+x^2-x+5

$=(x+1)(x^2-1)+6$

$=(x+1)(x+1)(x-1)+6$

$=(x+1)^2\{(x+1)-2\}+6$

$=(x+1)^3-2(x+1)^2+6$

따라서 $a=1$, $b=-2$, $c=0$, $d=6$이므로

$a-b-c+d=9$

답 9

32

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & -3 & 4 & 2 \\ & & 2 & -2 & 4 \\ \hline 2 & 1 & -1 & 2 & \boxed{6} \\ & & 2 & 2 & \\ \hline 2 & 1 & 1 & \boxed{4} & \\ & & 2 & & \\ \hline & 1 & \boxed{3} & & \end{array}$$

위의 조립제법에서

x^3-3x^2+4x+2

$=(x-2)(x^2-x+2)+6$

$=(x-2)\{(x-2)(x+1)+4\}+6$

$=(x-2)[(x-2)\{(x-2)+3\}+4]+6$

$=(x-2)\{(x-2)^2+3(x-2)+4\}+6$

$=(x-2)^3+3(x-2)^2+4(x-2)+6$

따라서 $a=3$, $b=4$, $c=6$이므로

$ab-c=6$

답 ③

06 인수분해

W 18쪽

01 (3) $x^2+4y^2+9z^2+4xy-12yz-6zx$

$=x^2+(2y)^2+(-3z)^2+2\cdot x\cdot 2y$
$+2\cdot 2y\cdot(-3z)+2\cdot(-3z)\cdot x$

$=(x+2y-3z)^2$

(4) $27x^3-27x^2+9x-1$

$=(3x)^3-3\cdot(3x)^2\cdot 1+3\cdot 3x\cdot 1^2-1^3$

$=(3x-1)^3$

(5) $x^3-8y^3=x^3-(2y)^3$

$=(x-2y)(x^2+2xy+4y^2)$

(6) $x^3-y^3+8z^3+6xyz$

$=x^3+(-y)^3+(2z)^3-3\cdot x\cdot(-y)\cdot 2z$

$=(x-y+2z)(x^2+y^2+4z^2+xy+2yz-2zx)$

(7) $16x^4+4x^2y^2+y^4$

$=(2x)^4+(2x)^2\cdot y^2+y^4$

$=(4x^2+2xy+y^2)(4x^2-2xy+y^2)$

답 (1) $(x+2)^2$ (2) $(2y+1)(4y-5)$
(3) $(x+2y-3z)^2$ (4) $(3x-1)^3$
(5) $(x-2y)(x^2+2xy+4y^2)$
(6) $(x-y+2z)(x^2+y^2+4z^2+xy+2yz-2zx)$
(7) $(4x^2+2xy+y^2)(4x^2-2xy+y^2)$

Q BOX

x^4항과 상수항을 기준으로 완전제곱꼴을 만든다. 즉
$\{(x^2)^2\pm\square x^2+6^2\}-\triangle x^2$
에서
$\square=2\cdot 6=12$

한 문자에 대하여 내림차순으로 정리한다.

02 (1) $x^2-2x=X$로 놓으면

(주어진 식)$=(X-3)(X+1)-5$

$=X^2-2X-8$

$=(X+2)(X-4)$

$=(x^2-2x+2)(x^2-2x-4)$

(2) $x^4-13x^2+36=\underline{(x^4-12x^2+36)}-x^2$

$=(x^2-6)^2-x^2$

$=(x^2+x-6)(x^2-x-6)$

$=(x+3)(x-2)(x+2)(x-3)$

(3) $3x^2-2xy-y^2+5x-y+2$

$=3x^2+(-2y+5)x-(y^2+y-2)$

$=3x^2+(-2y+5)x-(y+2)(y-1)$

$=(x-y+1)(3x+y+2)$

(4) $P(x)=x^3-3x+2$라 하면

$P(1)=1-3+2=0$

오른쪽과 같이 조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 0 & -3 & 2 \\ & & 1 & 1 & -2 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & \boxed{0} \end{array}$$

$P(x)=(x-1)(x^2+x-2)$

$=(x-1)(x+2)(x-1)$

$=(x+2)(x-1)^2$

(5) $P(x)=x^4-x^3-2x^2+x+1$이라 하면

$P(-1)=1+1-2-1+1=0$,

$P(1)=1-1-2+1+1=0$

조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} -1 & 1 & -1 & -2 & 1 & 1 \\ & & -1 & 2 & 0 & -1 \\ \hline 1 & 1 & -2 & 0 & 1 & \boxed{0} \\ & & 1 & -1 & -1 & \\ \hline & 1 & -1 & -1 & \boxed{0} & \end{array}$$

$\therefore P(x)=(x+1)(x-1)(x^2-x-1)$

답 (1) $(x^2-2x+2)(x^2-2x-4)$
(2) $(x+3)(x-2)(x+2)(x-3)$
(3) $(x-y+1)(3x+y+2)$
(4) $(x+2)(x-1)^2$
(5) $(x+1)(x-1)(x^2-x-1)$

03 $3+3x-y-xy=3(1+x)-y(1+x)$

$=(1+x)(3-y)$

답 ③

04 $4ab+3ac+4kb+3kc=a(4b+3c)+k(4b+3c)$
$=(a+k)(4b+3c)$
이때 $a-2$가 이 식의 인수이므로
$k=-2$ 답 ②

05 $x^2y+x^2z-y^3-y^2z=x^2(y+z)-y^2(y+z)$
$=(x^2-y^2)(y+z)$
$=(x+y)(x-y)(y+z)$
답 $(x+y)(x-y)(y+z)$

06 $-64x^3+48x^2y-12xy^2+y^3$
$=(-4x)^3+3\cdot(-4x)^2\cdot y+3\cdot(-4x)\cdot y^2+y^3$
$=(-4x+y)^3$
$=-(4x-y)^3$ 답 ②

07 $9a^2+b^2+9c^2-6ab+6bc-18ca$
$=(3a)^2+(-b)^2+(-3c)^2+2\cdot 3a\cdot(-b)$
$+2\cdot(-b)\cdot(-3c)+2\cdot(-3c)\cdot 3a$
$=(3a-b-3c)^2$ 답 ②

08 $a^8-b^8=(a^4+b^4)(a^4-b^4)$
$=(a^4+b^4)(a^2+b^2)(a^2-b^2)$
$=(a^4+b^4)(a^2+b^2)(a+b)(a-b)$
따라서 a^8-b^8의 인수인 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.
답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

09 ④ $x^3-27=(x-3)(x^2+3x+9)$
답 ④

10 $x+2=X$로 놓으면
(주어진 식)$=X^2+6X+5$
$=(X+5)(X+1)$
$=(x+7)(x+3)$
$\therefore ab=7\cdot 3=21$ 답 21

다른 풀이 $(x+2)^2+6(x+2)+5$
$=x^2+4x+4+6x+12+5$
$=x^2+10x+21$
$=(x+7)(x+3)$
$\therefore ab=7\cdot 3=21$

11 $x^2+4x=X$로 놓으면
(주어진 식)$=X^2-9X-36$
$=(X+3)(X-12)$
$=(x^2+4x+3)(x^2+4x-12)$
$=(x+3)(x+1)(x+6)(x-2)$
따라서 인수가 아닌 것은 ①이다. 답 ①

Q BOX

상수항의 합이 같아지도록 짝을 짓는다.

a^4+b^4, a^4-b^4, a^2-b^2은 a^8-b^8의 인수이다.

$(X+5)(X+1)$
$=(x+2+5)(x+2+1)$
$=(x+7)(x+3)$

x^2+y^2, x^2-9y^2은 $x^4-8x^2y^2-9y^4$의 인수이다.

y의 차수는 3, x와 z의 차수는 2이므로 x 또는 z에 대한 내림차순으로 정리한 후 인수분해한다.

12 $(x-1)(x-3)(x-5)(x-7)+15$
$=\{(x-1)(x-7)\}\{(x-3)(x-5)\}+15$
$=(x^2-8x+7)(x^2-8x+15)+15$
$x^2-8x=X$로 놓으면
(주어진 식)$=(X+7)(X+15)+15$
$=X^2+22X+120$
$=(X+12)(X+10)$
$=(x^2-8x+12)(x^2-8x+10)$
$=(x-2)(x-6)(x^2-8x+10)$
답 ①

13 $(x^2+4x+3)(x^2-6x+8)-39$
$=(x+3)(x+1)(x-2)(x-4)-39$
$=\{(x+3)(x-4)\}\{(x+1)(x-2)\}-39$
$=(x^2-x-12)(x^2-x-2)-39$
$x^2-x=X$로 놓으면
(주어진 식)$=(X-12)(X-2)-39$
$=X^2-14X-15$
$=(X+1)(X-15)$
$=(x^2-x+1)(x^2-x-15)$
따라서 $a=-1$, $b=-1$, $c=-15$이므로
$a+b-c=13$
답 13

14 $x^2=X$로 놓으면
$x^4+x^2-20=X^2+X-20$
$=(X+5)(X-4)$
$=(x^2+5)(x^2-4)$
$=(x^2+5)(x+2)(x-2)$
$=(x+2)(x-2)(x^2+5)$
따라서 $a=-2$, $b=5$이므로
$a+b=3$ 답 3

15 $x^2=X$, $y^2=Y$로 놓으면
$x^4-8x^2y^2-9y^4=X^2-8XY-9Y^2$
$=(X+Y)(X-9Y)$
$=(x^2+y^2)(x^2-9y^2)$
$=(x^2+y^2)(x+3y)(x-3y)$
따라서 인수가 아닌 것은 ⑤이다.
답 ⑤

16 $x^4-14x^2+25=(x^4-10x^2+25)-4x^2$
$=(x^2-5)^2-(2x)^2$
$=(x^2+2x-5)(x^2-2x-5)$
따라서 $a=-5$, $b=-2$, $c=-5$이므로
$ab+c=5$
답 ③

17 주어진 식을 x에 대하여 내림차순으로 정리하면

$x^2y-x^2z-2xz^2-y^3+3y^2z-2yz^2+2xyz$
$=(y-z)x^2+(2yz-2z^2)x-(y^3-3y^2z+2yz^2)$
$=(y-z)x^2+2z(y-z)x-y(y-z)(y-2z)$
$=(y-z)\{x^2+2zx-y(y-2z)\}$
$=(y-z)(x+y)\{x-(y-2z)\}$
$=(x+y)(y-z)(x-y+2z)$

답 $(x+y)(y-z)(x-y+2z)$

18 주어진 식을 x에 대하여 내림차순으로 정리하면
$x^2-2xy-3y^2+6x-2y+8$
$=x^2+(-2y+6)x-3y^2-2y-8$
$=x^2+(-2y+6)x-(y+2)(3y-4)$
$=(x+y+2)\{x-(3y-4)\}$
$=(x+y+2)(x-3y+4)$
따라서 두 일차식의 합은
$(x+y+2)+(x-3y+4)=2x-2y+6$

답 $2x-2y+6$

19 주어진 식을 전개한 다음 a에 대하여 내림차순으로 정리하면
$a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+2abc$
$=(b+c)a^2+(b^2+2bc+c^2)a+b^2c+bc^2$
$=(b+c)a^2+(b+c)^2a+bc(b+c)$
$=(b+c)\{a^2+(b+c)a+bc\}$
$=(b+c)(a+b)(a+c)$
$=(a+b)(b+c)(c+a)$

답 ⑤

b 또는 c에 대하여 내림차순으로 정리한 후 인수분해해도 결과는 같다.

20 $P(x)=2x^4-7x^3-2x^2+13x+6$으로 놓으면
$P(-1)=2+7-2-13+6=0$,
$P(2)=32-56-8+26+6=0$
조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

-1	2	-7	-2	13	6
		-2	9	-7	-6
2	2	-9	7	6	0
		4	-10	-6	
	2	-5	-3	0	

$\therefore P(x)=(x+1)(x-2)(2x^2-5x-3)$
$=(x+1)(x-2)(x-3)(2x+1)$
따라서 인수가 아닌 것은 ④이다.

답 ④

21 $P(x)=x^4-4x^3+5x^2-8x+6$으로 놓으면
$P(1)=1-4+5-8+6=0$,
$P(3)=81-108+45-24+6=0$
조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

1	1	-4	5	-8	6
		1	-3	2	-6
3	1	-3	2	-6	0
		3	0	6	
	1	0	2	0	

$\therefore P(x)=(x-1)(x-3)(x^2+2)$

따라서 $a=-3$, $b=0$, $c=2$이므로
$a+b+c=-1$

답 -1

22 $P(x)$가 $x+1$로 나누어떨어지므로
$P(-1)=0$, $\quad -1+a-5-2a=0$
$\therefore a=-6$
따라서 $P(x)=x^3-6x^2+5x+12$이므로 조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

-1	1	-6	5	12
		-1	7	-12
	1	-7	12	0

$\therefore P(x)=(x+1)(x^2-7x+12)$
$=(x+1)(x-3)(x-4)$
따라서 $P(x)$의 인수인 것은 ①이다.

답 ①

x^2-3x-4
$=(x+1)(x-4)$

23 $P(x)=x^3+ax^2+16x+12$로 놓으면 $P(x)$는 $x+2$를 인수로 가지므로
$P(-2)=0$, $\quad -8+4a-32+12=0$
$4a=28 \quad \therefore a=7$
따라서 $P(x)=x^3+7x^2+16x+12$이므로 조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

-2	1	7	16	12
		-2	-10	-12
	1	5	6	0

$\therefore P(x)=(x+2)(x^2+5x+6)$
$=(x+2)^2(x+3)$
따라서 $b=3$이므로 $\quad a-b=4$

답 4

24 주어진 식을 c에 대하여 내림차순으로 정리하면
$a^3+a^2b-a^2c-ab^2+b^2c-b^3$
$=(-a^2+b^2)c+a^3+a^2b-ab^2-b^3$
$=(-a^2+b^2)c+a^2(a+b)-b^2(a+b)$
$=-(a^2-b^2)c+(a^2-b^2)(a+b)$
$=(a^2-b^2)(a+b-c)=0$
이때 $a+b-c>0$이므로
$a^2-b^2=0 \quad \therefore a=b$
따라서 주어진 삼각형은 $a=b$인 이등변삼각형이다.

답 ①

삼각형의 두 변의 길이의 합은 나머지 한 변의 길이보다 크다.

25 주어진 식의 좌변을 인수분해하면
$a^4+b^4-c^4+2a^2b^2=(a^2+b^2)^2-(c^2)^2$
$=(a^2+b^2+c^2)(a^2+b^2-c^2)$
즉 $(a^2+b^2+c^2)(a^2+b^2-c^2)=0$에서 $a^2+b^2+c^2\neq0$이므로
$a^2+b^2-c^2=0 \quad \therefore a^2+b^2=c^2$
따라서 주어진 삼각형은 빗변의 길이가 c인 직각삼각형이므로 삼각형의 넓이는
$\frac{1}{2}ab$

답 ①

$a>0$, $b>0$, $c>0$이므로
$a^2+b^2+c^2\neq0$

26 $x^4+5x^2y^2+y^4=(x^2+y^2)^2+3x^2y^2$
$=\{(x+y)^2-2xy\}^2+3(xy)^2$
$=\{6^2-2\cdot(-2)\}^2+3\cdot(-2)^2$
$=1612$ 답 ④

27 $a^2(b+2)+b^2(a-2)$
$=a^2b+2a^2+ab^2-2b^2$
$=ab(a+b)+2(a^2-b^2)$
$=ab(a+b)+2(a+b)(a-b)$
$=(a+b)\{ab+2(a-b)\}$ …… ㉠
이때
$a+b=(\sqrt{5}+3)+(\sqrt{5}-3)=2\sqrt{5}$,
$a-b=(\sqrt{5}+3)-(\sqrt{5}-3)=6$,
$ab=(\sqrt{5}+3)(\sqrt{5}-3)=-4$
이므로 ㉠에서 구하는 값은
$2\sqrt{5}\cdot(-4+2\cdot6)=16\sqrt{5}$ 답 $16\sqrt{5}$

28 $497=x$로 놓으면
(주어진 식)
$=\dfrac{(x+2)^2-1}{x^2-1}\cdot\dfrac{x^3-1}{x^2+x+1}$
$=\dfrac{(x+3)(x+1)}{(x+1)(x-1)}\cdot\dfrac{(x-1)(x^2+x+1)}{x^2+x+1}$
$=x+3$
$=497+3=500$ 답 ⑤

29 $97=a$, $3=b$로 놓으면
$97^3+9\cdot97^2+27\cdot97+27$
$=97^3+3\cdot97^2\cdot3+3\cdot97\cdot3^2+3^3$
$=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
$=(a+b)^3$
$=(97+3)^3$
$=1000000$
$\therefore \sqrt{97^3+9\cdot97^2+27\cdot97+27}=\sqrt{1000000}$
$=1000$ 답 ④

30 $18=x$로 놓으면
$18^3-4\cdot18^2-28\cdot18-32=x^3-4x^2-28x-32$
이때 $P(x)=x^3-4x^2-28x-32$로 놓으면
$P(-2)=-8-16+56-32=0$
조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & -4 & -28 & -32 \\ & & -2 & 12 & 32 \\ \hline & 1 & -6 & -16 & 0 \end{array}$$

$\therefore P(x)=(x+2)(x^2-6x-16)=(x+2)^2(x-8)$
$\therefore 18^3-4\cdot18^2-28\cdot18-32=P(18)$
$=20^2\cdot10$
$=4000$
답 4000

Q BOX

ㄱ. $\sqrt{(-4)^2}=4$
ㄴ. $2i-\sqrt{5}i$
$=(2-\sqrt{5})i$

$-a+3b=5$에서
$a=3b-5$이므로
$2a+b=4$에 대입하면
$2(3b-5)+b=4$
$7b=14$ $\therefore b=2$
$b=2$를 $a=3b-5$에 대입하면 $a=1$

$(x+2)^2-1^2$
$=(x+2+1)(x+2-1)$
$=(x+3)(x+1)$

$\overline{z_1}+\overline{z_2}=\overline{z_1+z_2}$를 계산해도 된다.

03 복소수

07 복소수의 사칙연산 W 23쪽

01 답 (1) 실수부분: 2, 허수부분: 6
(2) 실수부분: 5, 허수부분: -1
(3) 실수부분: $4-\sqrt{7}$, 허수부분: 0
(4) 실수부분: $-\frac{3}{2}$, 허수부분: $\frac{1}{2}$

02 답 (1) ㄱ, ㄷ, ㅁ (2) ㄴ, ㄹ, ㅂ (3) ㄴ, ㅂ

03 (2) $3a-2=-8$, $b+4=-1$이므로
$a=-2$, $b=-5$
(3) $a-b=9$, $a-1=2$이므로
$a=3$, $b=-6$
(4) $-a+3b=5$, $2a+b=4$이므로 두 식을 연립하여 풀면
$a=1$, $b=2$
답 (1) $a=0$, $b=-3$ (2) $a=-2$, $b=-5$
(3) $a=3$, $b=-6$ (4) $a=1$, $b=2$

04 답 (1) $a=6$, $b=-5$ (2) $a=9$, $b=3$
(3) $a=-8$, $b=0$ (4) $a=3$, $b=7$

05 (1) $(2-5i)+(6+i)=(2+6)+(-5+1)i$
$=8-4i$
(2) $(7-2i)-(3-4i)=(7-3)+\{-2-(-4)\}i$
$=4+2i$
(3) $(11-5i)-(9-i)+6i$
$=(11-9)+\{-5-(-1)+6\}i$
$=2+2i$
답 (1) $8-4i$ (2) $4+2i$ (3) $2+2i$

06 (1) $xy=(1-i)(1+2i)=1+2i-i-2i^2$
$=1+i+2=3+i$
(2) $\dfrac{x}{y}=\dfrac{1-i}{1+2i}=\dfrac{(1-i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}$
$=\dfrac{1-2i-i+2i^2}{1-4i^2}=\dfrac{1-3i-2}{1+4}$
$=\dfrac{-1-3i}{5}=-\dfrac{1}{5}-\dfrac{3}{5}i$
답 (1) $3+i$ (2) $-\frac{1}{5}-\frac{3}{5}i$

07 (1) $\overline{z_1}+\overline{z_2}=(1+3i)+(2-i)$
$=3+2i$
(2) $z_1-z_2=(1-3i)-(2+i)=-1-4i$이므로
$\overline{z_1-z_2}=-1+4i$

(3) $\frac{z_1}{z_2}=\frac{1-3i}{2+i}=\frac{(1-3i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}$

$=\frac{2-i-6i+3i^2}{4-i^2}=\frac{2-7i-3}{4+1}$

$=\frac{-1-7i}{5}=-\frac{1}{5}-\frac{7}{5}i$

이므로 $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=-\frac{1}{5}+\frac{7}{5}i$

(4) $\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}=\frac{1+3i}{2-i}=\frac{(1+3i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}$

$=\frac{2+i+6i+3i^2}{4-i^2}=\frac{2+7i-3}{4+1}$

$=\frac{-1+7i}{5}=-\frac{1}{5}+\frac{7}{5}i$

답 (1) $3+2i$ (2) $-1+4i$
(3) $-\frac{1}{5}+\frac{7}{5}i$ (4) $-\frac{1}{5}+\frac{7}{5}i$

08 (1) $(-i)^{45}=-i^{45}=-(i^4)^{11}\cdot i=-i$
(2) $i^{58}=(i^4)^{14}\cdot i^2=i^2=-1$이므로

$\frac{1}{i^{58}}=-1$

(3) $(1-i)^2=1-2i+i^2=-2i$이므로

$(1-i)^8=\{(1-i)^2\}^4=(-2i)^4=16i^4=16$

(4) $i+i^2+i^3+i^4=i-1-i+1=0$

답 (1) $-i$ (2) -1 (3) 16 (4) 0

09 ① 0은 복소수이다.
③ $4i$의 실수부분은 0이다.
④ $3-\sqrt{5}i$의 실수부분은 3, 허수부분은 $-\sqrt{5}$이다.
⑤ $a=2i$, $b=0$이면 $a+bi=2i$는 허수이다.

a가 실수라는 조건이 없으므로 허수일 수도 있다.

답 ②

10 $a=\sqrt{3}$, $b=\frac{6}{2}=3$이므로

$\sqrt{3}-i$의 허수부분은 -1이고, $\frac{1+6i}{2}$의 실수부분은 $\frac{1}{2}$이다.

$a^2+b^2=(\sqrt{3})^2+3^2=12$ 답 12

11 ① $(5+3i)+(2-7i)=7-4i$
② $(i-7)-(2i-3)=-4-i$
③ $(1-i^2)(1+i^2)=(1+1)(1-1)=0$
④ $(3-2i)^2=9-12i-4=5-12i$
⑤ $\frac{1+i}{1-i}+\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1+i)^2+(1-i)^2}{(1-i)(1+i)}=\frac{2i-2i}{2}=0$

답 ③

12 $(2+i)z=3-i$에서

$z=\frac{3-i}{2+i}=\frac{(3-i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}$

$=\frac{6-3i-2i-1}{4+1}=\frac{5-5i}{5}$

$=1-i$

따라서 복소수 $z=1-i$의 실수부분은 1, 허수부분은 -1이므로

$a=1$, $b=-1$

$\therefore ab=-1$ 답 -1

13 $x=-1+i$에서 $x+1=i$
양변을 제곱하면 $x^2+2x+1=-1$

$\therefore x^2+2x=-2$

$\therefore x^2+2x+6=-2+6=4$ 답 4

다른 풀이 $x^2+2x+6=(-1+i)^2+2(-1+i)+6$

$=1-2i-1-2+2i+6$

$=4$

14 $x=\frac{1-\sqrt{3}i}{2}$에서 $2x-1=-\sqrt{3}i$
양변을 제곱하면 $4x^2-4x+1=-3$

$4x^2-4x+4=0$ $\therefore x^2-x+1=0$

$\therefore x^3-x^2+3x=x(x^2-x+1)+2x$

$=2x$

$=2\cdot\frac{1-\sqrt{3}i}{2}$

$=1-\sqrt{3}i$ 답 ③

15 $x=\frac{-1+\sqrt{7}i}{4}$에서 $4x+1=\sqrt{7}i$
양변을 제곱하면 $16x^2+8x+1=-7$

$16x^2+8x+8=0$ $\therefore 2x^2+x+1=0$

$\therefore 2x^3-3x^2+7x+2$

$=x(2x^2+x+1)-4x^2+6x+2$

$=-4x^2+6x+2$

$=-2(2x^2+x+1)+8x+4$

$=8x+4$

$=8\cdot\frac{-1+\sqrt{7}i}{4}+4$

$=2+2\sqrt{7}i$ 답 ⑤

16 $(1+i)x^2+(5-i)x+2(2-i)$

$=x^2+x^2i+5x-xi+4-2i$

$=(x^2+5x+4)+(x^2-x-2)i$

이 복소수가 순허수가 되려면

$x^2+5x+4=0$ …… ㉠

$x^2-x-2\neq0$ …… ㉡

㉠에서 $(x+4)(x+1)=0$

$\therefore x=-4$ 또는 $x=-1$

㉡에서 $(x+1)(x-2)\neq0$ $\therefore x\neq-1$, $x\neq2$

따라서 구하는 x의 값은 -4이다. 답 -4

17 $(1+4i)(a-i)$

$=a-i+4ai+4$

$=(a+4)+(4a-1)i$ …… ㉠

㉠을 제곱하여 양의 실수가 되려면 ㉠의 실수부분은 0이 아니고, 허수부분은 0이어야 하므로

$a+4\neq0$, $4a-1=0$

$a\neq-4$

$\therefore a=\frac{1}{4}$ 답 $\frac{1}{4}$

18 $z=i(a+3i)^2=i(a^2+6ai-9)$

$=-6a+(a^2-9)i$

이 복소수가 실수가 되려면

$a^2-9=0,\quad a^2=9\quad \therefore a=3\ (\because a>0)$

$\therefore \alpha=3$

$a=3$을 $z=-6a+(a^2-9)i$에 대입하면

$z=-18\quad \therefore \beta=-18$

$\therefore \alpha-\beta=21$ 답 ⑤

19 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$x-2=0,\ 2x-5y+1=0$

$\therefore x=2,\ y=1$

$\therefore xy=2$ 답 2

20 $\dfrac{x}{3+i}+\dfrac{y}{3-i}=\dfrac{6}{1+3i}$에서

$\dfrac{x(3-i)+y(3+i)}{(3+i)(3-i)}=\dfrac{6(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)}$

$\dfrac{3(x+y)-(x-y)i}{10}=\dfrac{6-18i}{10}$

$3(x+y)-(x-y)i=6-18i$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$x+y=2,\ x-y=18$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $x=10,\ y=-8$

$\therefore x+2y=-6$ 답 ①

$x+y=2,\ x-y=18$
을 변끼리 더하면
$2x=20\quad \therefore x=10$
$x=10$을 $x+y=2$에 대입하면 $10+y=2$
$\therefore y=-8$

21 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$|x-y|=4,\ x-2=-1$

$x-2=-1$에서 $x=1$

한편 $x<y$에서 $x-y<0$이므로

$|x-y|=-x+y=-1+y=4\quad \therefore y=5$

$\therefore x+y=6$ 답 ②

$|a|=\begin{cases} a & (a\ge 0) \\ -a & (a<0)\end{cases}$

22 $(\alpha-\beta)(\overline{\alpha}-\overline{\beta})$

$=\{(2+3i)-(3-6i)\}\{(2-3i)-(3+6i)\}$

$=(-1+9i)(-1-9i)$

$=1+81=82$ 답 82

23 $z=4-2i$에서 $\overline{z}=4+2i$

$\therefore \dfrac{3-z}{\overline{z}}=\dfrac{3-(4-2i)}{4+2i}=\dfrac{(-1+2i)(4-2i)}{(4+2i)(4-2i)}$

$=\dfrac{-4+2i+8i+4}{16+4}=\dfrac{1}{2}i$ 답 ③

24 $z=\sqrt{5}+i$에서 $\overline{z}=\sqrt{5}-i$이므로

$z+\overline{z}=(\sqrt{5}+i)+(\sqrt{5}-i)=2\sqrt{5}$,

$z\overline{z}=(\sqrt{5}+i)(\sqrt{5}-i)=5+1=6$

$\therefore z^3+\overline{z}^3=(z+\overline{z})^3-3z\overline{z}(z+\overline{z})$

$=(2\sqrt{5})^3-3\cdot 6\cdot 2\sqrt{5}$

$=4\sqrt{5}$ 답 ⑤

25 $x+y=(3+\sqrt{2}i)+(3-\sqrt{2}i)=6$,

$xy=(3+\sqrt{2}i)(3-\sqrt{2}i)=9+2=11$이므로

$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$

$=6^2-2\cdot 11=14$ 답 ④

26 $x+y=(1+\sqrt{3}i)+(1-\sqrt{3}i)=2$,

$xy=(1+\sqrt{3}i)(1-\sqrt{3}i)=1+3=4$

① $x+y=2$

② $x^2y^2=(xy)^2=4^2=16$

③ $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{x+y}{xy}=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$

④ $x^2y+xy^2=xy(x+y)=4\cdot 2=8$

⑤ $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)=2^3-3\cdot 4\cdot 2=-16$

답 ③

27 $x^3-x^2y-xy^2+y^3$

$=x^2(x-y)-y^2(x-y)$

$=(x^2-y^2)(x-y)$

$=(x+y)(x-y)^2$ …… ㉠

이때

$x=\dfrac{5}{1+2i}=\dfrac{5(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}=1-2i$,

$y=\dfrac{5}{1-2i}=\dfrac{5(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)}=1+2i$

이므로

$x+y=(1-2i)+(1+2i)=2$,

$x-y=(1-2i)-(1+2i)=-4i$

따라서 ㉠에서

$x^3-x^2y-xy^2+y^3=2\cdot(-4i)^2$

$=-32$ 답 -32

28 $z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면 $\overline{z}=a-bi$

① $z+\overline{z}=(a+bi)+(a-bi)=2a$이므로 실수이다.

② $\overline{z}-z=0$에서 $a-bi-(a+bi)=0$

$-2bi=0\quad \therefore b=0$

따라서 $z=a$이므로 z는 실수이다.

③ $z\overline{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2=0$이면

$a=0,\ b=0\quad \therefore z=0$

따라서 $z\overline{z}=0$이므로 z는 실수이다.

④ $z=1+i$이면 $-\overline{z}=-(1-i)=-1+i$

$\therefore z\neq -\overline{z}$

⑤ $z=i$이면 $z^2=-1$로 실수이지만

$(z+1)^2=(i+1)^2=2i$이므로 허수이다. 답 ②

29 $\overline{z}=-z$, 즉 $z+\overline{z}=0$이므로 z는 0 또는 순허수이다.
따라서 z가 될 수 있는 것은 $-4i$, $(1+\sqrt{2})i$, 0, i의 4개이다. 답 4

Q BOX

복소수 z와 그 켤레복소수 $\overline{z}$에 대하여
$\overline{z}=-z$
➡ z의 실수부분이 0
➡ z는 0 또는 순허수

30 $z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면
$\bar{z}=a-bi$
ㄱ. $(z+1)(\bar{z}+1)=z\bar{z}+(z+\bar{z})+1$
$=(a+bi)(a-bi)+\{(a+bi)+(a-bi)\}+1$
$=a^2+b^2+2a+1$
이므로 항상 실수이다.
ㄴ. $(z+\bar{z})(z-\bar{z})$
$=\{(a+bi)+(a-bi)\}\{(a+bi)-(a-bi)\}$
$=2a\cdot 2bi=4abi$
이므로 0 또는 순허수이다.
ㄷ. $z^3+\bar{z}^3=(z+\bar{z})^3-3z\bar{z}(z+\bar{z})$
$=\{(a+bi)+(a-bi)\}^3-3(a+bi)(a-bi)\{(a+bi)+(a-bi)\}$
$=(2a)^3-3(a^2+b^2)\cdot 2a$
$=8a^3-6a^3-6ab^2$
$=2a^3-6ab^2$
이므로 항상 실수이다.
ㄹ. $\frac{1}{z}+\frac{1}{\bar{z}}=\frac{1}{a+bi}+\frac{1}{a-bi}$
$=\frac{(a-bi)+(a+bi)}{(a+bi)(a-bi)}$
$=\frac{2a}{a^2+b^2}$
이므로 항상 실수이다.
이상에서 항상 실수인 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다. 답 ⑤

31 $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\overline{\alpha+\beta}}{\bar{\alpha}\cdot\bar{\beta}}=\frac{\overline{\alpha+\beta}}{\overline{\alpha\beta}}$
$=\frac{3+2i}{2-i}=\frac{(3+2i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}$
$=\frac{6+3i+4i-2}{4+1}=\frac{4+7i}{5}$
$=\frac{4}{5}+\frac{7}{5}i$ 답 $\frac{4}{5}+\frac{7}{5}i$

32 $\alpha\bar{\beta}=1$에서 $\frac{1}{\bar{\beta}}=\alpha$
$\overline{(\alpha\bar{\beta})}=1$에서 $\bar{\alpha}\beta=1$이므로 $\beta=\frac{1}{\bar{\alpha}}$
$\therefore \beta+\frac{1}{\bar{\beta}}=\frac{1}{\bar{\alpha}}+\alpha=3i$ 답 ⑤

33 $z=\frac{2w-1}{w+1}=\frac{2(1-i)-1}{(1-i)+1}=\frac{1-2i}{2-i}$
$\therefore z\bar{z}=\frac{1-2i}{2-i}\cdot\overline{\left(\frac{1-2i}{2-i}\right)}=\frac{1-2i}{2-i}\cdot\frac{\overline{1-2i}}{\overline{2-i}}$
$=\frac{1-2i}{2-i}\cdot\frac{1+2i}{2+i}$
$=\frac{1+4}{4+1}=1$ 답 ③

다른 풀이 $z=\frac{2w-1}{w+1}=\frac{1-2i}{2-i}=\frac{(1-2i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}$
$=\frac{2+i-4i+2}{4+1}=\frac{4-3i}{5}$
$\therefore z\bar{z}=\frac{4-3i}{5}\cdot\frac{4+3i}{5}=\frac{16+9}{25}=1$

QBOX

$a+2b=3$에서
$a=3-2b$이므로
$4a+3b=7$에 대입하면
$4(3-2b)+3b=7$
$-5b=-5$
$\therefore b=1$
$b=1$을 $a=3-2b$에 대입하면
$a=1$

$a-b=6$, $a+b=2$를 변끼리 더하면
$2a=8$ $\therefore a=4$
$a=4$를 $a+b=2$에 대입하면
$4+b=2$
$\therefore b=-2$

$\bar{\alpha}\beta=1$에서 $\beta=\frac{1}{\bar{\alpha}}$이므로
$\beta=\overline{\left(\frac{1}{\alpha}\right)}=\frac{1}{\bar{\alpha}}$
임을 이용할 수도 있다.

ㄱ. $5-(-1)=6$
ㄴ. $4-2=2$
ㄷ. $-1-1=-2$

34 $\alpha\bar{\alpha}=\beta\bar{\beta}=6$에서 $\bar{\alpha}=\frac{6}{\alpha}$, $\bar{\beta}=\frac{6}{\beta}$
$\alpha+\beta=i$에서 $\frac{6}{\bar{\alpha}}+\frac{6}{\bar{\beta}}=i$
$\frac{6(\bar{\alpha}+\bar{\beta})}{\bar{\alpha}\cdot\bar{\beta}}=i$, $6(\overline{\alpha+\beta})=i\overline{\alpha\beta}$
$6\bar{i}=i\overline{\alpha\beta}$, $-6i=i\overline{\alpha\beta}$
$\overline{\alpha\beta}=-6$ $\therefore \alpha\beta=-6$ 답 -6

35 $z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면 $\bar{z}=a-bi$이므로
$(3-i)z+(1+2i)\bar{z}=7+3i$에서
$(3-i)(a+bi)+(1+2i)(a-bi)=7+3i$
$3a+3bi-ai+b+a-bi+2ai+2b=7+3i$
$(4a+3b)+(a+2b)i=7+3i$
복소수가 서로 같을 조건에 의하여
$4a+3b=7$, $a+2b=3$
위의 두 식을 연립하여 풀면
$a=1$, $b=1$
따라서 $z=1+i$이므로
$z\bar{z}=(1+i)(1-i)=2$ 답 2

36 $z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면
$z+zi=(a+bi)+(a+bi)i$
$=a+bi+ai-b$
$=(a-b)+(a+b)i$
이므로 주어진 식은
$(a-b)-(a+b)i=6-2i$
복소수가 서로 같을 조건에 의하여
$a-b=6$, $a+b=2$
위의 두 식을 연립하여 풀면
$a=4$, $b=-2$
따라서 $z=4-2i$이므로 z의 허수부분은 -2이다.
답 ④

37 $z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면 $\bar{z}=a-bi$이므로
$(1+i)z+(1-i)\bar{z}=4$에서
$(1+i)(a+bi)+(1-i)(a-bi)=4$
$a+bi+ai-b+a-bi-ai-b=4$
$2(a-b)=4$ $\therefore a-b=2$
따라서 $a-b=2$를 만족시키는 복소수는 ㄴ뿐이다.
답 ②

38 $i=i^5=i^9=\cdots=i^{97}$, $i^2=i^6=i^{10}=\cdots=i^{98}=-1$,
$i^3=i^7=i^{11}=\cdots=i^{99}=-i$, $i^4=i^8=i^{12}=\cdots=i^{100}=1$
이므로
$1-i+i^2-i^3+\cdots+i^{100}$
$=(1-i-1+i)+(1-i-1+i)+\cdots+(1-i-1+i)+1$
$=1$ 답 ④

39 $i=i^5=i^9=\cdots=i^{29}$, $i^2=i^6=i^{10}=\cdots=i^{30}=-1$,
$i^3=i^7=i^{11}=\cdots=i^{27}=-i$, $i^4=i^8=i^{12}=\cdots=i^{28}=1$
이므로

$$\begin{aligned}&i+2i^2+3i^3+\cdots+29i^{29}+30i^{30}\\&=(i-2-3i+4)+(5i-6-7i+8)+\cdots+(29i-30)\\&=(2-2i)+(2-2i)+\cdots+(2-2i)+(29i-30)\\&=7(2-2i)+(29i-30)\\&=-16+15i\end{aligned}$$

따라서 $-16+15i=a+bi$이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$a=-16$, $b=15$

$\therefore a+b=-1$ 답 -1

40 $i=i^5=i^9=\cdots$, $i^2=i^6=i^{10}=\cdots=-1$,
$i^3=i^7=i^{11}=\cdots=-i$, $i^4=i^8=i^{12}=\cdots=1$이므로

$$\begin{aligned}&i-2i^2+3i^3-4i^4+5i^5-6i^6+7i^7-8i^8+\cdots\\&=i+2-3i-4+5i+6-7i-8+\cdots\\&=(2-4+6-8+\cdots)+(1-3+5-7+\cdots)i\end{aligned}$$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여 실수부분이 -6, 허수부분이 -6이어야 한다.
이때

$(2-4)+(6-8)+(10-12)=-6$,
$(1-3)+(5-7)+(9-11)=-6$

이므로

$n=12$ 답 ③

41 $z^2=\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{-2i}{2}=-i$이므로

$$\begin{aligned}z^2+z^4+z^6+z^8&=-i+(-i)^2+(-i)^3+(-i)^4\\&=-i-1+i+1\\&=0\end{aligned}$$

답 ③

42 $(1+i)^2=1+2i-1=2i$이므로

$(1+i)^{2n}=(2i)^n=2^n\cdot i^n$

$(1+i)^{2n}=2^n$에서 $i^n=1$

$\therefore n=4,\ 8,\ 12,\ 16,\ 20$

따라서 구하는 n의 개수는 5이다. 답 5

43 $\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=\frac{-2i}{2}=-i$,

$\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\frac{2i}{2}=i$이므로

$$\begin{aligned}f(n)&=\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^n+\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^n\\&=(-i)^n+i^n\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\therefore f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)\\&=\{(-i)+i\}+\{(-i)^2+i^2\}+\{(-i)^3+i^3\}\\&\quad+\{(-i)^4+i^4\}+\{(-i)^5+i^5\}\\&=0-2+0+2+0\\&=0\end{aligned}$$

답 0

Q BOX

$a=0$, $b\neq0$일 때,
$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\frac{0}{\sqrt{b}}=0$,
$-\sqrt{\frac{a}{b}}=-\sqrt{\frac{0}{b}}=0$
이므로 b의 값에 관계없이 주어진 등식이 성립한다.

$z=-i$이므로 $\bar{z}=i$

$\sqrt{a^2}=|a|=a$

$\sqrt{b^2}=|b|=-b$

08 음수의 제곱근

W 30쪽

01 (1) $\pm\sqrt{-4}=\pm\sqrt{4}i=\pm2i$
(2) $\pm\sqrt{-8}=\pm\sqrt{8}i=\pm2\sqrt{2}i$
(3) $\pm\sqrt{-\frac{1}{16}}=\pm\sqrt{\frac{1}{16}}i=\pm\frac{1}{4}i$
(4) $\pm\sqrt{-\frac{25}{36}}=\pm\sqrt{\frac{25}{36}}i=\pm\frac{5}{6}i$

답 (1) $\pm2i$ (2) $\pm2\sqrt{2}i$ (3) $\pm\frac{1}{4}i$ (4) $\pm\frac{5}{6}i$

02 $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\frac{a}{b}}$에서

$a>0$, $b<0$ 또는 $a=0$, $b\neq0$

따라서 구하는 순서쌍 (a, b)는 ㄷ, ㄹ, ㅂ이다.

답 ㄷ, ㄹ, ㅂ

03 ㄴ. $\frac{\sqrt{14}}{\sqrt{-2}}=-\sqrt{-7}=-\sqrt{7}i$
ㄷ. $\sqrt{-3}-\sqrt{-27}=\sqrt{3}i-3\sqrt{3}i=-2\sqrt{3}i$
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ⑤

04 $z=\frac{3-\sqrt{-9}}{3+\sqrt{-9}}=\frac{3-\sqrt{9}i}{3+\sqrt{9}i}=\frac{3-3i}{3+3i}=\frac{1-i}{1+i}$
$=\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=\frac{-2i}{2}=-i$

$\therefore z+\bar{z}=-i+i=0$ 답 0

05 $0<a<1$일 때,
$a-1<0$, $-a<0$, $1-a>0$, $a>0$
이므로

$$\begin{aligned}&\sqrt{a-1}\times\sqrt{-a}\times\sqrt{1-a}\times\sqrt{a}\\&=\sqrt{1-a}i\times\sqrt{a}i\times\sqrt{1-a}\times\sqrt{a}\\&=(\sqrt{1-a})^2\times(\sqrt{a})^2\times i^2\\&=(1-a)\cdot a\cdot(-1)\\&=a^2-a\end{aligned}$$

답 a^2-a

06 $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\frac{a}{b}}$에서
$a>0$, $b<0$ ($\because ab\neq0$)
② $-a<0$이므로 $\sqrt{-a}\sqrt{b}=-\sqrt{-ab}$
③ $\sqrt{a^2b}=\sqrt{a^2}\sqrt{b}=a\sqrt{b}$
④ $\sqrt{ab^2}=\sqrt{a}\sqrt{b^2}=-b\sqrt{a}$
⑤ $-b>0$이므로 $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{-b}}=\sqrt{-\frac{a}{b}}$

답 ①, ④

07 $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$에서
$a<0$, $b<0$ ($\because ab\neq0$)
따라서 $a+b<0$이므로

$$\begin{aligned}\sqrt{(a+b)^2}-|a|&=-(a+b)-(-a)\\&=-b\end{aligned}$$

답 $-b$

W 03 복소수

04 이차방정식

09 이차방정식의 근과 판별식

W 31쪽

01 (1) $x^2-x-20=0$에서 $(x+4)(x-5)=0$

$\therefore x=-4$ 또는 $x=5$

따라서 주어진 이차방정식의 근은 실근이다.

(2) $4x^2-12x+9=0$에서 $(2x-3)^2=0$

$\therefore x=\frac{3}{2}$

따라서 주어진 이차방정식의 근은 실근이다.

(3) $x=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot1\cdot(-1)}}{2\cdot1}=\frac{3\pm\sqrt{13}}{2}$

따라서 주어진 이차방정식의 근은 실근이다.

(4) $x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot3\cdot2}}{2\cdot3}=\frac{-1\pm\sqrt{23}i}{6}$

따라서 주어진 이차방정식의 근은 허근이다.

답 (1) $x=-4$ 또는 $x=5$, 실근

(2) $x=\frac{3}{2}$, 실근

(3) $x=\frac{3\pm\sqrt{13}}{2}$, 실근

(4) $x=\frac{-1\pm\sqrt{23}i}{6}$, 허근

02 (1) 주어진 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(-7)^2-4\cdot2\cdot3=25>0$

따라서 서로 다른 두 실근을 갖는다.

(2) 주어진 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=4^2-1\cdot16=0$

따라서 중근을 갖는다.

(3) 주어진 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-\sqrt{3})^2-1\cdot5=-2<0$

따라서 서로 다른 두 허근을 갖는다.

답 (1) 서로 다른 두 실근

(2) 중근

(3) 서로 다른 두 허근

03 이차방정식 $2x^2+x-k=0$의 판별식을 D라 하면

$D=1^2-4\cdot2\cdot(-k)=1+8k$

(1) 서로 다른 두 실근을 가지려면 $D>0$이어야 하므로

$D=1+8k>0 \quad \therefore k>-\frac{1}{8}$

(2) 중근을 가지려면 $D=0$이어야 하므로

$D=1+8k=0 \quad \therefore k=-\frac{1}{8}$

(3) 서로 다른 두 허근을 가지려면 $D<0$이어야 하므로

$D=1+8k<0 \quad \therefore k<-\frac{1}{8}$

답 (1) $k>-\frac{1}{8}$ (2) $-\frac{1}{8}$ (3) $k<-\frac{1}{8}$

Q BOX

x^2의 계수를 유리수로 고치기 위해 양변에 $\sqrt{2}+1$을 곱한다.

$D=8^2-4\cdot1\cdot16=0$ 임을 이용해도 된다.

$x^2+8x+16=0$에서
$(x+4)^2=0$
$\therefore x=-4$

04 $x^2-6x+5=0$에서 $(x-1)(x-5)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=5 \quad \therefore M=5$

$2x^2+3x-9=0$에서 $(x+3)(2x-3)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=\frac{3}{2} \quad \therefore m=-3$

$\therefore M+m=2$

답 ①

05 주어진 방정식의 양변에 $\sqrt{2}+1$을 곱하면

$(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)x^2+(\sqrt{2}+1)x+(\sqrt{2}+1)(2-\sqrt{2})=0$

$x^2+(\sqrt{2}+1)x+\sqrt{2}=0$

$(x+\sqrt{2})(x+1)=0$

$\therefore x=-\sqrt{2}$ 또는 $x=-1$

답 $x=-\sqrt{2}$ 또는 $x=-1$

06 $3(x^2+2x)+4=2x^2+4x$에서 $x^2+2x+4=0$

$\therefore x=-1\pm\sqrt{1^2-1\cdot4}=-1\pm\sqrt{3}i$

따라서 $a=-1$, $b=3$이므로

$ab=-3$

답 ①

07 $(x*x)+(4*x)=0$에서

$(x^2-x-x)+(4x-4-x)=0$

$x^2+x-4=0$

$\therefore x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot1\cdot(-4)}}{2\cdot1}=\frac{-1\pm\sqrt{17}}{2}$

답 ①

08 이차방정식 $x^2+ax+6=0$의 한 근이 $-\sqrt{3}$이므로

$(-\sqrt{3})^2+a\cdot(-\sqrt{3})+6=0, \quad 9-\sqrt{3}a=0$

$\therefore a=3\sqrt{3}$

답 $3\sqrt{3}$

09 이차방정식 $x^2+mx-(7m+1)=0$의 한 근이 3이므로

$9+3m-(7m+1)=0$

$8-4m=0 \quad \therefore m=2$

$m=2$를 주어진 이차방정식에 대입하면

$x^2+2x-15=0, \quad (x+5)(x-3)=0$

$\therefore x=-5$ 또는 $x=3$

따라서 $n=-5$이므로

$m-n=7$

답 ③

10 이차방정식 $x^2+(a-1)x-(3a-1)=0$의 한 근이 -4이므로

$(-4)^2+(a-1)\cdot(-4)-(3a-1)=0$

$21-7a=0 \quad \therefore a=3$

이차방정식 $kx^2-5x-k-1=0$의 한 근이 3이므로

$k\cdot3^2-5\cdot3-k-1=0$

$8k-16=0 \quad \therefore k=2$

$\therefore ak=6$

답 ③

11 주어진 이차방정식의 한 근이 -1이므로

$k\cdot(-1)^2-(a+2)\cdot(-1)-3bk=0$

$(1-3b)k+a+2=0$

이 등식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$1-3b=0$, $a+2=0$

따라서 $a=-2$, $b=\frac{1}{3}$이므로

$b-a=\frac{7}{3}$ 답 ④

Q BOX

$Ak+B=0$이 k에 대한 항등식
➡ $A=0$, $B=0$

쌤 한마디

항등식에 대한 여러 가지 표현

다음은 모두 k에 대한 항등식을 나타낸다.
① k의 값에 관계없이 항상 성립하는 등식
② 모든 k에 대하여 성립하는 등식
③ 임의의 k에 대하여 성립하는 등식

12 (i) $x<0$일 때, $2x^2+5x-12=0$이므로

$(x+4)(2x-3)=0$

$\therefore x=-4$ 또는 $x=\frac{3}{2}$

그런데 $x<0$이므로 $x=-4$

(ii) $x\geq0$일 때, $2x^2-5x-12=0$이므로

$(2x+3)(x-4)=0$

$\therefore x=-\frac{3}{2}$ 또는 $x=4$

그런데 $x\geq0$이므로 $x=4$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 근은

$x=-4$ 또는 $x=4$ 답 $x=-4$ 또는 $x=4$

범위를 나누어서 방정식의 해를 구할 때에는 구한 해가 해당 범위에 속하는지 반드시 확인한다.

다른 풀이 $x^2=|x|^2$이므로 주어진 방정식은

$2|x|^2-5|x|-12=0$

$(2|x|+3)(|x|-4)=0$

이때 $|x|\geq0$이므로 $|x|=4$

$\therefore x=-4$ 또는 $x=4$

13 $|x☆2|=x☆x$에서 $|x+2-2x|=x+x-x^2$

$\therefore |-x+2|=-x^2+2x$

(i) $x<2$일 때, $-x+2=-x^2+2x$이므로

$x^2-3x+2=0$, $(x-1)(x-2)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=2$

그런데 $x<2$이므로 $x=1$

(ii) $x\geq2$일 때, $-(-x+2)=-x^2+2x$이므로

$x^2-x-2=0$, $(x+1)(x-2)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=2$

그런데 $x\geq2$이므로 $x=2$

(i), (ii)에서 구하는 x의 값은

$x=1$ 또는 $x=2$ 답 $x=1$ 또는 $x=2$

14 정삼각형 ABC의 한 변의 길이를 x cm라 하면

$\overline{A'B}=x+2$(cm), $\overline{A'C}=x+4$(cm)

$\triangle A'BC$는 직각삼각형이므로

$(x+4)^2=x^2+(x+2)^2$

$x^2-4x-12=0$, $(x+2)(x-6)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=6$

그런데 $x>0$이므로 $x=6$

따라서 정삼각형 ABC의 한 변의 길이는 6 cm이다.

답 ③

15 처음 종이의 세로의 길이를 x cm라 하면 가로의 길이는 $2x$ cm이다.

직육면체 모양의 상자의 밑면의 가로의 길이는 $(2x-2)$ cm, 세로의 길이는 $(x-2)$ cm, 높이는 1 cm이므로

$(2x-2)(x-2)\cdot1=60$

$x^2-3x-28=0$, $(x+4)(x-7)=0$

$\therefore x=-4$ 또는 $x=7$

그런데 $x>2$이므로 $x=7$

길이는 양수이므로
$x-2>0$
$\therefore x>2$

따라서 처음 종이의 가로의 길이는 14 cm이다.

답 14 cm

16 처음 물건의 가격을 a라 하면 x % 인상한 물건의 가격은

$a\left(1+\frac{x}{100}\right)$

다시 x % 인하한 물건의 가격은

$a\left(1+\frac{x}{100}\right)\left(1-\frac{x}{100}\right)$ ······ ㉠

이때 ㉠은 처음 가격보다 4 % 낮아진 가격이므로

$a\left(1+\frac{x}{100}\right)\left(1-\frac{x}{100}\right)=a\left(1-\frac{4}{100}\right)$

$1-\frac{x^2}{10000}=1-\frac{4}{100}$

$\frac{x^2}{10000}=\frac{4}{100}$, $x^2=400$

$\therefore x=\pm20$

그런데 $x>0$이므로 $x=20$ 답 ③

다른 풀이 x % 인상한 후 다시 x % 인하한 가격이 4 % 인하한 가격과 같으므로

$\frac{x}{100}\cdot\left(-\frac{x}{100}\right)=-\frac{4}{100}$, $x^2=400$

$\therefore x=\pm20$

그런데 $x>0$이므로 $x=20$

쌤 한마디

가격의 인상, 인하에 대한 조건이 주어진 경우 다음을 이용하여 식을 세운다.
① a원인 물건의 가격을 x % 인상한 가격
⇨ $\left(a+a\cdot\frac{x}{100}\right)$원, 즉 $a\left(1+\frac{x}{100}\right)$원
② a원인 물건의 가격을 x % 인하한 가격
⇨ $\left(a-a\cdot\frac{x}{100}\right)$원, 즉 $a\left(1-\frac{x}{100}\right)$원

17 주어진 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\{-(k+1)\}^2-(k^2-6)>0$

$2k+7>0$ $\therefore k>-\frac{7}{2}$

따라서 가장 작은 정수 k의 값은 -3이다. 답 -3

18 주어진 방정식이 이차방정식이므로

$m+3\neq0 \quad \therefore m\neq-3$ ...... ㉠

주어진 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=m^2-(m+3)(m-7)\geq0$

$4m+21\geq0 \quad \therefore m\geq-\frac{21}{4}$ ...... ㉡

㉠, ㉡에서 $\quad -\frac{21}{4}\leq m<-3$ 또는 $m>-3$

따라서 m의 값이 될 수 없는 것은 ①이다. 답 ①

$-6<-\frac{21}{4}$

19 주어진 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=k^2-4(k-1)=0, \quad k^2-4k+4=0$

$(k-2)^2=0 \quad \therefore k=2$ 답 ②

$k=2$를 $x^2+kx+k-1=0$에 대입하면
$x^2+2x+1=0$
$(x+1)^2=0$
$\therefore x=-1$
즉 중근을 가짐을 확인할 수 있다.

20 이차방정식 $2x^2-k(2x-1)+4=0$, 즉 $2x^2-2kx+k+4=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-k)^2-2(k+4)=0$

$k^2-2k-8=0, \quad (k+2)(k-4)=0$

$\therefore k=-2$ 또는 $k=4$

따라서 모든 실수 k의 값의 합은

$-2+4=2$ 답 2

21 주어진 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(a-k)^2-(k^2+6k+b)=0$

$(-2a-6)k+a^2-b=0$

이 등식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$-2a-6=0,\ a^2-b=0$

$\therefore a=-3,\ b=9$

$\therefore b-a=12$ 답 ⑤

22 주어진 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-a)^2-(a^2-3a+7)<0$

$3a-7<0 \quad \therefore a<\frac{7}{3}$

따라서 자연수 a는 1, 2의 2개이다. 답 ②

23 이차방정식 $x^2-2kx+k^2+2k-6=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$\frac{D_1}{4}=(-k)^2-(k^2+2k-6)<0$

$-2k+6<0 \quad \therefore k>3$

이때 가장 작은 정수 k의 값은 4이므로 $\quad m=4$

$m=4$를 이차방정식 $x^2-(m+4)x+3m+5=0$에 대입하면

$x^2-8x+17=0$

이 이차방정식의 판별식을 D_2라 하면

$\frac{D_2}{4}=(-4)^2-1\cdot17=-1<0$

따라서 이차방정식 $x^2-(m+4)x+3m+5=0$은 서로 다른 두 허근을 갖는다. 답 서로 다른 두 허근

24 주어진 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=a^2-(a^2-4a+8)=4a-8$

$a<2$일 때 $4a-8<0$이므로 주어진 방정식은 서로 다른 두 허근을 갖는다. 답 서로 다른 두 허근

$a<2$에서 $4a<8$
$\therefore 4a-8<0$

25 주어진 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=b^2-4ac$

$b=a+c$를 위의 식에 대입하면

$D=(a+c)^2-4ac=(a-c)^2\geq0$

따라서 주어진 이차방정식은 실근을 갖는다. 답 ①

26 이차방정식 $x^2-2ax+b=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$\frac{D_1}{4}=a^2-b\geq0$ ...... ㉠

이차방정식 $x^2+2(a-3)x-6a+b=0$의 판별식을 D_2라 하면

$\frac{D_2}{4}=(a-3)^2-(-6a+b)$

$=a^2-b+9>0\ (\because ㉠)$

따라서 이차방정식 $x^2+2(a-3)x-6a+b=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다. 답 서로 다른 두 실근

27 주어진 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=c^2-(a+b)(a-b)>0$

$c^2-(a^2-b^2)>0 \quad \therefore b^2+c^2>a^2$

따라서 a, b, c를 세 변의 길이로 하는 삼각형은 예각삼각형이다. 답 예각삼각형

28 주어진 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=\{-(a+2b)\}^2-4\cdot1\cdot2ab=0$

$a^2+4ab+4b^2-8ab=0$

$a^2-4ab+4b^2=0, \quad (a-2b)^2=0$

$\therefore a=2b$

따라서 직각삼각형의 빗변의 길이는

$\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{(2b)^2+b^2}=\sqrt{5b^2}$

$=\sqrt{5}b\ (\because b>0)$ 답 $\sqrt{5}b$

29 주어진 이차식이 완전제곱식이 되려면 x에 대한 이차방정식 $x^2-(ak-c)x+k^2+3b-2=0$이 중근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=\{-(ak-c)\}^2-4(k^2+3b-2)=0$

$a^2k^2-2ack+c^2-4k^2-12b+8=0$

$(a^2-4)k^2-2ack+c^2-12b+8=0$

이 등식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$a^2-4=0,\ 2ac=0,\ c^2-12b+8=0$

$\therefore a^2=4,\ b=\frac{2}{3},\ c=0$

$a^2=4$에서 $a\neq0$이므로 $2ac=0$에서 $c=0$

$\therefore a^2-bc=4$ 답 ①

30 주어진 이차식이 $2(x+k)^2$으로 인수분해되면 완전제곱식이 된다. 즉 x에 대한 이차방정식 $2x^2+(3a+2)x+a^2+4a-10=0$이 중근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(3a+2)^2-4\cdot2\cdot(a^2+4a-10)=0$

$9a^2+12a+4-8a^2-32a+80=0$

$a^2-20a+84=0,\quad (a-6)(a-14)=0$

$\therefore a=6\ (\because a<9)$

따라서 주어진 이차식은 $2x^2+20x+50$이고, 이것은 $2(x+5)^2$으로 인수분해되므로

$k=5$

$\therefore a+k=11$

답 ④

10 이차방정식의 근과 계수의 관계 Ⓦ 36쪽

01 이차방정식 $x^2-x+3=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-\frac{-1}{1}=1,\ \alpha\beta=\frac{3}{1}=3$

(1) $\alpha+\beta-\alpha\beta=1-3=-2$

(2) $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{1}{3}$

(3) $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=1^2-2\cdot3=-5$

답 (1) -2 (2) $\frac{1}{3}$ (3) -5

02 (1) $x^2-(-4+2)x+(-4)\cdot2=0$

$\therefore x^2+2x-8=0$

(2) $x^2-\{(2+\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})\}x+(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=0$

$\therefore x^2-4x+1=0$

(3) $x^2-\{(3+i)+(3-i)\}x+(3+i)(3-i)=0$

$\therefore x^2-6x+10=0$

답 (1) $x^2+2x-8=0$
(2) $x^2-4x+1=0$
(3) $x^2-6x+10=0$

03 (1) $x^2+2x+3=0$에서 근의 공식에 의하여

$x=-1\pm\sqrt{1^2-1\cdot3}=-1\pm\sqrt{2}i$

$\therefore x^2+2x+3=(x+1-\sqrt{2}i)(x+1+\sqrt{2}i)$

(2) $2x^2-x+4=0$에서 근의 공식에 의하여

$x=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot2\cdot4}}{2\cdot2}=\frac{1\pm\sqrt{31}i}{4}$

$\therefore 2x^2-x+4$

$=2\left(x-\frac{1+\sqrt{31}i}{4}\right)\left(x-\frac{1-\sqrt{31}i}{4}\right)$

답 (1) $(x+1-\sqrt{2}i)(x+1+\sqrt{2}i)$
(2) $2\left(x-\frac{1+\sqrt{31}i}{4}\right)\left(x-\frac{1-\sqrt{31}i}{4}\right)$

Q BOX

$(p+qi)(p-qi)$
$=p^2+q^2$

$2x^2+20x+50$
$=2(x^2+10x+25)$
$=2(x+5)^2$

(판별식)
$=(-3)^2-4\cdot1\cdot1$
$=5>0$
이고
(두 근의 합)>0,
(두 근의 곱)>0
이므로
$\alpha>0,\ \beta>0$

04 (1) a, b는 실수이고 주어진 이차방정식의 한 근이 $2+3i$이므로 다른 한 근은 $2-3i$이다.

(2) 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(2+3i)+(2-3i)=-a,$

$(2+3i)(2-3i)=b$

$\therefore a=-4,\ b=13$

답 (1) $2-3i$ (2) $a=-4,\ b=13$

05 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=4,\ \alpha\beta=5$

$\therefore \alpha^3\beta+\alpha\beta^3=\alpha\beta(\alpha^2+\beta^2)=\alpha\beta\{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\}$

$=5\cdot(4^2-2\cdot5)=30$

답 30

06 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2,\ \alpha\beta=\frac{1}{4}$

$\therefore \frac{\alpha}{\beta}-\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha\beta}=\frac{(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)}{\alpha\beta}$

$=2(\alpha-\beta)\cdot4=8(\alpha-\beta)$

이때 $(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=2^2-4\cdot\frac{1}{4}=3$이므로

$\alpha-\beta=\sqrt{3}\ (\because \alpha>\beta)$

따라서 구하는 식의 값은

$8(\alpha-\beta)=8\sqrt{3}$

답 ③

07 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=3,\ \alpha\beta=1$

이때 $\alpha>0,\ \beta>0$이므로

$(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2=\alpha+2\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}+\beta$

$=\alpha+\beta+2\sqrt{\alpha\beta}$

$=3+2\cdot1=5$

$\therefore \sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=\sqrt{5}$

답 ②

08 α, β가 주어진 이차방정식의 두 근이므로

$\alpha^2-\alpha-3=0,\ \beta^2-\beta-3=0$

$\therefore \alpha^2-\alpha=3,\ \beta^2-\beta=3$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=1,\ \alpha\beta=-3$

$\therefore (\alpha^3-\alpha^2-\alpha-1)(\beta^3-\beta^2-\beta-1)$

$=\{\alpha(\alpha^2-\alpha)-\alpha-1\}\{\beta(\beta^2-\beta)-\beta-1\}$

$=(2\alpha-1)(2\beta-1)$

$=4\alpha\beta-2(\alpha+\beta)+1$

$=4\cdot(-3)-2\cdot1+1=-13$

답 ①

09 α, β가 주어진 이차방정식의 두 근이므로

$\alpha^2-6\alpha+2=0,\ \beta^2-6\beta+2=0$

$\therefore \alpha^2-5\alpha+2=\alpha,\ \beta^2-5\beta+2=\beta$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=6,\ \alpha\beta=2$

$$\frac{\beta}{\alpha^2-5\alpha+2}+\frac{\alpha}{\beta^2-5\beta+2}=\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}$$
$$=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}$$
$$=\frac{6^2-2\cdot 2}{2}=16$$

답 16

10 α, β가 주어진 이차방정식의 두 근이므로

$\alpha^2+4\alpha-1=0$, $\beta^2+4\beta-1=0$

$\therefore \alpha^2+4\alpha=1$, $\beta^2+4\beta=1$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-4$, $\alpha\beta=-1$

$\therefore \alpha^5+\beta^5+4\alpha^4+4\beta^4=\alpha^3(\alpha^2+4\alpha)+\beta^3(\beta^2+4\beta)$
$=\alpha^3+\beta^3$
$=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$
$=(-4)^3-3\cdot(-1)\cdot(-4)$
$=-76$

답 -76

11 주어진 이차방정식의 두 근을 α, 2α $(\alpha\neq0)$라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+2\alpha=-3(m+1)$에서

$\alpha=-m-1$ …… ㉠

$\alpha\cdot 2\alpha=-5m-7$에서

$2\alpha^2=-5m-7$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$2(-m-1)^2=-5m-7$, $2m^2+9m+9=0$

$(m+3)(2m+3)=0$

$\therefore m=-3$ 또는 $m=-\frac{3}{2}$

따라서 정수 m의 값은 -3이다.

답 -3

12 주어진 이차방정식의 두 실근의 절댓값이 같고 부호가 서로 다르므로 두 실근을 α, $-\alpha$ $(\alpha\neq0)$라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+(-\alpha)=-(m^2-8m+15)$ …… ㉠

$\alpha\cdot(-\alpha)=m-4$ …… ㉡

㉠에서 $m^2-8m+15=0$이므로

$(m-3)(m-5)=0$

$\therefore m=3$ 또는 $m=5$ …… ㉢

㉡에서 $m-4<0$이므로 $m<4$ …… ㉣

㉢, ㉣에서 $m=3$

답 ④

쌤 한마디

절댓값이 같고 부호가 서로 다른 두 실근

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 실근의 절댓값이 같고 부호가 서로 다르면 두 근을 α, $-\alpha$ $(\alpha\neq0)$로 놓는다.

$\alpha+(-\alpha)=0$이므로 $-\frac{b}{a}=0$

$\alpha\cdot(-\alpha)=-\alpha^2<0$이므로 $\frac{c}{a}<0$

Q BOX

㉠−㉡을 하면
$3b=3$ $\therefore b=1$
$b=1$을 ㉠에 대입하면
$a+1=5$ $\therefore a=4$

두 근의 비가 $m:n$이면 두 근을 $m\alpha$, $n\alpha(k\neq0)$로 놓는다.

$m=3$을 주어진 이차방정식에 대입하면
$x^2-1=0$
$\therefore x=\pm1$

13 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-a$, $\alpha\beta=b$

$(\alpha-1)(\beta-1)=6$에서

$\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1=6$, $b+a+1=6$

$\therefore a+b=5$ …… ㉠

$(2\alpha+1)(2\beta+1)=-3$에서

$4\alpha\beta+2(\alpha+\beta)+1=-3$, $4b-2a+1=-3$

$\therefore a-2b=2$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=4$, $b=1$

$\therefore ab=4$

답 ②

14 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2a$, $\alpha\beta=-3a$

$a>0$에서 $\alpha\beta<0$이므로

$(|\alpha|+|\beta|)^2=|\alpha|^2+|\beta|^2+2|\alpha\beta|$
$=\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta$
$=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$
$=(2a)^2-4\cdot(-3a)$
$=4a^2+12a$

$(|\alpha|+|\beta|)^2=4^2$에서 $4a^2+12a=16$

$a^2+3a-4=0$, $(a+4)(a-1)=0$

$\therefore a=1$ ($\because a>0$)

따라서 $\alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=-3$이므로

$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$
$=2^2-2\cdot(-3)=10$

답 10

15 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=1-3|a|$, $\alpha\beta=a$

$\alpha^2\beta+\alpha\beta^2+\alpha^2+\beta^2+\alpha+\beta=6$에서

$\alpha\beta(\alpha+\beta)+(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+\alpha+\beta=6$

$a(1-3|a|)+(1-3|a|)^2-2a+(1-3|a|)=6$

$9a^2-3a|a|-a-9|a|-4=0$

(i) $a\geq0$일 때,

$9a^2-3a^2-a-9a-4=0$

$3a^2-5a-2=0$, $(3a+1)(a-2)=0$

$\therefore a=-\frac{1}{3}$ 또는 $a=2$

그런데 $a\geq0$이므로 $a=2$

(ii) $a<0$일 때,

$9a^2+3a^2-a+9a-4=0$

$3a^2+2a-1=0$, $(a+1)(3a-1)=0$

$\therefore a=-1$ 또는 $a=\frac{1}{3}$

그런데 $a<0$이므로 $a=-1$

(i), (ii)에서 $a=2$ 또는 $a=-1$이므로 구하는 합은

$2+(-1)=1$

답 ②

16 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-a$, $\alpha\beta=b$ …… ㉠

이차방정식 $x^2-(b-2)x-5a=0$의 두 근이 $\alpha+1$, $\beta+1$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$(\alpha+1)+(\beta+1)=b-2$, $(\alpha+1)(\beta+1)=-5a$

$\therefore \alpha+\beta=b-4$, $\alpha\beta+\alpha+\beta+1=-5a$ ······ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$-a=b-4$, $b-a+1=-5a$

$\therefore a+b=4$, $4a+b=-1$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=-\frac{5}{3}$, $b=\frac{17}{3}$

$\therefore b-a=\frac{22}{3}$ 답 $\frac{22}{3}$

17 이차방정식 $x^2-ax+b=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=a$, $\alpha\beta=b$ ······ ㉠

이차방정식 $x^2-(2a-7)x+b+6=0$의 두 근이 α^2, β^2이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha^2+\beta^2=2a-7$, $\alpha^2\beta^2=b+6$

$\therefore (\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=2a-7$, $(\alpha\beta)^2=b+6$ ······ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$a^2-2b=2a-7$, $b^2=b+6$

$b^2=b+6$에서 $b^2-b-6=0$

$(b+2)(b-3)=0$ $\therefore b=3$ ($\because b>0$)

$a^2-2b=2a-7$, 즉 $a^2-6=2a-7$에서

$a^2-2a+1=0$, $(a-1)^2=0$ $\therefore a=1$

$\therefore \frac{b}{a}=3$ 답 ②

18 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$, $\alpha\beta=\frac{c}{a}$

$\therefore \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=-\frac{b}{c}$, $\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta}=\frac{1}{\alpha\beta}=\frac{a}{c}$

따라서 $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$을 두 근으로 하고 x^2의 계수가 c인 이차방정식은

$c\left(x^2+\frac{b}{c}x+\frac{a}{c}\right)=0$

$\therefore cx^2+bx+a=0$ 답 ⑤

19 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 한 근이 -2이므로

$4-2a+b=0$ $\therefore 2a-b=4$ ······ ㉠

이차방정식 $x^2+(b+2)x-4a-3=0$의 한 근이 1이므로

$1+b+2-4a-3=0$

$\therefore -4a+b=0$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-2$, $b=-8$

$x^2+ax+b=0$, 즉 $x^2-2x-8=0$에서

$(x+2)(x-4)=0$ $\therefore x=-2$ 또는 $x=4$

$\therefore \alpha=4$

$x^2+(b+2)x-4a-3=0$, 즉 $x^2-6x+5=0$에서

$(x-1)(x-5)=0$ $\therefore x=1$ 또는 $x=5$

$\therefore \beta=5$

따라서 4, 5를 두 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은

$x^2-(4+5)x+4\cdot5=0$

$\therefore x^2-9x+20=0$ 답 $x^2-9x+20=0$

20 $\overline{AB}=\overline{AH}+\overline{BH}$에서

$\alpha+\beta=6$

$\triangle ABP$는 $\angle APB=90°$인 직각삼각형이므로

$\overline{PH}^2=\overline{AH}\cdot\overline{BH}$에서 $\alpha\beta=4$

$\therefore \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=6^2-2\cdot4=28$,

$\alpha^2\beta^2=(\alpha\beta)^2=4^2=16$

따라서 α^2, β^2을 두 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은

$x^2-28x+16=0$

이므로 $a=-28$, $b=16$

$\therefore a+b=-12$ 답 -12

21 기준이는 b를 바르게 보고 풀었으므로 두 근의 곱은

$\frac{b}{2}=-\frac{3}{2}$ $\therefore b=-3$

하율이는 a를 바르게 보고 풀었으므로 두 근의 합은

$-\frac{a}{2}=\frac{5}{2}$ $\therefore a=-5$

$\therefore b-a=2$ 답 ⑤

22 원래의 이차방정식을 $x^2+ax+b=0$ (a, b는 상수)이라 하자.

도균이는 b를 바르게 보고 풀었으므로 두 근의 곱은

$b=(3+\sqrt{2}i)(3-\sqrt{2}i)=11$

태리는 a를 바르게 보고 풀었으므로 두 근의 합은

$-a=(-1+\sqrt{7})+(-1-\sqrt{7})=-2$

$\therefore a=2$

따라서 구하는 이차방정식은

$x^2+2x+11=0$ 답 $x^2+2x+11=0$

23 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 근의 공식을 $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-ac}}{2a}$로 잘못 적용하여 얻은 두 근이 1, 3이므로

$\frac{-b+\sqrt{b^2-ac}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{b^2-ac}}{2a}=1+3$에서

$\frac{-2b}{2a}=4$ $\therefore b=-4a$ ······ ㉠

$\frac{-b+\sqrt{b^2-ac}}{2a}\cdot\frac{-b-\sqrt{b^2-ac}}{2a}=1\cdot3$에서

$\frac{b^2-(b^2-ac)}{4a^2}=\frac{c}{4a}=3$ ($\because a\neq0$)

$\therefore c=12a$ ······ ㉡

Q BOX

두 식 $a+b=4$, $4a+b=-1$을 변끼리 빼면

$-3a=5$

$\therefore a=-\frac{5}{3}$

$a=-\frac{5}{3}$를 $a+b=4$에 대입하면

$-\frac{5}{3}+b=4$

$\therefore b=\frac{17}{3}$

㉠+㉡을 하면

$-2a=4$

$\therefore a=-2$

$a=-2$를 ㉠에 대입하면

$-4-b=4$

$\therefore b=-8$

반원에 대한 원주각의 크기는 $90°$이다.

㉠, ㉡을 $ax^2+bx+c=0$에 대입하면

$ax^2-4ax+12a=0$

따라서 주어진 방정식의 두 근의 합은 $-\frac{-4a}{a}=4$이고,

두 근의 곱은 $\frac{12a}{a}=12$이다. 답 합: 4, 곱: 12

다른 풀이 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 근의 공식은

$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

이므로 주어진 근의 공식은 c의 값을 $\frac{1}{4}c$로 잘못 대입한 것과 같다. 이때 1, 3을 두 근으로 하고 x^2의 계수가 a인 이차방정식은

$a\{x^2-(1+3)x+1\cdot3\}=0$

$\therefore ax^2-4ax+3a=0$

따라서 주어진 방정식의 상수항은

$3a\cdot4=12a$

즉 주어진 방정식은 $ax^2-4ax+12a=0$

따라서 주어진 방정식의 두 근의 합은 $-\frac{-4a}{a}=4$이고,

두 근의 곱은 $\frac{12a}{a}=12$이다.

24 방정식 $f(x)=0$이 -4를 근으로 가지므로

$f(-4)=0$

각 방정식의 좌변에 $x=-2$를 대입하면

① $f(-2+2)=f(0)$

② $f(-(-2)+2)=f(4)$

③ $f((-2)^2-1)=f(3)$

④ $f(3\cdot(-2)+2)=f(-4)=0$

⑤ $f((-2)^2+1)=f(5)$ 답 ④

25 $f(\alpha)=0$, $f(\beta)=0$이므로 $f(3x-1)=0$이려면

$3x-1=\alpha$ 또는 $3x-1=\beta$

$\therefore x=\frac{\alpha+1}{3}$ 또는 $x=\frac{\beta+1}{3}$

따라서 이차방정식 $f(3x-1)=0$의 두 근의 곱은

$\frac{\alpha+1}{3}\cdot\frac{\beta+1}{3}=\frac{\alpha\beta+\alpha+\beta+1}{9}$

$=\frac{-3+5+1}{9}=\frac{1}{3}$ 답 $\frac{1}{3}$

26 $f(\alpha+2)=0$, $f(\beta+2)=0$이므로 $f(x-3)=0$이려면

$x-3=\alpha+2$ 또는 $x-3=\beta+2$

$\therefore x=\alpha+5$ 또는 $x=\beta+5$

따라서 이차방정식 $f(x-3)=0$의 두 근의 합과 곱은 각각

$(\alpha+5)+(\beta+5)=\alpha+\beta+10=-4+10=6$,

$(\alpha+5)(\beta+5)=\alpha\beta+5(\alpha+\beta)+25$

$=6+5\cdot(-4)+25=11$

답 합: 6, 곱: 11

Q BOX

양변에 4를 곱하여 x^2의 계수를 정수로 고친다.

α, β는 이차방정식 $x^2-4x+5=0$의 두 근이므로

$(x-\alpha)(x-\beta)$
$=x^2-4x-5$

α, β는 이차방정식 $3x^2-3x+4=0$의 두 근이므로

$3(x-\alpha)(x-\beta)$
$=3x^2-3x+4$
$\therefore (x-\alpha)(x-\beta)$
$=x^2-x+\frac{4}{3}$

27 $x^2+6x+11=0$에서 근의 공식에 의하여

$x=-3\pm\sqrt{3^2-1\cdot11}=-3\pm\sqrt{2}i$

$\therefore x^2+6x+11$

$=\{x-(-3+\sqrt{2}i)\}\{x-(-3-\sqrt{2}i)\}$

$=(x+3-\sqrt{2}i)(x+3+\sqrt{2}i)$

따라서 인수인 것은 ⑤이다. 답 ⑤

28 $\frac{1}{4}x^2-x-1=0$, 즉 $x^2-4x-4=0$에서 근의 공식에 의하여

$x=-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-1\cdot(-4)}=2\pm2\sqrt{2}$

$\therefore \frac{1}{4}x^2-x-1$

$=\frac{1}{4}\{x-(2+2\sqrt{2})\}\{x-(2-2\sqrt{2})\}$

$=\frac{1}{4}(x-2-2\sqrt{2})(x-2+2\sqrt{2})$

따라서 $a=-2$, $b=2$이므로

$ab=-4$ 답 -4

29 이차방정식 $x^2-4x+5=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha\beta=5$

$f(\alpha)=f(\beta)=5$이므로

$f(\alpha)-5=0$, $f(\beta)-5=0$

즉 이차방정식 $f(x)-5=0$의 두 근이 α, β이므로

$f(x)-5=a(x-\alpha)(x-\beta)$

$=a(x^2-4x+5)$

$\therefore f(x)=a(x^2-4x+5)+5$

이때 $f(0)=-5$이므로 $5a+5=-5$

$5a=-10$ $\therefore a=-2$

따라서 $f(x)=-2(x^2-4x+5)+5=-2x^2+8x-5$ 이므로

$f(1)=-2+8-5=1$ 답 1

30 이차방정식 $3x^2-3x+4=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=1$이므로

$\alpha=1-\beta$, $\beta=1-\alpha$

$P(\alpha)=\beta$, $P(\beta)=\alpha$에서 $P(\alpha)=1-\alpha$, $P(\beta)=1-\beta$ 이므로

$P(\alpha)+\alpha-1=0$, $P(\beta)+\beta-1=0$

따라서 이차방정식 $P(x)+x-1=0$의 두 근이 α, β이고, $P(x)$의 x^2의 계수가 1이므로

$P(x)+x-1=(x-\alpha)(x-\beta)=x^2-x+\frac{4}{3}$

$\therefore P(x)=x^2-2x+\frac{7}{3}$ 답 $x^2-2x+\frac{7}{3}$

다른 풀이 이차방정식 $3x^2-3x+4=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=1$, $\alpha\beta=\frac{4}{3}$

$P(x)=x^2+ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$P(\alpha)=\alpha^2+a\alpha+b=\beta$ …… ㉠

$P(\beta)=\beta^2+a\beta+b=\alpha$ …… ㉡

㉠−㉡을 하면

$\alpha^2-\beta^2+a(\alpha-\beta)=-(\alpha-\beta)$

$(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)+a(\alpha-\beta)+(\alpha-\beta)=0$

$(\alpha-\beta)(\alpha+\beta+a+1)=0$

$\alpha\neq\beta$이므로 $\alpha+\beta+a+1=0$

$1+a+1=0$ $\therefore a=-2$

㉠+㉡을 하면

$\alpha^2+\beta^2+a(\alpha+\beta)+2b=\alpha+\beta$

$(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+a(\alpha+\beta)+2b=\alpha+\beta$

$1^2-2\cdot\frac{4}{3}+(-2)\cdot1+2b=1$ $\therefore b=\frac{7}{3}$

$\therefore P(x)=x^2-2x+\frac{7}{3}$

31 a, b가 유리수이므로 이차방정식 $x^2-6x+a=0$의 한 근이 $b-\sqrt{5}$이면 다른 한 근은 $b+\sqrt{5}$이다.
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(b-\sqrt{5})+(b+\sqrt{5})=6$, $(b-\sqrt{5})(b+\sqrt{5})=a$

$\therefore a=4$, $b=3$

$\therefore a-b=1$ 답 1

32 $\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\frac{2i}{2}=i$

a, b가 실수이므로 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 한 근이 i이면 다른 한 근은 $-i$이다.
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$i+(-i)=-a$, $i\cdot(-i)=b$

$\therefore a=0$, $b=1$

따라서 이차방정식 $x^2+2bx+a^2=0$, 즉 $x^2+2x=0$에서 $x(x+2)=0$ $\therefore x=-2$ 또는 $x=0$

답 $x=-2$ 또는 $x=0$

33 조건 (가)에서 나머지정리에 의하여 $f(1)=4$이므로

$1+m+n=4$

$\therefore m+n=3$ …… ㉠

m, n이 실수이므로 조건 (나)에서 이차방정식 $x^2+mx+n=0$의 한 근이 $a+2i$이면 다른 한 근은 $a-2i$이다.
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(a+2i)+(a-2i)=-m$, $(a+2i)(a-2i)=n$

$2a=-m$, $a^2+4=n$

$\therefore m=-2a$, $n=a^2+4$

이것을 ㉠에 대입하면

$-2a+(a^2+4)=3$, $a^2-2a+1=0$

$(a-1)^2=0$ $\therefore a=1$

따라서 $m=-2$, $n=5$이므로

$mn=-10$ 답 ①

Q BOX

이차방정식 $3x^2-3x+4=0$의 판별식을 D라 하면
$D=(-3)^2-4\cdot3\cdot4$
$=-39<0$
이므로 서로 다른 두 허근을 갖는다.
$\therefore \alpha\neq\beta$

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 x축의 교점의 개수는 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 서로 다른 실근의 개수와 같다.

$(b-\sqrt{5})+(b+\sqrt{5})=6$에서
$2b=6$ $\therefore b=3$
$b=3$을 $(b-\sqrt{5})(b+\sqrt{5})=a$에 대입하면
$a=3^2-5=4$

다항식 $P(x)$를 일차식 $x-\alpha$로 나누었을 때의 나머지를 R라 하면
$R=P(\alpha)$

05 이차방정식과 이차함수

11 이차방정식과 이차함수 Ⓦ 41쪽

01 (3) $y=2x^2+4x-9=2(x+1)^2-11$
이므로 꼭짓점의 좌표는 $(-1, -11)$, 축의 방정식은 $x=-1$이다.
(4) $y=-x^2-8x-11=-(x+4)^2+5$
이므로 꼭짓점의 좌표는 $(-4, 5)$, 축의 방정식은 $x=-4$이다.

답 (1) $(2, 0)$, $x=2$
(2) $(-6, -5)$, $x=-6$
(3) $(-1, -11)$, $x=-1$
(4) $(-4, 5)$, $x=-4$

02 (1) 이차방정식 $x^2+7x+5=0$의 판별식을 D라 하면

$D=7^2-4\cdot1\cdot5=29>0$

따라서 주어진 이차함수의 그래프와 x축의 교점의 개수는 2이다.
(2) 이차방정식 $8x^2-2x+1=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-1)^2-8\cdot1=-7<0$

따라서 주어진 이차함수의 그래프와 x축의 교점의 개수는 0이다.

답 (1) 2 (2) 0

03 이차방정식 $x^2-2x+k=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-1)^2-1\cdot k=1-k$

(1) $\frac{D}{4}=1-k>0$ $\therefore k<1$

(2) $\frac{D}{4}=1-k=0$ $\therefore k=1$

(3) $\frac{D}{4}=1-k<0$ $\therefore k>1$

답 (1) $k<1$ (2) 1 (3) $k>1$

04 (1) 이차방정식 $-x^2-x+4=2x+1$, 즉 $x^2+3x-3=0$의 판별식을 D라 하면

$D=3^2-4\cdot1\cdot(-3)=21>0$

따라서 주어진 이차함수의 그래프와 직선은 서로 다른 두 점에서 만난다.
(2) 이차방정식 $2x^2+3x+8=-x+5$, 즉 $2x^2+4x+3=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=2^2-2\cdot3=-2<0$

따라서 주어진 이차함수의 그래프와 직선은 만나지 않는다.

답 (1) 서로 다른 두 점에서 만난다.
(2) 만나지 않는다.

05 이차방정식 $x^2-2x+3=x+k$, 즉
$x^2-3x+3-k=0$의 판별식을 D라 하면
$$D=(-3)^2-4\cdot1\cdot(3-k)=-3+4k$$
(1) $D=-3+4k>0 \quad \therefore k>\frac{3}{4}$
(2) $D=-3+4k=0 \quad \therefore k=\frac{3}{4}$
(3) $D=-3+4k<0 \quad \therefore k<\frac{3}{4}$

답 (1) $k>\frac{3}{4}$ (2) $\frac{3}{4}$ (3) $k<\frac{3}{4}$

06 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근의 합이 2, 곱이 -5이므로 근과 계수의 관계에 의하여
$2=-a$, $-5=b \quad \therefore a=-2, b=-5$
$\therefore ab=10$ 답 ③

07 이차방정식 $2x^2-8x+3=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=4$, $\alpha\beta=\frac{3}{2}$
$\therefore \alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$
$=4^3-3\cdot\frac{3}{2}\cdot4=46$ 답 46

08 이차함수 $y=x^2+kx-3$의 그래프와 x축의 두 교점의 x좌표를 α, β라 하면 이차방정식 $x^2+kx-3=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=-k$, $\alpha\beta=-3$ …… ㉠
이때 두 교점 사이의 거리가 4이므로
$|\alpha-\beta|=4$
양변을 제곱하면 $(\alpha-\beta)^2=16$
$\therefore (\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=16$ …… ㉡
㉠을 ㉡에 대입하면
$k^2+12=16$, $k^2=4$
$\therefore k=2 \ (\because k>0)$ 답 2

다른 풀이 이차함수 $y=x^2+kx-3$의 그래프와 x축의 두 교점의 x좌표를 α, $\alpha+4$라 하면 이차방정식 $x^2+kx-3=0$의 두 근이 α, $\alpha+4$이므로 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+(\alpha+4)=-k$ …… ㉠
$\alpha(\alpha+4)=-3$ …… ㉡
㉡에서 $\alpha^2+4\alpha+3=0$, $(\alpha+3)(\alpha+1)=0$
$\therefore \alpha=-3$ 또는 $\alpha=-1$ …… ㉢
㉢을 ㉠에 대입하여 풀면 $k=-2$ 또는 $k=2$
$\therefore k=2 \ (\because k>0)$

두 교점의 x좌표를 $\alpha-4$, α로 놓을 수도 있다.

09 이차방정식 $x^2-6x+k=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=(-3)^2-k\geq0 \quad \therefore k\leq9$
따라서 가장 큰 실수 k의 값은 9이다. 답 9

이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 만난다.
⇒ 이차방정식 $f(x)=0$의 판별식 D에 대하여 $D\geq0$

10 이차방정식 $x^2+kx-k-1=0$의 판별식을 D라 하면
$D=k^2-4(-k-1)=0$, $k^2+4k+4=0$
$(k+2)^2=0 \quad \therefore k=-2$
따라서 $x^2-2x+1=0$에서
$(x-1)^2=0 \quad \therefore x=1$
즉 접점의 x좌표는 1이다. 답 1

11 이차방정식 $x^2+4ax-b^2+20=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=(2a)^2-(-b^2+20)<0$
$\therefore 4a^2+b^2<20$
따라서 이를 만족시키는 자연수 a, b의 순서쌍 (a, b)는
$(1, 1)$, $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(2, 1)$
의 4개이다. 답 4

12 이차방정식 $x^2+(a-2k)x+k^2+3k+b=0$의 판별식을 D라 하면
$D=(a-2k)^2-4(k^2+3k+b)=0$
$a^2-4ak+4k^2-4k^2-12k-4b=0$
$\therefore (-4a-12)k+a^2-4b=0$
이 등식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하므로
$-4a-12=0$, $a^2-4b=0$
위의 두 식을 연립하여 풀면
$a=-3$, $b=\frac{9}{4}$
$\therefore a+b=-\frac{3}{4}$ 답 ②

$a=-3$을 $a^2-4b=0$에 대입하면
$9-4b=0$
$\therefore b=\frac{9}{4}$

쌤 한마디
항등식의 성질
① $ax+b=0$이 x에 대한 항등식 ⇔ $a=0$, $b=0$
② $ax^2+bx+c=0$이 x에 대한 항등식
⇔ $a=0$, $b=0$, $c=0$
③ $ax^2+bx+c=a'x^2+b'x+c'$이 x에 대한 항등식
⇔ $a=a'$, $b=b'$, $c=c'$

13 이차함수 $f(x)=x^2+4x-5$의 그래프가 직선 $y=ax-6$과 서로 다른 두 점 $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$에서 만나므로 x_1, x_2는 이차방정식
$x^2+4x-5=ax-6$, 즉 $x^2+(4-a)x+1=0$
의 두 근이다.
따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$x_1+x_2=-(4-a)$
이므로
$-(4-a)=3 \quad \therefore a=7$ 답 ③

14 이차방정식 $x^2-2x+4=ax+b$, 즉
$x^2-(2+a)x+4-b=0$의 계수가 모두 유리수이고 한 근이 $2+\sqrt{3}$이므로 다른 한 근은 $2-\sqrt{3}$이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(2+\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})=2+a$,

$(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=4-b$

이므로

$4=2+a,\ 1=4-b \qquad \therefore a=2,\ b=3$

$\therefore ab=6$ 답 ②

15 이차방정식 $x^2-ax-7=4x+1$, 즉 $x^2-(a+4)x-8=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=a+4,\ \alpha\beta=-8$ …… ㉠

한편 $|\alpha-\beta|=6$이므로 양변을 제곱하면

$(\alpha-\beta)^2=36$

$\therefore (\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=36$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$(a+4)^2-4\cdot(-8)=36$

$a^2+8a+12=0, \qquad (a+6)(a+2)=0$

$\therefore a=-2\ (\because a>-3)$ 답 -2

16 이차방정식 $x^2-x+2k+5=x+k$, 즉 $x^2-2x+k+5=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$\frac{D_1}{4}=(-1)^2-(k+5)>0$

$-k-4>0 \qquad \therefore k<-4$ …… ㉠

정수 k의 값은 $-5, -6, -7, \cdots$

이차방정식 $x^2+3x+3k+13=x+k$, 즉 $x^2+2x+2k+13=0$의 판별식을 D_2라 하면

$\frac{D_2}{4}=1^2-(2k+13)<0$

$-2k-12<0 \qquad \therefore k>-6$ …… ㉡

정수 k의 값은 $-5, -4, -3, \cdots$

따라서 ㉠, ㉡을 모두 만족시키는 정수 k의 값은

-5 답 -5

17 이차방정식 $x^2-2kx+k^2=4x+2$, 즉 $x^2-2(k+2)x+k^2-2=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\{-(k+2)\}^2-(k^2-2)\geq 0$

$4k+6\geq 0 \qquad \therefore k\geq -\frac{3}{2}$

따라서 가장 작은 실수 k의 값은 $-\frac{3}{2}$이다. 답 $-\frac{3}{2}$

18 이차방정식 $x^2-3=2x-m+n-3$, 즉 $x^2-2x+m-n=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-1)^2-(m-n)>0$

$1-m+n>0 \qquad \therefore m-n-1<0$ 답 ②

19 직선 $y=ax+b$가 직선 $y=-2x+5$에 평행하므로 $a=-2$

서로 평행한 두 직선의 기울기는 같다.

직선 $y=-2x+b$가 이차함수 $y=x^2-6x+3$의 그래프에 접하므로 이차방정식 $x^2-6x+3=-2x+b$, 즉 $x^2-4x+3-b=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-2)^2-(3-b)=0$

$1+b=0 \qquad \therefore b=-1$

$\therefore ab=2$ 답 ③

20 직선 $y=x-m$을 y축의 방향으로 $3m$만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$y=x-m+3m=x+2m$

이 직선이 이차함수 $y=x^2-x+2$의 그래프에 접하므로 이차방정식 $x^2-x+2=x+2m$, 즉 $x^2-2x+2-2m=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-1)^2-(2-2m)=0$

$-1+2m=0 \qquad \therefore m=\frac{1}{2}$ 답 $\frac{1}{2}$

21 점 $(2, 3)$을 지나는 직선의 방정식을 $y=a(x-2)+3$이라 하자.

이 직선이 이차함수 $y=-2x^2+5x-1$의 그래프에 접하므로 이차방정식 $-2x^2+5x-1=a(x-2)+3$, 즉 $2x^2+(a-5)x-2a+4=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(a-5)^2-4\cdot 2\cdot(-2a+4)=0$

$a^2+6a-7=0, \qquad (a+7)(a-1)=0$

$\therefore a=-7$ 또는 $a=1$

따라서 두 직선의 기울기는 -7, 1이므로 그 곱은 -7이다. 답 ③

12 이차함수의 최대, 최소

W 44쪽

이차함수 $y=a(x-p)^2+q$는
① $a>0$이면 $x=p$에서 최솟값 q를 갖는다.
② $a<0$이면 $x=p$에서 최댓값 q를 갖는다.

01 답 (1) 최솟값: 4, $x=2$
(2) 최댓값: -5, $x=-6$

02 (1) $y=x^2+3x-2=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{17}{4}$

따라서 $x=-\frac{3}{2}$일 때 최솟값은 $-\frac{17}{4}$이다.

(2) $y=2x^2-4x+9=2(x-1)^2+7$

따라서 $x=1$일 때 최솟값은 7이다.

(3) $y=-x^2-2x+5=-(x+1)^2+6$

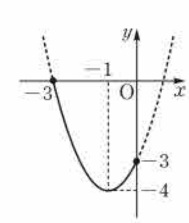
따라서 $x=-1$일 때 최댓값은 6이다.

(4) $y=-\frac{1}{3}x^2+2x-7=-\frac{1}{3}(x-3)^2-4$

따라서 $x=3$일 때 최댓값은 -4이다.

답 (1) 최솟값: $-\frac{17}{4}$ (2) 최솟값: 7
(3) 최댓값: 6 (4) 최댓값: -4

03 (1) $-3\leq x\leq 0$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고



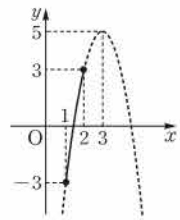
$f(-3)=0,\ f(-1)=-4$,
$f(0)=-3$

따라서 $f(x)$의 최댓값은 0, 최솟값은 -4이다.

(2) $1\le x\le 2$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고

$f(1)=-3,\ f(2)=3$

따라서 $f(x)$의 최댓값은 3, 최솟값은 -3이다.



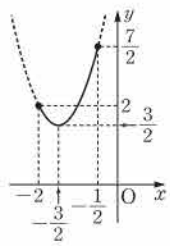
(3) $f(x)=2x^2+6x+6=2\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{2}$

$-2\le x\le -\frac{1}{2}$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고

$f(-2)=2,$

$f\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{2},$

$f\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{7}{2}$



따라서 $f(x)$의 최댓값은 $\frac{7}{2}$, 최솟값은 $\frac{3}{2}$이다.

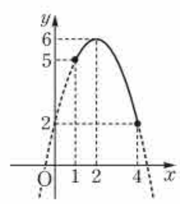
(4) $f(x)=-x^2+4x+2=-(x-2)^2+6$

$1\le x\le 4$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고

$f(1)=5,\ f(2)=6,$

$f(4)=2$

따라서 $f(x)$의 최댓값은 6, 최솟값은 2이다.



답 (1) 최댓값: 0, 최솟값: -4
(2) 최댓값: 3, 최솟값: -3
(3) 최댓값: $\frac{7}{2}$, 최솟값: $\frac{3}{2}$
(4) 최댓값: 6, 최솟값: 2

04 $y=2x^2+4x-3=2(x+1)^2-5$이므로 $x=-1$에서 최솟값 -5를 갖는다.
따라서 $a=-1,\ b=-5$이므로

$a+b=-6$

답 ③

05 $y=-3x^2+ax+4$의 그래프가 점 $(1,\ -5)$를 지나므로

$-5=-3+a+4 \qquad \therefore a=-6$

따라서 $y=-3x^2-6x+4=-3(x+1)^2+7$이므로 $x=-1$에서 최댓값 7을 갖는다.

답 7

06 $y=-x^2+2kx+3k-8$

$=-(x-k)^2+k^2+3k-8$

이 함수의 최댓값이 2이므로

$k^2+3k-8=2, \qquad k^2+3k-10=0$

$(k+5)(k-2)=0$

$\therefore k=-5$ 또는 $k=2$

답 $-5,\ 2$

Q BOX

07 $y=\frac{1}{2}x^2+2x+k=\frac{1}{2}(x+2)^2-2+k$이므로
$x=-2$에서 최솟값 $-2+k$를 갖는다.
$y=-x^2+8x-5k=-(x-4)^2+16-5k$이므로
$x=4$에서 최댓값 $16-5k$를 갖는다.
따라서 $-2+k=16-5k$이므로

$6k=18 \qquad \therefore k=3$

답 ③

08 $y=x^2+2x+2a-3=(x+1)^2+2a-4$
이므로 $x=-1$에서 최솟값 $2a-4$를 갖는다.
즉 $2a-4=-6$이므로

$2a=-2 \qquad \therefore a=-1$

따라서 $y=x^2+2x-5$이므로 이 그래프가 y축과 만나는 점의 y좌표는 -5이다.

$y=x^2+2x-5$에 $x=0$을 대입하면
$y=-5$

$\therefore b=-5$

$\therefore a-b=4$

답 4

09 이차함수 $f(x)=ax^2+bx+c$가 $x=1$에서 최댓값 3을 가지므로

$f(x)=a(x-1)^2+3$

$f(-1)=-9$에서

$-9=a(-1-1)^2+3$

$4a=-12 \qquad \therefore a=-3$

$\therefore f(x)=-3(x-1)^2+3=-3x^2+6x$

따라서 $a=-3,\ b=6,\ c=0$이므로

$2a+b+c=0$

답 0

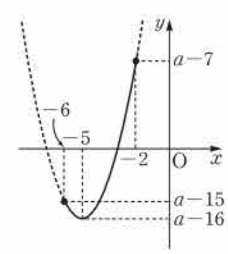
10 $f(x)=x^2+10x+a+9$

$=(x+5)^2+a-16$

$-6\le x\le -2$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
따라서 $x=-2$에서 최댓값 $a-7$을 가지므로

$a-7=5$

$\therefore a=12$

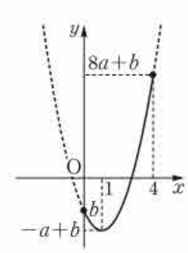


답 12

11 $y=ax^2-2ax+b$

$=a(x-1)^2-a+b$

$0\le x\le 4$에서 이 이차함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
따라서 $x=4$에서 최댓값 $8a+b$를 갖고, $x=1$에서 최솟값 $-a+b$를 가지므로



$8a+b=6,\ -a+b=-3$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=1,\ b=-2$

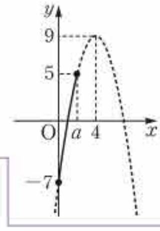
두 식을 변끼리 빼면
$9a=9 \quad \therefore a=1$
$a=1$을 $-a+b=-3$에 대입하면
$-1+b=-3$
$\therefore b=-2$

$\therefore a+b=-1$

답 ②

12 $f(x)=-x^2+8x-7$이라 하면

$f(x)=-(x-4)^2+9$



$f(4)=9$이므로 오른쪽 그림에서

$0<a<4$

따라서 $x=a$에서 최댓값 5를 가지므로

$-a^2+8a-7=5,\quad a^2-8a+12=0$

$(a-2)(a-6)=0$

$\therefore a=2\ (\because 0<a<4)$ 답 2

Q BOX: $a\geq 4$이면 최댓값이 9이다.

13 $x^2+4x+1=t$로 놓으면

$t=(x+2)^2-3\geq -3$

이때 주어진 함수는

$y=-2t^2+4(t-1)+k$

$=-2t^2+4t+k-4$

$=-2(t-1)^2+k-2\ (t\geq -3)$

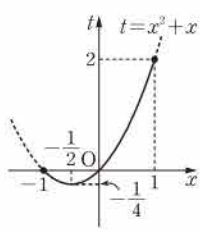
따라서 $t=1$에서 최댓값 $k-2$를 가지므로

$k-2=7\quad \therefore k=9$ 답 ⑤

Q BOX: $x^2+4x+1=t$이므로 $x^2+4x=t-1$

14 $x^2+x=t$로 놓으면

$t=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$



$-1\leq x\leq 1$이므로 오른쪽 그림에서

$-\frac{1}{4}\leq t\leq 2$

이때 주어진 함수는

$y=t^2-t+2=\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}\ \left(-\frac{1}{4}\leq t\leq 2\right)$

따라서 $t=2$에서 최댓값 4, $t=\frac{1}{2}$에서 최솟값 $\frac{7}{4}$을 가지므로

$M=4,\ m=\frac{7}{4}$

$\therefore Mm=7$ 답 7

15 $x-y+3=0$에서 $\quad x=y-3$

$\therefore x^2+y^2-2y=(y-3)^2+y^2-2y$

$=2y^2-8y+9$

$=2(y-2)^2+1$

따라서 $y=2$일 때 최솟값은 1이다. 답 ③

16 두 점 A$(1,\ -1)$, B$(3,\ -5)$를 이은 선분 AB를 나타내는 방정식을 $y=-2x+a$라 하면

$-1=-2+a\quad \therefore a=1$

즉 $y=-2x+1\ (1\leq x\leq 3)$이므로

$2x^2-y^2=2x^2-(-2x+1)^2$

$=-2x^2+4x-1$

$=-2(x-1)^2+1$

따라서 $x=1$일 때 최댓값은 1이다. 답 ①

Q BOX: 직선 AB의 기울기는 $\frac{-5-(-1)}{3-1}=-2$

17 이차방정식 $x^2-2(a+1)x+a^2-4a+7=0$이 서로 다른 두 실근을 가지므로 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\{-(a+1)\}^2-(a^2-4a+7)>0$

$6a-6>0\quad \therefore a>1$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2(a+1),\ \alpha\beta=a^2-4a+7$

$\therefore (\alpha-1)(\beta-1)=\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1$

$=a^2-4a+7-2(a+1)+1$

$=a^2-6a+6=(a-3)^2-3$

따라서 $a>1$에서 $(\alpha-1)(\beta-1)$은 $a=3$일 때 최솟값 -3을 갖는다. 답 -3

18 부채꼴의 반지름의 길이를 x cm라 하면 호의 길이는 $\quad(24-2x)$ cm

이때 반지름의 길이와 호의 길이는 양수이므로

$0<x<12$

부채꼴의 넓이는

$\frac{1}{2}x(24-2x)=-x^2+12x=-(x-6)^2+36$

이때 $0<x<12$이므로 $x=6$일 때 최댓값은 36이다.

따라서 부채꼴의 넓이가 최대일 때의 반지름의 길이는 6 cm이다. 답 ③

Q BOX: $x>0,\ 24-2x>0$이므로 $\ 0<x<12$

Q BOX: 반지름의 길이가 r, 호의 길이가 l인 부채꼴의 넓이는 $\frac{1}{2}rl$

19 점 A의 좌표를 $(a,\ 0)\ (0<a<3)$이라 하면

D$(a,\ -a^2+6a)$

$\therefore \overline{\text{AB}}=6-2a,\ \overline{\text{AD}}=-a^2+6a$

따라서 직사각형 ABCD의 둘레의 길이는

$2(6-2a-a^2+6a)=-2a^2+8a+12$

$=-2(a-2)^2+20$

이때 $0<a<3$이므로 $a=2$일 때 최댓값은 20이다.

따라서 직사각형 ABCD의 둘레의 길이의 최댓값은 20이다. 답 20

다른 풀이 점 B의 좌표를 $(b,\ 0)\ (3<b<6)$이라 하면

C$(b,\ -b^2+6b)$

$\therefore \overline{\text{AB}}=2b-6,\ \overline{\text{BC}}=-b^2+6b$

따라서 직사각형 ABCD의 둘레의 길이는

$2(2b-6-b^2+6b)=-2b^2+16b-12$

$=-2(b-4)^2+20$

이때 $3<b<6$이므로 $b=4$일 때 최댓값은 20이다.

Q BOX: $y=-x^2+6x$ $=-(x-3)^2+9$ 에서 이 이차함수의 그래프의 꼭짓점의 x좌표가 3이므로 $\ a<3$

Q BOX: 이차함수의 그래프의 축의 방정식이 $x=3$이므로 $\overline{\text{AB}}=2(3-a)$ $=6-2a$

20 새로운 직사각형의 가로의 길이와 세로의 길이는 각각 $\quad(18-x)$ cm, $(12+x)$ cm

이때 변의 길이는 양수이므로 $\quad 0<x<18$

새로운 직사각형의 넓이는

$(18-x)(12+x)=-x^2+6x+216$

$=-(x-3)^2+225$

이때 $0<x<18$이므로 $x=3$일 때 최댓값은 225이다.

따라서 새로운 직사각형의 넓이의 최댓값은 225 cm^{2}이다. 답 225 cm^2

06 여러 가지 방정식

13 삼차방정식과 사차방정식

W 47쪽

01 (1) $x^3-4x^2+3x=0$의 좌변을 인수분해하면

$x(x^2-4x+3)=0,\qquad x(x-1)(x-3)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=1$ 또는 $x=3$

(2) $P(x)=x^4-4x^3-9x^2+16x+20$으로 놓으면

$P(2)=16-32-36+32+20=0,$

$P(-1)=1+4-9-16+20=0$

조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

2	1	−4	−9	16	20
		2	−4	−26	−20
−1	1	−2	−13	−10	0
		−1	3	10	
	1	−3	−10	0	

$\therefore P(x)=(x-2)(x+1)(x^2-3x-10)$

$=(x-2)(x+1)(x+2)(x-5)$

따라서 주어진 방정식은

$(x-2)(x+1)(x+2)(x-5)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=5$

(3) $x^2+3x=X$로 놓으면 주어진 방정식은

$X^2-2X-8=0,\qquad (X+2)(X-4)=0$

$\therefore X=-2$ 또는 $X=4$

(i) $X=-2$일 때, $x^2+3x+2=0$에서

$(x+2)(x+1)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=-1$

(ii) $X=4$일 때, $x^2+3x-4=0$에서

$(x+4)(x-1)=0$

$\therefore x=-4$ 또는 $x=1$

(i), (ii)에서

$x=-4$ 또는 $x=-2$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=1$

답 (1) $x=0$ 또는 $x=1$ 또는 $x=3$

(2) $x=-2$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=5$

(3) $x=-4$ 또는 $x=-2$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=1$

02 (1) $x^2=X$로 놓으면 주어진 방정식은

$X^2+X-12=0,\qquad (X+4)(X-3)=0$

$\therefore X=-4$ 또는 $X=3$

따라서 $x^2=-4$ 또는 $x^2=3$이므로

$x=\pm 2i$ 또는 $x=\pm\sqrt{3}$

(2) $x^4-6x^2+1=0$에서

$(x^4-2x^2+1)-4x^2=0$

$(x^2-1)^2-(2x)^2=0$

$(x^2-1+2x)(x^2-1-2x)=0$

$\therefore x^2+2x-1=0$ 또는 $x^2-2x-1=0$

$\therefore x=-1\pm\sqrt{2}$ 또는 $x=1\pm\sqrt{2}$

Q BOX

양변을 x^2으로 나누기 전에 $x\neq 0$임을 확인한다.

± 20의 약수 중에서 $P(x)=0$을 만족시키는 x의 값을 찾는다.

A^2-B^2
$=(A+B)(A-B)$

(3) $x\neq 0$이므로 주어진 방정식의 양변을 x^2으로 나누면

$x^2+4x-3+\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}=0$

$\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+4\left(x+\frac{1}{x}\right)-3=0$

$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+4\left(x+\frac{1}{x}\right)-5=0$

$x+\frac{1}{x}=X$로 놓으면

$X^2+4X-5=0,\qquad (X+5)(X-1)=0$

$\therefore X=-5$ 또는 $X=1$

(i) $X=-5$일 때, $x+\frac{1}{x}=-5$에서

$x^2+5x+1=0\qquad \therefore x=\frac{-5\pm\sqrt{21}}{2}$

(ii) $X=1$일 때, $x+\frac{1}{x}=1$에서

$x^2-x+1=0\qquad \therefore x=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$

(i), (ii)에서 $\quad x=\frac{-5\pm\sqrt{21}}{2}$ 또는 $x=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$

(4) $x\neq 0$이므로 주어진 방정식의 양변을 x^2으로 나누면

$2x^2-x-11-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}=0$

$2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-\left(x+\frac{1}{x}\right)-11=0$

$2\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-\left(x+\frac{1}{x}\right)-15=0$

$x+\frac{1}{x}=X$로 놓으면

$2X^2-X-15=0,\qquad (2X+5)(X-3)=0$

$\therefore X=-\frac{5}{2}$ 또는 $X=3$

(i) $X=-\frac{5}{2}$일 때, $x+\frac{1}{x}=-\frac{5}{2}$에서

$2x^2+5x+2=0,\qquad (x+2)(2x+1)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=-\frac{1}{2}$

(ii) $X=3$일 때, $x+\frac{1}{x}=3$에서

$x^2-3x+1=0\qquad \therefore x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$

(i), (ii)에서

$x=-2$ 또는 $x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$

답 (1) $x=\pm 2i$ 또는 $x=\pm\sqrt{3}$

(2) $x=-1\pm\sqrt{2}$ 또는 $x=1\pm\sqrt{2}$

(3) $x=\frac{-5\pm\sqrt{21}}{2}$ 또는 $x=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$

(4) $x=-2$ 또는 $x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$

03 $P(x)=x^3+x^2+3x-5$로 놓으면

$P(1)=1+1+3-5=0$

조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

1	1	1	3	−5
		1	2	5
	1	2	5	0

$P(x)$
$=(x-1)(x^2+2x+5)$

따라서 주어진 방정식은

$(x-1)(x^2+2x+5)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=-1\pm2i$

따라서 주어진 방정식의 허근인 것은 ①이다.

답 ①

04 $x^4-16=0$의 좌변을 인수분해하면

$(x^2+4)(x^2-4)=0$

$(x^2+4)(x+2)(x-2)=0$

$\therefore x=\pm2i$ 또는 $x=\pm2$

$\therefore \alpha\beta-\gamma\delta=2\cdot(-2)-2i\cdot(-2i)$

$=-4-4=-8$

답 -8

근과 계수의 관계에 의하여 $\gamma\delta=4$

근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha\beta=-4$

05 $P(x)=x^4+x^3-x^2-5x+4$로 놓으면

$P(1)=1+1-1-5+4=0$

조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

1	1	1	−1	−5	4
		1	2	1	−4
1	1	2	1	−4	0
		1	3	4	
	1	3	4	0	

$\therefore P(x)=(x-1)^2(x^2+3x+4)$

따라서 주어진 방정식은

$(x-1)^2(x^2+3x+4)=0$

이때 두 허근 α, β는 방정식 $x^2+3x+4=0$의 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-3$, $\alpha\beta=4$

$\therefore \alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

$=(-3)^3-3\cdot4\cdot(-3)=9$

답 ⑤

$Q(x)=x^3+2x^2+x-4$로 놓으면 $Q(1)=0$

06 $x^2+4x=X$로 놓으면 주어진 방정식은

$X^2-3X-10=0$, $(X+2)(X-5)=0$

$\therefore X=-2$ 또는 $X=5$

(i) $X=-2$일 때, $x^2+4x+2=0$에서

$x=-2\pm\sqrt{2}$

(ii) $X=5$일 때, $x^2+4x-5=0$에서

$(x+5)(x-1)=0$

$\therefore x=-5$ 또는 $x=1$

(i), (ii)에서 $x=-2\pm\sqrt{2}$ 또는 $x=-5$ 또는 $x=1$

따라서 주어진 방정식의 근인 것은 ②이다.

답 ②

07 $x^2-x=X$로 놓으면 주어진 방정식은

$(X+4)^2-2X-23=0$, $X^2+6X-7=0$

$(X+7)(X-1)=0$ $\therefore X=-7$ 또는 $X=1$

(i) $X=-7$일 때,

$x^2-x+7=0$이므로 이 방정식의 판별식을 D_1이라 하면

$D_1=(-1)^2-4\cdot1\cdot7=-27<0$

즉 방정식 $x^2-x+7=0$은 서로 다른 두 허근을 갖는다.

(ii) $X=1$일 때,

$x^2-x-1=0$이므로 이 방정식의 판별식을 D_2라 하면

$D_2=(-1)^2-4\cdot1\cdot(-1)=5>0$

즉 방정식 $x^2-x-1=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 두 실근은 방정식 $x^2-x-1=0$의 근이고, 두 허근은 방정식 $x^2-x+7=0$의 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$a=1$, $b=7$

$\therefore b-a=6$

답 ②

08 $x(x+1)(x+4)(x+5)-12=0$에서

$\{x(x+5)\}\{(x+1)(x+4)\}-12=0$

$(x^2+5x)(x^2+5x+4)-12=0$

$x^2+5x=X$로 놓으면

$X(X+4)-12=0$, $X^2+4X-12=0$

$(X+6)(X-2)=0$

$\therefore X=-6$ 또는 $X=2$

(i) $X=-6$일 때, $x^2+5x+6=0$에서

$(x+3)(x+2)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=-2$

(ii) $X=2$일 때, $x^2+5x-2=0$에서

$x=\frac{-5\pm\sqrt{33}}{2}$

(i), (ii)에서 α, β의 값은 -3, -2이므로

$\alpha^2+\beta^2=(-3)^2+(-2)^2=13$

답 13

상수항의 합이 같아지도록 두 개씩 짝을 짓는다.

쌤 한마디

방정식이

(일차식)×(일차식)×(일차식)×(일차식)$+k=0$

꼴이면 공통부분이 생기도록 일차식을 두 개씩 짝 지어 전개한다. 이때 상수항끼리의 합 또는 곱이 같아지도록 두 개씩 묶으면 공통부분이 생긴다.

09 $x^2=X$로 놓으면 주어진 방정식은

$X^2-3X-18=0$, $(X+3)(X-6)=0$

$\therefore X=-3$ 또는 $X=6$

즉 $x^2=-3$ 또는 $x^2=6$이므로

$x=\pm\sqrt{3}i$ 또는 $x=\pm\sqrt{6}$

따라서 주어진 방정식의 실근은 $\pm\sqrt{6}$이므로 두 실근의 곱은

$\sqrt{6}\cdot(-\sqrt{6})=-6$

답 ②

허근을 갖는다.

$x^2-6=0$은 실근을 갖고 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 곱은 -6이다.

10 $x^4-12x^2+16=0$에서

$(x^4-8x^2+16)-4x^2=0$

$(x^2-4)^2-(2x)^2=0$

$(x^2+2x-4)(x^2-2x-4)=0$

$\therefore x^2+2x-4=0$ 또는 $x^2-2x-4=0$

$\therefore$ $x=-1\pm\sqrt{5}$ 또는 $x=1\pm\sqrt{5}$

따라서 주어진 방정식의 음수인 근은 $-1-\sqrt{5}$, $1-\sqrt{5}$이므로

$\alpha+\beta=(-1-\sqrt{5})+(1-\sqrt{5})=-2\sqrt{5}$

답 $-2\sqrt{5}$

$-1-\sqrt{5}<0$,
$-1+\sqrt{5}>0$,
$1-\sqrt{5}<0$,
$1+\sqrt{5}>0$

11 $x^4+3x^2+4=0$에서

$(x^4+4x^2+4)-x^2=0$, $\quad (x^2+2)^2-x^2=0$

$\therefore (x^2+x+2)(x^2-x+2)=0$

방정식 $x^2+x+2=0$의 두 근을 α, β, 방정식 $x^2-x+2=0$의 두 근을 γ, δ라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-1$, $\alpha\beta=2$, $\gamma+\delta=1$, $\gamma\delta=2$

$\therefore \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2$

$=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+(\gamma+\delta)^2-2\gamma\delta$

$=(-1)^2-2\cdot2+1^2-2\cdot2=-6$

답 -6

12 방정식 $x^4+6x^3+7x^2+6x+1=0$의 양변을 x^2으로 나누면

$$x^2+6x+7+\frac{6}{x}+\frac{1}{x^2}=0$$

$$x^2+\frac{1}{x^2}+6\left(x+\frac{1}{x}\right)+7=0$$

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+6\left(x+\frac{1}{x}\right)+5=0$$

$x+\frac{1}{x}=X$로 놓으면

$X^2+6X+5=0$, $\quad (X+5)(X+1)=0$

$\therefore X=-5$ 또는 $X=-1$

(i) $X=-5$일 때, $x+\frac{1}{x}=-5$에서

$x^2+5x+1=0$ $\quad \therefore x=\frac{-5\pm\sqrt{21}}{2}$

판별식을 D라 하면
$D=5^2-4\cdot1\cdot1$
$=21>0$
이므로 이 이차방정식은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

(ii) $X=-1$일 때, $x+\frac{1}{x}=-1$에서

$x^2+x+1=0$ $\quad \therefore x=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 모든 실근의 합은

$\frac{-5+\sqrt{21}}{2}+\frac{-5-\sqrt{21}}{2}=-5$

답 ①

13 방정식 $x^4+7x^3-9x^2+7x+1=0$의 양변을 x^2으로 나누면

$$x^2+7x-9+\frac{7}{x}+\frac{1}{x^2}=0$$

$$x^2+\frac{1}{x^2}+7\left(x+\frac{1}{x}\right)-9=0$$

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+7\left(x+\frac{1}{x}\right)-11=0$$

이때 $x+\frac{1}{x}=k$이므로 $k^2+7k-11=0$에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 모든 k의 값의 곱은

-11

답 ②

14 방정식 $x^4+3x^3-2x^2+3x+1=0$의 양변을 x^2으로 나누면

$$x^2+3x-2+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}=0$$

$$x^2+\frac{1}{x^2}+3\left(x+\frac{1}{x}\right)-2=0$$

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+3\left(x+\frac{1}{x}\right)-4=0$$

$x+\frac{1}{x}=X$로 놓으면

$X^2+3X-4=0$, $\quad (X+4)(X-1)=0$

$\therefore X=-4$ 또는 $X=1$

(i) $X=-4$일 때, $x+\frac{1}{x}=-4$에서

$x^2+4x+1=0$

이 방정식의 판별식을 D_1이라 하면

$\frac{D_1}{4}=2^2-1\cdot1=3>0$

즉 방정식 $x^2+4x+1=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

(ii) $X=1$일 때, $x+\frac{1}{x}=1$에서

$x^2-x+1=0$

이 방정식의 판별식을 D_2라 하면

$D_2=(-1)^2-4\cdot1\cdot1=-3<0$

즉 방정식 $x^2-x+1=0$은 서로 다른 두 허근을 갖는다.

(i), (ii)에서 α는 방정식 $x^2+4x+1=0$, 즉 $x+\frac{1}{x}=-4$의 한 실근이므로

$\alpha+\frac{1}{\alpha}=-4$

답 -4

15 방정식 $x^3+ax^2-bx+9=0$의 한 근이 $\sqrt{3}$이므로

$(\sqrt{3})^3+a(\sqrt{3})^2-b\sqrt{3}+9=0$

$3\sqrt{3}+3a-b\sqrt{3}+9=0$

$(3a+9)+(3-b)\sqrt{3}=0$

이때 a, b가 유리수이므로

$3a+9=0$, $3-b=0$

a, b가 유리수이고 $\sqrt{m}$이 무리수일 때,
$a+b\sqrt{m}=0$
$\Rightarrow a=0$, $b=0$

따라서 $a=-3$, $b=3$이므로

$a-b=-6$

답 -6

16 방정식 $2x^3-ax^2+4x+b=0$의 두 근이 -1, 3이므로

$-2-a-4+b=0$에서

$a-b=-6$ $\quad \cdots\cdots$ ㉠

$54-9a+12+b=0$에서

$9a-b=66$ $\quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad a=9$, $b=15$

㉡$-$㉠을 하면
$8a=72$ $\quad \therefore a=9$
$a=9$를 ㉠에 대입하면
$9-b=-6$
$\therefore b=15$

즉 주어진 방정식은 $2x^3-9x^2+4x+15=0$이므로 조립제법을 이용하여 좌변을 인수분해하면

-1	2	-9	4	15
		-2	11	-15
3	2	-11	15	0
		6	-15	
	2	-5	0	

따라서 주어진 방정식은

$(x+1)(x-3)(2x-5)=0$

즉 나머지 한 근은 $\frac{5}{2}$이므로 $\alpha=\frac{5}{2}$

$\therefore \frac{ab}{\alpha}=9\cdot15\cdot\frac{2}{5}=54$ 답 ③

17 방정식 $3x^4+ax^3+bx^2+x-2=0$의 두 근이 1, -2이므로

$3+a+b+1-2=0$에서

$a+b=-2$ …… ㉠

$48-8a+4b-2-2=0$에서

$2a-b=11$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3,\ b=-5$

즉 주어진 방정식은 $3x^4+3x^3-5x^2+x-2=0$이므로 조립제법을 이용하여 좌변을 인수분해하면

1	3	3	-5	1	-2
		3	6	1	2
-2	3	6	1	2	0
		-6	0	-2	
	3	0	1	0	

따라서 주어진 방정식은

$(x-1)(x+2)(3x^2+1)=0$

즉 주어진 방정식의 나머지 두 근은 방정식 $3x^2+1=0$의 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 구하는 곱은 $\frac{1}{3}$ 답 $\frac{1}{3}$

18 방정식 $(x-3)(x^2-6kx+5k+4)=0$이 서로 다른 두 실근을 가지려면

(i) 방정식 $x^2-6kx+5k+4=0$이 $x=3$을 근으로 가질 때

$9-18k+5k+4=0 \quad \therefore k=1$

그런데 $k=1$이면 주어진 방정식은 $(x-3)(x^2-6x+9)=0$, 즉 $(x-3)^3=0$이므로 서로 같은 세 실근을 갖는다.

$\therefore k\neq1$

(ii) 방정식 $x^2-6kx+5k+4=0$이 중근을 가질 때 이 방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-3k)^2-(5k+4)=0$

$9k^2-5k-4=0, \quad (9k+4)(k-1)=0$

$\therefore k=-\frac{4}{9}$ 또는 $k=1$

(i), (ii)에서 $k=-\frac{4}{9}$ 답 ①

Q BOX

㉠+㉡을 하면

$3a=9 \quad \therefore a=3$

$a=3$을 ㉠에 대입하면

$3+b=-2$

$\therefore b=-5$

㉠+㉡을 하면

$2\beta=\frac{10}{3} \quad \therefore \beta=\frac{5}{3}$

$\beta=\frac{5}{3}$를 ㉠에 대입하면

$\alpha+\frac{5}{3}=3$

$\therefore \alpha=\frac{4}{3}$

Q 쌤 한마디

삼차방정식 $(x-3)(x^2-6kx+5k+4)=0$이 서로 다른 두 실근을 갖는 경우는 이차방정식 $x^2-6kx+5k+4=0$이 3과 3이 아닌 실근을 갖는 경우와 3이 아닌 중근을 갖는 두 가지 경우이다. (i)에서 방정식 $x^2-6kx+5k+4=0$이 $x=3$을 근으로 가지면 다른 한 근도 3이므로 주어진 삼차방정식은 서로 같은 세 실근을 갖는다.

따라서 방정식 $x^2-6kx+5k+4=0$은 3이 아닌 중근을 가져야 한다.

19 $P(x)=x^3-4x^2+(k+3)x-k$로 놓으면

$P(1)=1-4+(k+3)-k=0$

조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

1	1	-4	$k+3$	$-k$
		1	-3	k
	1	-3	k	0

$\therefore P(x)=(x-1)(x^2-3x+k)$

이때 방정식 $P(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면 이차방정식 $x^2-3x+k=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(-3)^2-4k>0 \quad \therefore k<\frac{9}{4}$

이차방정식 $x^2-3x+k=0$의 두 실근을 $\alpha,\ \beta\ (0<\alpha<\beta)$라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=3$ …… ㉠

$\alpha\beta=k$

$1,\ \alpha,\ \beta$가 직각삼각형의 세 변의 길이가 되려면

(i) 빗변의 길이가 1인 경우

$\alpha^2+\beta^2=1$이므로 $(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=1$

$3^2-2k=1 \quad \therefore k=4$

그런데 $k<\frac{9}{4}$이어야 하므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) 빗변의 길이가 β인 경우

$1+\alpha^2=\beta^2$이므로 $\beta^2-\alpha^2=1$

$(\beta+\alpha)(\beta-\alpha)=1, \quad 3(\beta-\alpha)=1$

$\therefore \beta-\alpha=\frac{1}{3}$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\alpha=\frac{4}{3},\ \beta=\frac{5}{3}$

$\therefore k=\alpha\beta=\frac{20}{9}$

(i), (ii)에서 $k=\frac{20}{9}$ 답 $\frac{20}{9}$

Q 쌤 한마디

$0<\alpha<\beta$, $\alpha+\beta=3$을 만족시키는 β의 값의 범위는

$0<3-\beta<\beta$에서 $\frac{3}{2}<\beta<3$

따라서 β의 값은 항상 1보다 크므로 $1,\ \alpha,\ \beta$가 직각삼각형의 세 변의 길이일 때, 빗변의 길이는 β임을 알 수 있다.

W 06 여러 가지 방정식

20 처음 정육면체의 한 모서리의 길이를 x cm라 하면

$(x+2)(x+3)\cdot\frac{1}{2}x=6x^3$

$11x^3-5x^2-6x=0,\quad x(11x+6)(x-1)=0$

$\therefore x=-\frac{6}{11}$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

그런데 $x>0$이므로 $\quad x=1$

따라서 처음 정육면체의 한 모서리의 길이는 1 cm이다. 답 ①

길이는 양수이어야 한다.

21 $\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot3^2\cdot6=\pi\cdot r^2\cdot(r-1)$이므로

$r^3-r^2-18=0$

$P(r)=r^3-r^2-18$로 놓으면

$P(3)=27-9-18=0$

조립제법을 이용하여 $P(r)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{c|cccc} 3 & 1 & -1 & 0 & -18 \\ & & 3 & 6 & 18 \\ \hline & 1 & 2 & 6 & \boxed{0} \end{array}$$

$P(r)$

$=(r-3)(r^2+2r+6)$

따라서 방정식은

$(r-3)(r^2+2r+6)=0$

$\therefore r=3\ (\because r^2+2r+6>0)$ 답 3

r^2+2r+6
$=(r+1)^2+5>0$

22 처음 3개의 구의 반지름의 길이를 각각 $(x-1)$ cm, x cm, $(x+1)$ cm라 하면 새로 만든 구의 반지름의 길이는 $(x+2)$ cm이므로

$\frac{4}{3}\pi(x-1)^3+\frac{4}{3}\pi x^3+\frac{4}{3}\pi(x+1)^3=\frac{4}{3}\pi(x+2)^3$

$(x-1)^3+x^3+(x+1)^3=(x+2)^3$

$\therefore x^3-3x^2-3x-4=0$

$P(x)=x^3-3x^2-3x-4$로 놓으면

$P(4)=64-48-12-4=0$

조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{c|cccc} 4 & 1 & -3 & -3 & -4 \\ & & 4 & 4 & 4 \\ \hline & 1 & 1 & 1 & \boxed{0} \end{array}$$

$P(x)$

$=(x-4)(x^2+x+1)$

즉 방정식은 $\quad (x-4)(x^2+x+1)=0$

$\therefore x=4\ (\because x^2+x+1>0)$

따라서 새로 만든 구의 반지름의 길이는

$4+2=6$ (cm) 답 ②

x^2+x+1
$=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$

23 원기둥의 밑면의 반지름의 길이를 x cm라 하면 원기둥의 높이는 $(x+4)$ cm이므로 용기의 전체 부피는

$\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi x^3+\pi x^2(x+4)=81\pi$

$\therefore 5x^3+12x^2-243=0$

$P(x)=5x^3+12x^2-243$으로 놓으면

$P(3)=135+108-243=0$

조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{c|cccc} 3 & 5 & 12 & 0 & -243 \\ & & 15 & 81 & 243 \\ \hline & 5 & 27 & 81 & \boxed{0} \end{array}$$

$P(x)$

$=(x-3)(5x^2+27x+81)$

즉 방정식은 $\quad (x-3)(5x^2+27x+81)=0$

$\therefore x=3\ (\because 5x^2+27x+81>0)$

따라서 밑면의 반지름의 길이는 3 cm이다. 답 ②

$5x^2+27x+81$
$=5\left(x+\frac{27}{10}\right)^2+\frac{891}{20}$
>0

14 삼차방정식의 근의 성질

W 51쪽

01 답 (1) $-3,\ -5,\ 2$ (2) $2,\ \frac{4}{3},\ 0$

02 x^3의 계수가 1이고 근이 $2,\ \sqrt{3},\ -\sqrt{3}$인 삼차방정식은

$x^3-(2+\sqrt{3}-\sqrt{3})x^2$

$+\{2\cdot\sqrt{3}+\sqrt{3}\cdot(-\sqrt{3})+2\cdot(-\sqrt{3})\}x$

$-2\cdot\sqrt{3}\cdot(-\sqrt{3})=0$

$\therefore x^3-2x^2-3x+6=0$

답 $x^3-2x^2-3x+6=0$

03 (1) 계수가 실수이고 주어진 방정식의 한 근이 $-1+3i$이므로 $-1-3i$도 근이다.

나머지 한 근을 α라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(-1+3i)+(-1-3i)+\alpha=-1$

$\therefore \alpha=1$

(2) 주어진 방정식의 세 근이 $-1+3i,\ -1-3i,\ 1$이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(-1+3i)(-1-3i)+(-1-3i)\cdot1$

$+(-1+3i)\cdot1=a,$

$(-1+3i)(-1-3i)\cdot1=-b$

$\therefore a=8,\ b=-10$

답 (1) $-1-3i,\ 1$ (2) $a=8,\ b=-10$

04 (1) $\omega^3=-1$이므로

$\omega^9=(\omega^3)^3=-1$

(2) $x^3=-1$에서 $\quad x^3+1=0$

$(x+1)(x^2-x+1)=0$

ω는 $x^2-x+1=0$의 한 허근이므로

$\omega^2-\omega+1=0\quad \therefore \omega^2-\omega=-1$

$\therefore \omega^8+\omega^4=(\omega^3)^2\cdot\omega^2+\omega^3\cdot\omega=\omega^2-\omega=-1$

(3) ω는 $x^2-x+1=0$의 한 허근이고, ω의 켤레복소수 $\overline{\omega}$도 $x^2-x+1=0$의 허근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\omega\overline{\omega}=1$

(4) $\frac{\omega^4}{\omega^2+1}=\frac{\omega^3\cdot\omega}{\omega}=\omega^3=-1$

답 (1) -1 (2) -1 (3) 1 (4) -1

05 삼차방정식 $x^3+4x-6=0$의 세 근이 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=0,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=4,\ \alpha\beta\gamma=6$

$\therefore (1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)$
$=1-(\alpha+\beta+\gamma)+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-\alpha\beta\gamma$
$=1-0+4-6=-1$ 답 -1

06 삼차방정식 $x^3-x^2+3x-9=0$의 세 근이 α, β, γ이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=1$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=3$, $\alpha\beta\gamma=9$

$\therefore \frac{3}{\alpha}+\frac{3}{\beta}+\frac{3}{\gamma}=\frac{3(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)}{\alpha\beta\gamma}$
$=\frac{3\cdot 3}{9}=1$ 답 1

07 주어진 삼차방정식의 세 근을 $a-1$, a, $a+1$ (a는 정수)이라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(a-1)+a+(a+1)=9$

$3a=9 \quad \therefore a=3$

따라서 세 근이 2, 3, 4이므로

$2\cdot 3+3\cdot 4+4\cdot 2=a$, $2\cdot 3\cdot 4=b$

$\therefore a=26$, $b=24$

$\therefore a+b=50$ 답 ①

08 삼차방정식 $2x^3-7x^2+8x+4=0$의 세 근이 α, β, γ이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=\frac{7}{2}$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=4$, $\alpha\beta\gamma=-2$

$\therefore \alpha\beta\cdot\beta\gamma+\beta\gamma\cdot\gamma\alpha+\gamma\alpha\cdot\alpha\beta$
$=\alpha\beta^2\gamma+\alpha\beta\gamma^2+\alpha^2\beta\gamma$
$=\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)$
$=-2\cdot\frac{7}{2}=-7$,
$\alpha\beta\cdot\beta\gamma\cdot\gamma\alpha=(\alpha\beta\gamma)^2=(-2)^2=4$

따라서 $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$를 세 근으로 하고 x^3의 계수가 1인 삼차방정식은

$x^3-4x^2-7x-4=0$

답 $x^3-4x^2-7x-4=0$

09 $P(1)=P(2)=P(4)=-1$이므로

$P(1)+1=0$, $P(2)+1=0$, $P(4)+1=0$

즉 삼차방정식 $P(x)+1=0$의 세 근이 1, 2, 4이다.
1, 2, 4를 세 근으로 하고 x^3의 계수가 1인 삼차방정식은

$x^3-(1+2+4)x^2+(1\cdot 2+2\cdot 4+4\cdot 1)x-1\cdot 2\cdot 4=0$

$\therefore x^3-7x^2+14x-8=0$

따라서 $P(x)+1=x^3-7x^2+14x-8$이므로

$P(x)=x^3-7x^2+14x-9$

$\therefore P(3)=27-63+42-9=-3$

답 ③

10 주어진 삼차방정식의 계수가 유리수이고 $1+\sqrt{2}$가 근이므로 $1-\sqrt{2}$도 근이다.

따라서 주어진 방정식의 세 근이 1, $1+\sqrt{2}$, $1-\sqrt{2}$이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$1+(1+\sqrt{2})+(1-\sqrt{2})=-\frac{b}{a}$ …… ㉠

$1\cdot(1+\sqrt{2})+(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})+(1-\sqrt{2})\cdot 1=\frac{c}{a}$ …… ㉡

$1\cdot(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})=\frac{1}{a}$ …… ㉢

㉢에서 $a=-1$

$a=-1$을 ㉠, ㉡에 대입하면 $b=3$, $c=-1$

$\therefore abc=3$ 답 3

11 주어진 삼차방정식의 계수가 실수이고 $2+\sqrt{3}i$가 근이므로 $2-\sqrt{3}i$도 근이다.
이때 $(2+\sqrt{3}i)(2-\sqrt{3}i)=7\neq 4$이므로 $2+\sqrt{3}i$, $2-\sqrt{3}i$는 이차방정식 $x^2+ax+4=0$의 두 근이 될 수 없다.
이차방정식 $x^2+ax+4=0$의 나머지 한 근을 n이라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$m+n=-a$

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(2+\sqrt{3}i)+(2-\sqrt{3}i)+m=-a$

$\therefore 4+m=-a$

따라서 $m+n=4+m$이므로 $n=4$
즉 $x^2+ax+4=0$의 한 근이 4이므로

$16+4a+4=0 \quad \therefore a=-5$

따라서 주어진 이차방정식은 $x^2-5x+4=0$이므로

$(x-1)(x-4)=0 \quad \therefore x=1$ 또는 $x=4$

즉 공통인 근은 1이므로 $m=1$ 답 ①

12 $x^3=1$에서 $x^3-1=0$, 즉 $(x-1)(x^2+x+1)=0$이므로 ω는 $x^2+x+1=0$의 한 허근이다.
따라서 $\omega^2+\omega+1=0$, $\omega^3=1$이므로

$\frac{\omega^{11}+1}{\omega^4}=\frac{(\omega^3)^3\cdot\omega^2+1}{\omega^3\cdot\omega}=\frac{\omega^2+1}{\omega}=\frac{-\omega}{\omega}=-1$

답 ③

13 $x^3=1$에서 $x^3-1=0$, 즉 $(x-1)(x^2+x+1)=0$이므로 ω는 $x^2+x+1=0$의 한 허근이고, ω의 켤레복소수인 $\overline{\omega}$도 $x^2+x+1=0$의 허근이다.
따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\omega+\overline{\omega}=-1$, $\omega\overline{\omega}=1$

$\therefore \frac{\omega}{\omega-1}+\frac{\overline{\omega}}{\overline{\omega}-1}=\frac{\omega(\overline{\omega}-1)+\overline{\omega}(\omega-1)}{(\omega-1)(\overline{\omega}-1)}$
$=\frac{2\omega\overline{\omega}-(\omega+\overline{\omega})}{\omega\overline{\omega}-(\omega+\overline{\omega})+1}$
$=\frac{2\cdot 1-(-1)}{1-(-1)+1}=1$

답 ④

Q BOX

계수가 실수인 삼차방정식의 한 근이 $p+qi$이면 $p-qi$도 근이다. (단, p, q는 실수, $q\neq 0$, $i=\sqrt{-1}$)

계수가 유리수인 삼차방정식의 한 근이 $p+q\sqrt{m}$이면 $p-q\sqrt{m}$도 근이다. (단, p, q는 유리수, $q\neq 0$, $\sqrt{m}$은 무리수)

Ⓦ 06 여러 가지 방정식

14 $x^3=-1$에서 $x^3+1=0$, 즉 $(x+1)(x^2-x+1)=0$ 이므로 ω는 $x^2-x+1=0$의 한 허근이고, ω의 켤레복소수인 $\overline{\omega}$도 $x^2-x+1=0$의 허근이다.

$\therefore\ \omega^2-\omega+1=0,\ \omega^3=-1,\ \omega+\overline{\omega}=1,\ \omega\overline{\omega}=1$

$(\omega-1)^n=\left(\dfrac{\omega\overline{\omega}}{1-\overline{\omega}}\right)^n$에서

$(\omega-1)^n=(\omega^2)^n=\omega^{2n}$,

$\left(\dfrac{\omega\overline{\omega}}{1-\overline{\omega}}\right)^n=\left(\dfrac{1}{\omega}\right)^n=\dfrac{1}{\omega^n}$

$\omega^2-\omega+1=0$에서 $\omega-1=\omega^2$

$\omega\overline{\omega}=1$이고 $\omega+\overline{\omega}=1$에서 $1-\overline{\omega}=\omega$

이므로 $\omega^{2n}=\dfrac{1}{\omega^n}$

양변에 ω^n을 곱하면

$\omega^{3n}=1$, 즉 $(-1)^n=1$

따라서 자연수 n은 짝수이어야 하므로 조건을 만족시키는 100 이하의 자연수 n은 50개이다. 답 50

15 연립이차방정식

Ⓦ 53쪽

01 (1) $x+3y=1$에서 $x=1-3y$ …… ㉠

㉠을 $x^2-4y^2=9$에 대입하면

$(1-3y)^2-4y^2=9$

$5y^2-6y-8=0,\quad (5y+4)(y-2)=0$

$\therefore\ y=-\dfrac{4}{5}$ 또는 $y=2$

$y=-\dfrac{4}{5}$를 ㉠에 대입하면 $x=\dfrac{17}{5}$

$y=2$를 ㉠에 대입하면 $x=-5$

따라서 주어진 연립방정식의 해는

$\begin{cases}x=\dfrac{17}{5}\\ y=-\dfrac{4}{5}\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=-5\\ y=2\end{cases}$

(2) $x^2-3xy+2y^2=0$에서

$(x-y)(x-2y)=0$

$\therefore\ x=y$ 또는 $x=2y$

(i) $x=y$를 $x^2-5y^2=-4$에 대입하면

$y^2-5y^2=-4,\quad -4y^2=-4$

$y^2=1$

$\therefore\ y=\pm1,\ x=\pm1$ (복호동순)

(ii) $x=2y$를 $x^2-5y^2=-4$에 대입하면

$4y^2-5y^2=-4,\quad -y^2=-4$

$y^2=4$

$\therefore\ y=\pm2,\ x=\pm4$ (복호동순)

(i), (ii)에서 주어진 연립방정식의 해는

$\begin{cases}x=1\\ y=1\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=-1\\ y=-1\end{cases}$

또는 $\begin{cases}x=4\\ y=2\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=-4\\ y=-2\end{cases}$

(3) x, y는 이차방정식 $t^2-8t+15=0$의 두 근이므로

$(t-3)(t-5)=0$

$\therefore\ t=3$ 또는 $t=5$

따라서 주어진 연립방정식의 해는

$\begin{cases}x=3\\ y=5\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=5\\ y=3\end{cases}$

답 풀이 참조

02 $\begin{cases}x-2y=1 & \cdots\cdots ㉠\\ x^2-xy=3 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$

㉠에서 $x=2y+1$ …… ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$(2y+1)^2-(2y+1)y=3$

$2y^2+3y-2=0,\quad (y+2)(2y-1)=0$

$\therefore\ y=-2$ 또는 $y=\dfrac{1}{2}$

이것을 ㉢에 대입하면 주어진 연립방정식의 해는

$x=-3,\ y=-2$ 또는 $x=2,\ y=\dfrac{1}{2}$

$\therefore\ x-y=-1$ 또는 $x-y=\dfrac{3}{2}$

따라서 $x-y$의 최솟값은 -1이다. 답 -1

03 $\begin{cases}x-y=-3 & \cdots\cdots ㉠\\ x^2+xy+y^2=21 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$

㉠에서 $y=x+3$ …… ㉢

$x=y-3$으로 변형해도 된다.

㉢을 ㉡에 대입하면

$x^2+x(x+3)+(x+3)^2=21$

$x^2+3x-4=0,\quad (x+4)(x-1)=0$

$\therefore\ x=-4$ 또는 $x=1$

이것을 ㉢에 대입하면 주어진 연립방정식의 해는

$x=-4,\ y=-1$ 또는 $x=1,\ y=4$

(i) $x=-4,\ y=-1$을 $\begin{cases}x+y-a=0\\ ax+by=11\end{cases}$에 대입하면

$-4-1-a=0,\ -4a-b=11$

$\therefore\ a=-5,\ b=9$

(ii) $x=1,\ y=4$를 $\begin{cases}x+y-a=0\\ ax+by=11\end{cases}$에 대입하면

$1+4-a=0,\ a+4b=11$

$\therefore\ a=5,\ b=\dfrac{3}{2}$

(i), (ii)에서 정수 a, b의 값은

$a=-5,\ b=9$ 답 $a=-5,\ b=9$

04 $\begin{cases}x^2-3xy+2y^2=0 & \cdots\cdots ㉠\\ x^2+2xy+y^2=36 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$

㉠에서 $(x-y)(x-2y)=0$

$\therefore\ x=y$ 또는 $x=2y$

(i) $x=y$를 ㉡에 대입하면

$y^2+2y^2+y^2=36,\quad y^2=9$

$\therefore\ y=\pm3,\ x=\pm3$ (복호동순)

(ii) $x=2y$를 ㉡에 대입하면

$4y^2+4y^2+y^2=36,\quad y^2=4$

$\therefore\ y=\pm2,\ x=\pm4$ (복호동순)

(i), (ii)에서 $\alpha\beta$의 값은 8, 9이다. 답 8, 9

05 $\begin{cases} x^2-y^2=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+xy+3y^2=15 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $(x+y)(x-y)=0$

$\therefore y=-x$ 또는 $y=x$

(i) $y=-x$를 ㉡에 대입하면

$x^2-x^2+3x^2=15, \quad x^2=5$

$\therefore x=\pm\sqrt{5},\ y=\mp\sqrt{5}$ (복호동순)

(ii) $y=x$를 ㉡에 대입하면

$x^2+x^2+3x^2=15, \quad x^2=3$

$\therefore x=\pm\sqrt{3},\ y=\pm\sqrt{3}$ (복호동순)

(i), (ii)에서 $\alpha+\beta$의 값은 $\alpha=-\sqrt{3}$, $\beta=-\sqrt{3}$일 때 최소이므로 구하는 최솟값은

$-\sqrt{3}+(-\sqrt{3})=-2\sqrt{3}$ 답 ②

06 $\begin{cases} x^2-y^2-x-y=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-xy+2y^2=1 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $(x+y)(x-y)-(x+y)=0$

$(x+y)(x-y-1)=0$

$\therefore y=-x$ 또는 $y=x-1$

(i) $y=-x$를 ㉡에 대입하면

$x^2+x^2+2x^2=1, \quad x^2=\frac{1}{4}$

$\therefore x=\pm\frac{1}{2},\ y=\mp\frac{1}{2}$ (복호동순)

(ii) $y=x-1$을 ㉡에 대입하면

$x^2-x(x-1)+2(x-1)^2=1$

$2x^2-3x+1=0, \quad (2x-1)(x-1)=0$

$\therefore x=\frac{1}{2}$ 또는 $x=1$

$\therefore \begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=-\frac{1}{2} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$

(i), (ii)에서 x, y는 정수이므로 $x=1,\ y=0$

$\therefore x^2+y^2=1$ 답 ①

07 $x+y=u$, $xy=v$로 놓으면 주어진 연립방정식은

$\begin{cases} u^2-2v=52 & \cdots\cdots ㉠ \\ v=24 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$

㉡을 ㉠에 대입하면

$u^2-48=52, \quad u^2=100 \quad \therefore u=\pm10$

(i) $u=10$, $v=24$, 즉 $x+y=10$, $xy=24$일 때

x, y는 이차방정식 $t^2-10t+24=0$의 두 근이므로

$(t-4)(t-6)=0 \quad \therefore t=4$ 또는 $t=6$

$\therefore \begin{cases} x=4 \\ y=6 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=6 \\ y=4 \end{cases}$

(ii) $u=-10$, $v=24$, 즉 $x+y=-10$, $xy=24$일 때

x, y는 이차방정식 $t^2+10t+24=0$의 두 근이므로

$(t+6)(t+4)=0 \quad \therefore t=-6$ 또는 $t=-4$

$\therefore \begin{cases} x=-6 \\ y=-4 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-4 \\ y=-6 \end{cases}$

(i), (ii)에서 구하는 해는

$\begin{cases} x=4 \\ y=6 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=6 \\ y=4 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-6 \\ y=-4 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-4 \\ y=-6 \end{cases}$

답 $\begin{cases} x=4 \\ y=6 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=6 \\ y=4 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-6 \\ y=-4 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-4 \\ y=-6 \end{cases}$

Q BOX

x^2+y^2+x+y
$=(x+y)^2+x+y-2xy$

x^2+xy+y^2
$=(x+y)^2-xy$

08 $x+y=u$, $xy=v$로 놓으면 주어진 연립방정식은

$\begin{cases} u^2+u-2v=8 & \cdots\cdots ㉠ \\ u^2-v=7 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉡에서 $v=u^2-7$ $\cdots\cdots$ ㉢

㉢을 ㉠에 대입하여 정리하면

$u^2-u-6=0, \quad (u+2)(u-3)=0$

$\therefore u=-2$ 또는 $u=3$

이것을 ㉢에 대입하면

$u=-2,\ v=-3$ 또는 $u=3,\ v=2$

(i) $u=-2$, $v=-3$, 즉 $x+y=-2$, $xy=-3$일 때

x, y는 이차방정식 $t^2+2t-3=0$의 두 근이므로

$(t+3)(t-1)=0 \quad \therefore t=-3$ 또는 $t=1$

$\therefore \begin{cases} x=-3 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=1 \\ y=-3 \end{cases}$

(ii) $u=3$, $v=2$, 즉 $x+y=3$, $xy=2$일 때

x, y는 이차방정식 $t^2-3t+2=0$의 두 근이므로

$(t-1)(t-2)=0 \quad \therefore t=1$ 또는 $t=2$

$\therefore \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$

(i), (ii)에서 $3x+y$의 값은 $x=-3$, $y=1$일 때 최소이므로 구하는 최솟값은

$3\cdot(-3)+1=-8$ 답 ①

09 $\begin{cases} x-y=2 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+xy+k=0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $y=x-2$

이것을 ㉡에 대입하면 $x^2+x(x-2)+k=0$

$\therefore 2x^2-2x+k=0$

이를 만족시키는 실수 x의 값이 존재해야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-1)^2-2k\geq0$

$1-2k\geq0 \quad \therefore k\leq\frac{1}{2}$

따라서 실수 k의 최댓값은 $\frac{1}{2}$이다. 답 $\frac{1}{2}$

10 주어진 연립방정식을 만족시키는 x, y는 이차방정식 $t^2-(2a-3)t+a^2+a+1=0$의 두 근이다.

따라서 이 이차방정식이 실근을 갖지 않아야 하므로 이 차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=\{-(2a-3)\}^2-4(a^2+a+1)<0$

$-16a+5<0 \quad \therefore a>\frac{5}{16}$

따라서 정수 a의 최솟값은 1이다. 답 1

11 $\overline{PA}=x$, $\overline{PB}=y$라 하면 $\angle APB=90°$이므로

반원에 대한 원주각의 크기는 $90°$이다.

$$\begin{cases} x+y=21 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+y^2=15^2 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $y=21-x$ ······ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$x^2+(21-x)^2=225$, $x^2-21x+108=0$

$(x-9)(x-12)=0$ $\therefore x=9$ 또는 $x=12$

$x=9$를 ㉢에 대입하면 $y=12$

$x=12$를 ㉢에 대입하면 $y=9$

$\therefore \triangle PAB=\frac{1}{2}\cdot 9\cdot 12=54$ 답 ④

12 처음 직육면체의 밑면의 가로의 길이를 x cm, 세로의 길이를 y cm라 하면

$$\begin{cases} x^2+y^2=13^2 & \cdots\cdots ㉠ \\ 4(x+2)(y+2)=4xy+152 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉡에서 $xy+2(x+y)+4=xy+38$

$2(x+y)=34$, $x+y=17$

$\therefore y=17-x$ ······ ㉢

㉢을 ㉠에 대입하면

$x^2+(17-x)^2=169$, $x^2-17x+60=0$

$(x-5)(x-12)=0$ $\therefore x=5$ 또는 $x=12$

$x=5$를 ㉢에 대입하면 $y=12$

$x=12$를 ㉢에 대입하면 $y=5$

그런데 $x>y$이므로 $x=12$, $y=5$

따라서 처음 직육면체의 밑면의 가로의 길이는 12 cm이다. 답 12 cm

13 마름모의 넓이가 24 cm²이므로

$\frac{1}{2}ab=24$ $\therefore ab=48$ ······ ㉠

또 마름모의 한 변의 길이가 5 cm이고 마름모의 두 대각선은 서로를 수직이등분하므로

$\left(\frac{1}{2}a\right)^2+\left(\frac{1}{2}b\right)^2=5^2$

$\therefore a^2+b^2=100$ ······ ㉡

㉡에서 $(a+b)^2-2ab=100$이므로 이 식에 ㉠을 대입하면

$(a+b)^2-2\cdot 48=100$, $(a+b)^2=196$

$\therefore a+b=14$ ($\because a>0$, $b>0$) ······ ㉢

㉠, ㉢에서 a, b는 이차방정식 $t^2-14t+48=0$의 두 근임을 이용할 수도 있다.

㉢에서 $b=14-a$이므로 이것을 ㉠에 대입하면

$a(14-a)=48$, $a^2-14a+48=0$

$(a-6)(a-8)=0$ $\therefore a=6$ 또는 $a=8$

$a=6$을 ㉢에 대입하면 $b=8$

$a=8$을 ㉢에 대입하면 $b=6$

그런데 $a>b$이므로 $a=8$, $b=6$

$\therefore 2a-b=10$ 답 ⑤

07 일차부등식

16 연립일차부등식

55쪽

01 (1) $a<b$의 양변에서 $2b$를 빼면

$a-2b<-b$

(2) $a<0$이므로 $a<b$의 양변에 a를 곱하면

$a^2>ab$

답 (1) $a-2b<-b$ (2) $a^2>ab$

02 (1) $2(x+3)>x-5$에서

$2x+6>x-5$ $\therefore x>-11$

(2) $-(x+4)\le 2(x-2)+3x$에서

$-x-4\le 5x-4$, $-6x\le 0$ $\therefore x\ge 0$

(3) $0.3x-2<-0.2x-1.5$에서

양변에 10을 곱한다.

$3x-20<-2x-15$, $5x<5$ $\therefore x<1$

(4) $\frac{x-1}{4}-\frac{x+2}{5}\ge -1$에서

양변에 4, 5의 최소공배수 20을 곱한다.

$5(x-1)-4(x+2)\ge -20$

$5x-5-4x-8\ge -20$

$x-13\ge -20$ $\therefore x\ge -7$

답 (1) $x>-11$ (2) $x\ge 0$ (3) $x<1$ (4) $x\ge -7$

03 $ax-a\le 3x-3$에서 $(a-3)x\le a-3$

(i) $a>3$일 때, $x\le 1$

$a-3>0$이므로 부등호의 방향이 바뀌지 않는다.

(ii) $a=3$일 때, $0\le 0$이므로 해는 모든 실수이다.

(iii) $a<3$일 때, $x\ge 1$

$a-3<0$이므로 부등호의 방향이 바뀐다.

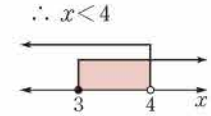
답 풀이 참조

04 (1) $2x-1\ge 8-x$에서 $3x\ge 9$ $\therefore x\ge 3$

$4x-13<3$에서 $4x<16$ $\therefore x<4$

따라서 연립부등식의 해는

$3\le x<4$



(2) $1-3(x-2)>8-4x$에서

$-3x+7>8-4x$ $\therefore x>1$

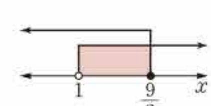
$4(x-2)\le 2(x+1)-1$에서

$4x-8\le 2x+1$, $2x\le 9$

$\therefore x\le \frac{9}{2}$

따라서 연립부등식의 해는

$1<x\le \frac{9}{2}$



(3) $\frac{1}{5}x-\frac{9}{2}>-x$에서 $2x-45>-10x$

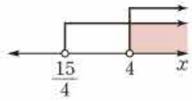
$12x>45$ $\therefore x>\frac{15}{4}$

$0.3x-1>0.2$에서 $3x-10>2$

$3x>12$ $\therefore x>4$

따라서 연립부등식의 해는

$x>4$



(4) $0.2x+0.1\ge0.5(x-1)$에서

$2x+1\ge5(x-1)$, $2x+1\ge5x-5$

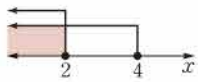
$-3x\ge-6$ $\therefore x\le2$

$\frac{x+5}{3}\le\frac{x}{4}+2$에서 $4(x+5)\le3x+24$

$4x+20\le3x+24$ $\therefore x\le4$

따라서 연립부등식의 해는

$x\le2$



답 (1) $3\le x<4$ (2) $1<x\le\frac{9}{2}$

(3) $x>4$ (4) $x\le2$

05 ㄱ. $a=1$, $b=-2$이면 $a>b$이지만 $a^2<b^2$이다.

ㄷ. $a=1$, $b=-1$, $c=-2$이면 $a>b>c$이지만

$a^2<bc$이다.

이상에서 옳은 것은 ㄴ뿐이다. 답 ②

Q BOX

$a^2=1^2=1$,
$b^2=(-2)^2=4$

$a^2=1^2=1$,
$bc=(-1)\cdot(-2)=2$

06 ㄱ. $b<0$이므로 $a<b$의 양변에 b를 곱하면

$ab>b^2$

ㄴ. $a<b$이므로 $a-b<0$

한편 $a^2+ab+b^2=\left(a+\frac{b}{2}\right)^2+\frac{3}{4}b^2>0$이므로

$(a-b)(a^2+ab+b^2)<0$

$a^3-b^3<0$ $\therefore a^3<b^3$

ㄷ. ㄴ에서 $a^3<b^3$

$ab>0$이므로 양변을 ab로 나누면 $\frac{a^2}{b}<\frac{b^2}{a}$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ㄱ, ㄷ

$a<0$, $b<0$이므로
$ab>0$

07 $a(x-a)>2b(x-2b)$에서

$ax-a^2>2bx-4b^2$, $(a-2b)x>a^2-4b^2$

$(a-2b)x>(a+2b)(a-2b)$

이때 $a<2b$, 즉 $a-2b<0$이므로

$x<a+2b$ 답 $x<a+2b$

08 $(a-1)x-(a+b)\ge0$에서

$(a-1)x\ge a+b$

이 부등식의 해가 $x\le-1$이므로

$a-1<0$, $\frac{a+b}{a-1}=-1$

$\therefore a<1$, $2a+b=1$

따라서 $3(2a+b)x>12$, 즉 $3x>12$에서

$x>4$ 답 $x>4$

부등식 $(a-1)x\ge a+b$의 부등호의 방향과 해 $x\le-1$의 부등호의 방향이 반대이므로 x의 계수는 음수이다.

09 $(a-b)x-5a+3b>0$에서

$(a-b)x>5a-3b$

이 부등식의 해가 모든 실수이므로

$a-b=0$, $5a-3b<0$

$a-b=0$에서 $a=b$이므로 $5a-3b<0$에 대입하면

$5a-3a<0$, $2a<0$

$\therefore a<0$

따라서 $(a+2b)x>b-3a$에서

$(a+2a)x>a-3a$, $3ax>-2a$

이때 $a<0$이므로 $x<-\frac{2}{3}$ 답 ①

10 $-x<x+2$에서

$-2x<2$ $\therefore x>-1$

$3(x-2)\le2(x-2)$에서

$3x-6\le2x-4$ $\therefore x\le2$

따라서 연립부등식의 해는 $-1<x\le2$이므로 수직선 위에 나타낸 것은 ③이다. 답 ③

11 $3x+7\ge x+1$에서

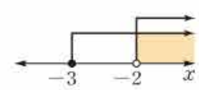
$2x\ge-6$ $\therefore x\ge-3$

$5x+1>3x-3$에서

$2x>-4$ $\therefore x>-2$

따라서 연립부등식의 해는

$x>-2$



이므로 정수 x의 최솟값은 -1이다.

답 -1

12 $\frac{2x+7}{6}>\frac{2x-3}{2}$에서 $2x+7>3(2x-3)$

$2x+7>6x-9$, $-4x>-16$

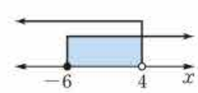
$\therefore x<4$

$0.3x+0.2\ge0.1x-1$에서 $3x+2\ge x-10$

$2x\ge-12$ $\therefore x\ge-6$

따라서 연립부등식의 해는

$-6\le x<4$



이므로 x의 값이 될 수 없는 것은

⑤이다. 답 ⑤

13 $\frac{x-3}{2}-\frac{4x+5}{3}\le1$에서

$3(x-3)-2(4x+5)\le6$

$3x-9-8x-10\le6$, $-5x\le25$

$\therefore x\ge-5$

$0.5(x-1)+1.1\ge0.6(x-2)$에서

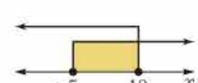
$5(x-1)+11\ge6(x-2)$

$5x+6\ge6x-12$, $-x\ge-18$

$\therefore x\le18$

따라서 연립부등식의 해는

$-5\le x\le18$



이므로

$a=-5$, $b=18$

$\therefore a+b=13$ 답 ②

W 07 일차부등식

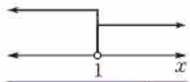
17 여러 가지 부등식

W 57쪽

01 (2) $2x-1>1$에서 $\quad 2x>2$

$\therefore\ x>1$

따라서 연립부등식의 해는 없다.



공통부분이 없다.

(3) $-x\le 3x-8$에서 $\quad -4x\le -8$

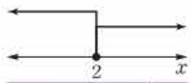
$\therefore\ x\ge 2$

$4x+9\le 2x+13$에서 $\quad 2x\le 4$

$\therefore\ x\le 2$

따라서 연립부등식의 해는

$x=2$



공통부분이 2뿐이다.

(4) $1+4(x-2)\le 3x$에서 $\quad 4x-7\le 3x$

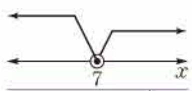
$\therefore\ x\le 7$

$5(x+1)>3(x-1)+22$에서

$5x+5>3x+19$

$2x>14 \quad \therefore\ x>7$

따라서 연립부등식의 해는 없다.



공통부분이 없다.

답 (1) $x=4$ (2) 해는 없다.
(3) $x=2$ (4) 해는 없다.

02 (1) 주어진 부등식에서

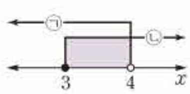
$$\begin{cases} 5x-11<2x+1 & \cdots\cdots \text{㉠} \\ 2x+1\le 3x-2 & \cdots\cdots \text{㉡} \end{cases}$$

㉠에서 $\quad 3x<12 \quad \therefore\ x<4$

㉡에서 $\quad -x\le -3 \quad \therefore\ x\ge 3$

따라서 주어진 부등식의 해는

$3\le x<4$



(2) 주어진 부등식에서

$$\begin{cases} -x+2\le 4(x-2) & \cdots\cdots \text{㉠} \\ 4(x-2)\le 3x+1 & \cdots\cdots \text{㉡} \end{cases}$$

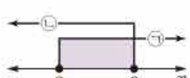
㉠에서 $\quad -x+2\le 4x-8$

$-5x\le -10 \quad \therefore\ x\ge 2$

㉡에서 $\quad 4x-8\le 3x+1 \quad \therefore\ x\le 9$

따라서 주어진 부등식의 해는

$2\le x\le 9$



답 (1) $3\le x<4$ (2) $2\le x\le 9$

03 (1) $|3x+8|\ge 2$에서

$3x+8\le -2$ 또는 $3x+8\ge 2$

$3x\le -10$ 또는 $3x\ge -6$

$\therefore\ x\le -\dfrac{10}{3}$ 또는 $x\ge -2$

(2) $|6-x|<3$에서

$-3<6-x<3, \quad -9<-x<-3$

$\therefore\ 3<x<9$

답 (1) $x\le -\dfrac{10}{3}$ 또는 $x\ge -2$
(2) $3<x<9$

04 $7+2x\le -(8-5x)+3$에서

$7+2x\le 5x-5, \quad -3x\le -12$

$\therefore\ x\ge 4$

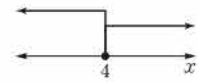
$10-2(x+1)\ge 3x-12$에서

$-2x+8\ge 3x-12, \quad -5x\ge -20$

$\therefore\ x\le 4$

따라서 연립부등식의 해는

$x=4$



답 ③

05 ① 연립부등식의 해는 $\quad x=-6$

② $-3x\le -3$에서 $\quad x\ge 1$

따라서 연립부등식의 해는 $\quad x\ge 1$

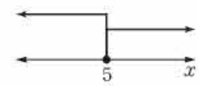
③ $2x-4\le 6$에서 $\quad 2x\le 10 \quad \therefore\ x\le 5$

$1-x\le 2(x-7)$에서 $\quad 1-x\le 2x-14$

$-3x\le -15 \quad \therefore\ x\ge 5$

따라서 연립부등식의 해는

$x=5$



④ $\dfrac{1}{2}x+5\le \dfrac{3}{2}$에서 $\quad x+10\le 3$

$\therefore\ x\le -7$

$4(x+1)>3x+7$에서 $\quad 4x+4>3x+7$

$\therefore\ x>3$

따라서 연립부등식의 해는 없다.

⑤ $2x+1<4-x$에서 $\quad 3x<3 \quad \therefore\ x<1$

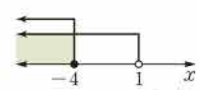
$\dfrac{1}{3}x-\dfrac{x-1}{2}\ge \dfrac{7}{6}$에서 $\quad 2x-3(x-1)\ge 7$

$2x-3x+3\ge 7, \quad -x\ge 4$

$\therefore\ x\le -4$

따라서 연립부등식의 해는

$x\le -4$



답 ④

06 주어진 부등식에서

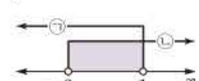
$$\begin{cases} -1<-5x+4 & \cdots\cdots \text{㉠} \\ -5x+4<19 & \cdots\cdots \text{㉡} \end{cases}$$

㉠에서 $\quad 5x<5 \quad \therefore\ x<1$

㉡에서 $\quad -5x<15 \quad \therefore\ x>-3$

따라서 주어진 부등식의 해는

$-3<x<1$



이므로 모든 정수 x의 값의 합은

$(-2)+(-1)+0=-3$

답 -3

다른 풀이 $-1<-5x+4<19$에서

부등식의 각 변에서 4를 뺀다.

$-5<-5x<15 \quad \therefore\ -3<x<1$

부등식의 각 변을 -5로 나눈다.

따라서 모든 정수 x의 값의 합은

$(-2)+(-1)+0=-3$

쌤 한마디

$A<B<C$ 꼴의 부등식에서 A와 C가 상수인 경우에는 부등식의 기본 성질을 이용하여 해를 구할 수 있다.

07 주어진 부등식에서

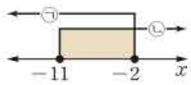
$$\begin{cases} 3x-1\le x-5 & \cdots\cdots ㉠ \\ x-5\le 2x+6 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $2x\le -4$ $\therefore x\le -2$

㉡에서 $-x\le 11$ $\therefore x\ge -11$

따라서 주어진 부등식의 해는

$-11\le x\le -2$



ㄱ. 정수인 해는 -11, -10, -9, $\cdots$, -2의 10개이다.

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ⑤

쌤 한마디

부등식을 만족시키는 정수 x의 개수

$a<b$인 정수 a, b에 대하여 부등식을 만족시키는 정수 x의 개수는 다음과 같다.

① $a<x<b$일 때, $b-a-1$

② $a\le x<b$ 또는 $a<x\le b$일 때, $b-a$

③ $a\le x\le b$일 때, $b-a+1$

08 주어진 부등식에서

$$\begin{cases} \frac{1}{4}x+2<\frac{1}{2}x+1 & \cdots\cdots ㉠ \\ \frac{1}{2}x+1<\frac{3x-1}{5} & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

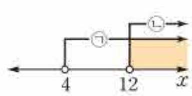
㉠에서 $x+8<2x+4$ $\therefore x>4$

㉡에서 $5x+10<2(3x-1)$

$5x+10<6x-2$ $\therefore x>12$

따라서 주어진 부등식의 해는

$x>12$



이므로 정수 x의 최솟값은 13이다. 답 13

09 $5x-2\le x+a$에서 $4x\le a+2$

$\therefore x\le \frac{a+2}{4}$

$2x-6<3x+8$에서 $-x<14$

$\therefore x>-14$

이때 연립부등식의 해가 $b<x\le 1$이므로

$\frac{a+2}{4}=1$, $b=-14$ $\therefore a=2$, $b=-14$

$\therefore a-b=16$ 답 16

$x\le \frac{a+2}{4}$ 는 $x\le 1$과 같으므로

$\frac{a+2}{4}=1$

$x>-14$는 $x>b$와 같으므로

$b=-14$

10 $x-3a<0$에서 $x<3a$

$4x+b\le 0$에서 $4x\le -b$ $\therefore x\le -\frac{b}{4}$

주어진 그림에서 각 부등식의 해가 $x\le -2$, $x<6$이므로

$3a=6$, $-\frac{b}{4}=-2$ $\therefore a=2$, $b=8$

$\therefore a^2+b^2=4+64=68$ 답 ④

11 주어진 부등식에서

$$\begin{cases} a(x+6)\le -2x+3 & \cdots\cdots ㉠ \\ -2x+3\le 4x+b & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $ax+6a\le -2x+3$

$\therefore (a+2)x\le 3-6a$ $\cdots\cdots$ ㉢

㉡에서 $-6x\le b-3$

$\therefore x\ge \frac{3-b}{6}$ $\cdots\cdots$ ㉣

이때 주어진 부등식의 해가 $-1\le x\le 3$이므로 부등식 ㉢의 해는 $x\le 3$, 부등식 ㉣의 해는 $x\ge -1$이어야 한다.

즉 ㉢에서 $a+2>0$이므로 $x\le \frac{3-6a}{a+2}$

따라서 $\frac{3-6a}{a+2}=3$, $\frac{3-b}{6}=-1$이므로

$3-6a=3a+6$, $3-b=-6$

$-9a=3$, $-b=-9$

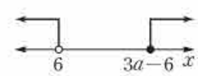
$\therefore a=-\frac{1}{3}$, $b=9$

$\therefore ab=-3$ 답 -3

12 $2x-5<7$에서 $2x<12$ $\therefore x<6$

$x+6\ge 3a$에서 $x\ge 3a-6$

이때 연립부등식이 해를 갖지 않도록 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로



$3a-6\ge 6$, $3a\ge 12$

$\therefore a\ge 4$ 답 ⑤

$3a-6=6$이면 주어진 연립부등식은

$\begin{cases} x<6 \\ x\ge 6 \end{cases}$

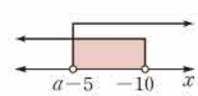
따라서 해가 없다.

13 $4(x-3)>5x-2$에서 $4x-12>5x-2$

$-x>10$ $\therefore x<-10$

$3x+5>2x+a$에서 $x>a-5$

이때 연립부등식이 해를 갖도록 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로



$a-5<-10$

$\therefore a<-5$ 답 $a<-5$

$a-5=-10$이면 주어진 연립부등식은

$\begin{cases} x<-10 \\ x>-10 \end{cases}$

따라서 해가 없다.

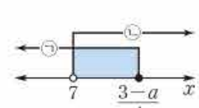
14 주어진 부등식에서

$$\begin{cases} 6x+a\le 2x+3 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x+3<3x-4 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $4x\le 3-a$ $\therefore x\le \frac{3-a}{4}$

㉡에서 $-x<-7$ $\therefore x>7$

이때 주어진 부등식이 해를 갖도록 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로



$\frac{3-a}{4}>7$, $3-a>28$

$-a>25$ $\therefore a<-25$

따라서 정수 a의 최댓값은 -26이다. 답 ②

$\frac{3-a}{4}=7$이면 주어진 부등식은

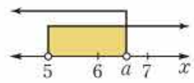
$\begin{cases} x\le 7 \\ x>7 \end{cases}$

따라서 해가 없다.

Ⓦ 07 일차부등식

15 $x-3>2$에서 $\quad x>5$

이때 연립부등식을 만족시키는 정수 x가 1개뿐이므로 오른쪽 그림에서 $\quad 6<a\leq 7$



a는 자연수이므로 $\quad a=7$

답 7

$a=6$이면 연립부등식의 해가
$5<x<6$
이므로 정수인 해는 없다.

16 $0.2(x+3)>x-1$에서 $\quad 2(x+3)>10x-10$

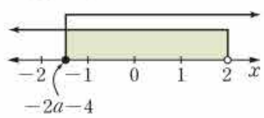
$2x+6>10x-10, \quad -8x>-16$

$\therefore x<2$

$\dfrac{x-4}{2}\leq x+a$에서 $\quad x-4\leq 2x+2a$

$-x\leq 2a+4 \quad \therefore x\geq -2a-4$

이때 연립부등식을 만족시키는 정수 x가 3개이므로 오른쪽 그림에서



$-2<-2a-4\leq -1$

$2<-2a\leq 3 \quad \therefore -\dfrac{3}{2}\leq a<-1$

답 $-\dfrac{3}{2}\leq a<-1$

$-2a-4=-2$이면 연립부등식의 해는
$-2\leq x<2$
이므로 정수인 해는 -2, -1, 0, 1의 4개이다.

17 식품 A의 개수를 x라 하면 식품 B의 개수는 $20-x$이므로

$$\begin{cases} 40x+100(20-x)\leq 1400 & \cdots\cdots ㉠ \\ 3x+2(20-x)\leq 54 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $\quad 2x+5(20-x)\leq 70$

부등식의 양변을 20으로 나눈다.

$-3x+100\leq 70, \quad -3x\leq -30$

$\therefore x\geq 10$

㉡에서 $\quad x+40\leq 54 \quad \therefore x\leq 14$

따라서 연립부등식의 해는 $\quad 10\leq x\leq 14$

이므로 식품 A의 개수가 될 수 없는 것은 ⑤이다.

답 ⑤

18 세 변의 길이는 각각 x cm, x cm, $(90-2x)$ cm이다.

(i) 세 변의 길이가 같을 때,

$x=90-2x$에서 $\quad 3x=90 \quad \therefore x=30$

(ii) 가장 긴 변의 길이가 x cm일 때,

$90-2x<x$에서 $\quad -3x<-90$

$\therefore x>30 \quad \cdots\cdots ㉠$

또 $x<x+(90-2x)$이어야 하므로

$2x<90 \quad \therefore x<45 \quad \cdots\cdots ㉡$

㉠, ㉡에서 $\quad 30<x<45$

(iii) 가장 긴 변의 길이가 $(90-2x)$ cm일 때,

$x<90-2x$에서 $\quad 3x<90$

$\therefore x<30 \quad \cdots\cdots ㉢$

또 $90-2x<x+x$이어야 하므로

$-4x<-90 \quad \therefore x>\dfrac{45}{2} \quad \cdots\cdots ㉣$

㉢, ㉣에서 $\quad \dfrac{45}{2}<x<30$

이상에서 삼각형을 만들 수 있는 x의 값의 범위는

$\dfrac{45}{2}<x<45$

답 $\dfrac{45}{2}<x<45$

쌤 한마디

삼각형의 변의 길이에 대한 문제에서는 다음이 성립함을 이용한다.

① (가장 긴 변의 길이)<(나머지 두 변의 길이의 합)

② (가장 짧은 변의 길이)>0

19 학생 수를 x라 하면

$3x<60<4x$, 즉 $\begin{cases} 3x<60 & \cdots\cdots ㉠ \\ 60<4x & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $\quad x<20$

㉡에서 $\quad x>15$

$\therefore 15<x<20$

x는 학생 수이므로 x의 값은 16, 17, 18, 19이다.

따라서 학생은 16명 이상 19명 이하이다.

답 16명 이상 19명 이하

20 자동차 수를 x라 하면 회원 수는 $3x+8$이므로

$5(x-5)+1\leq 3x+8\leq 5(x-5)+5$,

즉 $\begin{cases} 5(x-5)+1\leq 3x+8 & \cdots\cdots ㉠ \\ 3x+8\leq 5(x-5)+5 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $\quad 5x-24\leq 3x+8$

$2x\leq 32 \quad \therefore x\leq 16$

㉡에서 $\quad 3x+8\leq 5x-20$

$-2x\leq -28 \quad \therefore x\geq 14$

$\therefore 14\leq x\leq 16$

따라서 자동차는 최소 14대이다.

답 ②

21 $|4x+7|\leq 3$에서 $\quad -3\leq 4x+7\leq 3$

$-10\leq 4x\leq -4 \quad \therefore -\dfrac{5}{2}\leq x\leq -1$

따라서 정수 x는 -2, -1의 2개이다.

답 2

22 $|x-3a|<b$에서 $\quad -b<x-3a<b$

$\therefore 3a-b<x<3a+b$

이때 주어진 부등식의 해가 $5<x<7$이므로

$3a-b=5$, $3a+b=7$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=2$, $b=1$

$\therefore a^2+b^2=5$

답 ②

23 $|2x+a|>10$에서

$2x+a<-10$ 또는 $2x+a>10$

$2x<-a-10$ 또는 $2x>-a+10$

$\therefore x<\dfrac{-a-10}{2}$ 또는 $x>\dfrac{-a+10}{2}$

이때 주어진 부등식의 해가 $x<-3$ 또는 $x>b$이므로

$\dfrac{-a-10}{2}=-3$, $\dfrac{-a+10}{2}=b$

$a+10=6$, $-a+10=2b$

앞의 두 식을 연립하여 풀면

$a=-4,\ b=7$

$\therefore ab=-28$ 답 -28

24 $|8-x|\le 12-x$에서

(i) $8-x\ge 0$, 즉 $x\le 8$일 때,

$8-x\le 12-x$에서 $8\le 12$이므로 $x\le 8$에서 주어진 부등식은 항상 성립한다.

(ii) $8-x<0$, 즉 $x>8$일 때,

$-(8-x)\le 12-x,\quad -8+x\le 12-x$

$2x\le 20\quad \therefore x\le 10$

그런데 $x>8$이므로 $\quad 8<x\le 10$

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는

$x\le 10$

따라서 자연수 x는 1, 2, 3, …, 10의 10개이다.

답 ③

25 $|2x-1|<3x-7$에서

(i) $2x-1\ge 0$, 즉 $x\ge \frac{1}{2}$일 때,

$2x-1<3x-7,\quad -x<-6$

$\therefore x>6$

그런데 $x\ge \frac{1}{2}$이므로 $\quad x>6$

(ii) $2x-1<0$, 즉 $x<\frac{1}{2}$일 때,

$-(2x-1)<3x-7,\quad -2x+1<3x-7$

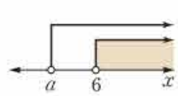
$-5x<-8\quad \therefore x>\frac{8}{5}$

그런데 $x<\frac{1}{2}$이므로 해는 없다.

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는

$x>6$

따라서 $x>6$이 $x>a$에 포함되려면 오른쪽 그림에서



$a\le 6$ 답 $a\le 6$

$a=6$이면 $x>6$이 $x>a$에 포함된다.

26 $|x+3|+|x|\ge 9$에서

(i) $x<-3$일 때,

$|x+3|=-(x+3),\ |x|=-x$

$-(x+3)-x\ge 9,\quad -2x-3\ge 9$

$-2x\ge 12\quad \therefore x\le -6$

그런데 $x<-3$이므로 $\quad x\le -6$

(ii) $-3\le x<0$일 때,

$|x+3|=x+3,\ |x|=-x$

$x+3-x\ge 9$에서 $3\ge 9$이므로 $-3\le x<0$에서 해는 없다.

(iii) $x\ge 0$일 때,

$|x+3|=x+3,\ |x|=x$

$x+3+x\ge 9,\quad 2x+3\ge 9$

$2x\ge 6\quad \therefore x\ge 3$

그런데 $x\ge 0$이므로 $\quad x\ge 3$

이상에서 주어진 부등식의 해는

$x\le -6$ 또는 $x\ge 3$

따라서 $a=-6,\ b=3$이므로

$b-a=9$ 답 ④

27 $|x-2|+5\le 4|x+1|$에서

(i) $x<-1$일 때,

$|x-2|=-(x-2),\ |x+1|=-(x+1)$

$-(x-2)+5\le -4(x+1)$

$-x+7\le -4x-4,\quad 3x\le -11$

$\therefore x\le -\frac{11}{3}$

그런데 $x<-1$이므로 $\quad x\le -\frac{11}{3}$

(ii) $-1\le x<2$일 때,

$|x-2|=-(x-2),\ |x+1|=x+1$

$-(x-2)+5\le 4(x+1)$

$-x+7\le 4x+4,\quad -5x\le -3$

$\therefore x\ge \frac{3}{5}$

그런데 $-1\le x<2$이므로 $\quad \frac{3}{5}\le x<2$

(iii) $x\ge 2$일 때,

$|x-2|=x-2,\ |x+1|=x+1$

$x-2+5\le 4(x+1)$

$x+3\le 4x+4,\quad -3x\le 1$

$\therefore x\ge -\frac{1}{3}$

그런데 $x\ge 2$이므로 $\quad x\ge 2$

이상에서 주어진 부등식의 해는

$x\le -\frac{11}{3}$ 또는 $x\ge \frac{3}{5}$

따라서 자연수 x의 최솟값은 1이다. 답 ①

28 $\sqrt{(x+2)^2}=|x+2|$이므로 주어진 부등식은

$|x-1|+|x+2|<2x+5$

(i) $x<-2$일 때,

$-(x-1)-(x+2)<2x+5$

$-2x-1<2x+5,\quad -4x<6$

$\therefore x>-\frac{3}{2}$

그런데 $x<-2$이므로 해는 없다.

(ii) $-2\le x<1$일 때,

$-(x-1)+x+2<2x+5$

$3<2x+5,\quad -2x<2$

$\therefore x>-1$

그런데 $-2\le x<1$이므로 $\quad -1<x<1$

(iii) $x\ge 1$일 때,

$x-1+x+2<2x+5$에서 $1<5$이므로 $x\ge 1$에서 주어진 부등식은 항상 성립한다.

이상에서 주어진 부등식의 해는

$x>-1$ 답 $x>-1$

Ⓦ 07 일차부등식

08 이차부등식

18 이차부등식

W 61쪽

01 ㄱ. $x(x+3)-x\le 2$에서 $\quad x^2+2x\le 2$

$\therefore\ x^2+2x-2\le 0$

ㄴ. $-4x^2-7<x(1-4x)$에서

$-4x^2-7<x-4x^2 \quad \therefore\ -x-7<0$

ㄷ. $3(2x^2+1)>5(x^2-2)+x^2$에서

$6x^2+3>6x^2-10 \quad \therefore\ 13>0$

ㄹ. $x^3-x^2+1\ge x(1-2x+x^2)$에서

$x^3-x^2+1\ge x-2x^2+x^3$

$\therefore\ x^2-x+1\ge 0$

이상에서 이차부등식은 ㄱ, ㄹ이다. 답 ㄱ, ㄹ

02 답 (1) $x<-6$ 또는 $x>-1$ (2) $-5\le x\le 1$

03 (1) $x^2-2x-8<0$에서 $\quad (x+2)(x-4)<0$

$\therefore\ -2<x<4$

(2) $-(x+3)^2\ge 0$에서 $\quad (x+3)^2\le 0$

그런데 $(x+3)^2\ge 0$이므로 주어진 부등식의 해는 $x=-3$이다.

(3) $x^2-14x+49=(x-7)^2\ge 0$

따라서 $x^2-14x+49>0$의 해는 $x\ne 7$인 모든 실수이다.

(4) $x^2+4x+7=(x+2)^2+3\ge 3$

따라서 $x^2+4x+7\le 0$의 해는 없다.

답 (1) $-2<x<4$ (2) $x=-3$ (3) $x\ne 7$인 모든 실수 (4) 해는 없다.

04 (1) $(x+2)(x-1)\le 0$에서 $\quad x^2+x-2\le 0$

(2) $(x-3)^2>0$에서 $\quad x^2-6x+9>0$

답 (1) $x^2+x-2\le 0$ (2) $x^2-6x+9>0$

05 (1) 모든 실수 x에 대하여 주어진 부등식이 성립하려면 이차함수 $y=x^2+4kx+k+3$의 그래프가 x축에 접하거나 x축보다 항상 위쪽에 있어야 하므로 이차방정식 $x^2+4kx+k+3=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(2k)^2-1\cdot(k+3)\le 0$

$4k^2-k-3\le 0, \quad (4k+3)(k-1)\le 0$

$\therefore\ -\frac{3}{4}\le k\le 1$

(2) 모든 실수 x에 대하여 주어진 부등식이 성립하려면 이차함수 $y=-x^2+2kx-k-6$의 그래프가 x축에 접하거나 x축보다 항상 아래쪽에 있어야 하므로 이차방정식 $-x^2+2kx-k-6=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=k^2-(-1)\cdot(-k-6)\le 0$

$k^2-k-6\le 0, \quad (k+2)(k-3)\le 0$

$\therefore\ -2\le k\le 3$

답 (1) $-\frac{3}{4}\le k\le 1$ (2) $-2\le k\le 3$

06 $px^2+(q-m)x+r-n\ge 0$에서

$px^2+qx+r-(mx+n)\ge 0$

$\therefore\ px^2+qx+r\ge mx+n$

부등식 $px^2+qx+r\ge mx+n$의 해는 이차함수 $y=px^2+qx+r$의 그래프가 직선 $y=mx+n$보다 위쪽에 있거나 만나는 부분의 x의 값의 범위이므로

$x\le a$ 또는 $x\ge c$ 답 $x\le a$ 또는 $x\ge c$

07 $f(x)g(x)<0$에서

$f(x)>0,\ g(x)<0$ 또는 $f(x)<0,\ g(x)>0$

(i) $f(x)>0,\ g(x)<0$을 만족시키는 x의 값의 범위는

$x<-3$ 또는 $x>2$

(ii) $f(x)<0,\ g(x)>0$을 만족시키는 x의 값의 범위는

$-1<x<1$

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는

$x<-3$ 또는 $-1<x<1$ 또는 $x>2$

답 $x<-3$ 또는 $-1<x<1$ 또는 $x>2$

Q BOX

$f(x)>0$에서

$x<-3$ 또는 $x>1$

$g(x)<0$에서

$x<-1$ 또는 $x>2$

$f(x)<0$에서

$-3<x<1$

$g(x)>0$에서

$-1<x<2$

08 $x^2+2x-35\le 0$에서 $\quad (x+7)(x-5)\le 0$

$\therefore\ -7\le x\le 5$ 답 ①

09 $(2x+5)(x-2)\le -4$에서

$2x^2+x-10\le -4, \quad 2x^2+x-6\le 0$

$(x+2)(2x-3)\le 0 \quad \therefore\ -2\le x\le \frac{3}{2}$

따라서 정수 x는 $-2,\ -1,\ 0,\ 1$의 4개이다. 답 4

10 해가 $-3<x<4$이고 x^2의 계수가 3인 이차부등식은

$3(x+3)(x-4)<0 \quad \therefore\ 3x^2-3x-36<0$

이 부등식이 $3x^2+ax+b<0$과 같으므로

$a=-3,\ b=-36$

$\therefore\ a-b=33$ 답 ②

11 $f(x)\ge 0$의 해가 $x\le -6$ 또는 $x\ge 2$이므로

$f(x)=a(x+6)(x-2)\ (a>0)$

라 하자.

이때 $f(-1)=-30$에서

$f(-1)=a\cdot 5\cdot(-3)=-30$

$-15a=-30 \quad \therefore\ a=2$

따라서 $f(x)=2(x+6)(x-2)$이므로

$f(1)=2\cdot 7\cdot(-1)=-14$ 답 -14

12 이차부등식 $ax^2+bx+c>0$의 해가 $2<x<3$이므로 $\quad a<0$

해가 $2<x<3$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x-2)(x-3)<0 \quad \therefore\ x^2-5x+6<0$

양변에 a를 곱하면

$ax^2-5ax+6a>0$

이 부등식이 $ax^2+bx+c>0$과 같으므로

$b=-5a,\ c=6a$

따라서 $cx^2+bx+a<0$, 즉 $6ax^2-5ax+a<0$에서

$6x^2-5x+1>0$ ($\because a<0$)

$(3x-1)(2x-1)>0$

$\therefore x<\frac{1}{3}$ 또는 $x>\frac{1}{2}$ 답 ④

13 $f(x)\le 0$의 해가 $1\le x\le 6$이므로

$f(x)=a(x-1)(x-6)\ (a>0)$

이라 하면

$f(3x)=a(3x-1)(3x-6)=3a(3x-1)(x-2)$

부등식 $f(3x)<0$, 즉 $3a(3x-1)(x-2)<0$에서

$(3x-1)(x-2)<0$ ($\because a>0$)

$\therefore \frac{1}{3}<x<2$ 답 $\frac{1}{3}<x<2$

14 $f(x)<0$의 해가 $x<-1$ 또는 $x>5$이므로

$f(x)=a(x+1)(x-5)\ (a<0)$

라 하면

$f(1-x)=a(2-x)(-x-4)=a(x+4)(x-2)$

부등식 $f(1-x)>0$, 즉 $a(x+4)(x-2)>0$에서

$(x+4)(x-2)<0$ ($\because a<0$)

$\therefore -4<x<2$

따라서 정수 x의 최댓값은 1이다. 답 ④

15 $f(x)=ax^2+bx+c$라 하면 $f(x)\ge 0$의 해가 $x\le -4$ 또는 $x\ge -2$이므로

$f(x)=a(x+4)(x+2)\ (a>0)$

한편 부등식 $a(x-3)^2+b(x-3)+c\le 0$에서

$f(x-3)\le 0$

즉 $a(x+1)(x-1)\le 0$에서

$(x+1)(x-1)\le 0$ ($\because a>0$)

$\therefore -1\le x\le 1$ 답 $-1\le x\le 1$

다른 풀이1 $f(x)=ax^2+bx+c$라 하면 $f(x)\ge 0$의 해가

$x\le -4$ 또는 $x\ge -2$

이므로 $f(x)\le 0$의 해는 $-4\le x\le -2$이다.

따라서 $a(x-3)^2+b(x-3)+c\le 0$, 즉 $f(x-3)\le 0$의 해는

$-4\le x-3\le -2$ $\quad\therefore -1\le x\le 1$

다른 풀이2 $f(x)=ax^2+bx+c$라 하면

$f(x)=a(x+4)(x+2)\ (a>0)$

$=ax^2+6ax+8a$

따라서 $b=6a,\ c=8a$이므로 이것을 $a(x-3)^2+b(x-3)+c\le 0$에 대입하면

$a(x-3)^2+6a(x-3)+8a\le 0$

$(x-3)^2+6(x-3)+8\le 0$ ($\because a>0$)

$x^2-1\le 0,\quad (x+1)(x-1)\le 0$

$\therefore -1\le x\le 1$

Q BOX

$a<0$이므로 부등호의 방향이 바뀐다.

$|x|=x$

$|x|=-x$

$|x+2|=x+2$

$|x+2|=-(x+2)$

$f(x)$에 x 대신 $x-3$을 대입한 것과 같다.

부등식의 각 변에 3을 더한다.

16 $x^2-3|x|-10<0$에서

(i) $x\ge 0$일 때,

$x^2-3x-10<0,\quad (x+2)(x-5)<0$

$\therefore -2<x<5$

그런데 $x\ge 0$이므로 $\quad 0\le x<5$

(ii) $x<0$일 때,

$x^2+3x-10<0,\quad (x+5)(x-2)<0$

$\therefore -5<x<2$

그런데 $x<0$이므로 $\quad -5<x<0$

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는

$-5<x<5$

따라서 $\alpha=-5,\ \beta=5$이므로

$\alpha\beta=-25$ 답 ③

17 $x^2+2x\le |x+2|$에서

(i) $x\ge -2$일 때,

$x^2+2x\le x+2,\quad x^2+x-2\le 0$

$(x+2)(x-1)\le 0\quad \therefore -2\le x\le 1$

그런데 $x\ge -2$이므로 $\quad -2\le x\le 1$

(ii) $x<-2$일 때,

$x^2+2x\le -(x+2),\quad x^2+3x+2\le 0$

$(x+2)(x+1)\le 0\quad \therefore -2\le x\le -1$

그런데 $x<-2$이므로 해는 없다.

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는

$-2\le x\le 1$

따라서 정수 x는 $-2,\ -1,\ 0,\ 1$이므로 구하는 합은

$(-2)+(-1)+0+1=-2$ 답 -2

18 이차부등식 $x^2-2x+2k\le 0$의 해가 오직 한 개 존재하므로 이차방정식 $x^2-2x+2k=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-1)^2-1\cdot 2k=0$

$1-2k=0\quad \therefore k=\frac{1}{2}$ 답 ③

19 이차부등식 $-x^2+ax-8\ge 0$의 해가 오직 한 개 존재하므로 이차방정식 $-x^2+ax-8=0$의 판별식을 D라 하면

$D=a^2-4\cdot(-1)\cdot(-8)=0$

$a^2-32=0,\quad a^2=32$

$\therefore a=-4\sqrt{2}$ 또는 $a=4\sqrt{2}$

따라서 모든 실수 a의 값의 곱은 -32이다. 답 ①

20 이차부등식 $(5-k)x^2+2(k-5)x-3\ge 0$의 해가 오직 한 개 존재하므로

$5-k<0\quad \therefore k>5$ ⋯⋯ ㉠

이차방정식 $(5-k)x^2+2(k-5)x-3=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(k-5)^2-(5-k)\cdot(-3)=0$

$k^2-13k+40=0,\quad (k-5)(k-8)=0$

$\therefore k=5$ 또는 $k=8$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $k=8$ 답 8

21 이차부등식 $-x^2+x+k>0$이 해를 가지려면 이차방정식 $-x^2+x+k=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=1^2-4\cdot(-1)\cdot k>0$

$1+4k>0,\quad 4k>-1$

$\therefore k>-\frac{1}{4}$ 답 $k>-\frac{1}{4}$

22 이차부등식 $3x^2+6x+a\le 0$이 해를 가지려면 이차방정식 $3x^2+6x+a=0$이 실근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=3^2-3\cdot a\ge 0,\quad 9-3a\ge 0$

$-3a\ge -9\quad \therefore a\le 3$

따라서 정수 a의 최댓값은 3이다. 답 ⑤

23 $(a-3)x^2-4x+a>0$에서

(i) $a>3$일 때,

이차함수 $y=(a-3)x^2-4x+a$의 그래프는 아래로 볼록하므로 주어진 이차부등식은 항상 해를 갖는다.

(ii) $a<3$일 때,

주어진 이차부등식이 해를 가지려면 이차방정식 $(a-3)x^2-4x+a=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-2)^2-(a-3)\cdot a>0$

$-a^2+3a+4>0,\quad a^2-3a-4<0$

$(a+1)(a-4)<0\quad \therefore -1<a<4$

그런데 $a<3$이므로 $-1<a<3$

(i), (ii)에서 a의 값의 범위는

$-1<a<3$ 또는 $a>3$

답 $-1<a<3$ 또는 $a>3$

24 모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $x^2+ax+4a>0$이 성립해야 하므로 이차방정식 $x^2+ax+4a=0$의 판별식을 D라 하면

$D=a^2-4\cdot 1\cdot 4a<0$

$a^2-16a<0,\quad a(a-16)<0$

$\therefore 0<a<16$ 답 $0<a<16$

25 실수 x의 값에 관계없이 이차부등식 $x^2-2(k+2)x+5k+16\ge 0$이 항상 성립해야 하므로 이차방정식 $x^2-2(k+2)x+5k+16=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\{-(k+2)\}^2-1\cdot(5k+16)\le 0$

$k^2-k-12\le 0,\quad (k+3)(k-4)\le 0$

$\therefore -3\le k\le 4$

따라서 정수 k는 $-3, -2, -1, \cdots, 4$의 8개이다.

답 ⑤

26 모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $kx^2+4kx-2<0$이 성립해야 하므로

$k<0$ …… ㉠

이차방정식 $kx^2+4kx-2=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(2k)^2-k\cdot(-2)<0$

$4k^2+2k<0,\quad 2k(2k+1)<0$

$\therefore -\frac{1}{2}<k<0$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $-\frac{1}{2}<k<0$

따라서 $\alpha=-\frac{1}{2}$, $\beta=0$이므로

$\beta-\alpha=\frac{1}{2}$ 답 ①

27 주어진 이차부등식이 해를 갖지 않으려면 이차부등식 $x^2+(k-6)x+2k>0$이 항상 성립해야 한다.

이차방정식 $x^2+(k-6)x+2k=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(k-6)^2-4\cdot 1\cdot 2k<0$

$k^2-20k+36<0,\quad (k-2)(k-18)<0$

$\therefore 2<k<18$

따라서 정수 k의 최댓값은 17, 최솟값은 3이므로 구하는 합은

$17+3=20$ 답 20

28 주어진 이차부등식이 해를 갖지 않으려면 이차부등식 $-2x^2+2(k-3)x+k-3\le 0$이 항상 성립해야 한다.

이차방정식 $-2x^2+2(k-3)x+k-3=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(k-3)^2-(-2)\cdot(k-3)\le 0$

$k^2-4k+3\le 0,\quad (k-1)(k-3)\le 0$

$\therefore 1\le k\le 3$

따라서 $\alpha=1$, $\beta=3$이므로

$\alpha^2+\beta^2=1^2+3^2=10$ 답 10

29 주어진 이차부등식이 해를 갖지 않으려면 이차부등식 $(a+1)x^2-4(a+1)x-5\le 0$이 항상 성립해야 하므로

$a+1<0\quad \therefore a<-1$ …… ㉠

이차방정식 $(a+1)x^2-4(a+1)x-5=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\{-2(a+1)\}^2-(a+1)\cdot(-5)\le 0$

Q BOX

$y=kx^2+4kx-2$의 그래프가 위로 볼록하고, x축과 만나지 않는다.

$y=x^2+(k-6)x+2k$의 그래프가 아래로 볼록하고, x축과 만나지 않는다.

$a=3$이면 주어진 부등식이 이차부등식이 아니므로 $a\ne 3$이다.

$y=-2x^2+2(k-3)x+k-3$의 그래프가 위로 볼록하고, x축에 접하거나 x축과 만나지 않는다.

$y=x^2+ax+4a$의 그래프가 아래로 볼록하고, x축과 만나지 않는다.

$y=(a+1)x^2-4(a+1)x-5$의 그래프가 위로 볼록하고, x축에 접하거나 x축과 만나지 않는다.

$y=x^2-2(k+2)x+5k+16$의 그래프가 아래로 볼록하고, x축에 접하거나 x축과 만나지 않는다.

$4a^2+13a+9\le0$, $\quad (4a+9)(a+1)\le0$

$\therefore -\frac{9}{4}\le a\le -1$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

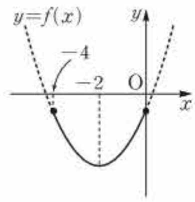
㉠, ㉡에서 $\quad -\frac{9}{4}\le a<-1$

따라서 정수 a는 -2이다. 답 -2

30 $f(x)=2x^2+8x+k^2-9k+8$이라 하면

$f(x)=2(x+2)^2+k^2-9k$

$-4\le x\le0$에서 $f(x)<0$이어야 하므로 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 한다.



$-4\le x\le0$에서 $f(x)$는 $x=-4$ 또는 $x=0$일 때 최대이므로

$f(0)<0$에서

$f(-4)<0$임을 이용할 수도 있다.

$k^2-9k+8<0$, $\quad (k-1)(k-8)<0$

$\therefore 1<k<8$ 답 $1<k<8$

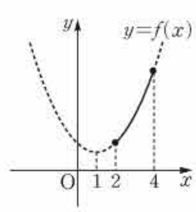
31 $x^2+x-3>3x-2a^2+a$에서

$x^2-2x+2a^2-a-3>0$

$f(x)=x^2-2x+2a^2-a-3$이라 하면

$f(x)=(x-1)^2+2a^2-a-4$

$2\le x\le4$에서 $f(x)>0$이어야 하므로 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 한다.



$2\le x\le4$에서 $f(x)$는 $x=2$일 때 최소이므로 $f(2)>0$에서

$2a^2-a-3>0$

$(a+1)(2a-3)>0$

$\therefore a<-1$ 또는 $a>\frac{3}{2}$

따라서 자연수 a의 최솟값은 2이다. 답 ②

32 $y=x^2+5x+1$의 그래프가 직선 $y=4x+7$보다 아래쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위는 부등식 $x^2+5x+1<4x+7$의 해와 같으므로

$x^2+x-6<0$, $\quad (x+3)(x-2)<0$

$\therefore -3<x<2$

따라서 이 범위에 속하는 x의 값이 아닌 것은 ①이다.

답 ①

33 $y=3x^2-8x+8$의 그래프가 $y=-x^2+6x+2$의 그래프보다 위쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위는 부등식 $3x^2-8x+8>-x^2+6x+2$의 해와 같으므로

$4x^2-14x+6>0$, $\quad 2(2x-1)(x-3)>0$

$\therefore x<\frac{1}{2}$ 또는 $x>3$

따라서 $\alpha=\frac{1}{2}$, $\beta=3$이므로

$\alpha+\beta=\frac{7}{2}$ 답 ③

34 $y=x^2+ax+b$의 그래프가 $y=2x^2+x+1$의 그래프보다 위쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위는 부등식

$x^2+ax+b>2x^2+x+1$,

즉 $x^2+(1-a)x+1-b<0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

의 해와 같으므로 ㉠의 해가 $1<x<4$이다.

이때 해가 $1<x<4$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x-1)(x-4)<0$ $\quad \therefore x^2-5x+4<0$

이 부등식과 ㉠이 일치하므로

$1-a=-5$, $1-b=4$

따라서 $a=6$, $b=-3$이므로

$ab=-18$ 답 -18

35 $y=x^2-5x+7$의 그래프가 직선 $y=kx+6$보다 항상 위쪽에 있으려면 모든 실수 x에 대하여

$x^2-5x+7>kx+6$, 즉 $x^2-(k+5)x+1>0$

이 성립해야 한다.

이차방정식 $x^2-(k+5)x+1=0$의 판별식을 D라 하면

$D=\{-(k+5)\}^2-4\cdot1\cdot1<0$

$k^2+10k+21<0$, $\quad (k+7)(k+3)<0$

$\therefore -7<k<-3$ 답 $-7<k<-3$

36 $y=-4x^2+3x+4$의 그래프가 직선 $y=ax+5$보다 항상 아래쪽에 있으려면 모든 실수 x에 대하여

$-4x^2+3x+4<ax+5$,

즉 $4x^2+(a-3)x+1>0$

이 성립해야 한다.

이차방정식 $4x^2+(a-3)x+1=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(a-3)^2-4\cdot4\cdot1<0$

$a^2-6a-7<0$, $\quad (a+1)(a-7)<0$

$\therefore -1<a<7$

따라서 정수 a는 0, 1, 2, $\cdots$, 6의 7개이다. 답 ③

37 $y=x^2+kx$의 그래프가 직선 $y=-1$과 만나지 않으므로 이차방정식 $x^2+kx=-1$, 즉 $x^2+kx+1=0$의 판별식을 D라 하면

$y=x^2+kx$의 그래프가 아래로 볼록하므로 $y=x^2+kx$의 그래프는 직선 $y=-1$보다 항상 위쪽에 있어야 한다.

$D=k^2-4\cdot1\cdot1<0$

$k^2-4<0$, $\quad (k+2)(k-2)<0$

$\therefore -2<k<2$

따라서 정수 k는 -1, 0, 1이므로 구하는 합은

$(-1)+0+1=0$ 답 ③

38 하루 판매액이 390만 원 이상이 되려면

$(8+x)(45-3x)\ge390$

줄어든 판매량

인상된 가격

$-3x^2+21x+360\ge390$

$x^2-7x+10\le0$, $\quad (x-2)(x-5)\le0$

$\therefore 2\le x\le5$

$2\le x\le5$에서 $10\le8+x\le13$

따라서 바지 한 벌의 가격을 10만 원 이상 13만 원 이하로 정해야 한다. 답 10만 원 이상 13만 원 이하

W 08 이차부등식

39 야구공의 높이가 2.4 m 이상이려면

$-5t^2+6t+0.8\geq 2.4$, $\quad 5t^2-6t+1.6\leq 0$

$25t^2-30t+8\leq 0$, $\quad (5t-2)(5t-4)\leq 0$

$\therefore \dfrac{2}{5}\leq t\leq \dfrac{4}{5}$

따라서 야구공의 높이가 2.4 m 이상인 시간은 $\dfrac{2}{5}$초 동안이다. 답 $\dfrac{2}{5}$초

$\dfrac{2}{5}$초 이상 $\dfrac{4}{5}$초 이하이므로

$\dfrac{4}{5}-\dfrac{2}{5}=\dfrac{2}{5}$(초)

40 길의 폭을 x m라 할 때, 꽃을 심은 부분의 넓이가 16 m^2 이상이 되려면

$(5-x)^2\geq 16$, $\quad x^2-10x+9\geq 0$

$(x-1)(x-9)\geq 0$ $\quad \therefore x\leq 1$ 또는 $x\geq 9$

그런데 $0<x<5$이어야 하므로

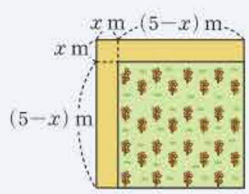
$0<x\leq 1$

따라서 길의 폭은 최대 1 m이다. 답 ④

x와 $5-x$가 모두 길이를 나타내므로 양수이어야 한다.

쌤 한마디

오른쪽 그림과 같이 길의 위치를 옮겨서 생각하면 꽃을 심은 부분의 넓이를 쉽게 이해할 수 있다.



19 연립이차부등식

W 67쪽

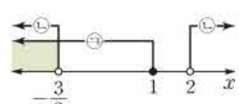
01 (1) $3x+5\leq x+7$에서 $\quad 2x\leq 2$

$\therefore x\leq 1$ ...... ㉠

$2x^2-x-6>0$에서 $\quad (2x+3)(x-2)>0$

$\therefore x<-\dfrac{3}{2}$ 또는 $x>2$ ...... ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면



$x<-\dfrac{3}{2}$

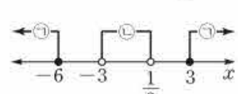
(2) $x^2+3x-18\geq 0$에서 $\quad (x+6)(x-3)\geq 0$

$\therefore x\leq -6$ 또는 $x\geq 3$ ...... ㉠

$3x^2+8x-3<0$에서 $\quad (x+3)(3x-1)<0$

$\therefore -3<x<\dfrac{1}{3}$ ...... ㉡

㉠, ㉡의 공통부분이 없으므로 연립부등식의 해는 없다.



답 (1) $x<-\dfrac{3}{2}$ (2) 해는 없다.

02 (1) $0\leq x^2-2x$에서 $\quad x(x-2)\geq 0$

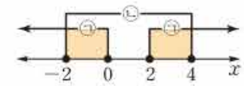
$\therefore x\leq 0$ 또는 $x\geq 2$ ...... ㉠

$x^2-2x\leq 8$에서 $\quad x^2-2x-8\leq 0$

$(x+2)(x-4)\leq 0$

$\therefore -2\leq x\leq 4$ ...... ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면



$-2\leq x\leq 0$ 또는 $2\leq x\leq 4$

(2) $5-x<x^2+4x-1$에서 $\quad x^2+5x-6>0$

$(x+6)(x-1)>0$

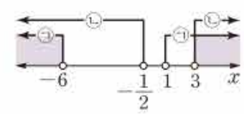
$\therefore x<-6$ 또는 $x>1$ ...... ㉠

$x^2+4x-1<3x^2-x-4$에서 $\quad 2x^2-5x-3>0$

$(2x+1)(x-3)>0$

$\therefore x<-\dfrac{1}{2}$ 또는 $x>3$ ...... ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면



$x<-6$ 또는 $x>3$

답 (1) $-2\leq x\leq 0$ 또는 $2\leq x\leq 4$

(2) $x<-6$ 또는 $x>3$

03 $x^2-8x<-15$에서 $\quad x^2-8x+15<0$

$(x-3)(x-5)<0$

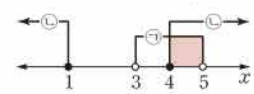
$\therefore 3<x<5$ ...... ㉠

$-x^2+5x\leq 4$에서 $\quad x^2-5x+4\geq 0$

$(x-1)(x-4)\geq 0$

$\therefore x\leq 1$ 또는 $x\geq 4$ ...... ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면



$4\leq x<5$

따라서 정수 x의 값은 4이다. 답 4

04 $4x^2+9\leq 3x^2-7x-1$에서 $\quad x^2+7x+10\leq 0$

$(x+5)(x+2)\leq 0$

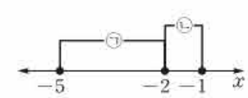
$\therefore -5\leq x\leq -2$ ...... ㉠

$3x^2-7x-1\leq 2x^2-10x-3$에서 $\quad x^2+3x+2\leq 0$

$(x+2)(x+1)\leq 0$

$\therefore -2\leq x\leq -1$ ...... ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면



$x=-2$

답 -2

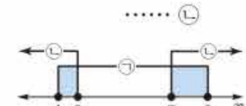
05 $|x-5|\leq 4$에서 $\quad -4\leq x-5\leq 4$

$\therefore 1\leq x\leq 9$ ...... ㉠

$x^2-9x+14\geq 0$에서 $\quad (x-2)(x-7)\geq 0$

$\therefore x\leq 2$ 또는 $x\geq 7$ ...... ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면



$1\leq x\leq 2$ 또는 $7\leq x\leq 9$

따라서 정수 x는 1, 2, 7, 8, 9의 5개이다. 답 ④

$c>0$일 때

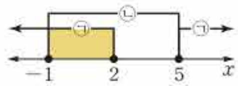
① $|f(x)|\leq c$이면 $-c\leq f(x)\leq c$

② $|f(x)|\geq c$이면 $f(x)\leq -c$ 또는 $f(x)\geq c$

06 연립부등식

$\begin{cases} x^2+ax+b\geq 0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+cx+d\leq 0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

의 해를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



즉 $x^2+ax+b\geq 0$의 해는 $x\leq 2$ 또는 $x\geq 5$이므로

$(x-2)(x-5)\geq 0,\quad x^2-7x+10\geq 0$

$\therefore a=-7,\ b=10$

또 $x^2+cx+d\leq 0$의 해는 $-1\leq x\leq 5$이므로

$(x+1)(x-5)\leq 0,\quad x^2-4x-5\leq 0$

$\therefore c=-4,\ d=-5$

$\therefore a+b+c+d=-6$ 답 ①

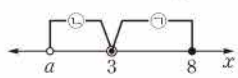
07 $x^2-11x+24\leq 0$에서 $\quad(x-3)(x-8)\leq 0$

$\therefore 3\leq x\leq 8$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$x^2-(a+3)x+3a<0$에서

$(x-3)(x-a)<0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분이 없으려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$a\leq 3$ 답 $a\leq 3$

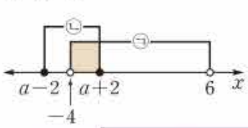
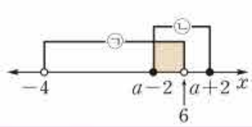
08 $x^2-2x-24<0$에서 $\quad(x+4)(x-6)<0$

$\therefore -4<x<6$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$|x-a|\leq 2$에서 $\quad -2\leq x-a\leq 2$

$\therefore a-2\leq x\leq a+2$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분이 존재하는 경우는 다음의 두 가지가 있다.

즉 $-4<a+2\leq 6$ 또는 $-4\leq a-2<6$이므로

$-6<a\leq 4$ 또는 $-2\leq a<8$

$\therefore -6<a<8$

따라서 정수 a의 최솟값은 -5이다. 답 ②

$a+2=-4$이면 ㉡의 해는 $-8\leq x\leq -4$이므로 연립부등식의 해는 없다.

$a-2=6$이면 ㉡의 해는 $6\leq x\leq 10$이므로 연립부등식의 해는 없다.

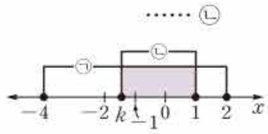
09 $x^2+2x-8\leq 0$에서 $\quad(x+4)(x-2)\leq 0$

$\therefore -4\leq x\leq 2$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$x^2-(k+1)x+k\leq 0$에서

$(x-k)(x-1)\leq 0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 정수 x의 개수가 3이려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$-2<k\leq -1$ 답 $-2<k\leq -1$

10 $x^2-7x+12>0$에서 $\quad(x-3)(x-4)>0$

$\therefore x<3$ 또는 $x>4$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

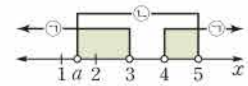
$x^2-(a+5)x+5a<0$에서

$(x-a)(x-5)<0$

(i) $a<5$일 때,

$(x-a)(x-5)<0$에서 $\quad a<x<5$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 정수 x가 한 개뿐이려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로

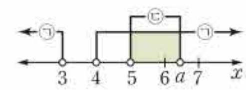


$1\leq a<2$

(ii) $a>5$일 때,

$(x-a)(x-5)<0$에서 $\quad 5<x<a$ $\quad\cdots\cdots$ ㉢

㉠, ㉢을 동시에 만족시키는 정수 x가 한 개뿐이려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$6<a\leq 7$

(i), (ii)에서 $\quad 1\leq a<2$ 또는 $6<a\leq 7$

답 $1\leq a<2$ 또는 $6<a\leq 7$

참고 $a=5$이면 $(x-a)(x-5)<0$에서 $(x-5)^2<0$이므로 해가 없다.

$\therefore a\neq 5$

11 $x-2,\ x,\ x+2$는 변의 길이이므로

$x>2$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

세 변 중 가장 긴 변의 길이는 $x+2$이므로

$x+2<(x-2)+x\quad \therefore x>4$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

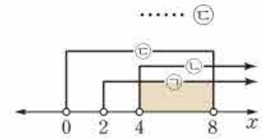
둔각삼각형이 되려면

$(x+2)^2>(x-2)^2+x^2$

$x^2-8x<0,\quad x(x-8)<0$

$\therefore 0<x<8$ $\quad\cdots\cdots$ ㉢

㉠, ㉡, ㉢의 공통부분을 구하면



$4<x<8$

따라서 자연수 x의 최댓값은 7이다. 답 ②

12 직사각형의 세로의 길이를 x라 하면 둘레의 길이가 24이므로 가로의 길이는

$\frac{1}{2}(24-2x)=12-x$

2{(가로의 길이)$+x$}$=24$이므로

2·(가로의 길이)$=24-2x$

∴ (가로의 길이)$=\frac{1}{2}(24-2x)$

$x>0,\ 12-x>0$이므로

$0<x<12$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$x>2(12-x)$이므로 $\quad 3x>24$

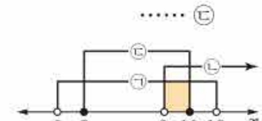
$\therefore x>8$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

또 $x(12-x)\geq 20$이므로 $\quad x^2-12x+20\leq 0$

$(x-2)(x-10)\leq 0$

$\therefore 2\leq x\leq 10$ $\quad\cdots\cdots$ ㉢

㉠, ㉡, ㉢의 공통부분을 구하면



$8<x\leq 10$

따라서 세로의 길이의 최댓값은 10이다. 답 10

13 한 달 판매량이 120개 이상이려면

$150-x\geq 120\quad \therefore x\leq 30$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

한 달 판매액이 520000원 이상이 되려면

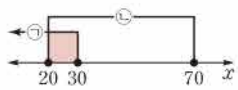
$(3000+50x)(150-x) \ge 520000$

$x^2-90x+1400 \le 0$, $\quad (x-20)(x-70) \le 0$

$\therefore 20 \le x \le 70$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$20 \le x \le 30$



따라서 망고 한 개의 가격을 4000원 이상 4500원 이하로 정해야 한다.

답 4000원 이상 4500원 이하

> QBOX
> 줄어든 판매량
> 인상된 가격
> $20 \le x \le 30$에서
> $1000 \le 50x \le 1500$
> $\therefore 4000 \le 3000+50x \le 4500$

20 이차방정식의 실근의 부호

W 69쪽

01 이차방정식 $x^2-2x+k+5=0$의 판별식을 D, 두 근을 α, β라 하면

(i) $\frac{D}{4}=(-1)^2-1\cdot(k+5) \ge 0$

$-k-4 \ge 0 \quad \therefore k \le -4$

(ii) $\alpha+\beta=2>0$

(iii) $\alpha\beta=k+5>0 \quad \therefore k>-5$

이상에서 공통부분을 구하면

$-5<k \le -4$

답 $-5<k \le -4$

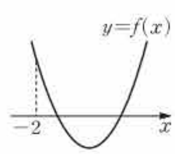
02 이차방정식 $x^2+kx+2k-3=0$의 두 근을 α, β라 하면 $\alpha\beta<0$이어야 하므로

$2k-3<0$, $\quad 2k<3$

$\therefore k<\frac{3}{2}$

답 $k<\frac{3}{2}$

03 $f(x)=x^2-8x+2k+2$라 하면 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이 모두 -2보다 크므로 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



(i) 이차방정식 $f(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-4)^2-1\cdot(2k+2) \ge 0$

$-2k+14 \ge 0$, $\quad 2k \le 14$

$\therefore k \le 7$

(ii) $f(-2)=4+16+2k+2>0$, $\quad 2k>-22$

$\therefore k>-11$

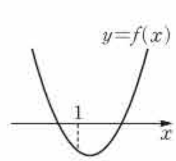
(iii) 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식은 $x=4$이고 $4>-2$이다.

이상에서 공통부분을 구하면

$-11<k \le 7$

답 $-11<k \le 7$

04 $f(x)=x^2+(k^2+1)x-4k-7$이라 하면 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근 사이에 1이 있으므로 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



따라서 $f(1)<0$이어야 하므로

$1+(k^2+1)-4k-7<0$

$k^2-4k-5<0$, $\quad (k+1)(k-5)<0$

$\therefore -1<k<5$

답 $-1<k<5$

05 이차방정식 $x^2+2ax+5a=0$이 서로 다른 두 실근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=a^2-1\cdot 5a>0$, $\quad a(a-5)>0$

$\therefore a<0$ 또는 $a>5$

따라서 실수 a의 값이 아닌 것은 ③이다.

답 ③

06 이차방정식 $x^2-4kx+16=0$이 허근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D_1이라 하면

$\frac{D_1}{4}=(-2k)^2-1\cdot 16<0$

$4k^2-16<0$, $\quad 4(k+2)(k-2)<0$

$\therefore -2<k<2$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

이차방정식 $x^2+2kx+4-3k=0$이 실근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D_2라 하면

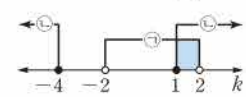
$\frac{D_2}{4}=k^2-1\cdot(4-3k) \ge 0$

$k^2+3k-4 \ge 0$, $\quad (k+4)(k-1) \ge 0$

$\therefore k \le -4$ 또는 $k \ge 1$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$1 \le k<2$



따라서 $\alpha=1$, $\beta=2$이므로

$\alpha+\beta=3$

답 3

07 이차방정식 $x^2+2(k+1)x-2k^2+ak-2=0$이 실근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D_1이라 하면

$\frac{D_1}{4}=(k+1)^2-1\cdot(-2k^2+ak-2) \ge 0$

$\therefore 3k^2+(2-a)k+3 \ge 0$

이 이차부등식이 k의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므로 k에 대한 이차방정식 $3k^2+(2-a)k+3=0$의 판별식을 D_2라 하면

$D_2=(2-a)^2-4\cdot 3\cdot 3 \le 0$

$a^2-4a-32 \le 0$, $\quad (a+4)(a-8) \le 0$

$\therefore -4 \le a \le 8$

따라서 정수 a는 -4, -3, -2, $\cdots$, 8의 13개이다.

답 ⑤

> 이차방정식의 근의 부호는 실근인 경우에만 생각할 수 있다.

08 이차방정식 $3x^2+2(3k+1)x+k+1=0$의 판별식을 D, 두 근을 α, β라 하면 두 근이 모두 양수이므로

(i) $\frac{D}{4}=(3k+1)^2-3(k+1) \ge 0$

$9k^2+3k-2 \ge 0$, $\quad (3k+2)(3k-1) \ge 0$

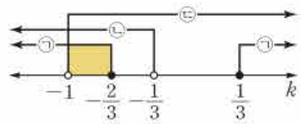
$\therefore k \le -\frac{2}{3}$ 또는 $k \ge \frac{1}{3}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

(ii) $\alpha+\beta=-\frac{2(3k+1)}{3}>0$, $\quad 3k+1<0$

$3k<-1 \quad \therefore k<-\frac{1}{3}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

(iii) $\alpha\beta=\dfrac{k+1}{3}>0,\qquad k+1>0$

$\therefore k>-1$ ...... ㉢



이상에서 공통부분을 구하면

$-1<k\le-\dfrac{2}{3}$ 답 $-1<k\le-\dfrac{2}{3}$

09 이차방정식 $x^2-2(m-2)x+m^2+3m-4=0$의 판별식을 D, 두 근을 α, β라 하면 두 근이 모두 음수이므로

(i) $\dfrac{D}{4}=\{-(m-2)\}^2-1\cdot(m^2+3m-4)\ge0$

$-7m+8\ge0,\qquad -7m\ge-8$

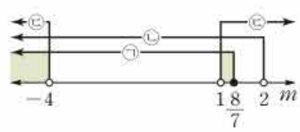
$\therefore m\le\dfrac{8}{7}$ ...... ㉠

(ii) $\alpha+\beta=2(m-2)<0,\qquad m-2<0$

$\therefore m<2$ ...... ㉡

(iii) $\alpha\beta=m^2+3m-4>0,\qquad (m+4)(m-1)>0$

$\therefore m<-4$ 또는 $m>1$ ...... ㉢



이상에서 공통부분을 구하면

$m<-4$ 또는 $1<m\le\dfrac{8}{7}$

따라서 실수 m의 최댓값은 $\dfrac{8}{7}$이다. 답 ④

10 이차방정식 $x^2-(k+1)(k-3)x-k+3=0$의 두 근을 α, β라 하면 두 근의 부호가 서로 다르므로

$\alpha\beta=-k+3<0\qquad\therefore k>3$ ...... ㉠

또 양의 근이 음의 근의 절댓값보다 크므로

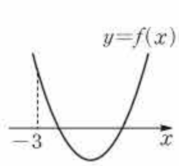
$\alpha+\beta=(k+1)(k-3)>0$

$\therefore k<-1$ 또는 $k>3$ ...... ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$k>3\qquad\therefore a=3$ 답 ⑤

11 $f(x)=x^2-(k+1)x+k+4$라 하면 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이 모두 -3보다 크므로 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



(i) 이차방정식 $f(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$D=\{-(k+1)\}^2-4\cdot1\cdot(k+4)\ge0$

$k^2-2k-15\ge0,\qquad (k+3)(k-5)\ge0$

$\therefore k\le-3$ 또는 $k\ge5$ ...... ㉠

(ii) $f(-3)=9+3(k+1)+k+4>0$

$4k+16>0,\qquad 4k>-16$

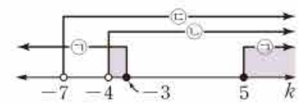
$\therefore k>-4$ ...... ㉡

(iii) 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식이

$x=\dfrac{k+1}{2}$이므로

$\dfrac{k+1}{2}>-3,\qquad k+1>-6$

$\therefore k>-7$ ...... ㉢

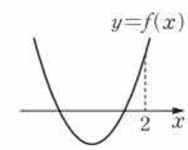


이상에서 공통부분을 구하면

$-4<k\le-3$ 또는 $k\ge5$

따라서 음의 정수 k는 -3의 1개이다. 답 ①

12 $f(x)=x^2+(2m-1)x+4$라 하면 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이 모두 2보다 작으므로 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



(i) 이차방정식 $f(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(2m-1)^2-4\cdot1\cdot4\ge0$

$4m^2-4m-15\ge0,\qquad (2m+3)(2m-5)\ge0$

$\therefore m\le-\dfrac{3}{2}$ 또는 $m\ge\dfrac{5}{2}$ ...... ㉠

(ii) $f(2)=4+2(2m-1)+4>0$

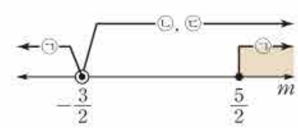
$4m>-6\qquad\therefore m>-\dfrac{3}{2}$ ...... ㉡

(iii) 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식이

$x=-\dfrac{2m-1}{2}$이므로

$-\dfrac{2m-1}{2}<2,\qquad 2m-1>-4$

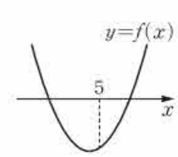
$2m>-3\qquad\therefore m>-\dfrac{3}{2}$ ...... ㉢



이상에서 공통부분을 구하면

$m\ge\dfrac{5}{2}$ 답 ④

13 $f(x)=x^2+(a-3)x+a^2-6$이라 하면 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근 사이에 5가 있으므로 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



즉 $f(5)<0$이어야 하므로

$25+5(a-3)+a^2-6<0$

$a^2+5a+4<0,\qquad (a+4)(a+1)<0$

$\therefore -4<a<-1$

따라서 정수 a의 최솟값은 -3이다. 답 -3

Q BOX

이차함수 $f(x)=ax^2+bx+c$의 그래프의 축의 방정식은 $x=-\dfrac{b}{2a}$이다.

정수 a는 -3, -2이다.

08 이차부등식

09 평면좌표

21 두 점 사이의 거리

W 71쪽

01 (1) $\overline{AB}=|-3-(-5)|=2$

(2) $\overline{OA}=|11|=11$

답 (1) 2 (2) 11

02 $\overline{AB}=|a-2|$이므로 $\overline{AB}=6$에서

$|a-2|=6$

$a-2=-6$ 또는 $a-2=6$

$\therefore a=-4$ 또는 $a=8$

따라서 구하는 합은

$-4+8=4$

답 4

03 (1) $\overline{AB}=\sqrt{\{-7-(-3)\}^2+(-2-1)^2}=5$

(2) $\overline{AB}=\sqrt{(-1-5)^2+(8-0)^2}=10$

(3) $\overline{OA}=\sqrt{4^2+(-2\sqrt{2})^2}=2\sqrt{6}$

답 (1) 5 (2) 10 (3) $2\sqrt{6}$

04 $\overline{AB}=|x+2|$, $\overline{AC}=|6+2|=8$이므로

$\overline{AB}-\overline{AC}=9$에서

$|x+2|-8=9$, $\quad |x+2|=17$

$x+2=-17$ 또는 $x+2=17$

$\therefore x=-19$ 또는 $x=15$

답 -19, 15

05 $\overline{AC}=|x+1|$, $\overline{BC}=|x-5|$이므로 $2\overline{AC}=\overline{BC}$에서 $\quad 2|x+1|=|x-5|$

양변을 제곱하면

$4(x^2+2x+1)=x^2-10x+25$

$x^2+6x-7=0$, $\quad (x+7)(x-1)=0$

$\therefore x=-7$ 또는 $x=1$

따라서 구하는 곱은

$-7\cdot 1=-7$

답 -7

06 $\overline{AB}=\overline{BC}$에서 $\overline{AB}^2=\overline{BC}^2$이므로

$2^2+(-3-1)^2=a^2+(-1+3)^2$

$a^2=16 \quad \therefore a=4\ (\because a>0)$

답 ②

07 $\overline{AB}=5\sqrt{5}$에서 $\overline{AB}^2=125$이므로

$(2b-2a)^2+(a-b)^2=125$

$4(a-b)^2+(a-b)^2=125$, $\quad (a-b)^2=25$

이때 $a>b$에서 $a-b>0$이므로

$a-b=5$

답 5

08 $\overline{AB}=\sqrt{(6-a)^2+(a+4)^2}$

$=\sqrt{2a^2-4a+52}$

$=\sqrt{2(a-1)^2+50}$

따라서 구하는 a의 값은 1이다.

답 ③

Q BOX

$(a-1)^2\ge 0$이므로
$2(a-1)^2+50\ge 50$
따라서 $\overline{AB}$의 길이의 최솟값은 $\sqrt{50}$, 즉 $5\sqrt{2}$이다.

09 직선 OP를 x축, 직선 OQ를 y축으로 하는 좌표평면을 잡으면 t분 후의 서연이와 동우의 위치는 각각

$(50-10t,\ 0)$, $(0,\ 20t)$

서연이와 동우 사이의 거리는

$\sqrt{(-50+10t)^2+(20t)^2}$

$=\sqrt{500t^2-1000t+2500}$

$=\sqrt{500(t-1)^2+2000}$ (m)

따라서 서연이와 동우 사이의 거리는 1분 후에 최소가 되고, 그때의 거리는 $\quad \sqrt{2000}=20\sqrt{5}$ (m)

답 $20\sqrt{5}$ m

10 구하는 점을 P$(0,\ a)$라 하면 $\overline{AP}=\overline{BP}$에서

$\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로

$6^2+(a-5)^2=(-3)^2+(a-8)^2$

$a^2-10a+61=a^2-16a+73$, $\quad 6a=12$

$\therefore a=2$

따라서 구하는 점의 좌표는 $(0,\ 2)$이다.

답 $(0,\ 2)$

11 점 P$(a,\ 0)$이라 하면 $\overline{AP}=\overline{BP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로

$(a+2)^2+(-6)^2=(a-1)^2+(-3)^2$

$a^2+4a+40=a^2-2a+10$

$6a=-30 \quad \therefore a=-5$

$\therefore$ P$(-5,\ 0)$

또 Q$(0,\ b)$라 하면 $\overline{AQ}=\overline{BQ}$에서 $\overline{AQ}^2=\overline{BQ}^2$이므로

$2^2+(b-6)^2=(-1)^2+(b-3)^2$

$b^2-12b+40=b^2-6b+10$

$-6b=-30 \quad \therefore b=5$

$\therefore$ Q$(0,\ 5)$

$\therefore \overline{PQ}=\sqrt{5^2+5^2}=5\sqrt{2}$

답 $5\sqrt{2}$

12 점 P$(a,\ b)$가 직선 $y=x-1$ 위의 점이므로

$b=a-1$ ⋯⋯ ㉠

또 $\overline{AP}=\overline{BP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로

$(a+1)^2+(b-2)^2=(a-3)^2+(b-6)^2$

$a^2+2a+b^2-4b+5=a^2-6a+b^2-12b+45$

$\therefore a+b=5$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad a=3,\ b=2$

$\therefore ab=6$

답 ②

㉠을 ㉡에 대입하면
$a+a-1=5$
$2a=6 \quad \therefore a=3$
$a=3$을 ㉠에 대입하면
$b=2$

13 $\overline{PA}=\overline{PB}=\overline{PC}$이므로

$\overline{PA}^2=\overline{PB}^2=\overline{PC}^2$

$\overline{PA}^2=\overline{PB}^2$에서

$(a-2)^2+(b-2)^2=(a+2)^2+(b-4)^2$

$a^2-4a+b^2-4b+8=a^2+4a+b^2-8b+20$

$\therefore 2a-b=-3$ ······ ㉠

$\overline{PA}^2=\overline{PC}^2$에서

$(a-2)^2+(b-2)^2=(a+5)^2+(b-3)^2$

$a^2-4a+b^2-4b+8=a^2+10a+b^2-6b+34$

$\therefore 7a-b=-13$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-2$, $b=-1$

$\therefore a+b=-3$ 답 ①

14 $\overline{AB}=\sqrt{(4+1)^2+(-3-2)^2}=5\sqrt{2}$,

$\overline{BC}=\sqrt{(3-4)^2+(4+3)^2}=5\sqrt{2}$,

$\overline{CA}=\sqrt{(-1-3)^2+(2-4)^2}=2\sqrt{5}$

$\therefore \overline{AB}=\overline{BC}$

따라서 $\triangle ABC$는 $\overline{AB}=\overline{BC}$인 이등변삼각형이다.

답 ②

15 $\overline{AB}=\sqrt{(3+1)^2}=4$,

$\overline{BC}=\sqrt{(1-3)^2+(2\sqrt{3})^2}=4$,

$\overline{CA}=\sqrt{(-1-1)^2+(-2\sqrt{3})^2}=4$

따라서 $\triangle ABC$는 정삼각형이므로 한 변의 길이가 4인 정삼각형의 넓이는

$\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 4^2=4\sqrt{3}$

답 $4\sqrt{3}$

16 $\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2$이어야 하므로

$(1+2)^2+5^2$

$=\{(2+2)^2+a^2\}+\{(1-2)^2+(5-a)^2\}$

$a^2-5a+4=0$, $(a-1)(a-4)=0$

$\therefore a=1$ 또는 $a=4$

따라서 구하는 합은 $1+4=5$

답 ⑤

17 $\overline{AP}+\overline{PB}\ge\overline{AB}$

$=\sqrt{(2a-a-2)^2+(3-a+5)^2}$

$=\sqrt{2a^2-20a+68}$

$=\sqrt{2(a-5)^2+18}$

따라서 구하는 a의 값은 5이다.

답 5

18 $\sqrt{(a-1)^2+(b+4)^2}=\overline{AB}$,

$\sqrt{(a-6)^2+(b-8)^2}=\overline{BC}$이므로

$\sqrt{(a-1)^2+(b+4)^2}+\sqrt{(a-6)^2+(b-8)^2}$

$=\overline{AB}+\overline{BC}$

$\ge\overline{AC}$

$=\sqrt{(6-1)^2+(8+4)^2}$

$=13$

따라서 주어진 식의 최솟값은 13이다. 답 ④

Q BOX

점 P의 x좌표를 a라 하면 점 P가 직선 $y=x+1$ 위의 점이므로 y좌표는 $a+1$이다.

㉡−㉠을 하면

$5a=-10$

$\therefore a=-2$

$a=-2$를 ㉠에 대입하면 $-4-b=-3$

$\therefore b=-1$

한 변의 길이가 a인 정삼각형의 넓이는

$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

$(a-5)^2\ge0$이므로

$2(a-5)^2+18\ge18$

따라서 $\overline{AP}+\overline{PB}$의 길이의 최솟값은 $\sqrt{18}$, 즉 $3\sqrt{2}$이다.

쌤 한마디

실수 a, b, x, y에 대하여 $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$의 값은 두 점 (x, y), (a, b) 사이의 거리와 같다.

19 $P(a, a+1)$이라 하면

$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$

$=\{(a+1)^2+(a-1)^2\}+\{(a-5)^2+(a+1)^2\}$

$=4a^2-8a+28$

$=4(a-1)^2+24$

따라서 $a=1$일 때 $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$의 값이 최소이므로 점 P의 좌표는 $(1, 2)$ 답 $(1, 2)$

20 $P(0, a)$라 하면

$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$

$=\{(-2)^2+(a-1)^2\}+\{(-k)^2+(a+3)^2\}$

$=2a^2+4a+k^2+14$

$=2(a+1)^2+k^2+12$

따라서 $a=-1$일 때 $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$의 최솟값은 k^2+12이므로

$k^2+12=16$, $k^2=4$

$\therefore k=2\ (\because k>0)$ 답 ②

21 직선 BC를 x축, 점 D를 지나고 선분 BC에 수직인 직선을 y축으로 하는 좌표평면을 잡으면 점 $\boxed{D}$가 원점이다.

이때 삼각형 ABC의 두 꼭짓점 A, C의 좌표를 각각 (a, b), $(c, 0)$이라 하면 꼭짓점 B의 좌표는 $\boxed{(-2c, 0)}$이므로

$\overline{AB}^2+2\overline{AC}^2$

$=\{(a+2c)^2+b^2\}+2\{(a-c)^2+b^2\}$

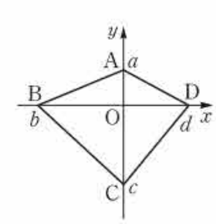
$=\boxed{3(a^2+b^2+2c^2)}$,

$\overline{AD}^2+2\overline{CD}^2=\boxed{a^2+b^2+2c^2}$

$\therefore \overline{AB}^2+2\overline{AC}^2=3(\overline{AD}^2+2\overline{CD}^2)$

답 (가) D (나) $(-2c, 0)$ (다) $3(a^2+b^2+2c^2)$ (라) $a^2+b^2+2c^2$

22 오른쪽 그림과 같이 직선 BD를 x축, 직선 AC를 y축으로 하는 좌표평면을 잡으면 두 대각선의 교점이 원점이다.



이때 사각형 ABCD의 네 꼭짓점 A, B, C, D의 좌표를 각각 $(0, a)$, $(b, 0)$, $(0, c)$, $(d, 0)$이라 하면

$\overline{AB}^2+\overline{CD}^2=\{b^2+(-a)^2\}+\{d^2+(-c)^2\}$

$=a^2+b^2+c^2+d^2$,

$\overline{AD}^2+\overline{BC}^2=\{d^2+(-a)^2\}+\{(-b)^2+c^2\}$

$=a^2+b^2+c^2+d^2$

$\therefore \overline{AB}^2+\overline{CD}^2=\overline{AD}^2+\overline{BC}^2$ 답 풀이 참조

22 선분의 내분점과 외분점

W 74쪽

01 (1) $\frac{2\cdot9+3\cdot(-6)}{2+3}=0$

(2) $\frac{-6+9}{2}=\frac{3}{2}$

(3) $\frac{4\cdot9-1\cdot(-6)}{4-1}=14$

답 (1) 0 (2) $\frac{3}{2}$ (3) 14

02 (1) $\frac{3\cdot(-2)+1\cdot4}{3+1}=-\frac{1}{2}$, $\frac{3\cdot5+1\cdot1}{3+1}=4$

$\therefore \left(-\frac{1}{2}, 4\right)$

(2) $\frac{4-2}{2}=1$, $\frac{1+5}{2}=3$

$\therefore (1, 3)$

(3) $\frac{1\cdot(-2)-2\cdot4}{1-2}=10$, $\frac{1\cdot5-2\cdot1}{1-2}=-3$

$\therefore (10, -3)$

답 (1) $\left(-\frac{1}{2}, 4\right)$ (2) $(1, 3)$ (3) $(10, -3)$

03 (1) 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는

$\left(\frac{-1+9+a}{3}, \frac{2-1+b}{3}\right)$

$\therefore \left(\frac{a+8}{3}, \frac{b+1}{3}\right)$

따라서 $\frac{a+8}{3}=1$, $\frac{b+1}{3}=5$이므로

$a+8=3$, $b+1=15$

$\therefore a=-5$, $b=14$

(2) 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는

$\left(\frac{a+4+3}{3}, \frac{-1+b+6}{3}\right)$

$\therefore \left(\frac{a+7}{3}, \frac{b+5}{3}\right)$

따라서 $\frac{a+7}{3}=1$, $\frac{b+5}{3}=-1$이므로

$a+7=3$, $b+5=-3$

$\therefore a=-4$, $b=-8$

답 (1) $a=-5$, $b=14$ (2) $a=-4$, $b=-8$

04 답 (가) 점 F (나) 점 A

05 ㄴ. 점 E는 선분 CH를 2 : 3으로 내분하는 점이다.
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다. 답 ⑤

06 $a=\frac{3\cdot6+4\cdot(-8)}{3+4}=-2$

$b=\frac{5\cdot6-3\cdot(-8)}{5-3}=27$

$\therefore b-a=29$ 답 ④

07 $\frac{1\cdot(-5)+3\cdot7}{1+3}=4$이므로 P(4)

$\frac{1\cdot(-5)-3\cdot7}{1-3}=13$이므로 Q(13)

따라서 $\overline{PQ}$의 중점이 M(a)이므로

$a=\frac{4+13}{2}=\frac{17}{2}$ 답 $\frac{17}{2}$

08 $\frac{2\cdot a+1\cdot(-4)}{2+1}=\frac{2a-4}{3}$ $\therefore$ P$\left(\frac{2a-4}{3}\right)$

$\frac{2\cdot a-1\cdot(-4)}{2-1}=2a+4$ $\therefore$ Q$(2a+4)$

두 점 P, Q 사이의 거리가 8이므로

$\left|2a+4-\frac{2a-4}{3}\right|=8$, $\left|\frac{4a+16}{3}\right|=8$

$\frac{4a+16}{3}=-8$ 또는 $\frac{4a+16}{3}=8$

$\therefore a=2$ ($\because a>0$) 답 ①

Q BOX

$\frac{4a+16}{3}=-8$에서
$4a+16=-24$
$\therefore a=-10$
$\frac{4a+16}{3}=8$에서
$4a+16=24$
$\therefore a=2$

09 $\overline{AB}$를 3 : 2로 내분하는 점이 x축 위에 있으므로 y좌표가 0이다.

$\overline{AB}$를 3 : 2로 내분하는 점의 y좌표는

$\frac{3\cdot(-4)+2\cdot a}{3+2}=0$

$-12+2a=0$ $\therefore a=6$ 답 ②

10 $\overline{AB}$를 4 : 3으로 내분하는 점 P의 좌표는

$\left(\frac{4\cdot4+3\cdot(-3)}{4+3}, \frac{4\cdot2+3\cdot9}{4+3}\right)$

$\therefore (1, 5)$

$\overline{AB}$를 4 : 3으로 외분하는 점 Q의 좌표는

$\left(\frac{4\cdot4-3\cdot(-3)}{4-3}, \frac{4\cdot2-3\cdot9}{4-3}\right)$

$\therefore (25, -19)$

따라서 $\overline{PQ}$의 중점의 좌표는

$\left(\frac{1+25}{2}, \frac{5-19}{2}\right)$ $\therefore (13, -7)$

답 $(13, -7)$

11 $\overline{AB}$를 1 : 2로 외분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{1\cdot a-2\cdot(-1)}{1-2}, \frac{1\cdot(-2)-2\cdot1}{1-2}\right)$

$\therefore (-a-2, 4)$

이 점이 직선 $y=-x+1$ 위에 있으므로

$4=a+2+1$ $\therefore a=1$ 답 ③

12 $\overline{AB}$를 $m : n$으로 내분하는 점이 y축 위에 있으므로 x좌표가 0이다.

$\overline{AB}$가 y축에 의하여 $m : n$으로 내분된다.
➡ $\overline{AB}$를 $m : n$으로 내분하는 점이 y축 위에 있다.

$\overline{AB}$를 $m : n$으로 내분하는 점의 x좌표는

$\frac{-6m+8n}{m+n}=0$, $-6m+8n=0$

$\therefore 3m=4n$

이때 m, n은 서로소인 자연수이므로

$m=4$, $n=3$

$\therefore m+n=7$ 답 7

13 점 C가 $\overline{AB}$ 위에 있으므로

$\overline{AC}=\overline{AB}-\overline{BC}=2\overline{BC}-\overline{BC}=\overline{BC}$

$\therefore \overline{AC}:\overline{BC}=\overline{BC}:\overline{BC}=1:1$

점 C는 $\overline{AB}$를 $1:1$로 내분하는 점, 즉 $\overline{AB}$의 중점이므로 점 C의 좌표는

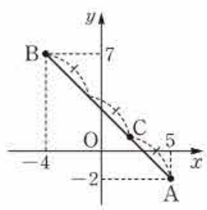
$\left(\frac{-11+7}{2}, \frac{-5+1}{2}\right) \quad \therefore (-2, -2)$

답 $(-2, -2)$

14 $2\overline{AB}=3\overline{BC}$에서 $\quad \overline{AB}:\overline{BC}=3:2$

(i) 점 C가 $\overline{AB}$ 위의 점일 때,

점 C는 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AB}$를 $1:2$로 내분하는 점이므로



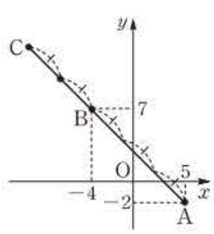
$\frac{1\cdot(-4)+2\cdot5}{1+2}=2,$

$\frac{1\cdot7+2\cdot(-2)}{1+2}=1$

$\therefore C(2, 1)$

(ii) 점 C가 $\overline{AB}$의 연장선 위의 점일 때,

점 C는 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AB}$를 $5:2$로 외분하는 점이므로



$\frac{5\cdot(-4)-2\cdot5}{5-2}=-10,$

$\frac{5\cdot7-2\cdot(-2)}{5-2}=13$

$\therefore C(-10, 13)$

(i), (ii)에서 점 C의 좌표는 $(-10, 13)$, $(2, 1)$이다.

답 $(-10, 13)$, $(2, 1)$

다른 풀이 (ii) 점 C가 $\overline{AB}$의 연장선 위의 점일 때, $C(a, b)$라 하면 점 B는 $\overline{AC}$를 $3:2$로 내분하는 점이므로

$\frac{3\cdot a+2\cdot5}{3+2}=-4, \frac{3\cdot b+2\cdot(-2)}{3+2}=7$

$3a+10=-20$, $3b-4=35$

$\therefore a=-10, b=13$

$\therefore C(-10, 13)$

쌤 한마디

두 점 A, B를 지나는 직선 AB 위의 점 C가

$\overline{AB}:\overline{BC}=m:n$

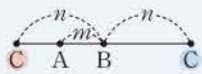
을 만족시키는 경우는 다음과 같다.

① $m>n$일 때

→ 점 C는 $\overline{AB}$를 $(m-n):n$으로 내분하는 점 또는 $(m+n):n$으로 외분하는 점이다.

② $m<n$일 때

→ 점 C는 $\overline{AB}$를 $(n-m):n$으로 외분하는 점 또는 $(m+n):n$으로 외분하는 점이다.



15 △ABC의 무게중심의 좌표가 $(0, 0)$이므로

$\frac{a+(2b-1)+2}{3}=0, \frac{b+4+a}{3}=0$

$\therefore a+2b=-1, a+b=-4$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $\quad a=-7, b=3$

$\therefore a^2+b^2=58$

답 58

$\begin{cases} a+2b=-1 & \cdots ㉠ \\ a+b=-4 & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠−㉡을 하면

$b=3$

$b=3$을 ㉡에 대입하면

$a+3=-4$

$\therefore a=-7$

16 $\overline{BC}$의 중점을 M이라 하면 △ABC의 무게중심은 $\overline{AM}$을 $2:1$로 내분하는 점이므로

$\left(\frac{2\cdot(-2)+1\cdot6}{2+1}, \frac{2\cdot5+1\cdot3}{2+1}\right)$

$\therefore \left(\frac{2}{3}, \frac{13}{3}\right)$

답 ④

다른 풀이 $B(a, b)$, $C(c, d)$라 하면

$\frac{a+c}{2}=-2, \frac{b+d}{2}=5$

$\therefore a+c=-4, b+d=10$

따라서 △ABC의 무게중심의 좌표는

$\left(\frac{6-4}{3}, \frac{3+10}{3}\right) \quad \therefore \left(\frac{2}{3}, \frac{13}{3}\right)$

$\left(\frac{6+a+c}{3}, \frac{3+b+d}{3}\right)$

$\therefore \left(\frac{6-4}{3}, \frac{3+10}{3}\right)$

17 $\overline{AB}$의 중점인 점 D의 좌표는

$\left(\frac{7-3}{2}, \frac{5+9}{2}\right) \quad \therefore (2, 7)$

$\overline{BC}$의 중점인 점 E의 좌표는

$\left(\frac{-3-1}{2}, \frac{9-5}{2}\right) \quad \therefore (-2, 2)$

$\overline{CA}$의 중점인 점 F의 좌표는

$\left(\frac{-1+7}{2}, \frac{-5+5}{2}\right) \quad \therefore (3, 0)$

따라서 △DEF의 무게중심의 좌표는

$\left(\frac{2-2+3}{3}, \frac{7+2+0}{3}\right) \quad \therefore (1, 3)$

답 $(1, 3)$

다른 풀이 △DEF의 무게중심은 △ABC의 무게중심과 일치하므로 구하는 무게중심의 좌표는

$\left(\frac{7-3-1}{3}, \frac{5+9-5}{3}\right) \quad \therefore (1, 3)$

18 두 대각선 AC, BD의 중점이 일치하므로

$\frac{3+3}{2}=\frac{-1+b}{2}, \frac{5-4}{2}=\frac{a-1}{2}$

$\therefore a=2, b=7$

$\therefore ab=14$

답 ③

$3=\frac{-1+b}{2}$에서

$-1+b=6$

$\therefore b=7$

$\frac{1}{2}=\frac{a-1}{2}$에서

$a-1=1$

$\therefore a=2$

19 $C(a, b)$라 하면 △ABC의 무게중심의 좌표가 $(-1, -2)$이므로

$\frac{-1-4+a}{3}=-1, \frac{4-1+b}{3}=-2$

$\therefore a=2, b=-9$

$\therefore C(2, -9)$

W 09 평면좌표

$D(c,\ d)$라 하면 □ABCD에서 두 대각선 AC, BD의 중점이 일치하므로

$$\frac{-1+2}{2}=\frac{-4+c}{2},\ \frac{4-9}{2}=\frac{-1+d}{2}$$

$\therefore c=5,\ d=-4$

$\therefore D(5,\ -4)$ 답 $(5,\ -4)$

20 두 대각선 AC, BD의 중점이 일치하므로 중점의 y좌표에서

$$\frac{2+a}{2}=\frac{-2+b}{2} \qquad \therefore b=a+4 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

또 $\overline{AB}=\overline{BC}$에서 $\overline{AB}^2=\overline{BC}^2$이므로

$$(3-1)^2+(-2-2)^2=(7-3)^2+(a+2)^2$$

$a^2+4a=0,\quad a(a+4)=0$

$\therefore a=-4\ (\because a<0)$

$a=-4$를 ㉠에 대입하면 $\quad b=0$

$\therefore a+b=-4$ 답 ②

21 $\overline{AD}$는 $\angle A$의 이등분선이므로

$\overline{BD}:\overline{CD}=\overline{AB}:\overline{AC}$

이때

$$\overline{AB}=\sqrt{(4-1)^2+(-1+5)^2}=5,$$
$$\overline{AC}=\sqrt{(-5-1)^2+(3+5)^2}=10$$

이므로 $\quad \overline{BD}:\overline{CD}=5:10=1:2$

따라서 점 D는 $\overline{BC}$를 $1:2$로 내분하는 점이므로

$$a=\frac{1\cdot(-5)+2\cdot 4}{1+2}=1,\ b=\frac{1\cdot 3+2\cdot(-1)}{1+2}=\frac{1}{3}$$

$\therefore a+b=\frac{4}{3}$ 답 ②

22 $\overline{AD}$는 $\angle A$의 이등분선이므로

$\overline{BD}:\overline{CD}=\overline{AB}:\overline{AC}$

이때

$$\overline{AB}=\sqrt{(-3-2)^2+(-8-4)^2}=13,$$
$$\overline{AC}=\sqrt{(6-2)^2+(1-4)^2}=5$$

이므로 $\quad \overline{BD}:\overline{CD}=13:5$

따라서 점 D는 $\overline{BC}$를 $13:5$로 내분하는 점이므로

$$\frac{13\cdot 6+5\cdot(-3)}{13+5}=\frac{7}{2},\ \frac{13\cdot 1+5\cdot(-8)}{13+5}=-\frac{3}{2}$$

$\therefore D\left(\frac{7}{2},\ -\frac{3}{2}\right)$

$$\therefore \overline{OD}=\sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2+\left(-\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{58}}{2}$$

답 $\frac{\sqrt{58}}{2}$

10 직선의 방정식

23 직선의 방정식

W 77쪽

01 (1) x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 $60°$이므로 직선의 기울기는

$\tan 60°=\sqrt{3}$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$y-1=\sqrt{3}(x-\sqrt{3}) \qquad \therefore y=\sqrt{3}x-2$

답 (1) $y=\sqrt{3}x-2$ (2) $x=3$ (3) $x=-6$

y축에 평행한 직선이다.

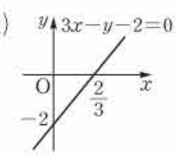
02 (1) $y-1=\frac{7-1}{2+1}(x+1) \qquad \therefore y=2x+3$

(2) x절편이 4, y절편이 -5이므로

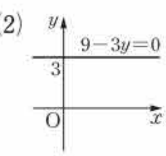
$$\frac{x}{4}-\frac{y}{5}=1$$

답 (1) $y=2x+3$ (2) $\frac{x}{4}-\frac{y}{5}=1$

03 답 (1)



(2)



04 주어진 직선이 항상 지나는 점은 두 직선

$4x+5y+3=0,\ 2x+3y+1=0$

의 교점이다.

위의 두 식을 연립하여 풀면

$x=-2,\ y=1$

$\begin{cases}4x+5y+3=0 & \cdots ㉠\\ 2x+3y+1=0 & \cdots ㉡\end{cases}$

㉠−㉡×2를 하면

$-y+1=0$

$\therefore y=1$

$y=1$을 ㉠에 대입하면

$4x+8=0$

$\therefore x=-2$

따라서 구하는 점의 좌표는 $\quad (-2,\ 1)$

답 $(-2,\ 1)$

05 주어진 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식을

$2x-y+10+k(3x-y-3)=0$ (k는 실수) $\cdots\cdots ㉠$

으로 놓으면 직선 ㉠이 점 $P(-3,\ -8)$을 지나므로

$12-4k=0 \qquad \therefore k=3$

$k=3$을 ㉠에 대입하면 구하는 직선의 방정식은

$2x-y+10+3(3x-y-3)=0$

$\therefore 11x-4y+1=0$

답 $11x-4y+1=0$

다른 풀이 $2x-y+10=0,\ 3x-y-3=0$을 연립하여 풀면 $\quad x=13,\ y=36$

즉 두 직선 $2x-y+10=0,\ 3x-y-3=0$의 교점의 좌표는 $\quad (13,\ 36)$

따라서 두 점 $(13,\ 36)$, $P(-3,\ -8)$을 지나는 직선의 방정식은

$$y+8=\frac{36+8}{13+3}(x+3)$$

$\therefore 11x-4y+1=0$

06 직선 $5x-2y+1=0$, 즉 $y=\frac{5}{2}x+\frac{1}{2}$의 기울기는 $\frac{5}{2}$이므로 기울기가 $\frac{5}{2}$이고 점 $(-1,\ -4)$를 지나는 직선의 방정식은

$y+4=\frac{5}{2}(x+1)$, $\quad y=\frac{5}{2}x-\frac{3}{2}$

$\therefore\ 5x-2y-3=0$

따라서 $a=5$, $b=-2$이므로 $\quad ab=-10$

답 ①

07 점 $(4,\ 8)$을 지나고 x축에 평행한 직선의 방정식은

$y=8$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

점 $(2,\ -7)$을 지나고 기울기가 -3인 직선의 방정식은

$y+7=-3(x-2)$

$\therefore\ y=-3x-1$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad x=-3,\ y=8$

따라서 두 직선의 교점의 좌표는

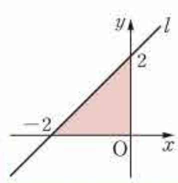
$(-3,\ 8)$

답 $(-3,\ 8)$

08 $\tan 45°=1$이므로 직선 l의 방정식은

$y+3=x+5$ $\quad\therefore\ y=x+2$

따라서 직선 l은 오른쪽 그림과 같으므로 구하는 넓이는



$\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2=2$

답 ③

09 점 $(4,\ 3)$을 지나고 x절편이 -2인 직선의 방정식은

$y=\frac{3}{4+2}(x+2)$ $\quad\therefore\ y=\frac{1}{2}(x+2)$

이 직선이 점 $(-4,\ a)$를 지나므로

$a=\frac{1}{2}\cdot(-2)=-1$

답 ②

10 두 직선 $x=-1$, $y=5$의 교점의 좌표는

$(-1,\ 5)$

두 점 $(-1,\ 5)$, $(-2,\ 7)$을 지나는 직선의 방정식은

$y-5=\frac{7-5}{-2+1}(x+1)$ $\quad\therefore\ 2x+y-3=0$

따라서 $a=2$, $b=-3$이므로

$a-b=5$

답 5

11 $\overline{AB}$를 $1:3$으로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{1\cdot5+3\cdot(-3)}{1+3},\ \frac{1\cdot(-1)+3\cdot11}{1+3}\right)$

$\therefore\ (-1,\ 8)$

따라서 두 점 $(-1,\ 8)$, $(3,\ -12)$를 지나는 직선의 방정식은

$y-8=\frac{-12-8}{3+1}(x+1)$ $\quad\therefore\ y=-5x+3$

답 $y=-5x+3$

Q BOX

x절편이 a, y절편이 b인 직선과 x축, y축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot|ab|$

점 $(-2,\ 0)$을 지난다.

$\frac{a+4}{-1+2}$에 $a=-1$을 대입하면

$\frac{-1+4}{-1+2}=3$

삼각형 ABC의 꼭짓점 A를 지나면서 그 넓이를 이등분하는 직선은 $\overline{BC}$의 중점을 지난다.

두 점 $A(x_1,\ y_1)$, $B(x_2,\ y_2)$에 대하여 선분 AB를 $m:n\ (m>0,\ n>0)$으로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n},\ \frac{my_2+ny_1}{m+n}\right)$

12 x절편이 4, y절편이 -6인 직선의 방정식은

$\frac{x}{4}-\frac{y}{6}=1$

④ $\frac{5}{4}-\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{6}\neq1$

답 ④

13 x절편이 -3, y절편이 -5인 직선의 방정식은

$-\frac{x}{3}-\frac{y}{5}=1$

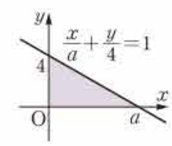
이 직선이 점 $(2k,\ -3k)$를 지나므로

$-\frac{2k}{3}+\frac{3k}{5}=1$, $\quad -\frac{k}{15}=1$

$\therefore\ k=-15$

답 -15

14 x절편이 a, y절편이 4이므로 오른쪽 그림에서 색칠한 부분의 넓이는



$\frac{1}{2}\cdot a\cdot 4=14$

$\therefore\ a=7$

답 ③

15 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으려면 직선 AB와 직선 AC의 기울기가 같아야 하므로

$\frac{a+4}{-1+2}=\frac{5+4}{-a+2}$, $\quad a+4=\frac{9}{-a+2}$

$(a+4)(-a+2)=9$, $\quad a^2+2a+1=0$

$(a+1)^2=0$ $\quad\therefore\ a=-1$

따라서 직선 l의 기울기는 3이고 점 $A(-2,\ -4)$를 지나므로 직선 l의 방정식은

$y+4=3(x+2)$ $\quad\therefore\ y=3x+2$

답 $y=3x+2$

16 세 점 A, B, C를 꼭짓점으로 하는 삼각형이 존재하지 않으려면 세 점은 한 직선 위에 있어야 한다.

즉 직선 AB와 직선 BC의 기울기가 같아야 하므로

$\frac{14+4}{-3-a}=\frac{(a-2)-14}{2+3}$, $\quad \frac{18}{-3-a}=\frac{a-16}{5}$

$(-3-a)(a-16)=90$, $\quad a^2-13a+42=0$

$(a-6)(a-7)=0$ $\quad\therefore\ a=6$ 또는 $a=7$

따라서 구하는 모든 a의 값의 합은 13이다.

답 ④

17 $B(-5,\ 2)$, $C(3,\ -4)$이므로 $\overline{BC}$의 중점의 좌표는

$\left(\frac{-5+3}{2},\ \frac{2-4}{2}\right)$ $\quad\therefore\ (-1,\ -1)$

따라서 두 점 $A(3,\ 4)$, $(-1,\ -1)$을 지나는 직선의 방정식은

$y-4=\frac{4+1}{3+1}(x-3)$ $\quad\therefore\ y=\frac{5}{4}x+\frac{1}{4}$

즉 $a=\frac{5}{4}$, $b=\frac{1}{4}$이므로

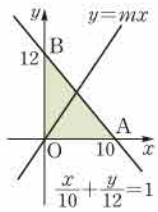
$a-b=1$

답 1

18 직선 $\frac{x}{10}+\frac{y}{12}=1$과 x축, y축의 교점을 각각 A, B라 하면

$\mathrm{A}(10,\ 0)$, $\mathrm{B}(0,\ 12)$

오른쪽 그림과 같이 직선 $y=mx$가 원점 O를 지나므로 삼각형 OAB의 넓이를 이등분하려면 $\overline{\mathrm{AB}}$의 중점을 지나야 한다.



$\overline{\mathrm{AB}}$의 중점의 좌표는

$\left(\frac{10+0}{2},\ \frac{0+12}{2}\right)$ $\quad\therefore (5,\ 6)$

따라서 직선 $y=mx$가 점 $(5,\ 6)$을 지나므로

$6=5m \quad \therefore m=\frac{6}{5}$ 답 $\frac{6}{5}$

19 마름모의 두 대각선의 교점의 좌표는 $(4,\ 3)$이므로 두 점 $(2,\ 9)$, $(4,\ 3)$을 지나는 직선의 방정식은

마름모의 넓이를 이등분하는 직선은 마름모의 두 대각선의 교점을 지난다.

$y-9=\frac{3-9}{4-2}(x-2) \quad \therefore y=-3x+15$

따라서 구하는 y절편은 15이다.

답 ①

20 정사각형의 대각선의 중점의 좌표는

$\left(\frac{1+3}{2},\ \frac{0+2}{2}\right) \quad \therefore (2,\ 1)$

직사각형의 대각선의 중점의 좌표는

$\left(\frac{-4-2}{2},\ \frac{-5-1}{2}\right) \quad \therefore (-3,\ -3)$

따라서 두 점 $(2,\ 1)$, $(-3,\ -3)$을 지나는 직선의 방정식은

$y-1=\frac{-3-1}{-3-2}(x-2)$

$\therefore 4x-5y-3=0$

즉 $a=4$, $b=-5$이므로

$a+b=-1$ 답 -1

21 직선 $ax-by-c=0$에서 $b\neq0$이므로

$y=\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$

이때 $ac>0$, $bc<0$이므로 $\quad ab<0$

a와 c의 부호가 같고, b와 c의 부호가 다르므로 a와 b의 부호가 다르다.

$\therefore \frac{a}{b}<0,\ -\frac{c}{b}>0$

즉 직선 $ax-by-c=0$의 기울기는 음수, y절편은 양수이다.

따라서 주어진 직선의 개형은 ②와 같다. 답 ②

22 $bc=0$에서 $\quad b=0$ 또는 $c=0$

그런데 $ab<0$이므로 $\quad b\neq0 \quad \therefore c=0$

따라서 직선 $ax+by+c=0$에서

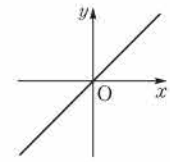
$y=-\frac{a}{b}x$

이때 $-\frac{a}{b}>0$이므로 직선 $ax+by+c=0$은 기울기가 양수이고 원점을 지난다.

$ab<0$에서 $\frac{a}{b}<0$

$\therefore -\frac{a}{b}>0$

따라서 주어진 직선은 오른쪽 그림과 같이 제1사분면, 제3사분면을 지난다.



답 제1사분면, 제3사분면

23 직선 $ax+by-c=0$, 즉 $y=-\frac{a}{b}x+\frac{c}{b}$의 기울기는 양수, y절편은 음수이므로

$-\frac{a}{b}>0,\ \frac{c}{b}<0$

즉 $ab<0$, $bc<0$이므로 $\quad ac>0$

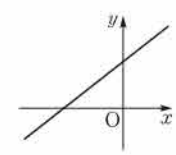
a와 b의 부호가 다르고, b와 c의 부호가 다르므로 a와 c의 부호가 같다.

직선 $bx+cy-a=0$에서 $c\neq0$이므로

$y=-\frac{b}{c}x+\frac{a}{c}$

이때 $-\frac{b}{c}>0$, $\frac{a}{c}>0$이므로 직선 $bx+cy-a=0$의 기울기와 y절편은 모두 양수이다.

따라서 직선 $bx+cy-a=0$은 오른쪽 그림과 같이 제4사분면을 지나지 않는다.



답 ④

24 주어진 식을 k에 대하여 정리하면

$(3x+y-4)k+(x+y+2)=0$

이 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$3x+y-4=0,\ x+y+2=0$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$x=3,\ y=-5$

따라서 주어진 직선은 실수 k의 값에 관계없이 점 $(3,\ -5)$를 지나므로 항상 제4사분면을 지난다.

답 제4사분면

25 주어진 식을 k에 대하여 정리하면

$(3x+2y+1)k+(3x-y+4)=0$

이 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$3x+2y+1=0,\ 3x-y+4=0$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$x=-1,\ y=1$

$\therefore \mathrm{P}(-1,\ 1)$

따라서 점 P와 원점을 지나는 직선의 기울기는

$\frac{1-0}{-1-0}=-1$ 답 -1

26 주어진 식을 k에 대하여 정리하면

$(4x+y-2)k+(x-2y-a)=0$

이 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$4x+y-2=0,\ x-2y-a=0$

이때 점 $(b,\ -2)$는 위의 두 직선의 교점이므로

$4b-2-2=0,\ b+4-a=0$

$\therefore a=5,\ b=1$

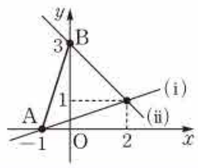
$\therefore a+b=6$ 답 ②

27 직선 $y=mx-2m+1$에서

$(x-2)m-(y-1)=0$ $\cdots\cdots$ ㉠

이므로 직선 ㉠은 m의 값에 관계없이 항상 점 $(2, 1)$을 지난다.

오른쪽 그림에서



(i) 직선 ㉠이 점 A$(-1, 0)$을 지날 때,

$-3m+1=0$

$\therefore m=\frac{1}{3}$

㉠에 $x=-1$, $y=0$을 대입한다.

(ii) 직선 ㉠이 점 B$(0, 3)$을 지날 때,

$-2m-2=0$ $\quad\therefore m=-1$

㉠에 $x=0$, $y=3$을 대입한다.

(i), (ii)에서 m의 값의 범위는

$-1\le m\le\frac{1}{3}$

따라서 $a=-1$, $b=\frac{1}{3}$이므로

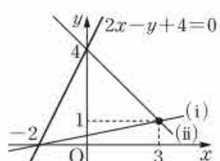
$b-a=\frac{4}{3}$ 답 $\frac{4}{3}$

28 직선 $mx-y-3m+1=0$에서

$m(x-3)-(y-1)=0$ $\cdots\cdots$ ㉠

이므로 직선 ㉠은 m의 값에 관계없이 항상 점 $(3, 1)$을 지난다.

오른쪽 그림에서



(i) 직선 ㉠이 점 $(-2, 0)$을 지날 때,

$-5m+1=0$

$\therefore m=\frac{1}{5}$

㉠에 $x=-2$, $y=0$을 대입한다.

(ii) 직선 ㉠이 점 $(0, 4)$를 지날 때,

$-3m-3=0$ $\quad\therefore m=-1$

㉠에 $x=0$, $y=4$를 대입한다.

(i), (ii)에서 구하는 m의 값의 범위는

$-1<m<\frac{1}{5}$ 답 $-1<m<\frac{1}{5}$

29 주어진 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식을

$x+4y-3+k(2x-y+4)=0$ (k는 실수) $\cdots\cdots$ ㉠

으로 놓으면 직선 ㉠이 점 $(3, 2)$를 지나므로

$8+8k=0$ $\quad\therefore k=-1$

$k=-1$을 ㉠에 대입하면

$x+4y-3-(2x-y+4)=0$

$\therefore x-5y+7=0$

따라서 이 직선이 점 $(-2, a)$를 지나므로

$-5a+5=0$ $\quad\therefore a=1$ 답 ①

다른 풀이 $x+4y-3=0$, $2x-y+4=0$을 연립하여 풀면

$x=-\frac{13}{9}$, $y=\frac{10}{9}$

즉 두 직선 $x+4y-3=0$, $2x-y+4=0$의 교점의 좌표는

$\left(-\frac{13}{9}, \frac{10}{9}\right)$

따라서 두 점 $\left(-\frac{13}{9}, \frac{10}{9}\right)$, $(3, 2)$를 지나는 직선의 방정식은

$$y-2=\frac{2-\frac{10}{9}}{3+\frac{13}{9}}(x-3) \qquad \therefore x-5y+7=0$$

30 주어진 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식을

$3x-2y+1+k(x-2y-5)=0$ (k는 실수) $\cdots\cdots$ ㉠

으로 놓으면 직선 ㉠이 점 $(2, 6)$을 지나므로

$-5-15k=0$ $\quad\therefore k=-\frac{1}{3}$

$k=-\frac{1}{3}$을 ㉠에 대입하면

$3x-2y+1-\frac{1}{3}(x-2y-5)=0$

$\therefore 2x-y+2=0$

따라서 A$(-1, 0)$, B$(0, 2)$이므로

$\overline{AB}=\sqrt{(0+1)^2+(2-0)^2}=\sqrt{5}$

답 ②

24 두 직선의 평행과 수직

W 82쪽

01 (1) $\frac{a}{1}=\frac{2}{-(a+3)}\ne\frac{-5}{5}$이므로

$a^2+3a+2=0$, $a\ne-1$

$(a+1)(a+2)=0$, $a\ne-1$

$\therefore a=-2$

(2) $a\cdot1+2\cdot\{-(a+3)\}=0$이므로

$-a=6$ $\quad\therefore a=-6$

답 (1) -2 (2) -6

02 직선 $4x-y=0$, 즉 $y=4x$와 평행한 직선의 기울기는 4이다.

따라서 점 $(-3, -2)$를 지나고 기울기가 4인 직선의 방정식은

$y+2=4(x+3)$ $\quad\therefore y=4x+10$

답 $y=4x+10$

03 직선 $y=mx+4$가 직선 $y=-\frac{1}{3}x+1$에 수직이므로

$m\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)=-1$ $\quad\therefore m=3$

또 직선 $y=3x+4$가 직선 $y=(2-n)x+5$와 평행하므로

$3=2-n$ $\quad\therefore n=-1$

$\therefore m-n=4$ 답 ④

04 두 직선 $ax-y+b=0$, $bx-2y+a=0$이 서로 만나지 않으면 평행하므로

$\frac{a}{b}=\frac{-1}{-2}\ne\frac{b}{a}$ $\quad\therefore b=2a$

$b=2a$를 $ax-by=0$에 대입하면

$ax-2ay=0, \quad -2ay=-ax$

$\therefore y=\frac{1}{2}x \ (\because a\neq0)$

따라서 구하는 기울기는 $\frac{1}{2}$이다. 답 $\frac{1}{2}$

05 두 직선 $ax-3y+b=0$, $cx+y-7=0$이 점 $(4, -1)$을 지나므로

$4a+3+b=0$에서 $\quad 4a+b=-3 \quad \cdots\cdots$ ㉠

$4c-1-7=0$에서 $\quad c=2$

또 두 직선 $ax-3y+b=0$, $2x+y-7=0$이 수직이므로

$a\cdot2-3\cdot1=0 \quad \therefore a=\frac{3}{2}$

$a=\frac{3}{2}$을 ㉠에 대입하면 $\quad b=-9$

$\therefore abc=-27$ 답 ④

06 두 직선 $y=6x-10$, $y=-2x+3$이 한 점에서 만나므로 주어진 세 직선에 의하여 생기는 교점이 2개가 되려면 직선 $y=kx-5$가 직선 $y=6x-10$ 또는 직선 $y=-2x+3$과 평행해야 한다.

$\therefore k=6$ 또는 $k=-2$

이때 $k>0$이므로 $\quad k=6$ 답 ⑤

07 주어진 세 직선이 삼각형을 이루지 않는 경우는 다음과 같다.

(i) 직선 $y=ax-3$이 두 직선 $y=4x$, $y=-x+5$의 교점을 지날 때,

$y=4x$, $y=-x+5$를 연립하여 풀면

$x=1, y=4$

직선 $y=ax-3$이 점 $(1, 4)$를 지나야 하므로

$4=a-3 \quad \therefore a=7$

(ii) 직선 $y=ax-3$이 직선 $y=4x$ 또는 직선 $y=-x+5$와 평행할 때,

$a=4$ 또는 $a=-1$

(i), (ii)에서 모든 a의 값의 합은

$7+4+(-1)=10$ 답 ①

08 주어진 세 직선이 좌표평면을 4개의 영역으로 나누려면 오른쪽 그림과 같이 세 직선이 모두 평행해야 한다.

두 직선 $ax-y+2=0$, $3x+y-4=0$이 평행하려면

$\frac{a}{3}=\frac{-1}{1}\neq\frac{2}{-4} \quad \therefore a=-3$

두 직선 $x+by-1=0$, $3x+y-4=0$이 평행하려면

$\frac{1}{3}=\frac{b}{1}\neq\frac{-1}{-4} \quad \therefore b=\frac{1}{3}$

$\therefore a+b=-\frac{8}{3}$

답 $-\frac{8}{3}$

Q BOX

두 직선 $y=4x$, $y=-x+5$가 평행하지 않으므로 세 직선이 모두 평행한 경우는 생각하지 않는다.

세 직선이 한 점에서 만나는 경우

세 직선 중 두 직선이 평행한 경우

기울기가 -2이고 점 $A(-1, 6)$을 지나는 직선

$\frac{1}{2}x-1=-2x+4$에서

$\frac{5}{2}x=5 \quad \therefore x=2$

$x=2$를 $y=\frac{1}{2}x-1$에 대입하면 $\quad y=0$

09 직선 $x+6y-5=0$, 즉 $y=-\frac{1}{6}x+\frac{5}{6}$와 평행한 직선의 기울기는 $-\frac{1}{6}$이다.

따라서 점 $(2, 1)$을 지나고 기울기가 $-\frac{1}{6}$인 직선의 방정식은

$y-1=-\frac{1}{6}(x-2) \quad \therefore y=-\frac{1}{6}x+\frac{4}{3}$

답 $y=-\frac{1}{6}x+\frac{4}{3}$

10 두 점 A, B를 지나는 직선의 기울기는

$\frac{1+2}{-5-4}=-\frac{1}{3}$

이므로 직선 AB에 수직인 직선의 기울기는 3이다.

한편 $\overline{AB}$를 $1:2$로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{1\cdot(-5)+2\cdot4}{1+2}, \frac{1\cdot1+2\cdot(-2)}{1+2}\right)$

$\therefore (1, -1)$

따라서 기울기가 3이고 점 $(1, -1)$을 지나는 직선의 방정식은

$y+1=3(x-1) \quad \therefore y=3x-4$

답 $y=3x-4$

11 직선 $y=\frac{1}{2}x-1$에 수직인 직선 AH의 기울기는 -2

따라서 직선 AH의 방정식은

$y-6=-2(x+1) \quad \therefore y=-2x+4$

점 H는 두 직선 $y=\frac{1}{2}x-1$, $y=-2x+4$의 교점이므로 두 직선의 방정식을 연립하여 풀면

$x=2, y=0$

따라서 점 H의 좌표는 $\quad (2, 0)$

답 $(2, 0)$

12 직선 $x-3y-12=0$의 x절편은 12, y절편은 -4이므로 $\quad A(12, 0)$, $B(0, -4)$

$\overline{AB}$의 중점의 좌표는

$\left(\frac{12+0}{2}, \frac{0-4}{2}\right) \quad \therefore (6, -2)$

또 직선 $x-3y-12=0$, 즉 $y=\frac{1}{3}x-4$의 기울기는 $\frac{1}{3}$이므로 $\overline{AB}$의 수직이등분선의 기울기는 -3이다.

따라서 $\overline{AB}$의 수직이등분선은 점 $(6, -2)$를 지나고 기울기가 -3인 직선이므로 수직이등분선의 방정식은

$y+2=-3(x-6) \quad \therefore y=-3x+16$

답 $y=-3x+16$

13 $A(a, b)$라 하면 $\overline{AB}$의 중점 $\left(\frac{a+3}{2}, \frac{b+1}{2}\right)$은 직선 $y=x+1$ 위의 점이므로

$\dfrac{b+1}{2}=\dfrac{a+3}{2}+1, \quad b+1=a+5$

$\therefore a-b=-4$ …… ㉠

또 직선 AB는 직선 $y=x+1$과 수직이므로

$\dfrac{b-1}{a-3}\cdot 1=-1, \quad b-1=-a+3$

$\therefore a+b=4$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=0, b=4$

따라서 점 A의 좌표는 (0, 4) 답 ③

25 점과 직선 사이의 거리 W 84쪽

01 (1) $\dfrac{|-7|}{\sqrt{5^2+12^2}}=\dfrac{7}{13}$

(2) 점 (1, 5)와 직선 $y=x-8$, 즉 $x-y-8=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|1\cdot 1-1\cdot 5-8|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=6\sqrt{2}$

답 (1) $\dfrac{7}{13}$ (2) $6\sqrt{2}$

02 $\dfrac{|3\cdot 2+a\cdot 1-5|}{\sqrt{3^2+a^2}}=1$이므로

$|a+1|=\sqrt{9+a^2}$

양변을 제곱하면 $a^2+2a+1=9+a^2$

$2a=8 \quad \therefore a=4$ 답 4

03 (1) 두 직선 $2x+3y-4=0$, $2x+3y+9=0$은 평행하므로 두 직선 사이의 거리는 직선 $2x+3y-4=0$ 위의 한 점 (2, 0)과 직선 $2x+3y+9=0$ 사이의 거리와 같다.
따라서 구하는 거리는

$\dfrac{|2\cdot 2+3\cdot 0+9|}{\sqrt{2^2+3^2}}=\sqrt{13}$

(2) 두 직선 $y=-7x-1$, $y=-7x-6$은 평행하므로 두 직선 사이의 거리는 직선 $y=-7x-1$ 위의 한 점 $(0, -1)$과 직선 $y=-7x-6$, 즉 $7x+y+6=0$ 사이의 거리와 같다.
따라서 구하는 거리는

$\dfrac{|7\cdot 0+1\cdot(-1)+6|}{\sqrt{7^2+1^2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

답 (1) $\sqrt{13}$ (2) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

04 점 P의 좌표를 $(0, a)$라 하면

$\dfrac{|2\cdot 0-1\cdot a+3|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\sqrt{5}, \quad |-a+3|=5$

$-a+3=-5$ 또는 $-a+3=5$

$\therefore a=8$ 또는 $a=-2$

따라서 점 P의 좌표는

$(0, -2), (0, 8)$ 답 $(0, -2), (0, 8)$

Q BOX

두 점 $A(a, b)$, $B(3, 1)$을 지나는 직선의 기울기

㉠+㉡을 하면
$2a=0 \quad \therefore a=0$
$a=0$을 ㉠에 대입하면
$b=4$

원점을 지나고 기울기가 m인 직선의 방정식

$y=\dfrac{4}{3}x$, 즉
$4x-3y=0$

x절편이 4, y절편이 2인 직선의 방정식

점 P는 y축 위의 점이므로 x좌표가 0이다.

05 두 점 $(-1, 2)$, $(7, 6)$을 지나는 직선의 방정식은

$y-2=\dfrac{6-2}{7+1}(x+1) \quad \therefore x-2y+5=0$

직선 $x-2y+5=0$ 위를 움직이는 점 P에 대하여 $\overline{OP}$의 길이의 최솟값은 점 $O(0, 0)$과 직선 $x-2y+5=0$ 사이의 거리와 같으므로

$\dfrac{|5|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\sqrt{5}$ 답 ④

06 원점을 지나는 직선의 방정식을 $y=mx$, 즉 $mx-y=0$이라 하면 점 $(4, -2)$와 직선 $mx-y=0$ 사이의 거리가 $\sqrt{10}$이므로

$\dfrac{|m\cdot 4-1\cdot(-2)|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\sqrt{10}$

$|4m+2|=\sqrt{10(m^2+1)}$

양변을 제곱하면

$(4m+2)^2=10(m^2+1), \quad 3m^2+8m-3=0$

$(m+3)(3m-1)=0$

$\therefore m=-3$ 또는 $m=\dfrac{1}{3}$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$y=-3x, \ y=\dfrac{1}{3}x$ 답 $y=-3x, \ y=\dfrac{1}{3}x$

07 직선 $x+y-6=0$의 x절편과 y절편이 모두 6이므로 $A(6, 0), B(0, 6)$

$\therefore \overline{AB}=\sqrt{(0-6)^2+(6-0)^2}=6\sqrt{2}$

점 C와 직선 AB 사이의 거리는

$\dfrac{|1\cdot(-2)+1\cdot 2-6|}{\sqrt{1^2+1^2}}=3\sqrt{2}$

$\therefore \triangle ABC=\dfrac{1}{2}\cdot 6\sqrt{2}\cdot 3\sqrt{2}=18$ 답 ④

08 $\overline{OA}=\sqrt{3^2+4^2}=5$

이때 직선 OA는 직선 $8x-6y+5=0$과 평행하므로 원점 O와 직선 $8x-6y+5=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|5|}{\sqrt{8^2+(-6)^2}}=\dfrac{1}{2}$

$\therefore \triangle OAP=\dfrac{1}{2}\cdot 5\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{5}{4}$ 답 $\dfrac{5}{4}$

09 $\overline{AB}=\sqrt{(0-4)^2+(2-0)^2}=2\sqrt{5}$

직선 AB의 방정식은

$\dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{2}=1 \quad \therefore x+2y-4=0$

점 C와 직선 AB 사이의 거리는

$\dfrac{|1\cdot a+2\cdot 5-4|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\dfrac{|a+6|}{\sqrt{5}}$

△ABC의 넓이가 12이므로

$\dfrac{1}{2}\cdot 2\sqrt{5}\cdot\dfrac{|a+6|}{\sqrt{5}}=12, \quad |a+6|=12$

$a+6=-12$ 또는 $a+6=12$

$\therefore a=-18$ 또는 $a=6$

그런데 $a>0$이므로 $a=6$ 답 ④

10 주어진 두 직선이 평행하므로 직선 $y=3x-2$ 위의 한 점 $(0,\ -2)$와 직선 $y=3x+k$, 즉 $3x-y+k=0$ 사이의 거리가 $\sqrt{10}$이다.

$$\frac{|3\cdot0-1\cdot(-2)+k|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\sqrt{10}, \qquad |k+2|=10$$

$k+2=-10$ 또는 $k+2=10$

$\therefore\ k=-12$ 또는 $k=8$

이때 $k<0$이므로 $\quad k=-12$

답 ②

11 두 직선 l, l'이 평행하므로 $\overline{AB}$의 길이의 최솟값은 평행한 두 직선 사이의 거리와 같다.

이때 직선 $l : x-2y-4=0$ 위의 한 점 $(4,\ 0)$과 직선 $l' : x-2y+6=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|1\cdot4-2\cdot0+6|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=2\sqrt{5}$$

따라서 $\overline{AB}$의 길이의 최솟값은 $2\sqrt{5}$이다.

답 $2\sqrt{5}$

12 정사각형 ABCD의 한 변의 길이는 평행한 두 직선 $x+y-4=0$, $x+y+2=0$ 사이의 거리와 같다.

직선 $x+y-4=0$ 위의 한 점 $(0,\ 4)$와 직선 $x+y+2=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|1\cdot0+1\cdot4+2|}{\sqrt{1^2+1^2}}=3\sqrt{2}$$

따라서 한 변의 길이가 $3\sqrt{2}$인 정사각형 ABCD의 넓이는

$(3\sqrt{2})^2=18$

답 18

13 점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면 점 P에서 두 직선에 이르는 거리가 같으므로

$$\frac{|4x-y+1|}{\sqrt{4^2+(-1)^2}}=\frac{|x-4y-1|}{\sqrt{1^2+(-4)^2}}$$

$|4x-y+1|=|x-4y-1|$

$4x-y+1=\pm(x-4y-1)$

$\therefore\ x-y=0$ 또는 $3x+3y+2=0$

따라서 구하는 도형의 방정식은

$x-y=0$

답 ①

$3x+3y+2=0$에 $x=0$, $y=0$을 대입하면
$2\neq0$
이므로 직선 $3x+3y+2=0$은 원점을 지나지 않는다.

14 두 직선 $3x-2y+4=0$, $2x+3y-1=0$이 이루는 각을 이등분하는 직선 위의 점을 $\mathrm{P}(x,\ y)$라 하면 점 P에서 두 직선에 이르는 거리가 같으므로

$$\frac{|3x-2y+4|}{\sqrt{3^2+(-2)^2}}=\frac{|2x+3y-1|}{\sqrt{2^2+3^2}}$$

$|3x-2y+4|=|2x+3y-1|$

$3x-2y+4=\pm(2x+3y-1)$

$\therefore\ 5x+y+3=0$ 또는 $x-5y+5=0$

따라서 기울기가 양수인 직선의 방정식은

$x-5y+5=0$

답 ②

직선 $5x+y+3=0$, 즉 $y=-5x-3$의 기울기는 -5이고, 직선 $x-5y+5=0$, 즉 $y=\frac{1}{5}x+1$의 기울기는 $\frac{1}{5}$이다.

15 직선 $5x+7y-2=0$ 위의 임의의 점 A의 좌표를 $(s,\ t)$라 하면

$5s+7t-2=0$ …… ㉠

선분 OA의 중점 M의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면

$x=\frac{s}{2},\ y=\frac{t}{2}$

$\therefore\ s=2x,\ t=2y$ …… ㉡

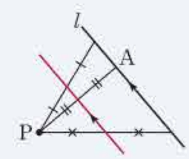
㉡을 ㉠에 대입하면

$10x+14y-2=0 \qquad \therefore\ 5x+7y-1=0$

답 $5x+7y-1=0$

쌤 한마디

오른쪽 그림과 같이 직선 l 위의 임의의 점과 직선 l 밖의 한 점 P를 이은 선분의 중점이 나타내는 도형은 직선 l 위의 한 점 A에 대하여 $\overline{AP}$의 중점을 지나고 직선 l과 평행한 직선이다.



11 원의 방정식

26 원의 방정식

86쪽

01 (3) 두 점 $(3,\ -1)$, $(2,\ -4)$ 사이의 거리는

$\sqrt{(2-3)^2+\{-4-(-1)\}^2}=\sqrt{10}$

이므로 구하는 원의 방정식은

$(x-3)^2+(y+1)^2=10$

답 (1) $(x+5)^2+(y-4)^2=9$

(2) $x^2+y^2=49$

(3) $(x-3)^2+(y+1)^2=10$

02 답 (1) $(x-2)^2+(y+6)^2=36$

(2) $(x+7)^2+(y+4)^2=49$

(3) $(x-5)^2+(y+5)^2=25$

03 $x^2+y^2-4x+2y+k=0$에서

$(x^2-4x+4)+(y^2+2y+1)=-k+4+1$

$\therefore (x-2)^2+(y+1)^2=-k+5$

이 방정식이 원을 나타내려면

$-k+5>0 \qquad \therefore k<5$

답 $k<5$

04 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$x^2+y^2-4-(x^2+y^2+6x-4y+3)=0$

$\therefore 6x-4y+7=0$

답 $6x-4y+7=0$

05 원 $(x+1)^2+(y-6)^2=25$의 반지름의 길이는 5이므로 주어진 조건을 만족시키는 원의 방정식은

$(x-2)^2+(y+4)^2=25$

이 원이 점 $(7,\ k)$를 지나므로

$25+(k+4)^2=25$

$(k+4)^2=0 \qquad \therefore k=-4$

답 -4

06 원 $(x+1)^2+(y-5)^2=10$의 중심의 좌표는

$(-1,\ 5)$

두 점 $(-1,\ 5)$, $(3,\ 7)$ 사이의 거리는

$\sqrt{(3+1)^2+(7-5)^2}=2\sqrt{5}$

따라서 원의 방정식은

$(x+1)^2+(y-5)^2=20$

① $x=-5$, $y=3$을 대입하면 $\quad 16+4=20$

② $x=-5$, $y=7$을 대입하면 $\quad 16+4=20$

③ $x=-3$, $y=2$를 대입하면 $\quad 4+9\neq 20$

④ $x=-3$, $y=9$를 대입하면 $\quad 4+16=20$

⑤ $x=1$, $y=1$을 대입하면 $\quad 4+16=20$

따라서 원 위의 점이 아닌 것은 ③이다.

답 ③

Q BOX

두 점 $A(x_1,\ y_1)$, $B(x_2,\ y_2)$에 대하여 선분 AB를 $m:n\ (m>0,\ n>0)$으로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\dfrac{mx_2+nx_1}{m+n},\ \dfrac{my_2+ny_1}{m+n}\right)$

두 원의 공통인 현의 방정식

원의 중심인 점 $(-1,\ 5)$와 원 위의 점 $(3,\ 7)$ 사이의 거리는 원의 반지름의 길이와 같다.

반지름의 길이가 r인 원의 둘레의 길이는 $2\pi r$이다.

07 $\overline{AB}$를 $3:1$로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\dfrac{3\cdot 0+1\cdot(-4)}{3+1},\ \dfrac{3\cdot 8+1\cdot 0}{3+1}\right) \qquad \therefore (-1,\ 6)$

두 점 $(-1,\ 6)$, $A(-4,\ 0)$ 사이의 거리는

$\sqrt{(-4+1)^2+(0-6)^2}=3\sqrt{5}$

따라서 구하는 원의 방정식은

$(x+1)^2+(y-6)^2=45$

답 $(x+1)^2+(y-6)^2=45$

08 원의 중심의 좌표를 $(0,\ a)$, 반지름의 길이를 r라 하면 원의 방정식은

$x^2+(y-a)^2=r^2$

이 원이 점 $(2,\ -2)$를 지나므로

$2^2+(-2-a)^2=r^2$

$\therefore a^2+4a+8=r^2 \qquad \cdots\cdots ㉠$

또 원이 점 $(3,\ -1)$을 지나므로

$3^2+(-1-a)^2=r^2$

$\therefore a^2+2a+10=r^2 \qquad \cdots\cdots ㉡$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad a=1,\ r^2=13$

따라서 구하는 원의 방정식은

$x^2+(y-1)^2=13$ 답 $x^2+(y-1)^2=13$

다른 풀이 원의 중심을 $A(0,\ a)$라 하고 $B(2,\ -2)$, $C(3,\ -1)$이라 하면 $\overline{AB}=\overline{AC}$이므로

$\sqrt{2^2+(-2-a)^2}=\sqrt{3^2+(-1-a)^2}$

양변을 제곱하여 정리하면

$2a-2=0 \qquad \therefore a=1$

따라서 원의 중심은 $A(0,\ 1)$이고 반지름의 길이는

$\overline{AB}=\sqrt{2^2+(-2-1)^2}=\sqrt{13}$

이므로 구하는 원의 방정식은 $\quad x^2+(y-1)^2=13$

09 원의 중심의 좌표를 $(a,\ 0)$, 반지름의 길이를 r라 하면 원의 방정식은

$(x-a)^2+y^2=r^2$

이 원이 점 $(3,\ -2)$를 지나므로

$(3-a)^2+(-2)^2=r^2$

$\therefore a^2-6a+13=r^2 \qquad \cdots\cdots ㉠$

또 원이 점 $(4,\ 1)$을 지나므로

$(4-a)^2+1^2=r^2$

$\therefore a^2-8a+17=r^2 \qquad \cdots\cdots ㉡$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad a=2,\ r^2=5$

따라서 원의 방정식은

$(x-2)^2+y^2=5$

ㄱ. 중심의 좌표는 $(2,\ 0)$이다.

ㄴ. $(0-2)^2+(-2)^2\neq 5$이므로 원은 점 $(0,\ -2)$를 지나지 않는다.

ㄷ. 원의 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$이므로 둘레의 길이는 $2\pi\cdot\sqrt{5}=2\sqrt{5}\pi$이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ뿐이다.

답 ①

10 원의 중심의 좌표를 $(a,\ a+3)$, 반지름의 길이를 r라 하면 원의 방정식은

$(x-a)^2+(y-a-3)^2=r^2$

이 원이 점 $(-6,\ 2)$를 지나므로

$(-6-a)^2+(-a-1)^2=r^2$

$\therefore\ 2a^2+14a+37=r^2$ …… ㉠

또 원이 점 $(-1,\ 7)$을 지나므로

$(-1-a)^2+(-a+4)^2=r^2$

$\therefore\ 2a^2-6a+17=r^2$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-1,\ r^2=25$

따라서 구하는 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{25}=5$이다.

답 ④

11 원의 중심의 좌표는

$\left(\frac{1+7}{2},\ \frac{-7-1}{2}\right)$ $\therefore\ (4,\ -4)$

원의 반지름의 길이는

$\frac{\sqrt{(7-1)^2+(-1+7)^2}}{2}=3\sqrt{2}$

따라서 원의 방정식은

$(x-4)^2+(y+4)^2=18$

$\therefore\ x^2+y^2-8x+8y+14=0$

즉 $a=-8,\ b=8,\ c=14$이므로

$a+b+c=14$

답 14

12 $\mathrm{P}(10,\ 0)$, $\mathrm{Q}(0,\ 10)$이고, $\overline{\mathrm{PQ}}$의 중점이 원의 중심이므로 그 좌표는

직선 $x+y-10=0$의 x절편은 10, y절편은 10이다.

$\left(\frac{10+0}{2},\ \frac{0+10}{2}\right)$ $\therefore\ (5,\ 5)$

$\overline{\mathrm{PQ}}$가 원의 지름이므로 원의 반지름의 길이는

$\frac{1}{2}\overline{\mathrm{PQ}}=\frac{1}{2}\sqrt{(-10)^2+10^2}=5\sqrt{2}$

따라서 구하는 원의 방정식은

$(x-5)^2+(y-5)^2=50$

답 ①

13 원의 중심을 $\mathrm{P}(a,\ b)$라 하면

$\overline{\mathrm{PO}}=\overline{\mathrm{PA}}=\overline{\mathrm{PB}}$

$\overline{\mathrm{PO}}=\overline{\mathrm{PA}}$에서 $\overline{\mathrm{PO}}^2=\overline{\mathrm{PA}}^2$이므로

$a^2+b^2=(a-2)^2+(b-6)^2$

$\therefore\ a+3b-10=0$ …… ㉠

$\overline{\mathrm{PO}}=\overline{\mathrm{PB}}$에서 $\overline{\mathrm{PO}}^2=\overline{\mathrm{PB}}^2$이므로

$a^2+b^2=(a-4)^2+(b-2)^2$

$\therefore\ 2a+b-5=0$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1,\ b=3$

따라서 원의 반지름의 길이는

$\overline{\mathrm{PO}}=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$

$\overline{\mathrm{PA}}$, $\overline{\mathrm{PB}}$의 길이를 이용하여 반지름의 길이를 구할 수도 있다.

이므로 원의 넓이는

$\pi\cdot(\sqrt{10})^2=10\pi$

답 10π

중심이 점 $(1,\ 3)$이고 반지름의 길이가 $\sqrt{10}$인 원이다.

14 원의 중심을 $\mathrm{P}(a,\ b)$라 하면

$\overline{\mathrm{PA}}=\overline{\mathrm{PB}}=\overline{\mathrm{PC}}$

$\overline{\mathrm{PA}}=\overline{\mathrm{PB}}$에서 $\overline{\mathrm{PA}}^2=\overline{\mathrm{PB}}^2$이므로

$(a+6)^2+b^2=(a+2)^2+(b-8)^2$

$\therefore\ a+2b-4=0$ …… ㉠

$\overline{\mathrm{PB}}=\overline{\mathrm{PC}}$에서 $\overline{\mathrm{PB}}^2=\overline{\mathrm{PC}}^2$이므로

$(a+2)^2+(b-8)^2=(a-1)^2+(b-7)^2$

$\therefore\ 3a-b+9=0$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-2,\ b=3$

즉 $\mathrm{P}(-2,\ 3)$이므로 원의 반지름의 길이는

$\overline{\mathrm{PA}}=\sqrt{(-2+6)^2+3^2}=5$

따라서 주어진 세 점을 지나는 원의 방정식은

$(x+2)^2+(y-3)^2=25$

이므로 $y=0$을 대입하면

x축 위의 점의 y좌표는 0이다.

$(x+2)^2=16,\quad x+2=\pm 4$

$\therefore\ x=-6$ 또는 $x=2$

따라서 x축과의 교점의 좌표는 $(-6,\ 0)$, $(2,\ 0)$이므로 구하는 거리는 8이다.

답 ④

15 원의 중심을 $\mathrm{P}(a,\ b)$라 하면

$\overline{\mathrm{PA}}=\overline{\mathrm{PB}}=\overline{\mathrm{PC}}$

$\overline{\mathrm{PA}}=\overline{\mathrm{PB}}$에서 $\overline{\mathrm{PA}}^2=\overline{\mathrm{PB}}^2$이므로

$(a+3)^2+(b-7)^2=(a-1)^2+(b+5)^2$

$\therefore\ a-3b+4=0$ …… ㉠

$\overline{\mathrm{PB}}=\overline{\mathrm{PC}}$에서 $\overline{\mathrm{PB}}^2=\overline{\mathrm{PC}}^2$이므로

$(a-1)^2+(b+5)^2=(a-9)^2+(b-1)^2$

$\therefore\ 4a+3b-14=0$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=2,\ b=2$

따라서 원의 반지름의 길이는

$\overline{\mathrm{PA}}=\sqrt{(2+3)^2+(2-7)^2}=5\sqrt{2}$

이므로 원의 방정식은

$(x-2)^2+(y-2)^2=50$

이때 점 $\mathrm{D}(3,\ k)$가 이 원 위의 점이므로

$(3-2)^2+(k-2)^2=50$

$k^2-4k-45=0,\quad (k+5)(k-9)=0$

$\therefore\ k=-5$ 또는 $k=9$

그런데 $k>0$이므로 $k=9$

답 9

16 주어진 원이 점 $(0,\ 6)$에서 y축에 접하므로 중심의 좌표를

제2사분면 위의 점은 (x좌표)<0

$(-a,\ 6)\ (a>0)$

이라 할 수 있다.

이때 이 원의 넓이가 25π이므로 반지름의 길이는 5이다.

즉 $|-a|=5$이므로

$a=5\ (\because\ a>0)$

따라서 원의 방정식은

$(x+5)^2+(y-6)^2=25$

답 $(x+5)^2+(y-6)^2=25$

17 원의 중심이 제3사분면 위에 있으므로 원의 반지름의 길이를 r라 하면 원의 방정식은

$(x+r)^2+(y+r)^2=r^2$

이 원이 점 $(-4, -2)$를 지나므로

$(-4+r)^2+(-2+r)^2=r^2$

$r^2-12r+20=0,\quad (r-2)(r-10)=0$

$\therefore r=2$ 또는 $r=10$

따라서 두 원의 넓이의 합은

$\pi\cdot 2^2+\pi\cdot 10^2=104\pi$ 답 ③

18 원의 중심이 제1사분면 위에 있으므로 원의 반지름의 길이를 r라 하면 중심의 좌표는 (r, r)이다.

이때 원의 중심 (r, r)가 직선 $7x-3y=8$ 위에 있으므로

$7r-3r=8,\quad 4r=8$

$\therefore r=2$

따라서 구하는 원의 방정식은

$(x-2)^2+(y-2)^2=4$

답 $(x-2)^2+(y-2)^2=4$

19 원의 방정식을 $(x-a)^2+(y-b)^2=b^2$이라 하면 원이 점 $(1, 2)$를 지나므로

$(1-a)^2+(2-b)^2=b^2$

$\therefore a^2-2a-4b+5=0$ …… ㉠

또 원이 점 $(1, 8)$을 지나므로

$(1-a)^2+(8-b)^2=b^2$

$\therefore a^2-2a-16b+65=0$ …… ㉡

㉠−㉡을 하면 $12b-60=0\quad \therefore b=5$

$b=5$를 ㉠에 대입하면

$a^2-2a-15=0,\quad (a+3)(a-5)=0$

$\therefore a=-3$ 또는 $a=5$

따라서 두 원의 중심의 좌표가 각각 $(-3, 5)$, $(5, 5)$이므로 두 원의 중심 사이의 거리는

$|5-(-3)|=8$ 답 ④

20 $x^2+y^2-4x-2y+1=0$에서

$(x^2-4x+4)+(y^2-2y+1)=-1+4+1$

$\therefore (x-2)^2+(y-1)^2=4$ …… ㉠

따라서 주어진 방정식은 중심이 점 $(2, 1)$이고 반지름의 길이가 2인 원을 나타낸다.

ㄴ. 도형 위의 임의의 두 점을 연결한 선분의 길이의 최댓값은 지름의 길이와 같으므로 4이다.

ㄷ. (반지름의 길이)=|(중심의 x좌표)|=2이므로 y축에 접한다.

ㄹ. ㉠에 $x=4$, $y=1$을 대입하면

$(4-2)^2+(1-1)^2=4$

이므로 점 $(4, 1)$을 지난다.

ㅁ. y축에 접하므로 y축과 한 점에서 만난다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다. 답 ㄱ, ㄴ, ㄹ

Q BOX

점 $(-4, -2)$는 제3사분면 위의 점이므로 원의 중심도 제3사분면 위에 있다.

$(x-1)^2+(y+2k)^2=4k^2-k+1$에서 $4k^2-k+1>0$이므로 중심의 좌표가 $(1, -2k)$, 반지름의 길이가 $\sqrt{4k^2-k+1}$인 원이다.

x축에 접하는 원의 방정식

(반지름의 길이) =|(중심의 y좌표)| =6

두 원의 넓이를 동시에 이등분하는 직선은 두 원의 중심을 지난다.

두 점 (x_1, y_1), (x_2, y_2)를 지나는 직선의 방정식은

$y-y_1=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$ (단, $x_1\neq x_2$)

21 $x^2+y^2+8x-2y+8=0$에서

$(x^2+8x+16)+(y^2-2y+1)=-8+16+1$

$\therefore (x+4)^2+(y-1)^2=9$

이 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{9}=3$

$x^2+y^2-12x-6y-4=0$에서

$(x^2-12x+36)+(y^2-6y+9)=4+36+9$

$\therefore (x-6)^2+(y-3)^2=49$

이 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{49}=7$

따라서 구하는 반지름의 길이의 합은

$3+7=10$ 답 ①

22 $x^2+y^2-2x+4ky+k=0$에서

$(x^2-2x+1)+(y^2+4ky+4k^2)=-k+1+4k^2$

따라서 $4k^2-k+1=2^2$이므로

$4k^2-k-3=0,\quad (4k+3)(k-1)=0$

$\therefore k=-\dfrac{3}{4}$ 또는 $k=1$ 답 $-\dfrac{3}{4}$, 1

23 $x^2+y^2+6x-12y+10=0$에서

$(x^2+6x+9)+(y^2-12y+36)=-10+9+36$

$\therefore (x+3)^2+(y-6)^2=35$

이 원의 중심의 좌표는

$(-3, 6)$

따라서 중심이 점 $(-3, 6)$이고 x축에 접하는 원의 방정식은

$(x+3)^2+(y-6)^2=36$

답 $(x+3)^2+(y-6)^2=36$

24 $x^2+y^2+2x-2y-4=0$에서

$(x^2+2x+1)+(y^2-2y+1)=4+1+1$

$\therefore (x+1)^2+(y-1)^2=6$

이 원의 중심의 좌표는 $(-1, 1)$

$x^2+y^2-4x-14y+45=0$에서

$(x^2-4x+4)+(y^2-14y+49)=-45+4+49$

$\therefore (x-2)^2+(y-7)^2=8$

이 원의 중심의 좌표는 $(2, 7)$

따라서 두 점 $(-1, 1)$, $(2, 7)$을 지나는 직선의 방정식은

$y-1=\dfrac{7-1}{2+1}(x+1)\quad \therefore y=2x+3$

답 $y=2x+3$

25 ① $x^2+y^2-2x-y+1=0$에서

$(x^2-2x+1)+\left(y^2-y+\dfrac{1}{4}\right)=-1+1+\dfrac{1}{4}$

$\therefore (x-1)^2+\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}$

② $x^2+y^2+3x+3y+4=0$에서

$\left(x^2+3x+\dfrac{9}{4}\right)+\left(y^2+3y+\dfrac{9}{4}\right)=-4+\dfrac{9}{4}+\dfrac{9}{4}$

$\therefore \left(x+\dfrac{3}{2}\right)^2+\left(y+\dfrac{3}{2}\right)^2=\dfrac{1}{2}$

③ $x^2+y^2+2x+4y+4=0$에서

$(x^2+2x+1)+(y^2+4y+4)=-4+1+4$

$\therefore (x+1)^2+(y+2)^2=1$

④ $x^2+y^2-4x+2y+1=0$에서

$(x^2-4x+4)+(y^2+2y+1)=-1+4+1$

$\therefore (x-2)^2+(y+1)^2=4$

⑤ $x^2+y^2+4x-4y+8=0$에서

$(x^2+4x+4)+(y^2-4y+4)=-8+4+4$

$\therefore (x+2)^2+(y-2)^2=0$

따라서 원의 방정식이 아닌 것은 ⑤이다. 답 ⑤

Q BOX

점 $(-2,\ 2)$를 나타낸다.

26 $x^2+y^2+4ax-6ay+26=0$에서

$(x^2+4ax+4a^2)+(y^2-6ay+9a^2)$

$=-26+4a^2+9a^2$

$\therefore (x+2a)^2+(y-3a)^2=13a^2-26$

이 방정식이 원을 나타내려면

$13a^2-26>0,\qquad a^2>2$

$\therefore a<-\sqrt{2}$ 또는 $a>\sqrt{2}$ 답 ④

27 $x^2+y^2+2(a-1)x-4ay+6a^2-23=0$에서

$\{x^2+2(a-1)x+(a-1)^2\}+(y^2-4ay+4a^2)$

$=-6a^2+23+(a-1)^2+4a^2$

$\therefore \{x+(a-1)\}^2+(y-2a)^2=-a^2-2a+24$

이 방정식이 원을 나타내려면

$-a^2-2a+24>0,\qquad a^2+2a-24<0$

$(a+6)(a-4)<0\qquad \therefore -6<a<4$

원의 넓이가 최대이려면 반지름의 길이가 최대이어야 하고

$\sqrt{-a^2-2a+24}=\sqrt{-(a+1)^2+25}$

$-a^2-2a+24$
$=-(a^2+2a+1)+25$
$=-(a+1)^2+25$

이므로 $-6<a<4$에서 $a=-1$일 때 반지름의 길이가 최대이다.

따라서 구하는 원의 반지름의 길이는 5이다. 답 5

28 $x^2+y^2+10x-6y+18=0$에서

$(x^2+10x+25)+(y^2-6y+9)=-18+25+9$

$\therefore (x+5)^2+(y-3)^2=16$

점 $A(3,\ -3)$과 원의 중심 $(-5,\ 3)$ 사이의 거리는

$\sqrt{(-5-3)^2+(3+3)^2}=10$

이때 원의 반지름의 길이가 4이므로

$M=10+4=14,\ m=10-4=6$

$\therefore Mm=84$ 답 ②

29 원점 O와 원의 중심 $(a,\ b)$ 사이의 거리는

$\sqrt{a^2+b^2}$

이때 원의 반지름의 길이가 3, $\overline{OP}$의 길이의 최댓값이 13이므로

$\sqrt{a^2+b^2}+3=13,\qquad \sqrt{a^2+b^2}=10$

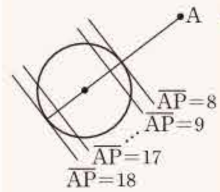
양변을 제곱하면 $\quad a^2+b^2=100$ 답 ④

30 점 $A(5,\ 12)$와 원의 중심 $(0,\ 0)$ 사이의 거리는

$\sqrt{5^2+12^2}=13$

이때 원의 반지름의 길이가 5이므로

$13-5\le\overline{AP}\le13+5\qquad \therefore 8\le\overline{AP}\le18$



이때 $\overline{AP}=9,\ 10,\ 11,\ \cdots,\ 17$을 만족시키는 점 P는 각각 2개이고, $\overline{AP}=8,\ 18$을 만족시키는 점 P는 각각 1개이다.

따라서 구하는 점 P의 개수는

$9\cdot2+2\cdot1=20$ 답 20

31 점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면 $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2=34$이므로

$\{(x-2)^2+y^2\}+\{(x-4)^2+y^2\}=34$

$2x^2-12x+20+2y^2=34$

$x^2-6x+y^2-7=0,\qquad (x^2-6x+9)+y^2=7+9$

$\therefore (x-3)^2+y^2=16$

따라서 $a=3,\ b=16$이므로

$a+b=19$ 답 ⑤

32 $P(a,\ b),\ G(x,\ y)$라 하면

$x=\dfrac{4-1+a}{3},\ y=\dfrac{1+5+b}{3}$

$\therefore a=3x-3,\ b=3y-6$ ...... ㉠

점 $P(a,\ b)$가 원 $x^2+y^2=9$ 위의 점이므로

$a^2+b^2=9$ ...... ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $\quad (3x-3)^2+(3y-6)^2=9$

$\therefore (x-1)^2+(y-2)^2=1$

따라서 $p=1,\ q=2,\ r=1$이므로

$pqr=2$ 답 2

33 주어진 조건을 만족시키는 점을 $P(x,\ y)$라 하면 $\overline{AP}:\overline{BP}=3:1$이므로

$\overline{AP}=3\overline{BP}$

$\overline{AP}^2=9\overline{BP}^2$에서

$(x+3)^2+(y-2)^2=9\{(x-5)^2+(y+6)^2\}$

$x^2+y^2-12x+14y+67=0$

$(x^2-12x+36)+(y^2+14y+49)$

$=-67+36+49$

$\therefore (x-6)^2+(y+7)^2=18$

따라서 점 P가 나타내는 도형은 중심의 좌표가 $(6,\ -7)$, 반지름의 길이가 $3\sqrt{2}$인 원이므로 그 넓이는

$\pi\cdot(3\sqrt{2})^2=18\pi$ 답 18π

34 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

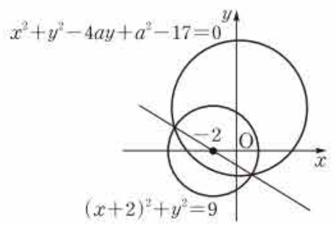
$x^2+y^2+7x-3y+5-(x^2+y^2+ax-4y-1)=0$

$\therefore (7-a)x+y+6=0$, 즉 $y=(a-7)x-6$

이 직선의 기울기가 -4이므로

$a-7=-4\qquad \therefore a=3$ 답 ④

35 원 $x^2+y^2-4ay+a^2-17=0$이 원 $(x+2)^2+y^2=9$의 둘레를 이등분하려면 다음 그림과 같이 두 원의 교점을 지나는 직선이 원 $(x+2)^2+y^2=9$의 중심을 지나야 한다.



$(x+2)^2+y^2=9$에서 $\quad x^2+y^2+4x-5=0$

따라서 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$$x^2+y^2-4ay+a^2-17-(x^2+y^2+4x-5)=0$$

$$\therefore\ 4x+4ay-a^2+12=0$$

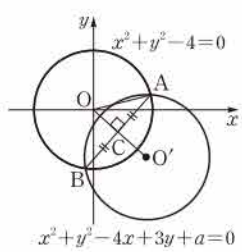
이 직선이 원 $(x+2)^2+y^2=9$의 중심 $(-2,\ 0)$을 지나야 하므로

$$-8-a^2+12=0, \qquad a^2=4$$

$$\therefore\ a=2\ (\because\ a>0)$$

답 2

36 오른쪽 그림과 같이 두 원 $x^2+y^2-4=0$, $x^2+y^2-4x+3y+a=0$의 중심을 각각 O, O′, 두 원의 교점을 A, B라 하고, $\overline{OO'}$과 $\overline{AB}$의 교점을 C라 하자.



$\overline{AB}=2\sqrt{3}$이므로

$$\overline{AC}=\frac{1}{2}\overline{AB}=\sqrt{3}$$

직각삼각형 OAC에서 $\overline{OA}=2$이므로

$$\overline{OC}=\sqrt{\overline{OA}^2-\overline{AC}^2}=\sqrt{2^2-(\sqrt{3})^2}=1$$

한편 두 원의 공통인 현의 방정식은

$$x^2+y^2-4-(x^2+y^2-4x+3y+a)=0$$

$$\therefore\ 4x-3y-a-4=0$$

점 O와 직선 $4x-3y-a-4=0$ 사이의 거리는

$$\overline{OC}=\frac{|-a-4|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\frac{|a+4|}{5}$$

따라서 $\dfrac{|a+4|}{5}=1$이므로

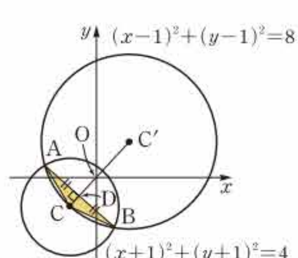
$$|a+4|=5, \qquad a+4=\pm5$$

$$\therefore\ a=-9 \text{ 또는 } a=1$$

즉 구하는 합은 $\quad -9+1=-8$

답 -8

37 오른쪽 그림과 같이 원 C'의 중심을 C′, $\overline{CC'}$과 $\overline{AB}$의 교점을 D라 하자.



$(x+1)^2+(y+1)^2=4$에서

$$x^2+y^2+2x+2y-2=0$$

$(x-1)^2+(y-1)^2=8$에서

$$x^2+y^2-2x-2y-6=0$$

따라서 두 원의 공통인 현의 방정식은

$$x^2+y^2+2x+2y-2-(x^2+y^2-2x-2y-6)=0$$

$$\therefore\ x+y+1=0$$

이 직선과 점 $\mathrm{C}(-1,\ -1)$ 사이의 거리는

$$\overline{CD}=\frac{|-1-1+1|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

직각삼각형 ACD에서 $\overline{AC}=2$이므로

$$\overline{AD}=\sqrt{\overline{AC}^2-\overline{CD}^2}=\sqrt{2^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{14}}{2}$$

$$\therefore\ \overline{AB}=2\overline{AD}=\sqrt{14}$$

$$\therefore\ \triangle ABC=\frac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot\overline{CD}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{14}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{7}}{2}$$

답 ④

27 원과 직선의 위치 관계

W 92쪽

01 (1) 원의 중심 $(0,\ 2)$와 직선 $y=x-2$, 즉 $x-y-2=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|1\cdot0-1\cdot2-2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$$

이때 원의 반지름의 길이가 3이므로 원과 직선은 서로 다른 두 점에서 만난다.

$2\sqrt{2}<3$

(2) $x^2+y^2+6x-2y=0$에서

$$(x^2+6x+9)+(y^2-2y+1)=9+1$$

$$\therefore\ (x+3)^2+(y-1)^2=10$$

원의 중심 $(-3,\ 1)$과 직선 $3x-y-5=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|3\cdot(-3)-1\cdot1-5|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\frac{15}{\sqrt{10}}=\frac{3\sqrt{10}}{2}$$

이때 원의 반지름의 길이가 $\sqrt{10}$이므로 원과 직선은 만나지 않는다.

$\frac{3\sqrt{10}}{2}>\sqrt{10}$

답 (1) 서로 다른 두 점에서 만난다.
(2) 만나지 않는다.

02 (1) $y=x-3$을 $x^2+y^2=5$에 대입하면

$$x^2+(x-3)^2=5$$

$$\therefore\ x^2-3x+2=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$$D=(-3)^2-4\cdot1\cdot2=1>0$$

따라서 원과 직선은 서로 다른 두 점에서 만난다.

(2) $x+y-5=0$, 즉 $y=-x+5$를 $(x+1)^2+(y-2)^2=8$에 대입하면

$$(x+1)^2+(-x+5-2)^2=8$$

$$\therefore\ x^2-2x+1=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(-1)^2-1\cdot1=0$$

따라서 원과 직선은 한 점에서 만난다. (접한다.)

답 (1) 서로 다른 두 점에서 만난다.
(2) 한 점에서 만난다. (접한다.)

03 원의 중심 $(0,\ 0)$과 직선 $2x-3y+k=0$ 사이의 거리는

Q BOX: 이차방정식의 판별식을 이용하여 실수 k의 값 또는 k의 값의 범위를 구할 수도 있다.

$$\frac{|k|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}}=\frac{|k|}{\sqrt{13}}$$

(1) 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면

$$\frac{|k|}{\sqrt{13}}<2, \qquad |k|<2\sqrt{13}$$

$$\therefore\ -2\sqrt{13}<k<2\sqrt{13}$$

(2) 원과 직선이 한 점에서 만나려면

$$\frac{|k|}{\sqrt{13}}=2, \qquad |k|=2\sqrt{13}$$

$\therefore\ k=-2\sqrt{13}$ 또는 $k=2\sqrt{13}$

(3) 원과 직선이 만나지 않으려면

$$\frac{|k|}{\sqrt{13}}>2, \qquad |k|>2\sqrt{13}$$

$\therefore\ k<-2\sqrt{13}$ 또는 $k>2\sqrt{13}$

답 (1) $-2\sqrt{13}<k<2\sqrt{13}$
(2) $\pm2\sqrt{13}$
(3) $k<-2\sqrt{13}$ 또는 $k>2\sqrt{13}$

04 원의 중심 $(2,\ 1)$과 직선 $4x+3y+9=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|4\cdot2+3\cdot1+9|}{\sqrt{4^2+3^2}}=4$$

이때 원의 반지름의 길이가 r이므로 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면

$r>4$

Q BOX: 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면 (원의 중심과 직선 사이의 거리) < (원의 반지름의 길이) 이어야 한다.

따라서 자연수 r의 최솟값은 5이다. 답 5

05 원의 중심 $(0,\ 0)$과 직선 $y=mx-3$, 즉 $mx-y-3=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|-3|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\frac{3}{\sqrt{m^2+1}}$$

원의 반지름의 길이가 $\sqrt{3}$이므로 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면

$$\frac{3}{\sqrt{m^2+1}}<\sqrt{3}, \qquad 3<\sqrt{3m^2+3}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$m^2-2>0, \qquad (m+\sqrt{2})(m-\sqrt{2})>0$$

$\therefore\ m<-\sqrt{2}$ 또는 $m>\sqrt{2}$

답 $m<-\sqrt{2}$ 또는 $m>\sqrt{2}$

다른 풀이 $y=mx-3$을 $x^2+y^2=3$에 대입하면

$$x^2+(mx-3)^2=3$$

$$\therefore\ (m^2+1)x^2-6mx+6=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나므로

$$\frac{D}{4}=(-3m)^2-6(m^2+1)>0$$

$$m^2-2>0, \qquad (m+\sqrt{2})(m-\sqrt{2})>0$$

$\therefore\ m<-\sqrt{2}$ 또는 $m>\sqrt{2}$

06 원의 중심 $(a,\ 5)$와 직선 $6x-8y-a=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|6\cdot a-8\cdot5-a|}{\sqrt{6^2+(-8)^2}}=\frac{|5a-40|}{10}$$

이때 원의 반지름의 길이가 3이므로 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면

$$\frac{|5a-40|}{10}<3, \qquad |5a-40|<30$$

$$-30<5a-40<30, \qquad 10<5a<70$$

$$\therefore\ 2<a<14$$

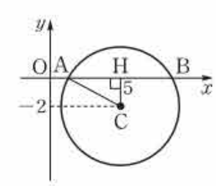
따라서 정수 a는 3, 4, 5, $\cdots$, 13의 11개이다.

답 ②

07 $x^2+y^2-10x+4y+13=0$에서

$$(x^2-10x+25)+(y^2+4y+4)=-13+25+4$$

$$\therefore\ (x-5)^2+(y+2)^2=16$$



오른쪽 그림과 같이 원의 중심을 C$(5,\ -2)$라 하고, 원과 x축의 두 교점을 A, B라 하자. 점 C에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{\text{CH}}=2$$

직각삼각형 CAH에서 $\overline{\text{CA}}=4$이므로

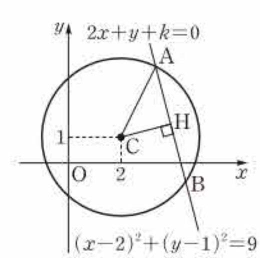
$$\overline{\text{AH}}=\sqrt{\overline{\text{CA}}^2-\overline{\text{CH}}^2}=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$$

따라서 구하는 현의 길이는

$$\overline{\text{AB}}=2\overline{\text{AH}}=4\sqrt{3}$$

답 ④

08 오른쪽 그림과 같이 원의 중심을 C$(2,\ 1)$이라 하고, 점 C에서 직선 $2x+y+k=0$에 내린 수선의 발을 H라 하면



$$\overline{\text{CH}}=\frac{|2\cdot2+1\cdot1+k|}{\sqrt{2^2+1^2}}$$

$$=\frac{|5+k|}{\sqrt{5}}$$

직각삼각형 CAH에서

$$\overline{\text{CA}}=3,\ \overline{\text{AH}}=\frac{1}{2}\overline{\text{AB}}=2$$

이므로

$$9=4+\frac{(5+k)^2}{5}$$

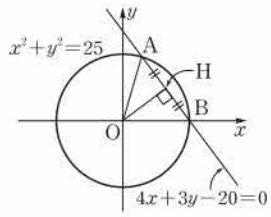
$$(5+k)^2=25, \qquad 5+k=\pm5$$

$\therefore\ k=-10\ (\because\ k\neq0)$

답 ①

Q BOX

09 오른쪽 그림과 같이 원과 직선의 두 교점을 A, B라 하고, 원의 중심 O(0, 0)에서 직선 $4x+3y-20=0$에 내린 수선의 발을 H라 하면



$$\overline{OH}=\frac{|-20|}{\sqrt{4^2+3^2}}=4$$

직각삼각형 OAH에서 $\overline{OA}=5$이므로

$$\overline{AH}=\sqrt{\overline{OA}^2-\overline{OH}^2}=\sqrt{5^2-4^2}=3$$

두 점 A, B를 지나는 원 중에서 넓이가 최소인 원은 $\overline{AB}$를 지름으로 하는 원이므로 구하는 넓이는

$\pi\cdot 3^2=9\pi$ 답 9π

10 원의 중심 (2, 2)와 직선 $x-3y+k=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|1\cdot 2-3\cdot 2+k|}{\sqrt{1^2+(-3)^2}}=\frac{|-4+k|}{\sqrt{10}}$$

원의 반지름의 길이가 $\sqrt{10}$이므로 원과 직선이 한 점에서 만나려면

$\frac{|-4+k|}{\sqrt{10}}=\sqrt{10}$, $\quad |-4+k|=10$

원과 직선이 한 점에서 만나려면 (원의 중심과 직선 사이의 거리) =(원의 반지름의 길이)이어야 한다.

$-4+k=\pm 10$

$\therefore k=14$ ($\because k>0$) 답 ⑤

11 원의 반지름의 길이를 r라 하면

$\pi r^2=20\pi \quad \therefore r=2\sqrt{5}$ ($\because r>0$)

원의 중심 $(-1, 3)$과 직선 $2x+y+k=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|2\cdot(-1)+1\cdot 3+k|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{|1+k|}{\sqrt{5}}$$

이므로 원과 직선이 접하려면

$\frac{|1+k|}{\sqrt{5}}=2\sqrt{5}$, $\quad |1+k|=10$

$1+k=-10$ 또는 $1+k=10$

$\therefore k=-11$ 또는 $k=9$

따라서 모든 k의 값의 합은

$-11+9=-2$ 답 -2

12 원의 중심이 제2사분면 위에 있으므로 원의 반지름의 길이를 r라 하면 원의 방정식은

(x좌표)<0, (y좌표)>0

$(x+r)^2+(y-r)^2=r^2$

이 원의 중심 $(-r, r)$와 직선 $3x-4y+6=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|-3r-4r+6|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{|-7r+6|}{5}$$

원의 반지름의 길이가 r이므로 원과 직선이 접하려면

$\frac{|-7r+6|}{5}=r$, $\quad |-7r+6|=5r$

$-7r+6=-5r$ 또는 $-7r+6=5r$

$\therefore r=3$ 또는 $r=\frac{1}{2}$

따라서 두 원의 넓이의 합은

$\pi\cdot 3^2+\pi\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{37}{4}\pi$ 답 $\frac{37}{4}\pi$

13 두 직선 $y=x-4$, $y=x+4$가 서로 평행하므로 구하는 두 원의 중심은 직선 $y=x$ 위에 있다.

즉 원의 중심의 좌표를 (a, a)로 놓을 수 있다.

한편 두 직선 $y=x-4$, $y=x+4$ 사이의 거리는 직선 $y=x-4$ 위의 점 $(0, -4)$와 직선 $y=x+4$, 즉 $x-y+4=0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|-1\cdot(-4)+4|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=4\sqrt{2}$$

즉 원의 반지름의 길이는 $2\sqrt{2}$이므로 원의 방정식은

$\frac{1}{2}\cdot 4\sqrt{2}=2\sqrt{2}$

$(x-a)^2+(y-a)^2=8$

이때 이 원이 원점을 지나므로

$a^2+a^2=8$, $\quad a^2=4$

$\therefore a=-2$ 또는 $a=2$

따라서 두 원의 중심의 좌표는 $(-2, -2)$, $(2, 2)$이므로 구하는 거리는

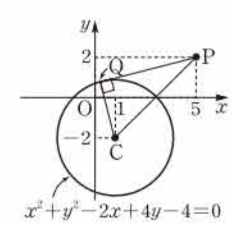
$\sqrt{(2+2)^2+(2+2)^2}=4\sqrt{2}$ 답 ④

14 $x^2+y^2-2x+4y-4=0$에서

$(x^2-2x+1)+(y^2+4y+4)=4+1+4$

$\therefore (x-1)^2+(y+2)^2=9$

오른쪽 그림과 같이 원의 중심을 C$(1, -2)$라 하면



$\overline{CP}$

$=\sqrt{(5-1)^2+(2+2)^2}$

$=4\sqrt{2}$

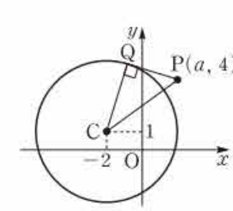
직각삼각형 CQP에서 $\overline{CQ}=3$이므로

원 $(x-1)^2+(y+2)^2=9$의 반지름의 길이

$\overline{PQ}=\sqrt{\overline{CP}^2-\overline{CQ}^2}$

$=\sqrt{(4\sqrt{2})^2-3^2}=\sqrt{23}$ 답 $\sqrt{23}$

15 오른쪽 그림과 같이 원의 중심을 C라 하면 C$(-2, 1)$이므로



$\overline{CP}$

$=\sqrt{(a+2)^2+(4-1)^2}$

$=\sqrt{a^2+4a+13}$

접점을 Q라 하면 직각삼각형 CPQ에서 $\overline{CQ}=4$, $\overline{PQ}=3$이므로

원 $(x+2)^2+(y-1)^2=16$의 반지름의 길이

$\overline{CP}^2=\overline{CQ}^2+\overline{PQ}^2$

$a^2+4a+13=4^2+3^2$

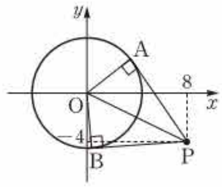
$a^2+4a-12=0$, $\quad (a+6)(a-2)=0$

$\therefore a=-6$ 또는 $a=2$

따라서 모든 a의 값의 합은

$-6+2=-4$ 답 ②

16 원의 중심이 O(0, 0)이므로



$\overline{OP}=\sqrt{8^2+(-4)^2}$
$=4\sqrt{5}$

직각삼각형 AOP에서

$\overline{OA}=2\sqrt{5}$이므로

원 $x^2+y^2=20$의 반지름의 길이

$\overline{AP}=\sqrt{\overline{OP}^2-\overline{OA}^2}$
$=\sqrt{(4\sqrt{5})^2-(2\sqrt{5})^2}=2\sqrt{15}$

이때 △AOP≡△BOP (RHS 합동)이므로

□AOBP=2△AOP
$=2\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{15}\cdot 2\sqrt{5}\right)=20\sqrt{3}$

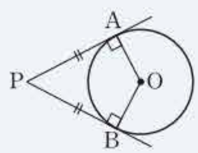
답 $20\sqrt{3}$

쌤 한마디

원의 접선의 성질

원 밖의 한 점에서 원에 그은 두 접선의 길이는 같다.

➡ $\overline{PA}=\overline{PB}$



17 원의 중심 (0, 0)과 직선 $y=kx+6$, 즉 $kx-y+6=0$ 사이의 거리는

$\frac{|6|}{\sqrt{k^2+(-1)^2}}=\frac{6}{\sqrt{k^2+1}}$

이때 원의 반지름의 길이가 3이므로 원과 직선이 만나지 않으려면

$\frac{6}{\sqrt{k^2+1}}>3,\quad 2>\sqrt{k^2+1}$

원과 직선이 만나지 않으려면
(원의 중심과 직선 사이의 거리)
>(원의 반지름의 길이)
이어야 한다.

양변을 제곱하여 정리하면

$k^2<3\quad \therefore -\sqrt{3}<k<\sqrt{3}$

따라서 $\alpha=-\sqrt{3}$, $\beta=\sqrt{3}$이므로

$\alpha^2+\beta^2=(-\sqrt{3})^2+(\sqrt{3})^2=6$ 답 ③

다른 풀이 $y=kx+6$을 $x^2+y^2=9$에 대입하면

$x^2+(kx+6)^2=9$

$\therefore (k^2+1)x^2+12kx+27=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면 원과 직선이 만나지 않으므로

$\frac{D}{4}=(6k)^2-27(k^2+1)<0$

$k^2-3<0,\quad k^2<3$

$\therefore -\sqrt{3}<k<\sqrt{3}$

18 $x^2+y^2-4x+6y-4=0$에서

$(x^2-4x+4)+(y^2+6y+9)=4+4+9$

$\therefore (x-2)^2+(y+3)^2=17$

원의 중심 (2, −3)과 직선 $y=4x+k$, 즉 $4x-y+k=0$ 사이의 거리는

$\frac{|4\cdot 2-(-3)+k|}{\sqrt{4^2+(-1)^2}}=\frac{|11+k|}{\sqrt{17}}$

이때 원의 반지름의 길이가 $\sqrt{17}$이므로 원과 직선이 만나지 않으려면

$\frac{|11+k|}{\sqrt{17}}>\sqrt{17},\quad |11+k|>17$

$11+k<-17$ 또는 $11+k>17$

$\therefore k<-28$ 또는 $k>6$

따라서 음의 정수 k의 최댓값은 −29이다. 답 ②

19 두 점 (−3, 0), (5, −4)를 지름의 양 끝 점으로 하는 원의 중심의 좌표는

$\left(\frac{-3+5}{2},\ \frac{0-4}{2}\right)\quad \therefore (1, -2)$

원의 반지름의 길이는

$\frac{1}{2}\sqrt{(5+3)^2+(-4)^2}=2\sqrt{5}$

원의 중심 (1, −2)와 직선 $y=2x+k$, 즉 $2x-y+k=0$ 사이의 거리는

$\frac{|2\cdot 1-1\cdot(-2)+k|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{|4+k|}{\sqrt{5}}$

이므로 원과 직선이 만나지 않으려면

$\frac{|4+k|}{\sqrt{5}}>2\sqrt{5},\quad |4+k|>10$

$4+k<-10$ 또는 $4+k>10$

$\therefore k<-14$ 또는 $k>6$

답 $k<-14$ 또는 $k>6$

20 원의 중심 (−1, 3)과 직선 $x+y+8=0$ 사이의 거리는

$\frac{|1\cdot(-1)+1\cdot 3+8|}{\sqrt{1^2+1^2}}=5\sqrt{2}$

이때 원의 반지름의 길이가 $2\sqrt{2}$이므로

$M=5\sqrt{2}+2\sqrt{2}=7\sqrt{2}$, $m=5\sqrt{2}-2\sqrt{2}=3\sqrt{2}$

$\therefore Mm=42$ 답 ②

21 $x^2+y^2-8x+12y+k=0$에서

$(x^2-8x+16)+(y^2+12y+36)=-k+16+36$

$\therefore (x-4)^2+(y+6)^2=52-k$

$k<52$이므로 $52-k>0$

원의 중심 (4, −6)과 직선 $3x-4y-6=0$ 사이의 거리는

$\frac{|3\cdot 4-4\cdot(-6)-6|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=6$

이때 원의 반지름의 길이가 $\sqrt{52-k}$이고, 원 위의 점 P와 직선 사이의 거리의 최솟값이 1이므로

$6-\sqrt{52-k}=1,\quad \sqrt{52-k}=5$

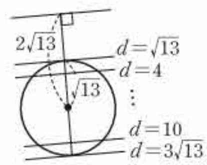
양변을 제곱하면

$52-k=25\quad \therefore k=27$ 답 ④

22 원의 중심 (2, −5)와 직선 $2x-3y+7=0$ 사이의 거리는

$\frac{|2\cdot 2-3\cdot(-5)+7|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}}=2\sqrt{13}$

이때 원의 반지름의 길이가 $\sqrt{13}$이므로 원 위의 점 P와 직선 사이의 거리를 d라 하면



$2\sqrt{13}-\sqrt{13}\le d$

$\le 2\sqrt{13}+\sqrt{13}$

$\therefore \sqrt{13}\le d\le 3\sqrt{13}$

따라서 정수 d는 4, 5, 6, ⋯, 10이고 각각의 거리에 있는 점 P가 2개씩 있으므로 점 P의 개수는

$7\cdot 2=14$ 답 14

28 원의 접선의 방정식 Ⓦ 95쪽

01 (1) $y=5x\pm3\sqrt{5^2+1}$에서 $y=5x\pm3\sqrt{26}$

(2) $y=-4x\pm\sqrt{17}\cdot\sqrt{(-4)^2+1}$에서

$y=-4x\pm17$

답 (1) $y=5x\pm3\sqrt{26}$ (2) $y=-4x\pm17$

02 (2) $-4x-3y=25$에서 $4x+3y=-25$

답 (1) $3x-2y=13$ (2) $4x+3y=-25$

03 접점의 좌표를 (x_1, y_1)이라 하면

$x_1x+y_1y=5$

이 직선이 점 $(3, -1)$을 지나므로

$3x_1-y_1=5 \qquad \therefore y_1=3x_1-5$

점 (x_1, y_1)은 원 $x^2+y^2=5$ 위의 점이므로

$x_1^2+y_1^2=5, \qquad x_1^2+(3x_1-5)^2=5$

$x_1^2-3x_1+2=0, \qquad (x_1-1)(x_1-2)=0$

$\therefore x_1=1$ 또는 $x_1=2$

$\therefore x_1=1,\ y_1=-2$ 또는 $x_1=2,\ y_1=1$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$x-2y=5,\ 2x+y=5$

답 $x-2y=5,\ 2x+y=5$

> 접선 $y+1=m(x-3)$과 원의 중심 $(0, 0)$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 $\sqrt{5}$와 같음을 이용할 수도 있다.

> $x_1=1$이면 $y_1=3\cdot1-5=-2$
> $x_1=2$이면 $y_1=3\cdot2-5=1$

04 직선 $y=3x-5$와 평행한 직선의 기울기는 3이므로 접선의 방정식은

$y=3x\pm\sqrt{10}\cdot\sqrt{3^2+1} \qquad \therefore y=3x\pm10$

따라서 두 직선이 y축과 만나는 점의 좌표는 각각 $(0, 10)$, $(0, -10)$이므로 $\overline{PQ}=20$ 답 ③

05 기울기가 m인 접선의 방정식은

$y=mx\pm\sqrt{2}\cdot\sqrt{m^2+1}$

$\therefore y=mx\pm\sqrt{2m^2+2}$

이 직선이 점 $(5, -3)$을 지나므로

$-3=5m\pm\sqrt{2m^2+2}$

$-3-5m=\pm\sqrt{2m^2+2}$

양변을 제곱하면

$9+30m+25m^2=2m^2+2$

$23m^2+30m+7=0, \qquad (m+1)(23m+7)=0$

$\therefore m=-1\ (\because m$은 정수) 답 -1

06 접선의 방정식을 $y=-2x+k$ (k는 상수)라 하면 원의 중심 $(-3, -1)$과 직선 $y=-2x+k$, 즉 $2x+y-k=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|2\cdot(-3)+1\cdot(-1)-k|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{|k+7|}{\sqrt{5}}$$

이때 원의 반지름의 길이가 2이므로 원과 직선이 접하려면

$\dfrac{|k+7|}{\sqrt{5}}=2, \qquad |k+7|=2\sqrt{5}$

$k+7=\pm2\sqrt{5} \qquad \therefore k=-7\pm2\sqrt{5}$

따라서 두 직선의 y절편은 각각 $-7+2\sqrt{5}$, $-7-2\sqrt{5}$이므로 구하는 곱은

$(-7+2\sqrt{5})(-7-2\sqrt{5})=29$ 답 ⑤

07 원 $x^2+y^2=20$ 위의 점 (a, b)에서의 접선의 방정식은

$ax+by=20 \qquad \therefore y=-\dfrac{a}{b}x+\dfrac{20}{b}$

이 접선의 기울기가 $\dfrac{1}{3}$이므로

$-\dfrac{a}{b}=\dfrac{1}{3} \qquad \therefore b=-3a$

점 (a, b)는 원 $x^2+y^2=20$ 위의 점이므로

$a^2+b^2=20, \qquad a^2+(-3a)^2=20$

$a^2=2 \qquad \therefore a=\pm\sqrt{2}$

따라서 $b=\mp3\sqrt{2}$ (복호동순)이므로

$ab=-6$ 답 -6

08 원 $x^2+y^2=29$ 위의 점 $(2, 5)$에서의 접선의 방정식은

$2x+5y=29 \qquad \therefore y=-\dfrac{2}{5}x+\dfrac{29}{5}$

이 직선과 수직인 직선의 기울기는 $\dfrac{5}{2}$이므로 기울기가 $\dfrac{5}{2}$이고 원 $x^2+y^2=29$에 접하는 직선의 방정식은

$y=\dfrac{5}{2}x\pm\sqrt{29}\cdot\sqrt{\left(\dfrac{5}{2}\right)^2+1}$

$\therefore y=\dfrac{5}{2}x\pm\dfrac{29}{2}$

따라서 y절편이 음수인 것은 $y=\dfrac{5}{2}x-\dfrac{29}{2}$이다.

답 $y=\dfrac{5}{2}x-\dfrac{29}{2}$

> 두 직선이 수직이면 두 직선의 기울기의 곱은 -1이다.

> 직선 $y=\dfrac{5}{2}x+\dfrac{29}{2}$의 y절편은 $\dfrac{29}{2}$이고, 직선 $y=\dfrac{5}{2}x-\dfrac{29}{2}$의 y절편은 $-\dfrac{29}{2}$이다.

09 원 $x^2+y^2=10$ 위의 점 $(-1, 3)$에서의 접선의 방정식은

$-x+3y=10 \qquad \therefore x-3y+10=0$

$x^2+y^2-14x-8y+11k+35=0$에서

$(x^2-14x+49)+(y^2-8y+16)$

$=-11k-35+49+16$

$\therefore (x-7)^2+(y-4)^2=30-11k$

11 원의 방정식

접선과 원의 중심 $(7,\ 4)$ 사이의 거리는

$$\frac{|1\cdot7-3\cdot4+10|}{\sqrt{1^2+(-3)^2}}=\frac{\sqrt{10}}{2}$$

이때 원의 반지름의 길이가 $\sqrt{30-11k}$이므로 원과 직선이 접하려면

$$\sqrt{30-11k}=\frac{\sqrt{10}}{2}$$

양변을 제곱하면

$$30-11k=\frac{5}{2},\qquad 11k=\frac{55}{2}$$

$$\therefore k=\frac{5}{2}$$

답 ⑤

10 접점의 좌표를 $(x_1,\ y_1)$이라 하면 접선의 방정식은

$$x_1x+y_1y=8$$

이 직선이 점 $(0,\ 4)$를 지나므로

$$4y_1=8\qquad \therefore y_1=2$$

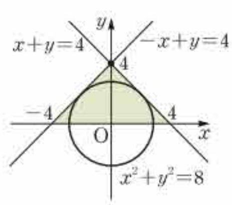
점 $(x_1,\ 2)$는 원 $x^2+y^2=8$ 위의 점이므로

$$x_1^2=4\qquad \therefore x_1=\pm2$$

따라서 접선의 방정식은

$$x+y=4,\ -x+y=4$$

두 접선이 x축과 만나는 점의 좌표는 각각 $(4,\ 0)$, $(-4,\ 0)$이므로 구하는 넓이는



$$\frac{1}{2}\cdot(4+4)\cdot4=16$$

답 ④

다른 풀이 접선의 기울기를 m이라 하면 기울기가 m이고 점 $(0,\ 4)$를 지나는 직선의 방정식은

$$y=mx+4\qquad \therefore mx-y+4=0\qquad \cdots\cdots ㉠$$

원의 중심 $(0,\ 0)$과 직선 ㉠ 사이의 거리는

$$\frac{|4|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\frac{4}{\sqrt{m^2+1}}$$

이때 원의 반지름의 길이가 $2\sqrt{2}$이므로 원과 직선 ㉠이 접하려면

$$\frac{4}{\sqrt{m^2+1}}=2\sqrt{2},\qquad 4=2\sqrt{2}\cdot\sqrt{m^2+1}$$

양변을 제곱하면

$$16=8m^2+8,\qquad m^2=1$$

$$\therefore m=\pm1$$

따라서 접선의 방정식은

$$x-y+4=0,\ x+y-4=0$$

11 접선의 기울기를 m이라 하면 기울기가 m이고 점 $(5,\ 6)$을 지나는 직선의 방정식은

$$y-6=m(x-5)$$

$$\therefore mx-y-5m+6=0$$

$x^2+y^2-2x-8y+13=0$에서

$$(x^2-2x+1)+(y^2-8y+16)=-13+1+16$$

$$\therefore (x-1)^2+(y-4)^2=4$$

원의 중심 $(1,\ 4)$와 직선 $mx-y-5m+6=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|m-4-5m+6|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\frac{|2-4m|}{\sqrt{m^2+1}}$$

이때 원의 반지름의 길이가 2이므로 원과 직선이 접하려면

$$\frac{|2-4m|}{\sqrt{m^2+1}}=2,\qquad |2-4m|=2\cdot\sqrt{m^2+1}$$

양변을 제곱하면

$$16m^2-16m+4=4m^2+4$$

$$3m^2-4m=0,\qquad m(3m-4)=0$$

$$\therefore m=\frac{4}{3}\ (\because m>0)$$

따라서 접선의 방정식은 $y-6=\frac{4}{3}(x-5)$, 즉

Q BOX: $y-6=m(x-5)$에 $m=\frac{4}{3}$를 대입한다.

$y=\frac{4}{3}x-\frac{2}{3}$이고 이 직선이 점 $(2,\ a)$를 지나므로

$$a=\frac{4}{3}\cdot2-\frac{2}{3}=2$$

답 2

12 접선의 기울기를 m이라 하면 기울기가 m이고 점 $(-2,\ 0)$을 지나는 직선의 방정식은

$$y=m(x+2)\qquad \therefore mx-y+2m=0$$

원의 중심 $(0,\ a)$와 이 직선 사이의 거리는

$$\frac{|-a+2m|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}$$

이때 원의 반지름의 길이가 $\sqrt{6}$이므로 원과 직선이 접하려면

$$\frac{|-a+2m|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\sqrt{6}$$

$$|-a+2m|=\sqrt{6}\cdot\sqrt{m^2+1}$$

양변을 제곱하면

$$a^2-4am+4m^2=6m^2+6$$

$$\therefore 2m^2+4am+6-a^2=0$$

판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=(2a)^2-2(6-a^2)=6a^2-12$
이때 $a>\sqrt{2}$이므로 $\frac{D}{4}>0$

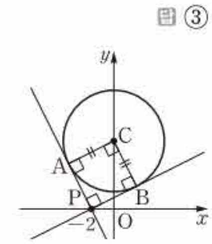
한편 두 접선이 서로 수직이려면 두 접선의 기울기의 곱이 -1이어야 하므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\frac{6-a^2}{2}=-1,\qquad a^2=8$$

$$\therefore a=2\sqrt{2}\ (\because a>\sqrt{2})$$

답 ③

다른 풀이 오른쪽 그림과 같이 원 $x^2+(y-a)^2=6$의 중심을 C라 하고, 점 $\mathrm{P}(-2,\ 0)$이라 할 때, 점 P에서 원에 그은 두 접선의 접점을 각각 A, B라 하자.



이때 □APBC는 한 변의 길이가 $\sqrt{6}$인 정사각형이므로

$$\overline{\mathrm{PC}}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{6}=2\sqrt{3}$$

한 변의 길이가 $\sqrt{6}$인 정사각형의 대각선의 길이

따라서 $\mathrm{P}(-2,\ 0)$, $\mathrm{C}(0,\ a)$에서

$$\overline{\mathrm{PC}}=\sqrt{2^2+a^2}=2\sqrt{3}$$

$$4+a^2=12,\qquad a^2=8$$

$$\therefore a=2\sqrt{2}\ (\because a>\sqrt{2})$$

12 도형의 이동

29 평행이동

W 97쪽

01 (1) $(-4-3,\ 6+2)$ $\qquad \therefore (-7,\ 8)$
(2) $(-1+7,\ -5-4)$ $\qquad \therefore (6,\ -9)$

답 (1) $(-7,\ 8)$ (2) $(6,\ -9)$

02 $x-6=-3$, $y-1=8$이므로
$x=3$, $y=9$ $\qquad \therefore (3,\ 9)$

답 $(3,\ 9)$

03 (1) $3(x+1)-(y-2)-2=0$
$\therefore 3x-y+3=0$
(2) $\{(x+3)+4\}^2+\{(y+5)-2\}^2=6$
$\therefore (x+7)^2+(y+3)^2=6$
(3) $y+4=(x-2)^2-8$
$\therefore y=x^2-4x-8$

답 (1) $3x-y+3=0$
(2) $(x+7)^2+(y+3)^2=6$
(3) $y=x^2-4x-8$

04 주어진 원을 x축의 방향으로 -6만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동하면 원래의 원과 일치하므로 구하는 원의 방정식은
$\{(x+6)-3\}^2+\{(y-1)-5\}^2=10$
$\therefore (x+3)^2+(y-6)^2=10$

답 $(x+3)^2+(y-6)^2=10$

Q BOX
$(x,\ y)$
$\longrightarrow (x+6,\ y-1)$
은 x축의 방향으로 6만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동하는 것을 나타낸다.

05 점 $(5,\ 8)$을 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 점의 좌표는
$(5-2,\ 8+4)$ $\qquad \therefore (3,\ 12)$
이 점이 직선 $y=7x+k$ 위의 점이므로
$12=21+k$ $\qquad \therefore k=-9$

답 ①

06 $P(a,\ b)$라 하면 $\quad P'(a+2,\ b-5)$
$\therefore \overline{PP'}=\sqrt{(a+2-a)^2+(b-5-b)^2}$
$=\sqrt{2^2+(-5)^2}=\sqrt{29}$

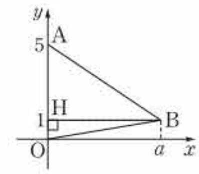
답 $\sqrt{29}$

07 점 $(-1,\ -9)$를 x축의 방향으로 6만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 점의 좌표는
$(-1+6,\ -9-3)$ $\qquad \therefore (5,\ -12)$
이 점이 중심이 원점인 원 위의 점이므로 구하는 원의 반지름의 길이는
$\sqrt{5^2+(-12)^2}=13$

답 ④

08 점 $A(0,\ 5)$를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 점 B의 좌표는
$(0+a,\ 5-4)$ $\qquad \therefore (a,\ 1)$

오른쪽 그림과 같이 점 B에서 y축에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\triangle OAB$의 넓이가 15이므로



$\frac{1}{2}\cdot\overline{OA}\cdot\overline{BH}=15$
$\frac{1}{2}\cdot 5\cdot a=15$
$\therefore a=6$

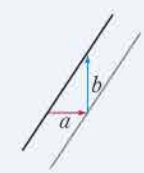
답 6

09 직선 $y=5x+3$을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 직선의 방정식은
$y-b=5(x-a)+3$
$\therefore y=5x-5a+b+3$
이 직선이 직선 $y=5x+3$과 일치하므로
$-5a+b+3=3$, $\qquad 5a=b$
$\therefore \frac{b}{a}=5$

답 5

쌤 한마디

평행이동 $(x,\ y) \longrightarrow (x+a,\ y+b)$에 의하여 직선이 다시 원래의 직선으로 옮겨지려면 오른쪽 그림과 같이
$\frac{b}{a}=$(직선의 기울기)
이어야 한다.



따라서 **09**번에서 $\frac{b}{a}=5$임을 알 수 있다.

10 주어진 평행이동은 도형을 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이므로 직선 $6x+5y-1=0$을 평행이동한 직선의 방정식은
$6(x-3)+5(y+2)-1=0$
$\therefore 6x+5y-9=0$
따라서 구하는 x절편은
$6x-9=0$ $\qquad \therefore x=\frac{3}{2}$

답 $\frac{3}{2}$

Q BOX
도형
$f(x+3,\ y-2)=0$을 도형 $f(x,\ y)=0$으로 옮기는 평행이동
➡ x 대신 $x-3$, y 대신 $y+2$를 대입
➡ x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동

11 직선 $y=ax+b$를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 8만큼 평행이동한 직선의 방정식은
$y-8=a(x-2)+b$
$\therefore y=ax-2a+b+8$
이 직선이 직선 $y=\frac{1}{2}x-4$와 수직이므로
$a=-2$
또 직선 $y=\frac{1}{2}x-4$와 점 $(8,\ 0)$에서 만나므로
$6a+b+8=0$, $\qquad -12+b+8=0$
$\therefore b=4$
$\therefore a-b=-6$

답 ②

Q BOX
직선 $y=\frac{1}{2}x-4$의 x절편은 8이다.

12 $x^2+y^2-6x+12y+29=0$에서
$(x-3)^2+(y+6)^2=16$
원 $(x-3)^2+(y+6)^2=16$을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 원의 방정식은

$(x-a-3)^2+(y-b+6)^2=16$

이 원의 중심이 원점이므로

$-a-3=0$, $-b+6=0$ $\quad\therefore a=-3$, $b=6$

$\therefore a-b=-9$ 답 ②

다른 풀이 $x^2+y^2-6x+12y+29=0$에서

$(x-3)^2+(y+6)^2=16$

이므로 원의 중심의 좌표는 $(3, -6)$

따라서 원의 중심 $(3, -6)$을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 점이 원점이므로

$3+a=0$, $-6+b=0$ $\quad\therefore a=-3$, $b=6$

13 $x^2+y^2+10y+12=0$에서

$x^2+(y+5)^2=13$

원 $x^2+(y+5)^2=13$을 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 원의 방정식은

$(x-2)^2+(y+3+5)^2=13$

$\therefore (x-2)^2+(y+8)^2=13$

이 원이 점 $(k, -6)$을 지나므로

$(k-2)^2+4=13$, $(k-2)^2=9$

$k-2=\pm3$ $\quad\therefore k=5$ $(\because k>0)$ 답 ⑤

14 원 $(x+1)^2+(y-4)^2=4$를 y축의 방향으로 a만큼 평행이동한 원의 방정식은

$(x+1)^2+(y-a-4)^2=4$

이 원이 x축에 접하므로

$|a+4|=2$

$a+4=-2$ 또는 $a+4=2$

$\therefore a=-6$ 또는 $a=-2$

따라서 구하는 합은

$(-6)+(-2)=-8$ 답 -8

15 포물선 $y=x^2-6x+m$을 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 포물선의 방정식은

$y+2=(x-1)^2-6(x-1)+m$

$\therefore y=x^2-8x+m+5$

이 포물선이 포물선 $y=x^2+nx+1$과 일치하므로

$-8=n$, $m+5=1$ $\quad\therefore m=-4$, $n=-8$

$\therefore m+n=-12$ 답 ③

16 점 $(-3, 5)$를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 점의 좌표가 $(-7, 10)$이라 하면

$-3+m=-7$, $5+n=10$

$\therefore m=-4$, $n=5$

포물선 $y=x^2+4x-2$를 x축의 방향으로 -4만큼, y축의 방향으로 5만큼 평행이동한 포물선의 방정식은

$y-5=(x+4)^2+4(x+4)-2$

$\therefore y=x^2+12x+35=(x+6)^2-1$

이 포물선의 꼭짓점의 좌표는 $(-6, -1)$이므로

$a=-6$, $b=-1$ $\quad\therefore ab=6$ 답 6

Q BOX

포물선의 평행이동은 포물선의 꼭짓점의 평행이동으로 생각할 수 있다.

원의 평행이동은 원의 중심의 평행이동으로 생각할 수 있다.

(원의 반지름의 길이) $=|$(중심의 y좌표)$|$

다른 풀이 점 $(-3, 5)$를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 점의 좌표가 $(-7, 10)$이라 하면 $m=-4$, $n=5$

$y=x^2+4x-2$에서

$y=(x+2)^2-6$

이므로 포물선의 꼭짓점의 좌표는 $(-2, -6)$

점 $(-2, -6)$을 x축의 방향으로 -4만큼, y축의 방향으로 5만큼 평행이동한 점의 좌표는

$(-2-4, -6+5)$ $\quad\therefore (-6, -1)$

따라서 $a=-6$, $b=-1$이므로 $ab=6$

30 대칭이동

W 99쪽

01 답 (1) $(5, 9)$ (2) $(-5, -9)$

(3) $(-5, 9)$ (4) $(-9, 5)$

02 점 $(-4, -7)$을 x축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$(-4, 7)$

이 점을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$(7, -4)$ 답 $(7, -4)$

03 (1) $(x+2)^2+(-y-6)^2=3$

$\therefore (x+2)^2+(y+6)^2=3$

(2) $(-x+2)^2+(y-6)^2=3$

$\therefore (x-2)^2+(y-6)^2=3$

(3) $(-x+2)^2+(-y-6)^2=3$

$\therefore (x-2)^2+(y+6)^2=3$

(4) $(y+2)^2+(x-6)^2=3$

$\therefore (x-6)^2+(y+2)^2=3$

답 (1) $(x+2)^2+(y+6)^2=3$

(2) $(x-2)^2+(y-6)^2=3$

(3) $(x-2)^2+(y+6)^2=3$

(4) $(x-6)^2+(y+2)^2=3$

04 직선 $x+3y-1=0$을 y축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$(-x)+3y-1=0$ $\quad\therefore x-3y+1=0$

이 직선을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$y-3x+1=0$ $\quad\therefore 3x-y-1=0$

답 $3x-y-1=0$

05 구하는 점의 좌표를 (a, b)라 하면

$\frac{3+a}{2}=-2$, $\frac{-4+b}{2}=1$

$\therefore a=-7$, $b=6$

따라서 구하는 점의 좌표는 $(-7, 6)$

답 $(-7, 6)$

06 점 P$(-2,\ 3)$을 직선 $x-y-2=0$에 대하여 대칭이동한 점을 Q$(p,\ q)$라 하자.
$\overline{\mathrm{PQ}}$의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{-2+p}{2},\ \frac{3+q}{2}\right)$$

이 점이 직선 $x-y-2=0$ 위의 점이므로

$$\frac{-2+p}{2}-\frac{3+q}{2}-2=0$$

$$\therefore\ p-q=9 \qquad \cdots\cdots\ ㉠$$

또 직선 PQ는 직선 $x-y-2=0$, 즉 $y=x-2$와 수직이므로

$$\frac{q-3}{p+2}\cdot 1=-1$$

$$\therefore\ p+q=1 \qquad \cdots\cdots\ ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $p=5,\ q=-4$
따라서 구하는 점의 좌표는 $(5,\ -4)$

답 $(5,\ -4)$

Q BOX
㉠+㉡을 하면
$2p=10 \quad \therefore\ p=5$
$p=5$를 ㉠에 대입하면
$5-q=9$
$\therefore\ q=-4$

07 점 $(-4,\ -7)$을 y축, 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 각각

A$(4,\ -7)$, B$(4,\ 7)$

$\therefore\ \overline{\mathrm{AB}}=|7-(-7)|=14$

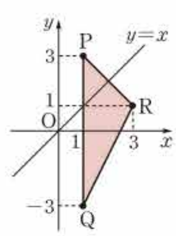
답 ③

두 점 $(a,\ b)$, $(a,\ c)$ 사이의 거리는
$|c-b|$

08 점 P$(1,\ 3)$을 x축, 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 각각

Q$(1,\ -3)$, R$(3,\ 1)$

따라서 △PQR는 오른쪽 그림과 같으므로



$$\triangle\mathrm{PQR}=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 2=6$$

답 ①

$\overline{\mathrm{PQ}}=3-(-3)=6$

09 점 $(-2,\ 1)$을 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$(2,\ -1)$

이 점이 직선 $a^2x+y-a=0$ 위의 점이므로

$2a^2-a-1=0, \quad (a-1)(2a+1)=0$

$\therefore\ a=1$ 또는 $a=-\frac{1}{2}$

따라서 모든 실수 a의 값의 곱은 $-\frac{1}{2}$이다.

답 ②

10 점 $(a,\ b)$를 x축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$(a,\ -b)$

이 점이 제4사분면 위에 있으므로

$a>0,\ -b<0 \quad \therefore\ a>0,\ b>0$

점 $(-ab,\ a+b)$를 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$(ab,\ -a-b)$

이때 $ab>0$, $-a-b<0$이므로 이 점은 제4사분면 위에 있다.

답 제4사분면

11 직선 $4x+ky-3=0$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$kx+4y-3=0$

이 직선이 직선 $4x+ky-3=0$과 같으므로

$k=4$

답 ⑤

12 주어진 대칭이동은 x축에 대하여 대칭이동한 것이므로 직선 $7x-2y-1=0$을 대칭이동한 직선의 방정식은

$7x+2y-1=0$

답 ②

13 직선 l의 방정식은

$-(k-1)x-2y-6=0$

$\therefore\ (k-1)x+2y+6=0$

이 직선이 직선 $kx-3y+4=0$과 수직이므로

$(k-1)\cdot k+2\cdot(-3)=0$

$k^2-k-6=0, \quad (k+2)(k-3)=0$

$\therefore\ k=-2$ 또는 $k=3$

따라서 모든 실수 k의 값의 합은

$-2+3=1$

답 1

두 직선
$ax+by+c=0$,
$a'x+b'y+c'=0$이 수직이면
$aa'+bb'=0$

14 직선 $3x+ky-5=0$을 y축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$-3x+ky-5=0$

이 직선을 원점에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$3x-ky-5=0$

이 직선이 원의 중심 $(1,\ -2)$를 지나므로

$3+2k-5=0 \quad \therefore\ k=1$

답 1

원의 넓이를 이등분하는 직선
➡ 원의 중심을 지난다.

15 직선 $4x-3y+2=0$을 y축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$-4x-3y+2=0 \quad \therefore\ 4x+3y-2=0$

이 직선과 원 $(x+2)^2+(y+1)^2=9$의 중심 $(-2,\ -1)$ 사이의 거리는

$$\frac{|4\cdot(-2)+3\cdot(-1)-2|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{13}{5}$$

이때 원의 반지름의 길이는 3이고, $\frac{13}{5}<3$이므로 원과 직선은 서로 다른 두 점에서 만난다.
따라서 구하는 교점의 개수는 2이다.

답 2

원의 중심과 직선 사이의 거리 d, 원의 반지름의 길이 r에 대하여 원과 직선의 교점의 개수는 다음과 같다.
① $d<r$ ➡ 2
② $d=r$ ➡ 1
③ $d>r$ ➡ 0

16 원 $x^2+(y-a)^2=17$을 원점에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$(-x)^2+(-y-a)^2=17$

$\therefore\ x^2+(y+a)^2=17$

이 원이 점 $(-4,\ 1)$을 지나므로

$16+(1+a)^2=17, \quad (1+a)^2=1$

$1+a=-1$ 또는 $1+a=1$

$\therefore\ a=-2\ (\because\ a<0)$

답 ②

17 원 $x^2+y^2+6x-4y-7=0$을 x축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$x^2+(-y)^2+6x-4\cdot(-y)-7=0$

$\therefore x^2+y^2+6x+4y-7=0$

원 $x^2+y^2+6x-4y-7=0$을 y축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$(-x)^2+y^2+6\cdot(-x)-4y-7=0$

$\therefore x^2+y^2-6x-4y-7=0$

따라서 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$x^2+y^2+6x+4y-7-(x^2+y^2-6x-4y-7)=0$

$\therefore 3x+2y=0$ 답 $3x+2y=0$

18 원 $x^2+y^2-8x-9=0$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$x^2+y^2-8y-9=0$

이 원을 x축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$x^2+(-y)^2-8\cdot(-y)-9=0$

$\therefore x^2+y^2+8y-9=0$

$y=0$을 대입하면

$x^2-9=0$ $\therefore x=\pm 3$

따라서 구하는 점의 좌표는

$(-3, 0), (3, 0)$ 답 $(-3, 0), (3, 0)$

19 포물선 $y=x^2+2ax+5$를 y축에 대하여 대칭이동한 포물선의 방정식은

$y=(-x)^2+2a\cdot(-x)+5$

$=x^2-2ax+5$

$=(x-a)^2+5-a^2$

이 포물선의 꼭짓점 $(a, 5-a^2)$이 직선 $y=-3x+1$ 위에 있으므로

$5-a^2=-3a+1$, $a^2-3a-4=0$

$(a+1)(a-4)=0$

$\therefore a=-1$ 또는 $a=4$

따라서 구하는 합은 3이다. 답 ③

20 $y=3x^2-4x-1$의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$-y=3\cdot(-x)^2-4\cdot(-x)-1$

$\therefore y=-3x^2-4x+1$

이 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$-y=-3x^2-4x+1$

$\therefore y=3x^2+4x-1$

이 그래프가 점 $(a, 14)$를 지나므로

$3a^2+4a-1=14$, $3a^2+4a-15=0$

$(a+3)(3a-5)=0$

$\therefore a=-3$ ($\because a$는 정수) 답 -3

Q BOX

점 (x_1, y_1)을 지나고 기울기가 m인 직선의 방정식은
$y-y_1=m(x-x_1)$

a에 대한 이차방정식 $a^2-3a-4=0$에서 근과 계수의 관계를 이용하여 구할 수도 있다.

21 점 $(a, -1)$을 x축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 점의 좌표는

$(a-4, -1)$

이 점을 y축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$(-a+4, -1)$

즉 $-a+4=7$이므로 $a=-3$ 답 ①

22 원 $(x-5)^2+y^2=8$을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 원의 방정식은

$(x-a-5)^2+(y-b)^2=8$

이 원을 x축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$(x-a-5)^2+(-y-b)^2=8$

$\therefore (x-a-5)^2+(y+b)^2=8$

이 원의 중심의 좌표는

$(a+5, -b)$

이 점이 점 $(-3, 4)$와 일치하므로

$a+5=-3$, $-b=4$ $\therefore a=-8$, $b=-4$

$\therefore b-a=4$ 답 ②

23 포물선 $y=x^2+a$를 원점에 대하여 대칭이동한 포물선의 방정식은

$-y=(-x)^2+a$ $\therefore y=-x^2-a$

이 포물선을 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 포물선의 방정식은

$y-2=-(x+1)^2-a$

$\therefore y=-(x+1)^2-a+2$

$=-x^2-2x-a+1$

이 포물선이 포물선 $y=-x^2-2x-6$과 일치하므로

$-a+1=-6$

$\therefore a=7$ 답 7

24 직선 l의 기울기를 m이라 하면 직선 l의 방정식은

$y-5=m(x+4)$ $\therefore y=mx+4m+5$

이 직선을 y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$y+3=mx+4m+5$ $\therefore y=mx+4m+2$

이 직선을 원점에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$-y=-mx+4m+2$ $\therefore y=mx-4m-2$

이 직선이 점 $(8, 6)$을 지나므로

$6=8m-4m-2$, $4m=8$

$\therefore m=2$ 답 ②

25 $x^2+y^2+4x-8y+15=0$에서

$(x+2)^2+(y-4)^2=5$

이 원을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$(x-4)^2+(y+2)^2=5$

이 원을 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 원 O'의 방정식은

$(x+2-4)^2+(y+2+2)^2=5$

$\therefore (x-2)^2+(y+4)^2=5$

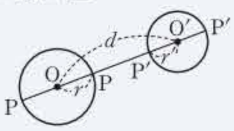
$\overline{PQ}$의 최댓값은 두 원 O, O'의 중심 $(-2, 4)$, $(2, -4)$를 이은 선분의 길이에 두 원의 반지름의 길이의 합을 더한 것이므로 구하는 최댓값은

$\sqrt{(2+2)^2+(-4-4)^2}+\sqrt{5}+\sqrt{5}=6\sqrt{5}$ 답 ②

쌤 한마디

두 원 위의 점 사이의 거리의 최대·최소

반지름의 길이가 r인 원 O 위의 점 P와 반지름의 길이가 r'인 원 O' 위의 점 P′에 대하여 두 원 O, O'의 중심 사이의 거리를 $d\,(d>r+r')$라 할 때



① ($\overline{PP'}$의 최댓값)$=d+(r+r')$

② ($\overline{PP'}$의 최솟값)$=d-(r+r')$

26 방정식 $f(x, y)=0$이 나타내는 도형을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동하면

$f(y, x)=0$

이 방정식이 나타내는 도형을 x축의 방향으로 1만큼 평행이동하면

$f(y, x-1)=0$

따라서 방정식 $f(y, x-1)=0$이 나타내는 도형은 주어진 도형을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 ②이다.

답 ②

다른 풀이 주어진 도형은 네 직선

$x=1$, $x=2$, $y=0$, $y=-1$ ······ ㉠

로 둘러싸인 도형이다.

㉠의 네 식에 x 대신 y, y 대신 $x-1$을 각각 대입하면

$y=1$, $y=2$, $x-1=0$, $x-1=-1$

$\therefore y=1$, $y=2$, $x=1$, $x=0$

따라서 방정식 $f(y, x-1)=0$이 나타내는 도형은 ②이다.

쌤 한마디

방정식 $f(y, x-1)=0$이 나타내는 도형은 주어진 도형을 y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 후 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 것과도 같다. 즉

$f(x, y)=0 \longrightarrow f(x, y-1)=0$

$\longrightarrow f(y, x-1)=0$

27 방정식 $f(x, y)=0$이 나타내는 도형은 방정식 $g(x, y)=0$이 나타내는 도형을 x축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

방정식 $g(x, y)=0$이 나타내는 도형을 x축에 대하여 대칭이동하면

$g(x, -y)=0$

QBOX

수직인 두 직선의 기울기의 곱은 -1이다.

x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 후 x축에 대하여 대칭이동한 것과도 같다.

방정식 $g(x, -y)=0$이 나타내는 도형을 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동하면

$g(x-2, -(y+1))=0$

$\therefore g(x-2, -y-1)=0$ 답 ④

28 $\overline{PQ}$의 중점의 좌표가 $(6, 4)$이므로

$\frac{a-2}{2}=6$, $\frac{7+b}{2}=4$ $\therefore a=14$, $b=1$

따라서 두 점 P$(14, 7)$, Q$(-2, 1)$을 지나는 직선의 기울기는

$\frac{1-7}{-2-14}=\frac{3}{8}$ 답 $\frac{3}{8}$

29 두 포물선이 점 (a, b)에 대하여 대칭이므로 두 포물선의 꼭짓점도 점 (a, b)에 대하여 대칭이다.

포물선 $y=x^2-10x+16$, 즉 $y=(x-5)^2-9$의 꼭짓점의 좌표는

$(5, -9)$

포물선 $y=-x^2+6x+2$, 즉 $y=-(x-3)^2+11$의 꼭짓점의 좌표는

$(3, 11)$

따라서 두 꼭짓점 $(5, -9)$, $(3, 11)$을 잇는 선분의 중점의 좌표가 (a, b)이므로

$a=\frac{5+3}{2}=4$, $b=\frac{-9+11}{2}=1$

$\therefore a+b=5$ 답 5

30 두 점 $(-3, 4)$, $(b, 8)$을 잇는 선분의 중점의 좌표는

$\left(\frac{-3+b}{2}, \frac{4+8}{2}\right)$ $\therefore \left(\frac{-3+b}{2}, 6\right)$

이 점이 직선 $y=-x+a$ 위의 점이므로

$6=-\frac{-3+b}{2}+a$

$\therefore 2a-b=9$ ······ ㉠

또 두 점 $(-3, 4)$, $(b, 8)$을 지나는 직선이 직선 $y=-x+a$와 수직이므로

$\frac{8-4}{b+3}\cdot(-1)=-1$ $\therefore b=1$

$b=1$을 ㉠에 대입하여 풀면 $a=5$

$\therefore a+b=6$ 답 6

31 C(a, b)라 하면 $\overline{BC}$의 중점의 좌표는

$\left(\frac{2+a}{2}, \frac{1+b}{2}\right)$

이 점이 직선 $y=x+2$ 위의 점이므로

$\frac{1+b}{2}=\frac{2+a}{2}+2$

$\therefore a-b=-5$ ······ ㉠

또 직선 BC가 직선 $y=x+2$와 수직이므로

$\frac{b-1}{a-2}\cdot 1=-1$

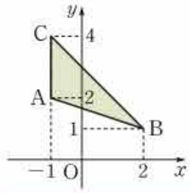
$\therefore a+b=3$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=4$

$\therefore$ C$(-1, 4)$

따라서 $\triangle$ABC는 오른쪽 그림과 같으므로

$\triangle ABC=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 3=3$



답 ⑤

32 원 $(x+4)^2+(y-2)^2=4$의 중심 $(-4, 2)$를 직선 $y=3x+4$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 (a, b)라 하면 두 점 $(-4, 2)$, (a, b)를 잇는 선분의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{-4+a}{2}, \frac{2+b}{2}\right)$$

이 점이 직선 $y=3x+4$ 위의 점이므로

$$\frac{2+b}{2}=3\cdot\frac{-4+a}{2}+4$$

$\therefore 3a-b=6$ …… ㉠

또 두 점 $(-4, 2)$, (a, b)를 지나는 직선이 직선 $y=3x+4$와 수직이므로

$$\frac{b-2}{a+4}\cdot 3=-1$$

$\therefore a+3b=2$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=2$, $b=0$

따라서 대칭이동한 원의 중심의 좌표는 $(2, 0)$이고, 반지름의 길이는 2이다.

이 원이 직선 $x+ky+2=0$과 접하므로

$$\frac{|2+2|}{\sqrt{1+k^2}}=2, \qquad 2=\sqrt{1+k^2}$$

양변을 제곱하면

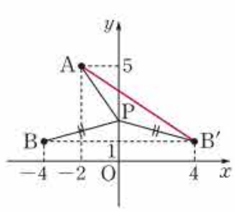
$4=1+k^2$, $\quad k^2=3$

$\therefore k=\sqrt{3}$ ($\because k>0$)

답 $\sqrt{3}$

33 점 B를 y축에 대하여 대칭이동한 점을 B$'$이라 하면

B$'(4, 1)$



오른쪽 그림에서 $\overline{PB}=\overline{PB'}$이므로

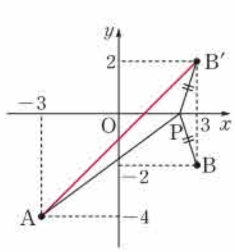
$$\begin{aligned}\overline{AP}+\overline{PB}&=\overline{AP}+\overline{PB'}\\&\geq\overline{AB'}\\&=\sqrt{6^2+(-4)^2}\\&=2\sqrt{13}\end{aligned}$$

따라서 구하는 최솟값은 $2\sqrt{13}$이다.

답 ②

34 점 B를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 B$'$이라 하면

B$'(3, 2)$



오른쪽 그림과 같이 $\overline{PB}=\overline{PB'}$이므로 점 P가 $\overline{AB'}$ 위의 점일 때 $\overline{AP}+\overline{PB}$의 값이 최소이고, 이때의 점 P는 직선 AB$'$이 x축과 만나는 점과 같다.

직선 AB$'$의 방정식은

$$y+4=\frac{2-(-4)}{3-(-3)}\cdot(x+3)$$

$\therefore y=x-1$

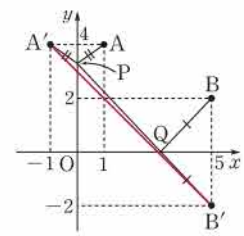
따라서 점 P의 좌표는

$(1, 0)$

답 ④

35 점 A$(1, 4)$를 y축에 대하여 대칭이동한 점을 A$'$이라 하면

A$'(-1, 4)$



점 B$(5, 2)$를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 B$'$이라 하면

B$'(5, -2)$

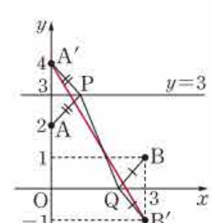
위의 그림에서 $\overline{PA}=\overline{PA'}$, $\overline{QB}=\overline{QB'}$이므로

$$\begin{aligned}\overline{AP}+\overline{PQ}+\overline{QB}&=\overline{A'P}+\overline{PQ}+\overline{QB'}\\&\geq\overline{A'B'}\\&=\sqrt{6^2+(-6)^2}\\&=6\sqrt{2}\end{aligned}$$

따라서 구하는 최솟값은 $6\sqrt{2}$이다.

답 ④

36 점 A$(0, 2)$를 직선 $y=3$에 대하여 대칭이동한 점을 A$'(a, b)$라 하면 $\overline{AA'}$의 중점의 좌표는



$$\left(\frac{0+a}{2}, \frac{2+b}{2}\right)$$

$$\therefore \left(\frac{a}{2}, \frac{2+b}{2}\right)$$

이 점이 직선 $y=3$ 위의 점이므로

$\frac{2+b}{2}=3 \qquad \therefore b=4$

또 직선 AA$'$이 직선 $y=3$과 수직이므로

$a=0$

따라서 점 A$'$의 좌표는

$(0, 4)$

점 B$(3, 1)$을 x축에 대하여 대칭이동한 점을 B$'$이라 하면

B$'(3, -1)$

위의 그림에서 $\overline{PA}=\overline{PA'}$, $\overline{QB}=\overline{QB'}$이므로

$$\begin{aligned}\overline{AP}+\overline{PQ}+\overline{QB}&=\overline{A'P}+\overline{PQ}+\overline{QB'}\\&\geq\overline{A'B'}\\&=\sqrt{3^2+(-5)^2}\\&=\sqrt{34}\end{aligned}$$

따라서 구하는 최솟값은 $\sqrt{34}$이다.

답 $\sqrt{34}$

Q BOX

㉠+㉡을 하면
$2a=-2$
$\therefore a=-1$
$a=-1$을 ㉠에 대입하면 $-1-b=-5$
$\therefore b=4$

$2-(-1)=3$

$y=0$을 대입하면
$0=x-1 \quad \therefore x=1$
따라서 직선 $y=x-1$의 x절편은 1이다.

㉠$\times 3+$㉡을 하면
$10a=20 \quad \therefore a=2$
$a=2$를 ㉠에 대입하면
$6-b=6 \quad \therefore b=0$

원의 중심과 직선 사이의 거리는 원의 반지름의 길이와 같다.