일품 고등 수학(상)

최상위의 품격

정답 및 풀이

- 빠른 정답 찾기 ..... 2~5
- 자세한 풀이
  - Ⅰ 다항식 6
  - Ⅱ 방정식 28
  - Ⅲ 부등식 71
  - Ⅳ 도형의 방정식 97

ⓒ좋은책신사고

빠른 정답 찾기

Ⅰ. 다항식

01 다항식의 연산

본책 8~10쪽

01 ② 02 $-8x^2-6x+5$
03 ⑤ 04 5 05 -20 06 ④ 07 ③
08 ⑤ 09 10 10 ③ 11 ④ 12 ④
13 ⑤ 14 3 15 ⑤ 16 $\frac{3}{2}$ 17 ②
18 20

본책 11~13쪽

01 12 02 ③ 03 25
04 ① 05 -19 06 -12 07 ⑤ 08 ②
09 ⑤ 10 640 11 ② 12 169 13 ④
14 0 15 ④ 16 $4\sqrt{13}$ 17 ③ 18 18
19 30 20 ④ 21 8 22 ③ 23 -3
24 ③

본책 14쪽

01 ① 02 429 03 ①
04 ③ 05 800

02 나머지정리와 인수분해

본책 16~18쪽

01 6 02 4 03 ①
04 ④ 05 -36 06 $\frac{21}{4}$ 07 ③ 08 28
09 ③ 10 ① 11 ② 12 ③ 13 5
14 ② 15 ② 16 ② 17 ② 18 7

본책 19~21쪽

01 5 02 -1 03 ⑤
04 18 05 $2x^2+x-3$ 06 ③ 07 18
08 $-3x+3$ 09 ⑤ 10 7 11 ⑤
12 ⑤ 13 36 14 ③ 15 ①
16 $a=c$인 이등변삼각형 17 ② 18 ⑤ 19 ④
20 ④ 21 24 22 26 23 ④

본책 22쪽

01 ① 02 3 03 29
04 ② 05 4 06 ③ 07 100

본책 23~26쪽

01 ③ 02 ⑤ 03 ④
04 ③ 05 ⑤ 06 ③ 07 ② 08 ④
09 ④ 10 ② 11 ⑤ 12 ③ 13 ③
14 ① 15 ④ 16 ② 17 ④ 18 -4
19 50 20 29 21 $\frac{55}{6}$ 22 6 23 16
24 18 25 15 26 -9 27 20 28 29
29 16

본책 27쪽

01 ① 02 $-x+1$ 03 5
04 ②

Ⅱ. 방정식

03 복소수

본책 30~32쪽

01 ⑤ 02 10 03 ④
04 2 05 ② 06 $-3+3i$ 07 ①
08 -1 09 ③ 10 $1-i$ 11 $3-6i$ 12 ⑤
13 -1024 14 ③ 15 50 16 ① 17 ①
18 ④

본책 33~35쪽

01 ⑤ 02 ③ 03 $\frac{1}{2}$
04 1 05 -3 06 ② 07 1 08 $\frac{6}{5}i$
09 ④ 10 10 11 ④ 12 ① 13 ②
14 $-1+i$ 15 ② 16 87 17 $-40i$ 18 3
19 75 20 $a<c<b$ 21 $-4\sqrt{2}$ 22 ④
23 ②

본책 36쪽

01 ④ 02 ④ 03 ⑤
04 12 05 115 06 6 07 ①

04 이차방정식

본책 38~40쪽

01 ③ 02 $-1, 4$ 03 ③
04 4 05 서로 다른 두 허근 06 ⑤ 07 ⑤
08 12 09 ⑤ 10 $x^2+12x-13=0$ 11 ③
12 -3 13 ⑤ 14 $5\left(x+\frac{2-i}{5}\right)\left(x+\frac{2+i}{5}\right)$
15 $(x-1)\left(x+\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)\left(x+\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)$ 16 ②
17 -2 18 ②

본책 41~43쪽

01 $x=1-\sqrt{10}$ 또는 $x=3$
02 ③ 03 $\frac{2+\sqrt{6}}{2}$, $\frac{2-\sqrt{6}}{2}$ 04 ④
05 $x=1-\sqrt{2}$ 06 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 07 15 08 ⑤
09 -1 10 정삼각형 11 -56 12 ①
13 ① 14 ① 15 ④ 16 7 17 24
18 ⑤ 19 ① 20 26 21 ⑤ 22 -26
23 ① 24 $\frac{1}{2}$

본책 44~45쪽

01 9 02 ③ 03 ②
04 ③ 05 13 06 3 07 ③ 08 24
09 ④ 10 13 11 23 12 ④ 13 8
14 2

05 이차방정식과 이차함수

본책 46~48쪽

01 ④ 02 ⑤ 03 $-\frac{3}{4}$
04 4 05 ③ 06 44 07 ③ 08 ⑤
09 ③ 10 $-\frac{5}{4}$ 11 8 12 4 13 ③
14 ② 15 10 16 20 17 ② 18 $\frac{625}{2}$

본책 49~51쪽

01 ② 02 $2\sqrt{6}$ 03 ④
04 ⑤ 05 3 06 0 07 2 08 ④
09 ④ 10 ③ 11 ③ 12 ① 13 3
14 -2 15 ⑤ 16 ② 17 47 18 24
19 ⑤ 20 800원 21 $\frac{23}{16}$

본책 52쪽

01 ③ 02 ③ 03 24
04 ⑤ 05 ③ 06 10

06 여러 가지 방정식

본책 54~56쪽

01 2 02 8 03 ①
04 ⑤ 05 -60 06 ⑤ 07 ① 08 ③
09 ⑤ 10 136 11 ⑤ 12 ② 13 12
14 9 15 ⑤ 16 2 17 2 18 12 m

본책 57~59쪽

01 $\frac{1}{4}$ 02 ① 03 $-\frac{10}{3}$
04 ② 05 24 06 12
07 $cx^3+bx^2+ax+1=0$ 08 $\frac{11}{2}$
09 $2x^3-5x^2-12x+7=0$ 10 ② 11 25
12 ④ 13 ⑤ 14 ② 15 11 16 20
17 $-\frac{55}{4}$ 18 ④ 19 30 20 ③ 21 104 cm^2
22 33π 23 9

본책 60쪽

01 63 02 ② 03 30
04 ① 05 ③ 06 16 07 ③

본책 61~64쪽

01 ③ 02 ① 03 ⑤
04 ② 05 ④ 06 ③ 07 ② 08 ②
09 ② 10 ④ 11 ③ 12 ⑤ 13 ④
14 ③ 15 ② 16 ④ 17 ⑤ 18 10
19 $\frac{2}{25}$ 20 10 21 빗변의 길이가 a인 직각삼각형
22 $x^2-x-1=0$ 23 4 24 45 25 220
26 0 27 -12 28 14

본책 65쪽

01 937 02 -12 03 $\frac{5}{4}$
04 ④

Ⅲ. 부등식

07 일차부등식

본책 68~70쪽

01 ② 02 ⑤
03 $0<f(0)<10$ 04 $A>B$ 05 $A>B$ 06 ③
07 ③ 08 ⑤ 09 ③ 10 ⑤ 11 ④
12 10, 11 13 ③ 14 ③ 15 ② 16 ③
17 ② 18 ④

본책 71~74쪽

01 ⑤ 02 ⑤
03 풀이 74쪽 04 ① 05 풀이 74쪽
06 ④ 07 풀이 74쪽 08 ④ 09 ③
10 ④ 11 ⑤ 12 4 13 ③ 14 27
15 ② 16 ③ 17 $9\le x\le 11.5$ 18 ④

ⓒ좋은책신사고

19 $\frac{9}{5}$ 20 ① 21 $-1<x<\frac{2}{3}$
22 $3<x<3.6$ 23 3 24 ① 25 ④
26 ② 27 7

본책 75쪽 01 2 02 ③ 03 ②
04 ③ 05 ②

08 이차부등식

본책 76~78쪽 01 5 02 6 03 ④
04 9 05 $-2<x<3$ 06 ② 07 ①
08 -1 09 ② 10 ④ 11 ③ 12 7
13 ③ 14 14 15 ② 16 -3 17 ②
18 ①

본책 79~82쪽 01 $-1<x<2$ 02 ⑤
03 3 04 ⑤ 05 10 06 ① 07 ⑤
08 3 09 ③ 10 45 11 ③ 12 7
13 ③ 14 1 15 -1 16 ① 17 ②
18 $\frac{1}{2}$ 19 $-2<x<3$ 20 6 21 ④
22 ③ 23 4 24 1 25 18 26 ④
27 ③ 28 ③ 29 ④ 30 ⑤
31 $a\le-\frac{13}{3}$ 또는 $a\ge1$

본책 83쪽 01 14 02 ④ 03 ①
04 ① 05 12 06 100 07 8

본책 84~87쪽 01 ④ 02 ③ 03 ④
04 ① 05 ④ 06 ③ 07 ② 08 ③
09 ③ 10 ④ 11 ③ 12 ③ 13 ②
14 ③ 15 ⑤ 16 ② 17 0 18 $3<a\le4$
19 2 20 70개 21 2 22 10 23 3
24 $-1<a\le0$ 25 5 26 3 27 $\sqrt{13}$
28 -10

본책 88쪽 01 ① 02 $\frac{11}{12}$ 03 ①
04 ⑤

Ⅳ. 도형의 방정식

09 평면좌표와 직선의 방정식

본책 90~93쪽 01 5 02 ② 03 ④
04 ② 05 $\frac{3}{8}<k<\frac{2}{3}$ 06 ④ 07 $2\sqrt{6}$
08 5 09 ⑤ 10 $\frac{7}{2}$ 11 $y=2x+3$
12 11 13 2 14 ⑤ 15 ⑤ 16 ②
17 ② 18 5 19 $y=\sqrt{3}x-2$, $y=-\sqrt{3}x-2$
20 $(1, 1)$, $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ 21 ④ 22 ④ 23 -11
24 ①

본책 94~97쪽 01 ③ 02 14 03 13
04 ② 05 7 06 $\frac{3}{2}$ 07 3 08 $\frac{40}{3}$
09 12 10 $\frac{4}{3}$ 11 ③ 12 -4 13 ②
14 ① 15 91 16 $\frac{6}{5}$ 17 9 18 ③
19 ③ 20 11 21 10 22 ③ 23 ②
24 5 25 ③ 26 ① 27 90 28 ②
29 ①

본책 98~99쪽 01 ④ 02 ③ 03 25
04 90 05 ③ 06 123 07 1 08 ④
09 ① 10 ② 11 $\frac{9}{4}$ 12 4

10 원의 방정식

본책 100~102쪽 01 ③ 02 ① 03 26
04 12 05 ⑤ 06 15 07 ① 08 ③
09 25 10 $-\sqrt{3}<m<-\frac{2\sqrt{5}}{5}$ 또는 $\frac{2\sqrt{5}}{5}<m<\sqrt{3}$
11 4 12 ① 13 ④ 14 -1 15 ③
16 ④ 17 $3\sqrt{3}$ 18 3

본책 103~105쪽 01 -7 02 ④ 03 ③
04 38 05 ④ 06 $(x+1)^2+(y-3)^2=9$
07 ④ 08 $4x+2y-1=0$ 09 ④ 10 2
11 ④ 12 ④ 13 6 14 5 15 52π

16 $\frac{21}{5}$ 17 ② 18 18 19 ④ 20 ①
21 54

본책 106쪽 01 ③ 02 ③ 03 256
04 6 05 ④ 06 320

11 도형의 이동

본책 108~110쪽 01 $y=\frac{1}{2}x$ 02 ⑤ 03 ①
04 ③ 05 ② 06 12 07 5 08 ③
09 ③ 10 -2 11 ⑤ 12 ⑤ 13 -2
14 ⑤ 15 4 16 $\left(\frac{19}{5}, -\frac{2}{5}\right)$ 17 ①
18 ①

본책 111~113쪽 01 ⑤ 02 18 03 ②
04 42 05 ④ 06 10 07 2 08 0
09 -1 10 ④ 11 $4\sqrt{10}$ 12 ⑤ 13 $3\sqrt{2}$
14 -3 15 -5 16 ③ 17 6 18 $-\frac{4}{3}$
19 5 20 ② 21 -1 22 8 23 ①

본책 114쪽 01 ② 02 32 03 20
04 16 05 ① 06 ④

본책 115~118쪽 01 ④ 02 ④ 03 ①
04 ② 05 ③ 06 ③ 07 ② 08 ④
09 ② 10 ③ 11 ⑤ 12 ② 13 ②
14 ③ 15 ③ 16 ③ 17 2 18 58
19 35 20 $\sqrt{3}$ 21 20
22 $x^2+(y+1)^2=4(x\neq0)$ 23 -1 24 232
25 4 26 25 27 4 28 18

본책 119쪽 01 ⑤ 02 45 03 6
04 ①

ⓒ좋은책신사고

I 다항식

01 다항식의 연산

개념&핵심 기출

본책 8~10쪽

01 ㄱ. x^2항, x항, 상수항의 순서로 정리되어 있으므로 x에 대하여 내림차순으로 정리되어 있다.
ㄴ. x에 대한 다항식에서 a^2+3은 상수항이므로 x에 대하여 내림차순으로 정리하면 $ax+a^2+3$이다.
ㄷ. x항, 상수항의 순서로 정리되어 있으므로 x에 대하여 내림차순으로 정리되어 있다.
ㄹ. x에 대하여 내림차순으로 정리하면 $(y^2-2)x^2+3yx$이다.
이상에서 x에 대하여 내림차순으로 정리한 다항식은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ②

x에 대한 다항식에서 y^2+1은 상수항이다.

02 $5A-2(B+3A)$
$=5A-2B-6A$
$=-A-2B$
$=-(2x^2-4x+3)-2(3x^2+5x-4)$
$=-2x^2+4x-3-6x^2-10x+8$
$=-8x^2-6x+5$ 답 $-8x^2-6x+5$

먼저 구하는 식을 간단히 한 후 두 다항식 A, B를 대입하여 동류항끼리 모아서 정리한다.

03 $A+B=-x^2+3xy-4y^2$ …… ㉠
$3B-2A=7x^2-xy-2y^2$ …… ㉡
㉠×3−㉡을 하면
$5A=-10x^2+10xy-10y^2$
$\therefore A=-2x^2+2xy-2y^2$
$X-2A=B$에서
$X=2A+B$
$=(A+B)+A$
$=(-x^2+3xy-4y^2)+(-2x^2+2xy-2y^2)$
$=-3x^2+5xy-6y^2$
따라서 다항식 X의 xy의 계수는 5이다. 답 ⑤

1등급 비밀노트
$A=-2x^2+2xy-2y^2$을 ㉠에 대입하여 B를 구한 후 $X=2A+B$에 A와 B를 대입하여 답을 구할 수도 있지만 위의 풀이처럼 $X=2A+B=(A+B)+A$임을 이용하면 계산 과정을 간단히 할 수 있다.

04 $(2x+ky^2)(x^2-xy^2+2y)$의 전개식에서 x^2y^2항은
$2x\cdot(-xy^2)+ky^2\cdot x^2=(k-2)x^2y^2$
이때 x^2y^2의 계수가 3이므로
$k-2=3$ $\therefore k=5$ 답 5

필요한 항이 나오도록 각 다항식에서 하나씩 항을 선택하여 곱한다.

05 $(x+2)(x-4)(x-2)(x+4)$
$=(x+2)(x-2)(x-4)(x+4)$
$=(x^2-4)(x^2-16)$
$=x^4-20x^2+64$
따라서 x^2의 계수는 -20이다. 답 -20

06 $(a+b+c)(a-b-c)+(a+b-c)(a-b+c)$
$=\{a+(b+c)\}\{a-(b+c)\}$
$+\{a+(b-c)\}\{a-(b-c)\}$
$=a^2-(b+c)^2+a^2-(b-c)^2$
$=a^2-b^2-2bc-c^2+a^2-b^2+2bc-c^2$
$=2(a^2-b^2-c^2)$
이므로 $2(a^2-b^2-c^2)=0$에서 $a^2-b^2-c^2=0$
$\therefore a^2=b^2+c^2$
따라서 주어진 삼각형은 빗변의 길이가 a인 직각삼각형이다. 답 ④

07 $(x+a)^3+(2x-3)^3$
$=(x^3+3x^2a+3xa^2+a^3)$
$+(8x^3-36x^2+54x-27)$
$=9x^3+(3a-36)x^2+(3a^2+54)x+a^3-27$
이때 x^2의 계수가 -42이므로
$3a-36=-42$ $\therefore a=-2$
따라서 x의 계수는
$3a^2+54=3\cdot(-2)^2+54=66$ 답 ③

08 $(2x+1)^2(4x^2-2x+1)^2$
$=\{(2x+1)(4x^2-2x+1)\}^2$
$=\{(2x)^3+1^3\}^2$
$=(8x^3+1)^2$
$=64x^6+16x^3+1$
따라서 $a=64$, $b=16$, $n=3$이므로
$a+2b+n=99$ 답 ⑤

$(a+b)(a^2-ab+b^2)$
$=a^3+b^3$

09 $(x+1)(y+1)(z+1)$
$=(1+x)(1+y)(1+z)$
$=1+(x+y+z)+(xy+yz+zx)+xyz$
$=1+1+3+5=10$ 답 10

1등급 비밀노트
곱셈 공식
$(x+a)(x+b)(x+c)$
$=x^3+(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x+abc$
를 이용하면 주어진 다항식을 쉽게 전개할 수 있다.
$(1+x)(1+y)(1+z)$
$=1^3+(x+y+z)\cdot1^2+(xy+yz+zx)\cdot1+xyz$
$=1+(x+y+z)+(xy+yz+zx)+xyz$

일품 BOX

10 $a+b=(2+\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})=4$

$ab=(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=4-3=1$

$\therefore (a+a^2+a^3)+(b+b^2+b^3)$

$=(a+b)+(a^2+b^2)+(a^3+b^3)$

$=(a+b)+\{(a+b)^2-2ab\}$

$\quad+\{(a+b)^3-3ab(a+b)\}$

$=4+(4^2-2\cdot1)+(4^3-3\cdot1\cdot4)$

$=70$ 답 ③

11 $a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$이므로

$56=2^3+3ab\cdot2,\qquad 6ab=48$

$\therefore ab=8$

$(a+b)^2=(a-b)^2+4ab=2^2+4\cdot8=36$이므로

$a+b=6\ (\because a+b>0)$

$\therefore a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$

$=6^3-3\cdot8\cdot6$

$=72$ 답 ④

$a>0,\ b>0$이므로 $a+b>0$

12 직사각형의 가로, 세로의 길이를 각각 x cm, y cm라 하면 직사각형의 대각선의 길이가 부채꼴의 반지름의 길이와 같으므로

$x^2+y^2=100$

또 직사각형의 둘레의 길이가 24 cm이므로

$2(x+y)=24\qquad\therefore x+y=12$

이때 $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$에서

$100=12^2-2xy\qquad\therefore xy=22$

따라서 직사각형의 넓이는 22 cm^{2}이다. 답 ④

(직사각형의 넓이)
=(가로의 길이)
×(세로의 길이)
$=xy$

13 $x\neq0$이므로 $x^2-4x-1=0$의 양변을 x로 나누면

$x-4-\dfrac{1}{x}=0\qquad\therefore x-\dfrac{1}{x}=4$

$\therefore x^3-\dfrac{1}{x^3}=\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^3+3\left(x-\dfrac{1}{x}\right)$

$=4^3+3\cdot4=76$ 답 ⑤

$x=0$을 $x^2-4x-1=0$에 대입하면 등식이 성립하지 않으므로 $x\neq0$이다.

14 $x^3+y^3+z^3-3xyz=0$에서

$(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)=0$

이때 $x+y+z\neq0$이므로

$x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx=0$

$\dfrac{1}{2}\{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\}=0$

$x-y=0,\ y-z=0,\ z-x=0$

$\therefore x=y=z$

$\therefore \dfrac{(x+y)^3+(y+z)^3+(z+x)^3}{(x+y)(y+z)(z+x)}$

$=\dfrac{(2x)^3+(2x)^3+(2x)^3}{2x\cdot2x\cdot2x}=3$ 답 3

15 주어진 직육면체의 가로, 세로의 길이와 높이를 각각 $x,\ y,\ z$라 하면 모든 모서리의 길이의 합이 68이므로

$4(x+y+z)=68$

$\therefore x+y+z=17$

대각선의 길이가 10이므로

$x^2+y^2+z^2=100$

따라서 직육면체의 겉넓이는

$2(xy+yz+zx)=(x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2)$

$=17^2-100$

$=189$ 답 ⑤

16

$$\begin{array}{r|l} & 3x-2 \\ \hline x^2+2 & 3x^3-2x^2\qquad+3 \\ & 3x^3\qquad+6x \\ \hline & -2x^2-6x+3 \\ & -2x^2\qquad-4 \\ \hline & -6x+7 \end{array}$$

다항식의 나눗셈을 할 때는 차수를 맞춰서 계산하고 해당 차수의 항이 없는 부분은 비워 둔다.

$\therefore Q(x)=3x-2,\ R(x)=-6x+7$

이때 $3x-2=-\dfrac{1}{2}(-6x+7)+\dfrac{3}{2}$이므로 구하는 나머지는 $\dfrac{3}{2}$이다. 답 $\dfrac{3}{2}$

17 주어진 등식에서 다항식 $2x^4+4x^3+3x^2+7x-1$을 $2x^2+5$로 나누었을 때의 몫이 $P(x)$, 나머지가 $ax+4$이다.

$$\begin{array}{r|l} & x^2+2x-1 \\ \hline 2x^2+5 & 2x^4+4x^3+3x^2+7x-1 \\ & 2x^4\qquad+5x^2 \\ \hline & 4x^3-2x^2+7x \\ & 4x^3\qquad+10x \\ \hline & -2x^2-3x-1 \\ & -2x^2\qquad-5 \\ \hline & -3x+4 \end{array}$$

$A=BQ+R$에서 R가 상수이거나 R의 차수가 B의 차수보다 작으면 A를 B로 나누었을 때의 몫은 Q, 나머지는 R이다.

따라서 $P(x)=x^2+2x-1,\ a=-3$이므로

$P(a)=P(-3)$

$=(-3)^2+2\cdot(-3)-1$

$=2$ 답 ②

18 다항식 x^3-4x+a를 x^2-3x+b로 나누면

$$\begin{array}{r|l} & x+3 \\ \hline x^2-3x+b & x^3\qquad\qquad-4x+a \\ & x^3-3x^2\qquad+bx \\ \hline & 3x^2-(4+b)x+a \\ & 3x^2-\qquad 9x+3b \\ \hline & (5-b)x+a-3b \end{array}$$

이때 나머지가 0이므로

$5-b=0,\ a-3b=0$

$\therefore a=15,\ b=5$

$\therefore a+b=20$ 답 20

ⓒ좋은책신사고

1등급을 위한 고난도 문제

본책 11~13쪽

01 다항식 $2a+x^3-3ax+6+3x^2+7x$를 x에 대하여 내림차순으로 정리하면

$x^3+3x^2+(7-3a)x+2a+6$ ··· ❶

이때 x의 계수가 -2이므로

$7-3a=-2 \qquad \therefore a=3$ ··· ❷

따라서 상수항은

$2a+6=2\cdot3+6=12$ ··· ❸

답 12

채점 기준	비율
❶ 주어진 다항식을 x에 대하여 내림차순으로 정리할 수 있다.	30 %
❷ a의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ 상수항을 구할 수 있다.	30 %

02 $2(A-B)-\{B-3(C-A)\}$

$=2A-2B-B+3C-3A$

$=-A-3B+3C$

$=-(-2x^2+5x-4)-3(3x^2-2x-1)$
$\quad+3(4x^2+x-3)$

$=2x^2-5x+4-9x^2+6x+3+12x^2+3x-9$

$=5x^2+4x-2$

답 ③

03 $A+2B$

$=(ax^2+bxy+ay^2)+2(x^2+2xy+3y^2)$

$=(a+2)x^2+(b+4)xy+(a+6)y^2$ ····· ㉠

$2A-C=2(ax^2+bxy+ay^2)-(6x^2+xy-2y^2)$

$=(2a-6)x^2+(2b-1)xy+(2a+2)y^2$ ····· ㉡

㉠, ㉡의 항이 각각 두 개이려면 각 다항식에서 x^2, xy, y^2의 계수 중 하나씩만 0이어야 한다.

그런데 a, b는 정수이므로 ㉡에서 $2b-1\neq0$이다.

따라서 $2a-6=0$ 또는 $2a+2=0$이므로

$a=3$ 또는 $a=-1$

이고 ㉠에서 $a=3$, $a=-1$일 때 $a+2\neq0$, $a+6\neq0$이므로 $b+4=0$이어야 한다.

즉 $b=-4$이고, $ab<0$이므로 $\qquad a=3$

$\therefore a^2+b^2=3^2+(-4)^2=25$

답 25

04 $(x^2+ax+6)(x^2+bx-2)$의 전개식에서

x^3항은 $\qquad x^2\cdot bx+ax\cdot x^2=(a+b)x^3$

x^2항은 $\qquad x^2\cdot(-2)+ax\cdot bx+6\cdot x^2=(ab+4)x^2$

이때 x^3의 계수와 x^2의 계수가 모두 0이므로

$a+b=0,\ ab+4=0$

$b=-a$를 $ab+4=0$에 대입하면

$-a^2+4=0, \qquad a^2=4 \qquad \therefore a=\pm2$

$\therefore a=-2,\ b=2$ 또는 $a=2,\ b=-2$

그런데 $a>b$이므로 $\qquad a=2,\ b=-2$

따라서 주어진 다항식의 전개식에서 x항은

$ax\cdot(-2)+6\cdot bx=(-2a+6b)x$

이므로 x의 계수는

$-2a+6b=-2\cdot2+6\cdot(-2)=-16$

답 ①

05 $P(x)=(2x-3)(x^2+ax+a)$라 하면 다항식 $P(x)$의 x에 대한 모든 항의 계수와 상수항의 합은 $P(1)$의 값과 같으므로 $P(1)=15$에서

$-(2a+1)=15 \qquad \therefore a=-8$ ··· ❶

따라서 $P(x)$의 전개식에서 x^2항은

$2x\cdot ax-3\cdot x^2=(2a-3)x^2$ ··· ❷

이므로 x^2의 계수는

$2a-3=2\cdot(-8)-3=-19$ ··· ❸

답 -19

채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	50 %
❷ 전개식에서 x^2항을 구할 수 있다.	30 %
❸ x^2의 계수를 구할 수 있다.	20 %

1등급 비밀노트

x에 대한 n차 다항식 $P(x)$가

$P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$

일 때, x에 대한 모든 항의 계수와 상수항의 합 $a_0+a_1+a_2+\cdots+a_n$의 값은 $P(1)$의 값과 같다. 즉 $P(x)$에서 x 대신 1을 대입한 값과 같다.

06 $H(x)=P(x)-Q(x)$라 하면

$H(x)=-x^2-4ax+3a^2-(-2x^2+2bx-b^2)$

$=x^2-(4a+2b)x+3a^2+b^2$

$\therefore P(a+b)-Q(a+b)$

$=H(a+b)$

$=(a+b)^2-(4a+2b)(a+b)+3a^2+b^2$

$=a^2+2ab+b^2-(4a^2+6ab+2b^2)+3a^2+b^2$

$=-4ab=-4\cdot3=-12$

답 -12

07 $(x+x^2+x^3+x^5)^3$

$=\underbrace{(x+x^2+x^3+x^5)}_{㉠}\underbrace{(x+x^2+x^3+x^5)}_{㉡}\underbrace{(x+x^2+x^3+x^5)}_{㉢}$

$(x+x^2+x^3+x^5)^3$을 전개하기 위하여 다항식 ㉠, ㉡, ㉢에서 택한 항을 순서대로

$x^a,\ x^b,\ x^c$ (a, b, c는 1 또는 2 또는 3 또는 5)

이라 하자.

ㄱ. x^{14}항이 나오는 경우는 $a+b+c=14$일 때이고, 이것을 만족시키는 a, b, c는 존재하지 않는다. 따라서 x^{14}의 계수는 0이다.

일품 BOX

$a=-2$, $a=2$를 각각 $b=-a$에 대입하여 b의 값을 구한다.

항은 다항식을 이루고 있는 각각의 단항식이다.

$b<0$, $ab<0$이므로 $a>0$

ㄴ. x^9항이 나오는 경우는 $a+b+c=9$일 때이고, 이것을 만족시키는 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$는

$(1,\ 3,\ 5),\ (1,\ 5,\ 3),\ (3,\ 1,\ 5),$
$(3,\ 5,\ 1),\ (5,\ 1,\ 3),\ (5,\ 3,\ 1),$
$(2,\ 2,\ 5),\ (2,\ 5,\ 2),\ (5,\ 2,\ 2),$
$(3,\ 3,\ 3)$

의 10개이다. 그런데 각 경우의 계수는 모두 1이므로 x^9의 계수는 10이다.

일품 BOX: $1+3+5=9,$ $2+2+5=9,$ $3+3+3=9$

ㄷ. 모든 항의 계수의 합은 $(x+x^2+x^3+x^5)^3$에 $x=1$을 대입한 값과 같다.

따라서 구하는 합은 $4^3=64$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

08 (i) n이 홀수일 때,

(주어진 식)

$=\left(-\frac{a+b}{2}+\frac{a-b}{2}\right)\left(\frac{a+b}{2}-\frac{a-b}{2}\right)$

$=-b\cdot b=-b^2$

(ii) n이 짝수일 때,

(주어진 식)

$=\left(\frac{a+b}{2}-\frac{a-b}{2}\right)\left(-\frac{a+b}{2}+\frac{a-b}{2}\right)$

$=b\cdot(-b)=-b^2$

(i), (ii)에서 주어진 식을 간단히 하면 $-b^2$이다. 답 ②

1등급 비밀노트

n이 자연수일 때, $(-a)^n\ (a>0)$ 꼴은 n이 짝수인 경우와 홀수인 경우로 나누어 생각한다.

09 $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}-\frac{1}{z}=\frac{yz-zx-xy}{xyz}=\frac{1}{2}$이므로

$xyz=2(yz-zx-xy)$ …… ㉠

$\therefore\ (x-2)(y+2)(z+2)$

$=(-2+x)(-2-y)(-2-z)$

$=(-2)^3+(x-y-z)\cdot(-2)^2$

$\quad+(-xy+yz-zx)\cdot(-2)+xyz$

$=xyz-2(yz-zx-xy)+4(x-y-z)-8$

$=4(x-y-z)-8\ (\because$ ㉠$)$

$=4\cdot4-8=8$ 답 ⑤

10 $40^2=(32+8)^2=32^2+2\cdot32\cdot8+8^2$이므로

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

$p=2\cdot32\cdot8=512$ ⋯ ❶

$40^2=(24+8+8)^2$

$=24^2+8^2+8^2+2(24\cdot8+8\cdot8+8\cdot24)$

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$

이므로

$q=2(24\cdot8+8\cdot8+8\cdot24)=896$ ⋯ ❷

$\therefore\ 3p-q=1536-896=640$ ⋯ ❸

답 640

채점 기준	비율
❶ p의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ q의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $3p-q$의 값을 구할 수 있다.	20 %

다른 풀이 $32^2+8^2+512=24^2+8^2+8^2+q$에서

$32^2=(24+8)^2=24^2+2\cdot24\cdot8+8^2$이므로

$(24^2+2\cdot24\cdot8+8^2)+8^2+512$

$=24^2+8^2+8^2+q$

$\therefore\ q=2\cdot24\cdot8+512=896$

11 $A=(1+x+x^2)(1-x+x^2)$

$\quad+(1-x)(1+x)(1+x^2)$

$=(1+x^2+x^4)+(1-x^2)(1+x^2)$

$=(1+x^2+x^4)+(1-x^4)=2+x^2$

$(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)=a^4+a^2b^2+b^4$

이므로 $A^2=(2+x^2)^2=4+4x^2+x^4$

따라서 A^2의 전개식에서 x^2의 계수는 4이다. 답 ②

12 $A+2B=2x^2+5x+6$ …… ㉠

$2A-B=-x^2-8$ …… ㉡

㉠+㉡×2를 하면

$5A=5x-10\qquad\therefore\ A=x-2$ ⋯ ❶

$A=x-2$를 ㉡에 대입하면

$2(x-2)-B=-x^2-8$

$\therefore\ B=x^2+2x+4$ ⋯ ❷

$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$

$AB=(x-2)(x^2+2x+4)=x^3-8$이므로

$(AB)^3=(x^3-8)^3$

$=x^9-24x^6+192x^3-512$ ⋯ ❸

따라서 $(AB)^3$의 전개식에서 상수항을 제외한 모든 항의 계수의 합은

$1+(-24)+192=169$ ⋯ ❹

답 169

채점 기준	비율
❶ A를 구할 수 있다.	30 %
❷ B를 구할 수 있다.	30 %
❸ $(AB)^3$을 전개할 수 있다.	20 %
❹ 상수항을 제외한 모든 항의 계수의 합을 구할 수 있다.	20 %

13 $(1-2x+3x^2-4x^3)^3=1+\cdots+ax^7+bx^8-64x^9$이고

$\{(x-2)(1-2x+3x^2-4x^3)\}^3$

$=(x-2)^3(1-2x+3x^2-4x^3)^3$

$=(x^3-6x^2+12x-8)(1-2x+3x^2-4x^3)^3$

이므로 $\{(x-2)(1-2x+3x^2-4x^3)\}^3$의 전개식에서 x^{10}항은

$x^3\cdot ax^7-6x^2\cdot bx^8+12x\cdot(-64x^9)$

$=(a-6b-768)x^{10}$

따라서 x^{10}의 계수는 $a-6b-768$이다. 답 ④

ⓒ좋은책신사고

14 $x+\frac{1}{x}=1$의 양변에 x를 곱하면

$x^2+1=x \qquad \therefore x^2-x+1=0 \qquad \cdots\cdots ㉠$

$\therefore P(n)=(1+x^2)^n+(1-x)^n=x^n+(-x^2)^n$

㉠의 양변에 $x+1$을 곱하면

$(x+1)(x^2-x+1)=0$

$x^3+1=0 \qquad \therefore x^3=-1$

따라서 $x^4=-x,\ x^5=-x^2,\ x^6=1$이므로 $P(n)$의 값은 다음과 같다.

$P(1)=x-x^2=1$

$P(2)=x^2+x^4=x^2-x=-1$

$P(3)=x^3-x^6=-1-1=-2$

$P(4)=x^4+x^8=x^4+x^6\cdot x^2=-x+x^2=-1$

$P(5)=x^5-x^{10}=x^5-x^6\cdot x^4=-x^2+x=1$

$P(6)=x^6+x^{12}=x^6+(x^6)^2=1+1=2$

$P(7)=x^7-x^{14}=x^6\cdot x-(x^6)^2\cdot x^2=x-x^2=1$

$\vdots$

즉 자연수 k에 대하여

$P(6k-5)+P(6k-4)+P(6k-3)$

$+P(6k-2)+P(6k-1)+P(6k)$

$=1-1-2-1+1+2=0$

이때 $2000=6\cdot 333+2$이므로

$P(1)+P(2)+P(3)+\cdots+P(2000)$

$=\{P(1)+P(2)+P(3)+\cdots+P(1998)\}$

$+P(1999)+P(2000)$

$=0+1-1=0$ 답 0

1등급 비밀노트

$x^6=1$이므로 자연수 k에 대하여

$x=x^7=x^{13}=\cdots=x^{6k-5}$,

$x^2=x^8=x^{14}=\cdots=x^{6k-4}$,

$\vdots$

$1=x^6=x^{12}=\cdots=x^{6k}$

즉 x^n (n은 자연수)은 $x,\ x^2,\ -1,\ -x,\ -x^2,\ 1$이 차례대로 반복되므로 $P(n)=x^n+(-x^2)^n$에서

$P(1)=P(7)=P(13)=\cdots=P(6k-5)=1$,

$P(2)=P(8)=P(14)=\cdots=P(6k-4)=-1$,

$\vdots$

$P(6)=P(12)=\cdots=P(6k)=2$

따라서 $P(n)=x^n+(-x^2)^n$의 값은 $1,\ -1,\ -2,\ -1,\ 1,\ 2$가 차례대로 반복된다.

15 $ax+by=p,\ bx+ay=q$라 하면

$p+q=(ax+by)+(bx+ay)$

$=a(x+y)+b(x+y)$

$=(x+y)(a+b)=2\cdot 4=8$

$pq=(ax+by)(bx+ay)$

$=abx^2+(a^2+b^2)xy+aby^2$

$=ab(x^2+y^2)+xy(a^2+b^2)$

$=\{(x+y)^2-2xy\}-\{(a+b)^2-2ab\}$

$=\{2^2-2\cdot(-1)\}-(4^2-2\cdot 1)=-8$

일품 BOX

$x^2-x+1=0$에서
$x^2-x=-1$,
$1+x^2=x$,
$1-x=-x^2$

$x^3=-1$의 양변에 $x,\ x^2$, x^3을 각각 곱하면
$x^4=-x$,
$x^5=-x^2$,
$x^6=-x^3=1$

$\overline{BE}=\overline{BC}-\overline{CE}$
$=a-c$

$0<x<1$에서 $\frac{1}{x}>1$, 즉
$-\frac{1}{x}<-1$이므로
$x-\frac{1}{x}<0$

$\therefore (ax+by)^3+(bx+ay)^3$

$=p^3+q^3=(p+q)^3-3pq(p+q)$

$=8^3-3\cdot(-8)\cdot 8=704$ 답 ④

16 $\overline{AD}=a,\ \overline{DC}=b,\ \overline{CE}=c$라 하면 직사각형 ABCD의 넓이가 96이므로

$ab=96$ ⋯ ❶

$\overline{AD}+\overline{DC}+\overline{CE}=23$에서

$a+b+c=23 \qquad \cdots\cdots ㉠$

$\overline{AB}+\overline{BE}=17$에서

$b+(a-c)=17 \qquad \cdots\cdots ㉡$

㉠+㉡을 하면

$2(a+b)=40$

$\therefore a+b=20$ ⋯ ❷

$\therefore \overline{AC}=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{(a+b)^2-2ab}$

$=\sqrt{20^2-2\cdot 96}=4\sqrt{13}$ ⋯ ❸

답 $4\sqrt{13}$

채점 기준	비율
❶ ab의 값을 구할 수 있다.	20 %
❷ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ 대각선 AC의 길이를 구할 수 있다.	30 %

17 $\frac{x^6+x^5+x^4+x^3-x^2+x-1}{x^3}$

$=\left(x^3-\frac{1}{x^3}\right)+\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+\left(x-\frac{1}{x}\right)+1 \cdots ㉠$

한편 $x\neq 0$이므로 $x^2-3x+1=0$의 양변을 x로 나누면

$x-3+\frac{1}{x}=0$

$\therefore x+\frac{1}{x}=3$

$\therefore x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2$

$=3^2-2=7$

$\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4=3^2-4=5$이므로

$x-\frac{1}{x}=-\sqrt{5}\ \left(\because x-\frac{1}{x}<0\right)$

$\therefore x^3-\frac{1}{x^3}=\left(x-\frac{1}{x}\right)^3+3\left(x-\frac{1}{x}\right)$

$=(-\sqrt{5})^3+3\cdot(-\sqrt{5})$

$=-8\sqrt{5}$

따라서 ㉠에서

$\frac{x^6+x^5+x^4+x^3-x^2+x-1}{x^3}$

$=-8\sqrt{5}+7-\sqrt{5}+1$

$=8-9\sqrt{5}$

즉 $a=8,\ b=-9$이므로

$a-b=17$ 답 ③

일품 BOX

18 $x^4+y^4+z^4$

$=(x^2)^2+(y^2)^2+(z^2)^2$

$=(x^2+y^2+z^2)^2-2\{(xy)^2+(yz)^2+(zx)^2\}$ …… ㉠

$(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)$이므로

$0=6+2(xy+yz+zx)$

$\therefore xy+yz+zx=-3$

따라서

$(xy)^2+(yz)^2+(zx)^2$

$=(xy+yz+zx)^2-2(xy\cdot yz+yz\cdot zx+zx\cdot xy)$

$=(xy+yz+zx)^2-2xyz(x+y+z)$

$=(-3)^2-0=9$

이므로 ㉠에서

$x^4+y^4+z^4=6^2-2\cdot 9=18$

답 18

19 $a-b=3+\sqrt{3}$, $b-c=3-\sqrt{3}$에서

$c-a=-6$ ⋯ ❶

$\begin{cases} a-b=3+\sqrt{3} & \cdots ㉠ \\ b-c=3-\sqrt{3} & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠+㉡을 하면

$a-c=6$

$\therefore c-a=-6$

$\therefore a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$

$=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$ ⋯ ❷

$=\frac{1}{2}\{(3+\sqrt{3})^2+(3-\sqrt{3})^2+(-6)^2\}$

$=\frac{1}{2}\{(9+6\sqrt{3}+3)+(9-6\sqrt{3}+3)+36\}$

$=30$ ⋯ ❸

답 30

채점 기준	비율
❶ $c-a$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷ $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$를 변형할 수 있다.	30 %
❸ $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$의 값을 구할 수 있다.	40 %

20 $P(x)=(x+2)(x^2+3x-1)-4$

$=x^3+5x^2+5x-6$

이므로 다항식 $P(x)$를 x^2+1로 나누면

$$\begin{array}{r|l} & x+5 \\ \hline x^2+1 & x^3+5x^2+5x-6 \\ & x^3 \qquad\quad +x \\ \hline & 5x^2+4x-6 \\ & 5x^2 \qquad +5 \\ \hline & 4x-11 \end{array}$$

따라서 다항식 $P(x)$를 x^2+1로 나누었을 때의 나머지는 $4x-11$이다.

답 ④

21 $x^4+2x^3-8x-13$

$=P(x)(x^2+4x+12)+32x+35$

이므로

$x^4+2x^3-40x-48=P(x)(x^2+4x+12)$

다항식 $x^4+2x^3-40x-48$을 $x^2+4x+12$로 나누면

다항식 $x^4+2x^3-40x-48$은 $x^2+4x+12$로 나누어떨어진다.

$$\begin{array}{r|l} & x^2-2x-4 \\ \hline x^2+4x+12 & x^4+2x^3 \qquad -40x-48 \\ & x^4+4x^3+12x^2 \\ \hline & -2x^3-12x^2-40x \\ & -2x^3-8x^2-24x \\ \hline & -4x^2-16x-48 \\ & -4x^2-16x-48 \\ \hline & 0 \end{array}$$

따라서 $P(x)=x^2-2x-4$이므로

$a=-2$, $b=-4$ $\quad\therefore ab=8$

답 8

22 $Q(x)=(x-2)\cdot x+4=x^2-2x+4$이므로

$x^4-x^2+5x-2=P(x)(x^2-2x+4)-5x+2$

$\therefore x^4-x^2+10x-4=P(x)(x^2-2x+4)$

다항식 $x^4-x^2+10x-4$를 x^2-2x+4로 나누면

$$\begin{array}{r|l} & x^2+2x-1 \\ \hline x^2-2x+4 & x^4 \qquad -x^2+10x-4 \\ & x^4-2x^3+4x^2 \\ \hline & 2x^3-5x^2+10x \\ & 2x^3-4x^2+8x \\ \hline & -x^2+2x-4 \\ & -x^2+2x-4 \\ \hline & 0 \end{array}$$

따라서 $P(x)=x^2+2x-1$이므로

$P(x)-Q(x)=(x^2+2x-1)-(x^2-2x+4)$

$=4x-5$

답 ③

23 다항식 $x^4+(a^2-a-1)x^2+(-a^2+b)x+b^3$을 x^2-x-a로 나누면

$$\begin{array}{r|l} & x^2+x+a^2 \\ \hline x^2-x-a & x^4 \qquad +(a^2-a-1)x^2+(-a^2+b)x+b^3 \\ & x^4-x^3 \qquad\quad -ax^2 \\ \hline & x^3+(a^2-1)x^2+(-a^2+b)x \\ & x^3 \qquad -x^2 \qquad -ax \\ \hline & a^2x^2+(-a^2+a+b)x+b^3 \\ & a^2x^2 \qquad -a^2x-a^3 \\ \hline & (a+b)x+a^3+b^3 \end{array}$$

⋯ ❶

이때 나머지가 $2x+26$이므로

$a+b=2$, $a^3+b^3=26$ ⋯ ❷

$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$에서

$26=2^3-3ab\cdot 2$

$\therefore ab=-3$ ⋯ ❸

답 -3

채점 기준	비율
❶ 주어진 다항식을 x^2-x-a로 나눌 수 있다.	50 %
❷ $a+b$, a^3+b^3의 값을 구할 수 있다.	20 %
❸ ab의 값을 구할 수 있다.	30 %

ⓒ좋은책신사고

24 다항식 $P(x)$를 $(2x-1)^3$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하고

$$8x^2+a=2(2x-1)^2+8x+a-2$$

이므로

$$\begin{aligned}P(x)&=(2x-1)^3Q(x)+8x^2+a\\&=(2x-1)^2(2x-1)Q(x)\\&\quad+\{2(2x-1)^2+8x+a-2\}\\&=\underline{(2x-1)^2\{(2x-1)Q(x)+2\}}\\&\quad\underline{+8x+a-2}\end{aligned}$$

이때 $P(x)$를 $(2x-1)^2$으로 나누었을 때의 나머지가 $bx+5$이므로

$8=b,\ a-2=5 \qquad \therefore a=7,\ b=8$

$\therefore a+b=15$ 답 ③

다른 풀이 다항식 $P(x)$를 $(2x-1)^3$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$$P(x)=(2x-1)^3Q(x)+8x^2+a$$

이때 $(2x-1)^3Q(x)$는 $(2x-1)^2$으로 나누어떨어지므로 다항식 $P(x)$를 $(2x-1)^2$으로 나누었을 때의 나머지는 다항식 $8x^2+a$를 $(2x-1)^2$, 즉 $4x^2-4x+1$로 나누었을 때의 나머지와 같다.

$$\begin{array}{r|l}&\quad 2\\ \hline 4x^2-4x+1 & 8x^2\qquad +a\\ & 8x^2-8x+2\\ \hline & \qquad 8x+a-2\end{array}$$

이때 $P(x)$를 $(2x-1)^2$으로 나누었을 때의 나머지가 $bx+5$이므로 $\quad 8=b,\ a-2=5$

$\therefore a=7,\ b=8 \qquad \therefore a+b=15$

일품 BOX

$P(x)$를 $(2x-1)^2$으로 나누었을 때의 몫은 $\{(2x-1)Q(x)+2\}$, 나머지는 $8x+a-2$이다.

사고력 강화를 위한 수능형 문제

본책 14쪽

01 $\overline{AM}=a,\ \overline{AB}=b$라 하면

$$\overline{AM}+\overline{MG}=a+\underline{\frac{2}{3}b}=x+y+4$$

$\therefore 3a+2b=3x+3y+12 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}=b+2a+b=2x+3y+9$

$\therefore 2a+2b=2x+3y+9 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠−㉡을 하면 $\quad a=x+3$

㉠에 $a=x+3$을 대입하면

$3(x+3)+2b=3x+3y+12$

$2b=3y+3 \qquad \therefore b=\frac{3}{2}(y+1)$

$$\begin{aligned}\therefore \triangle GBC&=\frac{1}{3}\triangle MBC=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2a\cdot b=\frac{1}{3}ab\\&=\frac{1}{3}(x+3)\cdot\frac{3}{2}(y+1)\\&=\frac{1}{2}(x+3)(y+1)\end{aligned}$$

답 ①

$\overline{BC}$의 중점을 N이라 하면 $\overline{MG}:\overline{GN}=2:1$이므로

$\overline{MG}=\frac{2}{3}\overline{MN}$

$=\frac{2}{3}\overline{AB}$

02 조건 (나)에서

$$\begin{aligned}&P(a,\ a,\ a)+P(b,\ b,\ b)+P(c,\ c,\ c)\\&=(a^2+a^2+a^2-5)+(b^2+b^2+b^2-5)+(c^2+c^2+c^2-5)\\&=3(a^2+b^2+c^2)-15=93\end{aligned}$$

이므로

$a^2+b^2+c^2=36 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

조건 (다)에서

$$\begin{aligned}&P(a,\ 1,\ 1)+P(1,\ b,\ 1)+P(1,\ 1,\ c)\\&=(a+1+a-5)+(b+b+1-5)+(1+c+c-5)\\&=2(a+b+c)-12=4\end{aligned}$$

이므로

$a+b+c=8 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

한편 $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$이므로 ㉠, ㉡에서

$8^2=36+2(ab+bc+ca)$

$\therefore ab+bc+ca=14 \qquad \cdots\cdots$ ㉢

이때

$$\begin{aligned}&P(ab,\ ab,\ ab)+P(bc,\ bc,\ bc)+P(ca,\ ca,\ ca)\\&=3(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)-15 \qquad \cdots\cdots ㉣\end{aligned}$$

이고

$$\begin{aligned}&a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\\&=(ab+bc+ca)^2-2(ab\cdot bc+bc\cdot ca+ca\cdot ab)\\&=(ab+bc+ca)^2-2abc(a+b+c)\\&=14^2-2\cdot 3\cdot 8\ (\because ㉡,\ ㉢)\\&=148\end{aligned}$$

이므로 ㉣에서

$$\begin{aligned}&P(ab,\ ab,\ ab)+P(bc,\ bc,\ bc)+P(ca,\ ca,\ ca)\\&=3\cdot 148-15=429\end{aligned}$$

답 429

03 세 정삼각형 OAB, OCD, OEF의 한 변의 길이를 각각 $a,\ b,\ c$라 하면 세 정삼각형의 둘레의 길이의 합이 36이므로

$3a+3b+3c=36$

$\therefore a+b+c=12$

세 정삼각형의 넓이의 합이 $24\sqrt{3}$이므로

$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2+\frac{\sqrt{3}}{4}b^2+\frac{\sqrt{3}}{4}c^2=24\sqrt{3}$

$\therefore a^2+b^2+c^2=96$

이때 $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$에서

$96=12^2-2(ab+bc+ca)$

$\therefore ab+bc+ca=24$

한편 $\underline{\angle BOC=\angle DOE=\angle FOA=60^\circ}$이므로 세 삼각형 OBC, ODE, OFA의 넓이의 합은

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}ab\sin 60^\circ+\frac{1}{2}bc\sin 60^\circ+\frac{1}{2}ca\sin 60^\circ\\&=\frac{\sqrt{3}}{4}(ab+bc+ca)\\&=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 24=6\sqrt{3}\end{aligned}$$

답 ①

$\angle BOC$, $\angle FOE$는 맞꼭지각이므로

$\angle BOC=\angle FOE$

$=60^\circ$

같은 방법으로

$\angle DOE=60^\circ$,

$\angle FOA=60^\circ$

두 변의 길이가 a, b이고 그 끼인각의 크기가 θ인 삼각형의 넓이는

$\frac{1}{2}ab\sin\theta$

(단, $0^\circ<\theta<90^\circ$)

04 ㄱ. $A=BQ+R$에서

$D(A)=D(B)+D(Q)$

이므로 $D(Q)=D(A)-D(B)=m-n$

ㄴ. $A=x^2+x+1$, $B=x^2+1$이면

$x^2+x+1=(x^2+1)\cdot 1+x$

이므로 $Q=1$, $R=x$이다.

즉 $m=n=2$이고 $D(Q)=0$이지만 $D(R)=1\neq 0$이다.

ㄷ. $m\geq n$인 두 자연수 m, n에 대하여 $m+n=5$이므로

$m=4$, $n=1$ 또는 $m=3$, $n=2$

(i) $m=4$, $n=1$일 때,

$D(Q)=3$이고, $D(Q)+D(R)=3$이므로

$D(R)=0$

$\therefore m+D(R)=4$

(ii) $m=3$, $n=2$일 때,

$D(Q)=1$이고, $D(Q)+D(R)=3$이므로

$D(R)=2$

그런데 R는 상수이거나

(R의 차수)<(B의 차수)

이어야 하므로 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $m+D(R)=4$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

일품 BOX

ㄱ에서 $D(Q)=m-n$

$D(B)=2$이므로 $D(R)=0$ 또는 $D(R)=1$이어야 한다.

05 [그림 2]의 4개의 정육면체의 부피의 합은

$2x^3+2y^3=2(x^3+y^3)$ …… ㉠

[그림 1]의 5개의 직사각형의 넓이의 합을 S_1이라 하면

$S_1=xy+2(x^2+y^2)$

한편 [그림 2]의 4개의 정육면체의 겉넓이의 합을 S_2라 하면

$S_2=2\cdot 6x^2+2\cdot 6y^2=12(x^2+y^2)$

이때 $S_2=\frac{36}{7}S_1$이므로 $7S_2=36S_1$에서

$7\cdot 12(x^2+y^2)=36\{xy+2(x^2+y^2)\}$

$7(x^2+y^2)=3xy+6(x^2+y^2)$

$\therefore x^2+y^2=3xy$ …… ㉡

한편 [그림 2]의 4개의 정육면체의 모든 모서리의 길이의 합이 240이므로

$2\cdot 12x+2\cdot 12y=240$, $24(x+y)=240$

$\therefore x+y=10$ …… ㉢

㉡에서 $(x+y)^2-2xy=3xy$이므로

$(x+y)^2=5xy$, $10^2=5xy$ ($\because$ ㉢)

$\therefore xy=20$

따라서

$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$

$=10^3-3\cdot 20\cdot 10=400$

이므로 ㉠에서 구하는 합은

$2x^3+2y^3=2\cdot 400=800$ 답 800

정육면체의 모서리의 개수는 12이다.

02 나머지정리와 인수분해

개념&핵심 기출

본책 16~18쪽

01 주어진 등식의 좌변을 전개하여 정리하면

$ax^4+(-6a+b)x^2+9a-b+c=x^4-5x^2+12$

위의 등식이 x에 대한 항등식이므로

$a=1$, $-6a+b=-5$, $9a-b+c=12$

$\therefore a=1$, $b=1$, $c=4$

$\therefore a+b+c=6$ 답 6

다른 풀이 주어진 등식이 x에 대한 항등식이므로 양변에 $x^2=2$를 대입하면

$a+b+c=2^2-5\cdot 2+12=6$

1등급 비밀노트

주어진 등식은 차수가 짝수인 항과 상수항으로만 이루어진 항등식이므로 양변에 $x^2=2$를 대입하여 등식이 성립함을 이용할 수 있다.

02 주어진 등식의 양변에 $x=0$을 대입하면

$6=2b$ $\therefore b=3$

주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$4-9+6=-c$ $\therefore c=-1$

주어진 등식의 양변에 $x=2$를 대입하면

$16-18+6=2a$ $\therefore a=2$

$\therefore a+b+c=4$ 답 4

03 x^3+2x^2+ax+b

$=(x+2)^2(x+c)+2$

$=(x^2+4x+4)(x+c)+2$

$=x^3+(c+4)x^2+(4c+4)x+4c+2$

위의 등식이 x에 대한 항등식이므로

$c+4=2$, $4c+4=a$, $4c+2=b$

$\therefore a=-4$, $b=-6$, $c=-2$

따라서 $P(x)=x^3+2x^2-4x-6$이므로

$P(c+3)=P(1)$

$=1+2-4-6=-7$ 답 ①

다항식을 이차식으로 나누었을 때의 나머지는 상수이거나 일차식이므로 $ax+b$ (a, b는 상수)로 놓는다.

04 $P(x)$를 x^2-2x-3으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$P(x)=(x^2-2x-3)Q(x)+ax+b$

$=(x+1)(x-3)Q(x)+ax+b$

이때 나머지정리에 의하여 $P(-1)=3$, $P(3)=23$이므로 $-a+b=3$, $3a+b=23$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=5$, $b=8$

따라서 구하는 나머지는 $5x+8$이다. 답 ④

05 x^3의 계수가 1인 삼차식 $P(x)$에 대하여 $P(a)=0$을 만족시키는 실수 a의 값이 -2와 5뿐이므로

$P(-2)=0$, $P(5)=0$이므로 $P(x)$는 $x+2$, $x-5$로 각각 나누어떨어진다.

$P(x)=(x+2)^2(x-5)$ 또는

$P(x)=(x+2)(x-5)^2$

그런데 $P(x)$의 상수항은 음수이므로

$P(x)=(x+2)^2(x-5)$

따라서 $P(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는

$P(1)=3^2\cdot(-4)=-36$ 답 -36

06 주어진 조립제법을 완성하면 오른쪽과 같으므로

$$\begin{array}{r|rrrr} -\frac{1}{2} & 4 & -3 & 1 & 2 \\ & & -2 & \frac{5}{2} & -\frac{7}{4} \\ \hline & 4 & -5 & \frac{7}{2} & \boxed{\frac{1}{4}} \end{array}$$

$4x^3-3x^2+x+2$

$=\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(4x^2-5x+\frac{7}{2}\right)+\frac{1}{4}$

$=(2x+1)\left(2x^2-\frac{5}{2}x+\frac{7}{4}\right)+\frac{1}{4}$

따라서 $a=\frac{7}{2}$이고, 몫의 상수항은 $\frac{7}{4}$이므로 구하는 합은

$\frac{7}{2}+\frac{7}{4}=\frac{21}{4}$ 답 $\frac{21}{4}$

07 $(n+3)^3+3(n+3)^2+3(n+3)+1$

$=\{(n+3)+1\}^3=(n+4)^3$

이므로 $(n+4)^3\le 1000$에서

$n+4\le 10 \qquad \therefore n\le 6$

따라서 자연수 n은 1, 2, 3, 4, 5, 6이므로 구하는 합은

$1+2+3+4+5+6=21$ 답 ③

08 $27x^3-64y^6=(3x)^3-(4y^2)^3$

$=(3x-4y^2)(9x^2+12xy^2+16y^4)$

이므로 $27x^3-64y^6$의 인수 중에서 $9x^2+pxy^2+qy^4$이 될 수 있는 것은 $9x^2+12xy^2+16y^4$이다.

따라서 $p=12$, $q=16$이므로

$p+q=28$ 답 28

09 $51=a$라 하면

$\frac{51^4+51^2+1}{51^2+52}=\frac{a^4+a^2\cdot 1^2+1^4}{a^2+a+1}$

$=\frac{(a^2+a+1)(a^2-a+1)}{a^2+a+1}$

$=a^2-a+1$

$=(a-1)^2+a$

$=50^2+51$

이므로 $k=51$ 답 ③

10 $x^2+5x=X$로 놓으면

(주어진 식)$=(X+4)(X+6)-24$

$=X^2+10X$

$=X(X+10)$

$=(x^2+5x)(x^2+5x+10)$

$=x(x+5)(x^2+5x+10)$

일품 BOX

$P(1)=6$, $Q(1)=2$ 또는 $P(1)=2$, $Q(1)=6$이다.

$n+3=a$라 하면 주어진 식은

a^3+3a^2+3a+1

$=(a+1)^3$

$=\{(n+3)+1\}^3$

$a^4+a^2b^2+b^4$

$=(a^2+ab+b^2)$

$\times(a^2-ab+b^2)$

$1 \quad 2(y-1) \rightarrow 2y-2$

$1 \quad -(3y-1) \rightarrow -3y+1$

$-y-1$

따라서 $a=5$, $b=5$, $c=10$이므로

$a+b+c=20$ 답 ①

11 $x^4+2x^2+9=(x^4+6x^2+9)-4x^2$

$=(x^2+3)^2-(2x)^2$

$=(x^2+2x+3)(x^2-2x+3)$

따라서

$P(x)=x^2+2x+3$, $Q(x)=x^2-2x+3$ 또는

$P(x)=x^2-2x+3$, $Q(x)=x^2+2x+3$

이므로

$P(1)+Q(1)=8$ 답 ②

1등급 비밀노트

복이차식에서 완전제곱식 꼴을 만들 때, x^4항과 상수항을 기준으로 생각한다. 즉

$x^4+2x^2+9=\{(x^2)^2+\square x^2+3^2\}-\triangle x^2$

에서 $\square$는 $2\cdot 3=6$이어야 하므로

$2=6-\triangle \qquad \therefore \triangle=4$

따라서 주어진 식은 $(x^4+6x^2+9)-4x^2$으로 나타낼 수 있다.

12 $x^4-13x^2y^2+36y^4$

$=(x^4-12x^2y^2+36y^4)-x^2y^2$

$=(x^2-6y^2)^2-(xy)^2$

$=(x^2+xy-6y^2)(x^2-xy-6y^2)$

$=(x+3y)(x-2y)(x+2y)(x-3y)$

따라서 구하는 네 일차식의 합은

$(x+3y)+(x-2y)+(x+2y)+(x-3y)=4x$

답 ③

다른 풀이 $x^2=X$, $y^2=Y$로 놓으면

$x^4-13x^2y^2+36y^4$

$=X^2-13XY+36Y^2$

$=(X-4Y)(X-9Y)$

$=(x^2-4y^2)(x^2-9y^2)$

$=(x+2y)(x-2y)(x+3y)(x-3y)$

13 $x^2-xy-6y^2-x+8y-2$

$=x^2-(y+1)x-6y^2+8y-2$

$=x^2-(y+1)x-2(y-1)(3y-1)$

$=(x+2y-2)(x-3y+1)$

따라서 $a=2$, $b=-3$이므로

$a-b=5$ 답 5

14 $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$

$=(b-c)a^2+b^2c-ab^2+ac^2-bc^2$

$=(b-c)a^2-(b^2-c^2)a+bc(b-c)$

$=(b-c)\{a^2-(b+c)a+bc\}$

$=(b-c)(a-b)(a-c)$

$=(a-b)(b-c)(a-c)$ 답 ②

15 $ab(a+b)-bc(b+c)-ca(c-a)$

$=a^2b+ab^2-b^2c-bc^2-c^2a+ca^2$

$=(b+c)a^2+(b^2-c^2)a-bc(b+c)$

$=(b+c)\{a^2+(b-c)a-bc\}$

$=(b+c)(a+b)(a-c)=0$

그런데 $a+b>0$, $b+c>0$이므로

$a-c=0 \qquad \therefore a=c$

따라서 주어진 삼각형은 $a=c$인 이등변삼각형이다.

답 ②

일품 BOX

삼각형의 세 변의 길이는 양수이므로

$a>0,\ b>0,\ c>0$

$\therefore a+b>0,\ b+c>0$

16 $P(-1)=0$이므로 오른쪽과 같이 조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & -4 & 1 & 6 \\ & & -1 & 5 & -6 \\ \hline & 1 & -5 & 6 & \boxed{0} \end{array}$$

$P(x)=(x+1)(x^2-5x+6)$

$=(x+1)(x-2)(x-3)$

즉 $P(-1)=P(2)=P(3)=0$이므로

$a=-1$ 또는 $a=2$ 또는 $a=3$ …… ㉠

$Q(1)=0$이므로 오른쪽과 같이 조립제법을 이용하여 $Q(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 0 & -7 & 6 \\ & & 1 & 1 & -6 \\ \hline & 1 & 1 & -6 & \boxed{0} \end{array}$$

$Q(x)=(x-1)(x^2+x-6)$

$=(x-1)(x-2)(x+3)$

즉 $Q(1)=Q(2)=Q(-3)=0$이므로

$a\neq1,\ a\neq2,\ a\neq-3$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 a는 -1, 3이므로 구하는 합은

$-1+3=2$

답 ②

$P(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로 $P(a)=0$인 a는 $\pm$(6의 약수) 중에서 찾는다.

17 $x-1$이 $P(x)=ax^4+bx^3+cx-a$의 인수이므로

$P(1)=a+b+c-a=0$

$\therefore c=-b$

$\therefore P(x)=ax^4+bx^3-bx-a$

$=a(x^4-1)+bx(x^2-1)$

$=a(x^2+1)(x+1)(x-1)$

$\quad +bx(x+1)(x-1)$

$=(x+1)(x-1)(ax^2+bx+a)$

따라서 항상 $P(x)$의 인수인 것은 ②이다.

답 ②

x^4-1

$=(x^2+1)(x^2-1)$

$=(x^2+1)(x+1)(x-1)$

18 $V(x)=x^3+x^2-8x-12$라 하자.

$V(-2)=0$이므로 오른쪽과 같이 조립제법을 이용하여 $V(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & 1 & -8 & -12 \\ & & -2 & 2 & 12 \\ \hline & 1 & -1 & -6 & \boxed{0} \end{array}$$

$V(x)=(x+2)(x^2-x-6)$

$=(x+2)^2(x-3)$

이때 $V(x)=\{P(x)\}^2Q(x)$이므로

$P(x)=x+2,\ Q(x)=x-3$

$\therefore Q(10)=10-3=7$

답 7

1등급을 위한 고난도 문제

본책 19~21쪽

01 $\dfrac{x^2+ax+b}{3x^2+2bx+9}=k$ (k는 상수)라 하면

$x^2+ax+b=3kx^2+2bkx+9k$

위의 등식이 x에 대한 항등식이므로

$1=3k,\ a=2bk,\ b=9k$

$\therefore k=\dfrac{1}{3},\ a=2,\ b=3$

$\therefore a+b=5$

답 5

02 주어진 등식의 양변에

$x=1$을 대입하면

$-1=a_{10}+a_9+a_8+a_7+\cdots+a_1+a_0$ …… ㉠

$x=-1$을 대입하면

$1=a_{10}-a_9+a_8-a_7+\cdots-a_1+a_0$ …… ㉡

㉠$-$㉡을 하면

$-2=2(a_9+a_7+a_5+a_3+a_1)$

$\therefore a_1+a_3+a_5+a_7+a_9=-1$

답 -1

03 $(x-a)(x+b)(x-c)$

$=x^3+(-a+b-c)x^2+(-ab-bc+ca)x+abc$,

$(x+a)(x-b)(x+c)$

$=x^3+(a-b+c)x^2+(-ab-bc+ca)x-abc$

이므로

$-a+b-c=a-b+c,\ abc=-abc$

$\therefore b=a+c,\ abc=0$

ㄱ. $abc=0$이므로 a, b, c 중 적어도 하나는 0이다.

ㄴ. $a=0$이면 $b=c$이다.

ㄷ. a, b, c가 이 순서대로 연속하는 세 정수이면

$a=b-1,\ c=b+1$이므로 이것을 $b=a+c$에 대입하면

$b=b-1+b+1 \qquad \therefore b=0$

따라서 $a=-1,\ c=1$이므로

$a+b+c=0$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

04 $x-2y=-1$, 즉 $x=2y-1$이므로

$ax^2+bxy+cy^2$

$=a(2y-1)^2+b(2y-1)y+cy^2$

$=a(4y^2-4y+1)+b(2y^2-y)+cy^2$

$=(4a+2b+c)y^2+(-4a-b)y+a$ ··· ❶

$(4a+2b+c)y^2+(-4a-b)y+a=2$가 y에 대한 항등식이므로

$4a+2b+c=0,\ -4a-b=0,\ a=2$

$\therefore a=2,\ b=-8,\ c=8$ ··· ❷

$\therefore a-b+c=18$ ··· ❸

답 18

ⓒ좋은책신사고

채점 기준	비율
❶ $ax^2+bxy+cy^2$을 y에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40 %
❷ a, b, c의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ $a-b+c$의 값을 구할 수 있다.	10 %

05 $P(x)$를 x^3+1로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 ax^2+bx+c (a, b, c는 상수)라 하면

$$P(x)=(x^3+1)Q(x)+ax^2+bx+c$$
$$=(x+1)(x^2-x+1)Q(x)+ax^2+bx+c \quad \cdots\cdots ㉠$$

이때 $P(x)$를 x^2-x+1로 나누었을 때의 나머지가 $3x-5$이므로 ㉠에서

$$P(x)=(x+1)(x^2-x+1)Q(x)$$
$$+a(x^2-x+1)+3x-5 \quad \cdots\cdots ㉡$$

또 $P(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지가 -2, 즉 $P(-1)=-2$이므로 ㉡에서

$$3a-8=-2 \qquad \therefore a=2$$

따라서 구하는 나머지는

$$2(x^2-x+1)+3x-5=2x^2+x-3$$

답 $2x^2+x-3$

x^3+1
$=(x+1)(x^2-x+1)$

1등급 비밀노트

㉠에서 $(x+1)(x^2-x+1)Q(x)$는 x^2-x+1로 나누어떨어지므로 ax^2+bx+c를 x^2-x+1로 나누었을 때의 나머지가 $3x-5$이어야 한다. 이때 ㉡에서

$$P(x)=(x^2-x+1)\{(x+1)Q(x)+a\}+3x-5$$

이므로 $P(x)$를 x^2-x+1로 나누었을 때의 몫은 $(x+1)Q(x)+a$이다.

06 $P(x)$를 $(x-1)(x+2)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$$P(x)=(x-1)(x+2)Q(x)+2x-7$$

ㄱ. $P(x)+5$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는

$$P(1)+5=2\cdot1-7+5=0$$

이므로 $P(x)+5$는 $x-1$로 나누어떨어진다.

ㄴ. $P(x-1)$을 $x+1$로 나누었을 때의 나머지는

$$P(-1-1)=P(-2)=2\cdot(-2)-7=-11$$

ㄷ. $xP\left(\frac{1}{2}x\right)$를 $x+4$로 나누었을 때의 나머지는

$$-4P\left(\frac{1}{2}\cdot(-4)\right)=-4P(-2)=44$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

$P(x)$를 $x-a$로 나누었을 때의 나머지는 $P(a)$이다.

07 $P(1)=P(2)=P(3)=k$ (k는 상수)라 하면

$$P(1)-k=0,\ P(2)-k=0,\ P(3)-k=0$$

즉 $G(x)=P(x)-k$라 하면

$G(1)=G(2)=G(3)=0$이고 $G(x)$의 x^3의 계수가 1이므로

$P(x)$와 $G(x)$의 x^3의 계수는 같다.

$$G(x)=(x-1)(x-2)(x-3)$$
$$\therefore P(x)=(x-1)(x-2)(x-3)+k \quad \cdots ❶$$

이때 $P(-1)=0$이므로

$$-2\cdot(-3)\cdot(-4)+k=0$$
$$\therefore k=24 \quad \cdots ❷$$

$P(x)=(x-1)(x-2)(x-3)+24$이므로

$$P(0)=-1\cdot(-2)\cdot(-3)+24=18 \quad \cdots ❸$$

답 18

채점 기준	비율
❶ $P(1)=P(2)=P(3)=k$로 놓고 $P(x)$를 식으로 나타낼 수 있다.	50 %
❷ k의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ $P(0)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

08

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & a & b & c \\ & & 2 & -2 & -4 \\ \hline & 1 & a+2 & b-2 & \boxed{1} \end{array}$$

$2(a+2)=-2$에서 $\quad a=-3$

$2(b-2)=-4$에서 $\quad b=0$

$c-4=1$에서 $\quad c=5$

$$\therefore ax^2+bx+c=-3x^2+5$$

오른쪽 조립제법에서 $-3x^2+5$를 $x+1$로 나누었을 때의 몫은 $-3x+3$이다.

$$\begin{array}{r|rrr} -1 & -3 & 0 & 5 \\ & & 3 & -3 \\ \hline & -3 & 3 & \boxed{2} \end{array}$$

답 $-3x+3$

09 $p=a^3$, $q=b^3$, $r=a^2b$, $s=ab^2$, $t=2(a+b)^2$이므로 $p-q+r-s=t$에서

$$a^3-b^3+a^2b-ab^2=2(a+b)^2$$
$$(a-b)(a^2+ab+b^2)+ab(a-b)=2(a+b)^2$$
$$(a-b)(a^2+2ab+b^2)=2(a+b)^2$$
$$(a-b)(a+b)^2=2(a+b)^2$$

이때 $a+b\neq0$이므로 $\quad a-b=2$ 답 ⑤

10 두 정육면체의 부피의 차가 7이므로

$$a^3-b^3=7$$
$$\therefore (a-b)(a^2+ab+b^2)=7 \quad \cdots\cdots ㉠ \quad \cdots ❶$$

a, b는 양수이고 $a>b$이므로 $a^3>b^3$

두 정육면체의 한 면의 둘레의 길이의 차가 4이므로

$$4a-4b=4$$
$$\therefore a-b=1 \quad \cdots\cdots ㉡ \quad \cdots ❷$$

㉠에 ㉡을 대입하면

$$a^2+ab+b^2=7 \quad \cdots ❸$$

답 7

채점 기준	비율
❶ 부피의 차를 이용하여 a, b에 대한 식을 세우고, 인수분해할 수 있다.	40 %
❷ 한 면의 둘레의 길이의 차를 이용하여 a, b에 대한 식을 세울 수 있다.	40 %
❸ a^2+ab+b^2의 값을 구할 수 있다.	20 %

11 $x^3+y^3+z^3-3xyz=0$에서

$(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)=0$

$\frac{1}{2}(x+y+z)\{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\}=0$

$\therefore (x+y+z)\{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\}=0$

ㄱ. $x+y+z\neq0$이면

$x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx=0$

$\therefore x^2+y^2+z^2=xy+yz+zx$

ㄴ. $(x-y)(y-z)(z-x)\neq0$이면 $x-y\neq0$, $y-z\neq0$, $z-x\neq0$이므로

$(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\neq0$

$\therefore x+y+z=0$

ㄷ. 삼각형의 세 변의 길이가 x, y, z이면 $x+y+z>0$이므로

$(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2=0$

따라서 $x=y=z$이므로 정삼각형이다.

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

$x-y=0$, $y-z=0$, $z-x=0$이므로 $x=y=z$

12 $4-4x=X$로 놓으면

$4x^4+(4-4x-x^2)(4-4x+3x^2)$

$=4x^4+(X-x^2)(X+3x^2)$

$=4x^4+X^2+2x^2X-3x^4$

$=x^4+2Xx^2+X^2$

$=(x^2+X)^2=(x^2-4x+4)^2$

$=\{(x-2)^2\}^2=(x-2)^4$

따라서 $(x-2)^4$의 인수인 것은 ⑤이다. 답 ⑤

13 $(x+\sqrt{3})(x+2\sqrt{3})(x+5\sqrt{3})(x+6\sqrt{3})+a$

$=(x+\sqrt{3})(x+6\sqrt{3})(x+2\sqrt{3})(x+5\sqrt{3})+a$

$=(x^2+7\sqrt{3}x+18)(x^2+7\sqrt{3}x+30)+a$

$x^2+7\sqrt{3}x=X$로 놓으면

$(X+18)(X+30)+a$

$=X^2+48X+540+a$

$=(X+24)^2-36+a$

$=(x^2+7\sqrt{3}x+24)^2-36+a$ …… ㉠

따라서 ㉠이 이차식의 제곱이 되려면

$-36+a=0$ $\therefore a=36$ 답 36

14 $x^4-x^2+16=(x^4+8x^2+16)-9x^2$

$=(x^2+4)^2-(3x)^2$

$=(x^2+3x+4)(x^2-3x+4)$

즉 $Q(x)=x^2+3x+4$이므로

$Q(x^2)=x^4+3x^2+4=(x^4+4x^2+4)-x^2$

$=(x^2+2)^2-x^2$

$=(x^2+x+2)(x^2-x+2)$

따라서 $Q(x^2)$의 인수인 것은 ③이다. 답 ③

일품 BOX

x^2+y^2

$=\frac{1}{4}(a+b)^2+\frac{1}{4}(a-b)^2$

$=\frac{1}{4}(a^2+2ab+b^2)$

$+\frac{1}{4}(a^2-2ab+b^2)$

$=\frac{1}{2}(a^2+b^2)$

$1\ \ 2y+3 \rightarrow 4y+6$

$2\ \ 3y-1 \rightarrow 3y-1$

$7y+5$

15 $(x+y)^2(x-y)^2-18(x^2+y^2)+81$

$=(x^2-y^2)^2-18(x^2+y^2)+81$

$=(x^2+y^2)^2-18(x^2+y^2)+81-4x^2y^2$

$=\{(x^2+y^2)-9\}^2-(2xy)^2$

$=(x^2+y^2+2xy-9)(x^2+y^2-2xy-9)$

$=\{(x+y)^2-3^2\}\{(x-y)^2-3^2\}$

$=(x+y+3)(x+y-3)(x-y+3)(x-y-3)$

따라서 주어진 다항식의 인수인 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ①

다른 풀이 $x+y=a$, $x-y=b$라 하고 두 식을 연립하여 풀면 $x=\frac{a+b}{2}$, $y=\frac{a-b}{2}$이므로

$x^2+y^2=\frac{1}{2}(a^2+b^2)$

$\therefore (x+y)^2(x-y)^2-18(x^2+y^2)+81$

$=a^2b^2-9(a^2+b^2)+81=a^2b^2-9a^2-9b^2+81$

$=a^2(b^2-9)-9(b^2-9)=(a^2-9)(b^2-9)$

$=(a+3)(a-3)(b+3)(b-3)$

$=(x+y+3)(x+y-3)(x-y+3)(x-y-3)$

16 $\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{a^2+1}=\sqrt{b^2+c^2}\sqrt{c^2+1}$의 양변을 제곱하면 $(a^2+b^2)(a^2+1)=(b^2+c^2)(c^2+1)$

$a^4+a^2+b^2a^2+b^2=b^2c^2+b^2+c^4+c^2$

$(a^2-c^2)b^2+a^2-c^2+a^4-c^4=0$

$(a^2-c^2)(b^2+1)+(a^2+c^2)(a^2-c^2)=0$

$(a^2-c^2)(a^2+b^2+c^2+1)=0$

$\therefore (a+c)(a-c)(a^2+b^2+c^2+1)=0$ ⋯ ❶

이때 $a+c>0$, $a^2+b^2+c^2+1>0$이므로

$a-c=0$ $\therefore a=c$

따라서 주어진 삼각형은 $a=c$인 이등변삼각형이다. ⋯ ❷

답 $a=c$인 이등변삼각형

채점 기준	비율
❶ 양변을 제곱한 후 인수분해할 수 있다.	60 %
❷ 어떤 삼각형인지 말할 수 있다.	40 %

17 $a^3+b^3+c^3-ab(a+b)+bc(b+c)-ca(c+a)$

$=a^3+b^3+c^3-a^2b-ab^2+b^2c+bc^2-c^2a-ca^2$

$=a^3-(b+c)a^2-(b^2+c^2)a+b^2(b+c)+c^2(b+c)$

$=(a-b-c)a^2-(b^2+c^2)a+(b^2+c^2)(b+c)$

$=(a-b-c)a^2-(a-b-c)(b^2+c^2)$

$=(a^2-b^2-c^2)(a-b-c)$

따라서 주어진 다항식의 인수인 것은 ②이다. 답 ②

18 $2x^2+7xy+6y^2+5x+7y-3$

$=2x^2+(7y+5)x+(6y^2+7y-3)$

$=2x^2+(7y+5)x+(2y+3)(3y-1)$

$=(x+\boxed{2y+3})(2x+\boxed{3y-1})$

앞의 식에 y 대신 yz를 대입하면

$$2x^2+7xyz+6y^2z^2+5x+7yz-3$$
$$=(x+\boxed{2yz+3})(2x+3yz-1)$$

따라서 $A=2y+3$, $B=3y-1$, $C=2yz+3$이므로

$$2A+3B-C=2(2y+3)+3(3y-1)-(2yz+3)$$
$$=13y-2yz$$

답 ⑤

19 $x^2+ax-y^2+by-3=x^2+ax-(y^2-by+3)$

$(x^2+ax-3)-y^2+by$에서 x^2+ax-3이 $(x-1)(x+3)$ 또는 $(x-3)(x+1)$로 인수분해되는 경우로도 풀 수 있다.

에서 y^2-by+3은

$(y-1)(y-3)$ 또는 $(y+1)(y+3)$

으로 인수분해되어야 하므로

$b=4$ 또는 $b=-4$

(i) $b=4$일 때,

$x^2+ax-(y^2-4y+3)=x^2+ax-(y-1)(y-3)$

ⓘ (주어진 식)$=\{x-(y-1)\}\{x+(y-3)\}$
$=x^2-2x-(y-1)(y-3)$

$\therefore a=-2$

ⓘⓘ (주어진 식)$=\{x+(y-1)\}\{x-(y-3)\}$
$=x^2+2x-(y-1)(y-3)$

$\therefore a=2$

(ii) $b=-4$일 때,

$x^2+ax-(y^2+4y+3)=x^2+ax-(y+1)(y+3)$

ⓘ (주어진 식)$=\{x-(y+1)\}\{x+(y+3)\}$
$=x^2+2x-(y+1)(y+3)$

$\therefore a=2$

ⓘⓘ (주어진 식)$=\{x+(y+1)\}\{x-(y+3)\}$
$=x^2-2x-(y+1)(y+3)$

$\therefore a=-2$

(i), (ii)에서 a, b의 순서쌍 (a, b)는

$(-2, 4)$, $(2, 4)$, $(2, -4)$, $(-2, -4)$

이므로 $a+b$의 값이 될 수 있는 것은 2, 6, -2, -6이다.

$-2+4=2$,
$2+4=6$,
$2-4=-2$,
$-2-4=-6$

답 ④

20 $P(x)=6x^4+5x^3+4x^2-2x-1$이라 하면

$$P\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{8}+\frac{5}{8}+1-1-1=0,$$

$$P\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{27}-\frac{5}{27}+\frac{4}{9}+\frac{2}{3}-1=0$$

이므로 조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{r|rrrrr}
\frac{1}{2} & 6 & 5 & 4 & -2 & -1 \\
 & & 3 & 4 & 4 & 1 \\
\hline
-\frac{1}{3} & 6 & 8 & 8 & 2 & \boxed{0} \\
 & & -2 & -2 & -2 & \\
\hline
 & 6 & 6 & 6 & \boxed{0} &
\end{array}$$

$$\therefore P(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{3}\right)(6x^2+6x+6)$$
$$=(2x-1)(3x+1)(x^2+x+1)$$

답 ④

21 $P(1)=0$, $P(-3)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{r|rrrrr}
1 & 1 & 5 & -1 & -17 & 12 \\
 & & 1 & 6 & 5 & -12 \\
\hline
-3 & 1 & 6 & 5 & -12 & \boxed{0} \\
 & & -3 & -9 & 12 & \\
\hline
 & 1 & 3 & -4 & \boxed{0} &
\end{array}$$

$$\therefore P(x)=(x-1)(x+3)(x^2+3x-4)$$
$$=(x-1)^2(x+3)(x+4) \quad \cdots ❶$$

따라서

$$P(21)=20^2\cdot 24\cdot 25=400\cdot 24\cdot 25=24\cdot 10^4$$

이므로 $n=24$ ⋯ ❷

답 24

채점 기준	비율
❶ $P(x)$를 인수분해할 수 있다.	60 %
❷ 자연수 n의 값을 구할 수 있다.	40 %

22 $P(x)=2x^3+ax^2+(-2-2a)x-12$라 하면 $P(2)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{r|rrrr}
2 & 2 & a & -2-2a & -12 \\
 & & 4 & 2a+8 & 12 \\
\hline
 & 2 & a+4 & 6 & \boxed{0}
\end{array}$$

$$\therefore P(x)=(x-2)\{2x^2+(a+4)x+6\}$$

이때

$$2x^2+(a+4)x+6=(2x+p)(x+q)$$
$$(p,\ q\text{는 정수})$$

라 하면

$$2x^2+(a+4)x+6=2x^2+(p+2q)x+pq$$
$$\therefore a+4=p+2q,\ 6=pq$$

$6=pq$를 만족시키는 두 정수 p, q의 순서쌍 (p, q)는

$(1, 6)$, $(2, 3)$, $(3, 2)$, $(6, 1)$,
$(-1, -6)$, $(-2, -3)$, $(-3, -2)$, $(-6, -1)$

따라서 $p+2q$의 값 중 가장 큰 값과 가장 작은 값은 각각 13, -13이고 $a=p+2q-4$이므로

$p=1$, $q=6$일 때,
$p+2q=1+12=13$
$p=-1$, $q=-6$일 때,
$p+2q=-1-12$
$=-13$

$M=13-4=9$, $m=-13-4=-17$

$\therefore M-m=26$

답 26

23 $P(2x+1)=16P(x+1)$ ⋯⋯ ㉠

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면 $P(1)=16P(1)$

$\therefore P(1)=0$

따라서 사차식 $P(x)$를

$$P(x)=(x-1)^nQ(x)$$
$$(n=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ Q(x)\text{는 다항식},\ Q(1)\neq 0)$$

라 하면 ㉠에서

$2^n x^n Q(2x+1)=16x^n Q(x+1)$

$x\neq0$일 때도 등식이 성립하므로

$2^n Q(2x+1)=16Q(x+1)$

위의 식의 양변에 $x=0$을 대입하면

$2^n Q(1)=16Q(1),\quad 2^n=16\ (\because Q(1)\neq0)$

$\therefore n=4$

그런데 $P(x)=(x-1)^4Q(x)$에서 $P(x)$는 사차식이므로 $Q(x)$는 0이 아닌 상수이어야 한다.

따라서 $P(x)=a(x-1)^4\ (a\neq0)$이라 하면 조건 (가)에서

$a\cdot2^4=32\qquad\therefore a=2$

즉 $P(x)=2(x-1)^4$이므로

$P(4)=2\cdot3^4=162$ 답 ④

일품 BOX

x에 대한 항등식이므로 $x=0$, $x\neq0$일 때도 모두 등식이 성립해야 한다.

$P(x)$의 x^2의 계수가 1이므로 $G(x)$의 x^2의 계수도 1이다.

사고력 강화를 위한 수능형 문제

본책 22쪽

01 $P(x)=ax^2+bx+1$ (a, b는 상수, $a\neq0$)이라 하면

$\{P(x)\}^2$

$=(ax^2+bx+1)^2$

$=a^2x^4+b^2x^2+1+2abx^3+2bx+2ax^2$

$=a^2x^4+2abx^3+(b^2+2a)x^2+2bx+1,$

$P(x^2)+2x^2=a(x^2)^2+bx^2+1+2x^2$

$=ax^4+(b+2)x^2+1$

이때 $\{P(x)\}^2=P(x^2)+2x^2$이 x에 대한 항등식이므로

$a^2=a,\ 2ab=0,\ b^2+2a=b+2,\ 2b=0$

$\therefore a=1,\ b=0$

$\therefore P(x)=x^2+1$

따라서

$\{P(x)\}^3=(x^2+1)^3=x^6+3x^4+3x^2+1$

이므로 x^2의 계수는 3이다. 답 ①

$2b=0$에서 $b=0$
$b^2+2a=b+2$에서
$2a=2\quad\therefore a=1$
$a=1,\ b=0$일 때,
$a^2=a,\ 2ab=0$
이므로 네 식을 모두 만족시킨다.

02 $\{P(x)\}^{2018}=\dfrac{1}{2^{2018}}(x-1)^{2018}$,

$P(x^2)=\dfrac{1}{2}(x^2-1)$이므로 $\{P(x)\}^{2018}$을 $P(x^2)$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)=ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$\dfrac{1}{2^{2018}}(x-1)^{2018}$

$=\dfrac{1}{2}(x^2-1)Q(x)+ax+b$

$=\dfrac{1}{2}(x+1)(x-1)Q(x)+ax+b\qquad\cdots\cdots$ ㉠

㉠의 양변에 $x=1$, $x=-1$을 각각 대입하면

$0=a+b,\ 1=-a+b$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $\quad a=-\dfrac{1}{2},\ b=\dfrac{1}{2}$

따라서 $R(x)=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}$이므로

$R(-5)=\dfrac{5}{2}+\dfrac{1}{2}=3$ 답 3

03 $P(x)=x^2-4x-3$이라 하면 $P(x)$를 $x-\alpha$와 $x-\beta$로 각각 나누었을 때의 나머지가 모두 1이므로

$P(\alpha)=P(\beta)=1$

$\therefore P(\alpha)-1=0,\ P(\beta)-1=0$

$G(x)=P(x)-1$이라 하면 $G(\alpha)=G(\beta)=0$이므로

$G(x)=(x-\alpha)(x-\beta)$

$\therefore P(x)=(x-\alpha)(x-\beta)+1$

$=x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta+1$

즉 $\alpha\beta+1=-3$이므로 $\quad\alpha\beta=-4$

따라서 $P(x)$를 $x-\alpha\beta$로 나누었을 때의 나머지는

$P(\alpha\beta)=P(-4)=(-4)^2-4\cdot(-4)-3=29$

답 29

04 $A(1)B(1)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $A(x)B(x)$를 인수분해하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{r|rrrrr}
1 & 1 & -1 & -2 & 3 & -1 \\
 & & 1 & 0 & -2 & 1 \\ \hline
1 & 1 & 0 & -2 & 1 & \boxed{0} \\
 & & 1 & 1 & -1 & \\ \hline
 & 1 & 1 & -1 & \boxed{0} &
\end{array}$$

$\therefore A(x)B(x)=x^4-x^3-2x^2+3x-1$

$=(x-1)^2(x^2+x-1)$

이때 $A(x)+B(x)$는 삼차식이고 $m<n$이므로

$A(x)=x-1,$

$B(x)=(x-1)(x^2+x-1)=x^3-2x+1$

$\{A(x)\}^2=(x-1)^2=x^2-2x+1$이므로 $B(x)$를 $\{A(x)\}^2$으로 나누면

$$\begin{array}{r}
x+2 \\
x^2-2x+1\overline{)\,x^3\qquad-2x+1} \\
\underline{x^3-2x^2+\ x\qquad\quad} \\
2x^2-3x+1 \\
\underline{2x^2-4x+2} \\
x-1
\end{array}$$

따라서 구하는 나머지는 $x-1$이다. 답 ②

다른 풀이 $B(x)$를 $\{A(x)\}^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$(x-1)(x^2+x-1)=(x-1)^2Q(x)+ax+b$

위의 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$0=a+b\qquad\therefore b=-a\qquad\cdots\cdots$ ㉠

따라서

$(x-1)(x^2+x-1)=(x-1)^2Q(x)+a(x-1)$

이고 $x\neq1$일 때도 등식이 성립하므로

$x^2+x-1=(x-1)Q(x)+a$

ⓒ좋은책신사고

앞의 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$a=1$

㉠에서 $b=-1$이므로 구하는 나머지는 $x-1$이다.

05 $4x(x+1)(x+2)(x+3)+a$

$=4\{x(x+3)\}\{(x+1)(x+2)\}+a$

$=4(x^2+3x)(x^2+3x+2)+a$

$x^2+3x=X$로 놓으면

$4X(X+2)+a$

$=4X^2+8X+a$

$=4(X+1)^2+a-4$

$=4(x^2+3x+1)^2+a-4$

$=(2x^2+6x+2)^2+a-4$ …… ㉠

따라서 ㉠이 이차식의 제곱이 되려면

$a-4=0$ $\therefore a=4$

답 4

06 ㄱ. $P(1)=-a-b$이고 $P(-1)=-a-b$이므로 $P(1)=0$이면 $P(-1)=0$이다.

즉 $x-1$이 $P(x)$의 인수이면 $x+1$도 $P(x)$의 인수이다.

ㄴ. $P(x)$가 x^2+1로 나누어떨어지면

$P(x)=(x^2+1)(ax^2-2a)=ax^4-ax^2-2a$

즉 $ax^4-bx^2-2a=ax^4-ax^2-2a$이므로

$a=b$

이때 $a\neq0$, $b\neq0$이므로 $a+b\neq0$이다.

ㄷ. $P(n)=an^4-bn^2-2a=0$이라 하면

$a(n^4-2)-bn^2=0$

$\therefore \dfrac{b}{a}=\dfrac{n^4-2}{n^2}$

따라서 $a=n^2$, $b=n^4-2$이면 $P(n)=0$이므로 자연수 n에 대하여 $x-n$이 $P(x)$의 인수가 되도록 하는 두 정수 a, b가 항상 존재한다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

07 $66=x$, $17=y$라 하면 A, B, C, D의 부피는 각각 x^3, x^2y, xy^2, y^3이므로 A 1개, B 6개, C 12개, D 8개의 부피의 합은

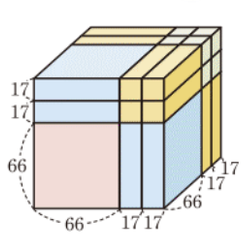
$x^3+6x^2y+12xy^2+8y^3=(x+2y)^3$

따라서 정육면체의 한 모서리의 길이는

$x+2y=66+2\cdot17=100$

답 100

참고 만들어지는 정육면체는 오른쪽 그림과 같다.



일품 BOX

세 변의 길이가 a, b, c이고 내접원의 반지름의 길이가 r인 삼각형의 넓이는

$\frac{1}{2}r(a+b+c)$

$x-a$가 $P(x)$의 인수이면 $P(a)=0$이다.

$x^2=X$라 할 때, $aX^2-bX-2a$가 $X+1$로 나누어떨어지면

$aX^2-bX-2a$

$=(X+1)(aX-2a)$

로 놓을 수 있다.

두 정수 a, b가

$a=kn^2$, $b=k(n^4-2)$

(k는 상수)

꼴이면 $P(n)=0$이다.

$27=6\cdot4+3$이므로 27을 6으로 나누었을 때의 나머지는 3이다.

$48=11\cdot4+4$이므로 48을 11로 나누었을 때의 나머지는 4이다.

만점 도전을 위한 실전 마무리 문제

본책 23~26쪽

01 전략 곱셈 공식을 이용하여 r의 값을 구한다.

풀이 $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$

$=50+2\cdot47$

$=144$

$\therefore a+b+c=12$ ($\because a+b+c>0$)

이때 $a+b+c=12r$이므로

$12=12r$

$\therefore r=1$

따라서 △ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}r(a+b+c)=\frac{1}{2}\cdot1\cdot12=6$

답 ③

02 전략 곱셈 공식을 이용하여 $ab+bc+ca$의 값을 구하고, a, b, c 사이의 관계를 식으로 나타낸다.

풀이 $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$이므로

$6^2=12+2(ab+bc+ca)$

$\therefore ab+bc+ca=12$

이때 $a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca=12$이므로

$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$

$\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}=0$

$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$

$\therefore a-b=0$, $b-c=0$, $c-a=0$

$\therefore a=b=c$

따라서 $a+b+c=6$에서 $a=b=c=2$이므로

$a^3+b^3+c^3=3\cdot2^3=24$

답 ⑤

1등급 비밀노트

① $a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca$

$=\frac{1}{2}\{(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2\}$

② $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$

$=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$

03 전략 $n=1$, $n=2$인 경우는 n^4+2n^2+24를 n^2+2n+3으로 직접 나누어 구한 나머지보다 n^2+2n+3의 값이 작음에 주의한다.

풀이 $n=1$일 때,

$n^4+2n^2+24=27$, $n^2+2n+3=6$

이므로

$R(1)=\boxed{3}$

$n=2$일 때,

$n^4+2n^2+24=48$, $n^2+2n+3=11$

이므로

$R(2)=\boxed{4}$

한편 n^4+2n^2+24를 n^2+2n+3으로 나누면

$$
\begin{array}{r}
n^2-2n+3 \\
n^2+2n+3\overline{)\,n^4 \qquad +2n^2 \qquad +24} \\
\underline{n^4+2n^3+3n^2} \\
-2n^3-\ n^2 \\
\underline{-2n^3-4n^2-6n} \\
3n^2+6n+24 \\
\underline{3n^2+6n+\ 9} \\
15
\end{array}
$$

$\therefore n^4+2n^2+24$

$=(n^2+2n+3)(\boxed{n^2-2n+3})+15$

$n\geq 3$일 때, $n^2+2n+3\geq 18$이므로

$R(n)=15$

따라서 $a=3$, $b=4$, $P(n)=n^2-2n+3$이므로

$a+P(b)=3+P(4)=3+11=14$ 답 ④

04 전략 주어진 등식의 양변에 적당한 수를 대입한다.

풀이 $a+bP_1(x)+cP_2(x)+dP_3(x)$

$=a+b(x-1)+c(x-1)(x-2)$

$+d(x-1)(x-2)(x-3)$

이므로

$a+b(x-1)+c(x-1)(x-2)$

$+d(x-1)(x-2)(x-3)$

$=3x^3-5x^2+7$

위의 등식이 x에 대한 항등식이므로 $d=3$

등식의 양변에 $x=1$을 대입하면 $a=5$

등식의 양변에 $x=2$를 대입하면

$a+b=11$ $\therefore b=6$

등식의 양변에 $x=3$을 대입하면

$a+2b+2c=43$ $\therefore c=13$

$\therefore a+b+c+d=27$ 답 ③

좌변과 우변의 최고차항의 계수는 각각 d, 3이므로 $d=3$

05 전략 $\{A(x)\}^n$을 몫과 나머지를 이용하여 x에 대한 항등식으로 나타낸다.

풀이 다항식 $\{A(x)\}^n$을 $B(x)$로 나누었을 때의 몫을 $Q_n(x)$, 나머지를 $R_n(x)=a_nx+b_n$ (a_n, b_n은 상수)이라 하면

$\{A(x)\}^n=(x^2-x-2)Q_n(x)+a_nx+b_n$

$=(x+1)(x-2)Q_n(x)+a_nx+b_n$

이때 $A(-1)=-3$, $A(2)=0$이므로

$-a_n+b_n=(-3)^n$, $2a_n+b_n=0$

주어진 $A(x)$에 $x=-1$, $x=2$를 대입하여 구한다.

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a_n=-\frac{1}{3}\cdot(-3)^n$, $b_n=\frac{2}{3}\cdot(-3)^n$

따라서 $R_n(1)=a_n+b_n=\frac{1}{3}\cdot(-3)^n$이므로

$R_1(1)+R_2(1)+R_3(1)+R_4(1)$

$=\frac{1}{3}\{(-3)^1+(-3)^2+(-3)^3+(-3)^4\}$

$=20$ 답 ⑤

06 전략 주어진 두 등식을 이용하여 보기의 식을 $x+1$을 포함한 식으로 나타낸다.

풀이 $A(x)+B(x)=(x+1)Q_1(x)+1$ …… ㉠

$A(x)-B(x)=(x+1)Q_2(x)+3$ …… ㉡

ㄱ. ㉠+㉡을 하면

$2A(x)=(x+1)\{Q_1(x)+Q_2(x)\}+4$ …… ㉢

$\therefore A(x)-2=\frac{1}{2}(x+1)\{Q_1(x)+Q_2(x)\}$

따라서 $A(x)-2$는 $x+1$로 나누어떨어진다.

ㄴ. ㉡+㉢을 하면

$3A(x)-B(x)$

$=(x+1)\{Q_1(x)+2Q_2(x)\}+7$

따라서 $3A(x)-B(x)$는 $x+1$로 나누어떨어지지 않는다.

$3A(x)-B(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지는 7이다.

ㄷ. ㉠×3−㉡을 하면

$2A(x)+4B(x)=(x+1)\{3Q_1(x)-Q_2(x)\}$

$\therefore A(x)+2B(x)$

$=\frac{1}{2}(x+1)\{3Q_1(x)-Q_2(x)\}$

따라서 $A(x)+2B(x)$는 $x+1$로 나누어떨어진다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

다른 풀이 $A(x)+B(x)=(x+1)Q_1(x)+1$에서

$A(-1)+B(-1)=1$ …… ㉣

$A(x)-B(x)=(x+1)Q_2(x)+3$에서

$A(-1)-B(-1)=3$ …… ㉤

㉣, ㉤을 연립하여 풀면

$A(-1)=2$, $B(-1)=-1$

ㄱ. $A(-1)-2=2-2=0$

따라서 $A(x)-2$는 $x+1$로 나누어떨어진다.

ㄴ. $3A(-1)-B(-1)=6+1=7$

따라서 $3A(x)-B(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지는 7이다.

ㄷ. $A(-1)+2B(-1)=2-2=0$

따라서 $A(x)+2B(x)$는 $x+1$로 나누어떨어진다.

07 전략 $ax+b=0$을 만족시키는 x의 값을 $P(x)$에 대입한 값이 R임을 이용한다.

풀이 $P(x)$를 $ax+b$로 나누었을 때의 나머지가 R이므로

$R=P\left(-\frac{b}{a}\right)$

$H(x)=\left(ax+\frac{1}{R}\right)P(x)$라 하면 $H(x)$를 $ax+b$로 나누었을 때의 나머지는 $H\left(-\frac{b}{a}\right)$이므로

$H\left(-\frac{b}{a}\right)=\left(-b+\frac{1}{R}\right)P\left(-\frac{b}{a}\right)$

$=\left(-b+\frac{1}{R}\right)\cdot R=1-bR$ 답 ②

08 전략 나머지정리를 이용하여 R_1, R_2를 각각 a에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 $R_1=P(-a)=-a^3+2a^2+3a-4$,
$R_2=P(a)=a^3+2a^2-3a-4$이므로
$R_1+R_2=4a^2-8$
$4a^2-8=12$에서
$a^2=5$
따라서 $P(x)$를 $x-a^2$으로 나누었을 때의 나머지는
$P(a^2)=P(5)=5^3+2\cdot5^2-3\cdot5-4$
$=156$ 답 ④

09 전략 조건 (가)를 이용하여 차수가 가장 낮은 다항식 $P(x)$의 차수를 유추한다.

풀이 조건 (가)에 의하여 $P(x)-(x+10)$은 x^2-4와 x^2+x-2, 즉 $(x+2)(x-2)$와 $(x+2)(x-1)$로 각각 나누어떨어지므로 차수가 가장 낮은 다항식 $P(x)-(x+10)$을

$P(x)-(x+10)$은 $x+2$, $x-1$, $x-2$를 인수로 가지므로 3차 이상의 다항식이다.

$P(x)-(x+10)=a(x+2)(x-1)(x-2)$ $(a\neq0)$
라 하면
$P(x)=a(x+2)(x-1)(x-2)+x+10$
조건 (나)에 의하여 $P(-1)=15$이므로
$6a+9=15$ $\therefore a=1$
$\therefore P(x)=(x+2)(x-1)(x-2)+x+10$
$=x^3-x^2-3x+14$
따라서 구하는 $P(x)$의 상수항은 14이다. 답 ④

10 전략 $P(x)$를 n차식이라 하고 주어진 등식의 좌변과 우변의 차수를 비교하여 n의 값을 구한다.

풀이 $P(x^2)$
$=x^3P(x+3)+6x^2(x+3)(x-1)(x-3)$ …… ㉠
최고차항의 계수가 1인 다항식 $P(x)$가 n차식이라 하면 ㉠의 좌변은 $2n$차식이고, ㉠의 우변은 $(n+3)$차식 또는 5차식이므로 ㉠이 x에 대한 항등식이려면
$2n=n+3$ 또는 $2n=5$
$\therefore n=3$ 또는 $n=\frac{5}{2}$
그런데 n은 자연수이므로
$n=3$
㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면
$P(0)=0$
㉠의 양변에 $x=-3$을 대입하면
$P(9)=-27P(0)$
$\therefore P(9)=0$ ($\because P(0)=0$)
㉠의 양변에 $x=3$을 대입하면
$P(9)=27P(6)$
$\therefore P(6)=0$ ($\because P(9)=0$)
따라서 $P(x)$는 x, $x-9$, $x-6$을 인수로 갖고 최고차항의 계수가 1인 삼차식이므로
$P(x)=x(x-6)(x-9)$
즉 구하는 나머지는
$P(-1)=-1\cdot(-7)\cdot(-10)=-70$ 답 ②

11 전략 $P(9)=2613$임을 이용하여 10보다 작은 자연수 a, b, c, d의 값을 구한다.

풀이 $P(9)=a\cdot10^3+b\cdot10^2+c\cdot10+d=2613$이고, a, b, c, d는 10보다 작은 자연수이므로
$a=2$, $b=6$, $c=1$, $d=3$
$\therefore P(x)=2(x+1)^3+6(x+1)^2+(x+1)+3$
$=2x^3+12x^2+19x+12$
오른쪽 조립제법에서 $P(x)$를 $x+2$로 나누었을 때의 몫은 $2x^2+8x+3$이다.

-2	2	12	19	12
		-4	-16	-6
	2	8	3	6

답 ⑤

12 전략 a, b가 연속하는 두 자연수임을 이용하여 A를 a에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 a, b는 연속하는 두 자연수이므로 $b=a+1$이라 하면
$A=a^2+b^2+c^2=a^2+(a+1)^2+\{a(a+1)\}^2$

$c^2=(ab)^2$
$=\{a(a+1)\}^2$

$=a^4+2a^3+3a^2+2a+1$
$=a^4+a^2+1+2a^3+2a+2a^2$
$=(a^2+a+1)^2$
$a^2+a+1=\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$이므로
$\sqrt{A}=a^2+a+1=a(a+1)+1$
이때 연속하는 두 자연수의 곱 $a(a+1)$은 짝수이므로 $\sqrt{A}$는 항상 홀수이고 유리수이다. 답 ③

참고 $b=a-1$이라 하면 $\sqrt{A}=a^2-a+1=a(a-1)+1$이므로 그 결과는 같다.

13 전략 주어진 식의 좌변에서 $16=x$로 놓고 좌변을 인수분해한다.

풀이 $16=x$라 하면
$16^3+2\cdot16^2-2\cdot16+3=x^3+2x^2-2x+3$
오른쪽과 같이 조립제법을 이용하여 인수분해하면

-3	1	2	-2	3
		-3	3	-3
	1	-1	1	0

x^3+2x^2-2x+3

$x=-3$일 때 이 식의 값이 0이므로 이 식은 $x+3$을 인수로 갖는다.

$=(x+3)(x^2-x+1)$
$\therefore 16^3+2\cdot16^2-2\cdot16+3=(16+3)(16^2-16+1)$
$=19\cdot241$
따라서 $a=19$, $b=241$ 또는 $a=241$, $b=19$이므로
$a+b=260$ 답 ③

14 전략 나머지정리를 이용하여 b를 a에 대한 식으로 나타낸 후 $x^{10}(x^2+ax+b)$를 인수분해한다.

풀이 $x^{10}(x^2+ax+b)$를 $(x-2)^2$으로 나눈 몫을 $Q(x)$라 하면

$x^{10}(x^2+ax+b)=(x-2)^2Q(x)+2^{10}(x-2)$

위의 식의 양변에 $x=2$를 대입하면

$2^{10}(4+2a+b)=0$

$\therefore b=-2a-4$ …… ㉠

이때

$x^{10}(x^2+ax+b)=x^{10}(x^2+ax-2a-4)$

$=x^{10}(x-2)(x+a+2)$

이므로

$x^{10}(x-2)(x+a+2)=(x-2)^2Q(x)+2^{10}(x-2)$

$x\neq2$일 때도 등식이 성립하므로

$x^{10}(x+a+2)=(x-2)Q(x)+2^{10}$

위의 식의 양변에 $x=2$를 대입하면

$2^{10}(a+4)=2^{10}$

이므로 $a+4=1$ $\therefore a=-3$

따라서 ㉠에서

$b=-2\cdot(-3)-4=2$

$\therefore ab=-6$ 답 ①

x에 대한 항등식이므로 $x=2$, $x\neq2$일 때도 모두 등식이 성립해야 한다.

15 전략 인수정리를 이용하여 c를 b에 대한 식으로 나타낸 후 $ax^3+bx^2-4ax+c$를 인수분해한다.

풀이 $P(x)=ax^4+bx^3+cx-16a$라 하면 $P(x)$가 $x+2$를 인수로 가지므로 $P(-2)=0$

$16a-8b-2c-16a=0$

$\therefore c=-4b$

$\therefore ax^3+bx^2-4ax+c$

$=ax^3+bx^2-4ax-4b$

$=ax(x^2-4)+b(x^2-4)$

$=(x^2-4)(ax+b)$

$=(x+2)(x-2)(ax+b)$

따라서 항상 $ax^3+bx^2-4ax+c$의 인수인 것은 ④이다. 답 ④

16 전략 $24x^3+22x^2-x-3$의 값이 0이 되도록 하는 x의 값을 찾아 조립제법을 이용하여 인수분해한다.

풀이 $P(x)=24x^3+22x^2-x-3$이라 하면

$P\left(-\frac{1}{2}\right)=-3+\frac{11}{2}+\frac{1}{2}-3=0$

조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면 다음과 같다.

$\pm\frac{(3\text{의 약수})}{(24\text{의 약수})}$ 중에서 찾는다.

$-\frac{1}{2}$	24	22	-1	-3
		-12	-5	3
	24	10	-6	0

$\therefore P(x)=\left(x+\frac{1}{2}\right)(24x^2+10x-6)$

$=(2x+1)(12x^2+5x-3)$

$=(2x+1)(4x+3)(3x-1)$

$\therefore a+b+c+d+e+f$

$=2+1+4+3+3+1$

$=14$ 답 ②

$e=3$, $f=1$이고 $a=2$, $b=1$, $c=4$, $d=3$ 또는 $a=4$, $b=3$, $c=2$, $d=1$이다.

17 전략 $P(x)$의 식에 x 대신 $2x+1$을 대입하여 $P(2x+1)$의 식을 구한다.

풀이 $A(x)=x^3+3x^2-13x-15$라 하면 $A(-1)=0$이므로 오른쪽과 같이 조립제법을 이용하여 $A(x)$를 인수분해하면

-1	1	3	-13	-15
		-1	-2	15
	1	2	-15	0

$A(x)=(x+1)(x^2+2x-15)$

$=(x+1)(x+5)(x-3)$

다항식 $P(x)$를 $A(x)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$P(x)=(x+1)(x+5)(x-3)Q(x)+x^2+1$

이므로

$P(2x+1)$

$=(2x+1+1)(2x+1+5)(2x+1-3)Q(2x+1)$

$+(2x+1)^2+1$

$=8(x+1)(x+3)(x-1)Q(2x+1)+4x^2+4x+2$

$=(x^2-1)\cdot8(x+3)Q(2x+1)+4(x^2-1)+4x+6$

따라서 다항식 $P(2x+1)$을 x^2-1로 나누었을 때의 나머지는 $4x+6$이므로

$R(x)=4x+6$

$\therefore R(3)=4\cdot3+6=18$ 답 ④

다른 풀이 다항식 $P(2x+1)$을 x^2-1로 나누었을 때의 몫을 $Q_1(x)$, 나머지를 $R(x)=ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$P(2x+1)=(x^2-1)Q_1(x)+ax+b$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$P(-1)=-a+b$

이때 $P(-1)=2$이므로

$-a+b=2$ …… ㉡

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$P(3)=a+b$

이때 $P(3)=10$이므로

$a+b=10$ …… ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=4$, $b=6$

따라서 $R(x)=4x+6$이므로

$R(3)=4\cdot3+6=18$

$P(x)$
$=(x+1)(x+5)(x-3)$
$\times Q(x)+x^2+1$
의 양변에 $x=-1$을 대입하면
$P(-1)=2$
양변에 $x=3$을 대입하면
$P(3)=10$

18 전략 $(P\ominus Q)\otimes P$를 전개한 후 $P=x+y$, $Q=x-y$를 대입한다.

풀이 $(P\ominus Q)\otimes P$

$=(P+2Q)\otimes P$

$=\{(P+2Q)+P\}(P+2Q)$

$=(2P+2Q)(P+2Q)$

$=2P^2+6PQ+4Q^2$ ··· ❶

$=2(x+y)^2+6(x+y)(x-y)+4(x-y)^2$

$=12x^2-4xy$ ··· ❷

따라서 xy의 계수는 -4이다. ··· ❸

답 -4

채점 기준	비율
❶ $(P\ominus Q)\otimes P$를 P, Q에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40 %
❷ $(P\ominus Q)\otimes P$를 x, y에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40 %
❸ xy의 계수를 구할 수 있다.	20 %

다른 풀이 $(P\ominus Q)\otimes P$

$=(P+2Q)\otimes P$

$=(2P+2Q)(P+2Q)$

$=\{2(x+y)+2(x-y)\}\{x+y+2(x-y)\}$

$=4x(3x-y)$

$=12x^2-4xy$

19 전략 세 정사각형 A, B, C의 넓이와 색칠한 부분의 넓이의 총합은 한 변의 길이가 10인 정사각형의 넓이와 같음을 이용한다.

풀이 세 정사각형 A, B, C의 한 변의 길이를 각각 a, b, c라 하면

$a+b+c=10$

세 정사각형 A, B, C의 넓이의 합이 색칠한 부분의 넓이와 같으므로 세 정사각형 A, B, C의 넓이의 합은 한 변의 길이가 10인 정사각형의 넓이의 $\frac{1}{2}$이다.

$\therefore a^2+b^2+c^2=\frac{1}{2}\cdot 10^2=50$

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$에서

$10^2=50+2(ab+bc+ca)$

$\therefore ab+bc+ca=25$

$p=\sqrt{2}a$, $q=\sqrt{2}b$, $r=\sqrt{2}c$이므로

$pq+qr+rp=2ab+2bc+2ca$

$=2(ab+bc+ca)$

$=2\cdot 25$

$=50$

답 50

한 변의 길이가 a인 정사각형의 대각선의 길이는 $\sqrt{2}a$이다.

20 전략 $2x^2+x+4$를 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 나머지가 $px+q$임을 이용한다.

풀이 $P(x)$를 $(x-1)^3$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$P(x)=(x-1)^3Q(x)+2x^2+x+4$

$=(x-1)(x-1)^2Q(x)+2x^2+x+4$ …… ㉠ ⋯ ❶

이때 $P(x)$를 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 나머지가 $px+q$이므로 ㉠에서

$P(x)=(x-1)(x-1)^2Q(x)+2(x-1)^2+px+q$

즉 $2(x-1)^2+px+q=2x^2+x+4$이므로

$2x^2+(p-4)x+q+2=2x^2+x+4$

$p-4=1$, $q+2=4$

$\therefore p=5$, $q=2$ ⋯ ❷

$\therefore p^2+q^2=5^2+2^2=29$ ⋯ ❸

답 29

채점 기준	비율
❶ $P(x)$를 $(x-1)^3$으로 나누었을 때의 몫과 나머지를 이용하여 $P(x)$를 나타낼 수 있다.	30 %
❷ p, q의 값을 구할 수 있다.	60 %
❸ p^2+q^2의 값을 구할 수 있다.	10 %

21 전략 주어진 등식을 변형하여 $P(1)=2P(2)=3P(3)$임을 이용한다.

풀이 $\frac{P(1)}{30}=\frac{P(2)}{15}=\frac{P(3)}{10}=\frac{1}{6}$의 각 변에 30을 곱하면

$P(1)=2P(2)=3P(3)=5$

이므로

$P(1)-5=2P(2)-5=3P(3)-5=0$

따라서 $A(x)=xP(x)-5$라 하면 $A(x)$는 삼차식이고

$A(1)=A(2)=A(3)=0$

이므로

$A(x)=k(x-1)(x-2)(x-3)$ $(k\neq 0)$

이라 할 수 있다.

$\therefore xP(x)=k(x-1)(x-2)(x-3)+5$

위의 식의 양변에 $x=0$을 대입하면

$0=-6k+5$ $\quad\therefore k=\frac{5}{6}$

따라서 $xP(x)=\frac{5}{6}(x-1)(x-2)(x-3)+5$이고

$P(x)$를 $x-6$으로 나누었을 때의 나머지는 $P(6)$이므로 양변에 $x=6$을 대입하면

$6P(6)=\frac{5}{6}\cdot 5\cdot 4\cdot 3+5=55$

$\therefore P(6)=\frac{55}{6}$

답 $\frac{55}{6}$

1등급 비밀노트

n차 다항식 $P(x)$가 n개의 서로 다른 실수 $a_1, a_2, \cdots, a_n$에 대하여 $P(a_1)=P(a_2)=\cdots=P(a_n)=0$이면 $P(x)$는 $x-a_1$, $x-a_2$, $\cdots$, $x-a_n$으로 나누어떨어지므로

$P(x)=k(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)$ $(k\neq 0)$

22 전략 $3A(x)-B(x)$와 $B(x)$를 몫과 나머지를 이용하여 나타낸 후, 두 등식을 이용하여 $A(x)$를 구한다.

풀이 $3A(x)-B(x)$를 x^2+1로 나누었을 때의 몫을 $Q_1(x)$, 나머지를 $R(x)=ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$3A(x)-B(x)=(x^2+1)Q_1(x)+ax+b$ …… ㉠

$R(x)$는 다항식 $3A(x)-B(x)$를 이차식으로 나누었을 때의 나머지이므로 일차 이하의 다항식이다.

$B(x)$를 x^2+1로 나누었을 때의 몫을 $Q_2(x)$라 하면

$B(x)=(x^2+1)Q_2(x)+ax+b$ …… ㉡

㉠+㉡을 하면

$3A(x)=(x^2+1)\{Q_1(x)+Q_2(x)\}+2ax+2b$

$\therefore A(x)=\frac{1}{3}(x^2+1)\{Q_1(x)+Q_2(x)\}$

$+\frac{2}{3}ax+\frac{2}{3}b$

즉 $A(x)$를 x^2+1로 나누었을 때의 나머지는

$\frac{2}{3}ax+\frac{2}{3}b$이므로

$\frac{2}{3}a=2,\ \frac{2}{3}b=-6 \qquad \therefore a=3,\ b=-9$

따라서 $R(x)=3x-9$이므로

$R(5)=3\cdot5-9=6$ 답 6

23 전략 두 다항식을 $(x-a)(x-b)$로 나누었을 때의 나머지가 서로 같으므로 각 식에 $x=a$, $x=b$를 대입한 값이 각각 같음을 이용한다.

풀이 $A(x)=x^3+x^2-5x+1$,

$B(x)=x^3-x^2-3x+13$이라 하면 두 다항식 $A(x)$, $B(x)$를 각각 $(x-a)(x-b)$로 나누었을 때의 나머지가 서로 같으므로

$A(a)=B(a),\ A(b)=B(b)$

$A(a)=B(a)$에서

$a^3+a^2-5a+1=a^3-a^2-3a+13$

$2a^2-2a-12=0, \qquad a^2-a-6=0$

$(a+2)(a-3)=0 \qquad \therefore a=-2$ 또는 $a=3$

마찬가지로 $A(b)=B(b)$에서

$b=-2$ 또는 $b=3$

그런데 $a\neq b$이므로

$a=-2,\ b=3$ 또는 $a=3,\ b=-2$

다항식 $A(x)=x^3+x^2-5x+1$을 $(x+2)(x-3)$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $px+q$ (p, q는 상수)라 하면

$A(x)=(x+2)(x-3)Q(x)+px+q$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=-2$를 대입하면

$7=-2p+q$ …… ㉡

㉠의 양변에 $x=3$을 대입하면

$22=3p+q$ …… ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$p=3,\ q=13$

따라서 $R(x)=3x+13$이므로

$R(a+b)=R(1)=16$ 답 16

참고 두 다항식 $A(x)$, $B(x)$를 $(x-a)(x-b)$로 나누었을 때의 몫을 각각 $Q_1(x)$, $Q_2(x)$라 하면

$A(x)=(x-a)(x-b)Q_1(x)+R(x)$

$B(x)=(x-a)(x-b)Q_2(x)+R(x)$

$\therefore A(a)=R(a)=B(a),\ A(b)=R(b)=B(b)$

24 전략 $P(x)$를 $(x-1)(x-3)$, $(x-1)(x-2)(x-3)$으로 나누었을 때의 나머지를 이용하여 $R(x)$의 식을 세운다.

풀이 삼차식 $P(x)$를 $(x-1)(x-2)(x-3)$으로 나누었을 때의 몫을 q $(q\neq0)$라 하면

$P(x)=(x-1)(x-2)(x-3)\cdot q+R(x)$ …… ㉠

일품 BOX

$P(1)=0,\ P(2)=0$

$A(-2)$
$=-8+4+10+1=7$

$A(3)$
$=27+9-15+1=22$

$a=-2,\ b=3$ 또는 $a=3,\ b=-2$일 때
$a+b=1$

x^2+ax+b가 완전제곱식으로 인수분해되려면
$\left(\frac{a}{2}\right)^2=b$

$P(x)$가 삼차식이고 나누는 식이 삼차식이므로 몫은 0이 아닌 실수이다.

$P(x)$를 $(x-1)(x-3)$으로 나누었을 때의 나머지가 $3x-3$이므로 ㉠에서 $R(x)$를 $(x-1)(x-3)$으로 나누었을 때의 나머지는 $3x-3$이다.

즉 $R(x)=a(x-1)(x-3)+3x-3$ (a는 상수)이라 하면 ㉠에서

$P(x)=(x-1)(x-2)(x-3)\cdot q$
$\quad +a(x-1)(x-3)+3x-3$

이때 $P(x)$는 $(x-1)(x-2)$로 나누어떨어지므로

$P(2)=0$에서

$-a+6-3=0 \qquad \therefore a=3$

따라서

$R(x)=3(x-1)(x-3)+3x-3$

이므로

$R(4)=3\cdot3\cdot1+3\cdot4-3=18$ 답 18

25 전략 $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$이므로 $P(1)$, $P(2)$의 값을 이용하여 $R(x)$를 구한다.

풀이 삼차식 $P(x)$를 x^2-3x+2로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)=ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$P(x)=(x^2-3x+2)Q(x)+ax+b$

$\quad =(x-1)(x-2)Q(x)+ax+b$ ⋯ ❶

이때 $P(0)=3,\ P(x+1)=P(x)+3(x^2+x)$이므로

$P(1)=P(0)+3(0+0)=3+0=3,$

$P(2)=P(1)+3(1+1)=3+6=9$ ⋯ ❷

$x=1,\ x=2$를 $P(x)$에 각각 대입하면

$a+b=3,\ 2a+b=9$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=6,\ b=-3$ ⋯ ❸

따라서 $R(x)=6x-3$이므로

$R(3)=6\cdot3-3=15$ ⋯ ❹

답 15

채점 기준	비율
❶ $P(x)$를 x^2-3x+2로 나누었을 때의 몫과 나머지를 이용해서 $P(x)$를 나타낼 수 있다.	30 %
❷ $P(1)$, $P(2)$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ a, b의 값을 구할 수 있다.	30 %
❹ $R(3)$의 값을 구할 수 있다.	10 %

26 전략 주어진 식을 전개하여 x 또는 y에 대하여 내림차순으로 정리한다.

풀이 $(x+3)^2+(2y-3)^2-4xy+k$

$=x^2+6x+9+4y^2-12y+9-4xy+k$

$=x^2+2(3-2y)x+4y^2-12y+18+k$

위의 식이 x, y에 대한 완전제곱식이 되려면

$(3-2y)^2=4y^2-12y+18+k,$

즉 $4y^2-12y+9=4y^2-12y+18+k$

이어야 하므로 $\quad 9=18+k$

$\therefore k=-9$ 답 -9

ⓒ좋은책신사고

다른 풀이 $(x+3)^2+(2y-3)^2-4xy+k$

$=4y^2-4(x+3)y+x^2+6x+18+k$

위의 식이 x, y에 대한 완전제곱식이 되려면

$(x+3)^2=x^2+6x+18+k$

이어야 하므로

$9=18+k \qquad \therefore k=-9$

참고 주어진 식을 인수분해하면 $(x-2y+3)^2$이다.

27 전략 $12=x$로 놓고 주어진 등식의 좌변을 x에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 $12=x$라 하면

$12\cdot13\cdot14\cdot15-8$

$=x(x+1)(x+2)(x+3)-8$

$=(x^2+3x)(x^2+3x+2)-8$

$x^2+3x=X$로 놓으면

$12\cdot13\cdot14\cdot15-8$

$=X(X+2)-8$

$=X^2+2X-8$

$=(X+4)(X-2)$

$=(x^2+3x+4)(x^2+3x-2)$

$=(12^2+3\cdot12+4)(12^2+3\cdot12-2)$

$=(144+36+4)(144+36-2)$

$=184\cdot178$

$=(2^3\cdot23)\cdot(2\cdot89)$

$=2^4\cdot23\cdot89$

이때 $2^4\cdot23\cdot89$의 양의 약수의 개수는

$(4+1)(1+1)(1+1)=20$

이므로 두 자연수 a, b의 순서쌍 (a, b)의 개수는 20이다.

답 20

자연수 N이
$N=p^aq^b\cdots r^c$
(p, q, $\cdots$, r는 서로 다른 소수)
으로 소인수분해되면 N의 양의 약수의 개수는
$(a+1)(b+1)\cdots(c+1)$

1등급 비밀노트

$2^4\cdot23\cdot89$의 양의 약수 중 1개를 a로 택하면 b가

$b=(2^4\cdot23\cdot89)\div a$

로 결정되므로 두 자연수 a, b의 순서쌍 (a, b)의 개수는 a를 택하는 경우의 수, 즉 $2^4\cdot23\cdot89$의 양의 약수의 개수와 같다.

28 전략 주어진 조건을 이용하여 a, b 사이의 관계식을 세우고 이것을 만족시키는 자연수 a, b의 값을 찾는다.

풀이 $\overline{FC}=b-a$, $\overline{DH}=a-(b-a)=2a-b$이므로

두 정사각형 ABFE, IJHD의 넓이의 차는

$a^2-(2a-b)^2=(a+2a-b)(a-2a+b)$

$=(3a-b)(b-a)$

$\therefore (3a-b)(b-a)=35$

이때 $3a-b$, $b-a$는 정수이고

$0<b-a<3a-b$

이므로

$3a-b=35$, $b-a=1$ 또는

$3a-b=7$, $b-a=5$ ··· ❶

$a<\frac{3}{2}a<b$이므로
$0<b-a$
$b<2a$이므로
$2b<4a$
$2b-(a+b)$
$<4a-(a+b)$
$\therefore b-a<3a-b$

(i) $3a-b=35$, $b-a=1$일 때,

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=18$, $b=19$

그런데 $\frac{3}{2}a<b$를 만족시키지 않는다.

$\frac{3}{2}\cdot18>19$

(ii) $3a-b=7$, $b-a=5$일 때,

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=6$, $b=11$

(i), (ii)에서

$a=6$, $b=11$ ··· ❷

따라서 $\overline{GJ}=(b-a)-(2a-b)=2b-3a$이므로 두 사각형 GFCH, EGJI의 넓이의 합은

$(b-a)^2+(2b-3a)(2a-b)$

$=5^2+4\cdot1=29$ ··· ❸

답 29

채점 기준	비율
❶ $3a-b$, $b-a$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ 두 사각형의 넓이의 합을 구할 수 있다.	20 %

29 전략 먼저 $P(2)=0$임을 이용하여 $P(x)$를 인수분해한다.

풀이 $P(2)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 1 & -a-2 & 3a+5 & -2a-10 \\ & & 2 & -2a & 2a+10 \\ \hline & 1 & -a & a+5 & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore P(x)=(x-2)(x^2-ax+a+5)$ ··· ❶

이때

$(x-2)(x^2-ax+a+5)$

$=(x-p)(x-q)(x-r)$

이고 p, q, r는 연속하는 세 자연수이므로 2를 포함한 연속하는 세 자연수는

1, 2, 3 또는 2, 3, 4

$Q(x)=x^2-ax+a+5$라 하면

$Q(x)=(x-1)(x-3)$ 또는

$Q(x)=(x-3)(x-4)$

따라서 $Q(3)=0$이므로

$9-3a+a+5=0, \qquad -2a+14=0$

$\therefore a=7$ ··· ❷

$Q(x)=x^2-7x+12=(x-3)(x-4)$이므로

$P(x)=(x-2)(x-3)(x-4)$

$\therefore a+p+q+r=7+2+3+4=16$ ··· ❸

답 16

$Q(x)=(x-1)(x-3)$
$=x^2-4x+3$
일 때는
$x^2-ax+a+5$
$=x^2-4x+3$
을 만족시키는 a의 값이 존재하지 않는다.

채점 기준	비율
❶ $P(x)$를 인수분해할 수 있다.	30 %
❷ a의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $a+p+q+r$의 값을 구할 수 있다.	30 %

최상위로 가는 최고 수준 문제

본책 27쪽

01

해결 단계

❶ P_k를 10의 거듭제곱을 이용하여 나타낸다.
❷ P_n을 P_4로 나누었을 때의 몫과 나머지를 이용하여 나타낸 후 정리하여 n의 값을 구한다.
❸ P_n을 P_5를 포함한 식으로 인수분해하여 r의 값을 구한다.
❹ $n+r$의 값을 구한다.

풀이 ❶ $P_1=9=10-1$,
$P_2=99=10^2-1$,
$P_3=999=10^3-1$,
⋮
$P_k=10^k-1$

❷ P_n을 P_4로 나누었을 때의 몫은 $10^{11}+10^7+10^3$이고 나머지는 P_3이므로

$$\begin{aligned}P_n&=P_4(10^{11}+10^7+10^3)+P_3\\&=(10^4-1)(10^{11}+10^7+10^3)+10^3-1\\&=10^3(10^4-1)(10^8+10^4+1)+10^3-1\\&=10^3(10^{12}-1)+10^3-1\\&=10^{15}-10^3+10^3-1\\&=10^{15}-1=P_{15}\end{aligned}$$

$\therefore n=15$

❸ $P_n=10^{15}-1$
$=(10^5-1)(10^{10}+10^5+1)$
$=P_5(10^{10}+10^5+1)$
에서 P_n은 P_5로 나누어떨어지므로 $r=0$

❹ $\therefore n+r=15$

답 ①

일품 BOX: $10^4=a$라 하면
$(10^4-1)(10^8+10^4+1)$
$=(a-1)(a^2+a+1)$
$=a^3-1$
$=(10^4)^3-1$
$=10^{12}-1$

02

해결 단계

❶ $P(x)$를 x^2-1, x^3+1로 나누었을 때의 몫과 나머지를 이용하여 $P(x)$를 각각 나타낸다.
❷ ❶의 두 식에 $x=-1$, $x=1$을 각각 대입하여 a, b에 대한 두 식을 구하고, 두 식을 연립하여 a, b의 값을 구한다.
❸ a, b의 값을 ❶의 식에 각각 대입한 두 식이 같음을 이용하여 항등식을 세운다.
❹ 조건 ㈐를 이용하여 $A(x)$를 구한다.
❺ $A(x)$를 x^2-x+1로 나누었을 때의 나머지를 구한다.

풀이 ❶ 조건 ㈎에서

$$\begin{aligned}P(x)&=(x^2-1)A(x)+ax+4\\&=(x+1)(x-1)A(x)+ax+4\end{aligned}\quad\cdots\cdots ㉠$$

조건 ㈏에서

$$\begin{aligned}P(x)&=(x^3+1)B(x)+x^2+2x+b\\&=(x+1)(x^2-x+1)B(x)+x^2+2x+b\end{aligned}\quad\cdots\cdots ㉡$$

❷ ㉠, ㉡의 양변에 $x=-1$을 각각 대입하면
$P(-1)=-a+4$, $P(-1)=b-1$
이므로 $-a+4=b-1$

$\therefore a+b=5$ ⋯⋯ ㉢

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면
$P(1)=a+4$
한편 조건 ㈐에서 나머지정리에 의하여 $B(1)=-1$이므로 ㉡의 양변에 $x=1$을 대입하면 $P(1)=1+b$

일품 BOX: $P(1)=2\cdot1\cdot B(1)$
$+1+2+b$
$=1+b$

즉 $a+4=1+b$이므로
$\therefore a-b=-3$ ⋯⋯ ㉣

㉢, ㉣을 연립하여 풀면
$a=1$, $b=4$

❸ 따라서 ㉠, ㉡에 의하여

$$\begin{aligned}&(x+1)(x-1)A(x)+x+4\\&=(x+1)(x^2-x+1)B(x)+x^2+2x+4\\&(x+1)(x-1)A(x)\\&=(x+1)(x^2-x+1)B(x)+x^2+x\\&(x+1)(x-1)A(x)\\&=(x+1)(x^2-x+1)B(x)+x(x+1)\end{aligned}$$

$x\neq-1$일 때도 등식이 성립해야 하므로
$(x-1)A(x)=(x^2-x+1)B(x)+x$

❹ 이때 $B(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면
$B(x)=(x-1)Q(x)-1$
이므로

$$\begin{aligned}&(x-1)A(x)\\&=(x^2-x+1)\{(x-1)Q(x)-1\}+x\\&=(x^2-x+1)(x-1)Q(x)-x^2+x-1+x\\&=(x^2-x+1)(x-1)Q(x)-(x^2-2x+1)\\&=(x^2-x+1)(x-1)Q(x)-(x-1)^2\end{aligned}$$

$x\neq1$일 때도 등식이 성립해야 하므로
$A(x)=(x^2-x+1)Q(x)-x+1$

❺ $A(x)$를 x^2-x+1로 나누었을 때의 나머지는
$-x+1$

답 $-x+1$

03

해결 단계

❶ 주어진 등식의 좌변을 인수분해한다.
❷ a, b, c가 자연수임을 이용하여 $a-b$, $a+b$가 모두 짝수이거나 모두 홀수임을 안다.
❸ 조건을 만족시키는 순서쌍 (a, b, c)의 개수를 구한다.

풀이 ❶ $a^3-b^3+(a^2-b^2)c+a^2b-ab^2$

$$\begin{aligned}&=a^3-b^3+a^2c-b^2c+a^2b-ab^2\\&=a^3+a^2c+a^2b-b^3-b^2c-ab^2\\&=a^2(a+c+b)-b^2(b+c+a)\\&=(a^2-b^2)(a+b+c)\\&=(a+b)(a-b)(a+b+c)\end{aligned}$$

이므로
$(a+b)(a-b)(a+b+c)=120$

❷ 이때 $a+b>0$, $a+b+c>0$이므로 $a-b>0$
또 $a-b$, $a+b$, $a+b+c$는 모두 자연수이다.

일품 BOX: 두 자연수 a, b에 대하여 $a-b>0$이므로 $a-b$는 양의 정수, 즉 자연수이다.

ⓒ좋은책신사고

이때 $a-b=p$, $a+b=q$ (p, q는 자연수)라 하면

$$a=\frac{p+q}{2},\ b=\frac{q-p}{2}$$

이고 a, b는 자연수이므로 p, q는 모두 짝수이거나 모두 홀수이어야 한다. 즉 $a-b$, $a+b$는 모두 짝수이거나 모두 홀수이어야 한다.

❸ $120=2^3\cdot3\cdot5$이고 $a-b<a+b<a+b+c$이므로 이것을 만족시키는 $a-b$, $a+b$, $a+b+c$의 값은 다음과 같다.

$a-b$	$a+b$	$a+b+c$
1	3	40
	5	24
2	4	15
	6	10
3	5	8

따라서 구하는 순서쌍 (a, b, c)의 개수는 5이다.

답 5

참고 각 경우의 순서쌍 (a, b, c)를 차례대로 구하면
$(2, 1, 37)$, $(3, 2, 19)$, $(3, 1, 11)$, $(4, 2, 4)$, $(4, 1, 3)$

04

해결 단계

❶ $P(x)$를 x^2+x+1로 나누었을 때의 나머지를 이용하여 식을 변형한다.
❷ $P(1)=14$임을 이용하여 구한 a의 값을 ❶의 식에 대입하여 $P(x)$를 구한다.
❸ $P(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지를 구한다.

풀이 ❶ $P(x)=x^{20}+x^{18}+x^{16}+ax^2+bx+c$
$=x^{16}(x^4+x^2+1)+ax^2+bx+c$
$=x^{16}(x^2+x+1)(x^2-x+1)$
$+ax^2+bx+c$

이고, $x^{16}(x^2+x+1)(x^2-x+1)$은 x^2+x+1로 나누어떨어지므로 $P(x)$를 x^2+x+1로 나누었을 때의 나머지는 ax^2+bx+c를 x^2+x+1로 나누었을 때의 나머지와 같다.

이때 그 나머지가 $2x+3$이므로

$ax^2+bx+c=a(x^2+x+1)+2x+3$

$\therefore P(x)=x^{16}(x^2+x+1)(x^2-x+1)$
$+a(x^2+x+1)+2x+3$

❷ $P(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지가 14이므로 $P(1)=14$에서

$3+3a+5=14 \qquad \therefore a=2$

$\therefore P(x)=x^{16}(x^2+x+1)(x^2-x+1)$
$+2(x^2+x+1)+2x+3$
$=x^{16}(x^2+x+1)(x^2-x+1)$
$+2x^2+4x+5$

❸ 따라서 $P(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지는

$P(-1)=1\cdot1\cdot3+2-4+5=6$ 답 ②

일품 BOX

a, b가 자연수이므로 $p+q$, $q-p$는 2의 배수, 즉 짝수이어야 한다. 따라서 p, q는 모두 짝수이거나 모두 홀수이어야 한다.

두 복소수 $a+bi$, $c+di$ (a, b, c, d는 실수)가 서로 같을 조건
➡ $a=c$, $b=d$

복소수의 덧셈은 실수부분은 실수부분끼리, 허수부분은 허수부분끼리 계산한다.

Ⅱ 방정식

03 복소수

개념&핵심 기출

본책 30~32쪽

01 $z=(i+1)a^2-(i+8)a-6i+15$
$=(a^2-8a+15)+(a^2-a-6)i$

z가 순허수이려면

$a^2-8a+15=0$, $a^2-a-6\neq0$

$a^2-8a+15=0$에서 $\quad (a-3)(a-5)=0$

$\therefore a=3$ 또는 $a=5$ …… ㉠

$a^2-a-6\neq0$에서 $\quad (a+2)(a-3)\neq0$

$\therefore a\neq-2$, $a\neq3$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $\quad a=5$ 답 ⑤

02 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$6x-2=2y$, $4x+3=3y-4$

$\therefore 3x-y=1$, $4x-3y=-7$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $\quad x=2$, $y=5$

$\therefore xy=10$ 답 10

03 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$a^2+b^2=3$, $ab=1$

이때 $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab=3+2\cdot1=5$이므로

$a+b=\sqrt{5}$ ($\because a>0$, $b>0$) 답 ④

04 $z_1=(1+5i)x^2-4x-5-4i$
$=(x^2-4x-5)+(5x^2-4)i$

$z_2=(1-4i)x^2+x+3=(x^2+x+3)-4x^2i$

$\therefore z_1+z_2=(2x^2-3x-2)+(x^2-4)i$

이때 z_1+z_2가 실수이므로 $x^2-4=0$에서

$(x+2)(x-2)=0 \qquad \therefore x=2$ ($\because x>0$) 답 2

05 $p=\alpha+\beta=(3-2i)+(-1+3i)=2+i$

$q=\beta-\alpha=(-1+3i)-(3-2i)=-4+5i$

$\therefore 2p-q=2(2+i)-(-4+5i)$
$=4+2i+4-5i=8-3i$

따라서 $2p-q$의 허수부분은 -3이다. 답 ②

다른 풀이 $p=\alpha+\beta$, $q=\beta-\alpha$이므로

$2p-q=2(\alpha+\beta)-(\beta-\alpha)=3\alpha+\beta$
$=3(3-2i)+(-1+3i)=8-3i$

06 $\beta=a+bi$ (a, b는 실수)라 하자.

$\alpha+\beta=(2-3i)+(a+bi)=(2+a)+(-3+b)i$

이때 조건 (가)에서

$-3+b=0 \qquad \therefore b=3$

$\alpha-\beta=(2-3i)-(a+bi)=(2-a)+(-3-b)i$

이때 조건 (나)에서

$2-a=5 \qquad \therefore a=-3$

$\therefore \beta=-3+3i$ 답 $-3+3i$

07 $(2x+i)(3+2i)=-8+yi$에서

$(6x-2)+(4x+3)i=-8+yi$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$6x-2=-8,\ 4x+3=y$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $\quad x=-1,\ y=-1$

$\therefore x+y=-2$ 답 ①

08 $z=\dfrac{2-ai}{3-i}=\dfrac{(2-ai)(3+i)}{(3-i)(3+i)}$

$=\dfrac{(6+a)+(2-3a)i}{10}$

$=\dfrac{6+a}{10}+\dfrac{2-3a}{10}i$

복소수 z의 실수부분과 허수부분이 같으므로

$\dfrac{6+a}{10}=\dfrac{2-3a}{10}, \qquad 6+a=2-3a$

$\therefore a=-1$ 답 -1

09 $x^2=\left(\dfrac{i}{1+i}\right)^2=\dfrac{i^2}{(1+i)^2}=-\dfrac{1}{2i}$,

$y^2=\left(\dfrac{i}{1-i}\right)^2=\dfrac{i^2}{(1-i)^2}=\dfrac{-1}{-2i}=\dfrac{1}{2i}$

이므로 $\quad x^2+y^2=-\dfrac{1}{2i}+\dfrac{1}{2i}=0$ 답 ③

다른 풀이 $x+y=\dfrac{i}{1+i}+\dfrac{i}{1-i}$

$=\dfrac{i(1-i)+i(1+i)}{(1+i)(1-i)}=\dfrac{2i}{2}=i$

$xy=\dfrac{i^2}{(1+i)(1-i)}=-\dfrac{1}{2}$

$\therefore x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=i^2-2\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)$

$=-1+1=0$

10 $z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면 $\overline{z}=a-bi$이므로

$(1-i)\overline{z}+2iz=(1-i)(a-bi)+2i(a+bi)$

$=a-bi-ai-b+2ai-2b$

$=(a-3b)+(a-b)i$

따라서 $(a-3b)+(a-b)i=4+2i$이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$a-3b=4,\ a-b=2$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $\quad a=1,\ b=-1$

$\therefore z=1-i$ 답 $1-i$

일품 BOX

복소수 z의 켤레복소수를 $\overline{z}$라 할 때, $\overline{(\overline{z})}=z$

복소수와 그 켤레복소수의 곱은 항상 실수이다.

$z_1\overline{z_2}=1$에서 $\dfrac{1}{z_1}=\overline{z_2}$

11 $\overline{z_1}-\overline{z_2}=\overline{z_1-z_2}=2+5i$이므로

$z_1-z_2=2-5i$

$\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}=\overline{z_1z_2}=3-4i$이므로

$z_1z_2=3+4i$

$\therefore (z_1-2)(z_2+2)=z_1z_2+2(z_1-z_2)-4$

$=(3+4i)+2(2-5i)-4$

$=3-6i$ 답 $3-6i$

12 ㄱ. $z_1=\overline{z_2}$이면 $\quad z_1z_2=\overline{z_2}z_2$

따라서 z_1z_2는 실수이다.

ㄴ. $z_1+z_2=0$에서 $\quad \overline{z_1+z_2}=\overline{0}$

$\therefore \overline{z_1}+\overline{z_2}=0$

ㄷ. $z_1\overline{z_2}=1$이면 $z_1=\dfrac{1}{\overline{z_2}}$이므로

$\overline{z_1}=\overline{\left(\dfrac{1}{\overline{z_2}}\right)}=\dfrac{1}{z_2}$

또 $z_1\overline{z_2}=1$이면 $\overline{z_2}=\dfrac{1}{z_1}$이므로

$\overline{z_1}+\dfrac{1}{z_1}=\dfrac{1}{z_2}+\overline{z_2}$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

다른 풀이 $z_1=a+bi,\ z_2=c+di$ (a, b, c, d는 실수)라 하자.

ㄱ. $z_1=\overline{z_2}$에서 $a+bi=c-di$이므로

$a=c,\ b=-d$

$\therefore z_1z_2=(c-di)(c+di)=c^2+d^2$

따라서 z_1z_2는 실수이다.

ㄴ. $z_1+z_2=0$에서 $\quad (a+bi)+(c+di)=0$

즉 $(a+c)+(b+d)i=0$에서

$a+c=0,\ b+d=0$

$\therefore \overline{z_1}+\overline{z_2}=(a-bi)+(c-di)$

$=(a+c)-(b+d)i=0$

ㄷ. $z_1\overline{z_2}=1$에서 $\quad (a+bi)(c-di)=1$

즉 $(ac+bd)+(bc-ad)i=1$에서

$ac+bd=1,\ bc-ad=0$

이때

$\overline{z_1}z_2=(a-bi)(c+di)$

$=(ac+bd)+(ad-bc)i=1$

이므로 $\quad \overline{z_1}=\dfrac{1}{z_2}$

$\therefore \overline{z_1}+\dfrac{1}{z_1}=\dfrac{1}{z_2}+\overline{z_2}$

13 $z=a^2(1-i)-a(6-i)+8+2i$

$=(a^2-6a+8)-(a^2-a-2)i$

z^2이 음의 실수이려면 z가 순허수이어야 하므로

$a^2-6a+8=0,\ a^2-a-2\neq0$

$a^2-6a+8=0$에서 $\quad (a-2)(a-4)=0$

$\therefore a=2$ 또는 $a=4$ …… ㉠

$a^2-a-2\neq0$에서 $\quad (a+1)(a-2)\neq0$

$\therefore a\neq-1,\ a\neq2 \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $\quad a=4$

따라서 $z=-(4^2-4-2)i=-10i$이므로

$$\left(\frac{z}{5}\right)^{10}=(-2i)^{10}=1024i^{10}=-1024$$

답 -1024

1등급 비밀노트

복소수 $z=a+bi$ (a, b는 실수)에 대하여
① z^2이 실수 ➡ z가 실수 또는 순허수 ➡ $a=0$ 또는 $b=0$
② z^2이 음의 실수 ➡ z가 순허수 ➡ $a=0,\ b\neq0$
③ z^2이 양의 실수 ➡ z가 0이 아닌 실수 ➡ $a\neq0,\ b=0$

14 $z^2=\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{2i}{2}=i$이므로

$z^{36}=(z^2)^{18}=i^{18}=(i^4)^4\cdot i^2=1\cdot(-1)=-1,$

$\overline{z}^{36}=\overline{z^{36}}=\overline{-1}=-1$

$\therefore z^{36}+\overline{z}^{36}=-2$

답 ③

참고 자연수 n과 복소수 z에 대하여

$\overline{z}^n=\overline{z^n}$

가 성립한다. (단, $\overline{z}$는 z의 켤레복소수이다.)

15 자연수 k에 대하여

(i) $n=2k$일 때,

$f(n)=f(2k)=i^{4k}-i^{2k}$

$=(i^4)^k-(i^2)^k=1-(-1)^k$

(ii) $n=2k-1$일 때,

$f(n)=f(2k-1)=i^{2k-1+1}$

$=(i^2)^k=(-1)^k$

(i), (ii)에서

$f(2k-1)+f(2k)=(-1)^k+\{1-(-1)^k\}=1$

$\therefore f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(100)$

$=\{f(1)+f(2)\}+\{f(3)+f(4)\}$

$+\cdots+\{f(99)+f(100)\}$

$=\underbrace{1+1+1+\cdots+1}_{50\text{개}}=50$

답 50

다른 풀이 $f(1)=i^2=-1$

$f(2)=i^4-i^2=1+1=2$

$f(3)=i^4=1$

$f(4)=i^8-i^4=1-1=0$

$f(5)=i^6=-1=f(1)$

$f(6)=i^{12}-i^6=1+1=2=f(2)$

$\vdots$

따라서 $f(n)$의 값은 $-1,\ 2,\ 1,\ 0$이 이 순서대로 반복되므로

$f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(100)$

$=(-1+2+1+0)\cdot25=50$

일품 BOX

① $a<0,\ b<0$일 때, $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$
② $a>0,\ b<0$일 때, $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\frac{a}{b}}$

$i^{10}=(i^4)^2\cdot i^2$
$=1\cdot(-1)=-1$

$\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{a}}=-\sqrt{\frac{1}{a}}$이므로
$a<0$

실수 x에 대하여
$\sqrt{x^2}=|x|$
$=\begin{cases} x & (x\geq0) \\ -x & (x<0) \end{cases}$

실수 A, B에 대하여
① $A-B>0$이면 $A>B$
② $A-B=0$이면 $A=B$
③ $A-B<0$이면 $A<B$

ㄴ에 의하여 $c^2+d^2\geq cd$

부등식의 양변에 같은 음수를 곱하면 부등호의 방향이 바뀐다.

16 ㄱ. $\sqrt{5}\sqrt{-2}=\sqrt{5\cdot(-2)}=\sqrt{-10}$

ㄴ. $\sqrt{-3}\sqrt{-3}=-\sqrt{(-3)\cdot(-3)}=-\sqrt{3^2}=-3$

ㄷ. $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{-6}}=-\sqrt{\frac{2}{-6}}=-\sqrt{-\frac{1}{3}}$

ㄹ. $\frac{\sqrt{-10}}{\sqrt{-2}}=\sqrt{\frac{-10}{-2}}=\sqrt{5}$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ①

17 $\frac{1}{\sqrt{a}}=-\sqrt{\frac{1}{a}}$이므로 $\quad a<0$

$\therefore \sqrt{a^2}+(\sqrt{a})^2+\sqrt{-a}\sqrt{a}$

$=\sqrt{a^2}+a+\sqrt{a^2}i=|a|+a+|a|i$

$=-a+a-ai=-ai$

답 ①

18 양의 실수 a에 대하여 $\sqrt{-a}=\sqrt{a}i$이므로

$\sqrt{-a_1}\sqrt{-a_2}\sqrt{-a_3}\cdots\sqrt{-a_{16}}$

$=\sqrt{a_1}i\times\sqrt{a_2}i\times\sqrt{a_3}i\times\cdots\times\sqrt{a_{16}}i$

$=\sqrt{a_1a_2a_3\cdots a_{16}}\cdot i^{16}$

$=\sqrt{16}\cdot(i^4)^4$

$=4\cdot1=4$

답 ④

1등급을 위한 고난도 문제

본책 33~35쪽

01 ㄱ. b가 순허수이면 $b=ci$ ($c\neq0$인 실수)로 놓을 수 있으므로

$a^2-b^2=a^2+c^2,\ a^2b^2=-a^2c^2$

$a^2-b^2-a^2b^2=a^2+c^2+a^2c^2>0$

$\therefore a^2-b^2>a^2b^2$

ㄴ. a, b가 실수이면

$a^2+b^2-ab=\left(a-\frac{b}{2}\right)^2+\frac{3}{4}b^2\geq0$

$\therefore a^2+b^2\geq ab$ (단, 등호는 $a=b=0$일 때 성립)

ㄷ. a, b가 순허수이면 $a=ci,\ b=di$ ($c\neq0,\ d\neq0$인 실수)로 놓을 수 있으므로

$a^2+b^2=-c^2-d^2,\ ab=-cd$

이때 $c^2+d^2\geq cd$이고 $c\neq0,\ d\neq0$이므로

$-c^2-d^2<-cd$

$\therefore a^2+b^2<ab$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

02 $\langle 2x,\ 2y\rangle+\langle y,\ x\rangle$

$=(2y+2xi)+(x+yi)$

$=(x+2y)+(2x+y)i=4+5i$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$x+2y=4,\ 2x+y=5$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $\quad x=2,\ y=1$

$\therefore xy=2$

답 ③

03 $\alpha=a+bi$, $\beta=c+di$ (a, b, c, d는 실수)라 하자.

$-\alpha+\beta=-(a+bi)+(c+di)$
$=(-a+c)+(-b+d)i$

이 복소수가 실수이려면

$-b+d=0 \quad \therefore b=d$ …… ㉠ ··· ❶

$(\alpha+\beta)+i=\{(a+bi)+(c+di)\}+i$
$=(a+c)+(b+d+1)i$

이 복소수가 실수이려면

$b+d+1=0$ …… ㉡ ··· ❷

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$b=-\frac{1}{2}$, $d=-\frac{1}{2}$ ··· ❸

따라서

$\alpha-2\beta=(a+bi)-2(c+di)$
$=(a-2c)+(b-2d)i$

에서 $\alpha-2\beta$의 허수부분은

$b-2d=-\frac{1}{2}-2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$ ··· ❹

답 $\frac{1}{2}$

채점 기준	비율
❶ $-\alpha+\beta$가 실수일 조건을 구할 수 있다.	30 %
❷ $(\alpha+\beta)+i$가 실수일 조건을 구할 수 있다.	30 %
❸ b, d의 값을 구할 수 있다.	10 %
❹ $\alpha-2\beta$의 허수부분을 구할 수 있다.	30 %

04 $z\hat{z}+1=(a+bi)(b+ai)+1=1+(a^2+b^2)i$,

$z+\hat{z}=(a+bi)+(b+ai)=a+b+(a+b)i$

이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$1=a+b$, $a^2+b^2=a+b$

$\therefore a^2+b^2=1$

답 1

다른 풀이 $z\hat{z}+1=z+\hat{z}$이므로

$z\hat{z}+1-z-\hat{z}=0$, $\quad z(\hat{z}-1)-(\hat{z}-1)=0$

$(\hat{z}-1)(z-1)=0$, $\quad \hat{z}-1=0$ 또는 $z-1=0$

$\therefore \hat{z}=1$ 또는 $z=1$

(i) $\hat{z}=1$일 때, $\quad a=0$, $b=1$

(ii) $z=1$일 때, $\quad a=1$, $b=0$

(i), (ii)에서 $\quad a^2+b^2=1$

참고 복소수 z, w, v에 대하여 다음이 성립한다.

① 교환법칙 $\quad z+w=w+z$, $zw=wz$

② 결합법칙 $\quad (z+w)+v=z+(w+v)$, $(zw)v=z(wv)$

③ 분배법칙 $\quad z(w+v)=zw+zv$, $(z+w)v=zv+wv$

05 $i(x+3i)^2=i(x^2+6xi-9)=-6x+(x^2-9)i$

이 복소수가 자연수이려면 $-6x$는 자연수이고,

$x^2-9=0$이어야 한다.

$x^2-9=0$에서 $\quad (x+3)(x-3)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=3$

(i) $x=-3$일 때,

$-6x=18$이므로 $-6x$는 자연수이다.

(ii) $x=3$일 때,

$-6x=-18$이므로 $-6x$는 자연수가 아니다.

(i), (ii)에서 $\quad x=-3$

답 -3

06 $f(a,\ b)=\frac{a+bi}{a-bi}=\frac{(a+bi)^2}{(a-bi)(a+bi)}$
$=\frac{(a+bi)^2}{a^2+b^2}$

따라서 자연수 k에 대하여

$f(k,\ 2k)=\frac{(k+2ki)^2}{k^2+(2k)^2}=\frac{k^2(1+2i)^2}{5k^2}$
$=\frac{(1+2i)^2}{5}=\frac{-3+4i}{5}$

이므로

$f(1,\ 2)=f(2,\ 4)=f(3,\ 6)=\cdots=f(10,\ 20)$
$=\frac{-3+4i}{5}$

$\therefore$ (주어진 식)$=10\cdot\frac{-3+4i}{5}=-6+8i$

답 ②

07 $z+\bar{z}=0$에서 $\bar{z}=-z$이므로 z의 실수부분은 0이다.

$z=p+qi$ (p, q는 실수)라 하면 $\bar{z}=-z$에서
$p-qi=-(p+qi)$
$\therefore p=0$

즉 $z=(a+i)(1+i)=(a-1)+(a+1)i$에서

$a-1=0 \quad \therefore a=1$

답 1

다른 풀이 $\bar{z}=\overline{(a+i)(1+i)}=(a-i)(1-i)$이므로

$z+\bar{z}=(a+i)(1+i)+(a-i)(1-i)$
$=a+ai+i-1+a-ai-i-1$
$=2a-2$

따라서 $2a-2=0$이므로 $\quad a=1$

08 복소수 z의 허수부분이 양수이므로

$z=a+bi$ (a는 실수, $b>0$)라 하면

$\bar{z}=a-bi$ ··· ❶

$z+\bar{z}=6$, $z\bar{z}=10$에서

$2a=6$, $a^2+b^2=10$

$\therefore a=3$, $b=1$ ($\because b>0$) ··· ❷

따라서 $z=3+i$, $\bar{z}=3-i$이므로

$\frac{z}{\bar{z}}-\frac{\bar{z}}{z}=\frac{z^2-\bar{z}^2}{z\bar{z}}=\frac{(z+\bar{z})(z-\bar{z})}{z\bar{z}}$
$=\frac{6\{(3+i)-(3-i)\}}{10}=\frac{6}{5}i$ ··· ❸

답 $\frac{6}{5}i$

채점 기준	비율
❶ $z=a+bi$로 놓고 $\bar{z}$를 a, b로 나타낼 수 있다.	20 %
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $\frac{z}{\bar{z}}-\frac{\bar{z}}{z}$의 값을 구할 수 있다.	40 %

ⓒ좋은책신사고

09 $\alpha\overline{\alpha}=\beta\overline{\beta}=5$에서 $\frac{1}{\alpha}=\frac{\overline{\alpha}}{5}$, $\frac{1}{\beta}=\frac{\overline{\beta}}{5}$이므로

$$(\alpha+\beta)\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)=(\alpha+\beta)\left(\frac{\overline{\alpha}}{5}+\frac{\overline{\beta}}{5}\right)$$
$$=\frac{1}{5}(\alpha+\beta)(\overline{\alpha}+\overline{\beta})$$
$$=\frac{1}{5}(\alpha+\beta)(\overline{\alpha+\beta})$$
$$=\frac{1}{5}\cdot 10$$
$$=2$$

답 ④

두 복소수 z_1, z_2에 대하여
$\overline{z_1}+\overline{z_2}=\overline{z_1+z_2}$

10 $z\overline{z}=a^2+b^2$이므로

$a^2+b^2=5$

a, b가 자연수이므로

$a^2=1$, $b^2=4$ 또는 $a^2=4$, $b^2=1$

$\therefore a=1$, $b=2$ 또는 $a=2$, $b=1$ ··· ❶

$z\overline{z}+\omega\overline{\omega}+z\overline{\omega}+\overline{z}\omega$

$=z(\overline{z}+\overline{\omega})+\omega(\overline{z}+\overline{\omega})$

$=(z+\omega)(\overline{z}+\overline{\omega})$

$=(z+\omega)(\overline{z+\omega})$

$=\{(a+c)+(b+d)i\}\{(a+c)-(b+d)i\}$

$=(a+c)^2+(b+d)^2$

$z+\omega$
$=(a+bi)+(c+di)$
$=(a+c)+(b+d)i$

이므로 $(a+c)^2+(b+d)^2=25$

$a+c$, $b+d$가 자연수이므로

$(a+c)^2=9$, $(b+d)^2=16$

또는 $(a+c)^2=16$, $(b+d)^2=9$

$\therefore a+c=3$, $b+d=4$ 또는 $a+c=4$, $b+d=3$ ··· ❷

(i) $a=1$, $b=2$이면

$c=2$, $d=2$ 또는 $c=3$, $d=1$

(ii) $a=2$, $b=1$이면

$c=1$, $d=3$ 또는 $c=2$, $d=2$ ··· ❸

이때 $\omega\overline{\omega}=c^2+d^2$이므로 $\omega\overline{\omega}$의 값 중 가장 큰 값은 $c=3$, $d=1$ 또는 $c=1$, $d=3$일 때 10이다. ··· ❹

답 10

채점 기준	비율
❶ a, b의 값을 구할 수 있다.	20 %
❷ $a+c$, $b+d$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ c, d의 값을 구할 수 있다.	20 %
❹ $\omega\overline{\omega}$의 값 중 가장 큰 값을 구할 수 있다.	20 %

11 $\frac{z}{\overline{z}}+\frac{\overline{z}}{z}=-2$의 양변에 $z\overline{z}$를 곱하면

$z^2+\overline{z}^2=-2z\overline{z}$, $\quad z^2+2z\overline{z}+\overline{z}^2=0$

$(z+\overline{z})^2=0 \quad \therefore z=-\overline{z}$

$z\neq 0$에서 z는 순허수이므로 $z=bi\ (b\neq 0)$라 하자.

ㄱ. $z-\overline{z}=bi-(-bi)=2bi$이므로 허수이다.

ㄴ. $\frac{\overline{z}}{z}=\frac{-bi}{bi}=-1$이므로 실수이다.

ㄷ. $(z+\overline{z})(z-\overline{z})=z^2-\overline{z}^2=(bi)^2-(-bi)^2=0$이므로 실수이다.

이상에서 실수인 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ④

12 $z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면 조건 (가)에서

$(z-\overline{z})i=\{a+bi-(a-bi)\}i=-2b$

즉 $-2b=-2$이므로

$b=1$

조건 (나)에서

$$z+\frac{2}{z}=a+i+\frac{2}{a+i}$$
$$=a+i+\frac{2(a-i)}{(a+i)(a-i)}$$
$$=a+i+\frac{2a-2i}{a^2+1}$$
$$=a+\frac{2a}{a^2+1}+\frac{a^2-1}{a^2+1}i$$

이 복소수가 실수이려면

$a^2-1=0 \quad \therefore a^2=1$

$\therefore (z-i)(\overline{z-i})=(z-i)(\overline{z}-\overline{i})=(z-i)(\overline{z}+i)$

$=z\overline{z}+(z-\overline{z})i+1$

$=(a^2+b^2)-2+1$

$=1$

답 ①

$z\overline{z}=(a+bi)(a-bi)$
$=a^2+b^2$
$=1+1=2$

다른 풀이 $a^2=1$에서 $a=\pm 1$이므로

$z=1+i$ 또는 $z=-1+i$

(i) $z=1+i$일 때,

$z-i=1$이므로 $\quad \overline{z-i}=1$

$\therefore (z-i)(\overline{z-i})=1$

(ii) $z=-1+i$일 때,

$z-i=-1$이므로 $\quad \overline{z-i}=-1$

$\therefore (z-i)(\overline{z-i})=1$

(i), (ii)에서 구하는 값은 1이다.

13 $\frac{1}{i}=-i$, $\frac{1}{i^2}=-1$, $\frac{1}{i^3}=i$, $\frac{1}{i^4}=1$, $\cdots$이므로

$\frac{1}{i}=\frac{i}{i^2}=-i$

$$\frac{1+i}{i}+\frac{1+2i}{i^2}+\frac{1+3i}{i^3}+\frac{1+4i}{i^4}$$
$$=-(1+i)i-(1+2i)+(1+3i)i+(1+4i)$$
$$=(-i+1)+(-1-2i)+(i-3)+(1+4i)$$
$$=-2+2i$$

마찬가지 방법으로

$$\frac{1+5i}{i^5}+\frac{1+6i}{i^6}+\frac{1+7i}{i^7}+\frac{1+8i}{i^8}$$
$$=\frac{1+5i}{i}+\frac{1+6i}{i^2}+\frac{1+7i}{i^3}+\frac{1+8i}{i^4}$$
$$=-(1+5i)i-(1+6i)+(1+7i)i+(1+8i)$$
$$=(-i+5)+(-1-6i)+(i-7)+(1+8i)$$
$$=-2+2i$$

$\therefore$ (주어진 식)$=2\cdot(-2+2i)=-4+4i$

답 ②

14 $\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\frac{2i}{2}=i$이므로

$f(k)=i^k$ ⋯ ❶

$\therefore H(n)=f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(n)$

$=i+i^2+i^3+\cdots+i^n$

$H(51)=i+i^2+i^3+\cdots+i^{51}$

$=(i+i^2+i^3+i^4)+i^4(i+i^2+i^3+i^4)$

$+\cdots+i^{44}(i+i^2+i^3+i^4)+i^{48}(i+i^2+i^3)$

$=(i-1-i+1)+(i-1-i+1)$

$+\cdots+(i-1-i+1)+(i-1-i)$

$=-1$

$H(52)=H(51)+i^{52}=-1+(i^4)^{13}=-1+1=0$

$H(53)=H(52)+i^{53}=0+(i^4)^{13}\cdot i=0+i=i$ ⋯ ❷

$\therefore H(51)+H(52)+H(53)=-1+i$ ⋯ ❸

답 $-1+i$

채점 기준	비율
❶ $f(k)=i^k$임을 알 수 있다.	30 %
❷ $H(51)$, $H(52)$, $H(53)$의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ $H(51)+H(52)+H(53)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

1등급 비밀노트

i의 거듭제곱이 포함된 식의 값을 구할 때는 i의 거듭제곱의 값이 4개의 수가 반복되고, 그 4개의 수의 합이 0임을 이용한다.

15 $100i+99i^2+98i^3+97i^4$

$=100i-99-98i+97$

$=-2+2i$

마찬가지 방법으로

$96i^5+95i^6+94i^7+93i^8$

$=92i^9+91i^{10}+90i^{11}+89i^{12}$

$\vdots$

$=4i^{97}+3i^{98}+2i^{99}+i^{100}$

$=-2+2i$

$\therefore 100i+99i^2+98i^3+97i^4+\cdots+2i^{99}+i^{100}$

$=25\cdot(-2+2i)=-50+50i$

답 ②

16 m이 자연수일 때 $(-i)^m$의 값은 $-i$, -1, i, 1이 이 순서대로 반복되므로 조건 (가)에서 m은 $m=4k-3$ (k는 자연수) 꼴이다.

이때 m은 두 자리 자연수이므로

$m=13,\ 17,\ 21,\ \cdots,\ 97$ ⋯ ❶

또 $(2i)^n=2^n\cdot i^n=-2^n$에서 $i^n=-1$

n이 자연수일 때 i^n의 값은 i, -1, $-i$, 1이 이 순서대로 반복되므로 조건 (나)에서 n은 $n=4l-2$ (l은 자연수) 꼴이다.

이때 n은 두 자리 자연수이므로

$n=10,\ 14,\ 18,\ \cdots,\ 98$ ⋯ ❷

일품 BOX

m의 값은 가장 크고, n의 값은 가장 작을 때이다.

따라서 $m-n$의 값이 가장 클 때는 $m=97$, $n=10$일 때이므로 구하는 값은

$97-10=87$ ⋯ ❸

답 87

채점 기준	비율
❶ m의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ n의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $m-n$의 값 중 가장 큰 값을 구할 수 있다.	20 %

17 $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{2n}=\left\{\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2\right\}^n=\left(\frac{2i}{2}\right)^n=i^n$,

$\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{2n}=\left\{\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^2\right\}^n=\left(\frac{-2i}{2}\right)^n=(-i)^n$

이므로

$f(n)=n\{i^n-(-i)^n\}$

$n\{i^n-(-i)^n\}$
$=n\{i^n-(-1)^n\cdot i^n\}$

$=\begin{cases}0 & (n\text{은 짝수})\\ 2n\cdot i^n & (n\text{은 홀수})\end{cases}$ ⋯ ❶

$\therefore f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(40)$

$=f(1)+f(3)+f(5)+f(7)+\cdots+f(37)+f(39)$

$=2i+6i^3+10i^5+14i^7+\cdots+74i^{37}+78i^{39}$

$=(2i-6i)+(10i-14i)+\cdots+(74i-78i)$

$=10\cdot(-4i)=-40i$ ⋯ ❷

답 $-40i$

채점 기준	비율
❶ $f(n)$을 간단히 할 수 있다.	50 %
❷ $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(40)$의 값을 구할 수 있다.	50 %

18 $z=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$에 대하여

$z^2=\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^2=\frac{-2-2\sqrt{3}i}{4}=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$,

$z^3=z^2\cdot z=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\cdot\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}=1$

$\vdots$

이므로

$z^{99}=(z^3)^{33}=1$, $z^{100}=(z^3)^{33}\cdot z=z$,

$z^{198}=(z^3)^{66}=1$, $z^{200}=(z^3)^{66}\cdot z^2=z^2$

$\therefore P_{99}+P_{100}=\left|\frac{z^{99}+1}{z^{198}}\right|+\left|\frac{z^{100}+1}{z^{200}}\right|$

$=\left|\frac{1+1}{1}\right|+\left|\frac{z+1}{z^2}\right|$

$=2+\left|\frac{\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}+1}{\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}}\right|$

$=2+\left|\frac{\frac{1+\sqrt{3}i}{2}}{\frac{-(1+\sqrt{3}i)}{2}}\right|$

$=2+1=3$

답 3

ⓒ좋은책신사고

19 $z=\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\frac{2i}{2}=i$이므로

$$z^n+z^{2n}+z^{3n}=i^n+i^{2n}+i^{3n}$$
$$=i^n+(i^2)^n+(i^3)^n$$
$$=i^n+(-1)^n+(-i)^n$$

자연수 k에 대하여

(i) $n=4k-3$일 때,

$$i^n+(-1)^n+(-i)^n=i-1-i=-1$$

(ii) $n=4k-2$일 때,

$$i^n+(-1)^n+(-i)^n=-1+1-1=-1$$

(iii) $n=4k-1$일 때,

$$i^n+(-1)^n+(-i)^n=-i-1+i=-1$$

(iv) $n=4k$일 때,

$$i^n+(-1)^n+(-i)^n=1+1+1=3$$

이상에서 $z^n+z^{2n}+z^{3n}=-1$을 성립하도록 하는 n은 4의 배수를 제외한 수이므로 100 이하의 자연수 n의 개수는

$100-25=75$ 답 75

100 이하의 4의 배수의 개수는 25이다.

20 조건 (가)에서

$a-1<0,\ b-1>0$

$\therefore a<1,\ b>1$

조건 (나)에서 $a+b=0,\ b-c-2=0$

$\therefore a=-b,\ c=b-2$

이때 $b>1$에서 $-b<-1,\ b-2>-1$이므로

$a<-1,\ c>-1$

따라서 $a<-1<c<b$이므로

$a<c<b$ 답 $a<c<b$

$b-2<b$

실수 a, b에 대하여 $|a|\ge 0$, $|b|\ge 0$이므로 $|a|+|b|=0$이면 $|a|=0$, $|b|=0$ $\therefore a=0,\ b=0$

21 $\frac{a}{1+i}+\frac{b}{1-i}=\frac{a(1-i)+b(1+i)}{(1+i)(1-i)}$

$=\frac{(a+b)+(-a+b)i}{2}$ ··· ❶

이므로 주어진 등식은

$(a+b)+(-a+b)i=-12+4i$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$a+b=-12,\ -a+b=4$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=-8,\ b=-4$ ··· ❷

$\therefore \sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{-8}\sqrt{-4}=-\sqrt{(-8)\cdot(-4)}$

$=-4\sqrt{2}$ ··· ❸

답 $-4\sqrt{2}$

$a<0,\ b<0$이면 $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$

채점 기준	비율
❶ $\frac{a}{1+i}+\frac{b}{1-i}$를 간단히 할 수 있다.	30 %
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $\sqrt{a}\sqrt{b}$의 값을 구할 수 있다.	30 %

일품 BOX

22 ㄱ. $a<0$이므로 $\sqrt{a^2}=-a$

$b>0$이므로 $\sqrt{b^2}=b$

$\therefore \sqrt{a^2}\sqrt{b^2}=-ab$

ㄴ. 모든 실수 x에 대하여 $(\sqrt{x})^2=x$이므로

$(\sqrt{ab})^2=ab$

ㄷ. $a<0,\ b>0$이므로

$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ④

$a>0,\ b<0$일 때, $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\frac{a}{b}}$
그 외의 경우에는 $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}\ (b\ne 0)$

23 $-1<a<1$이므로

$a+1>0,\ a-1<0,\ 1-a>0,\ -a-1<0$

$\therefore$ (주어진 식)$=\sqrt{a+1}\sqrt{1-a}i\cdot\sqrt{1-a}\sqrt{a+1}i$

$=(\sqrt{a+1})^2(\sqrt{1-a})^2\cdot i^2$

$=(a+1)(1-a)\cdot(-1)$

$=a^2-1$ 답 ②

사고력 강화를 위한 수능형 문제

본책 36쪽

01 ㄱ. $\alpha=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면

$\alpha\bar{\alpha}=(a+bi)(a-bi)$

$=a^2+b^2\ge 0$

마찬가지 방법으로 $\beta\bar{\beta}\ge 0$이므로

$P=\alpha\bar{\alpha}+\beta\bar{\beta}\ge 0$

ㄴ. $\alpha=1,\ \beta=-1$이면 $\bar{\alpha}=1,\ \bar{\beta}=-1$이므로

$Q=\alpha\bar{\beta}+\bar{\alpha}\beta$

$=1\cdot(-1)+1\cdot(-1)$

$=-2<0$

ㄷ. $P-Q=\alpha\bar{\alpha}+\beta\bar{\beta}-(\alpha\bar{\beta}+\bar{\alpha}\beta)$

$=\alpha(\bar{\alpha}-\bar{\beta})-\beta(\bar{\alpha}-\bar{\beta})$

$=(\alpha-\beta)(\bar{\alpha}-\bar{\beta})$

$=(\alpha-\beta)(\overline{\alpha-\beta})\ge 0$

$\therefore P\ge Q$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ④

1등급 비밀노트

복소수 $z=a+bi$ (a, b는 실수)에 대하여 켤레복소수 $\bar{z}$는 $\bar{z}=a-bi$이므로

① $z+\bar{z}=2a$ (실수) ② $z\bar{z}=a^2+b^2$ (실수) ③ $z\bar{z}\ge 0$

02 $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(100)$

$=\left(i+\frac{1}{i}\right)+\left(i^2+\frac{2}{i^2}\right)+\left(i^3+\frac{3}{i^3}\right)+\cdots+\left(i^{100}+\frac{100}{i^{100}}\right)$

$=(i+i^2+i^3+i^4+\cdots+i^{100})$

$+\left(\frac{1}{i}+\frac{2}{i^2}+\frac{3}{i^3}+\frac{4}{i^4}+\cdots+\frac{100}{i^{100}}\right)$

이때

$$\begin{aligned}&i+i^2+i^3+i^4+\cdots+i^{100}\\&=(i+i^2+i^3+i^4)+i^4(i+i^2+i^3+i^4)\\&\quad+\cdots+i^{96}(i+i^2+i^3+i^4)\\&=(i-1-i+1)+(i-1-i+1)+\cdots+(i-1-i+1)\\&=0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\frac{1}{i}+\frac{2}{i^2}+\frac{3}{i^3}+\frac{4}{i^4}+\cdots+\frac{100}{i^{100}}\\&=\left(\frac{1}{i}+\frac{2}{i^2}+\frac{3}{i^3}+\frac{4}{i^4}\right)+\left(\frac{5}{i^5}+\frac{6}{i^6}+\frac{7}{i^7}+\frac{8}{i^8}\right)\\&\quad+\cdots+\left(\frac{97}{i^{97}}+\frac{98}{i^{98}}+\frac{99}{i^{99}}+\frac{100}{i^{100}}\right)\\&=\left(\frac{1}{i}-2-\frac{3}{i}+4\right)+\left(\frac{5}{i}-6-\frac{7}{i}+8\right)\\&\quad+\cdots+\left(\frac{97}{i}-98-\frac{99}{i}+100\right)\\&=\left(2-\frac{2}{i}\right)+\left(2-\frac{2}{i}\right)+\cdots+\left(2-\frac{2}{i}\right)\\&=25\left(2-\frac{2}{i}\right)=50-\frac{50}{i}\\&=50+50i\end{aligned}$$

이므로

$$f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(100)=50+50i$$

따라서 $x=50$, $y=50$이므로 $\quad x+y=100$ 답 ④

03 ㄱ. $f(n)+g(n)=z^n+\overline{z}^n$이므로

$$\begin{aligned}\overline{f(n)+g(n)}&=\overline{z^n+\overline{z}^n}=\overline{z^n}+\overline{(\overline{z}^n)}\\&=\overline{z}^n+z^n\\&=g(n)+f(n)\end{aligned}$$

ㄴ. $f(2)=(1+i)^2=2i$,

$f(6)=(1+i)^6=\{(1+i)^2\}^3=(2i)^3=-8i$,

$f(10)=(1+i)^{10}=\{(1+i)^2\}^5=(2i)^5=32i$,

⋮

$g(2)=(1-i)^2=-2i$,

$g(6)=(1-i)^6=\{(1-i)^2\}^3=(-2i)^3=8i$,

$g(10)=(1-i)^{10}=\{(1-i)^2\}^5=(-2i)^5=-32i$,

⋮

$$\begin{aligned}\therefore f(2)+g(2)&=f(6)+g(6)\\&=f(10)+g(10)=\cdots=0\end{aligned}$$

따라서 $n=4k-2$ (k는 자연수)일 때,

$$f(n)+g(n)=0$$

ㄷ. $f(4)=(1+i)^4=\{(1+i)^2\}^2=(2i)^2=-4$,

$f(8)=(1+i)^8=\{(1+i)^4\}^2=(-4)^2=16$,

$f(12)=(1+i)^{12}=\{(1+i)^4\}^3=(-4)^3=-64$,

⋮

$g(4)=(1-i)^4=\{(1-i)^2\}^2=(-2i)^2=-4$,

$g(8)=(1-i)^8=\{(1-i)^4\}^2=(-4)^2=16$,

$g(12)=(1-i)^{12}=\{(1-i)^4\}^3=(-4)^3=-64$,

⋮

일품 BOX

$z^5\cdot z^k=z^{10}$일 때, $k=5$
$z^5\cdot z^k=z^{18}$일 때, $k=13$
⋮
$z^5\cdot z^k=z^{98}$일 때, $k=93$

$m=4k$ (k는 자연수)라 하면
$(1+i)^m=(1+i)^{4k}=(-4)^k$
이므로 $(-4)^k=-4^n$
$\therefore (-4)^{\frac{m}{4}}=-4^n$

$$\therefore f(4)=g(4),\ f(8)=g(8),\ f(12)=g(12),\ \cdots$$

따라서 $n=4k$ (k는 자연수)일 때,

$$f(n)=g(n)$$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

1등급 비밀노트

1±i의 곱셈

① $(1+i)^2=2i$ ② $(1-i)^2=-2i$
③ $(1+i)(1-i)=2$ ④ $(1+i)^4=(1-i)^4=-4$

04 $z^2=\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{-2i}{2}=-i$,

$z^3=z^2\cdot z=-i\cdot\frac{1-i}{\sqrt{2}}=\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$,

$z^4=(z^2)^2=(-i)^2=-1$,

$z^5=z^4\cdot z=-1\cdot\frac{1-i}{\sqrt{2}}=\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$,

$z^6=z^4\cdot z^2=-1\cdot(-i)=i$,

$z^7=z^4\cdot z^3=-1\cdot\frac{-1-i}{\sqrt{2}}=\frac{1+i}{\sqrt{2}}$,

$z^8=(z^4)^2=(-1)^2=1$,

⋮

이므로

$$z^{77}=(z^8)^9\cdot z^5=z^5,\ z^{66}=(z^8)^8\cdot z^2=z^2$$

따라서 $z^{77}\cdot z^k=z^{66}$에서

$$z^5\cdot z^k=z^2$$

이때 $z^2=z^{10}=z^{18}=z^{26}=\cdots$이므로 100 이하의 자연수 k는 5, 13, 21, ⋯, 93의 12개이다. 답 12

05 $(1+i)^2=2i$, $(1+i)^4=\{(1+i)^2\}^2=(2i)^2=-4$

이므로 자연수 k에 대하여

$$(1+i)^{4k}=\{(1+i)^4\}^k=(-4)^k$$

이때 모든 자연수 n에 대하여 $-4^n<0$이므로

$(1+i)^m=-4^n$이 성립하려면 $\frac{m}{4}=n$, 즉 $m=4n$이고, n은 홀수이어야 한다.

따라서 $m+n$의 값 중 가장 큰 값은 $m=92$, $n=23$일 때 115이다. 답 115

06 자연수 m, n에 대하여 조건 (가)에서 $m<n$이므로 $n\geq2$이고, $n=2k+1$ (k는 자연수) 꼴이면

$$\begin{aligned}(1+i)^n&=(1+i)^{2k+1}\\&=\{(1+i)^2\}^k\cdot(1+i)\\&=(2i)^k\cdot(1+i)\end{aligned}$$

이므로 조건 (나)에서 $(2i)^m\cdot(1+i)^n$이 실수가 되도록 하는 자연수 m이 존재하지 않는다.

즉 $n=2k$ 꼴이다.

ⓒ좋은책신사고

따라서

$$(-2)^l\cdot(2i)^m\cdot(1+i)^n$$
$$=(-2)^l\cdot(2i)^m\cdot(1+i)^{2k}$$
$$=(-2)^l\cdot(2i)^m\cdot(2i)^k$$
$$=(-2)^l\cdot(2i)^{m+k}$$
$$=(-1)^l\cdot 2^{l+m+k}\cdot i^{m+k}$$

이므로 $(-2)^l\cdot(2i)^m\cdot(1+i)^n=32$가 성립하려면

$l+m+k=5$ …… ㉠

$(-1)^l\cdot i^{m+k}=1$ …… ㉡

자연수 l, m, k에 대하여

(i) $l=1$일 때, ㉠에서 $m+k=4$이므로

$(-1)^1\cdot i^4=-1$

따라서 ㉡을 만족시키지 않는다.

(ii) $l=2$일 때, ㉠에서 $m+k=3$이므로

$(-1)^2\cdot i^3=-i$

따라서 ㉡을 만족시키지 않는다.

(iii) $l=3$일 때, ㉠에서 $m+k=2$이므로

$(-1)^3\cdot i^2=1$

따라서 ㉡을 만족시킨다.

이때 $m+k=2$에서 $m=1$, $k=1$이므로

$l=3$, $m=1$, $n=2k=2$

한편 $l\geq 4$이면 ㉠을 만족시키는 자연수 m, k는 존재하지 않는다.

이상에서 $l=3$, $m=1$, $n=2$이므로

$lmn=6$ 답 6

07 $ab\neq 0$이고 $\sqrt{ab}=-\sqrt{a}\sqrt{b}$이므로

$a<0$, $b<0$

∴ (주어진 식)

$$=\sqrt{a}\sqrt{-a}-\sqrt{a}\sqrt{b}-\sqrt{b}\sqrt{-a}+\sqrt{b}\sqrt{b}+\sqrt{a}\sqrt{-a}$$
$$-\sqrt{a}\sqrt{-b}-\sqrt{-b}\sqrt{-a}+\sqrt{-b}\sqrt{-b}$$
$$=\sqrt{-a^2}+\sqrt{ab}-\sqrt{-ab}-\sqrt{b^2}+\sqrt{-a^2}$$
$$-\sqrt{-ab}-\sqrt{ab}+\sqrt{b^2}$$
$$=2\sqrt{-a^2}-2\sqrt{-ab}$$
$$=2\sqrt{a^2}i-2\sqrt{ab}i$$
$$=2|a|i-2\sqrt{ab}i$$
$$=-2ai-2\sqrt{ab}i$$
$$=-2(a+\sqrt{ab})i$$

답 ①

일품 BOX

x^2의 계수가 무리수인 이차방정식은 x^2의 계수를 유리화한 후 풀면 계산이 간단해진다.

두 복소수 $a+bi$, $c+di$가 서로 같을 조건
➡ $a=c$, $b=d$
(단, a, b, c, d는 실수)

04 이차방정식

개념&핵심 기출

본책 38~40쪽

01 이차방정식 $x^2+(\sqrt{2}-\sqrt{3})x-\sqrt{6}=0$에서

$(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{3})=0$

∴ $x=-\sqrt{2}$ 또는 $x=\sqrt{3}$

$\alpha<\beta$이므로 $\alpha=-\sqrt{2}$, $\beta=\sqrt{3}$

이차방정식 $(\sqrt{2}+1)x^2-x-(2+\sqrt{2})=0$의 양변에 $\sqrt{2}-1$을 곱하면

$x^2-(\sqrt{2}-1)x-\sqrt{2}=0$

$(x+1)(x-\sqrt{2})=0$

∴ $x=-1$ 또는 $x=\sqrt{2}$

$\gamma<\delta$이므로 $\gamma=-1$, $\delta=\sqrt{2}$

∴ $\alpha<\gamma<\delta<\beta$ 답 ③

02 주어진 방정식의 실근을 α라 하면

$\alpha^2+4\alpha i-\alpha^2+3\alpha-8i=0$

$(\alpha^2-\alpha^2+3\alpha)+(4\alpha-8)i=0$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$\alpha^2-\alpha^2+3\alpha=0$ …… ㉠

$4\alpha-8=0$ …… ㉡

㉡에서 $\alpha=2$이므로 이것을 ㉠에 대입하면

$\alpha^2-3\alpha-4=0$, $(\alpha+1)(\alpha-4)=0$

∴ $\alpha=-1$ 또는 $\alpha=4$ 답 -1, 4

03 방정식 $|x^2+(a^2-1)x+2a-5|=3$의 한 근이 1이므로 이 방정식에 $x=1$을 대입하여 정리하면

$|a^2+2a-5|=3$

∴ $a^2+2a-5=3$ 또는 $a^2+2a-5=-3$

(i) $a^2+2a-5=3$일 때,

$a^2+2a-8=0$, $(a+4)(a-2)=0$

∴ $a=-4$ 또는 $a=2$

그런데 $a>0$이므로

$a=2$

(ii) $a^2+2a-5=-3$일 때,

$a^2+2a-2=0$ ∴ $a=-1\pm\sqrt{3}$

그런데 $a>0$이므로

$a=-1+\sqrt{3}$

(i), (ii)에서 모든 양수 a의 값의 합은

$2+(-1+\sqrt{3})=1+\sqrt{3}$ 답 ③

04 주어진 이차방정식이 중근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(\sqrt{k})^2-\{(a^2-3)k+(b^2-3b+2)\}=0$$
$$(4-a^2)k-(b^2-3b+2)=0$$
$$(2+a)(2-a)k-(b-1)(b-2)=0$$

앞의 식이 모든 양수 k에 대하여 성립하므로

$(2+a)(2-a)=0$에서

$a=-2$ 또는 $a=2$

$(b-1)(b-2)=0$에서

$b=1$ 또는 $b=2$

따라서 $a+b$의 값 중 가장 큰 값은 $a=2$, $b=2$일 때 $2+2=4$이다. 답 4

05 삼각형 ABC는 둔각삼각형이므로

$b^2+c^2<a^2$ ($\because a>b>c$) …… ㉠

이때 이차방정식 $(a+b)x^2+2cx+a-b=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=c^2-(a+b)(a-b)$$
$$=c^2-(a^2-b^2)$$
$$=c^2-a^2+b^2<0\ (\because ㉠)$$

따라서 주어진 이차방정식은 서로 다른 두 허근을 갖는다. 답 서로 다른 두 허근

참고 △ABC에서 $\overline{BC}=a$, $\overline{CA}=b$, $\overline{AB}=c$라 할 때

$\angle C<90°$이면 $a^2+b^2>c^2$

$\angle C=90°$이면 $a^2+b^2=c^2$

$\angle C>90°$이면 $a^2+b^2<c^2$

06 $ab\neq0$이고 $\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}=-\sqrt{\frac{b}{a}}$이므로

$a<0$, $b>0$

ㄱ. $a=-1$, $b=1$일 때, $x^2-x+1=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$D_1=(-1)^2-4\cdot1\cdot1=-3<0$

이므로 서로 다른 두 허근을 갖는다.

ㄴ. $x^2+bx+a=0$의 판별식을 D_2라 하면

$D_2=b^2-4a>0$

이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.

ㄷ. $ax^2+ax+b=0$의 판별식을 D_3이라 하면

$D_3=a^2-4ab>0$

이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.

이상에서 항상 서로 다른 두 실근을 갖는 이차방정식은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ⑤

07 이차방정식 $x^2-6x+4=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=6$, $\alpha\beta=4$

이때 $\alpha>0$, $\beta>0$이므로

$$(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2=\alpha+\beta+2\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}$$
$$=\alpha+\beta+2\sqrt{\alpha\beta}$$
$$=6+2\sqrt{4}=10$$

$\therefore \sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=\sqrt{10}$ ($\because \sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}>0$) 답 ⑤

일품 BOX

이차방정식의 두 근의 차가 k이면 두 근을 α, $\alpha+k$로 놓는다.

이차방정식의 두 근의 비가 $m:n$이면 두 근을 $m\alpha$, $n\alpha$ ($\alpha\neq0$)로 놓는다.

$a<0$, $b>0$이므로 $b^2>0$, $-4a>0$ $\therefore b^2-4a>0$

$a<0$, $b>0$이므로 $a^2>0$, $-4ab>0$ $\therefore a^2-4ab>0$

$\alpha\beta>0$이므로 $\alpha>0$, $\beta>0$ 또는 $\alpha<0$, $\beta<0$ 이때 $\alpha+\beta>0$이므로 $\alpha>0$, $\beta>0$

08 주어진 이차방정식의 두 근의 차가 2이므로 두 근을 α, $\alpha+2$라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+(\alpha+2)=m$ $\therefore m=2\alpha+2$ …… ㉠

$\alpha(\alpha+2)=3m-1$ …… ㉡

㉡에 ㉠을 대입하면

$\alpha(\alpha+2)=3(2\alpha+2)-1$

$\alpha^2-4\alpha-5=0$

$(\alpha+1)(\alpha-5)=0$

$\therefore \alpha=-1$ 또는 $\alpha=5$

(i) $\alpha=-1$일 때, $m=0$

(ii) $\alpha=5$일 때, $m=12$

(i), (ii)에서 양수 m의 값은 12이다. 답 12

다른 풀이 이차방정식 $x^2-mx+3m-1=0$의 두 근을 α, β라 하면

$|\alpha-\beta|=2$ …… ㉠

근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=m$, $\alpha\beta=3m-1$ …… ㉡

$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$이므로 ㉠, ㉡에서

$4=m^2-4(3m-1)$, $m^2-12m=0$

$m(m-12)=0$

$\therefore m=12$ ($\because m>0$)

09 주어진 이차방정식의 두 근의 비가 1 : 2이므로 두 근을 α, 2α ($\alpha\neq0$)라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+2\alpha=-3(k-1)$

$\therefore \alpha=-k+1$ …… ㉠

$\alpha\cdot2\alpha=k$ $\therefore 2\alpha^2=k$ …… ㉡

㉠에 ㉡을 대입하여 정리하면

$2\alpha^2+\alpha-1=0$

$(\alpha+1)(2\alpha-1)=0$

$\therefore \alpha=-1$ 또는 $\alpha=\frac{1}{2}$

(i) $\alpha=-1$일 때, $k=2$

(ii) $\alpha=\frac{1}{2}$일 때, $k=\frac{1}{2}$

(i), (ii)에서 모든 실수 k의 값의 합은

$2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$ 답 ⑤

10 근과 계수의 관계에 의하여

$(3+\sqrt{2})+(3-\sqrt{2})=-a$ $\therefore a=-6$

$(3+\sqrt{2})(3-\sqrt{2})=b$ $\therefore b=7$

따라서 $a+b=1$, $a-b=-13$이므로 1, -13을 두 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은

$(x-1)(x+13)=0$

$\therefore x^2+12x-13=0$ 답 $x^2+12x-13=0$

ⓒ좋은책신사고

11 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 한 근이 1이므로

$1+a+b=0$

$\therefore a+b=-1$ …… ㉠

이차방정식 $x^2+2ax-b+1=0$의 한 근이 -1이므로

$1-2a-b+1=0$

$\therefore 2a+b=2$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=3,\ b=-4$

$\therefore a^2=9,\ \frac{b}{2}=-2$

따라서 9, -2를 두 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은

$(x-9)(x+2)=0$

즉 $f(x)=(x-9)(x+2)$이므로

$f(-3)=(-12)\cdot(-1)=12$ 답 ③

12 근의 공식을 $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{a}$로 잘못 적용하여 풀었으므로

2로 나눈 식이 근의 공식을 바르게 적용한 식이다.

$\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{a}=4,\ \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{a}=-2$

이때 바르게 푼 근은

$\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=2,\ \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=-1$

이므로 2, -1을 두 근으로 하고 x^2의 계수가 a인 이차방정식은

$a(x-2)(x+1)=0$

$\therefore ax^2-ax-2a=0$

이 이차방정식이 $ax^2+bx+c=0$과 같으므로

$b=-a,\ c=-2a$

$\therefore \frac{b+c}{a}=\frac{-a-2a}{a}$

$=-3\ (\because a\neq0)$

답 -3

13 이차방정식 $x^2+2x+4=0$의 두 근은

$x=-1\pm\sqrt{1^2-1\cdot4}$

$=-1\pm\sqrt{3}i$

이차방정식 $ax^2+2b'x+c=0$의 근은 $x=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}$이다.

따라서 x^2+2x+4를 복소수의 범위에서 인수분해하면

$\{x-(-1-\sqrt{3}i)\}\{x-(-1+\sqrt{3}i)\}$

$=(x+1+\sqrt{3}i)(x+1-\sqrt{3}i)$ 답 ⑤

다른 풀이 $x^2+2x+4=(x^2+2x+1)-(-3)$

$=(x+1)^2-(\sqrt{3}i)^2$

$=(x+1+\sqrt{3}i)(x+1-\sqrt{3}i)$

14 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근이 $2+i,\ 2-i$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$(2+i)+(2-i)=-a \qquad \therefore a=-4$

$(2+i)(2-i)=b \qquad \therefore b=5$

따라서 이차방정식 $5x^2+4x+1=0$의 두 근은

$x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-5\cdot1}}{5}=\frac{-2\pm i}{5}$

이므로 $5x^2+4x+1$을 복소수의 범위에서 인수분해하면

$5\left(x-\frac{-2+i}{5}\right)\left(x-\frac{-2-i}{5}\right)$

$=5\left(x+\frac{2-i}{5}\right)\left(x+\frac{2+i}{5}\right)$

답 $5\left(x+\frac{2-i}{5}\right)\left(x+\frac{2+i}{5}\right)$

15 $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$이고, 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 두 근은

$x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot1\cdot1}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

따라서 x^3-1을 복소수의 범위에서 인수분해하면

$(x-1)\left(x-\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)\left(x-\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)$

$=(x-1)\left(x+\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)\left(x+\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)$

답 $(x-1)\left(x+\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)\left(x+\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)$

16 이차방정식 $x^2-(p+q)x+p-q=0$의 한 근이 $4-\sqrt{10}$이고, $p,\ q$가 유리수이므로 다른 한 근은 $4+\sqrt{10}$이다.

근과 계수의 관계에 의하여

$(4-\sqrt{10})+(4+\sqrt{10})=p+q$

$(4-\sqrt{10})(4+\sqrt{10})=p-q$

$\therefore p+q=8,\ p-q=6$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$p=7,\ q=1$

$\therefore pq=7$ 답 ②

17 $\frac{2+i}{1+i}=\frac{(2+i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{3-i}{2}$에서 이차방정식 $2x^2+2ax+b=0$의 한 근이 $\frac{3-i}{2}$이고, $a,\ b$가 실수이므로 다른 한 근은 $\frac{3+i}{2}$이다.

근과 계수의 관계에 의하여

$\frac{3-i}{2}+\frac{3+i}{2}=-a \qquad \therefore a=-3$

$\frac{3-i}{2}\cdot\frac{3+i}{2}=\frac{b}{2} \qquad \therefore b=5$

따라서 이차방정식 $x^2+cx+d=0$의 한 근이 $-3+\sqrt{5}$이고, $c,\ d$가 유리수이므로 다른 한 근은 $-3-\sqrt{5}$이다.

근과 계수의 관계에 의하여

$(-3+\sqrt{5})+(-3-\sqrt{5})=-c \qquad \therefore c=6$

$(-3+\sqrt{5})(-3-\sqrt{5})=d \qquad \therefore d=4$

$\therefore d-c=-2$ 답 -2

18 이차방정식 $x^2+mx+n=0$의 한 근이 $-1+\sqrt{2}i$이고, m, n이 실수이므로 다른 한 근은 $-1-\sqrt{2}i$이다.
근과 계수의 관계에 의하여

$(-1+\sqrt{2}i)+(-1-\sqrt{2}i)=-m \qquad \therefore m=2$

$(-1+\sqrt{2}i)(-1-\sqrt{2}i)=n \qquad \therefore n=3$

따라서 이차방정식 $x^2+2nx-m=0$은 $x^2+6x-2=0$이므로 이 이차방정식의 양의 근은

$x=-3+\sqrt{3^2-1\cdot(-2)}$

$=-3+\sqrt{11}$

즉 $a=-3$, $b=11$이므로

$a+b=8$

답 ②

1등급을 위한 고난도 문제

본책 41~43쪽

01 $(x-2)*(x+4)$

$=(x-2)(x+4)-(x-2)-(x+4)$

$=x^2+2x-8-x+2-x-4$

$=x^2-10$,

$x*3=3x-x-3=2x-3$

따라서 주어진 방정식은

$x^2-10+|2x-3|-2=0$

$\therefore x^2+|2x-3|-12=0$ ··· ❶

(i) $2x-3<0$, 즉 $x<\frac{3}{2}$일 때,

$x^2-(2x-3)-12=0, \qquad x^2-2x-9=0$

$\therefore x=1\pm\sqrt{10}$

그런데 $x<\frac{3}{2}$이므로

$x=1-\sqrt{10}$ ··· ❷

(ii) $2x-3\geq0$, 즉 $x\geq\frac{3}{2}$일 때,

$x^2+(2x-3)-12=0, \qquad x^2+2x-15=0$

$(x+5)(x-3)=0$

$\therefore x=-5$ 또는 $x=3$

그런데 $x\geq\frac{3}{2}$이므로

$x=3$ ··· ❸

(i), (ii)에서

$x=1-\sqrt{10}$ 또는 $x=3$ ··· ❹

답 $x=1-\sqrt{10}$ 또는 $x=3$

채점 기준	비율
❶ 주어진 방정식을 간단히 할 수 있다.	30 %
❷ $x<\frac{3}{2}$일 때, x의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ $x\geq\frac{3}{2}$일 때, x의 값을 구할 수 있다.	30 %
❹ 방정식의 해를 구할 수 있다.	10 %

일품 BOX

$|A|=\begin{cases} A & (A\geq0) \\ -A & (A<0) \end{cases}$

02 이차방정식 $3x^2-(2k+5)x+3=0$의 한 근이 α이므로

$3\alpha^2-(2k+5)\alpha+3=0$

$\alpha\neq0$이므로 양변을 α로 나누면

$3\alpha-(2k+5)+\frac{3}{\alpha}=0$

$3\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)-(2k+5)=0$

이때 $\alpha+\frac{1}{\alpha}=k^2$이므로

$3k^2-2k-5=0$

$(k+1)(3k-5)=0$

$\therefore k=-1$ 또는 $k=\frac{5}{3}$

그런데 $k>0$이므로

$k=\frac{5}{3}$

답 ③

$3\alpha^2-(2k+5)\alpha+3=0$에 $\alpha=0$을 대입하면 등식이 성립하지 않으므로 $\alpha\neq0$

1등급 비밀노트

x^2의 계수와 상수항이 같은 이차방정식에서 α가 한 근이면 $\frac{1}{\alpha}$도 근이다. 이 성질을 이용하면 $3x^2-(2k+5)x+3=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\frac{1}{\alpha}=\frac{2k+5}{3}$이므로 $\frac{2k+5}{3}=k^2$을 만족시키는 양수 k를 구해도 된다.

03 $kx^2+(1-2k)x-2=0$에서

$(kx+1)(x-2)=0$

$\therefore x=-\frac{1}{k}$ 또는 $x=2$

$x^2-2(k+1)x+4k=0$에서

$(x-2k)(x-2)=0$

$\therefore x=2k$ 또는 $x=2$

따라서 $\alpha=-\frac{1}{k}$, $\beta=2$, $\gamma=2k$이므로

$\beta-\alpha=\gamma-\beta$에서

$2+\frac{1}{k}=2k-2$

$2k^2-4k-1=0$

$\therefore k=\frac{2\pm\sqrt{6}}{2}$

답 $\frac{2+\sqrt{6}}{2}$, $\frac{2-\sqrt{6}}{2}$

04 $|x-3|^2+3|x-3|-10=0$에서

$|x-3|=t\ (t\geq0)$로 놓으면

$|x-3|\geq0$이므로 $t\geq0$

$t^2+3t-10=0$

$(t+5)(t-2)=0$

$\therefore t=2\ (\because t\geq0)$

즉 $|x-3|=2$이므로

$x-3=\pm2$

$\therefore x=1$ 또는 $x=5$

$\therefore |\alpha-\beta|=4$

답 ④

ⓒ좋은책신사고

05 (i) $-1<x<0$일 때, $0<x^2<1$이므로

$[x^2]=0,\ [x]=-1$

따라서 주어진 방정식은 $x^2=2x+1$이므로

$x^2-2x-1=0$

$\therefore x=1\pm\sqrt{2}$

그런데 $-1<x<0$이므로

$x=1-\sqrt{2}$ ⋯ ❶

(ii) $0\le x<1$일 때, $0\le x^2<1$이므로

$[x^2]=0,\ [x]=0$

따라서 주어진 방정식은 $0=2x+1$이므로

$x=-\frac{1}{2}$

그런데 $0\le x<1$이므로 해는 없다. ⋯ ❷

(i), (ii)에서 구하는 해는

$x=1-\sqrt{2}$ ⋯ ❸

답 $x=1-\sqrt{2}$

채점 기준	비율
❶ $-1<x<0$일 때, 해를 구할 수 있다.	40 %
❷ $0\le x<1$일 때, 해를 구할 수 있다.	40 %
❸ 방정식의 해를 구할 수 있다.	20 %

06 $\overline{AB}:\overline{BC}=1:r$이므로

$\overline{AB}=k,\ \overline{BC}=rk\ (k>0)$

라 하면 □ABEF는 한 변의 길이가 k인 정사각형이므로

$\overline{EC}=(r-1)k$

$\overline{EC}=\overline{BC}-\overline{BE}$
$=rk-k$
$=(r-1)k$

□ABCD와 □ECDF는 닮음이므로

$1:r=(r-1)k:k$

$r(r-1)k=k,\quad r^2-r-1=0\ (\because k>0)$

$\therefore r=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

그런데 $r>1$이므로 $\quad r=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

답 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

참고 주어진 문제와 같이 직사각형에서 정사각형을 잘라내고 남은 직사각형이 원래의 직사각형과 닮음일 때, 두 변 AB, BC의 길이의 비를 황금비라 한다. 즉 황금비는 $1:\frac{1+\sqrt{5}}{2}$이다. 이때 이러한 직사각형 ABCD를 황금사각형이라 한다.

07 이차방정식 $x^2-2(a-k)x-a+15=0$이 실근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\{-(a-k)\}^2-(-a+15)\ge 0$

$\therefore (a-k)^2+a-15\ge 0$ ⋯⋯ ㉠

이때 $a,\ k$는 실수이므로 $\quad (a-k)^2\ge 0$

따라서 ㉠이 모든 실수 k에 대하여 성립하려면 $a-15\ge 0$, 즉 $a\ge 15$이어야 하므로 가장 작은 실수 a의 값은 15이다.

답 15

08 이차방정식 $x^2-ax+b=0$이 서로 다른 두 실근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(-a)^2-4b>0$

$\therefore a^2>4b$

(i) $a=1$ 또는 $a=2$일 때, b의 값은 존재하지 않는다.

$1>4b$ 또는 $4>4b$

(ii) $a=3$일 때, $\quad b=1,\ 2$

$9>4b$

(iii) $a=4$일 때, $\quad b=1,\ 2,\ 3$

$16>4b$

(iv) $a=5$ 또는 $a=6$일 때, $\quad b=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$

$25>4b$ 또는 $36>4b$

이상에서 구하는 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는

$2+3+6+6=17$

답 ⑤

09 $x^2+3xy+2y^2-x-3y+k-1$을 x에 대하여 내림차순으로 정리하면

$x^2+(3y-1)x+2y^2-3y+k-1$

$x^2+(3y-1)x+2y^2-3y+k-1=0$을 x에 대한 이차방정식으로 생각하면 근의 공식에 의하여

$x=\frac{-(3y-1)\pm\sqrt{D}}{2}$

(단, $D=(3y-1)^2-4(2y^2-3y+k-1)$)

그런데 주어진 식이 두 일차식의 곱으로 인수분해되려면 D가 완전제곱식이 되어야 하므로

$D=(3y-1)^2-4(2y^2-3y+k-1)$

$=y^2+6y-4k+5$

에서 y에 대한 이차방정식 $D=0$의 판별식이 0이어야 한다.

따라서 $D=0$의 판별식을 D'이라 하면

$\frac{D'}{4}=3^2-(-4k+5)=0$

$9+4k-5=0$

$\therefore k=-1$

답 -1

1등급 비밀노트

$x,\ y$에 대한 이차식이 두 일차식의 곱으로 인수분해되기 위해서는 x 또는 y에 대한 이차식으로 정리했을 때, (이차식)$=0$의 근이 일차식이 되어야 하므로 (이차식)$=0$의 판별식 D가 완전제곱식이 되어야 한다. 따라서 $D=0$의 판별식 D'이 0이어야 한다.

10 주어진 이차방정식의 좌변을 전개하여 정리하면

$3x^2-2(a+b+c)x+ab+bc+ca=0$ ⋯ ❶

이 이차방정식이 오직 하나의 실근, 즉 중근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(a+b+c)^2-3(ab+bc+ca)=0$

$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$

$\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}=0$

$\therefore a=b=c$ ⋯ ❷

$a,\ b,\ c$는 실수이므로
$(a-b)^2=(b-c)^2$
$=(c-a)^2$
$=0$
$a-b=b-c=c-a$
$=0$
$\therefore a=b=c$

따라서 삼각형 ABC는 정삼각형이다. ⋯ ❸

답 정삼각형

채점 기준	비율
❶ 주어진 방정식의 좌변을 전개할 수 있다.	20 %
❷ a, b, c 사이의 관계식을 구할 수 있다.	60 %
❸ 삼각형 ABC가 어떤 삼각형인지 말할 수 있다.	20 %

11 근과 계수의 관계에 의하여 주어진 이차방정식의 두 근의 곱이 양수이므로 두 근의 부호는 서로 같다.
따라서 주어진 이차방정식의 두 근을 4α, α $(\alpha\neq0)$라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$4\alpha+\alpha=-(2k-1)$ …… ㉠

$4\alpha\cdot\alpha=36$ …… ㉡ ⋯ ❶

㉡에서 $\alpha^2=9$이므로

$\alpha=-3$ 또는 $\alpha=3$ ⋯ ❷

(i) $\alpha=-3$일 때, ㉠에서 $k=8$

(ii) $\alpha=3$일 때, ㉠에서 $k=-7$ ⋯ ❸

(i), (ii)에서 모든 실수 k의 값의 곱은

$8\cdot(-7)=-56$ ⋯ ❹

답 -56

일품 BOX

㉠에 $\alpha=-3$을 대입하면
$-15=-2k+1$
$\therefore k=8$

㉠에 $\alpha=3$을 대입하면
$15=-2k+1$
$\therefore k=-7$

채점 기준	비율
❶ 근과 계수의 관계를 이용하여 식을 세울 수 있다.	30 %
❷ α의 값을 구할 수 있다.	20 %
❸ k의 값을 구할 수 있다.	30 %
❹ 모든 실수 k의 값의 곱을 구할 수 있다.	20 %

12 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=3$ …… ㉠

$\alpha\beta=a$ …… ㉡

이때 $|\alpha|+|\beta|=9$이므로 $\alpha<\beta$라 하면

$\alpha<0$, $\beta>0$

$\therefore -\alpha+\beta=9$ …… ㉢

㉠, ㉢을 연립하여 풀면

$\alpha=-3$, $\beta=6$

이것을 ㉡에 대입하면 $a=-18$

답 ①

$\alpha+\beta>0$이므로 α, β 중 적어도 하나는 양수이다.
이때 $\alpha>0$, $\beta>0$이라 하면
$|\alpha|+|\beta|=\alpha+\beta=3$
이므로 조건을 만족시키지 않는다.
따라서 $\alpha<\beta$일 때,
$\alpha<0$, $\beta>0$

다른 풀이 $\alpha+\beta=3$, $\alpha\beta=a$이고, $|\alpha|+|\beta|=9$이므로

$(|\alpha|+|\beta|)^2=\alpha^2+2|\alpha\beta|+\beta^2$

$=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+2|\alpha\beta|$

$=9-2a+2|a|$

따라서 $9-2a+2|a|=81$이므로

$|a|-a=36$

그런데 $a\geq0$이면 $|a|-a=a-a=0$이므로 $a<0$

즉 $|a|-a=-a-a=-2a$이므로

$-2a=36$ $\therefore a=-18$

13 이차방정식 $x^2-x+p=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=1$, $\alpha\beta=p$

이차방정식 $x^2-qx-1=0$의 두 근이 $\alpha+\frac{1}{\beta}$, $\beta+\frac{1}{\alpha}$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\left(\alpha+\frac{1}{\beta}\right)+\left(\beta+\frac{1}{\alpha}\right)=\alpha+\beta+\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}$

$=1+\frac{1}{p}=q$ …… ㉠

$\left(\alpha+\frac{1}{\beta}\right)\left(\beta+\frac{1}{\alpha}\right)=\alpha\beta+2+\frac{1}{\alpha\beta}$

$=2+p+\frac{1}{p}=-1$ …… ㉡

㉠에서 $\frac{1}{p}=q-1$, ㉡에서 $p+\frac{1}{p}=-3$이므로

$p+q-1=-3$

$\therefore p+q=-2$

답 ①

14 이차방정식 $(x-2)(x+3)=3x$의 두 근이 α, β이므로

$(\alpha-2)(\alpha+3)=3\alpha$, $(\beta-2)(\beta+3)=3\beta$

$\therefore (\alpha-2)(\beta-2)(\alpha+3)(\beta+3)=9\alpha\beta$

이때 $(x-2)(x+3)=3x$에서 $x^2-2x-6=0$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha\beta=-6$

$\therefore (\alpha-2)(\beta-2)(\alpha+3)(\beta+3)$

$=9\alpha\beta=-54$

답 ①

다른 풀이 $(x-2)(x+3)=3x$에서

$x^2-2x-6=0$

근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=-6$

$\therefore (\alpha-2)(\beta-2)(\alpha+3)(\beta+3)$

$=\{\alpha\beta-2(\alpha+\beta)+4\}\{\alpha\beta+3(\alpha+\beta)+9\}$

$=(-6-4+4)(-6+6+9)$

$=-54$

15 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=4$, $\alpha\beta=-2$

한편

$(\alpha^n-\beta^n)(\alpha+\beta)$

$=\alpha^{n+1}+\alpha^n\beta-\alpha\beta^n-\beta^{n+1}$

$=(\alpha^{n+1}-\beta^{n+1})+\alpha\beta(\alpha^{n-1}-\beta^{n-1})$

이므로

$4f(n)=f(n+1)-2f(n-1)$ $(n\geq2)$

위의 식에 $n=9$를 대입하면

$4f(9)=f(10)-2f(8)$

$\therefore \frac{f(10)-2f(8)}{f(9)}=4$

답 ④

ⓒ좋은책신사고

16 이차방정식 $x^2+x-n=0$의 두 근을 α, β $(\alpha<\beta)$라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-1$, $\alpha\beta=-n$ ··· ❶

$n>0$에서 $\alpha\beta=-n<0$이므로

$\alpha<0$, $\beta>0$ ··· ❷

이때 $n=-\alpha\beta=(\beta+1)\beta$이므로 n은 연속하는 두 자연수의 곱이다.

따라서 두 자리 자연수 n의 값이 될 수 있는 수는

$3\cdot4$, $4\cdot5$, $5\cdot6$, $\cdots$, $9\cdot10$

의 7개이다. ··· ❸

답 7

채점 기준	비율
❶ 근과 계수의 관계를 이용하여 식을 세울 수 있다.	30 %
❷ α, β의 부호를 구할 수 있다.	20 %
❸ 자연수 n의 개수를 구할 수 있다.	50 %

17 조건 (나)에서

$6<\alpha+\beta<8$, $5<\alpha\beta<12$

이차방정식 $ax^2-bx+3c=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=\dfrac{b}{a}$이므로

$6<\dfrac{b}{a}<8$ $\quad\therefore 6a<b<8a$ $(\because a>0)$

이때 조건 (가)에 의하여 $\quad a=1$, $b=7$

또 $\alpha\beta=\dfrac{3c}{a}=3c$이므로

$5<3c<12$ $\quad\therefore \dfrac{5}{3}<c<4$

이때 조건 (가)에 의하여 $\quad c=2$ 또는 $c=3$

(i) $c=2$일 때, 주어진 방정식은

$x^2-7x+6=0$, $\quad(x-1)(x-6)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=6$

이때 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(ii) $c=3$일 때, 주어진 방정식은

$x^2-7x+9=0$

$\therefore x=\dfrac{7\pm\sqrt{13}}{2}$

(i), (ii)에서 $c=3$이므로

$a+2b+3c=1+2\cdot7+3\cdot3=24$

답 24

18 이차방정식 $x^2+4x-8=0$의 두 근이 α, β이므로

$(x-\alpha)(x-\beta)=x^2+4x-8$

이때 $f(\alpha)=2$, $f(\beta)=2$에서

$f(\alpha)-2=0$, $f(\beta)-2=0$

따라서 이차방정식 $f(x)-2=0$의 두 근이 α, β이므로

$f(x)-2=(x-\alpha)(x-\beta)=x^2+4x-8$

$\therefore f(x)=x^2+4x-6$

답 ⑤

일품 BOX

$\alpha=\beta$이면 $\alpha+\beta=-1$에서

$\alpha=\beta=-\dfrac{1}{2}$

이므로 정수인 조건을 만족시키지 않는다.

$\alpha+\beta=-1$에서

$\alpha=-\beta-1$

$\therefore -\alpha=\beta+1$

$0<a<x<b$,
$0<c<y<d$일 때
① $a+c<x+y<b+d$
② $ac<xy<bd$

$3<\sqrt{13}<4$에서

$-4<-\sqrt{13}<-3$

$3<7-\sqrt{13}<4$

$\therefore \dfrac{3}{2}<\dfrac{7-\sqrt{13}}{2}<2$

또 $3<\sqrt{13}<4$에서

$10<7+\sqrt{13}<11$

$\therefore 5<\dfrac{7+\sqrt{13}}{2}<\dfrac{11}{2}$

$x^2+2=0$에서

$x^2=-2$

$\therefore x=\pm\sqrt{2}i$

$x^2-3=0$에서

$x^2=3$ $\quad\therefore x=\pm\sqrt{3}$

19 이차방정식 $x^2+6x+7=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-6$, $\alpha\beta=7$

$\therefore \alpha<0$, $\beta<0$

즉 $|\alpha|=-\alpha$, $|\beta|=-\beta$이므로 $|\alpha|$, $|\beta|$를 두 근으로 하는 이차방정식은 $-\alpha$, $-\beta$를 두 근으로 하는 이차방정식과 같다.

따라서

$|\alpha|+|\beta|=-\alpha-\beta$

$=-(\alpha+\beta)=6$,

$|\alpha||\beta|=(-\alpha)\cdot(-\beta)$

$=\alpha\beta=7$

이므로 구하는 이차방정식은 $x^2-6x+7=0$이다.

답 ①

20 이차방정식 $x^2+px+q=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-p$, $\alpha\beta=q$ ··· ❶

이때

$(\alpha-3)+(\beta-3)=\alpha+\beta-6$

$=-p-6$,

$(\alpha-3)(\beta-3)=\alpha\beta-3(\alpha+\beta)+9$

$=q+3p+9$

이므로 $\alpha-3$, $\beta-3$을 두 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은

$x^2+(p+6)x+3p+q+9=0$ ··· ❷

이 이차방정식이 $x^2+qx+p=0$과 같으므로

$p+6=q$, $3p+q+9=p$

$\therefore p-q=-6$, $2p+q=-9$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$p=-5$, $q=1$ ··· ❸

$\therefore p^2+q^2=26$ ··· ❹

답 26

채점 기준	비율
❶ 근과 계수의 관계를 이용하여 식을 세울 수 있다.	20 %
❷ $\alpha-3$, $\beta-3$을 두 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식을 세울 수 있다.	40 %
❸ p, q의 값을 구할 수 있다.	30 %
❹ p^2+q^2의 값을 구할 수 있다.	10 %

21 $x^2=X$로 놓으면

x^4-x^2-6

$=X^2-X-6$

$=(X+2)(X-3)$

$=(x^2+2)(x^2-3)$

$=(x+\sqrt{2}i)(x-\sqrt{2}i)(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$

따라서 x^4-x^2-6의 인수인 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

22 이차방정식 $5x^2-2x+3=0$의 두 근은

$$x=\frac{1\pm\sqrt{14}i}{5} \quad \cdots ❶$$

따라서 $5x^2-2x+3$을 복소수의 범위에서 인수분해하면

$$5\left(x-\frac{1+\sqrt{14}i}{5}\right)\left(x-\frac{1-\sqrt{14}i}{5}\right)$$

$$=\frac{1}{5}\{5x-(1+\sqrt{14}i)\}\{5x-(1-\sqrt{14}i)\} \quad \cdots ❷$$

$$\therefore a^2+b^2=(1+\sqrt{14}i)^2+(1-\sqrt{14}i)^2$$

$$=-26 \quad \cdots ❸$$

답 -26

채점 기준	비율
❶ 이차방정식 $5x^2-2x+3=0$의 근을 구할 수 있다.	30 %
❷ 이차식을 복소수의 범위에서 인수분해할 수 있다.	50 %
❸ a^2+b^2의 값을 구할 수 있다.	20 %

23 계수가 정수인 이차방정식 $x^2-px+q=0$이 서로 다른 두 허근 z_1, z_2를 가지므로

$z_1=a+bi$, $z_2=a-bi$ (a는 실수, $b\neq0$인 실수)

라 하자.

ㄱ. 근과 계수의 관계에 의하여

$$q=z_1z_2$$
$$=a^2+b^2>0$$

ㄴ. $z_1=2z_2$이면 $a+bi=2a-2bi$이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$a=2a,\ b=-2b$$
$$\therefore a=b=0$$

그런데 $b\neq0$이어야 하므로 $z_1=2z_2$를 만족시키는 p, q는 존재하지 않는다.

ㄷ. $z_1=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$, $z_2=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$이면 $z_1z_2=1$이지만

$p=1$, $q=1$이므로

$$p+q\neq1$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ뿐이다. 답 ①

24 이차방정식 $x^2-x+2=0$의 한 허근이 α이고, 계수가 실수이므로 다른 한 근은 $\bar{\alpha}$이다.

근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\bar{\alpha}=1,\ \alpha\bar{\alpha}=2$$

또 $z=\frac{\alpha-1}{\alpha+1}$에 대하여

$$\bar{z}=\frac{\bar{\alpha}-1}{\bar{\alpha}+1}$$

$$\therefore z\bar{z}=\frac{\alpha-1}{\alpha+1}\cdot\frac{\bar{\alpha}-1}{\bar{\alpha}+1}$$

$$=\frac{\alpha\bar{\alpha}-(\alpha+\bar{\alpha})+1}{\alpha\bar{\alpha}+(\alpha+\bar{\alpha})+1}$$

$$=\frac{2-1+1}{2+1+1}=\frac{1}{2}$$

답 $\frac{1}{2}$

일품 BOX

$a-1=2$, $b-1=2$이면 $a=b=3$ 이므로 a, b가 서로 다른 자연수라는 조건을 만족시키지 않는다.

a는 실수, $b\neq0$인 실수이므로 $a^2\geq0$, $b^2>0$ $\therefore a^2+b^2>0$

(가격)×(판매량) =(판매액)

$p=z_1+z_2$
$=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$
$=1$

$q=z_1z_2$
$=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\times\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$
$=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=1$

$\bar{z}=\overline{\left(\frac{\alpha-1}{\alpha+1}\right)}=\frac{\overline{\alpha-1}}{\overline{\alpha+1}}$
$=\frac{\bar{\alpha}-1}{\bar{\alpha}+1}$

사고력 강화를 위한 수능형 문제

본책 44~45쪽

01 이차방정식 $x^2-abx+a+b+2=0$의 한 근이 1이므로

$$1-ab+a+b+2=0,\qquad ab-a-b-3=0$$
$$a(b-1)-(b-1)=4$$
$$\therefore (a-1)(b-1)=4$$

이때 a, b는 서로 다른 자연수이므로

$$a-1=1,\ b-1=4 \text{ 또는 } a-1=4,\ b-1=1$$
$$\therefore a=2,\ b=5 \text{ 또는 } a=5,\ b=2$$

따라서 $ab=10$, $a+b=7$이므로 주어진 방정식의 해는

$$x^2-10x+9=0,\qquad (x-1)(x-9)=0$$
$$\therefore x=1 \text{ 또는 } x=9$$

즉 구하는 나머지 한 근은 9이다. 답 9

02 가격을 x %만큼 인상한 김밥 한 줄의 가격은 $2000\left(1+\frac{x}{100}\right)$원이고, 이때 김밥의 하루 평균 판매량은 $500\left(1-\frac{2x}{100}\right)$줄이다.

하루 평균 판매액이 28 %만큼 감소하여

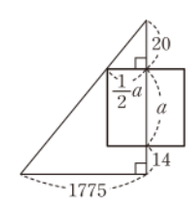
$$2000\cdot500\cdot\left(1-\frac{28}{100}\right)(\text{원})$$

이므로

$$2000\left(1+\frac{x}{100}\right)\cdot500\left(1-\frac{2x}{100}\right)$$
$$=2000\cdot500\cdot\left(1-\frac{28}{100}\right)$$
$$(100+x)(100-2x)=7200$$
$$x^2+50x-1400=0,\qquad (x+70)(x-20)=0$$
$$\therefore x=20\ (\because x>0)$$

답 ③

03 주어진 구장산술의 내용을 간단히 그림으로 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로



$$\frac{1}{2}a:1775=20:(a+34)$$
$$\frac{1}{2}a(a+34)=35500$$
$$a^2+34a-71000=0$$
$$(a+284)(a-250)=0$$
$$\therefore a=250\ (\because a>0)$$

답 ②

04 주어진 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(a+b+c)^2-3(ab+bc+ca)$$
$$=a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$$
$$=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$$

ⓒ좋은책신사고

ㄱ. $a=b=c$이면 $\frac{D}{4}=0$이므로 이차방정식은 중근을 갖는다.

ㄴ. $\frac{D}{4}\geq 0$이므로 이차방정식은 항상 실근을 갖는다.

ㄷ. $a+b+c=0$이면 주어진 이차방정식은

$$3x^2+ab+bc+ca=0$$

이므로 $\quad x=\pm\sqrt{\frac{-(ab+bc+ca)}{3}}$

이때

$$\begin{aligned}&ab+bc+ca\\&=a(b+c)+bc\\&=a(-a)+(-a-c)c\\&=-a^2-ac-c^2\\&=-(a^2+ac+c^2)\\&=-\left\{\left(a+\frac{c}{2}\right)^2+\frac{3}{4}c^2\right\}<0\end{aligned}$$

$a+b+c=0$에서 $b+c=-a$, $b=-a-c$

a^2+ac+c^2
$=a^2+ac+\frac{c^2}{4}+\frac{3}{4}c^2$
$=\left(a+\frac{c}{2}\right)^2+\frac{3}{4}c^2>0$

이므로

$$-(ab+bc+ca)>0$$

따라서 이차방정식은 부호가 서로 다른 두 실근을 갖는다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

05 이차방정식 $ax^2-32x+16=0$이 실근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(-16)^2-16a=16^2-16a\geq 0$$

$$\therefore a\leq 16$$

이때 이차방정식 $ax^2-32x+16=0$의 근이

$$x=\frac{-(-16)\pm\sqrt{(-16)^2-16a}}{a}$$

이고 적어도 한 개는 정수이므로

$(-16)^2-16a=k^2$ (k는 정수) 꼴이어야 한다.

$$\begin{aligned}\therefore k^2&=(-16)^2-16a\\&=16(16-a)=4^2(16-a)\end{aligned}$$

따라서 $16-a$가 정수의 제곱 꼴이어야 하므로

$a=7$ 또는 $a=12$ 또는 $a=15$ 또는 $a=16$

$16-a=0$일 때, $a=16$
$16-a=1$일 때, $a=15$
$16-a=4$일 때, $a=12$
$16-a=9$일 때, $a=7$
$16-a\geq 16$이면 $a\leq 0$이므로 a는 자연수라는 조건을 만족시키지 않는다.

(i) $a=7$일 때,

$$7x^2-32x+16=0$$
$$(7x-4)(x-4)=0$$

이므로 $x=4$의 정수인 근이 존재한다.

한편 이차방정식 $bx^2-7x+7=0$이 실근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D_1이라 하면

$$D_1=(-7)^2-4\cdot 7b\geq 0$$

$$49-28b\geq 0 \qquad \therefore b\leq\frac{7}{4}$$

이를 만족시키는 자연수 b는 1뿐이므로

$$x^2-7x+7=0$$

그런데 이차방정식의 정수인 근은 존재하지 않는다.

(ii) $a=12$일 때,

$$12x^2-32x+16=0$$
$$4(3x-2)(x-2)=0$$

이므로 $x=2$의 정수인 근이 존재한다.

한편 이차방정식 $bx^2-7x+12=0$이 실근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D_2라 하면

$$D_2=(-7)^2-4\cdot 12b\geq 0$$

$$49-48b\geq 0 \qquad \therefore b\leq\frac{49}{48}$$

이를 만족시키는 자연수 b는 1뿐이므로

$$x^2-7x+12=0, \qquad (x-3)(x-4)=0$$

이므로 $x=3$, $x=4$의 정수인 근이 존재한다.

(iii) $a=15$일 때,

$$15x^2-32x+16=0$$
$$(5x-4)(3x-4)=0$$

이므로 정수인 근이 존재하지 않는다.

(iv) $a=16$일 때,

$$16x^2-32x+16=0, \qquad 16(x-1)^2=0$$

이므로 $x=1$의 정수인 근이 존재한다.

한편 이차방정식 $bx^2-7x+16=0$이 실근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D_3이라 하면

$$D_3=(-7)^2-4\cdot 16b\geq 0$$

$$49-64b\geq 0 \qquad \therefore b\leq\frac{49}{64}$$

이를 만족시키는 자연수 b는 존재하지 않는다.

이상에서 $a=12$, $b=1$이므로

$$a+b=13$$

답 13

06 $g(x)=f(x)+x-3$이라 하면

$$\begin{aligned}g(\alpha)&=f(\alpha)+\alpha-3\\&=\beta+\alpha-3\\&=0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}g(\beta)&=f(\beta)+\beta-3\\&=\alpha+\beta-3\\&=0\end{aligned}$$

따라서 방정식 $g(x)=0$, 즉 $f(x)+x-3=0$의 두 근이 α, β이므로 구하는 두 근의 합은

$$\alpha+\beta=3$$

답 3

07 이차방정식 $x^2+2x-2=0$의 두 근이 α, β이므로

$$\alpha^2+2\alpha-2=0, \quad \beta^2+2\beta-2=0$$

또 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=-2, \quad \alpha\beta=-2$$

$$\begin{aligned}&\therefore (\alpha^3+2\alpha^2-\alpha-1)(\beta^3+2\beta^2-\beta-1)\\&=\{\alpha(\alpha^2+2\alpha-2)+\alpha-1\}\\&\quad\times\{\beta(\beta^2+2\beta-2)+\beta-1\}\\&=(\alpha-1)(\beta-1)=\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1\\&=-2-(-2)+1=1\end{aligned}$$

답 ③

일품 BOX

08 이차방정식 $x^2-mx+2m-1=0$의 두 근을 k, $2k-1\left(k>\frac{1}{2}\right)$이라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$k+(2k-1)=m$

$\therefore m=3k-1$ …… ㉠

$k(2k-1)=2m-1$

$\therefore 2k^2-k+1=2m$ …… ㉡

㉡에 ㉠을 대입하여 정리하면

$2k^2-7k+3=0,\quad (2k-1)(k-3)=0$

$\therefore k=3\left(\because k>\frac{1}{2}\right)$

따라서 이차방정식의 두 근은 3, $2\cdot3-1=5$이므로

$\alpha=3$

㉠에 $k=3$을 대입하면

$m=3\cdot3-1=8$

$\therefore \alpha m=3\cdot8=24$ 답 24

두 근이 모두 양수이므로 $k>0,\ 2k-1>0$ $\therefore k>\frac{1}{2}$

09 조건 (가)에서 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근의 곱은

$\frac{-1+\sqrt{2}i}{2}\cdot\frac{-1-\sqrt{2}i}{2}=\frac{3}{4}$

이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\frac{c}{a}=\frac{3}{4}$

조건 (나)에서 이차방정식 $dx^2+cx+a=0$의 두 근의 합은

$\frac{-3+\sqrt{7}i}{2}+\frac{-3-\sqrt{7}i}{2}=-3$

이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$-\frac{c}{d}=-3\qquad \therefore \frac{c}{d}=3$

이때 이차방정식 $cx^2+ax+d=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-\frac{a}{c}=-\frac{4}{3},\ \alpha\beta=\frac{d}{c}=\frac{1}{3}$

$\therefore \alpha^2\beta+\alpha\beta^2=\alpha\beta(\alpha+\beta)$

$=\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)=-\frac{4}{9}$ 답 ④

10 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=p,\ \alpha\beta=q$

q는 소수이고, α, β는 자연수이므로

$\alpha=1,\ \beta=q$ 또는 $\alpha=q,\ \beta=1$

$\therefore p=\alpha+\beta=q+1$

즉 p와 q는 연속하는 두 자연수이면서 소수이므로

$p=3,\ q=2$

$\therefore p^2+q^2=3^2+2^2=13$ 답 13

참고 연속하는 두 자연수 중 하나는 짝수이고, 2를 제외한 짝수는 합성수이므로 연속하는 두 자연수가 모두 소수인 경우는 2, 3뿐이다.

소수 q의 약수는 1과 q뿐이므로 q를 두 자연수의 곱으로 나타내는 경우는 $q=1\cdot q$ 이다.

11 이차방정식 $f(x+1)=0$의 두 근이 α, β이므로

$f(\alpha+1)=0,\ f(\beta+1)=0$

이때 이차방정식 $f(x-2)=0$의 두 근은

$x-2=\alpha+1$ 또는 $x-2=\beta+1$

$\therefore x=\alpha+3$ 또는 $x=\beta+3$

따라서 $f(x-2)=0$의 두 근의 곱은

$(\alpha+3)(\beta+3)=\alpha\beta+3(\alpha+\beta)+9$

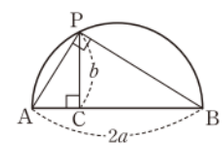
$=5+3\cdot3+9$

$=23$ 답 23

1등급 비밀노트

이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이 α, β일 때, 방정식 $f(ax+b)=0$의 두 근은 $ax+b=\alpha$, $ax+b=\beta$를 만족시키는 x의 값, 즉 $\frac{\alpha-b}{a}$, $\frac{\beta-b}{a}$이다.

12 오른쪽 그림에서



$\overline{AC}+\overline{BC}=2a$

△PAC와 △BPC에서

$\angle ACP=\angle PCB=90^\circ$,

$\angle APC=\angle PBC$ ($\because \angle APB=90^\circ$)

이므로

△PAC∽△BPC (AA 닮음)

이때 $\overline{PC}:\overline{AC}=\overline{BC}:\overline{PC}$이므로

$b:\overline{AC}=\overline{BC}:b$

$\therefore \overline{AC}\times\overline{BC}=b^2$

따라서 두 선분 AC, BC의 길이를 두 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은

$x^2-(\overline{AC}+\overline{BC})x+\overline{AC}\times\overline{BC}=0$

$\therefore x^2-2ax+b^2=0$ 답 ④

반원에 대한 원주각의 크기는 90°이다.

1등급 비밀노트

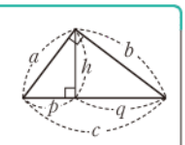
오른쪽 그림과 같은 직각삼각형에서

$ab=ch$,

$a^2=pc,\ b^2=qc$,

$h^2=pq$

가 성립한다.



13 조건 (가)에서 다항식 $f(x)$가 $x-1-i$를 인수로 가지므로 $f(1+i)=0$

즉 방정식 $f(x)=0$의 한 근이 $1+i$이고, a, b, c가 실수이므로 다른 한 근은 $1-i$이다.

$\therefore f(x)=a(x-1-i)(x-1+i)$

$=a(x^2-2x+2)$

$=ax^2-2ax+2a$

조건 (나)에서 방정식

$f(x)+1=0$, 즉 $ax^2-2ax+2a+1=0$

의 두 근의 곱이 4이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\frac{2a+1}{a}=4,\qquad 2a+1=4a\qquad \therefore a=\frac{1}{2}$

ⓒ좋은책신사고

즉 $f(x)=\frac{1}{2}x^2-x+1$이므로 $f(ax)-ax=0$에서

$$f\left(\frac{1}{2}x\right)-\frac{1}{2}x=0$$

$$\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{2}x+1-\frac{1}{2}x=0$$

$$\therefore \frac{1}{8}x^2-x+1=0,\ 즉\ x^2-8x+8=0$$

따라서 위의 이차방정식의 두 근의 합은 근과 계수의 관계에 의하여 8이다.

답 8

14 주어진 이차방정식의 한 허근이 α이고 α^2이 실수이므로 $\alpha=pi$ ($p\neq0$인 실수)라 하자. 이때 이차방정식의 계수가 모두 실수이므로 다른 한 근은 $-pi$이다.
근과 계수의 관계에 의하여

$$pi+(-pi)=-\frac{k+1}{k},\qquad 0=-\frac{k+1}{k}$$

$$\therefore k=-1$$

$$pi\cdot(-pi)=-\frac{2}{k}$$

$$\therefore p^2=2$$

따라서 $M=2$, $\alpha^2=(pi)^2=-2$이므로

$$\alpha^2+M^2=-2+2^2=2$$

답 2

다른 풀이 $\alpha=pi$ ($p\neq0$인 실수)라 하면 이차방정식 $kx^2+(k+1)x-2=0$의 한 허근이 α이므로

$$k\alpha^2+(k+1)\alpha-2=0$$

$$-kp^2+(k+1)pi-2=0$$

$$-(kp^2+2)+(k+1)pi=0$$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$kp^2+2=0,\ (k+1)p=0$$

$(k+1)p=0$에서 $p\neq0$이므로

$$k+1=0$$

$$\therefore k=-1$$

$kp^2+2=0$에 $k=-1$을 대입하면

$$p^2=2$$

$$\therefore \alpha^2=-p^2=-2$$

또 주어진 이차방정식은 $-x^2-2=0$, 즉 $x^2+2=0$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$M=2$$

$$\therefore \alpha^2+M^2=-2+2^2=2$$

일품 BOX

$y=ax^2+bx+c$
$=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}$
$+c$
에서 그래프의 축의 방정식은
$x=-\frac{b}{2a}$

$\alpha=a+bi$
(a, b는 실수, $b\neq0$)이면
$\alpha^2=(a+bi)^2$
$=(a^2-b^2)+2abi$
이므로 α^2이 실수이려면
$2ab=0$
$\therefore a=0$ 또는 $b=0$
이때 $b\neq0$이므로
$a=0$
따라서 허수 α는 순허수이다.

05 이차방정식과 이차함수

개념&핵심 기출

본책 46~48쪽

01 이차함수 $y=x^2+2(a-2)x+a^2-8$의 그래프가 x축과 만나지 않으려면 이차방정식
$x^2+2(a-2)x+a^2-8=0$의 판별식을 D라 할 때,

$$\frac{D}{4}=(a-2)^2-(a^2-8)<0$$

$$-4a+12<0\qquad \therefore a>3$$

따라서 정수 a의 값 중 가장 작은 값은 4이다.

답 ④

02 ㄱ. 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 위로 볼록하므로 $a<0$
또 그래프의 축이 y축의 오른쪽에 있으므로

$$-\frac{b}{2a}>0\qquad \therefore b>0\ (\because a<0)$$

$$\therefore ab<0$$

ㄴ. $x=-2$를 $y=ax^2+bx+c$에 대입하면

$$y=4a-2b+c$$

이때 주어진 그래프에서 $x=-2$일 때 $y<0$이므로

$$4a-2b+c<0$$

ㄷ. 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 x축과 서로 다른 두 점에서 만나므로 이차방정식
$ax^2+bx+c=0$의 판별식을 D라 하면

$$D=b^2-4ac>0$$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

다른 풀이 ㄱ. 주어진 이차함수의 그래프와 x축의 교점의 x좌표가 -1, 3이므로 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근이 -1, 3이다.
근과 계수의 관계에 의하여

$$-\frac{b}{a}=-1+3=2>0$$

따라서 $\frac{b}{a}<0$이므로 $\qquad ab<0$

03 이차함수 $y=x^2+ax+b$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표가 α, $\alpha+1$이므로 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근이 α, $\alpha+1$이다.
근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+(\alpha+1)=-a,\ 즉\ 2\alpha+1=-a\qquad \cdots\cdots ㉠$$

$$\alpha(\alpha+1)=b\qquad \cdots\cdots ㉡$$

또 이차함수 $y=2x^2-ax-2b$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표가 $\alpha-2$, α이므로 이차방정식 $2x^2-ax-2b=0$의 두 근이 $\alpha-2$, α이다.
근과 계수의 관계에 의하여

$$(\alpha-2)+\alpha=\frac{a}{2},\ 즉\ 2\alpha-2=\frac{a}{2}\qquad \cdots\cdots ㉢$$

㉠, ㉢을 연립하여 풀면

$\alpha=\frac{1}{2}$, $a=-2$

$\alpha=\frac{1}{2}$을 ㉡에 대입하면 $b=\frac{3}{4}$

$\therefore a+b+\alpha=-\frac{3}{4}$ 답 $-\frac{3}{4}$

04 이차함수 $y=x^2+ax+10$의 그래프와 직선 $y=-ax+b^2$이 만나지 않으려면 이차방정식 $x^2+ax+10=-ax+b^2$, 즉 $x^2+2ax-b^2+10=0$의 판별식을 D라 할 때

$\frac{D}{4}=a^2-(-b^2+10)<0$

$\therefore a^2+b^2<10$

따라서 자연수 a, b의 순서쌍 (a, b)는

$(1, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 1)$, $(2, 2)$

의 4개이다. 답 4

05 이차방정식 $x^2+a=bx$, 즉 $x^2-bx+a=0$의 한 근이 $2+\sqrt{2}$이고, a, b가 유리수이므로 다른 한 근은 $2-\sqrt{2}$이다.

따라서 근과 계수의 관계에 의하여

$b=(2+\sqrt{2})+(2-\sqrt{2})=4$,

$a=(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})=2$

이므로 $a+b=6$ 답 ③

06 이차함수 $y=x^2-2ax+a^2+2$의 그래프와 직선 $y=4x-k$가 서로 다른 두 점에서 만나려면 이차방정식 $x^2-2ax+a^2+2=4x-k$, 즉 $x^2-2(a+2)x+(a^2+2+k)=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다. 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\{-(a+2)\}^2-(a^2+2+k)>0$

$\therefore k<4a+2$

(i) $a=1$일 때, $k<6$이므로 $f(1)=5$

(ii) $a=2$일 때, $k<10$이므로 $f(2)=9$

(iii) $a=3$일 때, $k<14$이므로 $f(3)=13$

(iv) $a=4$일 때, $k<18$이므로 $f(4)=17$

이상에서

$f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=44$ 답 44

07 방정식 $f(x)=g(x)$의 실근은 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점의 x좌표와 같으므로 주어진 그래프에서 -3, 0, 2이다.

따라서 $a=3$, $b=-3+0+2=-1$이므로

$a-b=4$ 답 ③

일품 BOX

판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-1)^2-4\cdot(-1)$

$=5>0$

이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.

$(\alpha-2)\alpha=\frac{-2b}{2}$에

$\alpha=\frac{1}{2}$을 대입하여 b의 값을 구할 수도 있다.

이차함수의 그래프와 x축의 교점의 x좌표가 α, β인 이차함수의 식은

$y=a(x-\alpha)(x-\beta)$

$(a\neq0)$

$1^2+1^2=2$, $1^2+2^2=5$,

$2^2+1^2=5$, $2^2+2^2=8$

a가 자연수이므로 $k<4a+2$를 만족시키는 자연수 k의 개수는 $4a+1$이다.

따라서 $f(a)=4a+1$임을 이용할 수도 있다.

08 두 이차함수 $y=x^2+2x-3$, $y=-3x^2+4x-2$의 그래프의 교점의 x좌표는 이차방정식 $x^2+2x-3=-3x^2+4x-2$, 즉 $4x^2-2x-1=0$의 실근과 같다.

이때 근과 계수의 관계에 의하여 이차방정식의 두 실근의 합이 $\frac{1}{2}$이므로 두 함수의 그래프의 교점의 x좌표의 합은 $\frac{1}{2}$이다. 답 ⑤

09 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표가 α, β이고 x^2의 계수가 1이므로

$f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)$

이차함수 $y=g(x)$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표가 α, γ이고 x^2의 계수가 1이므로

$g(x)=(x-\alpha)(x-\gamma)$

$\therefore 2g(x)=2(x-\alpha)(x-\gamma)$

$f(x)=2g(x)$에서 $2g(x)-f(x)=0$이므로

$2(x-\alpha)(x-\gamma)-(x-\alpha)(x-\beta)=0$

$(x-\alpha)\{2(x-\gamma)-(x-\beta)\}=0$

$(x-\alpha)(x-2\gamma+\beta)=0$

$\therefore x=\alpha$ 또는 $x=2\gamma-\beta$

따라서 구하는 모든 근의 합은 $\alpha-\beta+2\gamma$이다. 답 ③

10 $y=ax^2+4x+a-2$

$=a\left(x^2+\frac{4}{a}x+\frac{4}{a^2}\right)-\frac{4}{a}+a-2$

$=a\left(x+\frac{2}{a}\right)^2-\frac{4}{a}+a-2$

이 함수가 $x=2$에서 최댓값을 가지므로

$a<0$, $-\frac{2}{a}=2$

$\therefore a=-1$

따라서 $y=x^2-x-1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}$이므로 $x=\frac{1}{2}$에서 최솟값 $-\frac{5}{4}$를 갖는다. 답 $-\frac{5}{4}$

11 이차함수 $y=ax^2+bx+c$가 $x=3$에서 최댓값 k를 가지므로

$y=a(x-3)^2+k$

이 함수의 그래프가 두 점 $(4, 5)$, $(5, 2)$를 지나므로

$5=a(4-3)^2+k$ $\therefore a+k=5$ …… ㉠

$2=a(5-3)^2+k$ $\therefore 4a+k=2$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-1$, $k=6$

즉 주어진 이차함수는

$y=-(x-3)^2+6=-x^2+6x-3$

이므로 $b=6$, $c=-3$

$\therefore a+b+c+k=8$ 답 8

ⓒ좋은책신사고

12 $y=x^2-2ax+2a+3$

$\quad=(x-a)^2-a^2+2a+3$

에서 $x=a$일 때 최솟값 $-a^2+2a+3$을 가지므로

$\quad m=-a^2+2a+3$

$\quad\quad=-(a-1)^2+4$

따라서 m은 $a=1$일 때 최댓값 4를 갖는다. 답 4

13 $f(x)=x^2-2x+3=(x-1)^2+2$

이므로 $-1\le x\le a$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 최댓값은 $f(-1)$, $f(a)$ 중 큰 값이다.

그런데 $f(-1)=6$이므로 $f(a)=11$이어야 한다.

즉 $a^2-2a+3=11$이므로

$\quad a^2-2a-8=0,\quad (a+2)(a-4)=0$

$\quad \therefore a=4\ (\because a>-1)$

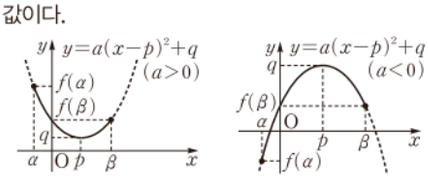
$\quad \therefore f\left(\frac{a}{2}\right)=f(2)=3$ 답 ③

참고 x의 값의 범위가 $\alpha\le x\le\beta$일 때, 이차함수 $f(x)=a(x-p)^2+q$의 최댓값과 최솟값은 다음과 같다.

① $\alpha\le p\le\beta$일 때,

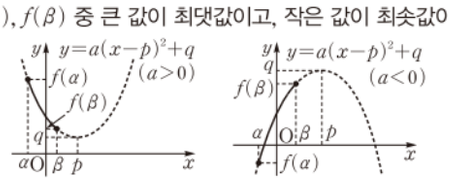
(i) $a>0$이면 최솟값은 q이고, 최댓값은 $f(\alpha)$, $f(\beta)$ 중 큰 값이다.

(ii) $a<0$이면 최댓값은 q이고, 최솟값은 $f(\alpha)$, $f(\beta)$ 중 작은 값이다.



② $p<\alpha$ 또는 $p>\beta$일 때,

$f(\alpha)$, $f(\beta)$ 중 큰 값이 최댓값이고, 작은 값이 최솟값이다.



14 $x+y^2=1$에서 $\quad y^2=1-x \quad \cdots\cdots$ ㉠

y는 실수이므로 $\quad y^2=1-x\ge0 \quad \therefore x\le1$

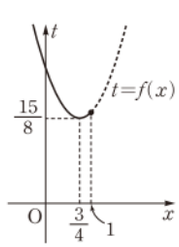
$2x^2+3y^2$에 ㉠을 대입하면

$\quad 2x^2+3y^2=2x^2+3(1-x)$

$\quad\quad=2x^2-3x+3$

$\quad\quad=2\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{15}{8}$

$f(x)=2\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{15}{8}$라 하면 $x\le1$에서 함수 $t=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $f(x)$는 $x=\frac{3}{4}$에서 최솟값 $\frac{15}{8}$를 갖는다.



즉 $2x^2+3y^2$의 최솟값은 $\frac{15}{8}$이다. 답 ②

15 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 만나는 교점의 x좌표가 -1, 3이므로

$\quad f(x)=a(x+1)(x-3)\ (a>0)$

으로 놓을 수 있다.

이때 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(0,\ -6)$을 지나므로

$\quad -6=a\cdot1\cdot(-3) \quad \therefore a=2$

$\quad \therefore f(x)=2(x+1)(x-3)$

$\quad\quad=2(x^2-2x-3)$

$\quad\quad=2(x-1)^2-8$

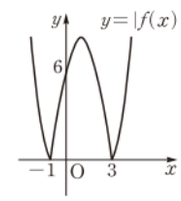
따라서 $0\le x\le4$에서 함수 $f(x)$는 $x=1$일 때 최솟값 -8을 갖고, $x=4$일 때 최댓값 10을 가지므로

$\quad -8\le f(x)\le10$

$\quad \therefore 0\le|f(x)|\le10$

따라서 함수 $y=|f(x)|$의 최댓값과 최솟값의 합은 10이다. 답 10

참고 $f(x)=2(x+1)(x-3)$일 때, 함수 $y=|f(x)|$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



16 $y=-x^2+6x=-(x-3)^2+9$

이므로 두 점 A, B와 두 점 C, D는 각각 직선 $x=3$에 대하여 대칭이다.

$\mathrm{A}(3-t,\ 0)$, $\mathrm{B}(3+t,\ 0)$ $(0<t<3)$이라 하면

두 점 A, B가 직선 $x=3$에 대하여 대칭이므로 두 점 A, B는 각각 점 $(3,\ 0)$에서 같은 거리 t만큼 떨어져 있다.

$\quad \mathrm{C}(3+t,\ -t^2+9)$, $\mathrm{D}(3-t,\ -t^2+9)$

$\quad \therefore \overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{CD}}=2t,\ \overline{\mathrm{AD}}=\overline{\mathrm{BC}}=-t^2+9$

따라서 직사각형 ABCD의 둘레의 길이는

$\quad 2\{2t+(-t^2+9)\}=-2t^2+4t+18$

$\quad\quad=-2(t-1)^2+20$

이므로 $0<t<3$에서 $t=1$일 때 직사각형 ABCD의 둘레의 길이의 최댓값은 20이다. 답 20

17 1인당 입장료를 $50x$원 인상하면 하루 입장객 수는 $200x$명 감소하므로 하루 입장료 수입은

$\quad (600+50x)(4000-200x)$

$\quad =-10000(x^2-8x-240)$

$\quad =-10000(x-4)^2+2560000$

따라서 $x=4$일 때 입장료 수입이 최대가 되므로 1인당 입장료를 $50\cdot4=200$(원) 인상해야 한다. 답 ②

18 오른쪽 그림과 같이

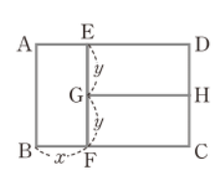
$\quad \overline{\mathrm{BF}}=x,\ \overline{\mathrm{EG}}=\overline{\mathrm{GF}}=y$

$\quad\quad (x>0,\ y>0)$

□EGHD, □GFCH의 가로의 길이와 넓이가 같으므로 세로의 길이도 같다.

라 하면

$\quad$ □ABFE$=x\cdot2y=2xy$



$\square EGHD=\overline{ED}\cdot y$

두 직사각형의 넓이가 같으므로

$2xy=\overline{ED}\cdot y \qquad \therefore \overline{ED}=2x\ (\because y>0)$

한편 철망의 길이가 100이므로

$8x+6y=100 \qquad \therefore y=-\frac{4}{3}x+\frac{50}{3}$

$\overline{AD}+\overline{BC}+\overline{GH}+\overline{AB}+\overline{EF}+\overline{DC}$
$=3x\cdot 2+2x+2y\cdot 3$
$=8x+6y$

전체 우리의 넓이는

$3x\cdot 2y=6x\left(-\frac{4}{3}x+\frac{50}{3}\right)=-8\left(x^2-\frac{25}{2}x\right)$

$=-8\left(x-\frac{25}{4}\right)^2+\frac{625}{2}$

이때 $0<8x<100$에서 $0<x<\frac{25}{2}$이므로 $x=\frac{25}{4}$일 때

전체 우리의 넓이의 최댓값은 $\frac{625}{2}$이다. 답 $\frac{625}{2}$

1등급을 위한 고난도 문제

본책 49~51쪽

01 $f(x)=a(x+5)(x-3)\ (a<0)$이라 하면

$f\left(\frac{x-2}{3}\right)=a\left(\frac{x-2}{3}+5\right)\left(\frac{x-2}{3}-3\right)$

$=\frac{a}{9}(x+13)(x-11)$

$f\left(\frac{x-2}{3}\right)=0$에서 $\quad x=-13$ 또는 $x=11$

따라서 방정식 $f\left(\frac{x-2}{3}\right)=0$의 두 근의 합은 -2이다.

답 ②

다른 풀이 방정식 $f(x)=0$의 근이 $x=\alpha$이면 방정식 $f\left(\frac{x-2}{3}\right)=0$의 근은 $\frac{x-2}{3}=\alpha$에서 $x=3\alpha+2$이다.

이때 방정식 $f(x)=0$의 근이 $x=-5$ 또는 $x=3$이므로 방정식 $f\left(\frac{x-2}{3}\right)=0$의 근은

$x=3\cdot(-5)+2$ 또는 $x=3\cdot 3+2$

$\therefore x=-13$ 또는 $x=11$

따라서 두 근의 합은 -2이다.

02 x^2의 계수가 1이므로

$f(x)=x^2+ax+b\ (a,\ b$는 상수$)$

라 하면 조건 (가)에서 $f(-1)=f(5)$이므로

$1-a+b=25+5a+b$

$6a=-24 \qquad \therefore a=-4$ ··· ❶

조건 (나)에 의하여 이차방정식 $x^2-4x+b=0$의 두 실근의 곱이 -2이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$b=-2$ ··· ❷

따라서 이차방정식 $x^2-4x-2=0$의 실근은

$x=2\pm\sqrt{(-2)^2-(-2)}=2\pm\sqrt{6}$ ··· ❸

이므로 구하는 x좌표의 차는

$2+\sqrt{6}-(2-\sqrt{6})=2\sqrt{6}$ ··· ❹

답 $2\sqrt{6}$

채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷ b의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ 이차방정식의 실근을 구할 수 있다.	30 %
❹ x좌표의 차를 구할 수 있다.	10 %

03 $A(\alpha,\ 0)$, $B(\beta,\ 0)\ (\alpha<\beta)$이라 하면 α, β는 이차방정식 $x^2+ax+2a=0$의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-a,\ \alpha\beta=2a$ ····· ㉠

이때 $\overline{AB}=2$이므로 $\quad \beta-\alpha=2$ ····· ㉡

㉠, ㉡을 $(\beta-\alpha)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$에 대입하면

$2^2=(-a)^2-4\cdot 2a$

$\therefore a^2-8a-4=0$

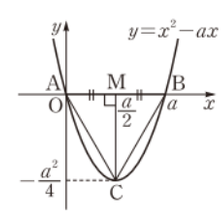
판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=(-4)^2-(-4)$
$=20>0$
이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.

따라서 근과 계수의 관계에 의하여 모든 실수 a의 값의 합은 8이다. 답 ④

04 $x^2-ax=0$에서 $\quad x(x-a)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=a$

$A(0,\ 0)$, $B(a,\ 0)$이라 하면 이차함수 $y=x^2-ax$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고



$y=x^2-ax$

$=\left(x-\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}$

에서 꼭짓점 C의 좌표는 $\left(\frac{a}{2},\ -\frac{a^2}{4}\right)$

이때 △ABC는 한 변의 길이가 a인 정삼각형이므로 선분 AB의 중점을 M이라 하면

$\overline{MC}=\frac{\sqrt{3}}{2}\overline{AB}, \qquad \frac{a^2}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}a$

$\frac{a}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}\ (\because a\neq 0)$

$\therefore a=2\sqrt{3}$ 답 ⑤

05 이차함수 $y=x^2+ax-5$의 그래프와 직선 $y=x+b$의 교점의 x좌표가 -3, 2이므로 이차방정식 $x^2+ax-5=x+b$, 즉 $x^2+(a-1)x-5-b=0$의 두 근이 -3, 2이다.

따라서 근과 계수의 관계에 의하여

$-3+2=-(a-1) \qquad \therefore a=2$

$-3\cdot 2=-5-b \qquad \therefore b=1$

$\therefore a+b=3$ 답 3

ⓒ좋은책신사고

06 이차함수 $y=x^2-2ax+a^2+2a-1$의 그래프와 직선 $y=mx+n$이 접하므로 이차방정식

$$x^2-2ax+a^2+2a-1=mx+n,\ 즉$$
$$x^2-(2a+m)x+a^2+2a-n-1=0$$

의 판별식을 D라 하면

$$D=\{-(2a+m)\}^2-4(a^2+2a-n-1)=0$$
$$4am+m^2-8a+4n+4=0$$
$$\therefore (4m-8)a+m^2+4n+4=0$$

이 식이 a에 대한 항등식이므로

$$4m-8=0,\ m^2+4n+4=0$$
$$\therefore m=2,\ n=-2$$
$$\therefore m+n=0$$

답 0

다음은 모두 k에 대한 항등식을 나타낸다.
① k의 값에 관계없이 항상 성립하는 등식
② 모든 k에 대하여 성립하는 등식
③ 임의의 k에 대하여 성립하는 등식

07 이차함수 $y=x^2-4x$, 즉 $y=(x-2)^2-4$의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동하면

$$y-2=(x+3-2)^2-4$$
$$\therefore y=(x+1)^2-2 \quad \cdots ❶$$

두 점 P, Q의 x좌표는 이차방정식 $(x+1)^2-2=mx$, 즉 $x^2+(2-m)x-1=0$의 근이다. ⋯ ❷

이때 선분 PQ의 중점이 원점이므로 이차방정식 $x^2+(2-m)x-1=0$의 두 근의 합이 0이다. ⋯ ❸

따라서 근과 계수의 관계에 의하여

$$-(2-m)=0 \qquad \therefore m=2 \quad \cdots ❹$$

답 2

이차함수 $y=ax^2$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 그래프의 식
➡ $y=a(x-p)^2+q$

채점 기준	비율
❶ 평행이동한 이차함수의 식을 구할 수 있다.	30 %
❷ 두 점 P, Q의 x좌표가 방정식의 근임을 알 수 있다.	30 %
❸ 방정식의 두 근의 합이 0임을 알 수 있다.	30 %
❹ m의 값을 구할 수 있다.	10 %

08 ㄱ. 이차함수 $y=x^2-ax+ad$의 그래프가 x축과 만나려면 이차방정식 $x^2-ax+ad=0$의 판별식을 D라 할 때,

$$D=(-a)^2-4ad\geq 0, \qquad a(a-4d)\geq 0$$

이때 $a>0$이므로 $\quad a-4d\geq 0 \quad \therefore a\geq 4d$

위의 부등식을 만족시키는 순서쌍 $(a,\ d)$는 $(4,\ 1)$, $(5,\ 1)$, $(6,\ 1)$의 3개이다.

ㄴ. 이차방정식 $x^2-ax+ad=dx+bc$, 즉 $x^2-(a+d)x+ad-bc=0$의 판별식을 D라 하면

$$D=\{-(a+d)\}^2-4(ad-bc)$$
$$=a^2-2ad+d^2+4bc$$
$$=(a-d)^2+4bc$$

이때 $(a-d)^2\geq 0$, $4bc>0$이므로 $D>0$이다.

따라서 이차함수 $y=x^2-ax+ad$의 그래프와 직선 $y=dx+bc$는 서로 다른 두 점에서 만난다.

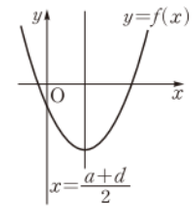
ㄷ. $f(x)=x^2-(a+d)x+ad-bc$라 하면

$$f(x)=\left(x-\frac{a+d}{2}\right)^2-\frac{(a+d)^2}{4}+ad-bc$$

이므로 이차함수 $y=f(x)$의 축의 방정식은

$$x=\frac{a+d}{2}>0$$

ㄴ에서 방정식 $x^2-(a+d)x+ad-bc=0$은 서로 다른 두 실근을 가지므로 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 이차방정식 $f(x)=0$은 양의 실근을 적어도 하나 갖는다.

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ④

09 두 이차함수의 그래프가 만나지 않으려면 이차방정식 $x^2+2ax-b=-2x^2-6$, 즉 $3x^2+2ax-(b-6)=0$의 판별식을 D라 할 때,

$$\frac{D}{4}=a^2+3(b-6)<0 \qquad \therefore b<-\frac{1}{3}a^2+6$$

위의 부등식을 만족시키는 음이 아닌 두 정수 a, b의 순서쌍 $(a,\ b)$는

$b<-\frac{1}{3}\cdot 0^2+6=6$ (i) $a=0$일 때,
$(0,\ 0)$, $(0,\ 1)$, $(0,\ 2)$, $(0,\ 3)$, $(0,\ 4)$, $(0,\ 5)$의 6개

$b<-\frac{1}{3}\cdot 1^2+6=\frac{17}{3}$ (ii) $a=1$일 때,
$(1,\ 0)$, $(1,\ 1)$, $(1,\ 2)$, $(1,\ 3)$, $(1,\ 4)$, $(1,\ 5)$의 6개

$b<-\frac{1}{3}\cdot 2^2+6=\frac{14}{3}$ (iii) $a=2$일 때,
$(2,\ 0)$, $(2,\ 1)$, $(2,\ 2)$, $(2,\ 3)$, $(2,\ 4)$의 5개

$b<-\frac{1}{3}\cdot 3^2+6=3$ (iv) $a=3$일 때,
$(3,\ 0)$, $(3,\ 1)$, $(3,\ 2)$의 3개

$b<-\frac{1}{3}\cdot 4^2+6=\frac{2}{3}$ (v) $a=4$일 때,
$(4,\ 0)$의 1개

이상에서 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는

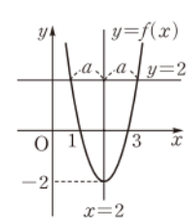
$$6+6+5+3+1=21$$

답 ④

10 $|f(x)|=2$에서 $\quad f(x)=2$ 또는 $f(x)=-2$

(i) $f(x)=2$일 때,

오른쪽 그림과 같이 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=2$는 서로 다른 두 점에서 만난다. 이때 두 교점은 직선 $x=2$에 대하여 대칭이므로 두 교점의 x좌표를 각각 $2+a$, $2-a$라 하면 두 교점의 x좌표의 합은



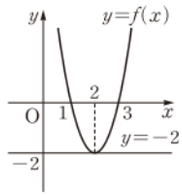
$\frac{1+3}{2}=2$

$(2+a)+(2-a)=4$

따라서 방정식 $f(x)=2$의 모든 실근의 합은 4이다.

(ii) $f(x)=-2$일 때,

오른쪽 그림과 같이 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=-2$는 접하고 접점의 x좌표는 2이므로 방정식 $f(x)=-2$의 실근은 $x=2$이다.



(i), (ii)에서 서로 다른 모든 실근의 합은

$4+2=6$ 답 ③

다른 풀이 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축과의 교점의 x좌표가 1, 3이므로

$f(x)=a(x-1)(x-3)$ $(a>0)$

이라 하면 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 꼭짓점의 좌표가 $(2, -2)$이므로

$-2=a\cdot1\cdot(-1)$ $\therefore a=2$

$\therefore f(x)=2(x-1)(x-3)=2x^2-8x+6$

(i) $f(x)=2$일 때,

$2x^2-8x+6=2$, $x^2-4x+2=0$

$\therefore x=2\pm\sqrt{2}$

(ii) $f(x)=-2$일 때,

$2x^2-8x+6=-2$, $x^2-4x+4=0$

$(x-2)^2=0$ $\therefore x=2$

(i), (ii)에서 서로 다른 모든 실근의 합은

$(2+\sqrt{2})+(2-\sqrt{2})+2=6$

주어진 함수의 그래프가 아래로 볼록하므로 $a>0$

11 이차방정식 $x^2-2f(t)x+f(t)=0$이 중근을 가지려면 이 이차방정식의 판별식을 D라 할 때,

$\frac{D}{4}=\{-f(t)\}^2-f(t)=0$, $f(t)\{f(t)-1\}=0$

$\therefore f(t)=0$ 또는 $f(t)=1$

(i) $f(t)=0$일 때,

함수 $y=f(t)$의 그래프와 x축의 교점의 개수는 4이므로 방정식 $f(t)=0$의 실근의 개수는 4이다.

(ii) $f(t)=1$일 때,

함수 $y=f(t)$의 그래프와 직선 $y=1$의 교점의 개수는 3이므로 방정식 $f(t)=1$의 실근의 개수는 3이다.

(i), (ii)에서 실수 t의 개수는

$4+3=7$ 답 ③

12 $y=-x^2+(2a+4)x+a-1$

$=-\{x^2-2(a+2)x+(a+2)^2\}$

$+(a+2)^2+a-1$

$=-\{x-(a+2)\}^2+a^2+5a+3$

에서

$p=a+2$, $q=a^2+5a+3$

$\therefore p+q=a^2+6a+5=(a+3)^2-4$

따라서 $p+q$는 $a=-3$일 때 최솟값 -4를 갖는다.

답 ①

13 (i) $b=-a^2+\frac{1}{2}a+\frac{35}{16}=-\left(a-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{9}{4}$

에서 이차함수 $b=-\left(a-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{9}{4}$의 최댓값은 $\frac{9}{4}$이므로

$b\le\frac{9}{4}$

이때 위의 부등식을 만족시키는 자연수 b의 최댓값은 2이므로

$M_1=2$

(ii) $n=-m^2+\frac{1}{2}m+2=-\left(m-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{33}{16}$

에서 이차함수 $n=-\left(m-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{33}{16}$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $\left(\frac{1}{4}, \frac{33}{16}\right)$이고, m은 자연수이므로 $m=1$일 때 실수 n의 최댓값은 $\frac{3}{2}$이다.

$\therefore M_2=\frac{3}{2}$

(i), (ii)에서 $M_1M_2=3$ 답 3

이차함수 $n=-m^2+\frac{1}{2}m+2$는 $m\ge\frac{1}{4}$인 범위에서 감소하므로 m의 값이 $m\ge\frac{1}{4}$인 자연수 중에서 가장 작은 수인 1일 때 n이 최대이다.

14 $y=x^2+ax+b=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}+b$,

$y=x^2+bx+a=\left(x+\frac{b}{2}\right)^2-\frac{b^2}{4}+a$에서 두 이차함수의 최솟값은 각각 $-\frac{a^2}{4}+b$, $-\frac{b^2}{4}+a$이다. ··· ❶

최솟값이 같으므로

$-\frac{a^2}{4}+b=-\frac{b^2}{4}+a$

$a^2-b^2+4(a-b)=0$

$(a+b)(a-b)+4(a-b)=0$

$(a-b)(a+b+4)=0$

이때 $a\ne b$이므로 $a+b+4=0$

$\therefore a+b=-4$ ····· ㉠ ··· ❷

두 이차함수의 그래프의 교점이 (p, q)이므로

$p^2+ap+b=p^2+bp+a$

$(a-b)p-(a-b)=0$

$(a-b)(p-1)=0$

이때 $a\ne b$이므로 $p-1=0$ $\therefore p=1$

$q=p^2+ap+b$에 $p=1$을 대입하면

$q=1+a+b$

$=1-4$ ($\because$ ㉠)

$=-3$ ··· ❸

$\therefore p+q=-2$ ··· ❹

답 -2

ⓒ좋은책신사고

채점 기준	비율
❶ 두 이차함수의 최솟값을 각각 구할 수 있다.	30 %
❷ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ p, q의 값을 구할 수 있다.	30 %
❹ $p+q$의 값을 구할 수 있다.	10 %

15 $f(x)=ax^2+bx+c\ (a\neq0)$라 하면 조건 (가)에 의하여 $f(0)=c=1$

조건 (나)에 의하여

$a(x+1)^2+b(x+1)+c-(ax^2+bx+c)=2x$

$\therefore 2ax+a+b=2x$

이 식이 x에 대한 항등식이므로

$2a=2,\ a+b=0$

$\therefore a=1,\ b=-1$

$\therefore f(x)=x^2-x+1$

$=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$

따라서 $-1\le x\le1$에서 함수 $f(x)$는 $x=-1$일 때 최댓값 3을 갖고, $x=\frac{1}{2}$일 때 최솟값 $\frac{3}{4}$을 갖는다.

따라서 함수 $f(x)$의 최댓값과 최솟값의 합은

$3+\frac{3}{4}=\frac{15}{4}$

답 ⑤

16 (i) $a>0$일 때,

$0\le x\le3$에서 $y=a(x-2)^2+4$는 $x=2$일 때 최솟값 4를 갖고, $x=0$일 때 최댓값 $4a+4$를 가지므로

$4a+4=8 \qquad \therefore a=1$

(ii) $a<0$일 때,

$0\le x\le3$에서 $y=a(x-2)^2+4$는 $x=2$일 때 최댓값 4를 갖고, $x=0$일 때 최솟값 $4a+4$를 가지므로

$4a+4=-4 \qquad \therefore a=-2$

(i), (ii)에서 $\alpha=1,\ \beta=-2$이므로

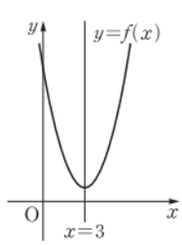
$\alpha-\beta=3$

답 ②

17 $f(x)=x^2-6x+10$

$=(x-3)^2+1$

이므로 오른쪽 그림과 같이 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=3$에 대하여 대칭이다.



(i) $a=\frac{3}{2}$일 때,

주어진 범위에서 $f(x)$의 최댓값은

$f(a)=f(a+3)$

(ii) $a<\frac{3}{2}$일 때,

주어진 범위에서 $f(x)$의 최댓값은 $f(a)$

일품 BOX

$f\left(\frac{3}{2}\right)=f\left(\frac{9}{2}\right)=\frac{13}{4}$

(iii) $a>\frac{3}{2}$일 때,

주어진 범위에서 $f(x)$의 최댓값은

$f(a+3)$

이상에서 $k=\frac{3}{2}$이므로

$g(a)=f(a)=a^2-6a+10,$

$h(a)=f(a+3)=a^2+1$

$\therefore g(-3)+h(3)$

$=\{(-3)^2-6\cdot(-3)+10\}+(3^2+1)=47$

답 47

1등급 비밀노트

$f(a)$와 $f(a+3)$의 값이 같으면 그 값이 최댓값이고, $f(a)$와 $f(a+3)$의 값이 다르면 둘 중 큰 값이 최댓값이다.
따라서 $a\le x\le a+3$에 꼭짓점의 x좌표가 속하는지의 여부와 관계없이 $f(a)$와 $f(a+3)$의 값의 대소가 바뀌는 a의 값이 k의 값이다.

18 $x^2-4x+2=t$로 놓으면

$t=(x-2)^2-2$

이므로 $1\le x\le4$에서 $x=4$일 때 최댓값 2를 갖고, $x=2$일 때 최솟값 -2를 갖는다.

$\therefore -2\le t\le2$ ⋯ ❶

이때 주어진 함수는

$y=t^2+6t-1=(t+3)^2-10$

이므로 $-2\le t\le2$에서 $t=2$일 때 최댓값 15를 갖고, $t=-2$일 때 최솟값 -9를 갖는다. ⋯ ❷

따라서 $M=15,\ m=-9$이므로

$M-m=24$ ⋯ ❸

답 24

채점 기준	비율
❶ 공통부분을 t로 놓고 t의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❷ 주어진 함수의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $M-m$의 값을 구할 수 있다.	20 %

19 $\overline{QR}=\overline{PS}=x\ (0<x<10)$,

$\overline{PQ}=\overline{SR}=y\ (0<y<5)$라 하면

$\triangle APS\backsim\triangle ABC$ (AA 닮음)이므로

∠A는 공통, ∠APS=∠ABC

$x:10=(5-y):5$

두 삼각형 APS, ABC의 높이의 비

$5x=50-10y$

$\therefore y=-\frac{1}{2}x+5$

따라서 □PQRS의 넓이는

$xy=x\left(-\frac{1}{2}x+5\right)$

$=-\frac{1}{2}(x^2-10x)$

$=-\frac{1}{2}(x-5)^2+\frac{25}{2}$

이므로 $0<x<10$에서 $x=5$일 때 □PQRS의 넓이의 최댓값은 $\frac{25}{2}$이다. 답 ⑤

20 과자 한 개의 판매 가격을 $(1000+10k)$원이라 하면 과자의 하루 판매량은 $(500-20k)$개이므로 하루 판매 수익은

$$\begin{aligned}&(1000+10k)(500-20k)-\{350(500-20k)+3000\}\\&=200(100+k)(25-k)-1000(-7k+178)\\&=-200\{k^2+75k-2500+5(-7k+178)\}\\&=-200(k^2+40k-1610)\\&=-200(k+20)^2+402000\end{aligned}$$

따라서 $k=-20$일 때 하루 판매 수익이 최대이므로 이때의 과자 한 개의 판매 가격은

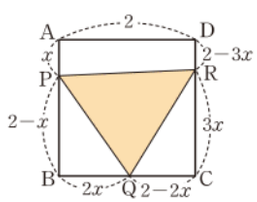
$1000+10\cdot(-20)=800$(원) 답 800원

$k<0$이므로 가격을 인하한 것이다.

21 $\overline{BQ}=2\overline{AP}$, $\overline{CR}=3\overline{AP}$이므로 $\overline{AP}=x$라 하면

$\overline{BQ}=2x$, $\overline{CR}=3x$ ··· ❶

오른쪽 그림에서 △PQR의 넓이는



□ABCD−△PBQ

−△CRQ−□APRD

$=4-\frac{1}{2}\cdot 2x\cdot(2-x)$

$-\frac{1}{2}\cdot(2-2x)\cdot 3x-\frac{1}{2}\cdot\{x+(2-3x)\}\cdot 2$

$=4x^2-3x+2=4\left(x-\frac{3}{8}\right)^2+\frac{23}{16}$ ··· ❷

이므로 $0\le 3x\le 2$, 즉 $0\le x\le\frac{2}{3}$에서 $x=\frac{3}{8}$일 때

△PQR의 넓이의 최솟값은 $\frac{23}{16}$이다. ··· ❸

답 $\frac{23}{16}$

채점 기준	비율
❶ $\overline{AP}$, $\overline{BQ}$, $\overline{CR}$의 길이를 같은 문자로 나타낼 수 있다.	20 %
❷ 넓이에 대한 식을 세울 수 있다.	50 %
❸ 넓이의 최솟값을 구할 수 있다.	30 %

사고력 강화를 위한 수능형 문제

본책 52쪽

01 이차방정식 $ax^2+4ax+b=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-4$ $\quad\therefore \beta=-\alpha-4$

이때 $-5<\alpha<-4$이므로

$4<-\alpha<5$ $\quad\therefore 0<-\alpha-4<1$

$\therefore 0<\beta<1$ 답 ③

다른 풀이 $y=ax^2+4ax+b=a(x+2)^2-4a+b$이므로 주어진 이차함수의 그래프의 축의 방정식은

$x=-2$

따라서 두 점 $(\alpha, 0)$, $(\beta, 0)$은 직선 $x=-2$에 대하여 대칭이므로 α의 값의 범위가 $-5<\alpha<-4$이면 β의 값의 범위는 $0<\beta<1$이다.

02 점 A의 좌표를 (a, k) $(a>0)$라 하면 점 A는 곡선 $y=2x^2-m$ 위의 점이므로

$k=2a^2-m$ ····· ㉠

또 $C(0, -m)$이고 △ABC의 넓이가 16이므로

$\frac{1}{2}\cdot 2a\cdot(k+m)=16$

$\therefore a(k+m)=16$ ····· ㉡

㉠에서 $k+m=2a^2$이므로 이것을 ㉡에 대입하면

$2a^3=16$, $\quad a^3=8$

이때 a는 실수이므로 $\quad a=2$ 답 ③

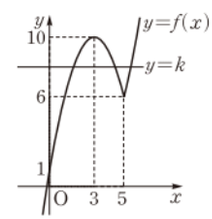
03 $x<5$일 때,

$f(x)=-x^2+6x+1=-(x-3)^2+10$

$x\ge 5$일 때,

$f(x)=x^2-6x+11=(x-3)^2+2$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 방정식 $f(x)=k$가 서로 다른 세 실근을 가지려면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나야 하므로

$6<k<10$

$k<6$ 또는 $k>10$일 때 한 점에서 만나고, $k=6$ 또는 $k=10$일 때 서로 다른 두 점에서 만난다.

즉 정수 k는 7, 8, 9이므로 모든 정수 k의 값의 합은

$7+8+9=24$ 답 24

04 이차방정식 $f(x)=mx+n$, 즉 $f(x)-mx-n=0$이 중근 α를 갖고, x^2의 계수가 1이므로

$f(x)-mx-n=(x-\alpha)^2$

$\therefore f(x)=(x-\alpha)^2+mx+n$

같은 방법으로 하면

$g(x)=(x-\beta)^2+mx+n$

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 교점의 x좌표는 방정식 $f(x)=g(x)$의 실근과 같으므로

$(x-\alpha)^2+mx+n=(x-\beta)^2+mx+n$

$(x-\alpha)^2=(x-\beta)^2$

$-2\alpha x+\alpha^2=-2\beta x+\beta^2$

$2(\alpha-\beta)x=(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)$

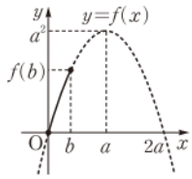
$\therefore x=\frac{\alpha+\beta}{2}$ $(\because \alpha\ne\beta)$ 답 ⑤

ⓒ좋은책신사고

05 $f(x)=-x^2+2ax=-(x-a)^2+a^2$이라 하면

(i) $b<a$인 경우

주어진 이차함수는 $0\le x\le b$에서 $x=b$일 때 최댓값 $f(b)$를 가지므로



$-b^2+2ab=9$

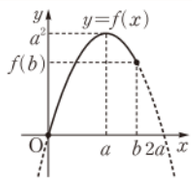
$\therefore b(2a-b)=9$

이때 a, b는 자연수이므로 순서쌍 (a, b)는

$(5, 1)$의 1개

(ii) $a\le b\le 2a$인 경우

주어진 이차함수는 $0\le x\le b$에서 $x=a$일 때 최댓값이 a^2이므로



$a^2=9$

$\therefore a=3\ (\because a>0)$

따라서 순서쌍 (a, b)는

$(3, 3)$, $(3, 4)$, $(3, 5)$, $(3, 6)$의 4개

(i), (ii)에서 구하는 순서쌍 (a, b)의 개수는

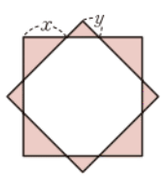
$1+4=5$

답 ③

일품 BOX

$b=1$일 때 $2a-1=9$에서 $a=5$
$b=3$일 때 $2a-3=3$에서 $a=3$
$b=9$일 때 $2a-9=1$에서 $a=5$
따라서 $0<b<a$인 경우는 $a=5$, $b=1$뿐이다.

06 오른쪽 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형의 색칠한 직각이등변삼각형의 짧은 변의 길이를 x, 다른 정사각형의 색칠한 직각이등변삼각형의 짧은 변의 길이를 y라 하면 8개의 교점이 생겨야 하므로



$0<x<\frac{1}{2}$

또 $1=x+\sqrt{2}y+x$에서

$y=\frac{1-2x}{\sqrt{2}}$

따라서 색칠한 부분의 넓이는

$$4\cdot\frac{1}{2}x^2+4\cdot\frac{1}{2}y^2=2x^2+2\cdot\frac{(1-2x)^2}{2}$$
$$=6x^2-4x+1$$
$$=6\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1}{3}$$

이고, $0<x<\frac{1}{2}$에서 $x=\frac{1}{3}$일 때 색칠한 부분의 넓이의 최솟값은 $\frac{1}{3}$이므로

$m=\frac{1}{3}$

$\therefore 30m=10$

답 10

위의 그림에서 빗변의 길이는
$\sqrt{y^2+y^2}=\sqrt{2y^2}=\sqrt{2}y$

06 여러 가지 방정식

개념&핵심 기출

본책 54~56쪽

01 $P(x)=x^3-3x^2+x+5$라 하면

$P(-1)=-1-3-1+5=0$

이므로 조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

-1	1	-3	1	5
		-1	4	-5
	1	-4	5	0

$P(x)=(x+1)$
$\times(x^2-4x+5)$

즉 주어진 방정식은

$(x+1)(x^2-4x+5)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=2\pm i$

따라서 $\alpha=-1$, $\beta=2$, $\gamma=1$이므로

$\alpha+\beta+\gamma=2$

답 2

02 $x^2-3x=X$로 놓으면 주어진 방정식은

$X^2-X-20=0$, $(X+4)(X-5)=0$

$\therefore X=-4$ 또는 $X=5$

(i) $X=-4$일 때,

$x^2-3x=-4$이므로

$x^2-3x+4=0$

이 이차방정식의 판별식을 D_1이라 하면

$D_1=(-3)^2-4\cdot1\cdot4=-7<0$

이므로 서로 다른 두 허근을 갖는다.

(ii) $X=5$일 때,

$x^2-3x=5$이므로

$x^2-3x-5=0$

이 이차방정식의 판별식을 D_2라 하면

$D_2=(-3)^2-4\cdot1\cdot(-5)=29>0$

이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 두 실근은 방정식 $x^2-3x-5=0$의 근이고, 두 허근은 방정식 $x^2-3x+4=0$의 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$a=-5$, $b=3$

$\therefore b-a=8$

답 8

03 $x\ne0$이므로 주어진 방정식의 양변을 x^2으로 나누면

$x=0$이면 주어진 방정식은 $1=0$으로 모순이므로 $x\ne0$

$x^2+3x+2+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}=0$

$\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+3\left(x+\frac{1}{x}\right)+2=0$

$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2$

$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+3\left(x+\frac{1}{x}\right)=0$

$x+\frac{1}{x}=t$로 놓으면 $t^2+3t=0$

$t(t+3)=0$ $\therefore t=-3$ 또는 $t=0$

(i) $t=-3$일 때,

$x+\frac{1}{x}=-3$이므로 $\quad x^2+3x+1=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=3^2-4\cdot1\cdot1=5>0$

이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.

(ii) $t=0$일 때,

$x+\frac{1}{x}=0$이므로 $\quad x^2+1=0 \quad \therefore x=\pm i$

즉 서로 다른 두 허근을 갖는다.

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 두 실근은 방정식 $x^2+3x+1=0$의 근이고, 두 허근은 방정식 $x^2+1=0$의 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-3,\ \gamma\delta=1$

$\therefore \alpha+\beta+\gamma\delta=-2$ 답 ①

다른 풀이 $x^4+3x^3+2x^2+3x+1=0$에서

$x^4+3x^3+x^2+x^2+3x+1=0$

$x^2(x^2+3x+1)+(x^2+3x+1)=0$

$(x^2+3x+1)(x^2+1)=0$

이차방정식 $x^2+3x+1=0$의 두 근이 α, β이고, 이차방정식 $x^2+1=0$의 두 근이 γ, δ이다.

04 삼차방정식 $x^3-x^2+5x-2=0$의 세 근이 α, β, γ이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=1,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=5,\ \alpha\beta\gamma=2$

$\therefore (\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)$

$=(1-\gamma)(1-\alpha)(1-\beta)$

$=1-(\alpha+\beta+\gamma)+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-\alpha\beta\gamma$

$=1-1+5-2=3$ 답 ⑤

$\alpha+\beta+\gamma=1$에서
$\alpha+\beta=1-\gamma$,
$\beta+\gamma=1-\alpha$,
$\gamma+\alpha=1-\beta$

05 주어진 삼차방정식의 세 양의 실근의 비가 $1:2:3$이므로 세 근을 α, 2α, 3α $(\alpha>0)$라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha\cdot2\alpha+2\alpha\cdot3\alpha+3\alpha\cdot\alpha=44$

$2\alpha^2+6\alpha^2+3\alpha^2=44, \quad 11\alpha^2=44$

$\alpha^2=4 \quad \therefore \alpha=2\ (\because \alpha>0)$

따라서 세 실근은 2, 4, 6이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$2+4+6=-a \quad \therefore a=-12$

$2\cdot4\cdot6=-b \quad \therefore b=-48$

$\therefore a+b=-60$ 답 -60

06 삼차방정식 $x^3+x^2-1=0$의 세 근이 α, β, γ이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=-1,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=0,\ \alpha\beta\gamma=1$

따라서

$(\alpha+\beta)+(\beta+\gamma)+(\gamma+\alpha)=2(\alpha+\beta+\gamma)$

$=-2,$

$(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)+(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)+(\gamma+\alpha)(\alpha+\beta)$

$=\alpha\beta+\gamma\alpha+\beta^2+\beta\gamma+\beta\gamma+\alpha\beta+\gamma^2+\gamma\alpha+\gamma\alpha+\beta\gamma$

$+\alpha^2+\alpha\beta$

$=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+3(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$

$=(\alpha+\beta+\gamma)^2+\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$

$=(-1)^2=1,$

$(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)$

$=(-1-\gamma)(-1-\alpha)(-1-\beta)$

$=-1-(\alpha+\beta+\gamma)-(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-\alpha\beta\gamma$

$=-1+1-1=-1$

$\alpha+\beta+\gamma=-1$에서
$\alpha+\beta=-1-\gamma$,
$\beta+\gamma=-1-\alpha$,
$\gamma+\alpha=-1-\beta$

이므로 $\alpha+\beta$, $\beta+\gamma$, $\gamma+\alpha$를 세 근으로 하고 x^3의 계수가 1인 삼차방정식은

$x^3-(-2)x^2+x-(-1)=0$

$\therefore x^3+2x^2+x+1=0$ 답 ⑤

1등급 비밀노트

$x^3+x^2-1=0$의 세 근이 α, β, γ이므로

$x^3+x^2-1=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$

양변에 $x=-1$을 대입하면

$(-1)^3+(-1)^2-1=(-1-\alpha)(-1-\beta)(-1-\gamma)$

이므로

$(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)=(-1-\gamma)(-1-\alpha)(-1-\beta)$

$=-1$

07 삼차방정식의 한 근이 $3+\sqrt{7}$이고, 계수가 모두 유리수이므로 $3-\sqrt{7}$도 근이다.

나머지 한 근을 α라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+(3+\sqrt{7})+(3-\sqrt{7})=-p$

$\therefore \alpha+6=-p$ …… ㉠

$\alpha(3+\sqrt{7})+(3+\sqrt{7})(3-\sqrt{7})+(3-\sqrt{7})\cdot\alpha=q$

$\therefore 6\alpha+2=q$ …… ㉡

$\alpha(3+\sqrt{7})(3-\sqrt{7})=p$

$\therefore 2\alpha=p$ …… ㉢

㉠, ㉢을 연립하여 풀면

$\alpha=-2,\ p=-4$

㉡에 $\alpha=-2$를 대입하면 $\quad q=-10$

$\therefore p+q=-14$ 답 ①

참고 주어진 방정식에 $x=3+\sqrt{7}$을 대입한 후 무리수가 서로 같을 조건을 이용하여 p, q의 값을 구할 수도 있다.

08 삼차방정식의 한 근이

$\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\frac{2i}{2}=i$

이고, 계수가 모두 실수이므로 $-i$도 근이다.

나머지 한 근을 α라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+i+(-i)=-\alpha$

$\therefore \alpha=-\alpha$ …… ㉠

$\alpha i+i\cdot(-i)+(-i)\cdot\alpha=b$

$\therefore b=1$ …… ㉡

$\alpha i\cdot(-i)=-2$

$\therefore \alpha=-2$ …… ㉢

㉠, ㉡, ㉢에서 $a=2,\ b=1$

$\therefore a+b=3$ 답 ③

09 사차방정식의 한 근이 $2-i$이고 계수가 모두 유리수, 즉 실수이므로 $2+i$도 근이다.

$2-i,\ 2+i$를 두 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은

$(x-2+i)(x-2-i)=0$

$\therefore x^2-4x+5=0$

또 사차방정식의 한 근이 $2+\sqrt{3}$이고, 계수가 모두 유리수이므로 $2-\sqrt{3}$도 근이다.

$2+\sqrt{3},\ 2-\sqrt{3}$을 두 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은

$(x-2-\sqrt{3})(x-2+\sqrt{3})=0$

$\therefore x^2-4x+1=0$

따라서

$x^4+ax^3+bx^2+cx+5$

$=(x^2-4x+5)(x^2-4x+1)$

$=x^4-8x^3+22x^2-24x+5$

이므로 $a=-8,\ b=22,\ c=-24$

$\therefore a+b+c=-10$ 답 ⑤

$x^2-4x=X$로 놓고 다음과 같이 전개한다.

$(X+5)(X+1)$

$=X^2+6X+5$

$=(x^2-4x)^2$

$+6(x^2-4x)+5$

$=x^4-8x^3+16x^2+6x^2$

$-24x+5$

$=x^4-8x^3+22x^2-24x$

$+5$

10 $x^3-1=0$에서 $(x-1)(x^2+x+1)=0$

방정식 $x^3-1=0$의 한 허근 ω는 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 근이므로

$\omega^3=1,\ \omega^2+\omega+1=0$

$\therefore \omega-2\omega^2+3\omega^4-4\omega^5=\omega-2\omega^2+3\omega-4\omega^2$

$=4\omega-6\omega^2$

$=4\omega-6(-\omega-1)$

$=10\omega+6$

따라서 $a=10,\ b=6$이므로

$a^2+b^2=10^2+6^2=136$ 답 136

$\omega^2+\omega+1=0$에서

$\omega^2=-\omega-1$

11 $x^3=-1$, 즉 $x^3+1=0$에서

$(x+1)(x^2-x+1)=0$

방정식 $x^3=-1$의 한 허근 ω는 이차방정식 $x^2-x+1=0$의 근이고, ω의 켤레복소수인 $\overline{\omega}$도 $x^2-x+1=0$의 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\omega+\overline{\omega}=1,\ \omega\overline{\omega}=1$

$\therefore z\overline{z}=\dfrac{\omega}{1-\omega}\cdot\overline{\left(\dfrac{\omega}{1-\omega}\right)}=\dfrac{\omega}{1-\omega}\cdot\dfrac{\overline{\omega}}{1-\overline{\omega}}$

$=\dfrac{\omega\overline{\omega}}{1-(\omega+\overline{\omega})+\omega\overline{\omega}}=1$ 답 ⑤

12 $x^3=1$, 즉 $x^3-1=0$에서

$(x-1)(x^2+x+1)=0$

방정식 $x^3=1$의 한 허근 ω는 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 근이므로

$\omega^3=1,\ \omega^2+\omega+1=0$

$\omega^2+\omega+1=0$의 양변을 ω로 나누어 정리하면

$\omega+\dfrac{1}{\omega}=-1,$

$\omega^2+\dfrac{1}{\omega^2}=\left(\omega+\dfrac{1}{\omega}\right)^2-2=-1,$

$\omega^3+\dfrac{1}{\omega^3}=1+1=2,$

$\omega^4+\dfrac{1}{\omega^4}=\omega+\dfrac{1}{\omega}=-1$

$\vdots$

$\therefore \left(\omega+\dfrac{1}{\omega}\right)+\left(\omega^2+\dfrac{1}{\omega^2}\right)+\left(\omega^3+\dfrac{1}{\omega^3}\right)$

$+\cdots+\left(\omega^{10}+\dfrac{1}{\omega^{10}}\right)$

$=\{-1+(-1)+2\}\cdot3+(-1)$

$=-1$ 답 ②

13 $\begin{cases} x^2+4xy+y^2=16 & \cdots\cdots ㉠ \\ x-y=2 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉡에서 $y=x-2$이므로 이것을 ㉠에 대입하면

$x^2+4x(x-2)+(x-2)^2=16$

$x^2-2x-2=0$

$\therefore x=1\pm\sqrt{3}$

$x=1+\sqrt{3}$일 때 $y=-1+\sqrt{3}$이고, $x=1-\sqrt{3}$일 때 $y=-1-\sqrt{3}$이므로

$x+y=\pm2\sqrt{3}$

$\therefore (x+y)^2=12$ 답 12

다른 풀이 $x^2+4xy+y^2=(x-y)^2+6xy$이므로 이 식에 $x-y=2$를 대입하면

$2^2+6xy=16$ $\therefore xy=2$

$\therefore (x+y)^2=(x-y)^2+4xy$

$=2^2+4\cdot2=12$

14 $\begin{cases} x^2-y^2=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-xy+y^2=9 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $(x+y)(x-y)=0$

$\therefore y=-x$ 또는 $y=x$

(i) $y=-x$를 ㉡에 대입하면

$x^2-x(-x)+(-x)^2=9$

$3x^2=9,$ $x^2=3$

$\therefore x=\pm\sqrt{3},\ y=\mp\sqrt{3}$ (복호동순)

(ii) $y=x$를 ㉡에 대입하면

$x^2-x^2+x^2=9,$ $x^2=9$

$\therefore x=\pm3,\ y=\pm3$ (복호동순)

$x=\pm\sqrt{3}$을 $y=-x$에 각각 대입하면

$y=\mp\sqrt{3}$ (복호동순)

$x=\pm3$을 $y=x$에 각각 대입하면

$y=\pm3$ (복호동순)

(i), (ii)에서 주어진 연립방정식의 해는

$\begin{cases} x=\pm\sqrt{3} \\ y=\mp\sqrt{3} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=\pm 3 \\ y=\pm 3 \end{cases}$ (복호동순)

이므로 $2x+y$의 최댓값은 $2\cdot 3+3=9$ 답 9

일품 BOX: $x=3$, $y=3$일 때 $2x+y$는 최댓값을 갖는다.

15 $\begin{cases} x+y=3 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2y+xy^2=-12 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉡에서 $xy(x+y)=-12$ $\cdots\cdots$ ㉢

㉢에 ㉠을 대입하면 $3xy=-12$ $\therefore xy=-4$

즉 $x+y=3$, $xy=-4$에서 x, y는 이차방정식 $t^2-3t-4=0$의 두 근이므로

$(t+1)(t-4)=0$ $\therefore t=-1$ 또는 $t=4$

따라서 주어진 연립방정식의 해는

$\begin{cases} x=-1 \\ y=4 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=4 \\ y=-1 \end{cases}$

이므로 $|x-y|=5$ 답 ⑤

$x+y=u$, $xy=v$를 만족시키는 x, y는 $t^2-ut+v=0$의 두 근이다.

16 직육면체의 가로, 세로의 길이를 각각 a, b, 높이를 c라 하면 모든 모서리의 길이의 합이 36이므로

$4(a+b+c)=36$ $\therefore a+b+c=9$

이 직육면체의 대각선의 길이가 $\sqrt{29}$이므로

$\sqrt{a^2+b^2+c^2}=\sqrt{29}$ $\therefore a^2+b^2+c^2=29$

이때 $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$에서

$9^2=29+2(ab+bc+ca)$

$\therefore ab+bc+ca=26$

이 직육면체의 부피가 24이므로 $abc=24$

즉 a, b, c를 세 근으로 하고 x^3의 계수가 1인 삼차방정식은

$x^3-(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x-abc=0$

$x^3-9x^2+26x-24=0$

$(x-2)(x^2-7x+12)=0$

$(x-2)(x-3)(x-4)=0$

$\therefore x=2$ 또는 $x=3$ 또는 $x=4$

따라서 직육면체의 모서리 중 길이가 가장 짧은 모서리의 길이는 2이다. 답 2

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & -9 & 26 & -24 \\ & & 2 & -14 & 24 \\ \hline & 1 & -7 & 12 & \boxed{0} \end{array}$$

다항식 $P(x)$에 대하여 $P(\alpha)=0$이면 인수정리에 의하여 $P(x)=(x-\alpha)Q(x)$로 인수분해된다.

17 두 연못 O_1, O_2의 반지름의 길이를 각각 r_1, r_2라 하면 두 연못의 중심 사이의 거리가 6이므로

$r_1+r_2=6$ $\cdots\cdots$ ㉠

두 연못 O_1, O_2의 넓이의 합이 20π이므로

$\pi r_1^2+\pi r_2^2=20\pi$

$\therefore r_1^2+r_2^2=20$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠에서 $r_2=6-r_1$이므로 이것을 ㉡에 대입하면

$r_1^2+(6-r_1)^2=20$

$r_1^2-6r_1+8=0$

$(r_1-2)(r_1-4)=0$

$\therefore r_1=2$ 또는 $r_1=4$

따라서 $r_1=2$, $r_2=4$ 또는 $r_1=4$, $r_2=2$이므로 두 연못 O_1, O_2의 반지름의 길이의 차는

$4-2=2$ 답 2

다른 풀이 $(r_1+r_2)^2=r_1^2+2r_1r_2+r_2^2$에 ㉠, ㉡을 대입하면

$6^2=20+2r_1r_2$ $\therefore r_1r_2=8$

즉 r_1, r_2는 이차방정식 $x^2-6x+8=0$의 두 근이므로

$(x-2)(x-4)=0$ $\therefore x=2$ 또는 $x=4$

따라서 두 연못의 반지름의 길이의 차는

$4-2=2$

18 꽃밭의 가로, 세로의 길이를 각각 x m, y m $(x>y)$라 하면 정원의 가로, 세로의 길이는 각각 $(x+3)$ m, $(y+2)$ m이고, 정원의 둘레의 길이가 50 m이므로

$2\{(x+3)+(y+2)\}=50$

$\therefore x+y=20$ $\cdots\cdots$ ㉠

또 꽃밭의 넓이가 96 m^2이므로

$xy=96$ $\cdots\cdots$ ㉡

즉 x, y는 이차방정식 $t^2-20t+96=0$의 두 근이므로

$(t-8)(t-12)=0$

$\therefore t=8$ 또는 $t=12$

따라서 $x=12$, $y=8$이므로 꽃밭의 가로의 길이는 12 m이다. 답 12 m

정원의 가로, 세로의 길이를 각각 x m, y m로 놓고 풀 수도 있다. 이때 꽃밭의 가로, 세로의 길이는 각각 $(x-3)$ m, $(y-2)$ m이다.

1등급을 위한 고난도 문제

본책 57~59쪽

01 $P(x)=x^3+(a+1)x^2+2ax+a^2$이라 하면

$P(-a)=-a^3+(a+1)a^2-2a^2+a^2=0$

이므로 $P(x)=(x+a)(x^2+x+a)$로 인수분해된다.

이때 삼차방정식 $P(x)=0$이 중근을 갖는 경우는 다음 두 가지가 있다.

(i) 이차방정식 $x^2+x+a=0$이 $x=-a$를 근으로 갖는 경우

$(-a)^2+(-a)+a=0$

$a^2=0$ $\therefore a=0$

(ii) 이차방정식 $x^2+x+a=0$이 중근을 갖는 경우

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=1^2-4\cdot a=0$ $\therefore a=\frac{1}{4}$

(i), (ii)에서

$a=0$ 또는 $a=\frac{1}{4}$

따라서 구하는 합은 $\frac{1}{4}$이다. 답 $\frac{1}{4}$

ⓒ좋은책신사고

02 $x^2=X$로 놓으면 주어진 방정식은

$$X^2+2aX+2a-1=0$$
$$(X+2a-1)(X+1)=0$$
$$\therefore X=-2a+1 \text{ 또는 } X=-1$$

즉 $x^2=-2a+1$ 또는 $x^2=-1$이고, 방정식 $x^2=-1$은 서로 다른 두 허근을 가지므로 방정식 $x^2=-2a+1$은 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

따라서 $-2a+1>0$이어야 하므로

$$a<\frac{1}{2}$$

답 ①

03 $x\neq0$이므로 주어진 방정식의 양변을 x^2으로 나누면

$$9x^2+24x-2+\frac{24}{x}+\frac{9}{x^2}=0$$
$$9\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+24\left(x+\frac{1}{x}\right)-2=0$$
$$9\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+24\left(x+\frac{1}{x}\right)-20=0 \quad \cdots ❶$$

$x+\frac{1}{x}=t$로 놓으면

$$9t^2+24t-20=0, \qquad (3t+10)(3t-2)=0$$
$$\therefore t=-\frac{10}{3} \text{ 또는 } t=\frac{2}{3} \quad \cdots ❷$$

(i) $t=-\frac{10}{3}$일 때,

$x+\frac{1}{x}=-\frac{10}{3}$이므로 $\quad 3x^2+10x+3=0$

이 이차방정식의 판별식을 D_1이라 하면

$$\frac{D_1}{4}=5^2-3\cdot3=16>0$$

이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.

(ii) $t=\frac{2}{3}$일 때,

$x+\frac{1}{x}=\frac{2}{3}$이므로 $\quad 3x^2-2x+3=0$

이 이차방정식의 판별식을 D_2라 하면

$$\frac{D_2}{4}=(-1)^2-3\cdot3=-8<0$$

이므로 서로 다른 두 허근을 갖는다.

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 한 실근 α에 대하여

$$\alpha+\frac{1}{\alpha}=-\frac{10}{3} \quad \cdots ❸$$

답 $-\frac{10}{3}$

채점 기준	비율
❶ 주어진 사차방정식을 $x+\frac{1}{x}$에 대한 식으로 정리할 수 있다.	30 %
❷ $x+\frac{1}{x}$의 값을 구할 수 있다.	20 %
❸ $\alpha+\frac{1}{\alpha}$의 값을 구할 수 있다.	50 %

일품 BOX

$x=0$이면 주어진 방정식은 $9=0$으로 모순이므로 $x\neq0$

$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2$

α는 실근이므로 (i)의 경우, 즉 $x+\frac{1}{x}=-\frac{10}{3}$을 만족시킨다.

$\alpha+\beta+\gamma=0$에서
$\alpha+\beta=-\gamma$,
$\beta+\gamma=-\alpha$,
$\gamma+\alpha=-\beta$

1등급 비밀노트

$ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0\ (a\neq0)$과 같이 x에 대한 내림차순 또는 오름차순으로 정리하였을 때 가운데 항을 중심으로 계수가 서로 대칭인 방정식을 상반방정식이라 하며 다음과 같은 방법으로 푼다.

(1) 짝수차 상반방정식의 풀이
- (i) 양변을 x^2으로 나눈다.
- (ii) $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2$임을 이용하여 좌변을 정리한 후 $x+\frac{1}{x}=t$로 치환하여 주어진 방정식을 t에 대한 방정식으로 나타낸다.
- (iii) t의 값을 구한 후 $t=x+\frac{1}{x}$을 대입하여 x의 값을 구한다.

(2) 홀수차 상반방정식의 풀이
- (i) $x=-1$일 때 주어진 방정식이 성립하므로 $(x+1)f(x)=0$ 꼴로 변형한다.
- (ii) $f(x)=0$은 짝수차 상반방정식이므로 (1)의 방법을 이용하여 푼다.

04 $x^4+3x^2+4=0$에서

$$(x^4+4x^2+4)-x^2=0, \qquad (x^2+2)^2-x^2=0$$
$$(x^2+x+2)(x^2-x+2)=0 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

ㄱ. ㉠에서 $x^2+x+2=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$$D_1=1^2-4\cdot1\cdot2=-7<0$$

이고, $x^2-x+2=0$의 판별식을 D_2라 하면

$$D_2=(-1)^2-4\cdot1\cdot2=-7<0$$

이므로 α는 항상 허수이다.

ㄴ. ㉠에서 $x^2+x+2=0$의 한 근을 α라 하면

$$\alpha^2+\alpha=-2$$

ㄷ. ㉠에서 $x^2-x+2=0$의 한 근을 α라 하면

$$\alpha^2-\alpha=-2$$

또 $x^2+x+2=0$의 한 근을 α라 하면 $\alpha^2+\alpha+2=0$에서 $\alpha^2=-\alpha-2$이므로

$$\alpha^2-\alpha=(-\alpha-2)-\alpha=-2\alpha-2$$

이때 ㄱ에서 α는 허수이므로 $-2\alpha-2$도 허수이다.

따라서 $\alpha^2-\alpha=2$를 만족시키는 α는 존재하지 않는다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ②

05 삼차방정식 $x^3-12x+8=0$의 세 근이 α, β, γ이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta+\gamma=0,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-12,\ \alpha\beta\gamma=-8$$

$$\begin{aligned}\therefore p+q&=(\alpha\beta^2+\beta\gamma^2+\gamma\alpha^2)+(\alpha^2\beta+\beta^2\gamma+\gamma^2\alpha)\\&=\alpha^2(\beta+\gamma)+\beta^2(\gamma+\alpha)+\gamma^2(\alpha+\beta)\\&=\alpha^2(-\alpha)+\beta^2(-\beta)+\gamma^2(-\gamma)\\&=-(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3)\\&=-\{(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha)\\&\qquad+3\alpha\beta\gamma\}\\&=-3\alpha\beta\gamma\\&=-3\cdot(-8)=24\end{aligned}$$

답 24

06 $x^3+px^2+11x+q=0$의 세 근을 $\alpha-1$, α, $\alpha+1$ (α는 정수)이라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(\alpha-1)+\alpha+(\alpha+1)=-p$

$\therefore 3\alpha=-p$ …… ㉠

$(\alpha-1)\cdot\alpha+\alpha(\alpha+1)+(\alpha-1)(\alpha+1)=11$

$\alpha^2=4$ $\quad\therefore \alpha=\pm2$ …… ㉡

$(\alpha-1)\cdot\alpha\cdot(\alpha+1)=-q$

$\therefore \alpha^3-\alpha=-q$ …… ㉢ ⋯ ❶

㉠, ㉢에 ㉡을 각각 대입하면

$p=\mp6$, $q=\mp6$ (복호동순) ⋯ ❷

$\therefore |p|+|q|=12$ ⋯ ❸

답 12

$\alpha=-2$이면 세 근은 -3, -2, -1
$\alpha=2$이면 세 근은 1, 2, 3

채점 기준	비율
❶ 근과 계수의 관계를 이용할 수 있다.	60 %
❷ p, q의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ $\|p\|+\|q\|$의 값을 구할 수 있다.	10 %

1등급 비밀노트

문제에서 연속하는 세 정수의 조건이 주어지면 세 수를
$\alpha-1$, α, $\alpha+1$
로 놓고 풀고, 연속하는 세 홀수 또는 짝수의 조건이 주어지면 세 수를
$\alpha-2$, α, $\alpha+2$
로 놓고 푼다.

07 삼차방정식 $x^3+ax^2+bx+c=0$의 세 근이 α, β, γ이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=-a$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=b$, $\alpha\beta\gamma=-c$

따라서

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}=-\frac{b}{c},$$

$$\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\beta}\cdot\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\gamma}\cdot\frac{1}{\alpha}=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha\beta\gamma}=\frac{a}{c},$$

$$\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta}\cdot\frac{1}{\gamma}=\frac{1}{\alpha\beta\gamma}=-\frac{1}{c}$$

이므로 $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$, $\frac{1}{\gamma}$을 세 근으로 하고 x^3의 계수가 1인 삼차방정식은

$$x^3-\left(-\frac{b}{c}\right)x^2+\frac{a}{c}x-\left(-\frac{1}{c}\right)=0$$

$$\therefore x^3+\frac{b}{c}x^2+\frac{a}{c}x+\frac{1}{c}=0$$

이때 상수항이 1이어야 하므로 양변에 c를 곱하면 구하는 방정식은

$cx^3+bx^2+ax+1=0$

답 $cx^3+bx^2+ax+1=0$

1등급 비밀노트

삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ $(ad\neq0)$의 세 근이 α, β, γ이면 $dx^3+cx^2+bx+a=0$의 세 근은 $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$, $\frac{1}{\gamma}$이다.

08 $P(x)-Q(x)=x^3-8x^2+x+4a+2=0$의 한 근이 순허수이므로 한 근을 ki ($k\neq0$인 실수)라 하면 계수가 모두 실수이므로 $-ki$도 근이다.
나머지 한 근을 α라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+ki+(-ki)=8$

$\therefore \alpha=8$

또 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$8\cdot ki+ki\cdot(-ki)+(-ki)\cdot8=1$

$\therefore k^2=1$ …… ㉠

$8\cdot ki\cdot(-ki)=-4a-2$

$\therefore 8k^2=-4a-2$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $\quad -4a-2=8 \quad \therefore a=-\frac{5}{2}$

따라서 구하는 합은 $\quad 8+\left(-\frac{5}{2}\right)=\frac{11}{2}$

답 $\frac{11}{2}$

$k^2=1$에서 $k=\pm1$이므로 두 허근은 i, $-i$이다.

09 조건 (나), (다)에서 구하는 삼차방정식의 한 근이 $1+2\sqrt{2}$이고, 계수가 모두 유리수이므로 $1-2\sqrt{2}$도 근이다. ⋯ ❶

즉 세 근이 $\frac{1}{2}$, $1+2\sqrt{2}$, $1-2\sqrt{2}$이므로

$$\frac{1}{2}+(1+2\sqrt{2})+(1-2\sqrt{2})=\frac{5}{2},$$

$$\frac{1}{2}(1+2\sqrt{2})+(1+2\sqrt{2})(1-2\sqrt{2})+(1-2\sqrt{2})\cdot\frac{1}{2}=-6,$$

$$\frac{1}{2}(1+2\sqrt{2})(1-2\sqrt{2})=-\frac{7}{2}$$ ⋯ ❷

따라서 $\frac{1}{2}$, $1+2\sqrt{2}$, $1-2\sqrt{2}$를 근으로 하고 x^3의 계수가 2인 삼차방정식은

$$2\left(x^3-\frac{5}{2}x^2-6x+\frac{7}{2}\right)=0$$

$\therefore 2x^3-5x^2-12x+7=0$ ⋯ ❸

답 $2x^3-5x^2-12x+7=0$

채점 기준	비율
❶ 나머지 한 근을 구할 수 있다.	20 %
❷ 세 근의 합, 두 근끼리의 곱의 합, 세 근의 곱을 구할 수 있다.	50 %
❸ 삼차방정식을 구할 수 있다.	30 %

10 삼차방정식 $x^3+nx^2+n^2x-p=0$의 한 근이 $a+\sqrt{2}i$이고 계수가 모두 실수이므로 $a-\sqrt{2}i$도 근이다.
나머지 한 근을 α라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+(a+\sqrt{2}i)+(a-\sqrt{2}i)=-n$ …… ㉠

$\alpha(a+\sqrt{2}i)+(a+\sqrt{2}i)(a-\sqrt{2}i)+(a-\sqrt{2}i)\cdot\alpha=n^2$ …… ㉡

$\alpha(a+\sqrt{2}i)(a-\sqrt{2}i)=p$ …… ㉢

㉢에서 $\alpha(a^2+2)=p$

이때 p는 소수이고 α, a는 정수이므로

$\alpha=1,\ a^2+2=p$ …… ㉣

㉠, ㉡에 $\alpha=1$을 각각 대입하여 정리하면

$2a+1=-n,\ a^2+2a+2=n^2$

$n=-2a-1$이므로 이것을 $a^2+2a+2=n^2$에 대입하면

$a^2+2a+2=(-2a-1)^2$

$3a^2+2a-1=0,\quad (a+1)(3a-1)=0$

$\therefore a=-1$ 또는 $a=\frac{1}{3}$

그런데 a는 정수이므로 $a=-1$

㉣에 $a=-1$을 대입하면 $p=3$ 답 ②

㉠에서 $\alpha=-2a-n$이고 a는 정수, n은 자연수이므로 α는 정수이다.

$a^2\geq 0$이므로 $a^2+2\geq 2$ 따라서 $\alpha=p$, $a^2+2=1$인 경우는 성립하지 않는다.

11 $\alpha=p+qi$, $\beta=r+si$ (p, q, r, s는 실수)라 하면 조건 (가)에 의하여

$\alpha+\overline{\alpha}=(p+qi)+(p-qi)=2p=4$

$\therefore p=2$

$\beta-\overline{\beta}=(r+si)-(r-si)=2si=4i$

$\therefore s=2$

조건 (나)에 의하여 $\beta=2\alpha$이므로

$r+2i=2(2+qi)\quad \therefore r+2i=4+2qi$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여 $r=4,\ q=1$

즉 $\alpha=2+i$, $\beta=4+2i$이고 주어진 사차방정식의 계수가 모두 실수이므로 $\overline{\alpha}=2-i$, $\overline{\beta}=4-2i$도 근이다.

α, $\overline{\alpha}$, β, $\overline{\beta}$를 네 근으로 하고 x^4의 계수가 1인 사차방정식은

$(x-2-i)(x-2+i)(x-4-2i)(x-4+2i)=0$

이므로

$x^4+ax^3+bx^2+cx+d$

$=(x-2-i)(x-2+i)(x-4-2i)(x-4+2i)$

양변에 $x=1$을 대입하면

$1+a+b+c+d$

$=(-1-i)(-1+i)(-3-2i)(-3+2i)$

$=(1-i^2)(9-4i^2)$

$=2\cdot 13=26$

$\therefore a+b+c+d=25$ 답 25

12 사차방정식 $x^4+ax^2+b=0$의 한 근이 $p+qi$이고, 계수가 모두 실수이므로 $p-qi$도 근이다.

이때 주어진 방정식의 한 근을 α라 하면

$\alpha^4+a\alpha^2+b=(-\alpha)^4+a(-\alpha)^2+b=0$

이므로 $-\alpha$도 근이다.

따라서 주어진 방정식의 근은

$p+qi,\ p-qi,\ -p+qi,\ -p-qi$

이므로 모든 근의 곱은

$(p+qi)(p-qi)(-p+qi)(-p-qi)$

$=(p^2+q^2)(p^2+q^2)$

$=(p^2+q^2)^2$ 답 ④

$-(p-qi)=-p+qi$, $-(p+qi)=-p-qi$

13 $\omega=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$에서 $2\omega+1=\sqrt{3}i$

양변을 제곱하면

$4\omega^2+4\omega+1=-3$

$4\omega^2+4\omega+4=0\quad \therefore \omega^2+\omega+1=0$

양변에 $\omega-1$을 곱하면

$(\omega-1)(\omega^2+\omega+1)=0\quad \therefore \omega^3-1=0$

ㄱ. $\omega^3=1$, $\omega^2=-\omega-1$이므로 주어진 방정식에 $x=\omega$를 대입하면

$\omega^4+a\omega^3-b\omega^2+a\omega+1=0$

$\omega+a-b(-\omega-1)+a\omega+1=0$

$(a+b+1)+(a+b+1)\omega=0$

$(a+b+1)(1+\omega)=0$

이때 $1+\omega\neq 0$이므로 $a+b+1=0$

$\therefore a+b=-1$

ㄴ. $\omega^2=-\omega-1=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}=\overline{\omega}$

ω가 한 근이고 주어진 방정식의 계수가 모두 실수이므로 ω의 켤레복소수 $\overline{\omega}$, 즉 ω^2도 방정식의 한 근이다.

ㄷ. 다항식 $x^4+ax^3-bx^2+ax+1$은 x^2+x+1을 인수로 갖고 상수항이 1이므로

$x^4+ax^3-bx^2+ax+1$

$=(x^2+x+1)(x^2+cx+1)$ (c는 실수)

이라 하자.

이때 주어진 방정식이 중근인 실근을 갖기 위해서는 방정식 $x^2+cx+1=0$이 중근인 실근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=c^2-4=0$

$\therefore c=-2$ 또는 $c=2$

따라서 $c=-2$, $c=2$일 때 실수 a, b의 순서쌍 $(a,\ b)$는 각각 1개씩이므로 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는 2이다.

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

$c=-2$일 때 주어진 방정식은 $x^4-x^3-x+1=0$ 이므로 $a=-1$, $b=0$ 또 $c=2$일 때 주어진 방정식은 $x^4+3x^3+4x^2+3x+1=0$ 이므로 $a=3$, $b=-4$

14 방정식 $x^2+x+1=0$의 한 근이 ω이므로

$\omega^2+\omega+1=0$

$(\omega-1)(\omega^2+\omega+1)=0$

$\omega^3-1=0\quad \therefore \omega^3=1$

ㄱ. $x^2-x+1=0$에 $x=\omega^3$, 즉 $x=1$을 대입하면

$1^2-1+1\neq 0$

ㄴ. $x^2-x+1=0$에 $x=-\omega^2$을 대입하면

$\omega^4+\omega^2+1=\omega+\omega^2+1=0$

ㄷ. $\omega^3=1$에서 $\frac{1}{\omega}=\omega^2$

$x^2-x+1=0$에 $x=\omega^2$을 대입하면

$\omega^4-\omega^2+1=\omega-(-\omega-1)+1$

$=2\omega+2\neq 0$

이상에서 근이 될 수 있는 것은 ㄴ뿐이다. 답 ②

$\omega^2+\omega+1=0$에서 $\omega^2=-\omega-1$

15 방정식 $x^2-x+1=0$의 한 근이 ω이므로

$\omega^2-\omega+1=0$

$(\omega+1)(\omega^2-\omega+1)=0$

$\omega^3+1=0 \qquad \therefore \omega^3=-1$ ⋯ ❶

한편 $\omega^n=\omega^{2n+1}$에서 $\omega^{2n+1}=\omega^n\cdot\omega^{n+1}$이므로

$\omega^{n+1}=1$ ⋯ ❷

$\omega^3=-1$에서 $\omega^6=1$이므로 $n+1$은 6의 배수, 즉

$n+1=6,\ 12,\ 18,\ \cdots$

따라서 두 자리 자연수 n의 최솟값은 11이다. ⋯ ❸

$n+1=12$일 때이다.

답 11

채점 기준	비율
❶ ω^3의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷ ω^{n+1}의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ 두 자리 자연수 n의 최솟값을 구할 수 있다.	40 %

16 $x^3-1=0$에서 $\quad (x-1)(x^2+x+1)=0$

방정식 $x^3-1=0$의 한 허근 ω는 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 근이므로

$\omega^3=1,\ \omega^2+\omega+1=0$

$\therefore \omega^{4n}+(\omega+1)^{4n}+1$

$=(\omega^4)^n+(-\omega^2)^{4n}+1$

$=\omega^n+(\omega^8)^n+1$

$=\omega^n+\omega^{2n}+1$

$=\omega^{2n}+\omega^n+1$

$(-\omega^2)^{4n}=\{(-\omega^2)^4\}^n$
$=(\omega^8)^n$

$\omega^8=(\omega^3)^2\cdot\omega^2=\omega^2$

(i) $n=3k\ (k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$일 때,

$\omega^{2n}+\omega^n+1=\omega^{6k}+\omega^{3k}+1=3$

(ii) $n=3k+1\ (k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$일 때,

$\omega^{2n}+\omega^n+1=\omega^{6k+2}+\omega^{3k+1}+1$

$=\omega^2+\omega+1=0$

(iii) $n=3k+2\ (k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$일 때,

$\omega^{2n}+\omega^n+1=\omega^{6k+4}+\omega^{3k+2}+1$

$=\omega^4+\omega^2+1$

$=\omega+\omega^2+1=0$

이상에서 $\omega^{4n}+(\omega+1)^{4n}+1=0$을 만족시키는 자연수 n은 $n=3k+1$ 또는 $n=3k+2\ (k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ 꼴이므로 30 이하의 자연수 n의 개수는

30−(30 이하의 3의 배수의 개수)

$=30-10=20$

답 20

17 주어진 두 연립방정식을 동시에 만족시키는 해가 존재하므로 그 해는 연립방정식

$$\begin{cases} x+y=5 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-y^2=15 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

의 해와 같다. ⋯ ❶

㉡에서 $\quad (x+y)(x-y)=15$

$5(x-y)=15$

$\therefore x-y=3 \qquad \cdots\cdots ㉢$

㉠, ㉢을 연립하여 풀면

$x=4,\ y=1$ ⋯ ❷

$x^2+ay=1,\ bx-y=4$에 $x=4,\ y=1$을 대입하여 풀면

$a=-15,\ b=\frac{5}{4}$ ⋯ ❸

$\therefore a+b=-\frac{55}{4}$ ⋯ ❹

답 $-\frac{55}{4}$

채점 기준	비율
❶ 연립방정식을 세울 수 있다.	30 %
❷ $x,\ y$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ $a,\ b$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❹ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	10 %

18 $$\begin{cases} -x+y=a & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x^2+y^2=6 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $y=x+a$이므로 이것을 ㉡에 대입하면

$2x^2+(x+a)^2=6$

$3x^2+2ax+a^2-6=0 \qquad \cdots\cdots ㉢$

주어진 연립방정식이 오직 한 쌍의 해를 가지려면 방정식 ㉢이 중근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=a^2-3(a^2-6)=0$

$a^2=9$

$\therefore a=3\ (\because a>0)$

답 ④

19 (i) $x\ge y$일 때,

$<2x,\ 2y>=2x,\ <x,\ y>=x$

이므로 주어진 연립방정식은

$$\begin{cases} x+y^2=2x & \cdots\cdots ㉠ \\ x-y+5=x & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉡에서 $\quad y=5$

㉠에 $y=5$를 대입하면

$x+25=2x \qquad \therefore x=25$

(ii) $x<y$일 때,

$<2x,\ 2y>=-2y,\ <x,\ y>=-y$

이므로 주어진 연립방정식은

$$\begin{cases} x+y^2=-2y & \cdots\cdots ㉢ \\ x-y+5=-y & \cdots\cdots ㉣ \end{cases}$$

㉣에서 $\quad x=-5$

㉢에 $x=-5$를 대입하여 정리하면

$y^2+2y-5=0$

$\therefore y=-1\pm\sqrt{6}$

(i), (ii)에서 정수인 해는 $x=25,\ y=5$이므로

$\alpha=25,\ \beta=5$

$\therefore \alpha+\beta=30$

답 30

ⓒ좋은책신사고

20 $|x^2-xy-2y^2|+|x-y-1|=0$에서 x, y는 정수, 즉 실수이므로

$$\begin{cases} x^2-xy-2y^2=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x-y-1=0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $(x-2y)(x+y)=0$이므로

$x=2y$ 또는 $x=-y$

(i) $x=2y$일 때,

이것을 ㉡에 대입하면

$y-1=0 \qquad \therefore y=1$

따라서 $x=2$, $y=1$이므로 $\qquad xy=2$

(ii) $x=-y$일 때,

이것을 ㉡에 대입하면

$-2y-1=0 \qquad \therefore y=-\frac{1}{2}$

따라서 $x=\frac{1}{2}$, $y=-\frac{1}{2}$이므로 x, y가 정수라는 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $\qquad xy=2$

답 ③

21 직육면체 모양의 상자의 가로의 길이가 $(14-2a)$ cm, 세로의 길이가 $(10-2a)$ cm이므로

$a(14-2a)(10-2a)=96\ (0<a<5)$ ··· ❶

$a(a-7)(a-5)=24$

$a^3-12a^2+35a-24=0$

$(a-1)(a-3)(a-8)=0$

$\therefore a=1$ 또는 $a=3\ (\because 0<a<5)$ ··· ❷

따라서 $a=3$일 때 상자의 겉넓이는 최소가 되므로 겉넓이의 최솟값은

$140-4\cdot3^2=104\ (\text{cm}^2)$ ··· ❸

답 $104\ \text{cm}^2$

채점 기준	비율
❶ 부피를 이용하여 방정식을 세울 수 있다.	30 %
❷ a의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ 겉넓이의 최솟값을 구할 수 있다.	30 %

22 반구의 반지름의 길이를 r라 하면 원뿔의 높이는 $r+1$이고, 아이스크림콘의 부피가 30π이므로

$\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi r^3+\frac{1}{3}\pi r^2(r+1)=30\pi$

$3r^3+r^2-90=0$

$(r-3)(3r^2+10r+30)=0$

이때 $3r^2+10r+30=0$은 실근을 갖지 않으므로

$r=3$

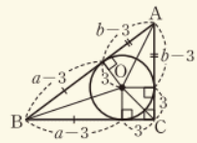
따라서 아이스크림콘의 겉넓이는

$\frac{1}{2}\cdot4\pi\cdot3^2+\pi\cdot3\cdot5=18\pi+15\pi$

$=33\pi$

답 33π

일품 BOX



직각삼각형 ABC의 세 변의 길이는 9, 12, 15이다.

$a>0$이고 $14-2a>0$, $10-2a>0$이므로 $0<a<5$

(겉넓이) $=14\cdot10-4a^2\ (\text{cm}^2)$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

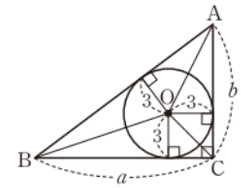
$\frac{D}{4}=5^2-3\cdot30$

$=-65<0$

이므로 서로 다른 두 허근을 갖는다.

원뿔의 밑면의 반지름의 길이가 3, 높이가 4이므로 모선의 길이는 $\sqrt{3^2+4^2}=5$

23 $\overline{BC}=a$, $\overline{AC}=b$라 하면



$\overline{AB}=(a-3)+(b-3)$

$=a+b-6$

직각삼각형 ABC의 둘레의 길이가 36이므로

$a+b+(a+b-6)=36$

$\therefore a+b=21 \qquad \cdots\cdots ㉠$

내접하는 원의 중심을 O라 하면 직각삼각형 ABC의 넓이는 세 삼각형 OAB, OBC, OCA의 넓이의 합과 같으므로

$\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}\cdot(a+b-6)\cdot3+\frac{1}{2}\cdot a\cdot3+\frac{1}{2}\cdot b\cdot3$

$\therefore ab=6(a+b-3)$

위의 식에 ㉠을 대입하면 $\qquad ab=108$

즉 a, b는 이차방정식 $x^2-21x+108=0$의 두 근이므로

$(x-9)(x-12)=0 \qquad \therefore x=9$ 또는 $x=12$

따라서 직각삼각형 ABC의 세 변 중 길이가 가장 짧은 변의 길이는 9이다.

답 9

사고력 강화를 위한 수능형 문제

본책 60쪽

01 사차방정식 $2x^4+6x^3-x^2-6x-1=0$의 네 근이 α, β, γ, δ이므로

$2x^4+6x^3-x^2-6x-1$

$=2(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)$

양변에 $x=2$를 대입하면

$2(2-\alpha)(2-\beta)(2-\gamma)(2-\delta)$

$=2\cdot2^4+6\cdot2^3-2^2-6\cdot2-1=63$

답 63

02 방정식 $x^3-ax^2+bx-c=0$의 세 근이 α, β, γ이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=a$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=b$, $\alpha\beta\gamma=c$

$f(\alpha)=0$, $f(\beta)=0$, $f(\gamma)=0$이므로

ㄱ. 방정식 $f(2x)=0$에서

$2x=\alpha$ 또는 $2x=\beta$ 또는 $2x=\gamma$

이므로 $\qquad x=\frac{\alpha}{2}$ 또는 $x=\frac{\beta}{2}$ 또는 $x=\frac{\gamma}{2}$

ㄴ. 방정식 $f\left(\frac{x}{2}\right)=0$에서

$\frac{x}{2}=\alpha$ 또는 $\frac{x}{2}=\beta$ 또는 $\frac{x}{2}=\gamma$

이므로 $\qquad x=2\alpha$ 또는 $x=2\beta$ 또는 $x=2\gamma$

방정식 $f\left(\frac{x}{2}\right)=0$의 세 근의 합이 2이므로

$2(\alpha+\beta+\gamma)=2, \qquad 2a=2 \qquad \therefore a=1$

ㄷ. $a=1$이므로 $\qquad f(1)=1-a+b-c=0$

$\therefore a-b+c=1 \qquad \cdots\cdots ㉠$

방정식 $f(2x-1)=0$에서

$2x-1=\alpha$ 또는 $2x-1=\beta$ 또는 $2x-1=\gamma$

이므로 $x=\frac{\alpha+1}{2}$ 또는 $x=\frac{\beta+1}{2}$ 또는 $x=\frac{\gamma+1}{2}$

따라서 방정식 $f(2x-1)=0$의 세 근의 곱은

$$\frac{(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)}{8}$$

$$=\frac{\alpha\beta\gamma+\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha+\beta+\gamma+1}{8}$$

$$=\frac{c+b+a+1}{8}=\frac{b+1}{4}\ (\because ㉠)$$

이므로 $\frac{b+1}{4}=0$ $\quad\therefore b=-1$

이상에서 옳은 것은 ㄴ뿐이다. 답 ②

03 $f(\alpha)=f(\beta)=f(\gamma)=-9$에서

$f(\alpha)+9=f(\beta)+9=f(\gamma)+9=0$

이므로 α, β, γ는 삼차방정식 $f(x)+9=0$, 즉 $x^3-6x^2+3x+10=0$의 세 근이다.

이때 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=6$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=3$

$\therefore \alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$

$=6^2-2\cdot3=30$ 답 30

04 $x^3=1$, 즉 $x^3-1=0$에서

$(x-1)(x^2+x+1)=0$

방정식 $x^3=1$의 한 허근 ω는 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 근이므로

$\omega^3=1$, $\omega^2+\omega+1=0$

따라서

$f(1)=f(4)=f(7)=f(10)=f(13)$

$=\frac{\omega}{1+\omega^2}=\frac{\omega}{-\omega}=-1$,

$f(2)=f(5)=f(8)=f(11)$

$=\frac{\omega^2}{1+\omega^4}=\frac{\omega^2}{1+\omega}=\frac{\omega^2}{-\omega^2}=-1$,

$f(3)=f(6)=f(9)=f(12)$

$=\frac{\omega^3}{1+\omega^6}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$

이므로

$f(1)-f(2)+f(3)-f(4)+f(5)-f(6)=0$

$\therefore$ (주어진 식)$=f(13)=-1$ 답 ①

참고 ω^n과 관련된 문제는 n을 3으로 나누었을 때의 나머지가 같은 자연수끼리 분류하여 생각한다.

05 $x^3=1$, 즉 $x^3-1=0$에서

$(x-1)(x^2+x+1)=0$

방정식 $x^3=1$의 한 허근 ω는 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 근이므로

$\omega^3=1$, $\omega^2+\omega+1=0$

일품 BOX

$a_1=1\neq0$, $a_2=1+\omega\neq0$

$n=3k$ (k는 자연수) 꼴일 때, $a_n=0$

$a-b+c=1$에서 $a+c=b+1$ $\therefore \frac{c+b+a+1}{8}=\frac{2(b+1)}{8}=\frac{b+1}{4}$

$f(3k+1)$ 꼴 ($k=0, 1, 2, \cdots$)

$f(3k+2)$ 꼴 ($k=0, 1, 2, \cdots$)

$f(3k)$ 꼴 ($k=1, 2, \cdots$)

$\frac{1}{a}$은 A펌프를 이용하여 한 시간 동안 빼는 물의 양이고, $\frac{1}{b}$은 B펌프를 이용하여 한 시간 동안 빼는 물의 양이다.

$a>0$, $b>0$이고 $a=b-10$이므로 $b-10>0$ $\therefore b>10$

ㄱ. $a_3=1+\omega+\omega^2=0$이므로 $a_n=0$을 만족시키는 자연수 n의 최솟값은 3이다.

ㄴ. $a_6=(1+\omega+\omega^2)+(\omega^3+\omega^4+\omega^5)=0$이므로 $a_n=0$을 만족시키는 짝수 n이 존재한다.

ㄷ. $a_{11}=a_9+\omega^9+\omega^{10}=1+\omega$ ($\because a_9=0$)

이때 $a_{11}{}^2=(1+\omega)^2=(-\omega^2)^2=\omega^4=\omega$이므로 $a_{11}{}^2$은 $x^2+x+1=0$의 한 허근이다.

방정식 $x^2+x+1=0$의 근은

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$$

따라서 $a_{11}{}^2$의 실수부분은 $-\frac{1}{2}$이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ③

06 주어진 사차방정식의 네 근이 $\pm\sqrt{7}$, $\pm\sqrt{3}$이고 x^4의 계수가 1이므로 사차방정식은

$(x+\sqrt{7})(x-\sqrt{7})(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})=0$

$(x^2-7)(x^2-3)=0$

$\therefore x^4-10x^2+21=0$ …… ㉠

$(x+a)(x+b)(x-a)(x-b)+c=0$에서

$(x^2-a^2)(x^2-b^2)+c=0$

$\therefore x^4-(a^2+b^2)x^2+a^2b^2+c=0$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$\begin{cases} a^2+b^2=10 & \cdots\cdots ㉢ \\ a^2b^2+c=21 & \cdots\cdots ㉣ \end{cases}$

이때 a, b는 자연수이므로 ㉢에서

$a=1$, $b=3$ 또는 $a=3$, $b=1$

이것을 ㉣에 대입하면 $c=12$

$\therefore a+b+c=16$ 답 16

07 저수지에 물이 가득 찼을 때의 물의 양을 1, A펌프만을 이용하여 저수지의 물을 모두 뺄 때 걸리는 시간을 a시간, B펌프만을 이용하여 저수지의 물을 모두 뺄 때 걸리는 시간을 b시간이라 하자.

A펌프를 이용하여 저수지의 물을 모두 빼면 B펌프를 이용하여 빼는 것보다 10시간이 덜 걸리므로

$a=b-10$ …… ㉠

또 A펌프, B펌프를 동시에 이용하여 저수지의 물을 12시간 동안 뺀 후 B펌프만을 이용하여 12시간 동안 빼면 저수지의 물을 모두 뺄 수 있으므로

$12\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+12\cdot\frac{1}{b}=1$

$\therefore 12b+24a=ab$ …… ㉡

㉡에 ㉠을 대입하면

$12b+24(b-10)=(b-10)b$

$b^2-46b+240=0$

$(b-6)(b-40)=0$

$\therefore b=40$ ($\because b>10$) 답 ③

ⓒ좋은책신사고

만점 도전을 위한 실전 마무리 문제

본책 61~64쪽

01 전략 주어진 복소수를 $a+bi$ 꼴로 나타낸 후, 복소수가 서로 같을 조건을 이용한다.

풀이 $z=(2+i)x+(1-2i)y-2i$라 하면

$z=(2x+y)+(x-2y-2)i$

$z^2=-9$에서 $\quad z=3i$ 또는 $z=-3i$

(i) $z=3i$일 때,

$(2x+y)+(x-2y-2)i=3i$이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$2x+y=0,\ x-2y-2=3$

$\therefore x=1,\ y=-2$

(ii) $z=-3i$일 때,

$(2x+y)+(x-2y-2)i=-3i$이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$2x+y=0,\ x-2y-2=-3$

$\therefore x=-\frac{1}{5},\ y=\frac{2}{5}$

그런데 이것은 x, y가 정수라는 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $x=1,\ y=-2$이므로

$x-y=3$

답 ③

02 전략 분모의 켤레복소수를 분모, 분자에 각각 곱하여 복소수 a를 간단히 나타낸다.

풀이 $a=\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i}=\frac{(\sqrt{3}+i)^2}{(\sqrt{3}-i)(\sqrt{3}+i)}=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$이므로

$2a-1=\sqrt{3}i$

위의 식의 양변을 제곱하면

$4a^2-4a+1=-3 \qquad \therefore a^2-a+1=0$

$\therefore \frac{a^3-a^2+a-3}{a^2-a+3}=\frac{a(a^2-a+1)-3}{a^2-a+3}$

$=-\frac{3}{2}$

답 ①

03 전략 복소수의 성질을 이용한다.

풀이 ㄱ. $\alpha=1,\ \beta=i$이면

$\alpha^2+\beta^2=1+i^2=1+(-1)=0$

이지만 $\alpha\neq0,\ \beta\neq0$이다.

ㄴ. $\alpha\neq0$이면 $\beta=\frac{0}{\alpha}=0$, $\beta\neq0$이면 $\alpha=\frac{0}{\beta}=0$이므로

$\alpha\beta=0$이면 $\alpha=0$ 또는 $\beta=0$이다.

ㄷ. $\alpha=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면

$\beta=\overline{\alpha}=a-bi$

$\alpha\beta=(a+bi)(a-bi)=0$에서

$a^2+b^2=0$

이때 a, b는 실수이므로 $\quad a=b=0$

$\therefore \alpha=0$

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

일품 BOX

주어진 복소수를 직접 제곱하면 계산이 복잡하므로 주어진 복소수를 z로 놓는다.

$a^2-a+1=0$에서 $a^2-a=-1$

04 전략 복소수가 실수이면 복소수의 허수부분이 0임을 이용한다.

풀이 $(2+i)z=(2+i)(a+bi)$

$=(2a-b)+(a+2b)i$

이므로

$\overline{(2+i)z}=(2a-b)-(a+2b)i$

$\overline{(2+i)z}$가 실수이므로

$a+2b=0 \qquad \therefore b=-\frac{1}{2}a$

따라서 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$가 나타내는 도형은 ②와 같이 원점을 지나고 기울기가 $-\frac{1}{2}$인 직선이다.

답 ②

05 전략 음수의 제곱근의 성질을 이용한다.

풀이 $\sqrt{a}\sqrt{-b}=-\sqrt{-ab}$에서

$a<0,\ -b<0 \qquad \therefore a<0,\ b>0$

$\frac{\sqrt{-c}}{\sqrt{d}}=-\sqrt{-\frac{c}{d}}$에서

$-c>0,\ d<0 \qquad \therefore c<0,\ d<0$

따라서 a, b, c, d 중 음수인 것은 a, c, d의 3개이다.

답 ④

06 전략 이차방정식이 실근을 가지려면 판별식을 D라 할 때, $D\geq0$이어야 함을 이용한다.

풀이 이차방정식 $x^2-4x+a^2=0$이 실근을 가지려면 이 이차방정식의 판별식을 D라 할 때

$\frac{D}{4}=(-2)^2-a^2\geq0 \qquad \therefore a^2\leq4$

a는 정수이므로

$a^2=0$ 또는 $a^2=1$ 또는 $a^2=4$

(i) $a^2=0$, 즉 $a=0$일 때,

$x^2-4x=0, \qquad x(x-4)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=4$

(ii) $a^2=1$, 즉 $a=\pm1$일 때,

$x^2-4x+1=0 \qquad \therefore x=2\pm\sqrt{3}$

그런데 $x=2\pm\sqrt{3}$은 유리수가 아니다.

(iii) $a^2=4$, 즉 $a=\pm2$일 때,

$x^2-4x+4=0, \qquad (x-2)^2=0$

$\therefore x=2$

이상에서 정수 a는 -2, 0, 2의 3개이다.

답 ③

07 전략 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 $\frac{8}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}=7$을 a에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=8,\ \alpha\beta=a$

α는 이차방정식의 근이므로

$\alpha^2-8\alpha+a=0 \qquad \therefore \alpha^2=8\alpha-a$

따라서

$$\frac{8}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}=\frac{8\beta+\alpha^2}{\alpha\beta}=\frac{8\beta+8\alpha-a}{\alpha\beta}$$
$$=\frac{8(\alpha+\beta)-a}{\alpha\beta}=\frac{64-a}{a}$$

이므로 $\frac{64-a}{a}=7$

$64-a=7a \qquad \therefore a=8$ 답 ②

08 전략 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 $\alpha^3+\beta^3$, $(\alpha-\beta)^2$을 a, b에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-a,\ \alpha\beta=b$

즉

$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$
$=-a^3+3ab=4$ …… ㉠

$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$
$=a^2-4b=5$ …… ㉡

㉡에서 $b=\frac{a^2-5}{4}$이므로 이것을 ㉠에 대입하면

$-a^3+3a\cdot\frac{a^2-5}{4}=4, \qquad a^3+15a+16=0$

$\therefore (a+1)(a^2-a+16)=0$

이때 a는 실수이므로 $a=-1$

㉠에 $a=-1$을 대입하면

$1-3b=4 \qquad \therefore b=-1$

$\therefore a^2+b^2=(-1)^2+(-1)^2=2$ 답 ②

09 전략 계수가 실수인 이차방정식의 한 허근이 α이면 $\overline{\alpha}$도 근임을 이용한다.

풀이 계수가 실수인 이차방정식의 한 허근이 α이면 $\overline{\alpha}$도 근이므로 $\overline{\alpha}=\beta,\ \overline{\beta}=\alpha$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=4,\ \alpha\beta=6$

$\therefore \overline{\alpha}\beta+\alpha\overline{\beta}=\beta\beta+\alpha\alpha=\alpha^2+\beta^2$
$=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$
$=4^2-2\cdot6=4$ 답 ②

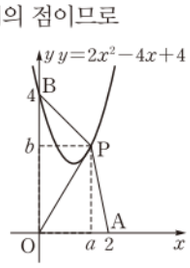
10 전략 두 삼각형 BOP, POA의 넓이를 각각 a, b에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 이차함수 $y=2x^2-4x+4$의 그래프가 y축과 만나는 점의 좌표는 $(0,\ 4)$이므로

$B(0,\ 4)$

점 $P(a,\ b)$는 이차함수의 그래프 위의 점이므로

$b=2a^2-4a+4$



삼각형 BOP의 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot4\cdot|a|=2|a|$

삼각형 POA의 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot2\cdot|b|=b\ (\because b>0)$

이때 두 삼각형 BOP, POA의 넓이가 같으므로

$2|a|=b$, 즉 $2|a|=2a^2-4a+4$

$\therefore |a|=a^2-2a+2$

(i) $a\ge0$일 때,

$a=a^2-2a+2, \qquad a^2-3a+2=0$

$(a-1)(a-2)=0 \qquad \therefore a=1$ 또는 $a=2$

$\therefore P(1,\ 2)$ 또는 $P(2,\ 4)$

(ii) $a<0$일 때,

$-a=a^2-2a+2, \qquad a^2-a+2=0$

이때 이차방정식을 만족시키는 실수 a는 존재하지 않는다.

(i), (ii)에서 $a+b$의 최댓값은 $a=2,\ b=4$일 때 6이다. 답 ④

11 전략 주어진 이차함수의 식을 $f(x)=(x-k)^2+l$ 꼴로 변형하여 최솟값을 구한다.

풀이 $f(x)=x^2+4ax+2a^2+8a$
$=(x+2a)^2-2a^2+8a$

이므로 $f(x)$는 $x=-2a$일 때 최솟값 $-2a^2+8a$를 갖는다. 즉

$g(a)=-2a^2+8a=-2(a-2)^2+8$

이므로 $g(a)$는 $a=2$일 때 최댓값 8을 갖는다.

따라서 $p=2,\ q=8$이므로 $p+q=10$ 답 ③

12 전략 주어진 식에 x 대신 $1-x$를 대입한 후 $f(x)$를 구한다.

풀이 $2f(x)+f(1-x)=3x^2$ …… ㉠

㉠에 x 대신 $1-x$를 대입하면

$2f(1-x)+f(x)=3(1-x)^2$ …… ㉡

㉠×2−㉡을 하면

$3f(x)=3x^2+6x-3$

$\therefore f(x)=x^2+2x-1=(x+1)^2-2$

따라서 $-4\le x\le1$에서 $f(x)$는 $x=-4$일 때 최댓값 7을 갖고, $x=-1$일 때 최솟값 -2를 가지므로 구하는 합은 $7+(-2)=5$ 답 ⑤

13 전략 방정식 $h(x)=0$의 한 근이 α이면 $h(\alpha)=0$이고 다항식 $h(x)$는 $x-\alpha$를 인수로 가짐을 이용한다.

풀이 두 방정식 $f(x)+g(x)=0,\ f(x)g(x)=0$이 모두 1을 근으로 가지므로

$f(1)+g(1)=0,\ f(1)g(1)=0$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$f(1)=0,\ g(1)=0$

따라서 두 이차식 $f(x)$, $g(x)$는 각각 $x-1$을 인수로 가지므로

$f(x)=(x-1)(x-p),$
$g(x)=(x-1)(x-q)\ (p\ne q)$

일품 BOX

$a^2-a+2=0$의 판별식을 D라 하면
$D=(-1)^2-4\cdot1\cdot2$
$=-7<0$
이므로 서로 다른 두 허근을 갖는다.

$|\alpha-\beta|=\sqrt{5}$이므로
$(\alpha-\beta)^2=|\alpha-\beta|^2$
$=5$

$a^2-a+16=0$의 판별식을 D라 하면
$D=(-1)^2-4\cdot16$
$=-63<0$
이므로 서로 다른 두 허근을 갖는다.

$g(1)=-f(1)$이므로
$f(1)g(1)=0$에서
$-\{f(1)\}^2=0$
$\therefore f(1)=0$
$\therefore g(1)=-f(1)=0$

$p=q$이면 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

ⓒ좋은책신사고

로 놓으면

$f(x)+g(x)=(x-1)(2x-p-q)$

$f(x)g(x)=(x-1)^2(x-p)(x-q)$

이때 방정식 $f(x)+g(x)=0$의 한 근이 3이므로

$2(6-p-q)=0$

$\therefore p+q=6$ …… ㉠

또 방정식 $f(x)g(x)=0$의 한 근이 -1이므로

(i) $p=-1$일 때, ㉠에서 $q=7$

(ii) $q=-1$일 때, ㉠에서 $p=7$

(i), (ii)에서 $k=7$

답 ④

14 전략 삼차방정식의 근과 계수의 관계를 이용한다.

풀이 α, β, γ는 삼차방정식 $x^3-1=0$의 세 근이므로

$\alpha^3=\beta^3=\gamma^3=1$

이고 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=0$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=0$, $\alpha\beta\gamma=1$

$$\therefore \frac{1}{\alpha^{1001}}+\frac{1}{\beta^{1001}}+\frac{1}{\gamma^{1001}}$$

$$=\frac{1}{(\alpha^3)^{333}\alpha^2}+\frac{1}{(\beta^3)^{333}\beta^2}+\frac{1}{(\gamma^3)^{333}\gamma^2}$$

$$=\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2}$$

$$=\frac{\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2}{(\alpha\beta\gamma)^2}$$

$$=\frac{(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^2-2\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)}{(\alpha\beta\gamma)^2}$$

$=0$

답 ③

$(a+b+c)^2$
$=a^2+b^2+c^2$
$+2(ab+bc+ca)$

15 전략 방정식 $f(x)=0$의 한 근이 α이면 방정식 $f\left(\frac{x+1}{2}\right)=0$의 한 근은 $2\alpha-1$임을 이용한다.

풀이 $x^3-1=0$에서

$(x-1)(x^2+x+1)=0$

이므로 ω는 방정식 $x^2+x+1=0$의 근이고 다른 한 근은 ω의 켤레복소수인 $\bar{\omega}$이다.

이때 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\omega+\bar{\omega}=-1$ …… ㉠

한편 $(x+1)^3=8$에서 양변을 8로 나누면 $\left(\frac{x+1}{2}\right)^3=1$

이고, $x^3=1$의 세 근이 1, ω, $\bar{\omega}$이므로

$\frac{x+1}{2}=1$ 또는 $\frac{x+1}{2}=\omega$ 또는 $\frac{x+1}{2}=\bar{\omega}$

따라서 방정식 $\left(\frac{x+1}{2}\right)^3=1$의 세 근은

$x=1$ 또는 $x=2\omega-1$ 또는

$x=2\bar{\omega}-1$

$=2(-1-\omega)-1$ ($\because$ ㉠)

$=-2\omega-3$

$\therefore a+b+c+d=2+(-1)+(-2)+(-3)$

$=-4$

답 ②

방정식 $f(x)=0$의 한 근이 α이면 방정식 $f(ax+b)=0$의 한 근은 $ax+b=\alpha$에서 $x=\frac{\alpha-b}{a}$이다.
(단, $a\neq0$)

16 전략 먼저 $xy+2x-y-2=0$을 인수분해하여 x, y의 값을 구한다.

풀이 $\begin{cases} x^2+y^2+3xy-2x-y+2=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ xy+2x-y-2=0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉡에서 $x(y+2)-(y+2)=0$

$(x-1)(y+2)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $y=-2$

(i) $x=1$일 때,

㉠에 $x=1$을 대입하면

$1+y^2+3y-2-y+2=0$

$y^2+2y+1=0$, $(y+1)^2=0$

$\therefore y=-1$

(ii) $y=-2$일 때,

㉠에 $y=-2$를 대입하면

$x^2+4-6x-2x+2+2=0$

$x^2-8x+8=0$ $\therefore x=4\pm2\sqrt{2}$

(i), (ii)에서 주어진 연립방정식의 해는

$\begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=4\pm2\sqrt{2} \\ y=-2 \end{cases}$

따라서 $x+y$의 최댓값은 $x=4+2\sqrt{2}$, $y=-2$일 때 $2+2\sqrt{2}$이다.

답 ④

17 전략 $|AB|=|A||B|$임을 이용하여 주어진 연립방정식을 푼다.

풀이 $|x^2-y^2|=8$에서 $|(x+y)(x-y)|=8$

$\therefore |x+y||x-y|=8$

이때 $|x+y|=2$이므로 $|x-y|=4$

$|x+y|=2$에서

$x+y=-2$ …… ㉠

또는 $x+y=2$ …… ㉡

$|x-y|=4$에서

$x-y=-4$ …… ㉢

또는 $x-y=4$ …… ㉣

㉠, ㉢을 연립하여 풀면 $x=-3$, $y=1$

㉠, ㉣을 연립하여 풀면 $x=1$, $y=-3$

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $x=-1$, $y=3$

㉡, ㉣을 연립하여 풀면 $x=3$, $y=-1$

따라서 $2x+y$의 최댓값은 $x=3$, $y=-1$일 때

$M=2\cdot3+(-1)=5$

이고, 최솟값은 $x=-3$, $y=1$일 때

$m=2\cdot(-3)+1=-5$

$\therefore M-m=10$

답 ⑤

18 전략 조건 (나)를 이용하여 복소수 z_n(n은 자연수)의 규칙을 찾는다.

풀이 조건 (나)에 의하여

$z_2=\frac{1}{1-z_1}$

$1-z_2=1-\dfrac{1}{1-z_1}=\dfrac{z_1}{z_1-1}$이므로

$z_3=\dfrac{1}{1-z_2}=\dfrac{z_1-1}{z_1}=1-\dfrac{1}{z_1}$

$1-z_3=1-\left(1-\dfrac{1}{z_1}\right)=\dfrac{1}{z_1}$이므로

$z_4=\dfrac{1}{1-z_3}=z_1$

$\vdots$

즉 $z_1=z_4=z_7=\cdots=z_{199}=3+4i$이므로

$$z_{200}=\frac{1}{1-z_{199}}=\frac{1}{1-(3+4i)}=\frac{1}{-2-4i}$$
$$=\frac{1}{-2(1+2i)}=\frac{1-2i}{-2(1+2i)(1-2i)}$$
$$=\frac{1-2i}{-2\cdot5}=-\frac{1}{10}+\frac{1}{5}i$$

따라서 $p=-\dfrac{1}{10}$, $q=\dfrac{1}{5}$이므로

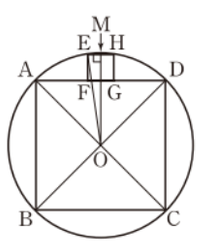
$100(p+q)=100\cdot\left(-\dfrac{1}{10}+\dfrac{1}{5}\right)=10$ 답 10

1등급 비밀노트

이와 같은 문제는 일반적으로 복소수 z_n에 대하여 z_1, z_2, z_3, $\cdots$의 값이 차례대로 반복되어 $z_k=z_1$이 되는 경우와 z_n을 n에 대한 식으로 나타낼 수 있는 경우가 있다. 따라서 먼저 복소수 z_1, z_2, z_3, $\cdots$의 값을 차례대로 구하여 어떠한 규칙이 있는지 조사해 본다.

19 전략 원의 중심을 O, 선분 EH의 중점을 M이라 하면 삼각형 EOM이 직각삼각형임을 이용한다.

풀이 원의 중심을 O라 하고 정사각형 ABCD의 한 변의 길이를 x라 하면 원의 반지름의 길이가 1이므로 직각삼각형 ABC에서



$2^2=x^2+x^2$

$x^2=2$

$\therefore x=\sqrt{2}\ (\because x>0)$

정사각형 EFGH의 한 변의 길이를 y라 하고 선분 EH의 중점을 M이라 하면 직각삼각형 EOM에서

$1^2=\left(\dfrac{y}{2}\right)^2+\left(y+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$

$1=\dfrac{y^2}{4}+y^2+\sqrt{2}y+\dfrac{1}{2}$

$5y^2+4\sqrt{2}y-2=0$

$\therefore y=\dfrac{-2\sqrt{2}+\sqrt{(2\sqrt{2})^2-5\cdot(-2)}}{5}$

$=\dfrac{-2\sqrt{2}+3\sqrt{2}}{5}=\dfrac{\sqrt{2}}{5}\ (\because y>0)$

따라서 정사각형 EFGH의 넓이는

$\left(\dfrac{\sqrt{2}}{5}\right)^2=\dfrac{2}{25}$ 답 $\dfrac{2}{25}$

20 전략 원 A의 지름의 길이는 두 원 B, C의 지름의 길이의 합과 같고, 원 B의 지름의 길이는 두 원 C, D의 지름의 길이의 합과 같음을 이용한다.

일품 BOX

$2(a+b)=16$에서
$a+b=8$
$\therefore b=8-a$
$a=b+c$에서
$a=8-a+c$
$\therefore c=2a-8$
$b=c+d$에서
$8-a=2a-8+d$
$\therefore d=-3a+16$

a, b, c, d는 반지름의 길이이므로 모두 양수이다.

$\overline{OE}=1$,
$\overline{EM}=\dfrac{1}{2}\overline{EH}=\dfrac{y}{2}$,
$\overline{OM}=\overline{EF}+\dfrac{1}{2}\overline{AB}$
$=y+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

풀이 원 A, B, C, D의 반지름의 길이를 각각 a, b, c, d라 하면 주어진 조건에서

$a=b+c$, $b=c+d$,

$2(a+b)=16$, $\pi(a^2-d^2)=24\pi$ ··· ❶

b, c, d를 각각 a에 대한 식으로 나타내면

$b=8-a$, $c=2a-8$, $d=-3a+16$ ··· ❷

이것을 $a^2-d^2=24$에 대입하면

$a^2-(-3a+16)^2=24$

$a^2-12a+35=0$, $(a-5)(a-7)=0$

$\therefore a=5$ 또는 $a=7$

그런데 $a=7$이면 $d=-3\cdot7+16=-5<0$이므로

$a=5$ ··· ❸

따라서 원 A의 지름의 길이는 $2a=10$이다. ··· ❹

답 10

채점 기준	비율
❶ 주어진 조건을 식으로 나타낼 수 있다.	30 %
❷ b, c, d를 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	20 %
❸ a의 값을 구할 수 있다.	40 %
❹ 원 A의 지름의 길이를 구할 수 있다.	10 %

21 전략 이차방정식의 판별식 D에 대하여 $D=0$일 때, 이 이차방정식은 완전제곱식 꼴임을 이용한다.

풀이 주어진 이차식을 x에 대하여 내림차순으로 정리하면

$(a+c)x^2-2bx+(a-c)$ ··· ❶

이 식이 완전제곱식이므로 이차방정식

$(a+c)x^2-2bx+(a-c)=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=(-b)^2-(a+c)(a-c)=0$

$b^2-a^2+c^2=0$ $\therefore a^2=b^2+c^2$ ··· ❷

따라서 구하는 삼각형은 빗변의 길이가 a인 직각삼각형이다. ··· ❸

답 빗변의 길이가 a인 직각삼각형

채점 기준	비율
❶ 주어진 식을 x에 대하여 내림차순으로 정리할 수 있다.	20 %
❷ a^2, b^2, c^2 사이의 관계식을 구할 수 있다.	50 %
❸ 어떤 삼각형인지 구할 수 있다.	30 %

참고 이차식 $f(x)$가 완전제곱식이다.
➡ 이차방정식 $f(x)=0$이 중근을 갖는다.
➡ 이차방정식 $f(x)=0$의 판별식이 0이다.

22 전략 $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$를 이용하여 $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$의 값을 구한다.

풀이 $\alpha^3+\beta^3=(n+\sqrt{n^2+1})+(n-\sqrt{n^2+1})$

$=2n$

또 $\alpha^3\beta^3=(n+\sqrt{n^2+1})(n-\sqrt{n^2+1})=-1$이므로

$\alpha\beta=-1\ (\because \alpha\beta$는 실수$)$

이때 $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$이므로

ⓒ좋은책신사고

$$2n=\left(\frac{n}{2}\right)^3-3\cdot(-1)\cdot\frac{n}{2}$$

$$2n=\frac{n^3}{8}+\frac{3}{2}n,\qquad n^3-4n=0$$

$$n(n+2)(n-2)=0$$

$\therefore n=2$ ($\because n$은 자연수)

따라서 $\alpha+\beta=1$, $\alpha\beta=-1$이므로 α, β를 두 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은

$x^2-x-1=0$ 답 $x^2-x-1=0$

두 수 α, β를 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은
$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$

23 전략 각 이차함수를 $y=k(x-p)^2+q$ 꼴로 변형한다.

풀이 $y=x^2-6x+4a+6=(x-3)^2+4a-3$이므로 $x=3$에서 최솟값은 $4a-3$이다.

$y=-x^2+2ax=-(x-a)^2+a^2$이므로 $x=a$에서 최댓값은 a^2이다.

두 이차함수의 최솟값과 최댓값이 일치하므로

$$4a-3=a^2,\qquad a^2-4a+3=0$$

$$(a-1)(a-3)=0$$

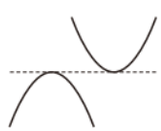
$\therefore a=1$ 또는 $a=3$

따라서 모든 실수 a의 값의 합은

$1+3=4$ 답 4

1등급 비밀노트

두 이차함수의 최댓값과 최솟값이 일치하는 경우를 두 함수의 꼭짓점이 일치하는 경우만 생각하여 $a=3$이라고 답을 하지 않도록 한다. 오른쪽 그림과 같이 두 함수의 꼭짓점이 일치하지 않아도 최댓값과 최솟값이 일치할 수 있다.



24 전략 $x_1=c-x_2$로 나타낸 후 함수 $f(x_1)+g(x_2)$를 x_2에 대한 이차함수로 나타낸다.

풀이 $x_1=c-x_2$이므로

$$\begin{aligned}&f(x_1)+g(x_2)\\&=f(c-x_2)+g(x_2)\\&=(c-x_2)(15-c+x_2)+\frac{x_2(30-x_2)}{2}\\&=-\frac{3}{2}x_2^2+2cx_2+15c-c^2\\&=-\frac{3}{2}\left(x_2-\frac{2}{3}c\right)^2+15c-\frac{c^2}{3}\end{aligned}$$

즉 $x_2=\frac{2}{3}c$일 때 함수 $f(x_1)+g(x_2)$의 최댓값은 $15c-\frac{c^2}{3}$이므로

$$15c-\frac{c^2}{3}=42,\qquad c^2-45c+126=0$$

$$(c-3)(c-42)=0$$

$\therefore c=3$ 또는 $c=42$

따라서 모든 c의 값의 합은

$3+42=45$ 답 45

25 전략 $x^2-2x+2=t$로 치환하고 주어진 x의 값의 범위를 이용하여 t의 값의 범위를 구한다.

풀이 $x^2-2x+2=t$로 놓으면

$$t=x^2-2x+2=(x-1)^2+1$$

이므로 t는 $-1\le x\le 2$에서 $x=-1$일 때 최댓값 5를 갖고, $x=1$일 때 최솟값 1을 갖는다.

$\therefore 1\le t\le 5$ ⋯ ❶

이때 주어진 함수는

$$y=t^2-4t-16=(t-2)^2-20$$

이므로 $1\le t\le 5$에서 $t=5$일 때 최댓값 -11을 갖고, $t=2$일 때 최솟값 -20을 갖는다. ⋯ ❷

따라서 최댓값과 최솟값의 곱은

$-11\cdot(-20)=220$ ⋯ ❸

답 220

채점 기준	비율
❶ $x^2-2x+2=t$로 놓고 t의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❷ 주어진 함수의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있다.	40 %
❸ 최댓값과 최솟값의 곱을 구할 수 있다.	20 %

26 전략 방정식 $x^2-x+1=0$의 한 근이 ω이면 $\omega^2-\omega+1=0$, $\omega^3=-1$이 성립함을 이용한다.

풀이 $\omega^2-\omega+1=0$이므로

$$\omega-1=\omega^2,\ \omega^2+1=\omega,\ \omega^2-\omega=-1$$

$$\begin{aligned}\therefore f(n)&=(\omega-1)^n+(\omega^2+1)^n+(\omega^2-\omega)^n\\&=\omega^{2n}+\omega^n+(-1)^n\end{aligned}$$ ⋯ ❶

$\omega^2-\omega+1=0$의 양변에 $\omega+1$을 곱하면

$$(\omega+1)(\omega^2-\omega+1)=0$$

$$\therefore \omega^3+1=0$$

즉 $\omega^3=-1$이므로

$$\begin{aligned}f(1)&=\omega^2+\omega-1=2\omega-2\\f(2)&=\omega^4+\omega^2+1=-\omega+\omega^2+1=0\\f(3)&=\omega^6+\omega^3-1=1-1-1=-1\\f(4)&=\omega^8+\omega^4+1=\omega^2-\omega+1=0\\f(5)&=\omega^{10}+\omega^5-1=-\omega-\omega^2-1=-2\omega\\f(6)&=\omega^{12}+\omega^6+1=1+1+1=3\\f(7)&=\omega^{14}+\omega^7-1=\omega^2+\omega-1=2\omega-2\\f(8)&=\omega^{16}+\omega^8+1=-\omega+\omega^2+1=0\\&\vdots\end{aligned}$$

$\omega^2-\omega+1=0$에서 $\omega^2=\omega-1$

$\omega^2+1=\omega$이므로 $-\omega^2-1=-\omega$

이므로 $f(n)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$의 값은 $2\omega-2$, 0, -1, 0, -2ω, 3이 차례대로 반복되어 나타난다. ⋯ ❷

따라서 $f(1)+f(2)+\cdots+f(6)=0$이므로

$f(1)+f(2)+\cdots+f(30)=0$ ⋯ ❸

$f(1)+\cdots+f(6)$
$=f(7)+\cdots+f(12)$
$\vdots$
$=f(25)+\cdots+f(30)$
$=0$

답 0

채점 기준	비율
❶ $f(n)$을 간단히 할 수 있다.	30 %
❷ $f(n)$의 값의 규칙을 찾을 수 있다.	50 %
❸ $f(1)+f(2)+\cdots+f(30)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

27 전략 인수분해를 이용하여 네 근을 구한 후 수직선 위에 네 점의 좌표를 나타내어 본다.

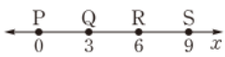
풀이 $4x^2+4ax+a^2-9=(2x+a+3)(2x+a-3)$

이므로 주어진 사차방정식의 네 실근은

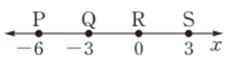
$x=0$ 또는 $x=3$ 또는 $x=\dfrac{-a-3}{2}$

또는 $x=\dfrac{-a+3}{2}$

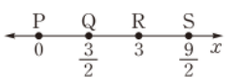
따라서 수직선 위에 네 실근을 좌표로 하는 네 점 P, Q, R, S가 일정한 간격으로 떨어져 있는 경우는 다음과 같이 네 가지이다.

(i) 

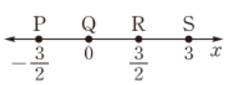
$\dfrac{-a-3}{2}=6$, $\dfrac{-a+3}{2}=9$에서 $a=-15$

(ii) 

$\dfrac{-a-3}{2}=-6$, $\dfrac{-a+3}{2}=-3$에서 $a=9$

(iii) 

$\dfrac{-a-3}{2}=\dfrac{3}{2}$, $\dfrac{-a+3}{2}=\dfrac{9}{2}$에서 $a=-6$

(iv) 

$\dfrac{-a-3}{2}=-\dfrac{3}{2}$, $\dfrac{-a+3}{2}=\dfrac{3}{2}$에서 $a=0$

이상에서 모든 실수 a의 값의 합은

$-15+9+(-6)+0=-12$ 답 -12

28 전략 계수가 유리수인 방정식의 한 근이 $p+q\sqrt{m}$(p, q는 유리수, $q\neq0$, $\sqrt{m}$은 무리수)이면 $p-q\sqrt{m}$도 근임을 이용한다.

풀이 주어진 삼차방정식의 한 근이 $1+\sqrt{3}$이고 계수가 모두 유리수이므로 $1-\sqrt{3}$도 근이다.

또 이차방정식 $x^2+ax+2=0$의 계수가 모두 유리수이므로 이 이차방정식이 $1-\sqrt{3}$을 근으로 가지면 다른 한 근은 $1+\sqrt{3}$이다.

그런데 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 곱은 2이므로

$\alpha\neq1-\sqrt{3}$

즉 삼차방정식의 세 근은 α, $1+\sqrt{3}$, $1-\sqrt{3}$이다.

이때 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+(1+\sqrt{3})+(1-\sqrt{3})=-a$

$\therefore a=-2-\alpha$ …… ㉠

$\alpha(1+\sqrt{3})+(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})+(1-\sqrt{3})\cdot\alpha=b$

$\therefore b=2\alpha-2$ …… ㉡

$\alpha(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})=-c$

$\therefore c=2\alpha$ …… ㉢

α는 $x^2+ax+2=0$의 한 근이므로

$\alpha^2+a\alpha+2=0$ …… ㉣

㉣에 ㉠을 대입하면

$\alpha^2+\alpha(-2-\alpha)+2=0$

$-2\alpha+2=0$ $\therefore \alpha=1$

㉠, ㉡, ㉢에 $\alpha=1$을 각각 대입하면

$a=-3$, $b=0$, $c=2$

$\therefore a^2+b^2+c^2+\alpha^2=14$ 답 14

일품 BOX

$3-0=3$, $\dfrac{-a+3}{2}-\dfrac{-a-3}{2}=3$ 이므로 좌표가 0, 3인 두 점과 $\dfrac{-a-3}{2}$, $\dfrac{-a+3}{2}$인 두 점 사이의 간격은 각각 3임을 이용한다.

$n=4s-2$ ($s=1, 2, 3, \cdots, 13$) 또는 $n=4s$ ($s=1, 2, 3, \cdots, 12$) 이므로 n이 짝수일 때이다.

$(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})=-2\neq2$

최상위로 가는 최고 수준 문제

본책 65쪽

01

해결 단계

❶ 주어진 식을 간단히 한다.
❷ i와 $-i$의 거듭제곱의 값은 4개의 수가 반복됨을 이용하여 m의 값의 경우를 나누고, 각 경우마다 순서쌍 (m, n)의 개수를 구한다.
❸ ❷의 개수를 모두 더하여 순서쌍 (m, n)의 개수를 구한다.

풀이 ❶ $\dfrac{1+i}{1-i}=\dfrac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\dfrac{2i}{2}=i$,

$\dfrac{3-4i}{4+3i}=\dfrac{(3-4i)(4-3i)}{(4+3i)(4-3i)}=\dfrac{-25i}{25}=-i$이므로

$\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^m-\left(\dfrac{3-4i}{4+3i}\right)^n=i^m-(-i)^n$ …… ㉠

❷ (i) $m=4k-3$ ($k=1, 2, 3, \cdots, 13$)일 때,

$i^m=i$이므로 ㉠이 실수가 되려면

$(-i)^n=i$

이어야 한다.

$\therefore n=4t-1$ ($t=1, 2, 3, \cdots, 12$)

따라서 순서쌍 (m, n)의 개수는

$13\cdot12=156$

(ii) $m=4k-2$ ($k=1, 2, 3, \cdots, 13$)일 때,

$i^m=-1$이므로 ㉠이 실수가 되려면

$(-i)^n=-1$ 또는 $(-i)^n=1$

이어야 한다.

$\therefore n=2t$ ($t=1, 2, 3, \cdots, 25$)

따라서 순서쌍 (m, n)의 개수는

$13\cdot25=325$

(iii) $m=4k-1$ ($k=1, 2, 3, \cdots, 12$)일 때,

$i^m=-i$이므로 ㉠이 실수가 되려면

$(-i)^n=-i$

이어야 한다.

$\therefore n=4t-3$ ($t=1, 2, 3, \cdots, 13$)

따라서 순서쌍 (m, n)의 개수는

$12\cdot13=156$

(iv) $m=4k$ ($k=1, 2, 3, \cdots, 12$)일 때,

$i^m=1$이므로 ㉠이 실수가 되려면

$(-i)^n=-1$ 또는 $(-i)^n=1$

이어야 한다.

ⓒ좋은책신사고

$\therefore n=2t\ (t=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 25)$

따라서 순서쌍 $(m,\ n)$의 개수는

$12\cdot 25=300$

❸ 이상에서 구하는 순서쌍 $(m,\ n)$의 개수는

$156+325+156+300=937$ 답 937

02

해결 단계

❶ 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근을 α, $\alpha+2$로 놓고 근과 계수의 관계를 이용하여 식을 세운다.
❷ 이차방정식 $x^2+bx+a=0$의 자연수인 근을 n으로 놓고 대입하여 a에 대한 식을 세운다.
❸ a에 대한 이차방정식의 판별식을 이용하여 n의 값을 구한다.
❹ a, b의 값을 구한다.

풀이 ❶ 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 연속하는 홀수인 자연수의 두 근을 α, $\alpha+2$ (α는 홀수)라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+(\alpha+2)=-a,\ \alpha(\alpha+2)=b$

$2\alpha+2=-a$에서 $\alpha=\dfrac{-a-2}{2}$이므로

$b=\left(\dfrac{-a-2}{2}\right)\cdot\left(\dfrac{-a-2}{2}+2\right)$

$=\dfrac{a^2}{4}-1$ …… ㉠

❷ 이차방정식 $x^2+bx+a=0$의 자연수인 근을 n이라 하면

$n^2+bn+a=0,\qquad n^2+\left(\dfrac{a^2}{4}-1\right)n+a=0$

$\therefore \dfrac{n}{4}a^2+a+n^2-n=0$ …… ㉡

❸ a에 대한 이차방정식 ㉡의 판별식을 D라 하면

$D=1^2-4\cdot\dfrac{n}{4}(n^2-n)=-n^3+n^2+1$

그런데 $n\geq 2$이면 $D<0$이므로 실수 a는 존재하지 않는다.

$\therefore n=1$

❹ ㉡에 $n=1$을 대입하면

$\dfrac{1}{4}a^2+a=0,\qquad a\left(\dfrac{1}{4}a+1\right)=0$

$a<0$이므로 $\qquad a=-4$

㉠에 $a=-4$를 대입하면 $\qquad b=3$

$\therefore ab=-12$ 답 -12

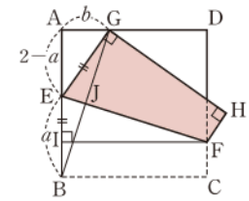
이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근이 α, $\alpha+2$ (α는 홀수)이므로 근과 계수의 관계에 의하여
$-a=\alpha+(\alpha+2)$
$\therefore a=-(2\alpha+2)$
이때 $2\alpha+2>0$이므로
$a<0$

03

해결 단계

❶ 삼각형의 합동과 닮음을 이용하여 $\overline{HF}$를 a, b에 대한 식으로 나타낸다.
❷ 직각삼각형 AEG에서 피타고라스 정리를 이용하여 a, b 사이의 관계식을 구한다.
❸ 사다리꼴 EFHG의 넓이를 b에 대한 이차함수로 나타내어 이차함수가 최소일 때 b의 값을 구한다.
❹ $\dfrac{a}{b}$의 값을 구한다.

풀이 ❶ 오른쪽 그림과 같이 점 F에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 I라 하고, 두 선분 BG, EF의 교점을 J라 하자.



이때 $\triangle EBJ\equiv\triangle EGJ$ (SAS 합동)이므로

$\overline{EB}=\overline{EG}$, $\overline{EJ}$는 공통, $\angle BEJ=\angle GEJ$

$\angle EJB=\angle EJG=90^\circ$

또 $\triangle BJE\backsim\triangle BAG$ (AA 닮음)이므로

$\angle BJE=\angle BAG=90^\circ$, $\angle B$는 공통

$\angle BEJ=\angle BGA$

따라서 $\triangle FIE\equiv\triangle BAG$ (ASA 합동)이므로

$\overline{FI}=\overline{BA}$, $\angle FIE=\angle BAG=90^\circ$, $\angle FEI=\angle BGA$

$\overline{AG}=\overline{IE}=b$

에서

$\overline{CF}=\overline{BI}=\overline{BE}-\overline{EI}=a-b$

$\therefore \overline{HF}=\overline{CF}=a-b$

❷ 한편 직각삼각형 AEG에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{AE}=\overline{AB}-\overline{BE}=2-a$, $\overline{EG}=\overline{EB}=a$

$(2-a)^2+b^2=a^2$

$\therefore a=\dfrac{1}{4}b^2+1$ …… ㉠

❸ 사다리꼴 EFHG의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\{a+(a-b)\}\cdot 2$

$\dfrac{1}{2}(\overline{EG}+\overline{FH})\cdot\overline{GH}$

$=2a-b$

$=2\left(\dfrac{1}{4}b^2+1\right)-b$ ($\because$ ㉠)

$=\dfrac{1}{2}b^2-b+2$

$=\dfrac{1}{2}(b-1)^2+\dfrac{3}{2}$

이므로 $b=1$일 때 최솟값 $\dfrac{3}{2}$을 갖는다.

❹ ㉠에서 $b=1$일 때 $a=\dfrac{5}{4}$이므로

$\dfrac{a}{b}=\dfrac{5}{4}$ 답 $\dfrac{5}{4}$

04

해결 단계

❶ 삼차방정식 $f(x)=0$의 켤레근의 성질을 이용하여 근을 파악한다.
❷ 조건 (나)를 이용하여 실근을 구한다.
❸ 조건 (나)를 이용하여 허근을 구한다.
❹ 실근과 허근을 이용하여 $f(x)$를 구한다.

풀이 ❶ 조건 (가)에 의하여 방정식 $f(x)=0$의 한 허근을 β라 하면 계수가 실수이므로 다른 한 근은 β의 켤레복소수인 $\overline{\beta}$이고, 또 다른 한 근은 실수 γ이다.

❷ 조건 (나)에서 방정식 $f(x)=0$의 한 근이 γ이면 γ^3도 근이고 γ^3은 실수이므로

$\gamma^3=\gamma,\qquad \gamma(\gamma+1)(\gamma-1)=0$

$\therefore \gamma=-1$ 또는 $\gamma=0$ 또는 $\gamma=1$ …… ㉠

❸ 조건 (나)에서 방정식 $f(x)=0$의 한 근이 β이면 β^3도 근이므로

$\beta^3=\overline{\beta}$ 또는 $\beta^3=\gamma$

(i) $\beta^3=\overline{\beta}$일 때, $\beta^4=\beta\overline{\beta}$이고 $\beta\overline{\beta}$는 0보다 큰 실수이므로

$\beta^4=k^2\,(k>0)$이라 하면

$\beta^2=-k$ 또는 $\beta^2=k$

이때 β는 허근이므로 $\beta^2=-k$

$\therefore \beta=\sqrt{k}i$ 또는 $\beta=-\sqrt{k}i$

따라서 $\beta^3=\overline{\beta}$에서

$(\sqrt{k}i)^3=-\sqrt{k}i$ 또는 $(-\sqrt{k}i)^3=\sqrt{k}i$

$\therefore k=1\,(\because k>0)$

$\therefore \beta=i$ 또는 $\beta=-i$

(ii) $\beta^3=\gamma$일 때, $\beta\neq0$이므로 ㉠에서

ⓘ $\gamma=1$이면 $\beta^3=1$이므로

$(\beta-1)(\beta^2+\beta+1)=0$

β는 허근이므로 $\beta=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

ⓘⓘ $\gamma=-1$이면 $\beta^3=-1$이므로

$(\beta+1)(\beta^2-\beta+1)=0$

β는 허근이므로 $\beta=\dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$

❹ $f(x)=(x-\gamma)(x-\beta)(x-\overline{\beta})$이므로

$f(x)=(x+1)(x-i)(x+i)$

$=x^3+x^2+x+1$

또는

$f(x)=x(x-i)(x+i)$

$=x^3+x$

또는

$f(x)=(x-1)(x-i)(x+i)$

$=x^3-x^2+x-1$

또는

$f(x)=(x-1)(x^2+x+1)$

$=x^3-1$

또는

$f(x)=(x+1)(x^2-x+1)$

$=x^3+1$

따라서 $f(2)$의 값은 차례대로

15, 10, 5, 7, 9

이므로 $f(2)$의 값이 될 수 없는 것은 ④이다.

답 ④

일품 BOX

$\beta=p+qi\ (q\neq0)$일 때, $\overline{\beta}=p-qi$이므로 $\beta\overline{\beta}=p^2+q^2$ 이때 $q\neq0$이므로 $\beta\overline{\beta}>0$

Ⅲ 부등식

07 일차부등식

개념&핵심 기출

본책 68~70쪽

01 ㄱ. $ab>0$이므로 $a<b$의 양변을 ab로 나누면

$\dfrac{1}{b}<\dfrac{1}{a}$

ㄴ. $|a|>|b|$이므로 $a^2>b^2$

$ab>0$이므로 양변을 ab로 나누면

$\dfrac{a}{b}>\dfrac{b}{a}$

ㄷ. $a=-2,\ b=-1,\ c=2,\ d=1$이면 $a<b<0$,

$c>d>0$이지만 $\dfrac{a}{c}=-1,\ \dfrac{b}{d}=-1$이므로

$\dfrac{a}{c}=\dfrac{b}{d}$이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ②

02 ㄱ. $a=0.1,\ b=-1.1$이면 $0<a<1,\ b<-1$이지만 $a^2+b^2=0.01+1.21=1.22<2$이다.

ㄴ. $0<a<1$에서 $a^2<a$ …… ㉠

$b<-1$에서 $ab<-a$

$\therefore a<-ab$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $a^2<-ab$

ㄷ. $0<a<1$에서 $\dfrac{1}{a}>1$

$b<-1$에서 $-1<\dfrac{1}{b}<0$

$\therefore \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}>0$

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

다른 풀이 ㄴ. $b<-1$에서 $-b>1$이므로

$a<-b$

$a>0$이므로 양변에 a를 곱하면

$a^2<-ab$

$a>0$이므로 부등식의 각 변에 a를 곱해도 부등식의 방향은 바뀌지 않는다.

$1<-b$이고 $a<1$이므로 $a<-b$

03 $1<f(1)<4$이므로

$1<a+b<4$ …… ㉠

$-2<f(2)<2$이므로

$-2<2a+b<2$ …… ㉡

㉠의 각 변에 2를 곱하면

$2<2a+2b<8$ …… ㉢

㉢−㉡을 하면 $2-2<b<8-(-2)$

$\therefore 0<b<10$

$f(0)=b$이므로

$0<f(0)<10$

답 $0<f(0)<10$

ⓒ좋은책신사고

참고 부등식의 사칙계산

$a<x<b$, $c<y<d$일 때

① $\begin{array}{rccccc} & a & < & x & < & b \\ +) & c & < & y & < & d \\ \hline & a+c & < & x+y & < & b+d \end{array}$

② $\begin{array}{rccccc} & a & < & x & < & b \\ -) & c & < & y & < & d \\ \hline & a-d & < & x-y & < & b-c \end{array}$

③ $\begin{array}{rccccc} & a & < & x & < & b \\ \times) & c & < & y & < & d \\ \hline & ac & < & xy & < & bd \end{array}$

④ $\begin{array}{rccccc} & a & < & x & < & b \\ \div) & c & < & y & < & d \\ \hline & \frac{a}{d} & < & \frac{x}{y} & < & \frac{b}{c} \end{array}$

(단, ③, ④는 a, b, c, d가 양수일 때 성립한다.)

04 $A-B=(a^3+b^3)-(a^2b+ab^2)$

$=a^2(a-b)-b^2(a-b)$

$=(a-b)(a^2-b^2)$

$=(a-b)(a+b)(a-b)$

$=(a+b)(a-b)^2$

이때 $a>0$, $b>0$이므로 $a+b>0$

또 $a\neq b$이므로 $(a-b)^2>0$

따라서 $A-B>0$이므로

$A>B$

답 $A>B$

$(a^3+b^3)-(a^2b+ab^2)$
$=(a+b)(a^2-ab+b^2)$
$-ab(a+b)$
$=(a+b)(a^2-2ab+b^2)$
$=(a+b)(a-b)^2$
과 같이 풀이할 수도 있다.

05 $A-B=(abc+1)-(a+bc)$

$=a(bc-1)-(bc-1)$

$=(a-1)(bc-1)$

그런데 $-1<a<1$이므로 $a-1<0$

또 $-1<b<1$, $-1<c<1$이므로

$-1<bc<1$

$\therefore bc-1<0$

따라서 $A-B>0$이므로

$A>B$

답 $A>B$

$-1<b<1$, $-1<c<1$
에서
$0\le|b|<1$,
$0\le|c|<1$
이므로
$0\le|b||c|<1$
즉 $0\le|bc|<1$이므로
$-1<bc<1$

06 $\frac{A}{B}=\frac{2^{30}}{5^{12}}=\frac{(2^5)^6}{(5^2)^6}=\left(\frac{2^5}{5^2}\right)^6=\left(\frac{32}{25}\right)^6>1$

이므로 $A>B$

$\frac{A}{C}=\frac{2^{30}}{3^{20}}=\frac{(2^3)^{10}}{(3^2)^{10}}=\left(\frac{2^3}{3^2}\right)^{10}=\left(\frac{8}{9}\right)^{10}<1$

이므로 $A<C$

$\therefore B<A<C$

답 ③

07 부등식 $ax>b$의 해가 $x>-1$이므로

$a>0$ $\therefore x>\frac{b}{a}$

따라서 $\frac{b}{a}=-1$이므로 $b=-a$

이것을 $(a-b)x<a^2+ab+b$에 대입하면

$\{a-(-a)\}x<a^2+a\cdot(-a)-a$

$2ax<-a$

$a>0$이므로 $x<-\frac{1}{2}$

답 ③

주어진 부등식의 부등호의 방향이 같으므로 x의 계수는 양수이다.

08 $(a+b)x+a-2b>0$에서

$(a+b)x>-a+2b$

이 부등식의 해가 $x<\frac{2}{3}$이므로

$a+b<0$ $\therefore x<\frac{-a+2b}{a+b}$

주어진 부등식의 부등호의 방향과 해의 부등호의 방향이 다르므로 x의 계수는 음수이다.

따라서 $\frac{-a+2b}{a+b}=\frac{2}{3}$이므로

$2a+2b=-3a+6b$, $5a=4b$ $\therefore a=\frac{4}{5}b$

$a+b<0$에서

$a+b=\frac{4}{5}b+b=\frac{9}{5}b<0$ $\therefore b<0$

$a=\frac{4}{5}b$를 $(2a-b)x<a+b$에 대입하면

$\left(\frac{8}{5}b-b\right)x<\frac{4}{5}b+b$, $\frac{3}{5}bx<\frac{9}{5}b$

이때 $b<0$이므로 $x>3$

답 ⑤

09 $(a-b)x+2a+3b>0$에서

$(a-b)x>-2a-3b$

이 부등식의 해가 모든 실수이므로

$a-b=0$, $-2a-3b<0$

부등식 $ax>b$의 해가
① 없다. ➡ $a=0$, $b\ge0$
② 모든 실수이다.
➡ $a=0$, $b<0$

$a-b=0$에서 $b=a$이므로

$-2a-3b=-2a-3a=-5a<0$

$\therefore a>0$

$b=a$를 $(a+2b)x>b-2a$에 대입하면 $3ax>-a$

이때 $a>0$이므로 $x>-\frac{1}{3}$

답 ③

10 $2x+1<a-x$에서

$3x<a-1$ $\therefore x<\frac{a-1}{3}$

$x+4<3x+2a$에서

$-2x<2a-4$ $\therefore x>2-a$

주어진 연립부등식의 해가 $-2<x<b$이므로

$2-a=-2$, $\frac{a-1}{3}=b$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=4$, $b=1$

$\therefore a+b=5$

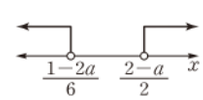
답 ⑤

11 $2(x-1)+a>0$에서

$2x>2-a$ $\therefore x>\frac{2-a}{2}$

$6x+2a<1$에서 $x<\frac{1-2a}{6}$

주어진 연립부등식이 해를 갖지 않으려면 오른쪽 그림에서



$\frac{1-2a}{6}\le\frac{2-a}{2}$

$1-2a\le6-3a$ $\therefore a\le5$

따라서 자연수 a의 값은 1, 2, 3, 4, 5이므로 구하는 합은 $1+2+3+4+5=15$ 답 ④

12 삼각형 ABC는 직각이등변삼각형이므로

$\overline{BQ}=x$, $\overline{PQ}=36-2x$

$\overline{PQ}<\overline{AP}+\overline{BQ}$에서

$36-2x<x+x$, $-4x<-36$

$\therefore x>9$ …… ㉠

$\overline{PS}=\overline{QR}=x$이므로 직사각형 PQRS의 둘레의 길이는

$2\{(36-2x)+x\}=72-2x$

이고, 선분 AP를 한 변으로 하는 정사각형의 둘레의 길이는 $4x$이므로

$72-2x>4x$, $-6x>-72$

$\therefore x<12$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$9<x<12$

따라서 정수 x의 값은 10, 11이다. 답 10, 11

13 $x-2<2x+3$에서 $-x<5$

$\therefore x>-5$ …… ㉠

$2x+3<6-x$에서 $3x<3$

$\therefore x<1$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$-5<x<1$

따라서 정수 x는 -4, -3, -2, -1, 0의 5개이다. 답 ③

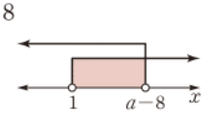
14 $6-x<x+4$에서

$-2x<-2$ $\therefore x>1$

$x+4<\frac{x+a}{2}$에서

$2x+8<x+a$ $\therefore x<a-8$

주어진 부등식이 해를 가지려면 오른쪽 그림에서



$a-8>1$ $\therefore a>9$

따라서 정수 a의 최솟값은 10이다. 답 ③

15 $x+2<ax+b$에서

$(1-a)x<b-2$ …… ㉠

$ax+b<x-a+3b$에서 $(a-1)x<-a+2b$

$(1-a)x>a-2b$ …… ㉡

(i) $1-a>0$, 즉 $a<1$일 때,

㉠에서 $x<\frac{b-2}{1-a}$, ㉡에서 $x>\frac{a-2b}{1-a}$이고, 주어진 부등식의 해가 $-1<x<4$이므로

$\frac{a-2b}{1-a}=-1$, $\frac{b-2}{1-a}=4$

$a-2b=-1+a$, $b-2=4-4a$

$b=\frac{1}{2}$, $4a+b=6$ $\therefore a=\frac{11}{8}$, $b=\frac{1}{2}$

그런데 $a<1$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $1-a<0$, 즉 $a>1$일 때,

㉠에서 $x>\frac{b-2}{1-a}$, ㉡에서 $x<\frac{a-2b}{1-a}$이고, 주어진 부등식의 해가 $-1<x<4$이므로

$\frac{b-2}{1-a}=-1$, $\frac{a-2b}{1-a}=4$

$b-2=-1+a$, $a-2b=4-4a$

$a-b=-1$, $5a-2b=4$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=3$

(i), (ii)에서 $a=2$, $b=3$이므로

$a+b=5$ 답 ②

16 $|ax+3|\le b$에서 $-b\le ax+3\le b$

$-b-3\le ax\le b-3$

이때 $a>0$이므로 $\frac{-b-3}{a}\le x\le\frac{b-3}{a}$

주어진 부등식의 해가 $-4\le x\le 1$이므로

$\frac{-b-3}{a}=-4$, $\frac{b-3}{a}=1$

$-b-3=-4a$, $b-3=a$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=5$

$\therefore a+b=7$ 답 ③

17 $2|x-3|+|x-7|\le 8$에서

(i) $x<3$일 때,

$-2(x-3)-(x-7)\le 8$

$-3x\le -5$ $\therefore x\ge\frac{5}{3}$

그런데 $x<3$이므로 $\frac{5}{3}\le x<3$

(ii) $3\le x<7$일 때,

$2(x-3)-(x-7)\le 8$ $\therefore x\le 7$

그런데 $3\le x<7$이므로 $3\le x<7$

(iii) $x\ge 7$일 때,

$2(x-3)+(x-7)\le 8$

$3x\le 21$ $\therefore x\le 7$

그런데 $x\ge 7$이므로 $x=7$

이상에서 주어진 부등식의 해는 $\frac{5}{3}\le x\le 7$이므로 정수 x는 2, 3, 4, 5, 6, 7의 6개이다. 답 ②

18 $-3\le x\le 5$일 때, $x+3\ge 0$, $x-5\le 0$이므로 주어진 부등식은

$(x+3)-(x-5)>k$ $\therefore k<8$

따라서 주어진 부등식이 항상 성립하기 위한 자연수 k의 최댓값은 7이다. 답 ④

일품 BOX

△ABC는 직각이등변삼각형이므로 ∠A=45°
△APS에서
∠ASP
=180°−90°−45°
=45°
따라서 △APS도 직각이등변삼각형이므로
$\overline{AP}=\overline{PS}=x$

$p>0$일 때,
① $|x|<p$이면
$-p<x<p$
② $|x|>p$이면
$x<-p$ 또는
$x>p$

ⓒ좋은책신사고

1등급을 위한 고난도 문제

본책 71~74쪽

01 ㄱ. $a=-\frac{1}{2}$, $b=-\frac{1}{2}$이면 $0<ab<1$이지만

$\frac{1}{a}=-2$이므로 $b>\frac{1}{a}$이다.

ㄴ. $b^2>0$이므로 $ab<1$의 양변을 b^2으로 나누면

$\frac{a}{b}<\frac{1}{b^2}$

ㄷ. $a^2>0$, $b^2>0$이므로 $0<ab<1$에서

$0<a^3b<a^2$, $0<ab^3<b^2$

$\therefore -b^2<a^3b-ab^3<a^2$

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ⑤

02 ㄱ. $a=-2$, $b=2$이면 $\frac{1}{a}=-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{b}=\frac{1}{2}$이므로

$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$이지만 $b>a$이다.

ㄴ. $a^2b^2>0$이므로 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$의 양변에 a^2b^2을 곱하면

$ab^2<a^2b$

ㄷ. $a>0$이면 $0<\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$이므로 $b>0$

$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$의 양변에 b를 곱하면 $\frac{b}{a}<1$

$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$의 양변에 a를 곱하면 $1<\frac{a}{b}$

$\therefore \frac{b}{a}<\frac{a}{b}$

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ⑤

03 $b^2c+ac^2+ab^2+a^2c=2abc$에서

$a(b^2+c^2)+c(a^2+b^2-2ab)=0$

$\therefore a(b^2+c^2)+c(a-b)^2=0$ …… ㉠ ⋯ ❶

$a=b$이면 ㉠에서 $a(b^2+c^2)=0$이어야 하므로

$a=0$ 또는 $b^2+c^2=0$

그런데 이것은 a, b, c가 0이 아닌 실수라는 조건을 만족시키지 않는다.

$\therefore a\neq b$ ⋯ ❷

이때 ㉠에서 $a(b^2+c^2)=-c(a-b)^2$이므로

$-\frac{a}{c}=\frac{(a-b)^2}{b^2+c^2}>0$

따라서 $\frac{a}{c}<0$이므로

$ac<0$ ⋯ ❸

답 풀이 참조

채점 기준	비율
❶ 주어진 식을 간단히 할 수 있다.	20 %
❷ $a\neq b$임을 알 수 있다.	40 %
❸ $ac<0$임을 보일 수 있다.	40 %

일품 BOX

0이 아닌 실수 b에 대하여 $b^2>0$

a^2+ab+b^2
$=\left(a+\frac{b}{2}\right)^2+\frac{3}{4}b^2\geq 0$
이때 등호는 $a=b=0$일 때 성립하는데 a, b는 서로 다른 두 실수이므로
$a^2+ab+b^2>0$

$a>b$의 양변에 b를 더하면
$a+b>2b$

04 $A-B=(ab+cd)-(ac+bd)$

$=a(b-c)-d(b-c)$

$=(a-d)(b-c)$

$a>d$, $b>c$에서 $a-d>0$, $b-c>0$이므로

$A-B>0$ $\therefore A>B$ …… ㉠

$B-C=(ac+bd)-(ad+bc)$

$=a(c-d)-b(c-d)$

$=(a-b)(c-d)$

$a>b$, $c>d$에서 $a-b>0$, $c-d>0$이므로

$B-C>0$ $\therefore B>C$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $A>B>C$ 답 ①

05 $a+b+c=0$에서 $b=-a-c$이므로

$b^2+\frac{1}{2}(a-c)^2-a^2-c^2$

$=(-a-c)^2+\frac{1}{2}(a-c)^2-a^2-c^2$

$=\frac{1}{2}(a-c)^2+\{(a+c)^2-a^2-c^2\}$

$=\frac{1}{2}(a-c)^2+2ac$

$=\frac{1}{2}\{(a-c)^2+4ac\}$

$=\frac{1}{2}(a+c)^2\geq 0$

(단, 등호는 $a+c=0$일 때 성립)

$\therefore b^2+\frac{1}{2}(a-c)^2\geq a^2+c^2$

답 풀이 참조

06 조건 (다)에서

$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)>0$

이므로 $a-b>0$ $\therefore a>b$ …… ㉠

조건 (나)에서

$a^2-b^2=(a+b)(a-b)<0$

이므로 $a+b<0$ ($\because$ ㉠)

㉠에서 $a+b>2b$이므로

$2b<0$ $\therefore b<0$ …… ㉡

조건 (가)에서 $ab<b$이고 $b<0$이므로 양변을 b로 나누면

$a>1$ …… ㉢

㉠, ㉡, ㉢에서 $b<0<1<a$

$\therefore b<1<a$ 답 ④

07 $a^2+b^2+1-(ab+a+b)$

$=\frac{1}{2}(2a^2+2b^2+2-2ab-2a-2b)$

$=\frac{1}{2}\{(a^2-2ab+b^2)+(a^2-2a+1)+(b^2-2b+1)\}$

$=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(a-1)^2+(b-1)^2\}\geq 0$

$\therefore a^2+b^2+1 \geq ab+a+b$

(단, 등호는 $a=b=1$일 때 성립)

답 풀이 참조

참고 등호는 $a-b=0$, $a-1=0$, $b-1=0$, 즉 $a=b=1$일 때 성립한다.

08 $a(2x+a)>b(x+1)$에서

$(2a-b)x>b-a^2$

이 부등식이 해를 갖지 않으므로

$2a-b=0,\ b-a^2 \geq 0$

이때 $b-a^2 \geq 0$에서 $b \geq a^2$이고 주어진 조건에서 $b \leq a^2$이므로 $b=a^2$ …… ㉠

이것을 $2a-b=0$에 대입하면

$2a-a^2=0,\quad a(2-a)=0$

그런데 $a \neq 0$이므로 $a=2$

$a=2$를 ㉠에 대입하면

$b=4$

$\therefore a+b=6$

답 ④

09 $|b| \leq 3$에서 $-3 \leq b \leq 3$ …… ㉠

$a(a+1)x+b<2x+a$에서

$(a^2+a-2)x<a-b$

$(a+2)(a-1)x<a-b$

이 부등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하려면

$(a+2)(a-1)=0,\ a-b>0$

$(a+2)(a-1)=0$에서

$a=-2$ 또는 $a=1$

(i) $a=-2$일 때,

$a-b>0$에서 $b<-2$이므로

$b=-3$ ($\because$ ㉠)

따라서 순서쌍 $(a,\ b)$는 $(-2,\ -3)$의 1개이다.

(ii) $a=1$일 때,

$a-b>0$에서 $b<1$이므로

$b=-3,\ -2,\ -1,\ 0$ ($\because$ ㉠)

따라서 순서쌍 $(a,\ b)$는 $(1,\ -3)$, $(1,\ -2)$, $(1,\ -1)$, $(1,\ 0)$의 4개이다.

(i), (ii)에서 구하는 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는

$1+4=5$

답 ③

10 주어진 부등식에서 $a+b+c=k$ $(k>0)$라 하면

$a>0,\ b>0,\ c>0$이므로 $k>0$

$$\frac{x-(b+c)}{a}+\frac{x-(c+a)}{b}+\frac{x-(a+b)}{c}>3$$

$$\frac{x-(k-a)}{a}+\frac{x-(k-b)}{b}+\frac{x-(k-c)}{c}>3$$

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)x-\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)k+3>3$$

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)(x-k)>0$$

이때 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}>0$이므로 $x-k>0$

$a>0,\ b>0,\ c>0$에서 $\frac{1}{a}>0,\ \frac{1}{b}>0,\ \frac{1}{c}>0$이므로 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}>0$

$\therefore x>k$

주어진 부등식의 해가 $x>1$이므로

$k=1$

따라서 $a+b+c=1$에서 $b+c=1-a$이므로 부등식 $(b+c)x+2a>2$는

$(b+c)x>2(1-a),\quad (b+c)x>2(b+c)$

이때 $b+c>0$이므로 $x>2$

답 ④

다른 풀이 $a>0,\ b>0,\ c>0$이므로 $abc>0$

부등식 $\frac{x-b-c}{a}+\frac{x-c-a}{b}+\frac{x-a-b}{c}>3$의 양변에 abc를 곱한 후 정리하면

$bcx-bc(b+c)+cax-ca(c+a)$

$+abx-ab(a+b)>3abc$

$(ab+bc+ca)x$

$>3abc+ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)$

$=(b+c)a^2+(b^2+c^2+3bc)a+bc(b+c)$

a에 대하여 내림차순으로 정리한다.

$=\{(b+c)a+bc\}\{a+(b+c)\}$

$=(ab+bc+ca)(a+b+c)$

이때 $ab+bc+ca>0$이므로

$a>0,\ b>0,\ c>0$에서 $ab>0,\ bc>0,\ ca>0$이므로 $ab+bc+ca>0$

$x>a+b+c$

주어진 부등식의 해가 $x>1$이므로

$a+b+c=1\quad \therefore b+c=1-a$

부등식 $(b+c)x+2a>2$에서

$(b+c)x>2(1-a),\quad (b+c)x>2(b+c)$

이때 $b+c>0$이므로 $x>2$

11 $a(x-a^2)>b(x-ab)$에서

$(a-b)x>a^3-ab^2$

$(a-b)x>a(a+b)(a-b)$ …… ㉠

ㄱ. $a=b$이면 $a-b=0$, $a(a+b)(a-b)=0$이므로 ㉠에서 $0 \cdot x>0$

따라서 이 부등식의 해는 없다.

ㄴ. 부등식의 해가 $x>0$이므로 ㉠에서

$a-b>0\quad \therefore x>a(a+b)$

따라서 $a(a+b)=0$에서 $a>0$이므로

$a+b=0$

즉 $b=-a$이므로 $b<0$

ㄷ. 부등식의 해가 $x<a$이므로 ㉠에서

$a-b<0\quad \therefore x<a(a+b)$

따라서 $a(a+b)=a$에서 $a \neq 0$이므로

$a+b=1\quad \therefore b=1-a$

$a-b<0$에 $b=1-a$를 대입하면

$a-(1-a)<0,\quad 2a<1$

$\therefore a<\frac{1}{2}$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

12 $3x-1\geq 2x+a$에서

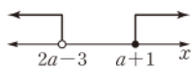
$x\geq a+1$

$4a-x>x+6$에서

$-2x>-4a+6$

$\therefore x<2a-3$ ⋯ ❶

주어진 연립부등식을 만족시키는 실수 x가 존재하지 않으려면 오른쪽 그림에서



$2a-3\leq a+1$ $\quad\therefore a\leq 4$ ⋯ ❷

따라서 a의 최댓값은 4이다. ⋯ ❸

답 4

채점 기준	비율
❶ 각 일차부등식의 해를 구할 수 있다.	40 %
❷ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	50 %
❸ a의 최댓값을 구할 수 있다.	10 %

13 부등식 $(a+b)x<a-b$의 해가 $x<\frac{1}{3}$이므로

$a+b>0$ $\quad\therefore x<\frac{a-b}{a+b}$

따라서 $\frac{a-b}{a+b}=\frac{1}{3}$이므로

$3a-3b=a+b,\quad 2a=4b$

$\therefore a=2b$

이때 $a+b>0$에서 $2b+b=3b>0$이므로

$b>0$

$a=2b$를 $ax+2a+b>0$에 대입하면

$2bx+2\cdot 2b+b>0,\quad 2bx>-5b$

이때 $b>0$이므로 $\quad x>-\frac{5}{2}$ ⋯⋯ ㉠

$a=2b$를 $(a-b)x<2a-3b$에 대입하면

$(2b-b)x<2\cdot 2b-3b,\quad bx<b$

이때 $b>0$이므로 $\quad x<1$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$-\frac{5}{2}<x<1$

따라서 정수 x는 -2, -1, 0의 3개이다. 답 ③

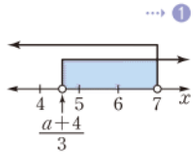
14 $-x+a<2x-4$에서

$-3x<-a-4$ $\quad\therefore x>\frac{a+4}{3}$

$\frac{3x-1}{2}<x+3$에서

$3x-1<2x+6$ $\quad\therefore x<7$ ⋯ ❶

주어진 연립부등식을 만족시키는 정수 x가 2개이려면 오른쪽 그림에서



$4\leq\frac{a+4}{3}<5,\quad 12\leq a+4<15$

$\therefore 8\leq a<11$ ⋯ ❷

$\frac{a+4}{3}=4$이면 정수인 해는 5, 6의 2개이고, $\frac{a+4}{3}=5$이면 정수인 해는 6의 1개이다.

따라서 정수 a의 값은 8, 9, 10이므로 구하는 합은

$8+9+10=27$ ⋯ ❸

답 27

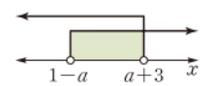
채점 기준	비율
❶ 각 일차부등식의 해를 구할 수 있다.	40 %
❷ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❸ 모든 정수 a의 값의 합을 구할 수 있다.	20 %

15 $2x+a>x+1$에서 $\quad x>1-a$

$3x-6<x+2a$에서

$2x<2a+6$ $\quad\therefore x<a+3$

이때 주어진 연립부등식이 해를 가지려면 오른쪽 그림에서



$1-a<a+3$

$-2a<2$ $\quad\therefore a>-1$ ⋯⋯ ㉠

또 주어진 연립부등식을 만족시키는 음수 x가 존재하지 않으므로

$1-a\geq 0$ $\quad\therefore a\leq 1$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$-1<a\leq 1$ 답 ②

16 이 동아리의 회원 수를 x라 하면 1인당 2000원씩 낸 총금액은 필요한 경비보다 1000원이 많으므로 필요한 경비는

활용 문제는 구하려는 것을 x로 놓고 식을 세운다.

$2000x-1000$(원)

1인당 1500원씩 낸 총금액은 필요한 경비보다 6000원 미만 적으므로

$(2000x-1000)-1500x<6000$

$500x<7000$ $\quad\therefore x<14$ ⋯⋯ ㉠

1인당 2500원씩 낸 총금액은 필요한 경비보다 7500원 이상 많으므로

$2500x-(2000x-1000)\geq 7500$

$500x\geq 6500$ $\quad\therefore x\geq 13$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $\quad 13\leq x<14$

따라서 동아리 회원 수는 13이다. 답 ③

17 2월 한 달 동안 외식비에서 x %, 나머지 항목에서 4 %를 줄인 금액은

1월의 월 소비 총액이 200만 원이고, 외식비가 40만 원이므로 나머지 항목의 총액은 160만 원이다.

$40\cdot\frac{x}{100}+160\cdot\frac{4}{100}$(만 원)

이고, 이것은 1월의 월 소비 총액의 5 % 이상을 줄인 금액이므로

$40\cdot\frac{x}{100}+160\cdot\frac{4}{100}\geq 200\cdot\frac{5}{100}$

$4x+64\geq 100$

$\therefore x\geq 9$ ⋯⋯ ㉠

2월 한 달 동안 외식비에서 4 %, 나머지 항목에서 x %를 줄인 금액은

$$40\cdot\frac{4}{100}+160\cdot\frac{x}{100}(\text{만 원})$$

이고, 이것은 1월의 월 소비 총액의 10 % 이하를 줄인 금액이므로

$$40\cdot\frac{4}{100}+160\cdot\frac{x}{100}\le 200\cdot\frac{10}{100}$$

$$16+16x\le 200$$

$$16x\le 184 \qquad \therefore x\le 11.5 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$$9\le x\le 11.5$$

답 $9\le x\le 11.5$

18 $x+1<2x+a$에서

$$-x<a-1 \qquad \therefore x>1-a$$

$2x+a<-x+b$에서

$$3x<b-a \qquad \therefore x<\frac{b-a}{3}$$

주어진 부등식의 해가 $3<x<4$이므로

$$1-a=3,\ \frac{b-a}{3}=4$$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $\quad a=-2,\ b=10$

$$\therefore a+b=8$$

답 ④

19 $3x-1<x+a$에서

$$2x<a+1 \qquad \therefore x<\frac{a+1}{2}$$

$x+a<2x+3a$에서

$$-x<2a \qquad \therefore x>-2a \qquad \cdots ❶$$

주어진 부등식의 해가 $\alpha<x<\beta$이므로

$$\alpha=-2a,\ \beta=\frac{a+1}{2} \qquad \cdots ❷$$

$\beta-\alpha=5$에서 $\quad \frac{a+1}{2}-(-2a)=5$

$$\frac{5}{2}a=\frac{9}{2} \qquad \therefore a=\frac{9}{5} \qquad \cdots ❸$$

답 $\frac{9}{5}$

채점 기준	비율
❶ 각 일차부등식의 해를 구할 수 있다.	50 %
❷ α, β를 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	20 %
❸ a의 값을 구할 수 있다.	30 %

20 $ax+2<x+1$에서

$$(a-1)x<-1 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$x+1<2x+b$에서

$$-x<b-1 \qquad \therefore x>1-b \qquad \cdots\cdots ㉡$$

(i) $a-1<0$일 때,

㉠에서 $\quad x>-\frac{1}{a-1} \qquad \cdots\cdots ㉢$

이때 ㉡, ㉢의 공통부분이 존재하므로 주어진 부등식은 해를 갖는다.

두 부등식의 부등호의 방향이 같으므로 공통부분이 항상 존재한다.

(ii) $a-1=0$일 때,

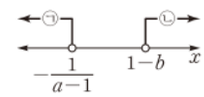
㉠에서 $0\cdot x<-1$이므로 해가 없다.

$$\therefore (a-1)(b-1)=0$$

(iii) $a-1>0$일 때,

㉠에서 $\quad x<-\frac{1}{a-1}$

주어진 부등식이 해를 갖지 않으려면 오른쪽 그림에서



$$-\frac{1}{a-1}\le 1-b$$

$a-1>0$이므로 양변에 $a-1$을 곱하면

$$-1\le(1-b)(a-1)$$

$$\therefore (a-1)(b-1)\le 1$$

이상에서 $(a-1)(b-1)$의 최댓값은 1이다.

답 ①

21 부등식 $ax<2a-b$의 해가 $x>\frac{3}{2}$이므로

$$a<0 \qquad \therefore x>\frac{2a-b}{a}$$

따라서 $\frac{2a-b}{a}=\frac{3}{2}$이므로

$$4a-2b=3a \qquad \therefore a=2b$$

또 $a<0$이므로 $\quad b<0$

$ax+b<bx$에서 $\quad (a-b)x<-b$

$$(2b-b)x<-b, \qquad bx<-b$$

이때 $b<0$이므로 $\quad x>-1 \qquad \cdots\cdots ㉠$

$bx<2ax-a$에서 $\quad (b-2a)x<-a$

$$(b-2\cdot 2b)x<-2b, \qquad -3bx<-2b$$

이때 $b<0$이므로 $\quad x<\frac{2}{3} \qquad \cdots\cdots ㉡$

$b<0$이므로 $-3b>0$

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$$-1<x<\frac{2}{3}$$

답 $-1<x<\frac{2}{3}$

22 사각형 ABCD의 넓이는 $\quad 8\cdot 6=48$

삼각형 APM의 넓이는 $\quad \frac{1}{2}\cdot x\cdot 4=2x$

삼각형 PBC의 넓이는 $\quad \frac{1}{2}\cdot(6-x)\cdot 8=24-4x$

$\overline{PB}=\overline{AB}-\overline{AP}$
$=6-x$

삼각형 CDM의 넓이는 $\quad \frac{1}{2}\cdot 6\cdot 4=12$

따라서 삼각형 MPC의 넓이는

$$48-\{2x+(24-4x)+12\}=2x+12$$

한편 두 삼각형 APM, PBC의 넓이의 합은

$$2x+(24-4x)=24-2x$$

ⓒ좋은책신사고

또 사각형 PBCQ의 넓이는

$(6-x)\cdot 8=48-8x$

이므로 주어진 조건에서

$24-2x<2x+12<48-8x$

$24-2x<2x+12$에서

$-4x<-12 \qquad \therefore x>3$ …… ㉠

$2x+12<48-8x$에서

$10x<36 \qquad \therefore x<3.6$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$3<x<3.6$

답 $3<x<3.6$

23 $\left|\frac{x}{n}-8\right|\le 2$에서 $\quad -2\le\frac{x}{n}-8\le 2$

$6\le\frac{x}{n}\le 10 \qquad \therefore 6n\le x\le 10n$

위의 부등식을 만족시키는 정수 x의 개수가 13이므로

$10n-6n+1=13, \qquad 4n=12$

$\therefore n=3$

답 3

1등급 비밀노트

부등식을 만족시키는 정수 A의 개수 (단, m, n은 정수)

① $m\le A\le n$ ➡ $n-m+1$

② $m<A\le n$ ➡ $n-m$

③ $m<A<n$ ➡ $n-m-1$

24 $|2x+1|<5$에서

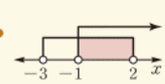
$-5<2x+1<5, \qquad -6<2x<4$

$\therefore -3<x<2$

$ax+2a-b<0$에서

$ax<-2a+b$ …… ㉠

연립부등식의 해가 $-1<x<2$이므로 부등식 ㉠의 해는 $x>-1$이어야 한다.



㉠에서 $\quad a<0 \qquad \therefore x>\frac{-2a+b}{a}$

따라서 $\frac{-2a+b}{a}=-1$이므로 $\quad -2a+b=-a$

$\therefore a=b$

부등식 $(a+b)x+a-3b>0$에서

$2ax-2a>0, \qquad ax>a$

$a<0$이므로 $\quad x<1$

답 ①

25 $|x-3|\ge 2$에서

$x-3\le -2$ 또는 $x-3\ge 2$

$\therefore x\le 1$ 또는 $x\ge 5$ …… ㉠

$||x|-1|\le 1$에서 $\quad -1\le |x|-1\le 1$

$0\le |x|\le 2 \qquad \therefore -2\le x\le 2$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $\quad -2\le x\le 1$

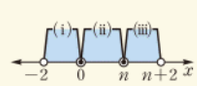
따라서 정수 x는 -2, -1, 0, 1의 4개이다.

답 ④

일품 BOX

절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되게 하는 x의 값 1, 2를 기준으로 범위를 나눈다.

△APM+△PBC<△MPC<□PBCQ



26 (i) $x<1$일 때,

$|x-1|+|x-2|=-(x-1)-(x-2)$

$=-2x+3$

$x<1$에서 $-2x>-2$이므로

$-2x+3>1$

(ii) $1\le x<2$일 때,

$|x-1|+|x-2|=(x-1)-(x-2)$

$=1$

(iii) $x\ge 2$일 때,

$|x-1|+|x-2|=(x-1)+(x-2)$

$=2x-3$

$x\ge 2$에서 $2x\ge 4$이므로

$2x-3\ge 1$

이상에서 $|x-1|+|x-2|\ge 1$이므로 부등식 $|x-1|+|x-2|<a$의 해가 존재하지 않도록 하는 실수 a의 값의 범위는 $\quad a\le 1$

답 ②

27 $f(n,\ n+4)$의 값은 부등식

$|x|+|x-n|<n+4$ …… ㉠

를 만족시키는 정수 x의 개수와 같다.

(i) $x<0$일 때, ㉠에서

$-x-(x-n)<n+4$

$-2x<4 \qquad \therefore x>-2$

그런데 $x<0$이므로 $\quad -2<x<0$ ··· ❶

(ii) $0\le x<n$일 때, ㉠에서

$x-(x-n)<n+4$

$\therefore n<n+4$

따라서 해는 모든 실수이다.

그런데 $0\le x<n$이므로 $\quad 0\le x<n$ ··· ❷

(iii) $x\ge n$일 때, ㉠에서

$x+(x-n)<n+4$

$2x<2n+4 \qquad \therefore x<n+2$

그런데 $x\ge n$이므로 $\quad n\le x<n+2$ ··· ❸

이상에서 주어진 부등식의 해는 $-2<x<n+2$이므로 정수 x의 개수는

$(n+2)-(-2)-1=n+3$

$\therefore f(n,\ n+4)=n+3$ ··· ❹

따라서 $f(n,\ n+4)=10$에서

$n+3=10$

$\therefore n=7$ ··· ❺

답 7

채점 기준	비율
❶ $x<0$일 때 x의 값의 범위를 구할 수 있다.	20 %
❷ $0\le x<n$일 때 x의 값의 범위를 구할 수 있다.	20 %
❸ $x\ge n$일 때 x의 값의 범위를 구할 수 있다.	20 %
❹ $f(n,\ n+4)$를 n에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	10 %
❺ n의 값을 구할 수 있다.	30 %

사고력 강화를 위한 수능형 문제

본책 75쪽

01 a, b, c, d, e가 연속하는 5개의 정수이므로 조건 ㈎에 의하여

$a=c-2,\ b=c-1,\ d=c+1,\ e=c+2$

라 하자.

조건 ㈏에 의하여

$(c-2)+(c-1)<c+1$

$\therefore c<4$

조건 ㈐에 의하여

$(c-2)^2+c^2=(c+2)^2$

$c^2-8c=0,\quad c(c-8)=0$

$\therefore c=0$ 또는 $c=8$

그런데 $c<4$이므로 $\quad c=0$

따라서 $a=-2,\ b=-1,\ d=1,\ e=2$이므로

$b^2+d^2=(-1)^2+1^2=2$ 답 2

1등급 비밀노트

문제에서 연속하는 정수 조건이 있을 때, 연속하는 세 정수는 $a-1$, a, $a+1$로 놓고, 연속하는 5개의 정수는 $a-2$, $a-1$, a, $a+1$, $a+2$로 놓으면 편리하다.

02 ㄱ. $a+b=1$에서

$a=1-b$

이때 $0<a<b$이므로

$0<1-b<b$

$0<1-b$에서 $\quad b<1$

$1-b<b$에서 $\quad b>\frac{1}{2}$

$\therefore \frac{1}{2}<b<1$

ㄴ. $(a^2+b^2)-b=a^2+b(b-1)$

$=a^2-ab$

$=a(a-b)<0$

$\therefore a^2+b^2<b$

ㄷ. $a+b=1$에서 $\quad b=1-a$

ㄱ에서 $\frac{1}{2}<b<1$이므로

$\frac{1}{2}<1-a<1$

$-\frac{1}{2}<-a<0 \qquad \therefore 0<a<\frac{1}{2}$

$\therefore 2a^2+b^2=2a^2+(1-a)^2$

$=3a^2-2a+1$

$=3\left(a-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{2}{3}$

따라서 $0<a<\frac{1}{2}$에서 $2a^2+b^2$은 $a=\frac{1}{3}$일 때 최솟값 $\frac{2}{3}$를 갖는다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

일품 BOX

$a+b=1$이므로 $b-1=-a$

$a>0$이고, $a<b$에서 $a-b<0$이므로 $a(a-b)<0$

다른 풀이 ㄱ. $a<b$의 양변에 b를 더하면

$a+b<2b$

$a+b=1$이므로

$1<2b \qquad \therefore b>\frac{1}{2}$

03 $c-a>a-b>b-c$에서

$c-a>a-b$ …… ㉠

$a-b>b-c$ …… ㉡

(i) a, b, c 중 가장 큰 수를 a라 하면

$a>b$, $a>c$이므로 $c-a<0$, $a-b>0$

$c-a<0,\ a-b>0$

이므로 ㉠을 만족시키는 a, b, c가 존재하지 않는다.

(ii) a, b, c 중 가장 큰 수를 b라 하면

$b>a$, $b>c$이므로 $a-b<0$, $b-c>0$

$a-b<0,\ b-c>0$

이므로 ㉡을 만족시키는 a, b, c가 존재하지 않는다.

(iii) a, b, c 중 가장 큰 수를 c라 하면

$c>a$, $c>b$이므로 $c-a>0$, $b-c<0$

$c-a>0,\ b-c<0$

이므로 a, b, c의 값에 따라 주어진 부등식이 성립한다.

이상에서 $a<c$, $b<c$이고, a, b의 대소는 비교할 수 없으므로 옳은 것은 ㄴ뿐이다. 답 ②

04 $|x-a|\le b$에서

$-b\le x-a\le b$

$\therefore a-b\le x\le a+b$

$ax+b<bx+2a$에서

$(a-b)x<2a-b$ …… ㉢

ㄱ. 부등식 ㉠의 해가 $0\le x\le 2$이면

$a-b=0,\ a+b=2$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=1,\ b=1$

㉢에서 $0\cdot x<1$이므로 부등식 ㉡의 해는 모든 실수이다.

ㄴ. 부등식 ㉠의 해가 $1\le x\le 3$이면

$a-b=1,\ a+b=3$

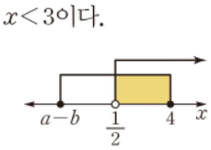
위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=2,\ b=1$

㉢에서 $\quad x<3$

따라서 연립부등식의 해는 $1\le x<3$이다.

ㄷ. 연립부등식의 해가 $\frac{1}{2}<x\le 4$



이려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로 부등식 ㉢의 해가

$x>\frac{1}{2}$이어야 한다.

즉 ㉢에서 $\quad a-b<0$

$\therefore x>\frac{2a-b}{a-b}$

ⓒ좋은책신사고

따라서 $\frac{2a-b}{a-b}=\frac{1}{2}$이므로

$4a-2b=a-b$

$\therefore b=3a$

또 부등식 ㉠의 해가 $a-b\le x\le 4$이어야 하므로

$a+b=4$

$b=3a$를 위의 식에 대입하면

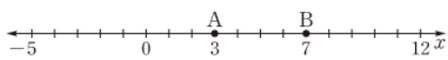
$4a=4 \qquad \therefore a=1$

$\therefore a=1,\ b=3$

따라서 부등식 ㉠의 해는 $1-3\le x\le 1+3$, 즉 $-2\le x\le 4$이므로 정수 x는 $-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$의 7개이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

05 다음과 같이 사무실을 원점으로 하고 10 m를 1로 하는 수직선을 그려 식당을 점 A(3), 오락실을 점 B(7), 숙소를 점 P(x)($-5\le x\le 12$, $x\ne 0$, $x\ne 3$, $x\ne 7$)라 하자.



$\overline{AP}=|x-3|$, $\overline{BP}=|x-7|$이므로 조건을 만족시키는 숙소는

$\overline{AP}+\overline{BP}=|x-3|+|x-7|\le 8$

을 만족시키는 정수 x의 값을 좌표로 하는 점 P(x)인 지점에 있다.

(i) $-5\le x<0$ 또는 $0<x<3$일 때,

$-(x-3)-(x-7)\le 8$

$-2x\le -2 \qquad \therefore x\ge 1$

그런데 $-5\le x<0$ 또는 $0<x<3$이므로

$1\le x<3$

(ii) $3<x<7$일 때,

$(x-3)-(x-7)\le 8$에서 $4\le 8$이므로 해는 모든 실수이다.

그런데 $3<x<7$이므로

$3<x<7$

(iii) $7<x\le 12$일 때,

$(x-3)+(x-7)\le 8$

$2x\le 18 \qquad \therefore x\le 9$

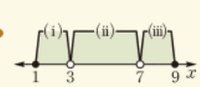
그런데 $7<x\le 12$이므로

$7<x\le 9$

이상에서 부등식 $|x-3|+|x-7|\le 8$의 해는

$1\le x<3$ 또는 $3<x<7$ 또는 $7<x\le 9$

따라서 조건을 만족시키는 숙소는 점 P(1), P(2), P(4), P(5), P(6), P(8), P(9)인 지점에 있으므로 7개이다. 답 ②



일품 BOX

$\sqrt{4}<\sqrt{5}<\sqrt{9}$이므로 $2<\sqrt{5}<3$

$a=5$이면 정수 x는 3, 4의 2개, $a=6$이면 정수 x는 3, 4, 5의 3개이다.

$a>\frac{1}{3}$이면 $\frac{1}{a}<3$

$a<0$이면 $\frac{1}{a}<0$이므로 $\frac{1}{a}<3$

08 이차부등식

개념&핵심 기출

본책 76~78쪽

01 이차방정식 $x^2-6x+4=0$의 해는

$x=3\pm\sqrt{5}$

이므로 이차부등식 $x^2-6x+4\le 0$의 해는

$3-\sqrt{5}\le x\le 3+\sqrt{5}$

이때 $2<\sqrt{5}<3$이므로

$3-\sqrt{5}=0.\times\times\times$, $3+\sqrt{5}=5.\times\times\times$

따라서 정수 x는 1, 2, 3, 4, 5의 5개이다. 답 5

02 $x^2-(a+2)x+2a<0$에서

$(x-2)(x-a)<0 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

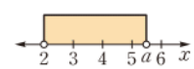
(i) $a<2$이면 부등식 ㉠의 해는 $\quad a<x<2$

그런데 a는 자연수이므로 이 부등식을 만족시키는 정수 x는 없다.

(ii) $a=2$이면 부등식 ㉠은 $(x-2)^2<0$이므로 해는 없다.

(iii) $a>2$이면 부등식 ㉠의 해는 $\quad 2<x<a$

이 부등식을 만족시키는 정수 x가 3개이려면 오른쪽 그림에서



$5<a\le 6$

이때 a는 자연수이므로 $\quad a=6$

이상에서 구하는 a의 값은 6이다. 답 6

1등급 비밀노트

마지막 단계에서 $5<a<6$, $5\le a<6$ 등과 같이 오답을 구하기 쉬운 문제이다. 이러한 유형의 문제는 등호를 포함시켰을 때 주어진 조건을 만족시키지 않으면 등호를 제외하고, 만족시키면 등호를 포함하는 방법으로 해결하는 것이 좋다.

03 ㄱ. $a>\frac{1}{3}$이면 주어진 부등식은

$(x-3)\left(x-\frac{1}{a}\right)<0 \qquad \therefore \frac{1}{a}<x<3$

ㄴ. $a=\frac{1}{3}$이면 주어진 부등식은

$(x-3)\left(\frac{1}{3}x-1\right)<0, \qquad (x-3)^2<0$

따라서 해는 없다.

ㄷ. $a<0$이면 주어진 부등식은

$(x-3)\left(x-\frac{1}{a}\right)>0 \qquad \therefore x<\frac{1}{a}$ 또는 $x>3$

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ④

04 $2x^2-5x+2<0$에서 $\quad (2x-1)(x-2)<0$

$\therefore \frac{1}{2}<x<2$

따라서 $\alpha=\frac{1}{2}$, $\beta=2$이므로 해가 $-\frac{\beta}{2}<x<-\frac{\alpha}{2}$, 즉 $-1<x<-\frac{1}{4}$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x+1)\left(x+\frac{1}{4}\right)<0 \qquad \therefore x^2+\frac{5}{4}x+\frac{1}{4}<0$

양변에 4를 곱하면 $4x^2+5x+1<0$이므로

$a=4,\ b=5 \qquad \therefore a+b=9$ 답 9

05 해가 $x\le-2$ 또는 $x\ge3$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x+2)(x-3)\ge0$

$\therefore x^2-x-6\ge0$ …… ㉠

부등식 $ax^2+bx+c\le0$과 부등식 ㉠의 부등호의 방향이 다르므로 $a<0$

따라서 ㉠의 양변에 a를 곱하면 $ax^2-ax-6a\le0$

이 부등식이 $ax^2+bx+c\le0$과 같으므로

$b=-a,\ c=-6a$

이것을 $bx^2+ax-c<0$에 대입하면

$-ax^2+ax+6a<0, \qquad x^2-x-6<0$

$(x+2)(x-3)<0 \qquad \therefore -2<x<3$

답 $-2<x<3$

$a<0$에서 $-a>0$이므로 부등호의 방향이 바뀌지 않는다.

06 이차방정식 $x^2-4x+5k=0$의 두 근을 $\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=4$ …… ㉠

$\alpha\beta=5k$ …… ㉡

또 두 근의 차가 6이므로

$\beta-\alpha=6$ …… ㉢

㉠, ㉢을 연립하여 풀면 $\alpha=-1,\ \beta=5$

이것을 ㉡에 대입하면

$-5=5k \qquad \therefore k=-1$

따라서 해가 $k+1\le x\le k+5$, 즉 $0\le x\le4$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$x(x-4)\le0 \qquad \therefore x^2-4x\le0$

이 부등식이 $x^2+ax+b\le0$과 같으므로

$a=-4,\ b=0 \qquad \therefore a+b=-4$ 답 ②

$k=-1$이므로 $k+1=0,\ k+5=4$

07 $x^2-2k(x+1)+15\ge0$에서

$x^2-2kx-2k+15\ge0$

이 부등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하려면 이차방정식 $x^2-2kx-2k+15=0$의 판별식을 D라 할 때,

$\frac{D}{4}=(-k)^2-(-2k+15)\le0$

$k^2+2k-15\le0, \qquad (k+5)(k-3)\le0$

$\therefore -5\le k\le3$ 답 ①

08 $kx^2-2kx+1<x^2+4x+5$에서

$(1-k)x^2+2(2+k)x+4>0$

이 부등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로

$1-k>0 \qquad \therefore k<1$ …… ㉠

이차방정식 $(1-k)x^2+2(2+k)x+4=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(2+k)^2-4(1-k)<0$

$k^2+8k<0, \qquad k(k+8)<0$

$\therefore -8<k<0$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $-8<k<0$

따라서 정수 k의 최댓값은 -1이다. 답 -1

09 이차부등식 $ax^2-(a-6)x+a-6>0$의 해가 존재하지 않으려면 모든 실수 x에 대하여 이차부등식

$ax^2-(a-6)x+a-6\le0$

이 성립해야 하므로 $a<0$ …… ㉠

이차방정식 $ax^2-(a-6)x+a-6=0$의 판별식을 D라 하면

$D=\{-(a-6)\}^2-4a(a-6)\le0$

$-3a^2+12a+36\le0, \qquad (a+2)(a-6)\ge0$

$\therefore a\le-2$ 또는 $a\ge6$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $a\le-2$

따라서 실수 a의 최댓값은 -2이다. 답 ②

10 $x^2-x-6<0$에서 $(x+2)(x-3)<0$

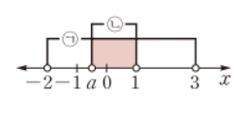
$\therefore -2<x<3$ …… ㉠

$x^2-(a+1)x+a<0$에서

$(x-a)(x-1)<0$ …… ㉡

(i) $a<1$일 때,

㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 정수 x가 오직 1개뿐이려면 오른쪽 그림에서



$-1\le a<0$

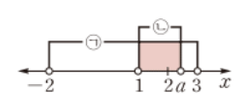
$a=0$이면 ㉡은 $0<x<1$이므로 정수인 해는 없다.

(ii) $a=1$일 때,

㉡에서 $(x-1)^2<0$이므로 해는 없다.

(iii) $a>1$일 때,

㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 정수 x가 오직 1개뿐이려면 오른쪽 그림에서



$a>2$

$a=2$이면 ㉡은 $1<x<2$이므로 정수인 해는 없다.

이상에서 $-1\le a<0$ 또는 $a>2$ 답 ④

11 (i) 부등식 $x-a<x^2-a^2$에서

$x^2-x-a(a-1)>0$

$(x-a)(x+a-1)>0$

이때 a가 자연수이므로 $x<1-a$ 또는 $x>a$

(ii) 부등식 $x^2-a^2\le x+a$에서

$x^2-x-a(a+1)\le0$

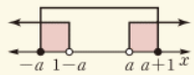
$(x+a)(x-a-1)\le0$

이때 a가 자연수이므로 $-a\le x\le a+1$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $-a<1-a<a<a+1$이므로 주어진 부등식의 해는 $-a\le x<1-a$ 또는 $a<x\le a+1$

이것이 $-3\le x<-2$ 또는 $b<x\le b+1$과 같으므로

$a=b=3$ $\quad\therefore a+b=6$ 답 ③



a, $a+1$은 자연수이므로 $-a\le x<1-a$는 $-3\le x<-2$와 같고 $a<x\le a+1$은 $b<x\le b+1$과 같다.

12 조건 (가)에서 가로, 세로의 길이는 양수이므로

$n-2>0$, $n>0$

$\therefore n>2$ …… ㉠

조건 (나)에서

$2\{n(n-2)+2n+2(n-2)\}>88$

$n^2+2n-48>0$, $\quad(n+8)(n-6)>0$

$\therefore n<-8$ 또는 $n>6$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $\quad n>6$

따라서 자연수 n의 최솟값은 7이다. 답 7

13 이차방정식 $x^2-ax+a^2-3a=0$의 서로 다른 두 근을 α, β라 하고 판별식을 D라 할 때, 이 이차방정식의 두 근이 모두 양수이려면

(ⅰ) $D=(-a)^2-4(a^2-3a)>0$

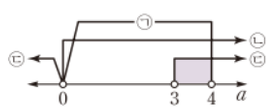
$3a^2-12a<0$, $\quad 3a(a-4)<0$

$\therefore 0<a<4$ …… ㉠

(ⅱ) $\alpha+\beta=a>0$ …… ㉡

(ⅲ) $\alpha\beta=a^2-3a>0$, $\quad a(a-3)>0$

$\therefore a<0$ 또는 $a>3$ …… ㉢



이상에서 공통부분을 구하면

$3<a<4$ 답 ③

14 이차방정식 $x^2+2ax+6-a=0$의 두 근을 α, β라 하고 판별식을 D라 할 때, 이 이차방정식의 두 근이 모두 음수이려면

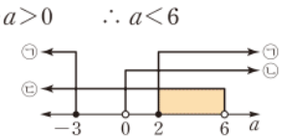
(ⅰ) $\dfrac{D}{4}=a^2-(6-a)\ge 0$

$a^2+a-6\ge 0$, $\quad(a+3)(a-2)\ge 0$

$\therefore a\le -3$ 또는 $a\ge 2$ …… ㉠

(ⅱ) $\alpha+\beta=-2a<0$ $\quad\therefore a>0$ …… ㉡

(ⅲ) $\alpha\beta=6-a>0$ $\quad\therefore a<6$ …… ㉢



이상에서 공통부분을 구하면 $\quad 2\le a<6$

따라서 정수 a는 2, 3, 4, 5이므로 구하는 합은 14이다.

답 14

15 이차방정식 $x^2+(2m-3)x+m^2-4m=0$의 두 근을 α, β라 하면 두 근의 부호가 서로 다르므로

$\alpha\beta=m^2-4m<0$, $\quad m(m-4)<0$

$\therefore 0<m<4$ …… ㉠

음의 근의 절댓값이 양의 근보다 크려면

$\alpha+\beta=-(2m-3)<0$, $\quad 2m-3>0$

$\therefore m>\dfrac{3}{2}$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $\quad \dfrac{3}{2}<m<4$

따라서 정수 m은 2, 3의 2개이다. 답 ②

16 $f(x)=x^2-2kx+2-k$라 하면 이차방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 두 근이 모두 1보다 작으므로 $f(x)=0$의 판별식을 D라 하면

(ⅰ) $\dfrac{D}{4}=(-k)^2-(2-k)>0$에서

$k^2+k-2>0$, $\quad(k+2)(k-1)>0$

$\therefore k<-2$ 또는 $k>1$

(ⅱ) $f(1)=1-2k+2-k>0$ $\quad\therefore k<1$

(ⅲ) $-\dfrac{-2k}{2}=k<1$

이상에서 공통부분을 구하면 $\quad k<-2$

따라서 정수 k의 최댓값은 -3이다. 답 -3

17 $f(x)=x^2+(a^2-5)x+7a$라 하자.

이차방정식 $f(x)=0$의 두 근 사이에 3이 있으려면

$f(3)=9+3(a^2-5)+7a<0$

$3a^2+7a-6<0$, $\quad(a+3)(3a-2)<0$

$\therefore -3<a<\dfrac{2}{3}$ 답 ②

18 $x^2+x-2=0$에서 $\quad(x+2)(x-1)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=1$

즉 이차방정식 $x^2-2(k+1)x+k^2-2=0$의 서로 다른 두 근 중에서 한 근만이 -2와 1 사이에 있어야 한다.

$f(x)=x^2-2(k+1)x+k^2-2$라 하면 $y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식은

$x=-\dfrac{-2(k+1)}{2}=k+1$

k는 자연수이므로 $k+1>1$

이므로 $y=f(x)$의 그래프는 위의 그림과 같아야 한다.

$f(-2)>0$에서 $\quad 4+4k+4+k^2-2>0$

$k^2+4k+6>0$, $\quad(k+2)^2+2>0$

$\therefore k$는 모든 실수 …… ㉠

$f(1)<0$에서 $\quad 1-2k-2+k^2-2<0$

$k^2-2k-3<0$, $\quad(k+1)(k-3)<0$

$\therefore -1<k<3$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $\quad -1<k<3$

따라서 자연수 k는 1, 2이므로 구하는 합은 3이다.

답 ①

1등급을 위한 고난도 문제

본책 79~82쪽

01 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 해가 -2, 1이므로

$ax^2+bx+c=a(x+2)(x-1)$

$=ax^2+ax-2a$

$\therefore b=a,\ c=-2a$

따라서 $ax^2-bx+c<0$, 즉 $ax^2-ax-2a<0$에서

$a(x^2-x-2)<0,\qquad (x+1)(x-2)<0$

$\therefore -1<x<2$

답 $-1<x<2$

주어진 이차함수의 그래프가 아래로 볼록하므로 $a>0$

02 $ax^2+2ax+3a>0$에서

$a(x^2+2x+3)>0$ …… ㉠

ㄱ. $a=0$이면 부등식 ㉠은

$0\cdot(x^2+2x+3)>0$

이므로 해는 없다.

ㄴ. $a>0$이면 부등식 ㉠은

$x^2+2x+3>0$, 즉 $(x+1)^2+2>0$

이므로 해는 모든 실수이다.

ㄷ. $a<0$이면 부등식 ㉠은

$x^2+2x+3<0$, 즉 $(x+1)^2+2<0$

이므로 해는 없다.

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

모든 실수 x에 대하여 $(x+1)^2+2>0$이므로 부등식 $(x+1)^2+2<0$을 만족시키는 해는 없다.

03 (i) $x<0$일 때,

$x^2-x-2\le 0,\qquad (x+1)(x-2)\le 0$

$\therefore -1\le x\le 2$

그런데 $x<0$이므로 $\quad -1\le x<0$ ⋯ ❶

(ii) $x\ge 0$일 때,

$x^2+x-2\le 0,\qquad (x+2)(x-1)\le 0$

$\therefore -2\le x\le 1$

그런데 $x\ge 0$이므로 $\quad 0\le x\le 1$ ⋯ ❷

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는

$-1\le x\le 1$

이므로 정수 x는 -1, 0, 1의 3개이다. ⋯ ❸

답 3

채점 기준	비율
❶ $x<0$일 때, x의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❷ $x\ge 0$일 때, x의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❸ 정수 x의 개수를 구할 수 있다.	20 %

다른 풀이 $|x|^2=x^2$이므로 주어진 부등식은

$|x|^2+|x|-2\le 0$

$(|x|+2)(|x|-1)\le 0$

$\therefore -2\le |x|\le 1$

그런데 $|x|\ge 0$이므로

$0\le |x|\le 1\qquad \therefore -1\le x\le 1$

따라서 정수 x는 -1, 0, 1의 3개이다.

04 이차방정식 $x^2+ax+2a-4=0$의 판별식을 D라 하면

$D=a^2-4(2a-4)=0$

$a^2-8a+16=0,\qquad (a-4)^2=0$

$\therefore a=4$

즉 이차부등식 $(x+4)^2<2(x+4^2)$에서

$x^2+8x+16<2x+32$

$x^2+6x-16<0,\qquad (x+8)(x-2)<0$

$\therefore -8<x<2$

따라서 정수 x는 -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1의 9개이다.

답 ⑤

05 $x^2-4nx+3n^2\le 0$에서

$(x-n)(x-3n)\le 0$

이때 n이 자연수이므로

$n\le x\le 3n$

따라서 이 부등식을 만족시키는 정수 x의 개수는

$3n-n+1=2n+1$이므로

$f(n)=2n+1$

$f(1)+f(3)+f(5)=f(m)$에서

$3+7+11=2m+1$

$2m=20\qquad \therefore m=10$

답 10

06 $x^2-(k^2+k+2)x+k^3+2k^2\le 0$에서

$x^2-(k^2+k+2)x+k^2(k+2)\le 0$

$(x-k^2)(x-k-2)\le 0$

(i) $k^2>k+2$일 때,

$k^2-k-2>0$

$(k+1)(k-2)>0$

$\therefore k>2\ (\because k>0)$

이때 주어진 부등식의 해는

$k+2\le x\le k^2$

이고 부등식을 만족시키는 x의 최댓값이 3이므로

$k^2=3\qquad \therefore k=\pm\sqrt{3}$

그런데 $k>2$이므로 이것을 만족시키는 k는 존재하지 않는다.

(ii) $k^2=k+2$일 때,

$k^2-k-2=0$

$(k+1)(k-2)=0$

$\therefore k=2\ (\because k>0)$

이때 주어진 부등식은

$(x-4)^2\le 0\qquad \therefore x=4$

그런데 이것은 x의 최댓값이 3이라는 조건을 만족시키지 않는다.

(iii) $k^2<k+2$일 때,

$k^2-k-2<0,\qquad (k+1)(k-2)<0$

$\therefore 0<k<2\ (\because k>0)$

ⓒ좋은책신사고

이때 주어진 부등식의 해는

$k^2 \le x \le k+2$

이 부등식을 만족시키는 x의 최댓값이 3이므로

$k+2=3 \qquad \therefore k=1$

이상에서 구하는 k의 값은 1이다. 답 ①

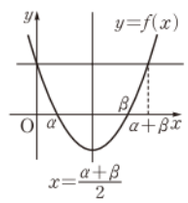
07 $f(x)=ax^2+bx+c$에서

$f(\alpha+\beta)=a(\alpha+\beta)^2+b(\alpha+\beta)+c$

이므로 주어진 부등식은

$f(x)<f(\alpha+\beta)$ …… ㉠

이때 함수 $y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식이 $x=\frac{\alpha+\beta}{2}$이므로



$f(\alpha+\beta)=f(0)$

따라서 ㉠에서 $f(x)<f(0)$이므로 주어진 부등식의 해는

$0<x<\alpha+\beta$ 답 ⑤

$y=f(x)$의 그래프는 축의 방정식 $x=\frac{\alpha+\beta}{2}$에 대하여 대칭이다.

08 액자틀의 넓이가 $140\,\text{cm}^2$ 이하가 되려면

$(8+2x)(5+2x)-5\cdot 8 \le 140$ ··· ❶

$4x^2+26x \le 140, \qquad 2x^2+13x-70 \le 0$

$(x+10)(2x-7) \le 0$

$\therefore -10 \le x \le \frac{7}{2}$

그런데 $x>0$이므로 $\qquad 0<x\le\frac{7}{2}$ ··· ❷

따라서 자연수 x의 최댓값은 3이다. ··· ❸

답 3

x는 길이이므로 $x>0$

채점 기준	비율
❶ x에 대한 이차부등식을 세울 수 있다.	30 %
❷ x의 값의 범위를 구할 수 있다.	50 %
❸ 자연수 x의 최댓값을 구할 수 있다.	20 %

09 이차부등식 $(a+b)x^2+(b+c)x+(c+a)>0$의 해가 $-3<x<0$이므로 $\qquad a+b<0$

해가 $-3<x<0$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$x(x+3)<0 \qquad \therefore x^2+3x<0$

양변에 $a+b$를 곱하면

$(a+b)x^2+3(a+b)x>0$

이 부등식이 $(a+b)x^2+(b+c)x+(c+a)>0$과 같으므로

$b+c=3(a+b),\ c+a=0$ …… ㉠

$\therefore b=-2a,\ c=-a$

이차부등식 $ax^2+bx+3c<0$, 즉 $ax^2-2ax-3a<0$에서 $a>0$이므로

$x^2-2x-3<0, \qquad (x+1)(x-3)<0$

$\therefore -1<x<3$ 답 ③

$c=-a$를 $b+c=3(a+b)$에 대입하면

$b-a=3a+3b$

$\therefore b=-2a$

$a+b<0$이고 $b=-2a$이므로

$a-2a<0$

$\therefore a>0$

다른 풀이 ㉠에서

$a+b=k\ (k<0)$ …… ㉡

로 놓으면

$b+c=3k$ …… ㉢

$c+a=0$ …… ㉣

㉡+㉢+㉣을 하면 $\qquad 2(a+b+c)=4k$

$\therefore a+b+c=2k$ …… ㉤

㉤−㉡을 하면 $\qquad c=k$

㉤−㉢을 하면 $\qquad a=-k$

㉤−㉣을 하면 $\qquad b=2k$

이차부등식 $ax^2+bx+3c<0$, 즉 $-kx^2+2kx+3k<0$에서 $-k>0$이므로

$x^2-2x-3<0, \qquad (x+1)(x-3)<0$

$\therefore -1<x<3$

10 이차부등식 $ax^2+bx+c<0$의 해가 $\frac{1}{10}<x<\frac{1}{5}$이므로 $\qquad a>0$ ··· ❶

해가 $\frac{1}{10}<x<\frac{1}{5}$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$\left(x-\frac{1}{10}\right)\left(x-\frac{1}{5}\right)<0 \qquad \therefore x^2-\frac{3}{10}x+\frac{1}{50}<0$

양변에 a를 곱하면

$ax^2-\frac{3}{10}ax+\frac{1}{50}a<0$

이 부등식이 $ax^2+bx+c<0$과 같으므로

$b=-\frac{3}{10}a,\ c=\frac{1}{50}a$ ··· ❷

이차부등식 $cx^2+bx+a\le 0$, 즉

$\frac{1}{50}ax^2-\frac{3}{10}ax+a\le 0$에서 $a>0$이므로

$x^2-15x+50\le 0, \qquad (x-5)(x-10)\le 0$

$\therefore 5\le x\le 10$ ··· ❸

따라서 정수 x는 5, 6, 7, 8, 9, 10이므로 구하는 합은 45이다. ··· ❹

답 45

채점 기준	비율
❶ a의 부호를 구할 수 있다.	20 %
❷ b, c를 a로 나타낼 수 있다.	30 %
❸ 이차부등식 $cx^2+bx+a\le 0$의 해를 구할 수 있다.	30 %
❹ 모든 정수 x의 값의 합을 구할 수 있다.	20 %

11 해가 $x=1$뿐이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x-1)^2\le 0$ …… ㉠

주어진 부등식과 부등식 ㉠의 부등호의 방향이 다르므로 $\qquad a<0$

㉠의 양변에 a를 곱하면

$a(x-1)^2\ge 0, \qquad ax^2-2ax+a\ge 0$

이 부등식이 $ax^2+bx+c\ge 0$과 같으므로

$b=-2a,\ c=a$

ㄱ. $ax^2+bx+c\le 0$, 즉 $a(x-1)^2\le 0$의 해는 모든 실수이다.

ㄴ. $-ax^2+bx-c\le 0$, 즉 $-ax^2-2ax-a\le 0$에서

$-a(x+1)^2\le 0$

따라서 부등식의 해는 $x=-1$뿐이다.

ㄷ. $cx^2+2bx+4a\ge 0$, 즉 $ax^2-4ax+4a\ge 0$에서

$a(x-2)^2\ge 0$

따라서 부등식의 해는 $x=2$뿐이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

일품 BOX

$a<0$이므로 양변을 a로 나누면
$(x-1)^2\ge 0$
따라서 해는 모든 실수이다.

$-a>0$이므로 양변을 $-a$로 나누면
$(x+1)^2\le 0$
$\therefore x=-1$

$a<0$이므로 양변을 a로 나누면
$(x-2)^2\le 0$
$\therefore x=2$

12 해가 $\alpha\le x\le\beta$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x-\alpha)(x-\beta)\le 0$

$\therefore x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\le 0$

이 부등식이 $x^2+ax+6\le 0$과 같으므로

$a=-(\alpha+\beta),\ 6=\alpha\beta$ …… ㉠

해가 $x\le\alpha+1$ 또는 $x\ge\beta+1$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x-\alpha-1)(x-\beta-1)\ge 0$

$\therefore x^2-(\alpha+\beta+2)x+(\alpha+1)(\beta+1)\ge 0$

이 부등식이 $x^2-7x+b\ge 0$과 같으므로

$7=\alpha+\beta+2,\ b=(\alpha+1)(\beta+1)$ …… ㉡

㉡에서 $\alpha+\beta=5$이므로 ㉠에서

$a=-(\alpha+\beta)=-5$

㉠에서 $\alpha\beta=6$이므로 ㉡에서

$b=(\alpha+1)(\beta+1)$

$=\alpha\beta+(\alpha+\beta)+1$

$=6+5+1=12$

$\therefore a+b=7$ 답 7

13 주어진 그래프에서 이차부등식 $f(x)\le 0$의 해는

$-1\le x\le 2$

이차부등식 $f(x)\le 0$의 해
➡ 이차함수 $y=f(x)$의 그래프에서 x축보다 아래쪽에 있거나 x축과 만나는 부분의 x의 값의 범위

이때 $f\left(\frac{x+k}{2}\right)\le 0$에서 $\frac{x+k}{2}=t$로 놓으면 $f(t)\le 0$이고, 부등식 $f(t)\le 0$의 해는 $-1\le t\le 2$이므로

$-1\le\frac{x+k}{2}\le 2,\quad -2\le x+k\le 4$

$\therefore -2-k\le x\le 4-k$

따라서 $-2-k=-4,\ 4-k=2$이므로

$k=2$ 답 ③

14 이차부등식 $f(x)>0$의 해가 $-2<x<1$이므로 $f(x)=a(x+2)(x-1)\ (a<0)$로 놓으면

$f(2x-1)=a(2x+1)(2x-2)$

$=2a(2x+1)(x-1)$

이때 $f(0)=-2a$이므로 $f(2x-1)\le f(0)$에서

$2a(2x+1)(x-1)\le -2a$

$2a\{(2x+1)(x-1)+1\}\le 0$

$2a(2x^2-x)\le 0,\quad x(2x-1)\ge 0\ (\because a<0)$

$\therefore x\le 0$ 또는 $x\ge\frac{1}{2}$

따라서 자연수 x의 최솟값은 1이다. 답 1

15 이차부등식 $x^2+(a-1)x-a+4\le 0$의 해가 존재하지 않으므로 이차방정식 $x^2+(a-1)x-a+4=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(a-1)^2-4(-a+4)<0$

$a^2+2a-15<0,\quad (a+5)(a-3)<0$

$\therefore -5<a<3$ ⋯ ❶

$(x+2)a-3x<6$에서

$(a-3)x<-2(a-3)$

이때 $a-3<0$이므로 $x>-2$ ⋯ ❷

$-5<a<3$에서
$-8<a-3<0$

따라서 정수 x의 최솟값은 -1이다. ⋯ ❸

답 -1

채점 기준	비율
❶ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	50 %
❷ 부등식 $(x+2)a-3x<6$의 해를 구할 수 있다.	40 %
❸ 정수 x의 최솟값을 구할 수 있다.	10 %

16 $a(x^2-2x+2)>-2x$에서

$ax^2-2(a-1)x+2a>0$

이 부등식의 해가 존재하지 않으려면

$a<0$ …… ㉠

이차방정식 $ax^2-2(a-1)x+2a=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\{-(a-1)\}^2-2a^2\le 0$

$-a^2-2a+1\le 0,\quad a^2+2a-1\ge 0$

$\therefore a\le -1-\sqrt{2}$ 또는 $a\ge -1+\sqrt{2}$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$a\le -1-\sqrt{2}$ 답 ①

17 모든 실수 x에 대하여 이차부등식

$x^2+mx+am+b>0$

이 성립하므로 이차방정식 $x^2+mx+am+b=0$의 판별식을 D라 하면

$D=m^2-4(am+b)<0$

$\therefore m^2-4am-4b<0$

해가 $-2<m<4$이고 m^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(m+2)(m-4)<0,\quad m^2-2m-8<0$

이 부등식이 $m^2-4am-4b<0$과 같으므로

$4a=2,\ 4b=8\quad \therefore a=\frac{1}{2},\ b=2$

$\therefore ab=\frac{1}{2}\cdot 2=1$ 답 ②

ⓒ좋은책신사고

18 $|x|=t\ (t\ge0)$로 놓으면 주어진 부등식은

$t^2-2at+2a^2+a\ge0$

$x^2=|x|^2=t^2$

$f(t)=t^2-2at+2a^2+a=(t-a)^2+a^2+a$라 하면

$t\ge0$에서 $f(t)\ge0$이어야 한다. ··· ❶

(i) $a<0$일 때, $f(0)\ge0$이어야 하므로

$2a^2+a\ge0,\qquad a(2a+1)\ge0$

$\therefore a\le-\frac{1}{2}$ 또는 $a\ge0$

그런데 $a<0$이므로 $\qquad a\le-\frac{1}{2}$

(ii) $a\ge0$일 때, $f(a)\ge0$이어야 하므로

$a^2+a\ge0,\qquad a(a+1)\ge0$

$\therefore a\le-1$ 또는 $a\ge0$

그런데 $a\ge0$이므로 $\qquad a\ge0$

(i), (ii)에서 a의 값의 범위는

$a\le-\frac{1}{2}$ 또는 $a\ge0$ ··· ❷

따라서 $\alpha=-\frac{1}{2}$, $\beta=0$이므로

$\beta-\alpha=\frac{1}{2}$ ··· ❸

답 $\frac{1}{2}$

채점 기준	비율
❶ $\|x\|=t$로 놓고 주어진 부등식이 성립할 t에 대한 조건을 구할 수 있다.	30 %
❷ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	50 %
❸ $\beta-\alpha$의 값을 구할 수 있다.	20 %

19 $a<b<c$이므로 부등식 $(x-a)(x-b)>0$의 해는 $\qquad x<a$ 또는 $x>b$ ····· ㉠

부등식 $(x-b)(x-c)>0$의 해는

$x<b$ 또는 $x>c$ ····· ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$x<a$ 또는 $x>c$

$\therefore a=-1,\ c=6$ ··· ❶

따라서 $x^2+ax-c<0$, 즉 $x^2-x-6<0$에서

$(x+2)(x-3)<0\qquad\therefore -2<x<3$ ··· ❷

답 $-2<x<3$

채점 기준	비율
❶ a, c의 값을 구할 수 있다.	70 %
❷ 이차부등식 $x^2+ax-c<0$의 해를 구할 수 있다.	30 %

20 $x^2-5x-6>0$에서

$(x+1)(x-6)>0\qquad\therefore x<-1$ 또는 $x>6$

$x^2+a^2<(a^2-a+1)x+a$에서

$x^2-(a^2-a+1)x+(a^2-a)<0$

$(x-1)(x-a^2+a)<0$

$\therefore\begin{cases}a^2-a>1\text{일 때,} & 1<x<a^2-a\\ a^2-a=1\text{일 때,} & \text{해가 없다.}\\ a^2-a<1\text{일 때,} & a^2-a<x<1\end{cases}$

이때 주어진 연립부등식이 해를 갖지 않으려면

$-1\le a^2-a\le6$

$-1\le a^2-a$에서 $\qquad a^2-a+1\ge0$

$\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\ge0$

$\therefore a$는 모든 실수 ····· ㉠

$a^2-a\le6$에서 $\qquad a^2-a-6\le0$

$(a+2)(a-3)\le0$

$\therefore -2\le a\le3$ ····· ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $\qquad -2\le a\le3$

따라서 정수 a는 $-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3$의 6개이다.

답 6

21 $|x-1|(x-2)\ge0$에서 $|x-1|\ge0$이므로

$x=1$ 또는 $x\ge2$ ····· ㉠

주어진 연립부등식을 만족시키는 정수 x가 5개이므로

부등식 $(2x-1)(x-a)\le0$의 해는

$\frac{1}{2}\le x\le a$ ····· ㉡

이어야 하고 오른쪽 그림에서

$5\le a<6$

답 ④

22 $f(x)g(x)\le0$에서

$f(x)\le0,\ g(x)\ge0$ 또는 $f(x)\ge0,\ g(x)\le0$

이때 $f(x)\le g(x)$이므로 $\qquad f(x)\le0,\ g(x)\ge0$

$f(x)\le0$에서 $\qquad -1\le x\le2$ ····· ㉠

$g(x)\ge0$에서 $\qquad -2\le x\le1$ ····· ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $\qquad -1\le x\le1$

따라서 정수 x는 $-1,\ 0,\ 1$의 3개이다. 답 ③

23 두 이차방정식

$x^2+(a-2)x+2-a=0,$ ····· ㉠

$x^2+(a+2)x+2a+1=0$ ····· ㉡

의 판별식을 각각 D_1, D_2라 하면

$D_1=(a-2)^2-4(2-a)=a^2-4$

$=(a+2)(a-2)$

$D_2=(a+2)^2-4(2a+1)=a^2-4a$

$=a(a-4)$

(i) ㉠은 실근, ㉡은 허근을 가질 때,

$D_1=(a+2)(a-2)\ge0$에서

$a\le-2$ 또는 $a\ge2$ ····· ㉢

$D_2=a(a-4)<0$에서

$0<a<4$ ····· ㉣

㉢, ㉣의 공통부분을 구하면 $\qquad 2\le a<4$

(ii) ㉠은 허근, ㉡은 실근을 가질 때,

$D_1=(a+2)(a-2)<0$에서

$-2<a<2$ …… ㉤

$D_2=a(a-4)\geq 0$에서

$a\leq 0$ 또는 $a\geq 4$ …… ㉥

㉤, ㉥의 공통부분을 구하면 $-2<a\leq 0$

(i), (ii)에서

$-2<a\leq 0$ 또는 $2\leq a<4$

따라서 정수 a는 -1, 0, 2, 3이므로 구하는 합은 4이다.

답 4

24 (i) $x+2a\leq x^2$, 즉 $x^2-x-2a\geq 0$에서

$x^2-x-2a=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}-2a$ …… ㉠

$0\leq x\leq 1$에서 ㉠은 $x=\frac{1}{2}$일 때 최솟값 $-\frac{1}{4}-2a$를 갖고, 주어진 부등식이 항상 성립하므로

$-\frac{1}{4}-2a\geq 0$ $\quad\therefore a\leq -\frac{1}{8}$ ⋯ ❶

$p\leq x\leq q$에서 부등식 $f(x)\geq 0$이 항상 성립하려면 $p\leq x\leq q$에서 ($f(x)$의 최솟값)≥ 0이어야 한다.

(ii) $x^2\leq 2x+3b$, 즉 $x^2-2x-3b\leq 0$에서

$x^2-2x-3b=(x-1)^2-1-3b$ …… ㉡

$0\leq x\leq 1$에서 ㉡은 $x=0$일 때 최댓값 $-3b$를 갖고, 주어진 부등식이 항상 성립하므로

$-3b\leq 0$ $\quad\therefore b\geq 0$ ⋯ ❷

$p\leq x\leq q$에서 부등식 $f(x)\leq 0$이 항상 성립하려면 $p\leq x\leq q$에서 ($f(x)$의 최댓값)≤ 0이어야 한다.

(i), (ii)에서 $a\leq -\frac{1}{8}$, $b\geq 0$이므로

$b-8a\geq 1$

$a\leq -\frac{1}{8}$에서 $-8a\geq 1$이고 $b\geq 0$이므로 $b-8a\geq 1$

따라서 $b-8a$의 최솟값은 1이다. ⋯ ❸

답 1

채점 기준	비율
❶ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❷ b의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❸ $b-8a$의 최솟값을 구할 수 있다.	20 %

25 A음료 한 잔의 가격을 $200x$원 인상하면 하루 판매량이 $4x$잔 줄어드므로 하루 판매액은

$(2000+200x)(100-4x)$ (원)

이고 하루 판매액이 24만 원 이상이려면

$(2000+200x)(100-4x)\geq 240000$

$x^2-15x+50\leq 0$, $\quad(x-5)(x-10)\leq 0$

$\therefore 5\leq x\leq 10$ …… ㉠

A음료 한 잔의 가격을 $100x$원 인하하면 하루 판매량이 $10x$잔 늘어나므로 하루 판매액은

$(2000-100x)(100+10x)$ (원)

이고 하루 판매액이 22만 원 이상이려면

$(2000-100x)(100+10x)\geq 220000$

$x^2-10x+20\leq 0$

$\therefore 5-\sqrt{5}\leq x\leq 5+\sqrt{5}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 공통부분을 구하면

$5\leq x\leq 5+\sqrt{5}$

$5+\sqrt{5}=7.\times\times\times$

따라서 자연수 x는 5, 6, 7이므로 구하는 합은 18이다.

답 18

26 주어진 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=\{-(a-1)\}^2-4(a-3)$

$=a^2-6a+13=(a-3)^2+4>0$

이므로 모든 실수 a에 대하여 주어진 이차방정식은 실근을 갖는다.

ㄱ. $\alpha=-\beta$이면

$\alpha+\beta=a-1$에서 $\quad 0=a-1$ $\quad\therefore a=1$

ㄴ. α와 β의 부호가 서로 다르면

$\alpha\beta=a-3<0$ $\quad\therefore a<3$

ㄷ. (i) $\alpha>0$, $\beta>0$일 때,

$\alpha+\beta=a-1>0$

$\therefore a>1$ …… ㉠

$\alpha\beta=a-3>0$

$\therefore a>3$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $\quad a>3$

(ii) $\alpha<0$, $\beta<0$일 때,

$\alpha+\beta=a-1<0$

$\therefore a<1$ …… ㉢

$\alpha\beta=a-3>0$

$\therefore a>3$ …… ㉣

㉢, ㉣을 동시에 만족시키는 a의 값은 없다.

(i), (ii)에서 $\quad a>3$

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ④

27 주어진 이차방정식의 판별식을 D라 하면 이 이차방정식이 실근을 가지므로

$\frac{D}{4}=\{-(k+1)\}^2-(k+3)\geq 0$

$k^2+k-2\geq 0$, $\quad(k+2)(k-1)\geq 0$

$\therefore k\leq -2$ 또는 $k\geq 1$ …… ㉠

ㄱ. $\alpha>0$, $\beta>0$이면 $\alpha+\beta>0$, $\alpha\beta>0$이므로

$\alpha+\beta=2(k+1)>0$에서 $\quad k>-1$ …… ㉡

$\alpha\beta=k+3>0$에서 $\quad k>-3$ …… ㉢

㉠, ㉡, ㉢의 공통부분을 구하면 $\quad k\geq 1$

ㄴ. $\alpha>0$, $\beta<0$이면 $\alpha\beta<0$이므로

$\alpha\beta=k+3<0$에서 $\quad k<-3$ …… ㉣

㉠, ㉣의 공통부분을 구하면 $\quad k<-3$

ㄷ. $\alpha<-\beta$, $\beta>0$이면 $\alpha<0$이므로

$\beta>0$에서 $-\beta<0$이므로 $\alpha<-\beta<0$

$\alpha+\beta<0$, $\alpha\beta<0$

$\alpha+\beta=2(k+1)<0$에서 $\quad k<-1$ …… ㉤

$\alpha\beta=k+3<0$에서 $\quad k<-3$ …… ㉥

㉠, ㉤, ㉥의 공통부분을 구하면 $\quad k<-3$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

28 이차방정식 $x^2-ax+b=0$의 판별식을 D_1이라 하면 이 이차방정식이 중근을 가지므로

$$D_1=(-a)^2-4b=0 \qquad \therefore b=\frac{1}{4}a^2$$

이차방정식 $x^2-(a+3)x+a+6=0$의 두 근을 α, β라 하고, 판별식을 D_2라 하면 이 이차방정식이 두 양의 실근을 가지므로

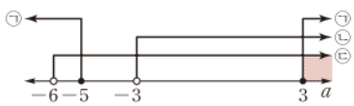
(i) $D_2=\{-(a+3)\}^2-4(a+6)\geq 0$에서

$a^2+2a-15\geq 0, \qquad (a+5)(a-3)\geq 0$

$\therefore a\leq -5$ 또는 $a\geq 3$ …… ㉠

(ii) $\alpha+\beta=a+3>0$에서 $\quad a>-3$ …… ㉡

(iii) $\alpha\beta=a+6>0$에서 $\quad a>-6$ …… ㉢



이상에서 공통부분을 구하면 $\quad a\geq 3$

$$a-b=a-\frac{1}{4}a^2=-\frac{1}{4}(a-2)^2+1$$

이므로 $a\geq 3$에서 $a-b$는 $a=3$일 때 최댓값 $\frac{3}{4}$을 갖는다.

답 ③

$-\frac{1}{4}\cdot(3-2)^2+1=\frac{3}{4}$

29 $f(x)=2(x-b)(x-c)-(x-a)^2$이라 하면

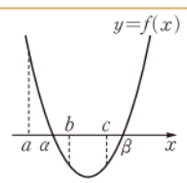
$f(a)=2(a-b)(a-c)>0$

$a<b<c$이므로
$a-b<0,\ a-c<0$
$\therefore (a-b)(a-c)>0$

$f(b)=-(b-a)^2<0$

$f(c)=-(c-a)^2<0$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다.



$\therefore a<\alpha<b<c<\beta$

답 ④

30 $f(x)=x^2+4mx+m^2+3$이라 하고, 방정식 $f(x)=0$의 판별식을 D라 하면

(i) $\frac{D}{4}=(2m)^2-(m^2+3)\geq 0$에서

$m^2-1\geq 0, \qquad (m+1)(m-1)\geq 0$

$\therefore m\leq -1$ 또는 $m\geq 1$

(ii) $f(-2)=4-8m+m^2+3\leq 0$에서

$m^2-8m+7\leq 0, \qquad (m-1)(m-7)\leq 0$

$\therefore 1\leq m\leq 7$

(iii) $f(0)=m^2+3>0$이므로 m은 모든 실수이다.

이상에서 $\quad 1\leq m\leq 7$

따라서 정수 m은 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7의 7개이다.

답 ⑤

31 이차방정식 $(a+1)x^2+4x-a+1=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=2^2-(a+1)(-a+1)=a^2+3>0$$

이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다. ⋯ ❶

$f(x)=(a+1)x^2+4x-a+1$이라 하자.

(i) $f(0)=0$일 때,

$f(0)=-a+1=0$이므로 $\quad a=1$

주어진 이차방정식은 $2x^2+4x=0$이므로

$x(x+2)=0 \qquad \therefore x=-2$ 또는 $x=0$

따라서 $0\leq x\leq 2$에서 오직 한 개의 실근을 갖는다.

(ii) $f(2)=0$일 때,

$f(2)=3a+13=0$이므로 $\quad a=-\frac{13}{3}$

주어진 이차방정식은 $-\frac{10}{3}x^2+4x+\frac{16}{3}=0$이므로

$5x^2-6x-8=0$

$(5x+4)(x-2)=0 \qquad \therefore x=-\frac{4}{5}$ 또는 $x=2$

따라서 $0\leq x\leq 2$에서 오직 한 개의 실근을 갖는다.

⋯ ❷

(iii) $f(0)f(2)<0$일 때,

$(-a+1)(3a+13)<0$

$(a-1)(3a+13)>0$

$\therefore a<-\frac{13}{3}$ 또는 $a>1$ ⋯ ❸

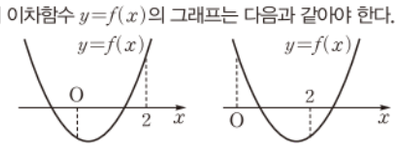
이상에서 $\quad a\leq -\frac{13}{3}$ 또는 $a\geq 1$ ⋯ ❹

답 $a\leq -\frac{13}{3}$ 또는 $a\geq 1$

채점 기준	비율
❶ 주어진 이차방정식의 실근의 개수를 구할 수 있다.	20 %
❷ $f(0)=0$ 또는 $f(2)=0$일 때의 a의 값이 조건을 만족시키는지 알 수 있다.	30 %
❸ $f(0)f(2)<0$일 때 a의 값의 범위를 구할 수 있다.	30 %
❹ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	20 %

1등급 비밀노트

$f(0)\neq 0$, $f(2)\neq 0$일 때, 주어진 조건을 만족시키려면 $a+1>0$인 경우에 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같아야 한다.



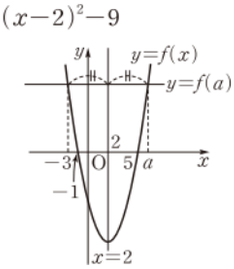
따라서 (iii)에서 두 수의 함숫값의 부호가 서로 다름을 이용하여 푼다.

사고력 강화를 위한 수능형 문제

본책 83쪽

01 $f(x)=(x+1)(x-5)=(x-2)^2-9$

오른쪽 그림에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=2$에 대하여 대칭이고 부등식 $f(x)<f(a)$의 해가 $-3<x<a$이므로 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=f(a)$가 만나는 두 점의 x좌표는 -3, a이다.



즉 $2-(-3)=a-2$에서 $\quad a=7$

직선 $x=2$로부터 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=f(a)$의 두 교점까지의 거리가 같다.

부등식 $f(x)<a$에서 $(x+1)(x-5)<7$

$x^2-4x-12<0$, $(x+2)(x-6)<0$

$\therefore -2<x<6$

따라서 정수 x는 -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5이므로 구하는 합은 14이다. 답 14

02 세 지점 A, B, C를 B를 원점으로 하는 수직선 위에 놓고 1 km를 1로 생각하면

A(-10), B(0), C(20)

보관 창고의 좌표를 t라 하면 보관 창고는 B와 C 사이에 있으므로 $0<t<20$ …… ㉠

이때 하루에 드는 총 운송비는

$200(t+10)^2+100t^2+300(20-t)^2$ (원)

이므로 하루에 드는 총 운송비가 155000원 이하이려면

$200(t+10)^2+100t^2+300(20-t)^2\le 155000$

$3t^2-40t-75\le 0$, $(3t+5)(t-15)\le 0$

$\therefore -\frac{5}{3}\le t\le 15$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $0<t\le 15$

따라서 보관 창고는 B지점에서 최대 15 km 떨어진 지점까지 지을 수 있다. 답 ④

03 빗변이 아닌 두 변의 길이를 a, b $(a<b)$라 하면

조건 (가)에 의하여

$a+b=11$ …… ㉠

조건 (나)에 의하여 $\frac{1}{2}ab>14$

$\therefore ab>28$ …… ㉡

㉠에서 $b=11-a$이므로 이것을 ㉡에 대입하면

$a(11-a)>28$, $a^2-11a+28<0$

$(a-4)(a-7)<0$ $\therefore 4<a<7$

그런데 조건 (다)에서 a는 자연수이므로 $a=5$

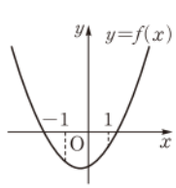
$a=5$를 ㉠에 대입하면 $b=6$

따라서 직각삼각형의 빗변의 길이는

$\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{5^2+6^2}=\sqrt{61}$ 답 ①

$a=6$이면 $b=5$이므로
$a>b$
$\therefore a\neq 6$

04 $f(x)=x^2+(t-2)x+2t$라 하면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



(i) $f(1)=1+t-2+2t\le 0$에서

$3t-1\le 0$ $\therefore t\le\frac{1}{3}$

(ii) $f(-1)=1-t+2+2t\le 0$에서

$t+3\le 0$ $\therefore t\le -3$

(i), (ii)에서 $t\le -3$이므로 실수 t의 최댓값은 -3이다. 답 ①

05 부등식 $x^2+2ax-3a^2\le 0$에서

$(x+3a)(x-a)\le 0$

$\therefore -3a\le x\le a$ …… ㉠

부등식 $x^2-2ax-3a^2<0$에서

$(x+a)(x-3a)<0$

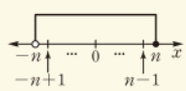
$\therefore -a<x<3a$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$-a<x\le a$ …… ㉢

(i) $a=n$ (n은 자연수)일 때,

㉢을 만족시키는 정수 x는

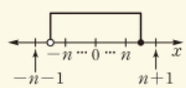


$-n+1$, $-n+2$, $\cdots$, -2, -1, 0, 1, 2, $\cdots$, $n-1$, n

$\therefore f(a)=2n=2a$, $S(a)=n=a$

(ii) $n<a<n+1$ (n은 음이 아닌 정수)일 때,

㉢을 만족시키는 정수 x는



$-n$, $-n+1$, $-n+2$, $\cdots$, -2, -1, 0, 1, 2, $\cdots$, $n-1$, n

$\therefore f(a)=2n+1$, $S(a)=0$

$f(a)=24$이면 $24=2\cdot 12$이므로 (i)에 의하여 $a=12$

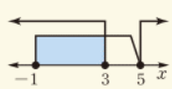
$p=12$

$f(a)=37$이면 $37=2\cdot 18+1$이므로 (ii)에 의하여 $18<a<19$

$q=0$

$\therefore p+q=12$ 답 12

06 주어진 연립부등식의 해가 $-1\le x\le 3$ 또는 $x=5$이려면



$x^2+ax+b=(x-3)(x-5)\ge 0$,

$x^2+cx+d=(x+1)(x-5)\le 0$

이어야 한다.

$x^2+ax+b=x^2-8x+15$에서 $a=-8$, $b=15$

$x^2+cx+d=x^2-4x-5$에서 $c=-4$, $d=-5$

$\therefore ad-bc=40-(-60)=100$ 답 100

07 $x^2-x-n-n^2\ge 0$에서

$(x+n)(x-n-1)\ge 0$

$\therefore x\le -n$ 또는 $x\ge n+1$ …… ㉠

n은 자연수이므로 $-n<n+1$

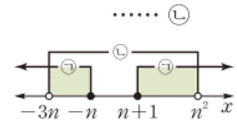
$x^2+n(3-n)x-3n^3<0$에서

$(x+3n)(x-n^2)<0$

$\therefore -3n<x<n^2$ …… ㉡

n은 자연수이므로 $-3n<n^2$

오른쪽 그림에서 ㉠, ㉡의 공통부분을 구하면



$-3n<x\le -n$

또는 $n+1\le x<n^2$

$n\neq 1$이므로 $n\ge 2$에서 $n+1<n^2$

즉 정수 x의 개수는

$\{-n-(-3n)\}+\{n^2-(n+1)\}=n^2+n-1$

따라서 $n^2+n-1>55$에서

$n^2+n-56>0$, $(n+8)(n-7)>0$

$\therefore n>7$ ($\because n\ge 2$)

따라서 구하는 자연수 n의 최솟값은 8이다. 답 8

ⓒ좋은책신사고

만점 도전을 위한 실전 마무리 문제

본책 84~87쪽

01 전략 부등식의 성질과 두 수의 차를 이용하여 두 수의 대소 관계를 조사한다.

풀이 ㄱ. $|a|>1$이면 $0<\frac{1}{|a|}<1$이다.

ㄴ. $ab>0$이므로 $b<a<0$에서

$$\frac{b}{ab}<\frac{a}{ab}<0 \qquad \therefore \frac{1}{a}<\frac{1}{b}<0$$

ㄷ. $\frac{a+1}{b+1}-\frac{a}{b}=\frac{b(a+1)-a(b+1)}{b(b+1)}=\frac{b-a}{b(b+1)}<0$

$$\therefore \frac{a+1}{b+1}<\frac{a}{b}$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ④

02 전략 두 수의 차의 부호를 구하여 세 수 사이의 대소 관계를 조사한다.

풀이 $A-B$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)$

$\quad -(a+b+c)(ab+bc+ca)$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

$=\frac{1}{2}(a+b+c)\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$

>0

$\therefore A>B$ …… ㉠

$C-A$

$=3(a^3+b^3+c^3)-(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)$

$=2(a^3+b^3+c^3)-(a^2b+b^2a+b^2c+c^2b+c^2a+a^2c)$

$=(a^3+b^3-a^2b-b^2a)+(b^3+c^3-b^2c-c^2b)$

$\quad +(c^3+a^3-c^2a-a^2c)$

$=\{a^2(a-b)-b^2(a-b)\}+\{b^2(b-c)-c^2(b-c)\}$

$\quad +\{c^2(c-a)-a^2(c-a)\}$

$=(a-b)^2(a+b)+(b-c)^2(b+c)+(c-a)^2(c+a)$

>0

$\therefore C>A$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $B<A<C$ 답 ③

03 전략 먼저 부등식의 해가 주어진 해와 일치하기 위한 a, b의 조건을 찾는다.

풀이 $ax+x-b>0$에서 $(a+1)x>b$

이 부등식의 해가 $x<1$이므로

$$a+1<0 \qquad \therefore x<\frac{b}{a+1}$$

따라서 $\frac{b}{a+1}=1$이므로 $b=a+1$ …… ㉠

$ax-bx-b<0$에서 $(a-b)x<b$

$\{a-(a+1)\}x<a+1$, $-x<a+1$

$\therefore x>-a-1$

이때 a가 정수이므로 이 부등식을 만족시키는 정수 x의 최솟값은 $-a$

일품 BOX

$|a|>1$의 양변을 $|a|$로 나누면

$\frac{1}{|a|}<1$

$0<b<a$에서

$b-a<0$

서로 다른 세 양수 a, b, c에 대하여

$a+b+c>0$,

$(a-b)^2>0$,

$(b-c)^2>0$,

$(c-a)^2>0$

$\overline{AD}+\overline{EF}+\overline{BC}$

$\overline{AE}+\overline{EB}=8$

$\overline{DF}+\overline{FC}=8$

$\overline{MN}+\overline{GI}=8$

$\overline{HJ}=8-x$

$-a=4$에서 $a=-4$

㉠에 $a=-4$를 대입하면 $b=-3$

$\therefore a+b=-7$ 답 ④

04 전략 두 연립부등식의 해를 각각 구하여 해가 같아지도록 하는 a, b의 값을 구한다.

풀이 $2x-5<x+1$에서 $x<6$

$10-x<x+a$에서

$$-2x<a-10 \qquad \therefore x>\frac{10-a}{2}$$

이때 연립부등식 $\begin{cases}2x-5<x+1\\10-x<x+a\end{cases}$의 해가 존재하므로

그 해는 $\frac{10-a}{2}<x<6$ …… ㉠

$3x+b<2-x$에서

$$4x<2-b \qquad \therefore x<\frac{2-b}{4}$$

$x+3<2x+1$에서 $x>2$

이때 연립부등식 $\begin{cases}3x+b<2-x\\x+3<2x+1\end{cases}$의 해가 존재하므로

그 해는 $2<x<\frac{2-b}{4}$ …… ㉡

두 연립부등식의 해가 서로 같으므로 ㉠, ㉡에서

$$\frac{10-a}{2}=2,\ 6=\frac{2-b}{4}$$

따라서 $a=6$, $b=-22$이므로

$a+b=-16$ 답 ①

05 전략 선분의 길이를 x에 대한 식으로 나타낸 후 주어진 조건을 이용하여 부등식을 세운다.

풀이 가로에 있는 선분의 길이의 합은

$2x\cdot3=6x$

$\overline{EB}=8-x$이므로 세로에 있는 선분의 길이의 합은

$8\cdot3+(8-x)=32-x$

$6x+(32-x)\le62$이므로

$5x+32\le62$ $\therefore x\le6$ …… ㉠

$\overline{BI}=\overline{JC}=\overline{EB}=8-x$이므로

$\overline{IJ}=2x-2(8-x)=4x-16$

직사각형 GIJH의 둘레의 길이는

$2\{(4x-16)+(8-x)\}=6x-16$

이므로 $6x-16>3x$에서 $x>\frac{16}{3}$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $\frac{16}{3}<x\le6$ 답 ④

06 전략 $A<B<C$ 꼴의 부등식은 연립부등식 $\begin{cases}A<B\\B<C\end{cases}$로 바꾸어 푼다.

풀이 $2x+b<a(x-1)+b$에서

$(2-a)x<-a$ …… ㉠

$a(x-1)+b<ax+4$에서

$ax-a+b<ax+4$

$\therefore 0\cdot x<a-b+4$ …… ㉡

주어진 부등식의 해가 존재하므로

$a-b+4>0$ …… ㉢

이고 부등식 ㉡의 해는 모든 실수이다.

주어진 부등식의 해가 $x>3$이므로 ㉠에서

$2-a<0 \qquad \therefore x>-\dfrac{a}{2-a}$

즉 $-\dfrac{a}{2-a}=3$이므로 $\qquad -a=6-3a \qquad \therefore a=3$

㉢에 $a=3$을 대입하면 $\qquad 3-b+4>0 \qquad \therefore b<7$

따라서 자연수 a, b의 순서쌍 (a, b)는

$(3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6)$

의 6개이다. 답 ③

07 전략 $|x|<\alpha\ (\alpha>0)$이면 $-\alpha<x<\alpha$이다.

풀이 $a|x|-a^2<b|x|-b^2$에서

$(a-b)|x|<a^2-b^2$

$(a-b)|x|<(a+b)(a-b)$

$a>b>0$에서 $a-b>0$이므로 양변을 $a-b$로 나누면

$|x|<a+b$

$\therefore -a-b<x<a+b$ 답 ②

08 전략 $x<0$일 때와 $x\geq 0$일 때로 나누어 부등식의 해를 구한다.

풀이 (i) $x<0$일 때, $\langle x\rangle=-2x$이므로 주어진 부등식은

$4x^2+2x-2\leq 0, \qquad 2x^2+x-1\leq 0$

$(x+1)(2x-1)\leq 0 \qquad \therefore -1\leq x\leq \dfrac{1}{2}$

그런데 $x<0$이므로 $\qquad -1\leq x<0$

(ii) $x\geq 0$일 때, $\langle x\rangle=3x$이므로 주어진 부등식은

$9x^2-3x-2\leq 0, \qquad (3x+1)(3x-2)\leq 0$

$\therefore -\dfrac{1}{3}\leq x\leq \dfrac{2}{3}$

그런데 $x\geq 0$이므로 $\qquad 0\leq x\leq \dfrac{2}{3}$

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는

$-1\leq x\leq \dfrac{2}{3}$

따라서 $\alpha=-1$, $\beta=\dfrac{2}{3}$이므로 $\qquad \alpha+\beta=-\dfrac{1}{3}$ 답 ③

1등급 비밀노트

$\langle x\rangle^2-\langle x\rangle-2\leq 0$에서

$(\langle x\rangle+1)(\langle x\rangle-2)\leq 0$

$\therefore -1\leq \langle x\rangle\leq 2$ …… ㉠

따라서 $x<0$일 때와 $x\geq 0$일 때로 나누어 부등식 ㉠의 해를 구해도 된다.

09 전략 주어진 부등식을 $f(x)>0$ 꼴로 변형한 후 $f(x)$를 인수분해한다.

풀이 부등식 ㉠에서

$(a^2-b^2)x^2-4(a^2-b^2)x+3(a^2-b^2)>0$

$(a^2-b^2)(x^2-4x+3)>0$ …… ㉡

ㄱ. $|a|<|b|$이면 $a^2<b^2$이므로 $\qquad a^2-b^2<0$

㉡에서 부등식 ㉠의 해는 $\qquad x^2-4x+3<0$

$(x-1)(x-3)<0 \qquad \therefore 1<x<3$

ㄴ. $a=b$이면 ㉡에서

$a=b$이면 $a^2-b^2=0$

$0\cdot(x^2-4x+3)>0$

이므로 부등식 ㉠의 해는 없다.

ㄷ. $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$에서 $a+b<0$, $b>0$이면

$a-b=a+b-2b<0$

$a+b<0$, $-2b<0$이므로 $a+b-2b<0$

이므로 $\qquad (a+b)(a-b)>0$

㉡에서 부등식 ㉠의 해는 $\qquad x^2-4x+3>0$

$(x-1)(x-3)>0 \qquad \therefore x<1$ 또는 $x>3$

따라서 자연수 x의 최솟값은 4이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

10 전략 주어진 조건을 이용하여 t에 대한 이차부등식을 세운다.

풀이 물체의 높이 h m가 165 m 이상이므로

$70t-5t^2\geq 165, \qquad 5t^2-70t+165\leq 0$

$t^2-14t+33\leq 0, \qquad (t-3)(t-11)\leq 0$

$\therefore 3\leq t\leq 11$

따라서 이 물체의 높이가 165 m 이상인 시간은 3초부터 11초까지인 8초 동안이다. 답 ④

11 전략 부등식의 해를 이용하여 이차부등식을 완성하고 a, b, c 사이의 관계를 찾는다.

풀이 해가 $\alpha<x<\beta$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

해가 $p<x<q$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은 $(x-p)(x-q)<0$

$(x-\alpha)(x-\beta)<0 \qquad \therefore x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta<0$

양변에 2를 곱하면 $\qquad 2x^2-2(\alpha+\beta)x+2\alpha\beta<0$

이 부등식이 $2x^2-4x+1<0$과 같으므로

$\alpha+\beta=2, \ \alpha\beta=\dfrac{1}{2}$

부등식 $ax^2+bx+c<0$의 해가 $\dfrac{1}{\beta}<x<\dfrac{1}{\alpha}$이므로

$a>0$

해가 $\dfrac{1}{\beta}<x<\dfrac{1}{\alpha}$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$\left(x-\dfrac{1}{\alpha}\right)\left(x-\dfrac{1}{\beta}\right)<0$

$\therefore x^2-\left(\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}\right)x+\dfrac{1}{\alpha\beta}<0$

양변에 a를 곱하면 $\qquad ax^2-a\left(\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}\right)x+\dfrac{a}{\alpha\beta}<0$

이 부등식이 $ax^2+bx+c<0$과 같으므로

$-a\left(\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}\right)=b, \ \dfrac{a}{\alpha\beta}=c$

이때 $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=4$이므로 $\quad b=-4a$

$\frac{1}{\alpha\beta}=2$이므로 $\quad c=2a$

따라서 부등식 $(a+b)x^2+(b+c)x+4c>0$에서

$(a-4a)x^2+(-4a+2a)x+4\cdot 2a>0$

$-3ax^2-2ax+8a>0$

$a>0$이므로

$3x^2+2x-8<0, \quad (x+2)(3x-4)<0$

$\therefore -2<x<\frac{4}{3}$

따라서 정수 x는 $-1,\ 0,\ 1$의 3개이다. 답 ③

다른 풀이 이차방정식 $2x^2-4x+1=0$의 해가 $\alpha,\ \beta$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2,\ \alpha\beta=\frac{1}{2}$

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 해가 $\frac{1}{\alpha},\ \frac{1}{\beta}$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$-\frac{b}{a}=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=4 \quad \therefore b=-4a$

$\frac{c}{a}=\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta}=2 \quad \therefore c=2a$

12 전략 a의 값의 부호에 따라 부등식 $f(x)<0$이 해를 가질 조건을 구한다.

풀이 (i) $a<0$일 때,

함수 $y=f(x)$의 그래프는 위로 볼록하므로 부등식 $f(x)<0$은 항상 해를 갖는다.

(ii) $a>0$일 때,

이차방정식 $ax^2-2x+3=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-1)^2-3a>0, \quad 3a<1$

$\therefore a<\frac{1}{3}$

그런데 $a>0$이므로 $\quad 0<a<\frac{1}{3}$

(i), (ii)에서 $a<0$ 또는 $0<a<\frac{1}{3}$이므로 정수 a의 최댓값은 -1이다. 답 ③

13 전략 먼저 주어진 부등식을 한 문자에 대한 내림차순으로 정리한다.

풀이 주어진 부등식의 좌변을 x에 대하여 내림차순으로 정리하면

$x^2+2(2y+5)x+(4y^2+ay+b)>0$

이 부등식이 모든 실수 x에 대하여 성립해야 하므로 이차방정식 $x^2+2(2y+5)x+(4y^2+ay+b)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(2y+5)^2-(4y^2+ay+b)<0$

$4y^2+20y+25-4y^2-ay-b<0$

$\therefore (20-a)y<b-25$

이 부등식이 모든 실수 y에 대하여 성립해야 하므로

$20-a=0,\ b-25>0 \quad \therefore a=20,\ b>25$

따라서 b는 정수이므로 $a+b$의 최솟값은

$20+26=46$ 답 ②

14 전략 두 부등식의 해를 각각 구하여 수직선 위에 나타낸 후 공통부분이 존재하지 않도록 하는 $a,\ b$의 조건을 구한다.

풀이 $x^2-2ax+a^2-4<0$에서

$x^2-2ax+(a+2)(a-2)<0$

$(x-a+2)(x-a-2)<0$

$\therefore a-2<x<a+2 \quad \cdots\cdots ㉠$

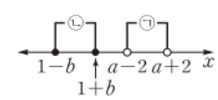
$x^2-2x+1-b^2\le 0$에서

$x^2-2x+(1+b)(1-b)\le 0$

$(x-1-b)(x-1+b)\le 0$

$\therefore 1-b\le x\le 1+b \quad \cdots\cdots ㉡$

㉠, ㉡의 공통부분이 존재하지 않아야 하므로 오른쪽 그림에서



$1+b\le a-2 \quad \therefore a-b\ge 3$

따라서 $a-b$의 최솟값은 3이다. 답 ③

15 전략 이차방정식의 두 근이 모두 음수일 조건을 이용하여 먼저 a의 값의 범위를 구한다.

풀이 이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하고, 두 근을 $\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta<0)$라 하자.

ㄱ. (i) $\frac{D}{4}=\{-(a-1)\}^2-(3a+7)>0$에서

$a^2-5a-6>0, \quad (a+1)(a-6)>0$

$\therefore a<-1$ 또는 $a>6$

(ii) $\alpha+\beta=2(a-1)<0$에서 $\quad a<1$

(iii) $\alpha\beta=3a+7>0$에서 $\quad a>-\frac{7}{3}$

이상에서 공통부분을 구하면

$-\frac{7}{3}<a<-1 \quad \cdots\cdots ㉡$

ㄴ. $f(x)=x^2-2(a-1)x+3a+7$이라 하면 $y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식은 $x=a-1$이고, ㉡에서

$-\frac{10}{3}<a-1<-2$이므로 $\quad -7<a-1$

또 $f(-7)=49+14(a-1)+3a+7=17a+42$이고, ㉡에서 $\frac{7}{3}<17a+42<25$이므로

$f(-7)>0$

따라서 이차방정식 ㉠의 두 근은 모두 -7보다 크다.

ㄷ. 이차방정식 $x^2+ax+3a=0$의 두 근을 $p,\ q$라 하면 $pq=3a<0$이므로 두 근의 부호는 서로 다르다.

$p+q=-a>0$이므로 양의 근이 음의 근의 절댓값보다 크다.

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

일품 BOX

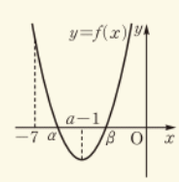
$\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{2}{\frac{1}{2}}=4$

$\frac{1}{\alpha\beta}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2$

부등식 $mx<n$이 모든 실수 x에 대하여 성립할 조건은
$m=0,\ n>0$

b는 양수이므로
$1-b<1+b$

$a,\ b$는 양수이므로
$a+2\le 1-b$이면
$a+b\le -1$이 되어 모순이다.
$\therefore 1-b<a+2$



위의 그림에서
$-7<a-1,\ f(-7)>0$
이면 두 근은 모두 -7보다 크다.

㉡에서 $-7<3a<-3$

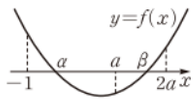
㉡에서 $1<-a<\frac{7}{3}$

16 전략 이차방정식 $f(x)=0$에 대하여 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형을 그려 $f(-1), f(\alpha), f(2\alpha)$의 부호를 찾는다.

풀이 $f(x)=x^2-\alpha x+\alpha-1$이라 하면

$-1<\alpha<\alpha<\beta<2\alpha$

이므로 오른쪽 그림에서



$f(-1)>0,\ f(\alpha)<0,$

$f(2\alpha)>0$

$f(-1)>0$에서 $\quad f(-1)=1+\alpha+\alpha-1=2\alpha>0$

$\therefore \alpha>0$ …… ㉠

$f(\alpha)<0$에서 $\quad f(\alpha)=\alpha^2-\alpha^2+\alpha-1<0$

$\therefore \alpha<1$ …… ㉡

$f(2\alpha)>0$에서

$f(2\alpha)=4\alpha^2-2\alpha^2+\alpha-1=2\alpha^2+\alpha-1>0$

$(\alpha+1)(2\alpha-1)>0$

$\therefore \alpha<-1$ 또는 $\alpha>\frac{1}{2}$ …… ㉢

㉠, ㉡, ㉢의 공통부분을 구하면

$\frac{1}{2}<\alpha<1$

답 ②

17 전략 부등식 $|x+a|<b$를 풀어 먼저 a, b의 값을 구한다.

풀이 $|x+a|<b$에서

$-b<x+a<b \qquad \therefore -a-b<x<-a+b$

이 부등식의 해가 $1<x<5$이므로

$-a-b=1,\ -a+b=5$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $\quad a=-3,\ b=2$

$(2a+b)x>2x+a+c$에 $a=-3,\ b=2$를 대입하면

$-4x>2x-3+c, \qquad -6x>-3+c$

$\therefore x<\frac{3-c}{6}$

이 부등식의 해가 $x<\frac{c}{3}$이므로

$\frac{3-c}{6}=\frac{c}{3}, \qquad 3-c=2c \qquad \therefore c=1$

$\therefore a+b+c=0$

답 0

18 전략 부등식을 정리한 후 a의 값의 범위를 나누어 주어진 조건을 만족시키는 경우를 찾는다.

풀이 주어진 부등식에서 $\quad -4<|x+2|-a<4$

$\therefore a-4<|x+2|<a+4$ ⋯ ❶

(i) $0<a<4$일 때,

$a-4<|x+2|$에서

x는 모든 실수 …… ㉠

$|x+2|<a+4$에서

$-a-4<x+2<a+4$

$\therefore -a-6<x<a+2$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$-a-6<x<a+2$

정수 x의 최댓값이 5이려면

$5<a+2\le 6 \qquad \therefore 3<a\le 4$

그런데 $0<a<4$이므로 $\quad 3<a<4$ ⋯ ❷

(ii) $a=4$일 때,

$0<|x+2|<8$에서

$-8<x+2<0$ 또는 $0<x+2<8$

$\therefore -10<x<-2$ 또는 $-2<x<6$

이때 정수 x의 최댓값은 5이므로 조건을 만족시킨다. ⋯ ❸

(iii) $a>4$일 때,

$a-4<|x+2|$에서

$x+2<-a+4$ 또는 $x+2>a-4$

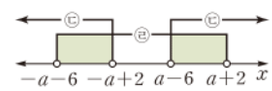
$\therefore x<-a+2$ 또는 $x>a-6$ …… ㉢

$|x+2|<a+4$에서

$-a-4<x+2<a+4$

$\therefore -a-6<x<a+2$ …… ㉣

오른쪽 그림에서 ㉢, ㉣을 동시에 만족시키는 x의 값의 범위는



$-a-6<x<-a+2$ 또는 $a-6<x<a+2$

그런데 $a>4$이므로 정수 x의 최댓값은 5가 될 수 없다. ⋯ ❹

이상에서 구하는 a의 값의 범위는

$3<a\le 4$ ⋯ ❺

답 $3<a\le 4$

$-a+2\ge a-6$이면 $a\le 4$이므로 모순이다. $\therefore -a+2<a-6$

$a>4$에서 $a+2>6$이므로 x의 값의 범위에 5보다 큰 정수가 적어도 하나 포함된다.

채점 기준	비율
❶ 주어진 부등식을 정리할 수 있다.	10 %
❷ $0<a<4$일 때 주어진 조건을 만족시키는 a의 값의 범위를 구할 수 있다.	30 %
❸ $a=4$일 때 주어진 조건을 만족시킴을 알 수 있다.	20 %
❹ $a>4$일 때 주어진 조건을 만족시키지 않음을 알 수 있다.	30 %
❺ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	10 %

19 전략 일차부등식의 해가 모든 실수일 조건을 이용하여 a, b 사이의 관계식을 구한다.

풀이 모든 실수 x에 대하여 $(2a-b)x+3a-2b<0$, 즉 $(2a-b)x<-3a+2b$가 성립하려면

$2a-b=0,\ -3a+2b>0$

$\therefore b=2a,\ a>0$

$b=2a$를 $-3a+2b>0$에 대입하면 $-3a+2\cdot 2a>0$ $\therefore a>0$

$b=2a$를 $(4a-3b)x^2+\frac{1}{2}bx+a+b>0$에 대입하면

$-2ax^2+ax+3a>0$

$-a<0$이므로 양변을 $-a$로 나누면

$2x^2-x-3<0, \qquad (x+1)(2x-3)<0$

$\therefore -1<x<\frac{3}{2}$

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 정수 x는 0, 1의 2개이다.

답 2

20 전략 손해를 보지 않기 위한 할인율과 이윤 사이의 대소 관계를 이용하여 n에 대한 이차부등식을 세운다.

풀이 손해를 보지 않고 사탕을 판매하려면 할인율이 25 % 이하가 되어야 한다.

$\frac{(n-20)^2}{100} \le 25$ ··· ❶

$(n-20)^2 \le 2500$, $n^2-40n-2100 \le 0$

$(n+30)(n-70) \le 0$

$\therefore -30 \le n \le 70$

그런데 $n>20$이므로 $20<n\le 70$ ··· ❷

따라서 손해를 보지 않으려면 고객이 한 번에 구입하는 사탕 A는 최대 70개로 제한해야 한다. ··· ❸

답 70개

채점 기준	비율
❶ n에 대한 이차부등식을 세울 수 있다.	30 %
❷ n의 값의 범위를 구할 수 있다.	50 %
❸ 사탕 A를 최대 몇 개로 제한해야 하는지 구할 수 있다.	20 %

21 전략 주어진 이차부등식의 해가 $4\le x\le 7$을 포함하도록 하는 a의 값의 범위를 구한다.

풀이 부등식 $x^2-(3a^2+2)x+2a^4+a^2-3\le 0$에서

$x^2-(3a^2+2)x+(2a^2+3)(a^2-1)\le 0$

$\{x-(2a^2+3)\}\{x-(a^2-1)\}\le 0$

$\therefore a^2-1\le x\le 2a^2+3$ ····· ㉠

$2a^2+3-(a^2-1)$
$=a^2+4>0$
$\therefore 2a^2+3>a^2-1$

따라서 $4\le x\le 7$인 모든 실수 x가 ㉠을 만족시키려면

$a^2-1\le 4$, $7\le 2a^2+3$

이어야 한다.

(i) $a^2-1\le 4$에서 $a^2\le 5$

$\therefore -\sqrt{5}\le a\le \sqrt{5}$

(ii) $2a^2+3\ge 7$에서 $a^2\ge 2$

$\therefore a\le -\sqrt{2}$ 또는 $a\ge \sqrt{2}$

(i), (ii)에서 공통부분을 구하면

$-\sqrt{5}\le a\le -\sqrt{2}$ 또는 $\sqrt{2}\le a\le \sqrt{5}$

이므로 정수 a는 -2, 2의 2개이다.

답 2

22 전략 먼저 이차부등식의 해가 모든 실수가 되도록 하는 k의 값의 범위를 구한다.

풀이 $x^2+(k-3)x+k>0$의 해가 모든 실수이려면 이차방정식 $x^2+(k-3)x+k=0$의 판별식을 D라 할 때,

$D=(k-3)^2-4k<0$

$k^2-10k+9<0$, $(k-1)(k-9)<0$

$\therefore 1<k<9$

즉 $1\le a<b\le 9$이므로 a의 최솟값은 1이고, b의 최댓값은 9이다.

따라서 구하는 합은

$1+9=10$

답 10

23 전략 모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $px^2+qx+r>0$이 성립하려면 $p>0$, $q^2-4pr<0$임을 이용한다.

풀이 모든 실수 x에 대하여 이차부등식

$(a-2)x^2+2(a-2)x+3>0$이 성립하므로

$a-2>0$ $\therefore a>2$ ····· ㉠

이차방정식 $(a-2)x^2+2(a-2)x+3=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(a-2)^2-3(a-2)<0$

$a^2-7a+10<0$, $(a-2)(a-5)<0$

$\therefore 2<a<5$ ····· ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $2<a<5$ ··· ❶

부등식 $2|a+1|+3|a-6|\le 17$에서 $a+1>0$, $a-6<0$이므로

$2<a<5$이므로
$3<a+1<6$,
$-4<a-6<-1$

$2(a+1)-3(a-6)\le 17$, $-a\le -3$

$\therefore a\ge 3$

그런데 $2<a<5$이므로 $3\le a<5$ ··· ❷

따라서 구하는 실수 a의 최솟값은 3이다. ··· ❸

답 3

채점 기준	비율
❶ 주어진 이차부등식이 성립하는 a의 값의 범위를 구할 수 있다.	50 %
❷ 절댓값을 포함한 부등식의 해를 구할 수 있다.	40 %
❸ a의 최솟값을 구할 수 있다.	10 %

24 전략 두 부등식의 해를 각각 구한 후 a의 값의 범위를 나누어 부등식의 해를 수직선 위에 나타내어 본다.

풀이 $x^2-3x-10\le 0$에서 $(x+2)(x-5)\le 0$

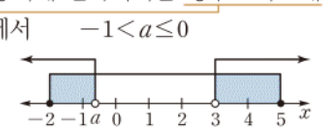
$\therefore -2\le x\le 5$

$x^2-(a+3)x+3a>0$에서

$(x-3)(x-a)>0$ ····· ㉠

(i) $a<3$이면 ㉠의 해는 $x<a$ 또는 $x>3$이므로 두 부등식을 동시에 만족시키는 정수 x가 4개이려면 다음 그림에서 $-1<a\le 0$

정수 x는
-2, -1, 4, 5



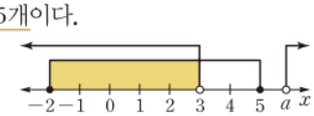
(ii) $a=3$이면 ㉠의 해는 $x\ne 3$인 모든 실수이므로 두 부등식을 동시에 만족시키는 정수 x는 7개이다.

따라서 조건을 만족시키지 않는다.

정수 x는
-2, -1, 0, 1, 2, 4, 5

(iii) $a>3$이면 ㉠의 해는 $x<3$ 또는 $x>a$이므로 두 부등식을 동시에 만족시키는 정수 x는 다음 그림과 같이 최소 5개이다.

최소 5개에 포함되는 정수 x는
-2, -1, 0, 1, 2



따라서 조건을 만족시키지 않는다.

이상에서 구하는 실수 a의 값의 범위는

$-1<a\le 0$

답 $-1<a\le 0$

25 전략 a를 포함하지 않은 두 부등식의 공통부분을 먼저 구하여 나머지 부등식의 해의 위치에 따른 a의 값의 범위를 구한다.

풀이 $x^2+x-42<0$에서 $(x+7)(x-6)<0$

$\therefore -7<x<6$ …… ㉠

$x^2+3x-4\geq 0$에서 $(x+4)(x-1)\geq 0$

$\therefore x\leq -4$ 또는 $x\geq 1$ …… ㉡

$(a^2-8)-(2a-10)=a^2-2a+2=(a-1)^2+1>0$이므로 $a^2-8>2a-10$

즉 부등식 $(x-2a+10)(x-a^2+8)<0$의 해는

$2a-10<x<a^2-8$ …… ㉢ ⋯ ❶

두 부등식 ㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 실수 x의 값의 범위는

$-7<x\leq -4$ 또는 $1\leq x<6$

이므로 세 부등식 ㉠, ㉡, ㉢을 동시에 만족시키는 실수 x가 존재하지 않는 경우는 다음 세 가지 중의 하나이다.

(i) $a^2-8\leq -7$일 때, $-1\leq a\leq 1$

(ii) $-4\leq 2a-10<a^2-8\leq 1$일 때,

$-4\leq 2a-10$에서 $a\geq 3$ …… ㉣

$a^2-8\leq 1$에서 $-3\leq a\leq 3$ …… ㉤

㉣, ㉤의 공통부분을 구하면 $a=3$

(iii) $6\leq 2a-10$일 때, $a\geq 8$

이상에서 a의 값의 범위는

$-1\leq a\leq 1$ 또는 $a=3$ 또는 $a\geq 8$ ⋯ ❷

따라서 10 이하의 자연수 a는 1, 3, 8, 9, 10의 5개이다. ⋯ ❸

답 5

채점 기준	비율
❶ 세 부등식의 해를 각각 구할 수 있다.	30 %
❷ 세 부등식을 동시에 만족시키는 실수 x가 존재하지 않도록 하는 a의 값의 범위를 구할 수 있다.	60 %
❸ 10 이하의 자연수 a의 개수를 구할 수 있다.	10 %

26 전략 모든 실수에 대하여 부등식 $A\leq B\leq C$가 성립하면 모든 실수에 대하여 두 부등식 $A\leq B$, $B\leq C$가 동시에 성립해야 함을 이용한다.

풀이 (i) $-1\leq (a-1)x+b$, 즉 $(a-1)x\geq -1-b$가 모든 실수 x에 대하여 성립하므로

$a-1=0$, $-1-b\leq 0$

$\therefore a=1$, $b\geq -1$

(ii) $(a-1)x+b\leq x^2+2x+2$, 즉 $x^2+(3-a)x+2-b\geq 0$이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로 이차방정식 $x^2+(3-a)x+2-b=0$의 판별식을 D라 할 때,

$D=(3-a)^2-4(2-b)\leq 0$

위의 부등식에 $a=1$을 대입하여 정리하면

$4b-4\leq 0$ $\therefore b\leq 1$

(i), (ii)에서 $a=1$, $-1\leq b\leq 1$

따라서 정수 a, b의 순서쌍 (a, b)는

$(1, -1)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$

의 3개이다.

답 3

27 전략 부등식 $f(x)<y<g(x)$를 만족시키는 y가 항상 존재하기 위한 $f(x)$와 $g(x)$ 사이의 관계를 찾는다.

풀이 $f(x)=-x^2+2(a-1)x+2a-1$, $g(x)=x^2-2(a-3)x+9$라 하면 모든 실수 x에 대하여 $f(x)<y<g(x)$를 만족시키는 y가 존재해야 하므로 부등식 $g(x)-f(x)>0$이 항상 성립해야 한다.

즉 $2x^2-4(a-2)x-2a+10>0$에서

$x^2-2(a-2)x-a+5>0$ ⋯ ❶

$g(x)-f(x)$
$=x^2-2(a-3)x+9$
$-\{-x^2+2(a-1)x$
$+2a-1\}$
$=2x^2-4(a-2)x-2a$
$+10$

이차방정식 $x^2-2(a-2)x-a+5=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\{-(a-2)\}^2-(-a+5)<0$

$a^2-3a-1<0$

$\therefore \frac{3-\sqrt{13}}{2}<a<\frac{3+\sqrt{13}}{2}$ ⋯ ❷

이차방정식
$a^2-3a-1=0$에서
a
$=\frac{3\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot(-1)}}{2}$
$=\frac{3\pm\sqrt{13}}{2}$

따라서 $m=\frac{3-\sqrt{13}}{2}$, $n=\frac{3+\sqrt{13}}{2}$이므로

$n-m=\sqrt{13}$ ⋯ ❸

답 $\sqrt{13}$

채점 기준	비율
❶ 모든 실수 x에 대하여 항상 성립하는 이차부등식을 세울 수 있다.	40 %
❷ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❸ $n-m$의 값을 구할 수 있다.	20 %

28 전략 이차방정식의 판별식의 부호, 두 근의 합 또는 곱의 부호를 이용하여 a의 값의 범위를 구한다.

풀이 이차방정식

$x^2+2(a-2)x+a^2-3a-4=0$ …… ㉠

의 두 근을 α, β라 하고, 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(a-2)^2-(a^2-3a-4)=-a+8$,

$\alpha+\beta=-2(a-2)$,

$\alpha\beta=a^2-3a-4=(a+1)(a-4)$

(i) ㉠이 서로 다른 두 양의 실근을 가질 때,

$\frac{D}{4}=-a+8>0$에서 $a<8$

$\alpha+\beta=-2(a-2)>0$에서 $a<2$

$\alpha\beta=(a+1)(a-4)>0$에서

$a<-1$ 또는 $a>4$

따라서 $a<-1$이므로 정수 a의 최댓값은 -2이다.

(ii) ㉠이 서로 다른 두 음의 실근을 가질 때,

$\frac{D}{4}=-a+8>0$에서 $a<8$

$\alpha+\beta=-2(a-2)<0$에서 $a>2$

ⓒ좋은책신사고

$\alpha\beta=(a+1)(a-4)>0$에서

$a<-1$ 또는 $a>4$

따라서 $4<a<8$이므로 정수 a의 최솟값은 5이다.

(i), (ii)에서 $M=-2$, $m=5$이므로

$Mm=-10$ 답 -10

최상위로 가는 최고 수준 문제

본책 88쪽

01

해결 단계

❶ 주어진 일차부등식의 해를 이용하여 a, b 사이의 관계식을 구한다.
❷ ❶을 이용하여 연립부등식을 이루는 일차부등식의 해를 각각 구한다.
❸ ㄱ. $a=1$일 때, 연립부등식의 해를 구하여 $f(1)$의 값을 구한다.
❹ ㄴ. $f(a)=0$인 a의 값을 구한다.
❺ ㄷ. a가 정수일 때 $f(a)$를 구하여 보기의 부등식을 만족시키는 a의 개수를 구한다.
❻ 옳은 보기를 찾아 답을 구한다.

풀이 ❶ 일차부등식 $(2a-b)x>a-4$의 해가 $x<1$이므로 $2a-b<0$ $\therefore x<\frac{a-4}{2a-b}$

즉 $\frac{a-4}{2a-b}=1$이므로 $a-4=2a-b$

$\therefore b=a+4$ …… ㉠

❷ $(a+2)x+3a<b(x-1)+6$에 ㉠을 대입하면

$(a+2)x+3a<(a+4)(x-1)+6$

$ax+2x+3a<ax+4x-a-4+6$

$-2x<-4a+2$ $\therefore x>2a-1$ …… ㉡

$ax+2a+b>(b-3)x+4$에 ㉠을 대입하면

$ax+2a+a+4>(a+4-3)x+4$

$ax+3a+4>ax+x+4$

$\therefore x<3a$ …… ㉢

❸ ㄱ. $a=1$이면 ㉡에서 $x>1$, ㉢에서 $x<3$이므로 주어진 연립부등식의 해는 $1<x<3$

위의 부등식을 만족시키는 정수 x는 2의 한 개이므로 $f(1)=1$

❹ ㄴ. $a=0$이면 ㉡에서 $x>-1$, ㉢에서 $x<0$이므로 주어진 연립부등식의 해는 $-1<x<0$

위의 부등식을 만족시키는 정수 x는 존재하지 않으므로 $f(0)=0$

따라서 $a=0$일 때 $f(a)=0$이지만 $a>-1$이다.

❺ ㄷ. 주어진 연립부등식의 해가 존재하려면 ㉡, ㉢에서

$2a-1<3a$, 즉 $a>-1$

이어야 한다. 이때 연립부등식의 해는

$2a-1<x<3a$이고, a가 정수이면

$f(a)=3a-(2a-1)-1=a$

즉 $1<f(a)<10-a$에서

$1<a<10-a$ $\therefore 1<a<5$

이때 $a=4$이면 ㉠에서 $b=8$이고, 부등식 $(2a-b)x>a-4$, 즉 $0\cdot x>0$은 해가 존재하지 않으므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 정수 a는 2, 3의 2개이다.

❻ 이상에서 옳은 것은 ㄱ뿐이다. 답 ①

1등급 비밀노트

ㄴ에서 $f(a)=0$인 경우를 연립부등식의 해가 없는 경우라고 생각하지 않도록 주의한다. 예를 들어 $a=0$이면 연립부등식의 해는 $-1<x<0$으로 존재하지만 부등식을 만족시키는 정수 x는 존재하지 않는다.

02

해결 단계

❶ 이차방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가질 때, 판별식을 이용하여 a의 값의 범위를 구한다.
❷ 이차방정식 $f(x)=0$에서 근과 계수의 관계를 이용하여 두 점 사이의 거리의 최댓값을 구한다.
❸ m, p의 값을 구하여 m^2+p^2의 값을 구한다.

풀이 ❶ 이차방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\{-(a+1)\}^2-3a^2>0$, $2a^2-2a-1<0$

$\therefore \frac{1-\sqrt{3}}{2}<a<\frac{1+\sqrt{3}}{2}$

이차방정식 $2a^2-2a-1=0$에서 $a=\frac{1\pm\sqrt{(-1)^2-2\cdot(-1)}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}$

❷ 두 점 A, B의 x좌표를 각각 α, β라 하면 이차방정식 $f(x)=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=\frac{2}{3}(a+1)$, $\alpha\beta=\frac{a^2}{3}$

$\therefore (\beta-\alpha)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$

$=\frac{4}{9}(a+1)^2-\frac{4}{3}a^2$

$=-\frac{8}{9}\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{2}{3}$

$\frac{1-\sqrt{3}}{2}<a<\frac{1+\sqrt{3}}{2}$에서 $a=\frac{1}{2}$일 때 두 점 A, B 사이의 거리의 최댓값은

$-0.3\times\times\times<a<1.3\times\times\times$

$|\beta-\alpha|=\sqrt{\frac{2}{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$

❸ 따라서 $m=\frac{\sqrt{6}}{3}$, $p=\frac{1}{2}$이므로

$m^2+p^2=\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{11}{12}$ 답 $\frac{11}{12}$

03

해결 단계

❶ k의 값에 관계없이 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점이 항상 존재하는 것의 의미를 이해한다.
❷ 이차방정식 $f(x)=g(x)$가 실근을 가질 조건을 구한다.
❸ ❷에서 얻은 k에 대한 이차부등식이 항상 성립하도록 하는 a의 값의 범위를 구한다.
❹ a의 최댓값과 최솟값의 합을 구한다.

풀이 ❶ 실수 k의 값에 관계없이 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점이 항상 존재하므로 방정식 $f(x)=g(x)$는 실수 k의 값에 관계없이 항상 실근을 갖는다.

❷ 이차방정식 $(x-1)(x-2)=k(x-a)$, 즉 $x^2-(k+3)x+2+ak=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$$D_1=\{-(k+3)\}^2-4(2+ak)\geq 0$$

$$\therefore k^2+2(3-2a)k+1\geq 0 \quad \cdots\cdots ㉠$$

❸ 부등식 ㉠이 모든 실수 k에 대하여 성립해야 하므로 k에 대한 이차방정식 $k^2+2(3-2a)k+1=0$의 판별식을 D_2라 하면

$$\frac{D_2}{4}=(3-2a)^2-1\leq 0$$

$$4a^2-12a+8\leq 0, \quad a^2-3a+2\leq 0$$

$$(a-1)(a-2)\leq 0 \quad \therefore 1\leq a\leq 2$$

❹ 따라서 실수 a의 최댓값은 2, 최솟값은 1이므로 구하는 합은 $2+1=3$ 답 ①

04

해결 단계

❶ 주어진 이차방정식이 두 실근을 가질 때, 판별식을 이용하여 a의 값의 범위를 구한다.

❷ $\frac{1}{2}\leq\frac{\beta}{\alpha}\leq 2$를 만족시키는 α, β에 대한 부등식을 구한다.

❸ 이차방정식의 근과 계수의 관계와 ❷에서 얻은 부등식을 이용하여 a의 값의 범위를 구한다.

❹ 정수 a의 값을 구한다.

풀이 ❶ 주어진 이차방정식이 두 실근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(-2)^2-a\geq 0$$

$$4-a\geq 0 \quad \therefore a\leq 4 \quad \cdots\cdots ㉠$$

❷ $\frac{1}{2}\leq\frac{\beta}{\alpha}\leq 2$이므로

$$\left(\frac{\beta}{\alpha}-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\beta}{\alpha}-2\right)\leq 0$$

$$\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2-\frac{5}{2}\cdot\frac{\beta}{\alpha}+1\leq 0$$

위의 식의 양변에 $2\alpha^2$을 곱하여 정리하면

$$2\alpha^2-5\alpha\beta+2\beta^2\leq 0$$

$$2\{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\}-5\alpha\beta\leq 0$$

$$\therefore 2(\alpha+\beta)^2-9\alpha\beta\leq 0 \quad \cdots\cdots ㉡$$

❸ 이차방정식 $x^2-4x+a=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=4$, $\alpha\beta=a$ $\cdots\cdots$ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

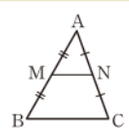
$$2\cdot 4^2-9a\leq 0, \quad 9a\geq 32$$

$$\therefore a\geq\frac{32}{9} \quad \cdots\cdots ㉣$$

❹ ㉠, ㉣에서 $\frac{32}{9}\leq a\leq 4$이므로 구하는 정수 a의 값은 4이다. 답 ⑤

일품 BOX

삼각형의 외심
① 삼각형의 세 변의 수직이등분선의 교점이다.
② 세 꼭짓점에 이르는 거리는 같다.



△ABC에서 두 변 AB, AC의 중점을 각각 M, N이라 하면
$\overline{BC}\,/\!/\,\overline{MN}$,
$\overline{MN}=\frac{1}{2}\overline{BC}$

$a\leq X\leq b$이면
$(X-a)(X-b)\leq 0$

a는 실수이므로
$a^2\geq 0$
이때 $a\neq 0$에서 $a\neq 0$이므로
$a^2>0$

x축 위의 점의 좌표는 $(m,\ 0)$ 꼴이고 y축 위의 점의 좌표는 $(0,\ n)$ 꼴이다.

Ⅳ 도형의 방정식

09 평면좌표와 직선의 방정식

개념&핵심 기출

본책 90~93쪽

01 △OAB의 외심을 P라 하면

$$\overline{OP}=\overline{AP}=\overline{BP}$$

$\overline{OP}=\overline{AP}$에서 $\overline{OP}^2=\overline{AP}^2$이므로

$$2^2+(-1)^2=(2-1)^2+(-1-a)^2$$

$$a^2+2a-3=0, \quad (a+3)(a-1)=0$$

$$\therefore a=1\ (\because a>0)$$

$\overline{OP}=\overline{BP}$에서 $\overline{OP}^2=\overline{BP}^2$이므로

$$2^2+(-1)^2=(2-b)^2+(-1)^2$$

$$b^2-4b=0, \quad b(b-4)=0$$

$$\therefore b=4\ (\because b>0)$$

$$\therefore a+b=5$$

답 5

02 점 $P(a,\ b)$가 직선 $y=x+2$ 위의 점이므로

$$b=a+2 \quad \cdots\cdots ㉠$$

또 $\overline{AP}=\overline{BP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로

$$(a-2)^2+(b+3)^2=(a-4)^2+(b-1)^2$$

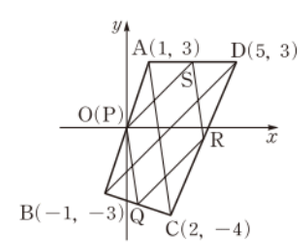
$$\therefore a+2b=1 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=1$

$$\therefore ab=-1$$

답 ②

03 오른쪽 그림의 두 삼각형 ABC, ACD에서



$$\overline{PQ}=\overline{SR}=\frac{1}{2}\overline{AC}$$

또 두 삼각형 ABD, BCD에서

$$\overline{PS}=\overline{QR}=\frac{1}{2}\overline{BD}$$

이때

$$\overline{AC}=\sqrt{(2-1)^2+(-4-3)^2}=5\sqrt{2},$$

$$\overline{BD}=\sqrt{(5+1)^2+(3+3)^2}=6\sqrt{2}$$

이므로 사각형 PQRS의 둘레의 길이는

$$\overline{PQ}+\overline{QR}+\overline{SR}+\overline{PS}=(\overline{PQ}+\overline{SR})+(\overline{PS}+\overline{QR})$$

$$=\overline{AC}+\overline{BD}$$

$$=11\sqrt{2}$$

답 ④

04 선분 AB를 2 : 1로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{2\cdot b+1\cdot(-6)}{2+1},\ \frac{2\cdot 3+1\cdot a}{2+1}\right)$$

ⓒ좋은책신사고

$\therefore \left(\frac{2b-6}{3}, \frac{6+a}{3}\right)$

이 점이 x축 위에 있으므로

$\frac{6+a}{3}=0 \qquad \therefore a=-6$

선분 AB를 3 : 2로 외분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{3\cdot b-2\cdot(-6)}{3-2}, \frac{3\cdot 3-2\cdot a}{3-2}\right)$

$\therefore (3b+12,\ 9-2a)$

이 점이 y축 위에 있으므로

$3b+12=0 \qquad \therefore b=-4$

$\therefore ab=24$ 답 ②

05 선분 AB를 $k:(1-k)$로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{k\cdot 2+(1-k)\cdot(-4)}{k+(1-k)}, \frac{k\cdot(-5)+(1-k)\cdot 3}{k+(1-k)}\right)$

$\therefore (6k-4,\ -8k+3)$

이 점이 제3사분면 위에 있으려면

$6k-4<0,\ -8k+3<0$

$\therefore \frac{3}{8}<k<\frac{2}{3}$ 답 $\frac{3}{8}<k<\frac{2}{3}$

06 $3\overline{AB}=\overline{BC}$에서 $\overline{AB}:\overline{BC}=1:3$

$a>0$이므로 점 C는 선분 AB를 4 : 3으로 외분하는 점이다.

즉 점 C의 좌표는

$\left(\frac{4\cdot 4-3\cdot(-2)}{4-3}, \frac{4\cdot 3-3\cdot(-1)}{4-3}\right)$

$\therefore (22,\ 15)$

따라서 $a=22,\ b=15$이므로

$a+b=37$ 답 ④

다른 풀이 $a>0$이므로 점 B는 선분 AC를 1 : 3으로 내분하는 점이다.

따라서 $\frac{1\cdot a+3\cdot(-2)}{1+3}=4,\ \frac{1\cdot b+3\cdot(-1)}{1+3}=3$이므로

$a-6=16,\ b-3=12$

$\therefore a=22,\ b=15$

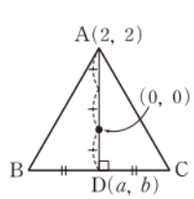
1등급 비밀노트

$\overline{AB}:\overline{BC}=1:3$을 만족시키는 점 C는 선분 AB를 4 : 3으로 외분하는 점과 2 : 3으로 외분하는 점의 2개가 존재한다.
그런데 선분 AB를 2 : 3으로 외분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{2\cdot 4-3\cdot(-2)}{2-3}, \frac{2\cdot 3-3\cdot(-1)}{2-3}\right)$, 즉 $(-14,\ -9)$

이므로 $a>0$을 만족시키지 않는다.

07 오른쪽 그림과 같이 $\overline{BC}$의 중점을 $D(a,\ b)$라 하면 $\overline{AD}$를 2 : 1로 내분하는 점은 △ABC의 무게중심 (0, 0)과 일치한다.



즉 $\frac{2\cdot a+1\cdot 2}{2+1}=0,\ \frac{2\cdot b+1\cdot 2}{2+1}=0$이므로

$2a+2=0,\ 2b+2=0$

$\therefore a=-1,\ b=-1$

$\therefore D(-1,\ -1)$

이때 $\overline{AD}$의 길이는 정삼각형 ABC의 높이이고

$\overline{AD}=\sqrt{(2+1)^2+(2+1)^2}=3\sqrt{2}$

이므로 정삼각형의 한 변의 길이를 a라 하면

$\frac{\sqrt{3}}{2}a=3\sqrt{2} \qquad \therefore a=2\sqrt{6}$

따라서 정삼각형의 한 변의 길이는 $2\sqrt{6}$이다. 답 $2\sqrt{6}$

다른 풀이 위의 그림에서 점 (0, 0)을 점 O라 하면

$\overline{AO}=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$이므로

$\overline{AD}=\frac{3}{2}\overline{AO}=3\sqrt{2}$

일품 BOX

$\overline{AO}:\overline{OD}=2:1$이므로
$\overline{AD}:\overline{AO}=3:2$
$2\overline{AD}=3\overline{AO}$
$\therefore \overline{AD}=\frac{3}{2}\overline{AO}$

$ad=bc$이면
$a:b=c:d$

08 점 P가 직선 $y=x+3$ 위의 점이므로 점 P의 좌표를 $(p,\ p+3)$이라 하자.

$\overline{AP}=\overline{BP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로

$(p-2)^2+(p+3-3)^2=(p+2)^2+(p+3+1)^2$

$2p^2-4p+4=2p^2+12p+20$

$16p=-16 \qquad \therefore p=-1$

$\therefore P(-1,\ 2)$

따라서 점 G의 좌표는

$\left(\frac{2-2-1}{3}, \frac{3-1+2}{3}\right)$, 즉 $\left(-\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$

이므로 $a=-\frac{1}{3},\ b=\frac{4}{3}$

$\therefore a+4b=-\frac{1}{3}+\frac{16}{3}=5$ 답 5

09 $\overline{AC}$의 중점의 좌표는

$\left(\frac{0+6}{2}, \frac{1+ab}{2}\right) \qquad \therefore \left(3, \frac{1+ab}{2}\right)$

$\overline{BD}$의 중점의 좌표는

$\left(\frac{a+b}{2}, \frac{2+7}{2}\right) \qquad \therefore \left(\frac{a+b}{2}, \frac{9}{2}\right)$

□ABCD가 평행사변형이므로

$3=\frac{a+b}{2},\ \frac{1+ab}{2}=\frac{9}{2}$

$\therefore a+b=6,\ ab=8$

$\therefore a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$

$=6^3-3\cdot 8\cdot 6$

$=72$ 답 ⑤

평행사변형의 두 대각선의 중점이 일치한다.

10 세 점이 한 직선 위에 있으려면 두 직선 AB, BC의 기울기가 같아야 하므로

세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있다.
➡ (직선 AB의 기울기)
=(직선 BC의 기울기)
=(직선 AC의 기울기)

$\frac{k-2}{3-(-3)}=\frac{k+1-k}{2k-3}$

$(k-2)(2k-3)=6$

$\therefore 2k^2-7k=0$

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 모든 실수 k의 값의 합은 $\frac{7}{2}$이다. 답 $\frac{7}{2}$

일품 BOX: $2k^2-7k=0$에서 $k(2k-7)=0$ $\therefore k=0$ 또는 $k=\frac{7}{2}$

11 직선 l이 $\overline{BC}$와 만나는 점을 P라 하면 $S=3S_1$이므로 점 P는 $\overline{BC}$를 $2:1$로 내분하는 점이다.

즉 점 P의 좌표는

$$\left(\frac{2\cdot2+1\cdot(-7)}{2+1}, \frac{2\cdot2+1\cdot(-1)}{2+1}\right)$$

$\therefore (-1, 1)$

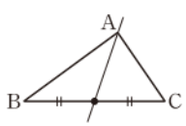
따라서 두 점 $A(1, 5)$, $P(-1, 1)$을 지나는 직선 l의 방정식은

$$y-5=\frac{1-5}{-1-1}(x-1)$$

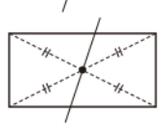
$\therefore y=2x+3$ 답 $y=2x+3$

1등급 비밀노트

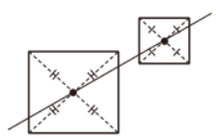
(1) 점 A를 지나는 직선이 △ABC의 넓이를 이등분한다.
➡ 직선이 변 BC의 중점을 지난다.



(2) 직선이 직사각형의 넓이를 이등분한다.
➡ 직선이 직사각형의 두 대각선의 교점을 지난다.



(3) 직선이 두 직사각형의 넓이를 각각 이등분한다.
➡ 직선이 각 직사각형의 대각선의 교점을 모두 지난다.



12 $3x+4y=k$ …… ㉠

$x-y=-1$ …… ㉡

$y=0$을 ㉠에 대입하면

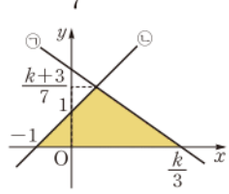
$3x=k$ $\therefore x=\frac{k}{3}$

즉 직선 ㉠의 x절편은 $\frac{k}{3}$이다.

㉠$-$㉡$\times3$을 하면 $7y=k+3$ $\therefore y=\frac{k+3}{7}$

즉 두 직선 ㉠, ㉡의 교점의 y좌표는 $\frac{k+3}{7}$이다.

오른쪽 그림에서 두 직선 ㉠, ㉡과 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 $\frac{14}{3}$이므로



$$\frac{1}{2}\left(\frac{k}{3}+1\right)\cdot\frac{k+3}{7}=\frac{14}{3}$$

$$\frac{(k+3)^2}{42}=\frac{14}{3}$$

$(k+3)^2=14^2$, $k+3=\pm14$

$\therefore k=-17$ 또는 $k=11$

그런데 $k>0$이므로 $k=11$ 답 11

13 두 직선 $x-y-1=0$, $x+ay=0$의 교점을 지나는 직선의 방정식을

$x-y-1+k(x+ay)=0$ (k는 실수)

으로 놓으면

$(k+1)x+(ak-1)y-1=0$

이 직선이 직선 $2x+y-1=0$과 같으므로

$k+1=2$, $ak-1=1$

$k+1=2$에서 $k=1$

$k=1$을 $ak-1=1$에 대입하면

$a-1=1$

$\therefore a=2$ 답 2

다른 풀이 $2x+y-1=0$, 즉 $2x+y=1$과 $x-y=1$을 연립하여 풀면

$x=\frac{2}{3}$, $y=-\frac{1}{3}$

따라서 두 직선 $2x+y-1=0$, $x-y=1$의 교점의 좌표가 $\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$이고, 직선 $x+ay=0$이 이 점을 지나므로

$\frac{2}{3}+a\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)=0$ $\therefore a=2$

14 두 직선 $2x-2y+3=0$, $2x+3y+a=0$의 교점을 지나는 직선의 방정식을

$2x-2y+3+k(2x+3y+a)=0$ (k는 실수)

으로 놓으면

$(2k+2)x+(3k-2)y+ak+3=0$

이 직선의 기울기는 $-\frac{2k+2}{3k-2}$이므로

$k=\frac{2}{3}$이면 y축에 평행한 직선이므로 기울기가 $-\frac{3}{2}$이 될 수 없다. $\therefore k\neq\frac{2}{3}$

$$-\frac{2k+2}{3k-2}=-\frac{3}{2}$$

$2(2k+2)=3(3k-2)$

$\therefore k=2$

따라서 직선 l의 방정식은

$6x+4y+2a+3=0$

이 직선이 점 $(3, b)$를 지나므로

$18+4b+2a+3=0$

$\therefore 2a+4b=-21$ 답 ⑤

15 두 직선 $2x+3y+4=0$, $x-2y-6=0$의 교점을 지나는 직선의 방정식을

$2x+3y+4+k(x-2y-6)=0$ (k는 실수)

으로 놓으면 이 직선이 점 $(1, -4)$를 지나므로

$-6+3k=0$ $\therefore k=2$

따라서 직선의 방정식은 $4x-y-8=0$이고, 이 직선과 x축, y축의 교점은 각각 $(2, 0)$, $(0, -8)$이므로 구하는 선분의 길이는

직선의 방정식에 $y=0$, $x=0$을 각각 대입한다.

$\sqrt{2^2+8^2}=2\sqrt{17}$ 답 ⑤

ⓒ좋은책신사고

참고 두 직선의 방정식 $2x+3y+4=0$, $x-2y-6=0$을 연립하여 풀면 $x=\frac{10}{7}$, $y=-\frac{16}{7}$이므로 두 점 $\left(\frac{10}{7}, -\frac{16}{7}\right)$, $(1, -4)$를 지나는 직선의 방정식을 구해도 된다.

16 직선 $2x+3y-6=0$의 기울기는 $-\frac{2}{3}$이므로 두 점 $(-3, a)$, $(3, b)$를 지나는 직선의 기울기도 $-\frac{2}{3}$이다.

따라서 $\frac{b-a}{3+3}=-\frac{2}{3}$이므로

$b-a=-4$

$\therefore a-b=4$ 답 ②

17 두 점 $A(a, -2)$, $B(b, -3)$을 지나는 직선 AB가 직선 $x+y+1=0$과 수직이므로

$\frac{-3+2}{b-a}=1$

$\therefore a-b=1$ …… ㉠

또 두 점 A, B의 중점 $\left(\frac{a+b}{2}, \frac{-2-3}{2}\right)$이 직선 $x+y+1=0$ 위에 있으므로

$\frac{a+b}{2}+\frac{-5}{2}+1=0$

$\therefore a+b=3$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=2$, $b=1$

$\therefore a-3b=-1$ 답 ②

18 직선 $x+ay+2=0$이 직선 $2x-by-3=0$과 수직이므로

$1\cdot2+a\cdot(-b)=0$

$\therefore ab=2$

직선 $x+ay+2=0$이 직선 $x-(b-3)y+4=0$과 평행하므로

$\frac{1}{1}=\frac{a}{-(b-3)}\neq\frac{2}{4}$

$-b+3=a$ $\therefore a+b=3$

$\therefore a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$

$=3^2-2\cdot2=5$ 답 5

19 연립방정식 $\begin{cases} x-2y-4=0 \\ 3x+2y+4=0 \end{cases}$의 해는

$x=0$, $y=-2$

이므로 두 직선 $x-2y-4=0$, $3x+2y+4=0$의 교점의 좌표는 $(0, -2)$

구하는 직선의 기울기를 m이라 하면 그 직선의 방정식은 $y=mx-2$

일품 BOX

선분 AB의 수직이등분선을 l이라 하면
① 직선 l과 직선 AB의 기울기의 곱은 -1이다.
② 직선 l은 선분 AB의 중점을 지난다.

$y=3x-1$에서
$3x-y-1=0$
$y=-\frac{1}{3}x+1$에서
$\frac{1}{3}x+y-1=0$
$\therefore x+3y-3=0$

평행한 두 직선 l, l' 사이의 거리는 직선 l 위의 임의의 점과 직선 l' 사이의 거리와 같다.

원점과 직선 $y=mx-2$, 즉 $mx-y-2=0$ 사이의 거리가 1이므로

$\frac{|-2|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=1$, $2=\sqrt{m^2+1}$

위의 식의 양변을 제곱하면

$4=m^2+1$, $m^2=3$

$\therefore m=\sqrt{3}$ 또는 $m=-\sqrt{3}$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$y=\sqrt{3}x-2$, $y=-\sqrt{3}x-2$

답 $y=\sqrt{3}x-2$, $y=-\sqrt{3}x-2$

20 점 P가 직선 $y=x$ 위의 점이므로 점 P의 좌표를 (a, a)라 하자.

점 P에서 두 직선 $3x-y-1=0$, $x+3y-3=0$에 이르는 거리가 같으므로

$\frac{|3a-a-1|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\frac{|a+3a-3|}{\sqrt{1^2+3^2}}$

$|2a-1|=|4a-3|$, $2a-1=\pm(4a-3)$

$\therefore a=1$ 또는 $a=\frac{2}{3}$

따라서 구하는 점 P의 좌표는 $(1, 1)$, $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$이다.

답 $(1, 1)$, $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$

21 직선 $x+y-2=0$ 위의 점 $(2, 0)$과 직선 $x+y+m=0$ 사이의 거리가 $5\sqrt{2}$이므로

$\frac{|2+m|}{\sqrt{1^2+1^2}}=5\sqrt{2}$

$|m+2|=10$, $m+2=\pm10$

$\therefore m=-12$ 또는 $m=8$

그런데 $m>0$이므로 $m=8$ 답 ④

22 점 P의 좌표를 (x, y)라 하면 $\overline{AP}=\overline{BP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로

$(x-4)^2+(y-5)^2=x^2+(y-3)^2$

$8x+4y-32=0$ $\therefore 2x+y-8=0$ 답 ④

23 점 B의 좌표를 (a, b), 점 P의 좌표를 (x, y)라 하면 점 $P(x, y)$는 선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점이므로

$x=\frac{2\cdot a+1\cdot3}{2+1}=\frac{2a+3}{3}$

$y=\frac{2\cdot b+1\cdot1}{2+1}=\frac{2b+1}{3}$

$\therefore a=\frac{3x-3}{2}$, $b=\frac{3y-1}{2}$ …… ㉠

또 점 $B(a, b)$가 직선 $2x+y-5=0$ 위의 점이므로

$2a+b-5=0$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$$2\cdot\frac{3x-3}{2}+\frac{3y-1}{2}-5=0$$

$\therefore 6x+3y-17=0$

따라서 $p=6$, $q=-17$이므로

$p+q=-11$ 답 -11

24 주어진 두 직선이 이루는 각의 이등분선 위의 한 점을 $P(x, y)$라 하면 점 P에서 두 직선 $2x+5y+3=0$, $5x-2y-3=0$에 이르는 거리는 같으므로

$$\frac{|2x+5y+3|}{\sqrt{2^2+5^2}}=\frac{|5x-2y-3|}{\sqrt{5^2+(-2)^2}}$$

$|2x+5y+3|=|5x-2y-3|$

$2x+5y+3=\pm(5x-2y-3)$

$\therefore 3x-7y-6=0$ 또는 $7x+3y=0$

이때 원점을 지나지 않아야 하므로 구하는 직선의 방정식은

$3x-7y-6=0$ 답 ①

1등급을 위한 고난도 문제

본책 94~97쪽

01 점 P의 좌표를 (x, y)라 하면

$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2$

$=(x-3)^2+(y-4)^2+(x+4)^2+(y-2)^2$

$\quad+(x-7)^2+(y-3)^2$

$=3x^2-12x+3y^2-18y+103$

$=3(x-2)^2+3(y-3)^2+64$

따라서 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2$은 $x=2$, $y=3$일 때 최솟값 64를 가지므로 구하는 점 P의 좌표는 $(2, 3)$이다.

답 ③

$(x-2)^2\geq0$, $(y-3)^2\geq0$이므로 주어진 식의 값이 최소인 경우는 $(x-2)^2=0$, $(y-3)^2=0$, 즉 $x=2$, $y=3$일 때이다.

02 $\overline{AB}=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$

$\overline{BC}=\sqrt{a^2+(-1-3)^2}=\sqrt{a^2+16}$

$\overline{CA}=\sqrt{(-1-a)^2+1^2}=\sqrt{a^2+2a+2}$

(i) $\angle A=90°$인 경우

$\overline{AB}^2+\overline{CA}^2=\overline{BC}^2$이어야 하므로

$10+a^2+2a+2=a^2+16$, $\quad 2a=4$

$\therefore a=2$

(ii) $\angle B=90°$인 경우

$\overline{AB}^2+\overline{BC}^2=\overline{CA}^2$이어야 하므로

$10+a^2+16=a^2+2a+2$, $\quad 2a=24$

$\therefore a=12$

(iii) $\angle C=90°$인 경우

$\overline{BC}^2+\overline{CA}^2=\overline{AB}^2$이어야 하므로

$a^2+16+a^2+2a+2=10$

$\therefore a^2+a+4=0$

이때 이차방정식 $a^2+a+4=0$의 판별식을 D라 하면

$D=1^2-4\cdot1\cdot4=-15<0$

이므로 $a^2+a+4=0$을 만족시키는 실수 a는 존재하지 않는다.

이상에서 $\quad a=2$ 또는 $a=12$

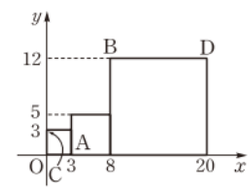
따라서 구하는 모든 실수 a의 값의 합은

$2+12=14$ 답 14

03 가장 작은 정사각형의 한 꼭짓점 C의 y좌표가 3이므로 한 변의 길이는 3이다.

$\therefore A(3, 0)$ ⋯ ❶

오른쪽 그림에서 가장 큰 정사각형의 한 꼭짓점 D의 y좌표가 12이므로 한 변의 길이는 12이다.



$\therefore B(8, 12)$ ⋯ ❷

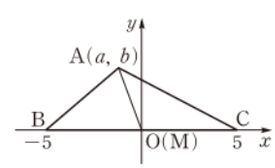
따라서 두 점 A, B 사이의 거리는

$\sqrt{(8-3)^2+12^2}=13$ ⋯ ❸

답 13

채점 기준	비율
❶ 점 A의 좌표를 구할 수 있다.	30 %
❷ 점 B의 좌표를 구할 수 있다.	40 %
❸ 두 점 A, B 사이의 거리를 구할 수 있다.	30 %

04 오른쪽 그림과 같이 직선 BC를 x축으로 하고, 점 M을 지나고 직선 BC에 수직인 직선을 y축으로 하는 좌표평면을 잡으면 점 M은 원점이다.



이때 1 km를 1로 생각하면

$B(-5, 0)$, $C(5, 0)$, $\overline{AB}=5$, $\overline{CA}=7$

이므로 $A(a, b)$라 하면

$\overline{AB}^2=25$에서

$(-5-a)^2+(-b)^2=25$

$\therefore a^2+10a+b^2=0$ ⋯⋯ ㉠

$\overline{CA}^2=49$에서

$(a-5)^2+b^2=49$

$\therefore a^2-10a+b^2=24$ ⋯⋯ ㉡

이때 입구 A에서 매점까지의 거리는

$\overline{AM}=\sqrt{a^2+b^2}$

㉠+㉡을 하면

$2(a^2+b^2)=24$

$\therefore a^2+b^2=12$

따라서 구하는 거리는

$\overline{AM}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$ (km) 답 ②

ⓒ좋은책신사고

1등급 비밀노트

△ABC에서 변 BC의 중점을 M이라 할 때,

$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{AM}^2+\overline{BM}^2)$

이 성립한다.

이 내용을 기억해 두면 위와 같은 문제를 쉽게 해결할 수 있다. 즉 $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{AM}^2+\overline{BM}^2)$이므로

$5^2+7^2=2(\overline{AM}^2+5^2)$, $\quad \overline{AM}^2=12$

$\therefore \overline{AM}=2\sqrt{3}$

05 점 A∘D의 좌표는

$$\left(\frac{1\cdot a+2\cdot(-3)}{1+2},\ \frac{1\cdot b+2\cdot 1}{1+2}\right)$$

$$\therefore \left(\frac{a-6}{3},\ \frac{b+2}{3}\right)$$

점 A∘B의 좌표는

$$\left(\frac{1\cdot 3+2\cdot(-3)}{1+2},\ \frac{1\cdot 4+2\cdot 1}{1+2}\right)$$

$$\therefore (-1,\ 2)$$

점 (A∘B)∘C의 좌표는

$$\left(\frac{1\cdot 5+2\cdot(-1)}{1+2},\ \frac{1\cdot(-4)+2\cdot 2}{1+2}\right)$$

$$\therefore (1,\ 0)$$

이때 두 점 A∘D, (A∘B)∘C가 일치하므로

$$\frac{a-6}{3}=1,\ \frac{b+2}{3}=0$$

$$\therefore a=9,\ b=-2$$

$$\therefore a+b=7$$

답 7

06 비커 A의 소금물 200 g에 들어 있는 소금의 양은

$$200\cdot\frac{a}{100}=2a\ (\text{g})$$

이고, 비커 B의 소금물 300 g에 들어 있는 소금의 양은

$$300\cdot\frac{b}{100}=3b\ (\text{g})$$

이므로 비커 A의 소금물 200 g과 비커 B의 소금물 300 g을 섞었을 때의 소금물의 농도는

$$\frac{2a+3b}{200+300}\cdot 100=\frac{2a+3b}{5}\ (\%)$$

$$\therefore x=\frac{2a+3b}{5}$$

따라서 점 R는 선분 PQ를 3 : 2로 내분하는 점이므로

$$\frac{m}{n}=\frac{3}{2}$$

답 $\frac{3}{2}$

07 $\overline{AD}$가 ∠A의 이등분선이므로

$\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{BD}:\overline{DC}$

이때

$\overline{AB}=\sqrt{(-5)^2+(-5-7)^2}=13$,

$\overline{AC}=\sqrt{4^2+(4-7)^2}=5$

이므로

$\overline{BD}:\overline{DC}=13:5$ ⋯ ❶

즉 점 D는 $\overline{BC}$를 13 : 5로 내분하는 점이므로 점 D의 좌표는

$$\left(\frac{13\cdot 4+5\cdot(-5)}{13+5},\ \frac{13\cdot 4+5\cdot(-5)}{13+5}\right)$$

$$\therefore \left(\frac{3}{2},\ \frac{3}{2}\right)$$ ⋯ ❷

따라서 $a=\frac{3}{2}$, $b=\frac{3}{2}$이므로

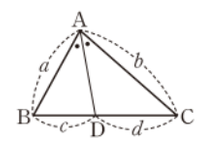
$a+b=3$ ⋯ ❸

답 3

채점 기준	비율
❶ $\overline{BD}:\overline{DC}$를 구할 수 있다.	40 %
❷ 점 D의 좌표를 구할 수 있다.	40 %
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	20 %

참고 △ABC에서 ∠A의 이등분선이 변 BC와 만나는 점을 D라 할 때, 즉 ∠BAD=∠CAD일 때,

$a:b=c:d$



08 $3x=5c-2a$에서

$$x=\frac{5c-2a}{3}=\frac{5c-2a}{5-2}$$

$3y=5d-2b$에서

$$y=\frac{5d-2b}{3}=\frac{5d-2b}{5-2}$$

따라서 점 P$(x,\ y)$는 선분 AB를 5 : 2로 외분하는 점이므로

$\overline{AB}:\overline{BP}=3:2$, $\quad 3\overline{BP}=2\overline{AB}$

$$\therefore \overline{BP}=\frac{2}{3}\overline{AB}=\frac{2}{3}\cdot 20=\frac{40}{3}$$

답 $\frac{40}{3}$

09 △AOB의 한 변의 길이를 x라 하면 조건 (가)에 의하여

$$\frac{\sqrt{3}}{4}x^2=6\sqrt{3},\quad x^2=24$$

$$\therefore x=2\sqrt{6}\ (\because x>0)$$

원점 O에서 $\overline{AB}$에 내린 수선의 발을 H라 하면 △AOB가 정삼각형이므로

$$\overline{OH}=\frac{\sqrt{3}}{2}x=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 2\sqrt{6}=3\sqrt{2}$$

한편 조건 (나)에 의하여 무게중심 G의 좌표를 $(k,\ k)$ $(k>0)$라 하면

$$\overline{OG}=\frac{2}{3}\overline{OH}=\frac{2}{3}\cdot 3\sqrt{2}=2\sqrt{2}$$

이므로

$$\sqrt{k^2+k^2}=2\sqrt{2},\quad k^2=4$$

$$\therefore k=2\ (\because k>0)$$

이때 △AOB의 무게중심의 좌표는 $\left(\frac{a+c}{3},\ \frac{b+d}{3}\right)$이므로

일품 BOX

점 A∘B는 선분 AB를 1 : 2로 내분하는 점이다.

(소금의 양) = (소금물의 양) × $\frac{(\text{농도})}{100}$

한 변의 길이가 a인 정삼각형의 넓이는 $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

x는 길이이므로 양수이다.

$\frac{2a+3b}{5}=\frac{3b+2a}{3+2}$

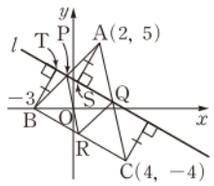
두 점 A, B가 제1사분면 위에 있으므로 △AOB의 무게중심 G는 제1사분면 위에 있다.

$\frac{a+c}{3}=2,\ \frac{b+d}{3}=2$

$\therefore a+c=6,\ b+d=6$

$\therefore a+b+c+d=12$ 답 12

10 오른쪽 그림과 같이 두 점 A, B에서 직선 l에 내린 수선의 발을 각각 S, T라 하면



△APS≡△BPT (ASA 합동)

이므로

$\overline{AP}=\overline{BP}$

같은 방법으로 하면 $\overline{AQ}=\overline{CQ}$ ··· ❶

따라서 세 점 P, Q, R는 각각 $\overline{AB}$, $\overline{CA}$, $\overline{BC}$의 중점이므로

$P\left(\frac{2-3}{2},\ \frac{5+0}{2}\right),\ Q\left(\frac{4+2}{2},\ \frac{-4+5}{2}\right),$

$R\left(\frac{-3+4}{2},\ \frac{0-4}{2}\right)$

$\therefore P\left(-\frac{1}{2},\ \frac{5}{2}\right),\ Q\left(3,\ \frac{1}{2}\right),\ R\left(\frac{1}{2},\ -2\right)$ ··· ❷

$x=\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}+3+\frac{1}{2}\right)=1,\ y=\frac{1}{3}\left(\frac{5}{2}+\frac{1}{2}-2\right)=\frac{1}{3}$

이므로

$x+y=\frac{4}{3}$ ··· ❸

답 $\frac{4}{3}$

채점 기준	비율
❶ 두 점 P, Q가 각각 $\overline{AB}$, $\overline{AC}$의 중점임을 알 수 있다.	40 %
❷ 세 점 P, Q, R의 좌표를 구할 수 있다.	30 %
❸ $x+y$의 값을 구할 수 있다.	30 %

1등급 비밀노트

△PRQ는 △ABC의 세 변의 중점을 꼭짓점으로 하는 삼각형이므로 △ABC의 무게중심과 △PRQ의 무게중심은 일치한다. 이것을 이용하면 세 점 P, Q, R의 좌표를 구하지 않고 세 점 A, B, C의 좌표를 이용하여 답을 구할 수 있다.

11 $xy-2x+y=5$에서

$x(y-2)+(y-2)=3$

$\therefore (x+1)(y-2)=3$ ····· ㉠

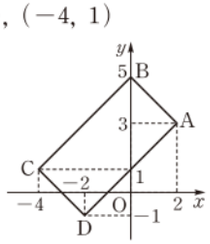
x, y는 정수이므로 ㉠을 만족시키는 정수 x, y의 순서쌍 $(x,\ y)$는

$(0,\ 5),\ (2,\ 3),\ (-2,\ -1),\ (-4,\ 1)$

$x+1$	$y-2$
1	3
3	1
−1	−3
−3	−1

A(2, 3), B(0, 5),

C(−4, 1), D(−2, −1)이라 하면 □ABCD는 오른쪽 그림과 같고,



$\overline{AB}=\sqrt{(-2)^2+(5-3)^2}$

$=2\sqrt{2},$

$\overline{BC}=\sqrt{(-4)^2+(1-5)^2}=4\sqrt{2},$

$\overline{CD}=\sqrt{(-2+4)^2+(-1-1)^2}=2\sqrt{2},$

$\overline{DA}=\sqrt{(2+2)^2+(3+1)^2}=4\sqrt{2}$

이므로 □ABCD는 평행사변형이다.

따라서 두 대각선의 교점은 대각선 AC의 중점과 같으므로 그 좌표는

$\left(\frac{2-4}{2},\ \frac{3+1}{2}\right)$ $\therefore (-1,\ 2)$ 답 ③

12 직선 $3x+ay=b$는 선분 AC의 수직이등분선이다.

직선 AC의 기울기는 $\frac{-1-7}{7-1}=-\frac{4}{3}$

$\overline{AC}$의 중점의 좌표는

$\left(\frac{1+7}{2},\ \frac{7-1}{2}\right)$ $\therefore (4,\ 3)$

기울기가 $\frac{3}{4}$이고 점 (4, 3)을 지나는 직선의 방정식은

$y-3=\frac{3}{4}(x-4)$ $\therefore 3x-4y=0$

이 직선이 직선 $3x+ay=b$와 같으므로

$a=-4,\ b=0$

$\therefore a+b=-4$ 답 −4

13 직선 $\frac{x}{6}+\frac{y}{10}=1$과 x축, y축의 교점을 각각 A, B라 하면

A(6, 0), B(0, 10)

직선 l이 직선 $\frac{x}{6}+\frac{y}{10}=1$과 x축, y축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이를 이등분하므로 선분 AB의 중점을 지나야 한다.

이때 선분 AB의 중점의 좌표는 (3, 5)이고, 직선 l이 원점을 지나므로 직선 l의 방정식은

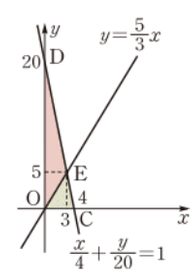
$y=\frac{5}{3}x$

한편 직선 $\frac{x}{4}+\frac{y}{20}=1$과 x축, y축의 교점을 각각 C, D라 하면

C(4, 0), D(0, 20)

두 직선 $y=\frac{5}{3}x$, $\frac{x}{4}+\frac{y}{20}=1$의 교점을 E라 하면

E(3, 5)



원점을 O라 하면

$\triangle OCE=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 5=10,$

$\triangle OED=\frac{1}{2}\cdot 20\cdot 3=30$

이므로

$S:T=10:30=1:3$ 답 ②

일품 BOX

마름모의 두 대각선은 서로를 수직이등분한다.

△APS, △BPT에서
∠ASP=∠BTP
=90°,
∠PAS=∠PBT,
$\overline{AS}=\overline{BT}$
∴ △APS≡△BPT
(ASA 합동)

$\frac{x}{4}+\frac{y}{20}=1$이므로

$5x+y=20$

$y=\frac{5}{3}x$를 이 식에 대입하면

$5x+\frac{5}{3}x=20$

$\frac{20}{3}x=20$ $\therefore x=3$

$\therefore y=\frac{5}{3}\cdot 3=5$

ⓒ좋은책신사고

다른 풀이 점 E에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\triangle DOC \backsim \triangle EHC$ (AA닮음)

이므로

$\overline{DC} : \overline{EC} = \overline{OC} : \overline{HC}$

$\overline{OC}=4$, $\overline{HC}=4-3=1$이므로

$\overline{DC} : \overline{EC} = 4 : 1$

따라서 점 E는 선분 CD를 $1:3$으로 내분하는 점이므로

$S : T = 1 : 3$

14 직선 AB의 방정식은

$\frac{x}{2}+\frac{y}{4}=1 \qquad \therefore y=-2x+4$

$P(a,\ -2a+4)$라 하면 직선 OP의 기울기는

$\frac{-2a+4}{a}$이므로 직선 OQ의 방정식은

$y=\frac{a}{2a-4}x$

직선 AC의 방정식은

$\frac{x}{-4}+\frac{y}{4}=1 \qquad \therefore y=x+4$

두 직선 $y=x+4$, $y=\frac{a}{2a-4}x$의 교점 Q의 y좌표는

$y=\frac{a}{2a-4}(y-4)$에서 $\qquad (2a-4)y=a(y-4)$

$\therefore y=\frac{4a}{4-a}$

삼각형 COQ의 넓이가 2이므로

$\frac{1}{2}\cdot 4\cdot\left|\frac{4a}{4-a}\right|=2, \qquad \left|\frac{4a}{4-a}\right|=1$

$\frac{4a}{4-a}=\pm 1, \qquad 4a=\pm(4-a)$

$4a=4-a$에서 $\qquad a=\frac{4}{5}$

$4a=-(4-a)$에서 $\qquad a=-\frac{4}{3}$

따라서 구하는 점 P의 모든 x좌표의 합은

$\frac{4}{5}+\left(-\frac{4}{3}\right)=-\frac{8}{15}$ 답 ①

참고 점 P의 x좌표가 0 또는 2이면 점 Q는 점 C 또는 점 A가 되므로 삼각형 COQ의 넓이가 2가 될 수 없다. 따라서 $a\neq 0$, $a\neq 2$이다.

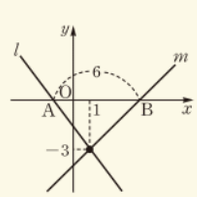
15 $\triangle ABC$, $\triangle AOP$의 넓이가 같으므로

$\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 4^2=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot\overline{OP}$

$\therefore \overline{OP}=\frac{8\sqrt{3}}{3}$ ··· ❶

즉 직선 l의 x절편이 $\frac{8\sqrt{3}}{3}$, y절편이 3이므로 직선 l의 방정식은

$\frac{3x}{8\sqrt{3}}+\frac{y}{3}=1 \qquad \therefore 3\sqrt{3}x+8y=24$ ··· ❷



따라서 $a=3\sqrt{3}$, $b=8$이므로

$a^2+b^2=(3\sqrt{3})^2+8^2=91$ ··· ❸

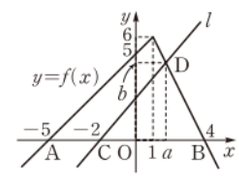
답 91

채점 기준	비율
❶ $\overline{OP}$의 길이를 구할 수 있다.	40 %
❷ 직선 l의 방정식을 구할 수 있다.	40 %
❸ a^2+b^2의 값을 구할 수 있다.	20 %

16 $A(-5,\ 0)$, $B(4,\ 0)$이므로 선분 AB를 $1:2$로 내분하는 점 C의 좌표는

$\left(\frac{1\cdot 4+2\cdot(-5)}{1+2},\ 0\right)$, 즉 $(-2,\ 0)$

오른쪽 그림과 같이 $y=f(x)$의 그래프와 직선 l이 만나는 점을 $D(a,\ b)$ $(1<a<4)$라 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 $\frac{1}{2}\cdot 9\cdot 6=27$이므로



함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 $\frac{1}{2}\cdot 9\cdot 6=27$이고 직선 l이 점 $(1,\ 6)$을 지날 때 $\triangle DCB$의 넓이는 $\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 6=18$이므로

$\frac{27}{2}<18$

이다.

$\therefore 1<a<4$

$\frac{1}{2}\cdot 6\cdot b=\frac{1}{2}\cdot 27 \qquad \therefore b=\frac{9}{2}$

점 $\left(a,\ \frac{9}{2}\right)$는 직선 $y=-2x+8$ 위의 점이므로

$\frac{9}{2}=-2a+8 \qquad \therefore a=\frac{7}{4}$

따라서 직선 l의 기울기는

$y=x+4$에서 $x=y-4$

두 점 C, D를 지나는 직선

$\frac{\frac{9}{2}-0}{\frac{7}{4}+2}=\frac{6}{5}$ 답 $\frac{6}{5}$

17 직선 $x+y+2+k(x-y-4)=0$ (k는 실수)은 k의 값에 관계없이 두 직선

$x+y+2=0,\ x-y-4=0$

의 교점 $(1,\ -3)$을 지난다.

두 식을 연립하여 풀면 $x=1,\ y=-3$

따라서 점 $(1,\ -3)$은 두 직선 l, m의 교점이고, $\overline{AB}=6$이므로 두 직선 l, m 및 x축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 3=9$ 답 9

18 ㄱ. 주어진 직선은 k의 값에 관계없이 항상 두 직선

$x+y+1=0,\ x-y-5=0$

의 교점 $(2,\ -3)$을 지난다.

ㄴ. $k=-1$일 때, 주어진 직선의 방정식은

$x+y+1-(x-y-5)=0$

$\therefore y=-3$

따라서 x축에 평행한 직선이다.

ㄷ. $x+y+1+k(x-y-5)=0$에서

$(k-1)y=(k+1)x+1-5k$

(i) $k=1$이면 $x=2$

(ii) $k\neq1$이면 $y=\frac{k+1}{k-1}x+\frac{1-5k}{k-1}$

이때 기울기가 1이면 $\frac{k+1}{k-1}=1$에서

$k+1=k-1$

$\therefore 0\cdot k=-2$

위의 식을 만족시키는 k의 값은 존재하지 않는다.

(i), (ii)에서 기울기가 1인 직선은 나타낼 수 없다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

19 직선 AC의 기울기는

$\frac{0-6}{4-0}=-\frac{3}{2}$

이므로 직선 BH의 기울기는 $\frac{2}{3}$이다.

직선 BH의 방정식은

$y+1=\frac{2}{3}(x-1)$ $\therefore y=\frac{2}{3}x-\frac{5}{3}$

$y=0$을 이 식에 대입하면

$0=\frac{2}{3}x-\frac{5}{3}$ $\therefore x=\frac{5}{2}$

따라서 선분 BH와 x축의 교점의 x좌표는 $\frac{5}{2}$이다.

답 ③

20 세 직선이 삼각형을 이루지 않으려면 두 직선이 서로 평행하거나 세 직선이 한 점에서 만나야 한다.

(i) 두 직선 $2x+y-4=0$, $mx+2y+4=0$이 평행할 때,

$\frac{m}{2}=\frac{2}{1}\neq\frac{4}{-4}$이므로 $m=4$ ··· ❶

(ii) 두 직선 $3x+y-8=0$, $mx+2y+4=0$이 평행할 때,

$\frac{m}{3}=\frac{2}{1}\neq\frac{4}{-8}$이므로 $m=6$ ··· ❷

(iii) 세 직선이 한 점에서 만날 때,

$2x+y-4=0$, $3x+y-8=0$을 연립하여 풀면

$x=4$, $y=-4$

이므로 두 직선 $2x+y-4=0$, $3x+y-8=0$의 교점의 좌표는 $(4, -4)$이다.

따라서 직선 $mx+2y+4=0$이 점 $(4, -4)$를 지나므로

$4m+2\cdot(-4)+4=0$

$\therefore m=1$ ··· ❸

이상에서 모든 실수 m의 값의 합은

$4+6+1=11$ ··· ❹

답 11

채점 기준	비율
❶ 두 직선 $2x+y-4=0$, $mx+2y+4=0$이 평행할 때의 m의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷ 두 직선 $3x+y-8=0$, $mx+2y+4=0$이 평행할 때의 m의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ 세 직선이 한 점에서 만날 때의 m의 값을 구할 수 있다.	30 %
❹ 조건을 만족시키는 모든 실수 m의 값의 합을 구할 수 있다.	10 %

참고 세 직선이 삼각형을 이루지 않을 조건

① 세 직선이 한 점에서 만난다.

② 두 직선이 서로 평행하다.

③ 세 직선이 모두 평행하다.

직선이 x축의 양의 부분과 이루는 각의 크기가 θ $(0^\circ\leq\theta<90^\circ)$일 때, 직선의 기울기는 $\tan\theta$이다.

21 기울기가 $\tan 45^\circ=1$이고 점 $A(-1, 1)$을 지나는 직선 l의 방정식은

$y-1=x+1$ $\therefore y=x+2$

직선 OA의 기울기가 -1이므로 $\triangle AOB$는 $\angle A=90^\circ$인 직각삼각형이다.

(직선 AB의 기울기) $\times$ (직선 OA의 기울기) $=1\cdot(-1)=-1$ 이므로 $\overline{AB}\perp\overline{OA}$

$\overline{OA}=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}$,

$\overline{AB}=\sqrt{(a+1)^2+(b-1)^2}$

이고, $\triangle AOB$의 넓이가 5이므로

$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{(a+1)^2+(b-1)^2}=5$

$\sqrt{(a+1)^2+(b-1)^2}=5\sqrt{2}$

$\therefore (a+1)^2+(b-1)^2=50$ ····· ㉠

한편 점 $B(a, b)$는 직선 l 위의 점이므로

$b=a+2$ ····· ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$(a+1)^2+(a+1)^2=50$, $(a+1)^2=25$

$a^2+2a-24=0$, $(a+6)(a-4)=0$

$\therefore a=4$ $(\because a>0)$

$a=4$를 ㉡에 대입하면 $b=6$

$\therefore a+b=10$ 답 10

두 직선 $2x+y-4=0$, $3x+y-8=0$의 기울기가 다르므로 세 직선이 모두 평행한 경우는 없다.

22 $\angle BAC=\angle BAO+\angle CAO$

$=\angle ACO+\angle CAO=90^\circ$

$\triangle AOC$에서 $\angle AOC=90^\circ$이므로 $\angle ACO+\angle CAO=90^\circ$

따라서 두 직선 l_1, l_2는 서로 수직이고, 직선 l_1의 기울기가 $\frac{4}{3}$이므로 직선 l_2의 기울기는 $-\frac{3}{4}$이다.

이때 직선 l_2의 y절편이 4이므로 직선 l_2의 방정식은

$y=-\frac{3}{4}x+4$, 즉 $3x+4y-16=0$ 답 ③

23 $\overline{MN}\,/\!/\,\overline{BC}$이므로 구하는 거리는 점 N과 직선 BC 사이의 거리와 같다.

점 N의 좌표는 $(1,\ 3)$이고, 직선 BC의 방정식은

$$y=\frac{0+3}{2+2}(x-2),\qquad y=\frac{3}{4}(x-2)$$

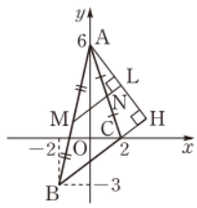
$$\therefore\ 3x-4y-6=0$$

따라서 두 직선 MN, BC 사이의 거리는

$$\frac{|3-12-6|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=3$$

답 ②

다른 풀이 점 A에서 변 BC의 연장선에 내린 수선의 발을 H, 두 직선 AH와 MN의 교점을 L이라 하면 구하는 거리는 $\overline{LH}$의 길이이다. $\overline{LH}=\frac{1}{2}\overline{AH}$이고, 직선 BC의 방정식은 $3x-4y-6=0$이므로



$$\overline{AH}=\frac{|0-24-6|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=6$$

$$\therefore\ \overline{LH}=\frac{1}{2}\overline{AH}=\frac{1}{2}\cdot 6=3$$

24 점 $P(a,\ b)$가 두 직선 $3x+2y-5=0$과 $2x-3y+5=0$으로부터 같은 거리에 있으므로

$$\frac{|3a+2b-5|}{\sqrt{3^2+2^2}}=\frac{|2a-3b+5|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}}$$

$$3a+2b-5=\pm(2a-3b+5)$$

$\therefore\ a+5b=10$ 또는 $5a-b=0$ ⋯ ❶

(i) $a+5b=10$일 때,

$$b=-\frac{a}{5}+2$$

조건 (가)에서 a, b가 자연수이므로 순서쌍 $(a,\ b)$는 $(5,\ 1)$이고 조건 (나)를 만족시킨다.

따라서 순서쌍 $(a,\ b)$는 $(5,\ 1)$의 1개이다. ⋯ ❷

(ii) $5a-b=0$일 때,

$$b=5a$$

조건 (가)에서 a, b가 자연수이므로 순서쌍 $(a,\ b)$는

$(1,\ 5)$, $(2,\ 10)$, $(3,\ 15)$,

$(4,\ 20)$, $(5,\ 25)$, $\cdots$

그런데 조건 (나)에서 $ab\le 100$이므로 순서쌍 $(a,\ b)$는 $(1,\ 5)$, $(2,\ 10)$, $(3,\ 15)$, $(4,\ 20)$의 4개이다. ⋯ ❸

(i), (ii)에서 구하는 순서쌍의 개수는

$1+4=5$ ⋯ ❹

답 5

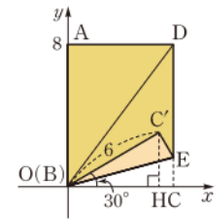
채점 기준	비율
❶ a, b 사이의 두 관계식을 구할 수 있다.	30 %
❷ $a+5b=10$일 때의 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수를 구할 수 있다.	30 %
❸ $5a-b=0$일 때의 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수를 구할 수 있다.	30 %
❹ 조건을 만족시키는 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수를 구할 수 있다.	10 %

일품 BOX

직각삼각형 C′BH에서
$\overline{BH}=\overline{BC'}\cos 30^\circ$
$=6\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$,
$\overline{C'H}=\overline{BC'}\sin 30^\circ$
$=6\cdot\frac{1}{2}=3$

$k=-2$일 때
$2(k+2)^2+8$은 최솟값 8을 갖는다.

25 오른쪽 그림과 같이 두 직선 BC, AB를 각각 x축, y축으로 하는 좌표평면을 잡으면 점 B는 원점이다.



$\angle EBC=\angle EBC'=15^\circ$이므로

$\angle C'BC=30^\circ$

점 C′에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면 △C′BH에서 $\overline{BH}=3\sqrt{3}$, $\overline{C'H}=3$이므로 점 C′의 좌표는

$(3\sqrt{3},\ 3)$

직선 BD의 방정식은 $y=\frac{4}{3}x$, 즉 $4x-3y=0$이므로

점 $C'(3\sqrt{3},\ 3)$과 직선 BD 사이의 거리는

$$\frac{|12\sqrt{3}-9|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\frac{12\sqrt{3}-9}{5}$$

따라서 $p=\frac{12}{5}$, $q=-\frac{9}{5}$이므로

$$p+q=\frac{3}{5}$$

답 ③

26 직선 $k(x+y)+4(x-1)=0$, 즉 $(k+4)x+ky-4=0$과 원점 사이의 거리는

$$f(k)=\frac{|-4|}{\sqrt{(k+4)^2+k^2}}=\frac{4}{\sqrt{2k^2+8k+16}}$$

$$=\frac{4}{\sqrt{2(k+2)^2+8}}$$

이므로 $2(k+2)^2+8$의 값이 최소일 때, $f(k)$의 값은 최대이다.

따라서 $f(k)$의 최댓값은 $\frac{4}{\sqrt{8}}=\sqrt{2}$

답 ①

참고 x의 값의 범위가 실수 전체일 때, 이차함수 $f(x)=a(x-m)^2+n$은
① $a>0$이면 $x=m$일 때, 최솟값 n을 갖는다.
② $a<0$이면 $x=m$일 때, 최댓값 n을 갖는다.

27 점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면

$\overline{AP}^2+3\overline{BP}^2=4\overline{CP}^2$에서

$$\{(x+1)^2+(y-1)^2\}+3\{(x-1)^2+(y+3)^2\}$$

$$=4\{(x-5)^2+(y-3)^2\}$$ ⋯ ❶

$$4x^2+4y^2-4x+16y+32$$

$$=4x^2+4y^2-40x-24y+136$$

$$36x+40y=104$$

$\therefore\ 9x+10y=26$ ⋯ ❷

따라서 $a=9$, $b=10$이므로

$$ab=90$$ ⋯ ❸

답 90

채점 기준	비율
❶ 주어진 등식을 x, y에 대한 등식으로 나타낼 수 있다.	40 %
❷ 점 P의 자취의 방정식을 구할 수 있다.	40 %
❸ ab의 값을 구할 수 있다.	20 %

28 점 $P(a+b,\ a-b)$가 직선 $2x+y=1$ 위에 있으므로

$2(a+b)+(a-b)=1$

$\therefore 3a+b=1$ …… ㉠

$a-b=x,\ a+b=y$로 놓으면

$a=\frac{x+y}{2},\ b=\frac{y-x}{2}$

이것을 ㉠에 대입하면 점 Q의 자취의 방정식은

$3\cdot\frac{x+y}{2}+\frac{y-x}{2}=1$

$\therefore x+2y=1$ 답 ②

일품 BOX

$\begin{cases} a-b=x & \cdots ㉡ \\ a+b=y & \cdots ㉢ \end{cases}$

㉡+㉢을 하면

$2a=x+y$

$\therefore a=\frac{x+y}{2}$

㉢−㉡을 하면

$2b=y-x$

$\therefore b=\frac{y-x}{2}$

29 $\overline{BD}$ 위의 점을 $P(x,\ y)$라 하면 $\overline{BD}$는 $\angle ABC$를 이등분한다. 즉 점 P에서 두 직선 AB, BC 사이의 거리가 같으므로

$\frac{|3x-y+2|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\frac{|ax+by+3|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$\frac{|3x-y+2|}{\sqrt{10}}=\frac{|ax+by+3|}{2\sqrt{10}}$

$2|3x-y+2|=|ax+by+3|$

$6x-2y+4=\pm(ax+by+3)$

$\therefore (6-a)x-(2+b)y+1=0$

또는 $(a+6)x+(b-2)y+7=0$

(i) 직선 $(6-a)x-(2+b)y+1=0$이 직선 $8x-8y+7=0$일 때,

$8x-8y+7=0$의 양변을 7로 나누면

$\frac{8}{7}x-\frac{8}{7}y+1=0$이므로

$6-a=\frac{8}{7},\ 2+b=\frac{8}{7}$

$\therefore a=\frac{34}{7},\ b=-\frac{6}{7}$

그런데 $a^2+b^2\neq 40$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) 직선 $(a+6)x+(b-2)y+7=0$이 직선 $8x-8y+7=0$일 때,

$a+6=8,\ b-2=-8$

$\therefore a=2,\ b=-6$

(i), (ii)에서 $a=2,\ b=-6$이므로

$a+b=-4$ 답 ①

$a^2+b^2=2^2+(-6)^2$
$=40$
이므로 조건을 만족시킨다.

사고력 강화를 위한 수능형 문제

본책 98~99쪽

01 출발한 지 t초 후의 두 점 A, B의 좌표는 각각

$(-2+t,\ 0),\ (0,\ 3-2t)$

이므로 t초 후의 두 점 A, B 사이의 거리는

$\sqrt{(2-t)^2+(3-2t)^2}=\sqrt{5t^2-16t+13}$

$=\sqrt{5\left(t-\frac{8}{5}\right)^2+\frac{1}{5}}$

따라서 출발한 지 $\frac{8}{5}$초 후에 두 점 A, B 사이의 거리는 최소가 되므로 $a=\frac{8}{5}$ 답 ④

02 점 P는 선분 AC를 3 : 4로 내분하는 점이므로

$p=\frac{3c+4a}{3+4}$ $\therefore 7p=4a+3c$ …… ㉠

또 점 P는 선분 BC를 3 : 4로 외분하는 점이므로

$p=\frac{3c-4b}{3-4}$ $\therefore p=4b-3c$ …… ㉡

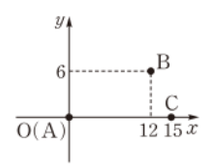
㉠+㉡을 하면 $8p=4a+4b$ $\therefore p=\frac{a+b}{2}$

점 Q는 선분 PC를 3 : 2로 외분하는 점이므로

$q=\frac{3c-2p}{3-2}=3c-2\cdot\frac{a+b}{2}=3c-a-b$

$\therefore q-3c=-a-b$ 답 ③

03 오른쪽 그림과 같이 직선 AC를 x축으로 하고 점 A를 지나고 직선 AC에 수직인 직선을 y축으로 하는 좌표평면을 잡으면 점 A는 원점이다.



이때 1 km를 1로 생각하면 $A(0,\ 0)$, $B(12,\ 6)$, $C(15,\ 0)$이고, 마을회관의 위치를 $P(p,\ q)$라 하면 $\overline{AP}=\overline{BP}=\overline{CP}$이므로 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$에서

$p^2+q^2=(p-12)^2+(q-6)^2$

$\therefore 2p+q=15$ …… ㉠

또 $\overline{AP}^2=\overline{CP}^2$에서

$p^2+q^2=(p-15)^2+q^2$

$30p=225$ $\therefore p=\frac{15}{2}$

$p=\frac{15}{2}$를 ㉠에 대입하면 $15+q=15$

$\therefore q=0$

$\therefore P\left(\frac{15}{2},\ 0\right)$

노인정의 위치를 Q라 하면 점 Q는 $\triangle ABC$의 무게중심이므로 점 Q의 좌표는

$\left(\frac{0+12+15}{3},\ \frac{0+6+0}{3}\right)$ $\therefore (9,\ 2)$

$\therefore 4l^2=4\overline{PQ}^2=4\left\{\left(9-\frac{15}{2}\right)^2+2^2\right\}$

$=25$ 답 25

04 점 G의 y좌표를 p라 하면 $\triangle GOB$의 넓이가 32이므로

$\frac{1}{2}\cdot\overline{OB}\cdot p=32,\quad \frac{1}{2}\cdot 8p=32$

$\therefore p=8$

ⓒ좋은책신사고

이때 점 G는 △ABC의 무게중심이므로

$\frac{4+0+b}{3}=8 \qquad \therefore b=20$

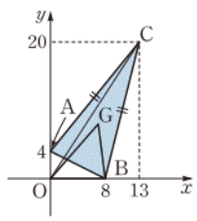
$\overline{AC}=\overline{BC}$에서 $\overline{AC}^2=\overline{BC}^2$이므로

$a^2+(20-4)^2=(a-8)^2+20^2$

$a^2+256=a^2-16a+464$

$16a=208 \qquad \therefore a=13$

오른쪽 그림에서



△CAB

$=\triangle CAO+\triangle COB-\triangle AOB$

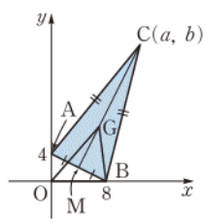
$=\frac{1}{2}\cdot4\cdot13+\frac{1}{2}\cdot8\cdot20$

$-\frac{1}{2}\cdot8\cdot4$

$=90$

답 90

다른 풀이 오른쪽 그림과 같이 선분 AB의 중점을 M이라 하면



M(4, 2)

삼각형 ABC가 이등변삼각형이므로

$\overline{AB}\perp\overline{CM}$

이등변삼각형의 꼭지각의 꼭짓점과 밑변의 중점을 지나는 직선은 밑변의 수직이등분선과 같다.

이때 직선 AB의 기울기가 $-\frac{1}{2}$이므로 직선 CM의 기울기는 2이고, 점 M(4, 2)를 지나므로 직선 CM의 방정식은

$y-2=2(x-4) \qquad \therefore y=2x-6$

한편 점 G는 △ABC의 무게중심이므로 선분 CM을 2 : 1로 내분하는 점이다.

점 G의 y좌표를 p라 하면

$p=\frac{2\cdot2+1\cdot b}{2+1}=\frac{4+b}{3}$

그런데 삼각형 GOB의 넓이가 32이므로

$\frac{1}{2}\cdot\overline{OB}\cdot p=32, \qquad \frac{1}{2}\cdot8\cdot\frac{4+b}{3}=32$

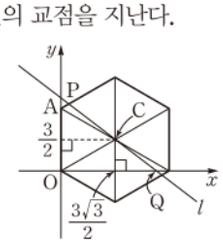
$\frac{4+b}{3}=8 \qquad \therefore b=20$

점 C$(a, 20)$은 직선 $y=2x-6$ 위의 점이므로

$20=2a-6 \qquad \therefore a=13$

05 직선 l이 정육각형의 넓이를 이등분하므로 직선 l은 정육각형의 가장 긴 세 대각선의 교점을 지난다.

오른쪽 그림과 같이 정육각형의 가장 긴 세 대각선의 교점을 C라 하면



$C\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right)$

한 변의 길이가 3인 정삼각형의 높이는 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$이다.

즉 직선 l은 두 점 $P\left(0, \frac{7}{2}\right)$, $C\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right)$을 지나므로 직선 l의 방정식은

$y-\frac{7}{2}=\frac{\frac{3}{2}-\frac{7}{2}}{\frac{3\sqrt{3}}{2}-0}(x-0)$

$\therefore y=-\frac{4}{3\sqrt{3}}x+\frac{7}{2}$

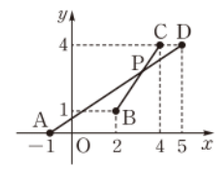
이 직선이 점 Q$(\sqrt{3}a, 0)$을 지나므로

$0=-\frac{4}{3\sqrt{3}}\cdot\sqrt{3}a+\frac{7}{2}$

$\frac{4}{3}a=\frac{7}{2} \qquad \therefore a=\frac{21}{8}$

답 ③

06 $\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}+\overline{PD}$의 값이 최소가 되려면 오른쪽 그림과 같이 점 P는 $\overline{AD}$ 위에 있고, 동시에 $\overline{BC}$ 위에 있어야 한다.



즉 $\overline{AD}$와 $\overline{BC}$의 교점이 P이어야 한다.

두 점 A, D를 지나는 직선의 방정식은

$y=\frac{4-0}{5+1}(x+1) \qquad \therefore y=\frac{2}{3}x+\frac{2}{3} \quad \cdots\cdots ㉠$

두 점 B, C를 지나는 직선의 방정식은

$y-1=\frac{4-1}{4-2}(x-2) \qquad \therefore y=\frac{3}{2}x-2 \quad \cdots ㉡$

두 직선 ㉠, ㉡의 교점의 x좌표는 $\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}=\frac{3}{2}x-2$에서

$4x+4=9x-12 \qquad \therefore x=\frac{16}{5}$

이것을 ㉠에 대입하면 $\quad y=\frac{14}{5}$

$\therefore a=\frac{16}{5}, \ b=\frac{14}{5}$

한편 $\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}+\overline{PD}$의 최솟값은 $\overline{AD}+\overline{BC}$의 값이므로

$k=\sqrt{(5+1)^2+4^2}+\sqrt{(4-2)^2+(4-1)^2}$

$=3\sqrt{13}$

$\therefore a+b+k^2=\frac{16}{5}+\frac{14}{5}+(3\sqrt{13})^2$

$=6+117=123$

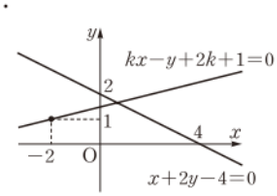
답 123

07 $kx-y+2k+1=0$에서

$k(x+2)+(1-y)=0$

이므로 직선 $kx-y+2k+1=0$은 k의 값에 관계없이 항상 점 $(-2, 1)$을 지난다.

또 직선 $x+2y-4=0$은 오른쪽 그림과 같으므로 두 직선이 제1사분면에서 만나려면 직선 $kx-y+2k+1=0$이 두 점 $(0, 2)$, $(4, 0)$을 잇는 선분 사이를 지나야 한다.



(i) 직선 $kx-y+2k+1=0$이 점 $(0,\ 2)$를 지날 때,

$$-2+2k+1=0 \qquad \therefore k=\frac{1}{2}$$

(ii) 직선 $kx-y+2k+1=0$이 점 $(4,\ 0)$을 지날 때,

$$4k+2k+1=0 \qquad \therefore k=-\frac{1}{6}$$

(i), (ii)에서 $-\frac{1}{6}<k<\frac{1}{2}$이므로

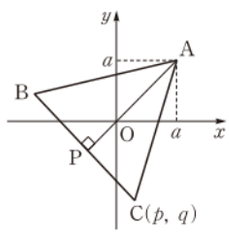
$$\alpha=-\frac{1}{6},\ \beta=\frac{1}{2}$$

$$\therefore 3(\alpha+\beta)=1$$

답 1

$k=-\frac{1}{6}$, $k=\frac{1}{2}$일 때는 두 직선의 교점이 각각 x축, y축 위에 있으므로 제1사분면에 포함되지 않는다.

08 점 A에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 P라 하면



$$\overline{AP}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 4=2\sqrt{3}$$

△ABC의 무게중심이 원점이므로 오른쪽 그림에서

$$\overline{OA}=\frac{2}{3}\overline{AP}$$

$\overline{AP}$는 $\overline{BC}$의 수직이등분선이므로 점 O는 $\overline{AP}$ 위에 있다.

$\overline{OA}=\sqrt{a^2+a^2}=\sqrt{2}a$이므로

$\sqrt{a^2+a^2}=\sqrt{2a^2}$
$=\sqrt{2}a\ (\because a>0)$

$$\sqrt{2}a=\frac{2}{3}\cdot 2\sqrt{3}, \qquad \sqrt{2}a=\frac{4\sqrt{3}}{3} \qquad \therefore a=\frac{2\sqrt{6}}{3}$$

또 $2\overline{OP}=\overline{OA}$이므로

$$P\left(-\frac{a}{2},\ -\frac{a}{2}\right)$$

이때 두 직선 PA, PC는 서로 수직이므로 직선 PC의 기울기는 -1이다. 즉

직선 PA의 방정식은 $y=x$

$$\frac{q+\frac{a}{2}}{p+\frac{a}{2}}=-1, \qquad q+\frac{a}{2}=-p-\frac{a}{2}$$

$$\therefore p+q=-a$$

$$\therefore (p+q)^2=(-a)^2=\left(-\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)^2=\frac{8}{3}$$

답 ④

09 ㄱ. 직선 l의 방정식을 a에 대하여 정리하면

$$a(x+2y)+(6-3y)=0$$

이 직선이 a의 값에 관계없이 항상 두 직선

$$x+2y=0,\ 6-3y=0$$

의 교점을 지나므로 위의 두 식을 연립하여 풀면

$$x=-4,\ y=2$$

따라서 직선 l은 a의 값에 관계없이 항상 점 $(-4,\ 2)$를 지난다.

ㄴ. 직선 $x+2y-1=0$과 직선 $l: ax+(2a-3)y+6=0$이 평행하려면

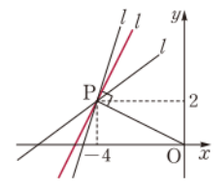
$$\frac{a}{1}=\frac{2a-3}{2}\neq\frac{6}{-1}$$

$\frac{a}{1}=\frac{2a-3}{2}$에서 $\quad 2a=2a-3$

$$\therefore 0\cdot a=-3$$

이 식을 만족시키는 a의 값은 존재하지 않으므로 직선 $x+2y-1=0$과 평행한 직선 l은 존재하지 않는다.

ㄷ. 점 $P(-4,\ 2)$라 하면 직선 l은 점 P를 지나는 직선이다. 오른쪽 그림에서 원점 O와 직선 l 사이의 거리가 최대가 될 때는 직선 l이 직선 OP와 수직일 때이다.



즉 직선 OP의 기울기가 $-\frac{1}{2}$이므로 직선 l의 기울기가 2일 때 원점 O와 직선 l사이의 거리가 최대이다.

$ax+(2a-3)y+6=0$에서

$$(2a-3)y=-ax-6$$

(i) $2a-3=0$, 즉 $a=\frac{3}{2}$이면 $\qquad x=-4$

이 직선의 방정식은 기울기가 2가 될 수 없다.

(ii) $2a-3\neq 0$, 즉 $a\neq\frac{3}{2}$이면 기울기가 2이어야 하므로 $\qquad -\frac{a}{2a-3}=2$

$$-a=4a-6 \qquad \therefore a=\frac{6}{5}$$

따라서 원점 O와 직선 l 사이의 거리는 $a=\frac{6}{5}$일 때 최대이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ뿐이다.

답 ①

참고 ㄷ에서 원점과 직선 l 사이의 거리는 $\frac{|6|}{\sqrt{a^2+(2a-3)^2}}$이므로 $a^2+(2a-3)^2$의 값이 최소일 때의 a의 값을 구해도 된다.

10 직선 $mx-y-3m+1=0$, 즉

$$y=m(x-3)+1 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

은 m의 값에 관계없이 항상 점 $(3,\ 1)$을 지나므로 직선 ㉠이 사각형 ABCD와 만나려면 직선 ㉠이 선분 BD를 지나야 한다.

(i) 직선 ㉠이 점 $B(-1,\ 3)$을 지날 때,

$$3=-4m+1 \qquad \therefore m=-\frac{1}{2}$$

(ii) 직선 ㉠이 점 $D(1,\ 5)$를 지날 때,

$$5=-2m+1 \qquad \therefore m=-2$$

(i), (ii)에서 $\qquad -2\leq m\leq -\frac{1}{2}$

한편 직선 ㉠과 직선 $sx-y-5s+2=0$, 즉 $y=sx-5s+2$가 수직이므로

$$ms=-1 \qquad \therefore s=-\frac{1}{m}$$

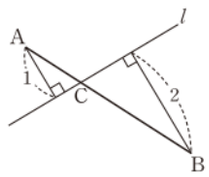
$-2\leq m\leq -\frac{1}{2}$에서

$-2 \le \frac{1}{m} \le -\frac{1}{2}$,　　$\frac{1}{2} \le -\frac{1}{m} \le 2$

$\therefore \frac{1}{2} \le s \le 2$

따라서 $\alpha=\frac{1}{2}$, $\beta=2$이므로　　$\alpha+\beta=\frac{5}{2}$　　답 ②

11 직선 l과 선분 AB의 교점을 C라 하면 두 점 A, B와 직선 l 사이의 거리가 각각 1, 2이므로



$\overline{AC} : \overline{BC} = 1 : 2$

즉 점 C는 선분 AB를 1 : 2로 내분하는 점이므로

$C\left(\frac{1\cdot5+2\cdot2}{1+2}, \frac{1\cdot(-4)+2\cdot2}{1+2}\right)$　　$\therefore C(3, 0)$

따라서 직선 l은 점 C(3, 0)을 지나므로 직선 l의 기울기를 m이라 하면 직선 l의 방정식은

$y=m(x-3)$　　$\therefore mx-y-3m=0$

직선 l과 점 A(2, 2) 사이의 거리가 1이므로

$\frac{|2m-2-3m|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=1$,　　$|-m-2|=\sqrt{m^2+1}$

위의 식의 양변을 제곱하면

$m^2+4m+4=m^2+1$,　　$4m=-3$

$\therefore m=-\frac{3}{4}$

따라서 직선 l의 방정식은 $y=-\frac{3}{4}x+\frac{9}{4}$이므로 y절편은 $\frac{9}{4}$이다.　　답 $\frac{9}{4}$

12 원 C_1의 중심이 그리는 자취 l은 직선 $12x-5y+24=0$과 평행한 직선이고, 이 두 직선 사이의 거리는 원의 반지름의 길이인 1과 같다.

원 C_2 위의 점 P에서 직선 l에 이르는 거리의 최솟값은 직선 l과 직선 $12x-5y-67=0$ 사이의 거리에서 원 C_2의 지름의 길이인 2를 뺀 값이다.

따라서 구하는 거리의 최솟값은 두 직선 $12x-5y+24=0$, $12x-5y-67=0$ 사이의 거리에서 3을 뺀 값과 같다.

직선 $12x-5y+24=0$ 위의 점 $(-2, 0)$과 직선 $12x-5y-67=0$ 사이의 거리는

$\frac{|-24-67|}{\sqrt{12^2+(-5)^2}}=7$

이므로 구하는 거리의 최솟값은　　$7-3=4$　　답 4

1등급 비밀노트

직선 l과 직선 $12x-5y+24=0$ 사이의 거리가 1임을 이용하여 직선 l의 방정식을 직접 구해 문제를 해결할 수도 있지만 위의 해설과 같은 원리를 이용하여 주어진 두 직선의 방정식만으로도 문제를 해결할 수 있다.

일품 BOX

왼쪽 그림의 두 직각삼각형은 닮음이다.

$(a+1, -a)$

$17=12+ab$에서 $ab=5$

① x축에 접하는 원에서 (반지름의 길이) $=|$(중심의 y좌표)$|$
② y축에 접하는 원에서 (반지름의 길이) $=|$(중심의 x좌표)$|$
③ x축, y축에 동시에 접하는 원에서 (반지름의 길이) $=|$(중심의 x좌표)$|$ $=|$(중심의 y좌표)$|$

10 원의 방정식

개념&핵심 기출

본책 100~102쪽

01 원의 중심이 직선 $y=2x$ 위에 있으므로 원의 중심을 $C(a, 2a)$라 하자.

$\overline{AC}=\overline{BC}$에서 $\overline{AC}^2=\overline{BC}^2$이므로

$(a+1)^2+(2a-3)^2=(a-4)^2+(2a+2)^2$

$5a^2-10a+10=5a^2+20$,　　$10a=-10$

$\therefore a=-1$

따라서 $C(-1, -2)$이고 원의 반지름의 길이는 $\overline{AC}$의 길이와 같으므로

$\overline{AC}=\sqrt{(-1+1)^2+(-2-3)^2}=5$　　답 ③

02 주어진 원의 방정식을 변형하면

$\{x-(a+1)\}^2+(y+a)^2=-a^2+2a+3$

이므로 반지름의 길이

$\sqrt{-a^2+2a+3}=\sqrt{-(a-1)^2+4}$

가 최대일 때 원의 넓이가 최대이다.

따라서 $a=1$일 때 원의 넓이가 최대이고, 이때 원의 중심의 좌표는 $(2, -1)$이다.　　답 ①

03 직각삼각형의 외접원의 중심은 빗변의 중점이므로 외접원의 중심의 좌표는

$\left(\frac{2+6}{2}, \frac{1+5}{2}\right)$, 즉 $(4, 3)$

또 외접원의 반지름의 길이는 두 점 $(2, 1)$, $(4, 3)$ 사이의 거리이므로

$\sqrt{(4-2)^2+(3-1)^2}=2\sqrt{2}$

따라서 외접원의 방정식은

$(x-4)^2+(y-3)^2=8$

$\therefore x^2+y^2-8x-6y+17=0$　　… ㉠

$(x-2)(x-6)+(y+a)(y+b)=0$에서

$x^2+y^2-8x+(a+b)y+12+ab=0$　　… ㉡

즉 $a+b=-6$, $ab=5$이므로

$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$

$=(-6)^2-2\cdot5$

$=26$　　답 26

04 주어진 원이 점 $(2, 0)$에서 x축에 접하므로 원의 중심의 x좌표는 2이고, 원의 중심의 좌표를 $(2, a)$ $(a>0)$라 하면 원의 반지름의 길이는 a이다.

또 이 원이 직선 $x-2y+2=0$에 접하므로 원의 중심 $(2, a)$와 직선 사이의 거리가 원의 반지름의 길이와 같다. 즉

$\frac{|2+(-2)\cdot a+2|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=a$,　　$|-2a+4|=\sqrt{5}a$

$4a^2-16a+16=5a^2$,　　$a^2+16a-16=0$

$\therefore a=-8+4\sqrt{5}$ ($\because a>0$)

따라서 $m=-8$, $n=4$이므로

$|m|+|n|=8+4=12$ 답 12

05 x축, y축에 동시에 접하면서 점 $(-1,\ 2)$를 지나는 원의 중심은 제2사분면 위에 있으므로 주어진 원의 중심의 좌표를 $(-k,\ k)$ $(k>1)$라 하면 원의 방정식은

$(x+k)^2+(y-k)^2=k^2$

이 원이 점 $(-1,\ 2)$를 지나므로

$(-1+k)^2+(2-k)^2=k^2$

$k^2-6k+5=0$

$(k-1)(k-5)=0$

$\therefore k=5\ (\because k>1)$

따라서 주어진 원의 방정식은

$(x+5)^2+(y-5)^2=25$

즉 $x^2+y^2+10x-10y+25=0$이므로

$a=10,\ b=-10,\ c=25$

$\therefore a+b+c=25$ 답 ⑤

06 점 B의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면 $\overline{OB}:\overline{AB}=3:2$이므로

$2\overline{OB}=3\overline{AB}$, $4\overline{OB}^2=9\overline{AB}^2$

$4(x^2+y^2)=9\{(x-5)^2+y^2\}$

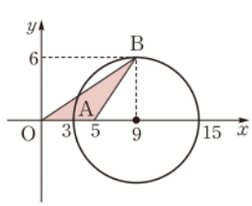
$5x^2+5y^2-90x+225=0$

$x^2+y^2-18x+45=0$

$\therefore (x-9)^2+y^2=36$

따라서 점 B는 중심이 점 $(9,\ 0)$이고 반지름의 길이가 6인 원 위를 움직인다.

오른쪽 그림과 같이 $\overline{OA}$를 밑변으로 하면 높이가 원의 반지름의 길이일 때 삼각형 OAB의 넓이가 최대이므로 삼각형 OAB의 넓이의 최댓값은



$\frac{1}{2}\cdot5\cdot6=15$ 답 15

다른 풀이 선분 OA를 $3:2$로 내분하는 점을 C, 외분하는 점을 D라 하면

$C(3,\ 0)$, $D(15,\ 0)$

점 B의 자취는 두 점 C, D를 지름의 양 끝 점으로 하는 원이므로 중심은 $\overline{CD}$의 중점인 점 $(9,\ 0)$이고 반지름의 길이는 6이다.

즉 점 B의 자취의 방정식은

$(x-9)^2+y^2=36$

07 $(x-4)^2+(y+2)^2=26$에서

$x^2+y^2-8x+4y-6=0$

일품 BOX

원의 반지름의 길이가 k이고 원의 반지름의 길이는 1보다 크므로 $k>1$

반지름의 길이가 $\sqrt{10}$이므로 원의 넓이는 10π이다.

삼각형 OAB의 밑변의 길이가 일정하므로 높이가 최대일 때, 넓이가 최대이다.

$2x-3y+10=0$에 $y=0$을 대입하면

$2x+10=0$

$\therefore x=-5$

$3x+2y-10=0$에 $y=0$을 대입하면

$3x-10=0$

$\therefore x=\frac{10}{3}$

두 원의 교점을 지나는 원의 방정식을

$x^2+y^2-4+k(x^2+y^2-8x+4y-6)=0\ (k\neq-1)$ …… ㉠

이라 하면 이 원이 점 $(5,\ 0)$을 지나므로

$21-21k=0$

$\therefore k=1$

$k=1$을 ㉠에 대입한 후 정리하면

$2x^2+2y^2-8x+4y-10=0$

$x^2+y^2-4x+2y-5=0$

$\therefore (x-2)^2+(y+1)^2=10$

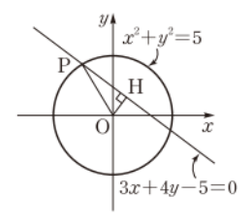
따라서 구하는 원의 넓이는 10π이다. 답 ①

08 두 원의 공통인 현의 방정식은

$x^2+y^2-5-(x^2+y^2-3x-4y)=0$

$\therefore 3x+4y-5=0$

오른쪽 그림과 같이 원 $x^2+y^2=5$의 중심 $O(0,\ 0)$에서 직선 $3x+4y-5=0$에 내린 수선의 발을 H라 하고, 원 $x^2+y^2=5$와 직선 $3x+4y-5=0$의 한 교점을 P라 하자.



이때

$\overline{OH}=\frac{|-5|}{\sqrt{3^2+4^2}}=1$

이므로 직각삼각형 POH에서

$\overline{PH}=\sqrt{(\sqrt{5})^2-1^2}=2$

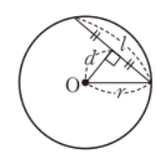
따라서 공통인 현의 길이는

$2\overline{PH}=2\cdot2=4$ 답 ③

참고 현의 길이는 원의 중심에서 현에 수선을 내려 직각삼각형을 만든 다음, 피타고라스 정리를 이용하여 구한다.

즉 반지름의 길이가 r인 원의 중심에서 d만큼 떨어진 현의 길이를 l이라 하면

$l=2\sqrt{r^2-d^2}$



09 직선 l_1의 방정식은

$x^2+y^2-8-(x^2+y^2+4x-6y+12)=0$

$\therefore 2x-3y+10=0$ …… ㉠

직선 l_2의 방정식은

$x^2+y^2-8-(x^2+y^2-6x-4y+12)=0$

$\therefore 3x+2y-10=0$ …… ㉡

두 직선 l_1, l_2의 x절편은 각각 -5, $\frac{10}{3}$

㉠$\times3-$㉡$\times2$를 하면

$-13y+50=0$

$\therefore y=\frac{50}{13}$

ⓒ좋은책신사고

즉 두 직선 l_1, l_2의 교점의 y좌표는 $\frac{50}{13}$이므로 두 직선 l_1, l_2와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{10}{3}+5\right)\cdot\frac{50}{13}=\frac{25^2}{39}$$

$\therefore a=25$ 답 25

10 (i) 직선 $y=mx+2$, 즉 $mx-y+2=0$과 원 $x^2+y^2=1$이 만나지 않으려면 원의 중심 $(0,\ 0)$과 직선 사이의 거리가 원의 반지름의 길이인 1보다 커야 하므로

$$\frac{|2|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}>1,\qquad \sqrt{m^2+1}<2$$

$$m^2+1<4,\qquad m^2<3$$

$$\therefore -\sqrt{3}<m<\sqrt{3}$$

(ii) 직선 $mx-y+2=0$과 원 $x^2+y^2-6x-4y+9=0$, 즉 $(x-3)^2+(y-2)^2=4$가 만나지 않으려면 원의 중심 $(3,\ 2)$와 직선 사이의 거리가 원의 반지름의 길이인 2보다 커야 하므로

$$\frac{|3m-2+2|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}>2,\qquad |3m|>2\sqrt{m^2+1}$$

$$9m^2>4m^2+4,\qquad m^2>\frac{4}{5}$$

$$\therefore m<-\frac{2\sqrt{5}}{5} \text{ 또는 } m>\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

(i), (ii)에서

$$-\sqrt{3}<m<-\frac{2\sqrt{5}}{5} \text{ 또는 } \frac{2\sqrt{5}}{5}<m<\sqrt{3}$$

답 $-\sqrt{3}<m<-\frac{2\sqrt{5}}{5}$ 또는 $\frac{2\sqrt{5}}{5}<m<\sqrt{3}$

다른 풀이 (i) $y=mx+2$를 $x^2+y^2=1$에 대입하면

$$x^2+(mx+2)^2=1$$

$$\therefore (1+m^2)x^2+4mx+3=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D_1이라 하면

$$\frac{D_1}{4}=(2m)^2-(1+m^2)\cdot 3<0$$

$$m^2<3$$

$$\therefore -\sqrt{3}<m<\sqrt{3}$$

(ii) $y=mx+2$를 $x^2+y^2-6x-4y+9=0$에 대입하면

$$x^2+(mx+2)^2-6x-4(mx+2)+9=0$$

$$\therefore (1+m^2)x^2-6x+5=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D_2라 하면

$$\frac{D_2}{4}=(-3)^2-(1+m^2)\cdot 5<0$$

$$m^2>\frac{4}{5}$$

$$\therefore m<-\frac{2\sqrt{5}}{5} \text{ 또는 } m>\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

(i), (ii)에서

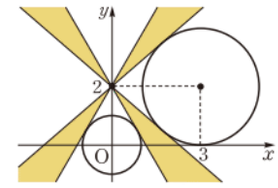
$$-\sqrt{3}<m<-\frac{2\sqrt{5}}{5} \text{ 또는 } \frac{2\sqrt{5}}{5}<m<\sqrt{3}$$

일품 BOX

원의 방정식과 직선의 방정식에서 한 문자를 소거하여 얻은 이차방정식의 판별식을 D라 하면 원과 직선의 위치 관계는
① $D>0$ ➡ 서로 다른 두 점에서 만난다.
② $D=0$ ➡ 한 점에서 만난다. (접한다.)
③ $D<0$ ➡ 만나지 않는다.

이차방정식 $4m^2+9m+4=0$의 판별식을 D라 하면
$D=9^2-4\cdot4\cdot4$
$=17>0$
이므로 이차방정식 $4m^2+9m+4=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

참고 직선 $y=mx+2$는 m의 값에 관계없이 항상 점 $(0,\ 2)$를 지나므로 직선이 두 원과 모두 만나지 않을 때는 오른쪽 그림에서 직선이 색칠한 부분에 있을 때이다.



11 $x^2+y^2-4x-2y=m$에서

$$(x-2)^2+(y-1)^2=m+5$$

이 원의 중심을 C라 하면 점 C$(2,\ 1)$과 직선 $x-y-3=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|2-1-3|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\sqrt{2}$$

이때 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{m+5}$이고 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나므로

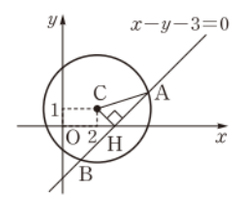
$$\sqrt{m+5}>\sqrt{2},\qquad m+5>2$$

$$\therefore m>-3$$

따라서 정수 m의 최솟값은 -2이므로

$$a=-2$$

한편 점 C에서 직선 $x-y-3=0$에 내린 수선의 발을 H라 하면



$$\overline{AH}=\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}\cdot 6=3$$

직각삼각형 CHA에서

$$(\sqrt{m+5})^2=(\sqrt{2})^2+3^2$$

$$m+5=11\qquad \therefore m=6$$

즉 $\overline{AB}=6$을 만족시키는 m의 값은 6이므로

$$b=6$$

$$\therefore a+b=4$$

답 4

12 $x^2+y^2+2x=0$에서 $\quad (x+1)^2+y^2=1$

$x^2+y^2-4x+6y+12=0$에서

$$(x-2)^2+(y+3)^2=1$$

원 $(x-2)^2+(y+3)^2=1$의 넓이를 이등분하는 직선은 이 원의 중심 $(2,\ -3)$을 지나므로 구하는 직선의 기울기를 m이라 하면

$$y=m(x-2)-3$$

이 직선이 원 $(x+1)^2+y^2=1$에 접하므로 이 원의 중심 $(-1,\ 0)$과 직선 $y=m(x-2)-3$, 즉 $mx-y-2m-3=0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이인 1과 같다. 즉

$$\frac{|-m-2m-3|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=1$$

$$|3m+3|=\sqrt{m^2+1},\qquad 8m^2+18m+8=0$$

$$\therefore 4m^2+9m+4=0$$

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 구하는 모든 직선의 기울기의 합은 $-\frac{9}{4}$이다. 답 ①

13 원 $x^2+y^2=5$ 위의 점 $(a,\ b)$에서의 접선의 방정식은

$$ax+by=5 \qquad \therefore y=-\frac{a}{b}x+\frac{5}{b}$$

이 직선과 직선 $y=-\frac{1}{2}x+1$이 수직이므로

$$-\frac{a}{b}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$$

$\therefore a=-2b$ …… ㉠

또 점 $(a,\ b)$는 원 $x^2+y^2=5$ 위의 점이므로

$a^2+b^2=5$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$(-2b)^2+b^2=5, \qquad 5b^2=5$

$\therefore b^2=1$

따라서 $a^2=4b^2=4$이므로

$a^2b^2=4$ 답 ④

다른 풀이 직선 $y=-\frac{1}{2}x+1$과 수직인 직선의 기울기는 2이고, 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{5}$이므로 원의 접선의 방정식은

$y=2x\pm\sqrt{5}\cdot\sqrt{2^2+1}$

$\therefore y=2x\pm5$

이 직선이 점 $(a,\ b)$를 지나므로

$b=2a\pm5$ …… ㉠

또 점 $(a,\ b)$는 원 위의 점이므로

$a^2+b^2=5$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-2,\ b=1$ 또는 $a=2,\ b=-1$

$\therefore a^2b^2=4\cdot1=4$

$b=2a+5$를 ㉡에 대입하면
$a^2+(2a+5)^2=5$
$a^2+4a+4=0$
$(a+2)^2=0$
$\therefore a=-2$
$\therefore b=2\cdot(-2)+5$
$=1$
$b=2a-5$를 ㉡에 대입하면
$a^2+(2a-5)^2=5$
$a^2-4a+4=0$
$(a-2)^2=0$
$\therefore a=2$
$\therefore b=2\cdot2-5=-1$

14 접점의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면 접선의 방정식은

$ax+by=5$

이 직선이 점 $(3,\ -1)$을 지나므로

$3a-b=5$ …… ㉠

또 점 $(a,\ b)$는 원 위의 점이므로

$a^2+b^2=5$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=1,\ b=-2$ 또는 $a=2,\ b=1$

따라서 접선의 방정식은 $x-2y=5$ 또는 $2x+y=5$이므로

$m_1m_2=\frac{1}{2}\cdot(-2)=-1$ 답 -1

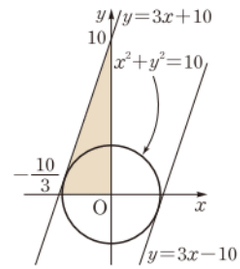
15 직선 $y=3x-1$과 평행한 직선의 기울기는 3이고, 원 $x^2+y^2=10$의 반지름의 길이는 $\sqrt{10}$이므로 접선의 방정식은

$y=3x\pm\sqrt{10}\cdot\sqrt{3^2+1}$

$\therefore y=3x\pm10$

그런데 직선 l은 제2사분면에서 원에 접하므로 직선 l의 방정식은

$y=3x+10$



따라서 직선 l이 x축, y축과 만나는 점의 좌표는 각각

$\left(-\frac{10}{3},\ 0\right)$, $(0,\ 10)$이므로

직선 l과 x축, y축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

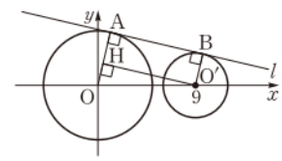
$\frac{1}{2}\cdot\frac{10}{3}\cdot10=\frac{50}{3}$ 답 ③

16 두 원 O, O'의 중심의 좌표는 각각

$\mathrm{O}(0,\ 0)$, $\mathrm{O'}(9,\ 0)$

$\therefore \overline{\mathrm{OO'}}=9$

오른쪽 그림과 같이 점 O′에서 선분 OA에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\overline{\mathrm{OH}}=5-3=2$

두 원 O, O'의 반지름의 길이가 각각 5, 3이므로
$\overline{\mathrm{OH}}=\overline{\mathrm{OA}}-\overline{\mathrm{HA}}$
$=\overline{\mathrm{OA}}-\overline{\mathrm{O'B}}$
$=5-3=2$

따라서 직각삼각형 OO′H에서

$\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{O'H}}$

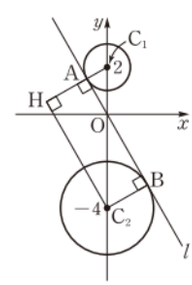
$=\sqrt{9^2-2^2}=\sqrt{77}$ 답 ④

17 두 원 C_1, C_2의 중심의 좌표는 각각

$\mathrm{C_1}(0,\ 2)$, $\mathrm{C_2}(0,\ -4)$

$\therefore \overline{\mathrm{C_1C_2}}=|2-(-4)|=6$

오른쪽 그림과 같이 점 $\mathrm{C_2}$에서 선분 $\mathrm{C_1A}$의 연장선에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\overline{\mathrm{C_1H}}=1+2=3$

두 원 C_1, C_2의 반지름의 길이가 각각 1, 2이므로
$\overline{\mathrm{C_1H}}=\overline{\mathrm{C_1A}}+\overline{\mathrm{AH}}$
$=\overline{\mathrm{C_1A}}+\overline{\mathrm{BC_2}}$
$=1+2=3$

따라서 직각삼각형 $\mathrm{C_1HC_2}$에서

$\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{HC_2}}$

$=\sqrt{6^2-3^2}$

$=3\sqrt{3}$

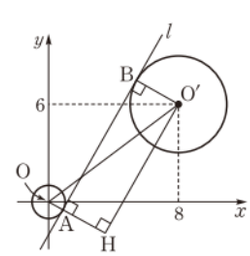
답 $3\sqrt{3}$

18 두 원 O, O'의 중심의 좌표는 각각

$\mathrm{O}(0,\ 0)$, $\mathrm{O'}(8,\ 6)$

$\therefore \overline{\mathrm{OO'}}=\sqrt{8^2+6^2}=10$

오른쪽 그림과 같이 점 O′에서 선분 OA의 연장선에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\overline{\mathrm{OH}}=1+r$,

$\overline{\mathrm{HO'}}=\overline{\mathrm{AB}}=2\sqrt{21}$

따라서 직각삼각형 OHO′에서

$10^2=(1+r)^2+(2\sqrt{21})^2, \qquad (1+r)^2=16$

$1+r=\pm4$

$\therefore r=3\ (\because r>0)$ 답 3

ⓒ좋은책신사고

1등급을 위한 고난도 문제

본책 103~105쪽

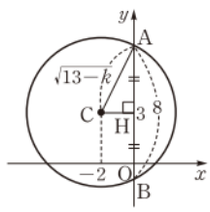
01 $x^2+y^2+4x-6y+k=0$에서

$(x+2)^2+(y-3)^2=13-k\ (k<13)$

이므로 이 원은 중심이 점 $(-2,\ 3)$이고 반지름의 길이가 $\sqrt{13-k}$이다.

이 방정식이 원을 나타내려면
$13-k>0$
$\therefore k<13$

이때 오른쪽 그림과 같이 원의 중심을 C라 하고 점 C에서 y축에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\overline{AH}=\frac{1}{2}\overline{AB}=4,\ \overline{CH}=2$

이므로 직각삼각형 ACH에서

$(\sqrt{13-k})^2=4^2+2^2$

$13-k=20$

$\therefore k=-7$ 답 -7

다른 풀이 $x=0$을 $x^2+y^2+4x-6y+k=0$에 대입하면

$y^2-6y+k=0$

이때 두 점 A, B는 y축 위의 점이므로 $A(0,\ \alpha)$, $B(0,\ \beta)$로 놓으면 이차방정식 $y^2-6y+k=0$의 두 근은 $\alpha,\ \beta$이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=6,\ \alpha\beta=k$

이고, $\overline{AB}=|\alpha-\beta|=8$이므로

$|\alpha-\beta|^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$

$64=36-4k \qquad \therefore k=-7$

02 점 P의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면

$a^2+b^2=4$ …… ㉠

△ABP의 무게중심 G의 좌표는

$\left(\frac{5+4+a}{3},\ \frac{0+6+b}{3}\right)$, 즉 $\left(\frac{9+a}{3},\ \frac{6+b}{3}\right)$

이므로 $\frac{9+a}{3}=x,\ \frac{6+b}{3}=y$로 놓으면

$a=3x-9,\ b=3y-6$

이것을 ㉠에 대입하면

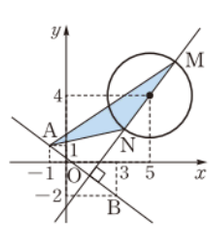
$(3x-9)^2+(3y-6)^2=4$

$9(x-3)^2+9(y-2)^2=4$

$\therefore (x-3)^2+(y-2)^2=\frac{4}{9}$

따라서 점 G가 나타내는 원의 중심의 좌표는 $(3,\ 2)$이다. 답 ④

03 오른쪽 그림과 같이 원 $(x-5)^2+(y-4)^2=r^2$의 중심 $(5,\ 4)$를 지나고 직선 AB에 수직인 직선이 원과 만나는 두 점이 M, N이다.



직선 AB의 기울기는

$\frac{-2-1}{3+1}=-\frac{3}{4}$

이므로 직선 MN의 방정식은

$y-4=\frac{4}{3}(x-5) \qquad \therefore 4x-3y-8=0$

점 $A(-1,\ 1)$과 직선 $4x-3y-8=0$ 사이의 거리는

$\frac{|-4-3-8|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=3$

이므로 삼각형 AMN의 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot 2r\cdot 3=3r$

따라서 $3r=10$에서 $\qquad r=\frac{10}{3}$ 답 ③

1등급 비밀노트

$\overline{AB}$의 길이는 정해져 있으므로 △ABP의 넓이가 최대, 최소일 때는 점 P에서 직선 AB에 이르는 거리가 각각 최대, 최소일 때임을 이용하여 두 점 M, N의 위치를 찾는다.

04 x축과 y축에 동시에 접하는 원의 중심은 직선 $y=x$ 또는 직선 $y=-x$ 위에 있다.

(i) 원의 중심이 직선 $y=x$ 위에 있을 때,

중심의 좌표를 $(a,\ a)$라 하면

$(a-1)^2+(a+2)^2=17$에서

$a^2+a-6=0, \qquad (a+3)(a-2)=0$

$\therefore a=-3$ 또는 $a=2$

(ii) 원의 중심이 직선 $y=-x$ 위에 있을 때,

중심의 좌표를 $(a,\ -a)$라 하면

$(a-1)^2+(-a+2)^2=17$에서

$a^2-3a-6=0$

$\therefore a=\frac{3+\sqrt{33}}{2}$ 또는 $a=\frac{3-\sqrt{33}}{2}$

x축, y축에 동시에 접하는 원의 중심의 좌표가 $(k,\ k)$ 또는 $(k,\ -k)$일 때, 반지름의 길이는 $|k|$이다.

(i), (ii)에서 구하는 모든 원의 반지름의 길이의 합은

$|-3|+|2|+\left|\frac{3+\sqrt{33}}{2}\right|+\left|\frac{3-\sqrt{33}}{2}\right|$

$=3+2+\frac{3+\sqrt{33}}{2}+\frac{-3+\sqrt{33}}{2}$

$=5+\sqrt{33}$

이므로 $\qquad m=5,\ n=33$

$\therefore m+n=38$ 답 38

05 점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면 $\overline{AP}:\overline{BP}=2:1$이므로

$\overline{AP}=2\overline{BP}, \qquad \overline{AP}^2=4\overline{BP}^2$

$(x+1)^2+y^2=4\{(x-2)^2+y^2\}$

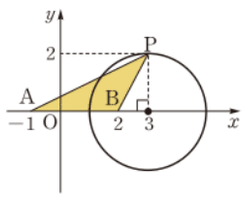
$x^2+y^2-6x+5=0$

$\therefore (x-3)^2+y^2=4$

따라서 점 P가 나타내는 도형은 중심이 점 $(3,\ 0)$이고 반지름의 길이가 2인 원이다.

ㄱ. 점 P가 나타내는 도형은 반지름의 길이가 2인 원이므로 그 둘레의 길이는 $2\pi\cdot2=4\pi$

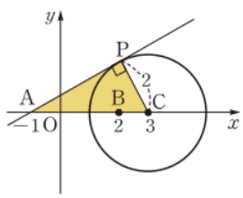
ㄴ. 오른쪽 그림에서 △PAB의 넓이의 최댓값은



$\frac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot2$

$=\frac{1}{2}\cdot3\cdot2=3$

ㄷ. 오른쪽 그림과 같이 직선 AP가 원에 접할 때 ∠PAB의 크기가 최대이고, 원의 중심을 C라 하면 ∠APC=90°이므로



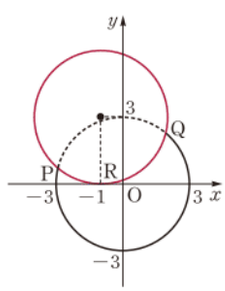
$\overline{AP}=\sqrt{\overline{AC}^2-\overline{PC}^2}=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ④

06 점 R는 두 점 $(-3,\ 0)$, $(3,\ 0)$을 잇는 선분을 $1:2$로 내분하므로 점 R의 좌표는

$\left(\frac{1\cdot3+2\cdot(-3)}{1+2},\ \frac{1\cdot0+2\cdot0}{1+2}\right)$, 즉 $(-1,\ 0)$ ⋯ ❶

이때 세 점 P, Q, R를 지나는 원은 주어진 원과 같은 호를 가지므로 주어진 원과 반지름의 길이가 같고 점 R에서 x축에 접한다. ⋯ ❷



따라서 구하는 원은 중심이 점 $(-1,\ 3)$, 반지름의 길이가 3인 원이므로 그 방정식은

$(x+1)^2+(y-3)^2=9$ ⋯ ❸

답 $(x+1)^2+(y-3)^2=9$

채점 기준	비율
❶ 점 R의 좌표를 구할 수 있다.	30 %
❷ 세 점 P, Q, R를 지나는 원이 어떤 원인지 알 수 있다.	50 %
❸ 세 점 P, Q, R를 지나는 원의 방정식을 구할 수 있다.	20 %

07 두 원의 교점을 지나는 원의 방정식을

$x^2+y^2+4x-8+k(x^2+y^2-4x-8)=0$ $(k\neq-1)$

이라 하면

$(k+1)x^2+(k+1)y^2+(4-4k)x-8-8k=0$

이 원의 중심이 원점이려면 x의 계수가 0이어야 하므로

$4-4k=0$ $\therefore k=1$

따라서 원의 방정식은

$2x^2+2y^2-16=0$, 즉 $x^2+y^2=8$

이므로 원의 넓이는 8π이다. 답 ④

일품 BOX

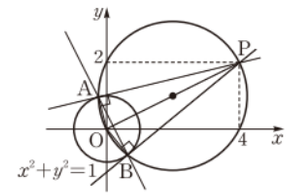
점 P가 (3, 2)일 때 △PAB의 넓이가 최대이다.

$\overline{OP}$의 중점 $\left(\frac{4+0}{2},\ \frac{2+0}{2}\right)$, 즉 (2, 1)을 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\frac{1}{2}\overline{OP}=\frac{1}{2}\sqrt{4^2+2^2}=\frac{1}{2}\cdot2\sqrt{5}=\sqrt{5}$ 인 원이다.

원의 반지름의 길이가 3이고 원이 x축에 접하므로 원의 중심의 y좌표는 3이다.

중심이 원점인 원의 방정식은 $x^2+y^2=r^2$ 꼴이므로 x, y의 계수는 모두 0이다.

08 오른쪽 그림과 같이 점 P(4, 2)에서 원 $x^2+y^2=1$에 그은 접선의 접점을 각각 A, B라 하면



∠OAP=∠OBP
=90°

이므로 위의 그림과 같이 두 점 A, B는 선분 OP를 지름으로 하는 원 위에 있다.

$\overline{OP}$를 지름으로 하는 원의 방정식은

$(x-2)^2+(y-1)^2=5$

$\therefore x^2+y^2-4x-2y=0$ ⋯⋯ ㉠

따라서 $\overline{AB}$는 원 $x^2+y^2=1$과 원 ㉠의 공통인 현이므로 두 점 A, B를 지나는 직선의 방정식은

$x^2+y^2-1-(x^2+y^2-4x-2y)=0$

$\therefore 4x+2y-1=0$ 답 $4x+2y-1=0$

다른 풀이 한 접점의 좌표를 $(x_1,\ y_1)$이라 하면 접선의 방정식은 $x_1x+y_1y=1$

이 직선이 점 P(4, 2)를 지나므로 $4x_1+2y_1=1$

이때 또 다른 접점의 좌표를 $(x_2,\ y_2)$라 하면 $4x_2+2y_2=1$을 만족시키므로 두 접점을 지나는 직선의 방정식은 $4x+2y-1=0$

09 m이 0이 아닌 실수일 때, 이차방정식 $(x-y+2)+m(x^2+y^2-4)=0$이 나타내는 도형은 직선 $x-y+2=0$과 원 $x^2+y^2-4=0$의 교점을 지나는 원이다.

$x-y+2=0$에서 $y=x+2$이므로 이것을 $x^2+y^2-4=0$에 대입하면

$x^2+(x+2)^2-4=0$, $x^2+2x=0$

$x(x+2)=0$ $\therefore x=-2$ 또는 $x=0$

즉 직선 $x-y+2=0$과 원 $x^2+y^2-4=0$의 교점의 좌표는 $(-2,\ 0)$, $(0,\ 2)$

주어진 이차방정식이 나타내는 도형은 두 점 $(-2,\ 0)$, $(0,\ 2)$를 지름의 양 끝 점으로 하는 원일 때, 그 넓이가 최소이다.

두 점 $(-2,\ 0)$, $(0,\ 2)$를 지름의 양 끝 점으로 하는 원은 중심이 점 $(-1,\ 1)$이고 반지름의 길이가 $\sqrt{1^2+(2-1)^2}=\sqrt{2}$이므로 이 원의 방정식은

$(x+1)^2+(y-1)^2=2$

$\therefore x^2+y^2+2x-2y=0$ ⋯ ㉠

$(x-y+2)+m(x^2+y^2-4)=0$에서

$mx^2+my^2+x-y-4m+2=0$

$2mx^2+2my^2+2x-2y-8m+4=0$ ⋯ ㉡

㉠과 ㉡이 같으려면 $2m=1$, $-8m+4=0$

$\therefore m=\frac{1}{2}$

ⓒ좋은책신사고

따라서 $a=\frac{1}{2}$, $b=2\pi$이므로

$$\frac{b}{a}=4\pi$$

답 ④

1등급 비밀노트

주어진 이차방정식을 정리하면

$x^2+y^2+px+qy+r=0$

의 꼴로 나타낼 수 있으므로 주어진 이차방정식이 나타내는 도형은 원이다.

또 $m\neq0$일 때, m의 값에 관계없이 $x-y+2=0$, $x^2+y^2-4=0$을 만족시키는 x, y의 값이 존재하므로 주어진 원은 위의 두 방정식을 연립하여 푼 해, 즉 직선 $x-y+2=0$과 원 $x^2+y^2-4=0$의 교점을 항상 지난다.

10 원 $x^2+y^2+ax-3ay+4=0$이 원 $x^2+y^2+2ax-4ay+16=0$의 둘레의 길이를 이등분하므로 두 원의 교점을 지나는 직선이 원 $x^2+y^2+2ax-4ay+16=0$의 중심을 지나야 한다. ··· ❶

주어진 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$$x^2+y^2+ax-3ay+4-(x^2+y^2+2ax-4ay+16)=0$$

$$-ax+ay-12=0$$

$$\therefore ax-ay+12=0 \quad \cdots\cdots ㉠$$ ··· ❷

$x^2+y^2+2ax-4ay+16=0$에서

$$(x+a)^2+(y-2a)^2=5a^2-16 \quad \cdots\cdots ㉡$$

즉 직선 ㉠이 원 ㉡의 중심 $(-a,\ 2a)$를 지나므로

$$a\cdot(-a)-a\cdot2a+12=0$$

$$a^2=4 \qquad \therefore a=2\ (\because a>0)$$ ··· ❸

답 2

채점 기준	비율
❶ 주어진 두 원의 교점을 지나는 직선이 둘레의 길이가 이등분되는 원의 중심을 지나야 함을 알 수 있다.	20 %
❷ 주어진 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식을 구할 수 있다.	50 %
❸ a의 값을 구할 수 있다.	30 %

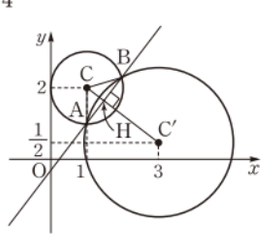
11 $x^2+y^2-2x-4y+4=0$에서

$$(x-1)^2+(y-2)^2=1$$

$x^2+y^2-6x-y+k=0$에서

$$(x-3)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{37}{4}-k$$

오른쪽 그림과 같이 두 원의 중심을 각각 C, C′, 두 원의 교점을 각각 A, B라 하고, $\overline{CC'}$과 $\overline{AB}$의 교점을 H라 하면



$$\overline{AH}=\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{4}{5}$$

직각삼각형 CAH에서

$$\overline{CH}=\sqrt{1^2-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=\frac{3}{5}$$

한편 두 원의 공통인 현, 즉 직선 AB의 방정식은

$$x^2+y^2-2x-4y+4-(x^2+y^2-6x-y+k)=0$$

$$\therefore 4x-3y+4-k=0$$

점 C(1, 2)에서 직선 AB에 이르는 거리는 $\overline{CH}$의 길이와 같으므로

$$\frac{|4-6+4-k|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\frac{3}{5}$$

$$|2-k|=3, \qquad 2-k=\pm3$$

$$\therefore k=-1 \text{ 또는 } k=5$$

따라서 모든 실수 k의 값의 합은 4이다.

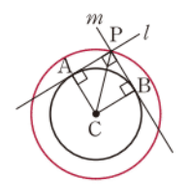
답 ④

12 $x^2+y^2+4x-8y-12=0$에서

$$(x+2)^2+(y-4)^2=32 \quad \cdots\cdots ㉠$$

원 ㉠의 중심을 C라 하면 C$(-2,\ 4)$

두 직선 l, m의 교점을 P라 하면 두 직선 l, m은 수직이므로 점 P가 나타내는 도형은 오른쪽 그림과 같이 중심이 C이고 반지름이 $\overline{CP}$인 원이다.



두 직선 l, m과 원 ㉠의 접점을 각각 A, B라 하면 사각형 PACB는 정사각형이므로

$$\overline{CP}=\sqrt{2}\cdot\overline{AC}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{32}=8$$

따라서 점 P가 나타내는 도형의 길이는

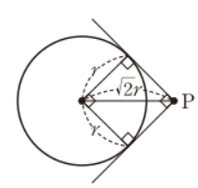
$$2\pi\cdot8=16\pi$$

답 ④

1등급 비밀노트

원 밖의 한 점 P에서 원에 그은 두 접선이 수직일 때, 점 P의 자취

➡ 주어진 원과 중심의 좌표가 같고, 반지름의 길이가 $\sqrt{2}r$인 원이다.



13 점 A에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{AB}=\frac{3}{2}$이므로 $\overline{AH}=\frac{3}{4}$

즉 점 A의 y좌표가 $\frac{3}{4}$이므로 $x^2+y^2=1$에 $y=\frac{3}{4}$을 대입하면

$$x^2+\left(\frac{3}{4}\right)^2=1, \qquad x^2=\frac{7}{16}$$

$$\therefore x=\frac{\sqrt{7}}{4}\ (\because x>0)$$

따라서 점 A의 좌표는 $\left(\frac{\sqrt{7}}{4},\ \frac{3}{4}\right)$이고 원점과 점 A를 지나는 직선의 방정식은

$$y=\frac{3}{\sqrt{7}}x, \text{ 즉 } 3x-\sqrt{7}y=0$$

일품 BOX

반지름의 길이가 $\sqrt{2}$이므로 넓이는 2π이다.

원의 중심에서 현에 그은 수선은 현을 이등분하므로 $\overline{AH}=\frac{1}{2}\overline{AB}$

점 B의 좌표는 $\left(\frac{\sqrt{7}}{4},\ -\frac{3}{4}\right)$

일품 BOX

점 $(n+2,\ 0)$과 이 직선 사이의 거리는 원 O'의 반지름의 길이 n과 같으므로

$n+2>0$

$$\frac{|3(n+2)|}{\sqrt{3^2+(-\sqrt{7})^2}}=n,\qquad 3n+6=4n$$

$\therefore n=6$

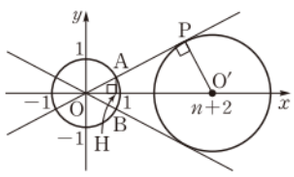
답 6

다른 풀이 다음 그림에서 $\triangle AOH \backsim \triangle O'OP$이므로

$\overline{OA}:\overline{OO'}=\overline{AH}:\overline{O'P}$

$1:(n+2)=\frac{3}{4}:n$

$n=\frac{3}{4}(n+2)\qquad \therefore n=6$



14 원 $x^2+(y+a)^2=20$의 중심의 좌표는 $(0,\ -a)$, 반지름의 길이는 $2\sqrt{5}$이다.

(i) 점 $(0,\ -a)$와 직선 $x-2y-7=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|2a-7|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{|2a-7|}{\sqrt{5}}$$

이므로 원과 직선 $x-2y-7=0$이 서로 다른 두 점에서 만나려면

$$\frac{|2a-7|}{\sqrt{5}}<2\sqrt{5}$$

$|2a-7|<10$

$-10<2a-7<10$

$\therefore -\frac{3}{2}<a<\frac{17}{2}$ ⋯ ❶

(ii) 점 $(0,\ -a)$와 직선 $2x-y-14=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|a-14|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{|a-14|}{\sqrt{5}}$$

이므로 원과 직선 $2x-y-14=0$이 만나지 않으려면

$$\frac{|a-14|}{\sqrt{5}}>2\sqrt{5}$$

$|a-14|>10$

$a-14<-10$ 또는 $a-14>10$

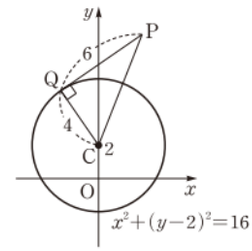
$\therefore a<4$ 또는 $a>24$ ⋯ ❷

(i), (ii)에서 $-\frac{3}{2}<a<4$이므로 조건을 만족시키는 정수 a는 $-1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3$의 5개이다. ⋯ ❸

답 5

채점 기준	비율
❶ 원과 직선 $x-2y-7=0$이 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 a의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❷ 원과 직선 $2x-y-14=0$이 만나지 않도록 하는 a의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❸ 정수 a의 개수를 구할 수 있다.	20 %

15 오른쪽 그림과 같이 원 $x^2+(y-2)^2=16$의 중심을 C라 하고, 점 P에서 원에 그은 접선의 접점을 Q라 하자. 점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면 직각삼각형 PQC에서



$\overline{PC}^2=\overline{PQ}^2+\overline{QC}^2$

$x^2+(y-2)^2=6^2+4^2$

$\therefore x^2+(y-2)^2=52$

따라서 점 P가 나타내는 도형은 중심이 점 $(0,\ 2)$이고 반지름의 길이가 $\sqrt{52}$인 원이므로 구하는 넓이는

52π

답 52π

16 원의 중심 $(0,\ 0)$과 접선 $4x+3y-15=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|-15|}{\sqrt{4^2+3^2}}=3$$

이므로 원의 반지름의 길이는 3이고, 원의 방정식은 $x^2+y^2=9$이다. ⋯ ❶

원 위의 점 $(a,\ b)$에서의 접선의 방정식은

$ax+by=9\qquad \therefore y=-\frac{a}{b}x+\frac{9}{b}$

이 방정식이 $4x+3y=15$, 즉 $y=-\frac{4}{3}x+5$와 같으므로

$-\frac{a}{b}=-\frac{4}{3},\ \frac{9}{b}=5$

$\therefore a=\frac{12}{5},\ b=\frac{9}{5}$ ⋯ ❷

$\therefore a+b=\frac{21}{5}$ ⋯ ❸

답 $\frac{21}{5}$

채점 기준	비율
❶ 중심이 원점이고 직선 $4x+3y=15$에 접하는 원의 방정식을 구할 수 있다.	40 %
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	10 %

17 원 $x^2+y^2=10$ 위의 점 $(3,\ 1)$에서의 접선의 방정식은 $3x+y=10$이므로 이 직선에 수직인 직선의 기울기는 $\frac{1}{3}$이다.

원 $x^2+y^2=10$의 반지름의 길이는 $\sqrt{10}$이므로 기울기가 $\frac{1}{3}$인 접선의 방정식은

$$y=\frac{1}{3}x\pm\sqrt{10}\cdot\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2+1}$$

$\therefore y=\frac{1}{3}x\pm\frac{10}{3}$

접선의 방정식이 $y=\frac{1}{3}x-\frac{10}{3}$이면 원과 제4사분면에서 접한다.

이때 이 직선이 원과 제2사분면에서 접해야 하므로

$y=\frac{1}{3}x+\frac{10}{3}\qquad \therefore -\frac{x}{10}+\frac{3}{10}y=1$

ⓒ좋은책신사고

따라서 $a=-10$, $b=\frac{10}{3}$이므로

$a+b=-\frac{20}{3}$ 답 ②

18 원 위의 점 $P(a,\ b)$에서의 접선의 방정식은

$ax+by=36$

이므로 두 점 A, B의 좌표는 각각

$\left(\frac{36}{a},\ 0\right)$, $\left(0,\ \frac{36}{b}\right)$ ··· ❶

$\overline{AB}=12$이므로 $\sqrt{\left(-\frac{36}{a}\right)^2+\left(\frac{36}{b}\right)^2}=12$

$\left(-\frac{36}{a}\right)^2+\left(\frac{36}{b}\right)^2=144$, $\frac{9}{a^2}+\frac{9}{b^2}=1$

$\therefore 9(a^2+b^2)=a^2b^2$ ····· ㉠

이때 점 $P(a,\ b)$가 원 $x^2+y^2=36$ 위의 점이므로

$a^2+b^2=36$ ····· ㉡ ··· ❷

따라서 ㉡을 ㉠에 대입하면

$9\cdot 36=a^2b^2$, $(ab)^2=(3\cdot 6)^2$

$\therefore ab=18\ (\because ab>0)$ ··· ❸

답 18

채점 기준	비율
❶ 두 점 A, B의 좌표를 a, b를 사용하여 나타낼 수 있다.	30 %
❷ a, b에 대한 두 식을 세울 수 있다.	40 %
❸ ab의 값을 구할 수 있다.	30 %

19 두 원 O, O'의 중심을 각각 O, O′이라 하면

$O(0,\ 0)$, $O'(b,\ 0)$

점 O와 직선 $2x+\sqrt{5}y+a=0$ 사이의 거리는 원 O의 반지름의 길이인 2와 같으므로

$\frac{|a|}{\sqrt{2^2+(\sqrt{5})^2}}=2$, $|a|=6$

$\therefore a=6\ (\because a>0)$

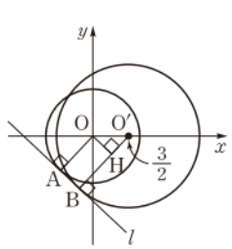
또 점 O′과 직선 $2x+\sqrt{5}y+6=0$ 사이의 거리는 원 O'의 반지름의 길이인 3과 같으므로

$\frac{|2b+6|}{\sqrt{2^2+(\sqrt{5})^2}}=3$, $|2b+6|=9$

$\therefore b=\frac{3}{2}\ (\because b>0)$

$\therefore \overline{OO'}=\frac{3}{2}$

오른쪽 그림과 같이 점 O에서 선분 O′B에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\overline{O'H}=3-2=1$

직각삼각형 OHO′에서

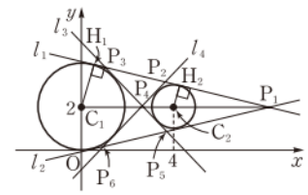
$\overline{AB}=\overline{OH}$

$=\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2-1^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}$

답 ④

일품 BOX

20 다음 그림과 같이 두 원 C_1, C_2에 모두 접하는 직선은 l_1, l_2, l_3, l_4가 있다.



따라서 l_1, l_2, l_3, l_4 중 두 직선을 l, m이라 하면 두 직선 l, m의 교점은 P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6의 6개가 존재하고, 선분 OP의 길이가 최대일 때는 위의 그림에서 점 P가 접선 l_1, l_2의 교점인 P_1일 때이다.

두 원 C_1, C_2의 중심을 각각 C_1, C_2라 하고 두 점 C_1, C_2에서 직선 l_1에 내린 수선의 발을 각각 H_1, H_2라 하면 $\triangle C_1H_1P_1 \backsim \triangle C_2H_2P_1$이고 그 닮음비는 $2:1$이다.

두 원에 동시에 접하는 두 직선 l_1, l_2의 교점이 P_1이므로 점 C_2는 $\overline{C_1P_1}$ 위의 점이다.

$\overline{C_1P_1}=2\overline{C_1C_2}$이고 $\overline{C_1C_2}=4$이므로 $\overline{C_1P_1}=8$

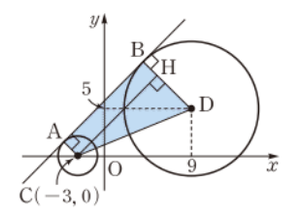
직각삼각형 C_1OP_1에서

$\overline{OP_1}=\sqrt{8^2+2^2}=2\sqrt{17}$ 답 ①

21 두 원의 중심은 각각 $C(-3,\ 0)$, $D(9,\ 5)$이므로

$\overline{CD}=\sqrt{(9+3)^2+5^2}=13$

오른쪽 그림과 같이 점 C에서 선분 BD에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\overline{DH}=7-2=5$

직각삼각형 CDH에서

$\overline{AB}=\overline{CH}$

$=\sqrt{13^2-5^2}=12$

따라서 사각형 ACDB의 넓이는

사각형 ACDB는 사다리꼴이다.

$\frac{1}{2}\cdot(7+2)\cdot 12=54$ 답 54

사고력 강화를 위한 수능형 문제

본책 106쪽

01 원 C_1: $x^2+y^2=10$ 위의 점 중에서 x좌표와 y좌표가 모두 자연수인 점은 $(1,\ 3)$, $(3,\ 1)$의 2개이다.

(i) 점 P의 좌표가 $(1,\ 3)$일 때,

점 $(1,\ 3)$과 원 C_2의 중심 $(11,\ 7)$ 사이의 거리는

$\sqrt{(11-1)^2+(7-3)^2}=2\sqrt{29}$

따라서 두 점 P, Q 사이의 거리는

$2\sqrt{29}-3\le \overline{PQ}\le 2\sqrt{29}+3$

$25<29<\frac{121}{4}$에서

$5<\sqrt{29}<\frac{11}{2}$

$\therefore 10<2\sqrt{29}<11$

$\therefore 7.\times\times\times\le \overline{PQ}\le 13.\times\times\times$

$\overline{PQ}$의 길이는 자연수이므로 8, 9, 10, 11, 12, 13의 6개이고 점 Q는 각 길이마다 2개씩 있으므로 순서쌍 (P, Q)의 개수는

$6\cdot 2=12$

(ii) 점 P의 좌표가 (3, 1)일 때,

점 (3, 1)과 원 C_2의 중심 (11, 7) 사이의 거리는

$\sqrt{(11-3)^2+(7-1)^2}=10$

따라서 두 점 P, Q 사이의 거리는

$10-3\le\overline{PQ}\le10+3$

$\therefore 7\le\overline{PQ}\le13$

$\overline{PQ}$의 길이는 자연수이므로 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13의 7개이다.

이때 $\overline{PQ}$의 길이가 7, 13인 점 Q는 각각 1개이고, $\overline{PQ}$의 길이가 8, 9, 10, 11, 12인 점 Q는 각 길이마다 2개씩 있으므로 순서쌍 (P, Q)의 개수는

$2+5\cdot2=12$

(i), (ii)에서 구하는 순서쌍 (P, Q)의 개수는

$12+12=24$ 답 ③

일품 BOX

점 P(3, 1)과 원 C_2의 중심 (11, 7)을 이은 직선이 원 C_2와 만나는 두 점이 각각 $\overline{PQ}$의 길이가 7, 13인 점 Q이다.

02 $x^2+y^2+ax+by-2=0$에서

$\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+\left(y+\frac{b}{2}\right)^2=\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}+2$

이므로 원의 중심의 좌표는 $\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right)$이고, 반지름의 길이는 $\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}+2}$이다.

ㄱ. $\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}+2}\ge\sqrt{2}>1$

이므로 반지름의 길이가 1인 원은 존재하지 않는다.

실수 a, b에 대하여 $a^2\ge0$, $b^2\ge0$이므로 $\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}+2\ge2$

ㄴ. 원이 y축에 접하려면

$\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}+2}=\left|-\frac{a}{2}\right|$

$\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}+2=\frac{a^2}{4}$

$\frac{b^2}{4}+2=0 \qquad \therefore b^2=-8$

이것을 만족시키는 실수 b는 존재하지 않으므로 원은 y축에 접하지 않는다.

ㄷ. 원과 x축의 교점의 x좌표를 각각 α, β라 하면 α, β는 이차방정식 $x^2+ax-2=0$의 두 실근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-a$, $\alpha\beta=-2$

$\therefore (\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=a^2+8\ge8$

따라서 $|\alpha-\beta|\ge2\sqrt{2}$이므로 원이 x축과 만나서 생기는 현의 길이의 최솟값은 $2\sqrt{2}$이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ③

원과 x축의 교점의 x좌표는 원의 방정식에서 $y=0$일 때의 x의 값이다.

03 원 O: $x^2+y^2=a$의 중심 O(0, 0)과 두 직선 l_1: $2x+y-8=0$, l_2: $x-2y+6=0$ 사이의 거리는 각각

$\frac{|-8|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{8}{\sqrt{5}}$, $\frac{|6|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{6}{\sqrt{5}}$

이고 두 직선 l_1, l_2의 교점의 좌표는 (2, 4)이다.

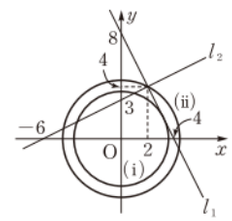
두 방정식 $2x+y-8=0$, $x-2y+6=0$을 연립하여 풀면 $x=2$, $y=4$

(i) 원 O가 직선 l_1과 접할 때,

아래 그림과 같이 $a=\left(\frac{8}{\sqrt{5}}\right)^2=\frac{64}{5}$일 때, 원 O는 직선 l_1과 한 점에서, 직선 l_2와 두 점에서 만난다.

(ii) 원 O가 점 (2, 4)를 지날 때,

아래 그림과 같이 $a=(\sqrt{2^2+4^2})^2=20$일 때, 원 O는 두 직선 l_1, l_2와 점 (2, 4)에서 동시에 만나고 각각 다른 한 점에서 또 만난다.



(i), (ii)에서 구하는 모든 양수 a의 값의 곱은

$\frac{64}{5}\cdot20=256$ 답 256

04 점 Q는 원 $x^2+y^2+4x-2y+1=0$과 직선 $y=\frac{3}{4}x$의 접점이므로

$x^2+\left(\frac{3}{4}x\right)^2+4x-2\cdot\frac{3}{4}x+1=0$

$25x^2+40x+16=0, \qquad (5x+4)^2=0$

$\therefore x=-\frac{4}{5}$

따라서 점 Q의 좌표는 $\left(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)$이므로

$\overline{PQ}=\sqrt{\left(-\frac{4}{5}-4\right)^2+\left(-\frac{3}{5}-3\right)^2}=6$ 답 6

$x=-\frac{4}{5}$를 $y=\frac{3}{4}x$에 대입하면 $y=\frac{3}{4}\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)=-\frac{3}{5}$

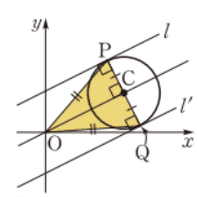
다른 풀이 원 $x^2+y^2+4x-2y+1=0$의 중심을 C라 하면 C(−2, 1)이므로

$\overline{CP}=\sqrt{(4+2)^2+(3-1)^2}=2\sqrt{10}$

이때 $\overline{CQ}=2$이므로 직각삼각형 CQP에서

$\overline{PQ}=\sqrt{(2\sqrt{10})^2-2^2}=6$

05 원 C의 중심을 점 C(a, b)라 하면 평행한 두 직선 l, l'이 원 C의 접선이므로 선분 PQ는 원 C의 지름이고 점 C는 선분 PQ의 중점이다.



삼각형 POQ는 $\overline{OP}=\overline{OQ}$인 이등변삼각형이므로 직선 OC가 선분 PQ를 수직이등분한다.

즉 직선 OC는 직선 l과 평행하고 원점을 지나므로 직선의 방정식은

$x-2y=0$

점 C(a, b)가 직선 $x-2y=0$ 위의 점이므로

$a-2b=0$ …… ㉠

이등변삼각형의 꼭지각의 꼭짓점과 밑변의 중점을 지나는 직선은 밑변의 수직이등분선과 같다.

또 원 C의 반지름의 길이는 원점 O와 직선 $x-2y+4\sqrt{5}=0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|4\sqrt{5}|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=4$$

삼각형 POQ의 넓이가 40이므로

$$\frac{1}{2}\cdot 8\cdot \overline{OC}=40$$

$$\therefore \overline{OC}=10$$

일품 BOX: $\overline{PQ}=2\overline{PC}=2\times$(원 C의 반지름의 길이)$=2\cdot 4=8$

그런데 두 점 O, C 사이의 거리는 $\sqrt{a^2+b^2}$이므로

$$\sqrt{a^2+b^2}=10$$

$$\therefore a^2+b^2=100 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠에서 $a=2b$이고 이것을 ㉡에 대입하면

$$(2b)^2+b^2=100, \quad b^2=20$$

$$\therefore b=2\sqrt{5}\ (\because b>0)$$

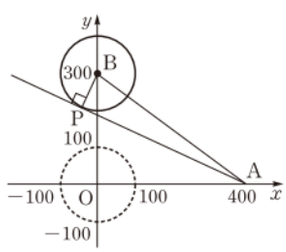
따라서 $a=4\sqrt{5}$이므로

$$a+b=6\sqrt{5}$$

답 ④

06 태풍의 눈의 처음 위치를 O라 하고 1시간 30분 후의 태풍의 눈의 위치를 B, 헬기의 처음 위치를 A라 하자.

오른쪽 그림과 같이 점 O를 원점으로 하고 두 직선 OA, OB를 각각 x축, y축으로 하는 좌표평면을 잡고, 1 km를 1로 생각하면



A(400, 0),

B(0, 300)

태풍의 눈이 시속 200 km의 속력으로 1시간 30분 동안 이동한 거리는 $200\cdot\frac{3}{2}=300$ (km)

1시간 30분 후의 태풍의 영향권의 경계선을 나타내는 방정식은

$$x^2+(y-300)^2=100^2 \quad \cdots\cdots ㉠$$

태풍의 영향권은 반지름의 길이가 100 km인 원의 내부이다.

점 A에서 원 ㉠에 그은 접선의 접점을 P라 하면

$$\overline{BP}=100,\ \overline{AB}=\sqrt{400^2+300^2}=500$$

직각삼각형 BPA에서

$$\overline{AP}=\sqrt{500^2-100^2}$$
$$=200\sqrt{6}$$
$$=200\times 2.4$$
$$=480\ (\text{km})$$

즉 헬기는 점 A의 위치에서 1시간 30분 동안 480 km를 이동하였으므로 헬기의 속력은 시속 $\frac{480}{1.5}$, 즉 320 km이다.

(속력)$=\frac{(\text{거리})}{(\text{시간})}$

$$\therefore a=320$$

답 320

11 도형의 이동

개념&핵심 기출

본책 108~110쪽

01 점 (0, 2)를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 −1만큼 평행이동한 점의 좌표는

$$(0+2,\ 2-1) \qquad \therefore (2,\ 1)$$

이때 원점을 지나는 직선 l의 방정식을 $y=mx$라 하면 이 직선이 점 (2, 1)을 지나므로

$$2m=1 \qquad \therefore m=\frac{1}{2}$$

따라서 직선 l의 방정식은

$$y=\frac{1}{2}x$$

답 $y=\frac{1}{2}x$

02 점 (1, 1)을 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 −4만큼 평행이동하면 점 (2, −3)으로 옮겨지므로 점 $(a,\ b)$를 이 평행이동에 의하여 옮긴 점의 좌표는 $(a+1,\ b-4)$이다.

x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동했다고 하면 $1+m=2,\ 1+n=-3$ $\therefore m=1,\ n=-4$

따라서 $a+1=-3,\ b-4=6$이므로

$$a=-4,\ b=10$$

$$\therefore a+b=6$$

답 ⑤

03 △ABC의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{-1+5+a}{3},\ \frac{3+b+7}{3}\right)$$

$$\therefore \left(\frac{a+4}{3},\ \frac{b+10}{3}\right)$$

이때 주어진 평행이동에 의하여 △ABC의 무게중심이 원점으로 옮겨지므로

$$\frac{a+4}{3}-2=0,\ \frac{b+10}{3}-3=0$$

따라서 $a=2,\ b=-1$이므로

$$a+b=1$$

답 ①

04 직선 $y=ax+b$를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 −1만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$$y+1=a(x-2)+b$$

$$\therefore y=ax-2a+b-1 \quad \cdots\cdots ㉠$$

직선 ㉠이 직선 $y=-2x+1$과 y축 위에서 수직으로 만나므로 직선 ㉠의 기울기는 $\frac{1}{2}$이고, y절편은 1이다.

수직인 두 직선의 기울기의 곱은 −1이므로 $-2\cdot a=-1$ $\therefore a=\frac{1}{2}$

따라서 $a=\frac{1}{2},\ -2a+b-1=1$이므로

$$a=\frac{1}{2},\ b=3 \qquad \therefore ab=\frac{3}{2}$$

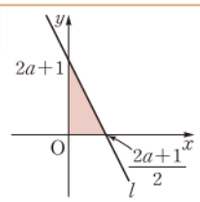
답 ③

05 직선 $2x+y-2=0$을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 −1만큼 평행이동한 직선 l의 방정식은

$$2(x-a)+(y+1)-2=0$$

$$\therefore 2x+y-(2a+1)=0$$

직선 l의 x절편은 $\frac{2a+1}{2}$, y절편은 $2a+1$이므로 오른쪽 그림에서 직선 l과 x축, y축으로 둘러싸인 부분의 넓이는



$$\frac{1}{2}\cdot\frac{2a+1}{2}\cdot(2a+1)$$
$$=\frac{(2a+1)^2}{4}$$

따라서 $\frac{(2a+1)^2}{4}=25$이므로

$(2a+1)^2=100,\quad 2a+1=\pm10$

$\therefore a=\frac{9}{2}\ (\because a>0)$ 답 ②

06 포물선 $y=x^2-2x$를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 포물선의 방정식은

$y-n=(x-m)^2-2(x-m)$

$\therefore y=x^2-2(m+1)x+m^2+2m+n$

이 포물선이 $y=x^2-10x+20$과 일치하므로

$2(m+1)=10$에서

$m+1=5\quad \therefore m=4$

$m^2+2m+n=20$에서

$4^2+2\cdot4+n=20$

$\therefore n=-4$

직선 $x-2y+a=0$을 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 직선 l의 방정식은

$(x-4)-2(y+4)+a=0$

$\therefore x-2y-12+a=0$

직선 l이 원점을 지나므로 $\quad -12+a=0$

$\therefore a=12$ 답 12

다른 풀이 $y=x^2-2x=(x-1)^2-1$, $y=x^2-10x+20=(x-5)^2-5$이므로 주어진 평행이동은 점 $(1,\ -1)$을 점 $(5,\ -5)$로 옮기는 평행이동, 즉 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 것이다.

07 원 $x^2+y^2+10x-8y+25=0$에서

$(x+5)^2+(y-4)^2=16$ …… ㉠

원 $x^2+y^2+10y+c=0$에서

$x^2+(y+5)^2=25-c$ …… ㉡

두 원의 중심의 좌표가 각각 $(-5,\ 4)$, $(0,\ -5)$이므로 원 ㉠을 x축의 방향으로 5만큼, y축의 방향으로 -9만큼 평행이동하면 원 ㉡과 겹쳐진다.

$\therefore a=5,\ b=-9$

또 원을 평행이동하여도 원의 반지름의 길이는 변하지 않으므로 ㉠, ㉡에서

$16=25-c\quad \therefore c=9$

$\therefore a+b+c=5$ 답 5

일품 BOX

구하는 a의 값은 양수이므로

$\frac{2a+1}{2}>0$,

$2a+1>0$

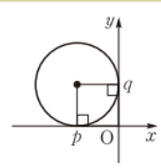
원과 직선의 위치 관계

원의 중심과 직선 사이의 거리를 d, 원의 반지름의 길이를 r라 할 때

① 원과 직선이 두 점에서 만나면 ➡ $d<r$

② 원과 직선이 접하면 ➡ $d=r$

③ 원과 직선이 만나지 않으면 ➡ $d>r$



x축, y축에 동시에 접하고 원의 중심 $(p,\ q)$가 제2사분면 위에 있으면

$|p|=q\quad \therefore -p=q$

포물선의 평행이동은 포물선의 꼭짓점의 평행이동으로 생각할 수 있다.

원의 평행이동은 원의 중심의 평행이동으로 생각할 수 있다.

08 원 $x^2+y^2=4$를 x축의 방향으로 a만큼 평행이동한 원의 방정식은

$(x-a)^2+y^2=4$

이 원이 직선 $3x-4y-2=0$에 접하면 원의 중심 $(a,\ 0)$과 직선 $3x-4y-2=0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이인 2와 같으므로

$$\frac{|3a-2|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=2$$

$|3a-2|=10,\quad 3a-2=\pm10$

$\therefore a=4\ (\because a>0)$ 답 ③

09 $x^2+y^2+6x-2y+a=0$에서

$(x+3)^2+(y-1)^2=10-a$

이 원을 x축의 방향으로 b만큼, y축의 방향으로 $-2b$만큼 평행이동한 원의 방정식은

$(x-b+3)^2+(y+2b-1)^2=10-a$

이므로 이 원은 중심이 점 $(b-3,\ -2b+1)$이고 반지름의 길이가 $\sqrt{10-a}$인 원이다.

이 원이 x축, y축에 동시에 접하고 원의 중심이 제2사분면 위에 있으므로

$-(b-3)=-2b+1\quad \therefore b=-2$

즉 평행이동한 원의 중심의 좌표는 $(-5,\ 5)$이므로 반지름의 길이는 5이다.

따라서 $\sqrt{10-a}=5$에서

$10-a=25\quad \therefore a=-15$

$\therefore b-a=13$ 답 ③

10 점 $(a-2,\ b+6)$을 x축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$(a-2,\ -b-6)$

이 점을 다시 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$(-b-6,\ a-2)$

점 $(-b-6,\ a-2)$가 제2사분면 위에 있으므로

$-b-6<0,\ a-2>0$

$\therefore a>2,\ b>-6$

따라서 두 정수 a, b에 대하여 $a+b$의 최솟값은 $a=3$, $b=-5$일 때 $\quad 3+(-5)=-2$ 답 -2

11 $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$일 때, 점 P_n의 좌표를 차례대로 구하면 다음과 같다.

$P_1(3,\ 2),\ P_2(3,\ -2),\ P_3(-3,\ 2),$

$P_4(-3,\ -2),\ P_5(3,\ 2),\ P_6(3,\ -2),$

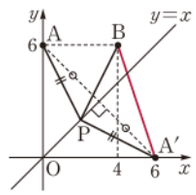
$P_7(-3,\ 2),\ P_8(-3,\ -2),\ \cdots$

즉 점 P_n의 좌표는 $(3,\ 2)$, $(3,\ -2)$, $(-3,\ 2)$, $(-3,\ -2)$가 차례대로 반복됨을 알 수 있다.

ⓒ좋은책신사고

따라서 $49=4\cdot12+1$에서 점 P_{49}는 점 P_1과 일치하므로 점 P_{49}의 좌표는 $(3,\ 2)$이다. 답 ⑤

12 오른쪽 그림과 같이 점 A를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 A′이라 하면 A′$(6,\ 0)$이므로



$$\overline{AP}+\overline{BP}=\overline{A'P}+\overline{BP}$$
$$\geq\overline{A'B}$$

따라서 $\overline{AP}+\overline{BP}$의 최솟값은

$$\overline{A'B}=\sqrt{(4-6)^2+6^2}=2\sqrt{10}$$

답 ⑤

13 점 $(-1,\ 0)$을 지나는 직선의 기울기를 m이라 하면 $\quad y=m(x+1)$

이 직선을 y축의 방향으로 1만큼 평행이동하면

$$y=m(x+1)+1$$

이 직선을 다시 x축에 대하여 대칭이동하면

$$-y=m(x+1)+1 \qquad \therefore y=-m(x+1)-1$$

이 직선이 점 $(1,\ 3)$을 지나므로

$$3=-2m-1 \qquad \therefore m=-2$$

답 -2

14 직선 $(2k+1)x+(k+1)y-4=0$을 원점에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$$(2k+1)(-x)+(k+1)(-y)-4=0$$
$$\therefore (2k+1)x+(k+1)y+4=0$$

k에 대하여 정리하면

$$(2x+y)k+(x+y+4)=0$$

이 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$$2x+y=0,\ x+y+4=0$$

두 식을 연립하여 풀면

$$x=4,\ y=-8$$

따라서 이 직선은 k의 값에 관계없이 항상 점 $(4,\ -8)$을 지나므로 $\quad a=4,\ b=-8$

$$\therefore a-2b=4-2\cdot(-8)=20$$

답 ⑤

15 원 C_1의 중심이 직선 $y=x$ 위에 있으므로

$$a=b$$

즉 원 C_1: $x^2+y^2+ax+ay=0$에서

$\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+\left(y+\frac{a}{2}\right)^2=\frac{a^2}{2}$이므로 원 C_1을 원점에 대하여 대칭이동한 원 C_2의 방정식은

$$\left(-x+\frac{a}{2}\right)^2+\left(-y+\frac{a}{2}\right)^2=\frac{a^2}{2}$$
$$\therefore \left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\left(y-\frac{a}{2}\right)^2=\frac{a^2}{2}$$

일품 BOX

원의 중심이 직선 $y=x$ 위에 있으므로 중심의 x좌표와 y좌표가 같다. 따라서 주어진 원의 방정식에서 x항과 y항의 계수가 서로 같다.

즉 두 원 C_1, C_2의 중심의 좌표는 각각 $\left(-\frac{a}{2},\ -\frac{a}{2}\right)$, $\left(\frac{a}{2},\ \frac{a}{2}\right)$이고, 두 원의 중심 사이의 거리가 $2\sqrt{2}$이므로

$$\sqrt{\left(\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\right)^2}=2\sqrt{2}, \qquad \sqrt{2a^2}=2\sqrt{2}$$
$$a^2=4 \qquad \therefore a=2\ (\because a>0)$$
$$\therefore a+b=2a=4$$

답 4

16 점 A의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면 직선 AB는 직선 $2x-y-2=0$, 즉 $y=2x-2$와 수직이므로

$$\frac{2-b}{-1-a}=-\frac{1}{2}$$
$$\therefore a+2b-3=0 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

두 점 A$(a,\ b)$, B$(-1,\ 2)$를 지나는 직선의 기울기

또 선분 AB의 중점 $\left(\frac{a-1}{2},\ \frac{b+2}{2}\right)$는 직선 $2x-y-2=0$ 위의 점이므로

$$2\cdot\frac{a-1}{2}-\frac{b+2}{2}-2=0$$
$$\therefore 2a-b-8=0 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a=\frac{19}{5},\ b=-\frac{2}{5}$$

따라서 점 A의 좌표는 $\left(\frac{19}{5},\ -\frac{2}{5}\right)$이다.

답 $\left(\frac{19}{5},\ -\frac{2}{5}\right)$

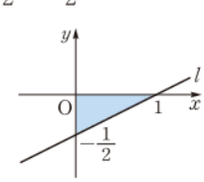
17 직선 AB의 기울기는 $\frac{-1-3}{4-2}=-2$이고 직선 AB와 직선 l은 서로 수직이므로 직선 l의 기울기는 $\frac{1}{2}$이다.

또 직선 l은 선분 AB의 중점 $(3,\ 1)$을 지나므로 직선 l의 방정식은

$\left(\frac{2+4}{2},\ \frac{3-1}{2}\right)$

$$y-1=\frac{1}{2}(x-3) \qquad \therefore y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$$

따라서 오른쪽 그림에서 직선 l과 x축, y축으로 둘러싸인 부분의 넓이는



$$\frac{1}{2}\cdot1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

답 ①

18 원 $(x+4)^2+(y-2)^2=1$의 중심 C$(-4,\ 2)$를 직선 $y=3x+4$에 대하여 대칭이동한 점을 D$(a,\ b)$라 하면 직선 CD는 직선 $y=3x+4$와 수직이므로

$$\frac{b-2}{a+4}=-\frac{1}{3}$$
$$\therefore a+3b=2 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

또 선분 CD의 중점 $\left(\frac{a-4}{2},\ \frac{b+2}{2}\right)$는 직선 $y=3x+4$ 위의 점이므로

$$\frac{b+2}{2}=3\cdot\frac{a-4}{2}+4$$

$$\therefore 3a-b=6 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a=2,\ b=0$$

따라서 원 $(x+4)^2+(y-2)^2=1$을 직선 $y=3x+4$에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$$(x-2)^2+y^2=1$$

원을 직선에 대하여 대칭이동하여도 원의 반지름의 길이는 변하지 않는다.

이고, 이것을 다시 y축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$$(-x-2)^2+y^2=1$$

$$\therefore (x+2)^2+y^2=1$$

답 ①

1등급을 위한 고난도 문제

본책 111~113쪽

01 점 $(1,\ -1)$을 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동하면 점 $(-2,\ 3)$으로 옮겨진다. 이 평행이동에 의하여 점 $A(a,\ b)$가 점 $A'(2,\ 1)$로 옮겨지므로

$$a-3=2,\ b+4=1$$

$$\therefore a=5,\ b=-3$$

또 점 $B(2,\ 1)$이 점 $B'(c,\ d)$로 옮겨지므로

$$2-3=c,\ 1+4=d$$

$$\therefore c=-1,\ d=5$$

따라서 $A(5,\ -3)$, $B'(-1,\ 5)$이므로

$$\overline{AB'}=\sqrt{(-1-5)^2+(5+3)^2}=10$$

답 ⑤

02 점 $(-3,\ 4)$를 평행이동

$(x,\ y) \longrightarrow (x+a,\ y-2)$에 의하여 이동한 점의 좌표는 $(-3+a,\ 2)$ ··· ❶

이 점을 다시 평행이동 $(x,\ y) \longrightarrow (x-2,\ y+a)$에 의하여 이동한 점의 좌표는

$(-5+a,\ 2+a)$ ··· ❷

따라서 $-5+a=3,\ 2+a=b$이므로

$a=8,\ b=10$ ··· ❸

$\therefore a+b=18$ ··· ❹

답 18

채점 기준	비율
❶ 점 $(-3,\ 4)$를 평행이동한 점의 좌표를 구할 수 있다.	30 %
❷ ❶에서 구한 점을 평행이동한 점의 좌표를 구할 수 있다.	30 %
❸ a, b의 값을 구할 수 있다.	30 %
❹ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	10 %

03 주어진 평행이동에 의하여 점 $A(3,\ 1)$이 옮겨지는 점 B의 좌표는

$$(3+m,\ 1+n)$$

이때 $\overline{AB}=3\sqrt{2}$이므로

$$\sqrt{(3+m-3)^2+(1+n-1)^2}=3\sqrt{2}$$

$$\therefore m^2+n^2=18$$

또 점 B에서 직선 $x+y-4=0$에 이르는 거리가 $2\sqrt{2}$이므로

$$\frac{|3+m+1+n-4|}{\sqrt{1^2+1^2}}=2\sqrt{2}$$

$$\therefore |m+n|=4$$

따라서 $m^2+n^2=(m+n)^2-2mn$에서

$(m+n)^2=|m+n|^2$

$$18=16-2mn$$

$$\therefore mn=-1$$

답 ②

04 점 P가 원점에서 출발하여 x축의 방향으로 a번, y축의 방향으로 b번 이동하였다고 하면 점 P의 좌표는 $(a,\ b)$이고, $n=a+b$이다.

점 $P(a,\ b)$가 원 $(x-6)^2+(y-8)^2=8$ 위에 있으므로

$$(a-6)^2+(b-8)^2=8$$

이때 a, b는 자연수이므로

$$(a-6)^2=4,\ (b-8)^2=4$$

$$a-6=\pm2,\ b-8=\pm2$$

$$\therefore a=8 \text{ 또는 } a=4,\ b=10 \text{ 또는 } b=6$$

즉 원 $(x-6)^2+(y-8)^2=8$ 위에 놓일 수 있는 점 P는 $(4,\ 6)$, $(4,\ 10)$, $(8,\ 6)$, $(8,\ 10)$이므로 서로 다른 n의 값은

$4+6=10,\ 4+10=14,$
$8+6=14,\ 8+10=18$

$$10,\ 14,\ 18$$

따라서 구하는 n의 값의 합은

$$10+14+18=42$$

답 42

05 직선 $x+2y+4=0$을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 $2a-1$만큼 평행이동한 직선 m의 방정식은

$$(x-a)+2(y-2a+1)+4=0$$

$$\therefore x+2y-5a+6=0$$

직선 $x+2y+4=0$ 위의 점 $(-4,\ 0)$과 직선 m 사이의 거리가 $4\sqrt{5}$이므로

$$\frac{|-4-5a+6|}{\sqrt{1^2+2^2}}=4\sqrt{5}, \qquad |-5a+2|=20$$

$$-5a+2=\pm20$$

$$\therefore a=\frac{22}{5}\ (\because a>0)$$

답 ④

06 직선 $2x+3y-7=0$을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$$2(x-a)+3(y-b)-7=0$$

$$\therefore 2x+3y-2a-3b-7=0 \qquad \cdots ❶$$

ⓒ좋은책신사고

이 직선이 마름모 PQRS의 넓이를 이등분하므로 마름모의 두 대각선의 교점 $(4,\ 3)$을 지난다. ⋯ ❷

따라서 $8+9-2a-3b-7=0$이므로

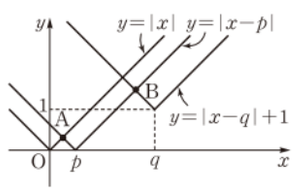
$2a+3b=10$ ⋯ ❸

답 10

채점 기준	비율
❶ 직선 $2x+3y-7=0$을 평행이동한 직선의 방정식을 구할 수 있다.	40 %
❷ ❶에서 구한 직선이 지나는 점의 좌표를 구할 수 있다.	40 %
❸ $2a+3b$의 값을 구할 수 있다.	20 %

07 $y=|x|$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼 평행이동한 그래프의 식은 $y=|x-p|$이고, x축의 방향으로 q만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 그래프의 식은 $y=|x-q|+1$이다.

이때 $0<p<q$이므로 두 교점 A, B가 존재하려면 $y=|x|$, $y=|x-p|$, $y=|x-q|+1$의 그래프는 위의 그림과 같아야 한다.



(i) 점 A는 두 직선 $y=x$, $y=-x+p$의 교점이므로 $x=-x+p$에서

$2x=p \qquad \therefore x=\frac{p}{2}$

따라서 점 A의 좌표는 $\left(\frac{p}{2},\ \frac{p}{2}\right)$

(ii) 점 B는 두 직선 $y=x-p$, $y=-x+q+1$의 교점이므로 $x-p=-x+q+1$에서

$2x=p+q+1 \qquad \therefore x=\frac{p+q+1}{2}$

따라서 점 B의 좌표는

$\left(\frac{p+q+1}{2},\ \frac{-p+q+1}{2}\right)$

(i), (ii)에서 선분 AB의 중점의 좌표가 $\left(\frac{2p+q+1}{4},\ \frac{q+1}{4}\right)$이므로

$\frac{2p+q+1}{4}=2,\ \frac{q+1}{4}=\frac{9}{8}$

$\therefore p=\frac{7}{4},\ q=\frac{7}{2}$

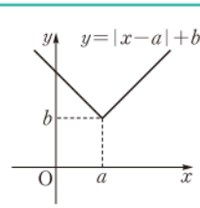
$\therefore \frac{q}{p}=\frac{7}{2}\cdot\frac{4}{7}=2$

답 2

1등급 비밀노트

$y=|x-a|+b$
$=\begin{cases}-x+a+b & (x<a)\\ x-a+b & (x\ge a)\end{cases}$

이므로 그 그래프는 오른쪽 그림과 같이 $x=a$인 점에서 꺾인 모양이고, $y=|x-a|+b$는 $x=a$일 때 최솟값 b를 갖는다.



일품 BOX

마름모의 두 대각선은 서로를 수직이등분하므로 두 대각선의 교점은 $\overline{PR}$의 중점 $\left(\frac{2+6}{2},\ \frac{3+3}{2}\right)$, 즉 $(4,\ 3)$이다.

$y=|x|$
$=\begin{cases}-x & (x<0)\\ x & (x\ge 0)\end{cases}$

$y=|x-p|$
$=\begin{cases}-x+p & (x<p)\\ x-p & (x\ge p)\end{cases}$
$y=|x-q|+1$
$=\begin{cases}-x+q+1 & (x<q)\\ x-q+1 & (x\ge q)\end{cases}$

$\frac{1}{2}\left(\frac{p}{2}+\frac{p+q+1}{2}\right)$
$=\frac{2p+q+1}{4}$,
$\frac{1}{2}\left(\frac{p}{2}+\frac{-p+q+1}{2}\right)$
$=\frac{q+1}{4}$

두 원 C_1, C_2의 반지름의 길이의 합

08 $x^2+y^2+ax+by+1=0$에서

$\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+\left(y+\frac{b}{2}\right)^2=\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}-1$

원의 중심 $\left(-\frac{a}{2},\ -\frac{b}{2}\right)$를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 점의 좌표는

$\left(-\frac{a}{2}+2,\ -\frac{b}{2}-3\right)$ ⋯ ❶

따라서 $-\frac{a}{2}+2=1,\ -\frac{b}{2}-3=-1$이므로

$a=2,\ b=-4$ ⋯ ❷

이때 원을 평행이동하여도 반지름의 길이는 변하지 않으므로

$r=\sqrt{\frac{2^2}{4}+\frac{(-4)^2}{4}-1}=2$ ⋯ ❸

$\therefore a+b+r=0$ ⋯ ❹

답 0

채점 기준	비율
❶ 평행이동한 원의 중심의 좌표를 구할 수 있다.	30 %
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ r의 값을 구할 수 있다.	30 %
❹ $a+b+r$의 값을 구할 수 있다.	10 %

09 원 $x^2+(y-1)^2=4$의 중심 $(0,\ 1)$이 원 $(x-1)^2+y^2=4$의 중심 $(1,\ 0)$으로 옮겨지므로 주어진 평행이동은

$(x,\ y)\longrightarrow(x+1,\ y-1)$ ⋯ ❶

이 평행이동에 의하여 직선 $x+2y-4=0$이 옮겨지는 직선의 방정식은

$(x-1)+2(y+1)-4=0$

$\therefore x+2y-3=0$ ⋯ ❷

따라서 $a=2,\ b=-3$이므로

$a+b=-1$ ⋯ ❸

답 -1

채점 기준	비율
❶ 주어진 평행이동을 구할 수 있다.	40 %
❷ 직선 $x+2y-4=0$이 옮겨지는 직선의 방정식을 구할 수 있다.	40 %
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	20 %

10 원 C_1의 방정식은 $(x-2)^2+y^2=1$

원 C_2의 방정식은 $x^2+(y-2)^2=1$

두 원 C_1, C_2의 중심의 좌표가 각각 $(2,\ 0)$, $(0,\ 2)$이므로 중심 사이의 거리는

$\sqrt{(-2)^2+2^2}=2\sqrt{2}$

따라서 구하는 최댓값은

$2\sqrt{2}+1+1=2\sqrt{2}+2$

답 ④

11 점 P의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면 점 P와 원점에 대하여 대칭인 점 Q의 좌표는

$(-a,\ -b)$

이때 두 점 $P(a,\ b)$, $Q(-a,\ -b)$는 모두 포물선 $y=x^2-3x-4$ 위의 점이므로

$b=a^2-3a-4,\ -b=a^2+3a-4$ ··· ❶

즉 $a^2-3a-4=-a^2-3a+4$이므로

$a^2=4 \qquad \therefore a=\pm 2$

따라서

$a=-2,\ b=6$ 또는 $a=2,\ b=-6$

이므로

$P(-2,\ 6),\ Q(2,\ -6)$

또는 $P(2,\ -6),\ Q(-2,\ 6)$ ··· ❷

$\therefore \overline{PQ}=\sqrt{(-2-2)^2+(6+6)^2}$

$=4\sqrt{10}$ ··· ❸

답 $4\sqrt{10}$

채점 기준	비율
❶ 점 P의 x좌표, y좌표 사이의 관계식을 구할 수 있다.	40 %
❷ 두 점 P, Q의 좌표를 구할 수 있다.	40 %
❸ $\overline{PQ}$의 길이를 구할 수 있다.	20 %

12 점 $(a,\ b)$를 x축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(a,\ -b)$

이 점을 다시 직선 $y=-x$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(b,\ -a)$

이 점이 제2사분면 위의 점 $(c,\ d)$와 일치하므로

$b<0,\ -a>0,\ b=c,\ -a=d$

$\therefore a<0,\ b<0,\ c<0,\ d>0$

ㄱ. a, b는 모두 음수이다.

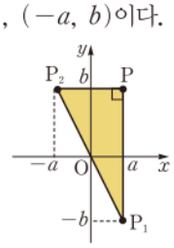
ㄴ. $a<0,\ d>0$이므로 $\quad ad<0$

ㄷ. $a+c<0,\ bd<0$이므로 점 $(a+c,\ bd)$는 제3사분면 위의 점이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ⑤

13 점 $P(a,\ b)$를 x축, y축에 대하여 각각 대칭이동한 점 P_1, P_2의 좌표는 각각 $(a,\ -b)$, $(-a,\ b)$이다.

$\triangle PP_1P_2$는 오른쪽 그림과 같으므로



$\triangle PP_1P_2=\frac{1}{2}\cdot 2a\cdot 2b$

$=2ab$

이때 $\triangle PP_1P_2$의 넓이가 8이므로

$2ab=8$

$\therefore ab=4$ ····· ㉠

또 점 $P(a,\ b)$가 직선 $y=2x$ 위에 있으므로

$b=2a$ ····· ㉡

일품 BOX

$a=-2,\ a=2$를 $b=a^2-3a-4$에 각각 대입하여 b의 값을 구한다.

㉡을 ㉠에 대입하여 정리하면

$a^2=2 \qquad \therefore a=\sqrt{2}\ (\because a>0)$

$a=\sqrt{2}$를 ㉡에 대입하면

$\therefore b=2\sqrt{2}$

$\therefore a+b=3\sqrt{2}$ 답 $3\sqrt{2}$

14 직선 $y=ax$를 x축에 대하여 대칭이동하면

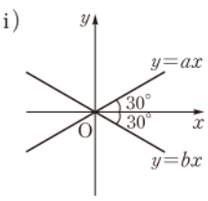
$-y=ax \qquad \therefore y=-ax$

이 직선이 직선 $y=bx$와 일치하므로

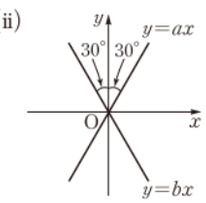
$-a=b$ ····· ㉠

이때 두 직선 $y=ax$, $y=bx$가 이루는 예각의 크기가 $60°$인 경우는 다음의 두 가지가 있다.

(i)



(ii)



직선이 x축의 양의 부분과 이루는 각의 크기가 θ $(0°\le\theta<90°)$일 때, 직선의 기울기는 $\tan\theta$이다.

(i) $a=\tan 30°=\frac{\sqrt{3}}{3}$이므로 ㉠에서

$b=-\frac{\sqrt{3}}{3} \qquad \therefore ab=-\frac{1}{3}$

(ii) $a=\tan 60°=\sqrt{3}$이므로 ㉠에서

$b=-\sqrt{3} \qquad \therefore ab=-3$

(i), (ii)에서 ab의 최솟값은 -3이다. 답 -3

15 함수 $y=x^2+2x+k$의 그래프를 y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y-1=x^2+2x+k$

$\therefore y=x^2+2x+k+1$ ··· ❶

이 그래프를 다시 x축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$-y=x^2+2x+k+1$

$\therefore y=-x^2-2x-k-1$

$\therefore f(x)=-x^2-2x-k-1$

$=-(x+1)^2-k$ ··· ❷

따라서 $f(x)$는 $x=-1$일 때 최댓값 $-k$를 가지므로

$-k=5 \qquad \therefore k=-5$ ··· ❸

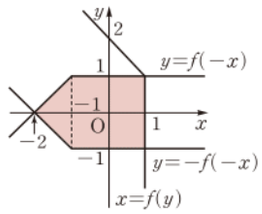
답 -5

채점 기준	비율
❶ 함수 $y=x^2+2x+k$의 그래프를 평행이동한 그래프의 식을 구할 수 있다.	40 %
❷ ❶에서 구한 그래프를 대칭이동한 그래프의 식을 구할 수 있다.	40 %
❸ k의 값을 구할 수 있다.	20 %

16 세 함수 $y=f(-x)$, $y=-f(-x)$, $x=f(y)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 각각 y축, 원점, 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 것이다.

ⓒ좋은책신사고

따라서 오른쪽 그림에서 세 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이는



$$2\cdot2+\frac{1}{2}\cdot2\cdot1=5$$

답 ③

17 원 $x^2+y^2+2x-4y-5=0$을 원점에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$$x^2+y^2-2x+4y-5=0$$

이 원을 다시 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$$x^2+y^2+4x-2y-5=0$$

$y=0$을 이 식에 대입하면

$$x^2+4x-5=0, \qquad (x+5)(x-1)=0$$

$$\therefore x=-5 \text{ 또는 } x=1$$

따라서 이 원과 x축의 교점의 좌표는 $(-5,\ 0)$, $(1,\ 0)$이므로

$$\overline{AB}=|1-(-5)|=6$$

답 6

18 직선 l의 방정식은

$$y+2=m(x-5)$$

$$\therefore y=mx-5m-2 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

직선 l 위의 점 $(x,\ y)$를 점 $(2,\ 1)$에 대하여 대칭이동한 점을 $(x',\ y')$이라 하면

$$\frac{x+x'}{2}=2,\ \frac{y+y'}{2}=1$$

$$\therefore x=4-x',\ y=2-y'$$

이것을 ㉠에 대입하면

$$2-y'=m(4-x')-5m-2$$

$$\therefore y'=mx'+m+4$$

따라서 점 $(x',\ y')$은 직선 $y=mx+m+4$ 위의 점이므로 직선 l을 점 $(2,\ 1)$에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은 $y=mx+m+4$이다.

이 직선을 다시 x축에 대하여 대칭이동한 직선 l'의 방정식은

$$-y=mx+m+4$$

$$\therefore y=-mx-m-4$$

(i) 직선 l'이 점 $A(5,\ -2)$를 지나려면

$$-2=-5m-m-4 \qquad \therefore m=-\frac{1}{3}$$

(ii) 두 직선 l, l'이 서로 수직이려면

$$m\cdot(-m)=-1$$

$$m^2=1 \qquad \therefore m=-1\ (\because m<0)$$

(i), (ii)에서 $p=-\frac{1}{3}$, $q=-1$이므로

$$p+q=-\frac{4}{3}$$

답 $-\frac{4}{3}$

일품 BOX

x 대신 $-x$, y 대신 $-y$를 대입한다.

x 대신 y, y 대신 x를 대입한다.

두 점 $(x,\ y)$, $(x',\ y')$이 점 $(2,\ 1)$에 대하여 대칭이므로 두 점을 잇는 선분의 중점의 좌표는 $(2,\ 1)$이다.

19 직선 $2x+y+1=0$ 위의 점 $P(x,\ y)$를 직선 $x+y-3=0$에 대하여 대칭이동한 점을 $P'(x',\ y')$이라 하면 직선 PP'은 직선 $x+y-3=0$, 즉 $y=-x+3$과 수직이므로

$$\frac{y'-y}{x'-x}=1$$

$$\therefore x-y=x'-y' \qquad \cdots\cdots ㉠$$

또 선분 PP'의 중점 $\left(\frac{x+x'}{2},\ \frac{y+y'}{2}\right)$은 직선 $x+y-3=0$ 위의 점이므로

$$\frac{x+x'}{2}+\frac{y+y'}{2}-3=0$$

$$\therefore x+y=-x'-y'+6 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$x=-y'+3,\ y=-x'+3$$

이것을 $2x+y+1=0$에 대입하면

$$2(-y'+3)+(-x'+3)+1=0$$

$$\therefore x'+2y'-10=0$$

이때 점 $P'(x',\ y')$은 직선 $x+2y-10=0$ 위의 점이므로 직선 $2x+y+1=0$을 직선 $x+y-3=0$에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은 $x+2y-10=0$이다.

따라서 구하는 직선의 y절편은 5이다.

답 5

20 접는 선을 직선 l이라 하면 점 $A(1,\ 4)$를 직선 l에 대하여 대칭이동한 점이 점 $(-1,\ 0)$이다.

이 직선 l의 방정식을 $y=mx+n$, 점 $(-1,\ 0)$을 B라 하면 직선 AB는 직선 $y=mx+n$과 수직이므로

$$\frac{0-4}{-1-1}\cdot m=-1, \qquad 2m=-1$$

$$\therefore m=-\frac{1}{2}$$

또 선분 AB의 중점 $\left(\frac{1-1}{2},\ \frac{4+0}{2}\right)$, 즉 $(0,\ 2)$는 직선 $y=mx+n$ 위의 점이므로

$$n=2$$

따라서 직선 l의 방정식은

$$y=-\frac{1}{2}x+2$$

한편 점 $P(0,\ -3)$을 직선 l에 대하여 대칭이동한 점 $(a,\ b)$를 Q라 하면 직선 PQ는 직선 $y=-\frac{1}{2}x+2$와 수직이므로

$$\frac{b+3}{a-0}=2, \qquad b+3=2a$$

$$\therefore 2a-b=3 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

선분 PQ의 중점 $\left(\frac{0+a}{2},\ \frac{-3+b}{2}\right)$, 즉 $\left(\frac{a}{2},\ \frac{b-3}{2}\right)$은 직선 $y=-\frac{1}{2}x+2$ 위의 점이므로

$$\frac{b-3}{2}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{2}+2$$

$\therefore a+2b=14$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=4,\ b=5$

$\therefore a+b=9$

답 ②

21 점 Q의 좌표를 $(b,\ c)$라 하면 직선 PQ는 직선 $x+y=2$, 즉 $y=-x+2$와 수직이므로

$\frac{c-1}{b-a}=1$

$\therefore a-b+c=1$ …… ㉠

또 선분 PQ의 중점 $\left(\frac{a+b}{2},\ \frac{1+c}{2}\right)$는 직선 $x+y=2$ 위의 점이므로

$\frac{a+b}{2}+\frac{1+c}{2}=2$

$\therefore a+b+c=3$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $b=1,\ c=2-a$

$\therefore Q(1,\ 2-a)$ ··· ❶

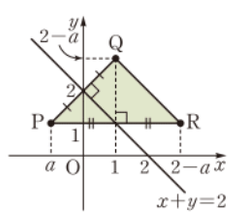
한편 점 R의 좌표를 $(d,\ e)$라 하면 선분 PR의 중점은 점 $(1,\ 1)$이므로

$\frac{a+d}{2}=1,\ \frac{1+e}{2}=1$

$\therefore d=2-a,\ e=1$

$\therefore R(2-a,\ 1)$ ··· ❷

오른쪽 그림에서 △PQR의 넓이는



$\frac{1}{2}(2-a-a)(2-a-1)$

$=(a-1)^2$

이므로 $(a-1)^2=4$

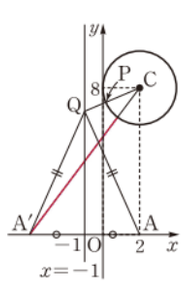
$a-1=\pm 2$

$\therefore a=-1\ (\because a<0)$ ··· ❸

답 -1

채점 기준	비율
❶ 점 Q의 좌표를 구할 수 있다.	40 %
❷ 점 R의 좌표를 구할 수 있다.	30 %
❸ a의 값을 구할 수 있다.	30 %

22 오른쪽 그림과 같이 점 A를 직선 $x=-1$에 대하여 대칭이동한 점을 A′이라 하고 원의 중심을 C라 하면



$A'(-4,\ 0),\ C(2,\ 8)$

$\overline{AQ}+\overline{QP}=\overline{A'Q}+\overline{QP}$이므로 $\overline{AQ}+\overline{QP}$의 값이 최소일 때는 선분 A′C가 직선 $x=-1$과 만나는 점이 Q, 원과 만나는 점이 P일 때이다.

$\therefore \overline{AQ}+\overline{QP}\geq\overline{A'C}-2$

$=\sqrt{(2+4)^2+8^2}-2$

$=10-2=8$

따라서 $\overline{AQ}+\overline{QP}$의 최솟값은 8이다.

답 8

23 두 원의 공통인 현의 방정식은

$x^2+y^2-r^2-(x^2+y^2-8x-6y)=0$

$\therefore 8x+6y=r^2$

$x^2+y^2-8x-6y=0$에서

$(x-4)^2+(y-3)^2=25$

원 C_2의 중심 $(4,\ 3)$을 두 원의 공통인 현에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면 두 점 $(4,\ 3)$, $(a,\ b)$를 지나는 직선은 직선 $8x+6y=r^2$과 수직이므로

$\frac{b-3}{a-4}\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)=-1 \qquad \therefore b=\frac{3}{4}a$ …… ㉠

또 두 점을 잇는 선분의 중점 $\left(\frac{4+a}{2},\ \frac{3+b}{2}\right)$는 직선 $8x+6y=r^2$ 위의 점이므로

$8\cdot\frac{4+a}{2}+6\cdot\frac{3+b}{2}=r^2$

$\therefore 4a+3b+25=r^2$ …… ㉡

한편 점 $(a,\ b)$가 원 C_1 위의 점이므로

$a^2+b^2=r^2$ …… ㉢

㉠을 ㉡에 대입하면 $\frac{25}{4}a+25=r^2$ …… ㉣

㉠을 ㉢에 대입하면 $\frac{25}{16}a^2=r^2$ …… ㉤

㉣, ㉤에서 $\frac{25}{16}a^2=\frac{25}{4}a+25$이므로

$a^2-4a-16=0 \qquad \therefore a=2\pm 2\sqrt{5}$

이때 $r^2<25$이므로 ㉣에서 $a<0$

$\therefore a=2-2\sqrt{5}$

이것을 ㉣에 대입하면

$r^2=\frac{25}{4}(2-2\sqrt{5})+25=\frac{75}{2}-\frac{25\sqrt{5}}{2}$

따라서 $p=\frac{75}{2},\ q=-\frac{25}{2}$이므로

$p+q=25$

답 ①

일품 BOX

원의 반지름의 길이

㉡−㉠을 하면
$2b=2$
$\therefore b=1$
㉠에 $b=1$을 대입하면
$a+c=2$
$\therefore c=2-a$

$0<r<5$이므로
$r^2<25$

점 A′의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면
$\frac{a+2}{2}=-1,$
$\frac{b+0}{2}=0$
$\therefore a=-4,\ b=0$

사고력 강화를 위한 수능형 문제

본책 114쪽

01 점 P가 점 A(7, 7)에서 출발하여 이동한 점을 차례대로 나열하면

$(6,\ 7),\ (5,\ 7),\ (4,\ 7),\ (3,\ 7),\ (3,\ 6)$

따라서 점 B의 좌표는 $(3,\ 6)$이고, 점 P가 이동한 횟수는 5이다.

답 ②

ⓒ좋은책신사고

02 점 A$(-4,\ 7)$을 x축의 방향으로 7만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동하면 점 A$'(3,\ 9)$로 옮겨진다.

△ABC의 무게중심 G의 좌표는

$$\left(\frac{-4-1+2}{3},\ \frac{7+0+5}{3}\right) \qquad \therefore (-1,\ 4)$$

점 G$(-1,\ 4)$를 x축의 방향으로 7만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 점이 점 G$'$과 일치하므로 점 G$'$의 좌표는

$$(-1+7,\ 4+2) \qquad \therefore (6,\ 6)$$

따라서 두 점 G$(-1,\ 4)$, G$'(6,\ 6)$을 지나는 직선의 방정식은

$$y-4=\frac{6-4}{6-(-1)}(x+1),\ \text{즉 } 2x-7y+30=0$$

이므로 $\quad a=2,\ b=30$

$\therefore a+b=32$ 답 32

1등급 비밀노트

△ABC가 평행이동 $(x,\ y) \longrightarrow (x+7,\ y+2)$에 의하여 △A$'B'C'$으로 옮겨질 때 △ABC의 무게중심도 같은 평행이동에 의하여 옮겨지므로 평행이동한 두 점 B$'$, C$'$의 좌표를 구하여 무게중심 G$'$의 좌표를 구할 필요 없이 점 G를 평행이동하여 점 G$'$의 좌표를 구하면 된다.

03 원 C_1의 방정식은 $\quad (x-3)^2+(y-7)^2=8$

원 C_1을 직선 $y=-x$에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

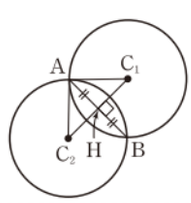
$$(-y-3)^2+(-x-7)^2=8$$

$$\therefore (x+7)^2+(y+3)^2=8$$

이 원을 다시 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 a만큼 평행이동한 원 C_2의 방정식은

$$(x-a+7)^2+(y-a+3)^2=8$$

오른쪽 그림과 같이 두 원 C_1, C_2의 중심을 각각 C_1, C_2라 하고 두 직선 AB, C_1C_2의 교점을 H라 하면 직선 C_1C_2는 선분 AB를 수직이등분한다.



$\overline{AH}=\overline{BH}=\frac{1}{2}\overline{AB}=\sqrt{6}$이므로 직각삼각형 AHC_1에서

$$\overline{C_1H}=\sqrt{(2\sqrt{2})^2-(\sqrt{6})^2}=\sqrt{2}$$

마찬가지로 직각삼각형 AHC_2에서

$$\overline{C_2H}=\sqrt{2}$$

따라서 $\overline{C_1C_2}=2\sqrt{2}$이고 $C_1(3,\ 7)$, $C_2(a-7,\ a-3)$이므로

$$\sqrt{(a-7-3)^2+(a-3-7)^2}=2\sqrt{2}$$

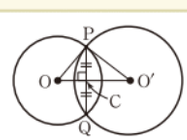
$$2(a-10)^2=8, \qquad a-10=\pm 2$$

$$\therefore a=8 \text{ 또는 } a=12$$

따라서 구하는 모든 a의 값의 합은

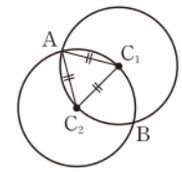
$8+12=20$ 답 20

$\left(\frac{1+a}{2},\ \frac{1+b}{2}\right)$



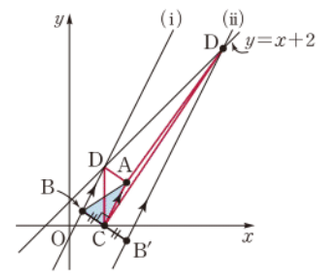
두 원 O, O'의 두 교점을 각각 P, Q라 할 때,
$\overline{PQ}\perp\overline{OO'}$
$\overline{PC}=\overline{QC}$

참고 $\overline{C_1C_2}=2\sqrt{2}$이므로 $\overline{C_1C_2}$의 길이가 두 원 C_1, C_2의 반지름의 길이와 같다. 즉 두 원 C_1, C_2는 오른쪽 그림과 같이 서로의 중심을 지난다.



04 두 삼각형 ABC, ADC의 넓이가 같으려면 삼각형 ABC에서 밑변을 변 AC라 할 때의 높이, 즉 점 B와 직선 AC 사이의 거리와 점 D와 직선 AC 사이의 거리가 같아야 하므로 점 D의 위치는 다음의 두 가지 경우이다.

(i) 점 D가 두 직선 AC, BD가 평행하도록 하는 직선 $y=x+2$ 위의 점인 경우



직선 AC의 기울기는 $\frac{0-4}{3-5}=2$이므로 점 B$(1,\ 1)$을 지나고 기울기가 2인 직선의 방정식은

$$y-1=2(x-1)$$

$$\therefore y=2x-1 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

따라서 직선 ㉠과 직선 $y=x+2$의 교점 D의 x좌표는 $2x-1=x+2$에서 $\quad x=3$

(ii) 점 B를 직선 AC에 대하여 대칭이동한 점을 B$'$이라 하면 점 D가 두 직선 AC, B$'$D가 평행하도록 하는 직선 $y=x+2$ 위의 점인 경우

점 B$(1,\ 1)$을 직선 AC에 대하여 대칭이동한 점을 B$'(a,\ b)$이라 하면 $\overline{AC}\perp\overline{BB'}$에서

$$\frac{b-1}{a-1}\cdot 2=-1$$

$$\therefore a+2b=3 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

또 직선 AC의 방정식은 $y=2(x-3)$, 즉 $y=2x-6$이고 두 점 $\overline{BB'}$의 중점은 직선 AC 위의 점이므로

$$\frac{1+b}{2}=2\cdot\frac{1+a}{2}-6$$

$$\therefore 2a-b=11 \qquad \cdots\cdots ㉢$$

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $\quad a=5,\ b=-1$

점 B$'(5,\ -1)$을 지나고 기울기가 2인 직선의 방정식은

$$y-(-1)=2(x-5)$$

$$\therefore y=2x-11 \qquad \cdots\cdots ㉣$$

따라서 직선 ㉣과 직선 $y=x+2$의 교점 D의 x좌표는 $2x-11=x+2$에서 $\quad x=13$

(i), (ii)에서 구하는 모든 점 D의 x좌표의 합은

$3+13=16$ 답 16

05 두 직선 $y=ax+b$, $y=cx+d$가 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로

$\overline{OA}=\overline{OD}$, $\overline{OB}=\overline{OC}$

또 원점 O가 선분 AC를 2 : 1로 내분하는 점이므로

$\overline{OC}=x$라 하면 $\overline{OA}=2x$

□ADCB의 넓이가 18이므로

$\frac{1}{2}\cdot 3x\cdot x+\frac{1}{2}\cdot 3x\cdot 2x=18$

$x^2=4$ $\therefore x=2\ (\because x>0)$

따라서 A$(-4,\ 0)$, B$(0,\ 2)$, C$(2,\ 0)$, D$(0,\ -4)$이므로 두 직선 $y=ax+b$, $y=cx+d$의 방정식은 각각

$\frac{x}{-4}+\frac{y}{2}=1$, $\frac{x}{2}+\frac{y}{-4}=1$

$\therefore y=\frac{1}{2}x+2$, $y=2x-4$

따라서

$a=\frac{1}{2}$, $b=2$, $c=2$, $d=-4$

이므로

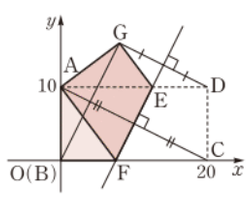
$a+b+c+d=\frac{1}{2}$ 답 ①

일품 BOX

$\overline{OA}=\overline{OD}=2x$, $\overline{OB}=\overline{OC}=x$

△ABC+△ACD =□ADCB

06 오른쪽 그림과 같이 두 직선 BF, AB를 각각 x축, y축으로 하는 좌표평면을 잡으면 점 B는 원점이고, 두 점 A$(0,\ 10)$, C$(20,\ 0)$은 직선 EF에 대하여 대칭이다.



직선 AC의 기울기가 $-\frac{1}{2}$이고 직선 AC와 직선 EF는 서로 수직이므로 직선 EF의 기울기는 2이다.

또 선분 AC의 중점 $(10,\ 5)$는 직선 EF 위의 점이므로 직선 EF의 방정식은

$y-5=2(x-10)$ $\therefore y=2x-15$

이때 G$(a,\ b)$라 하면 두 점 D$(20,\ 10)$, G$(a,\ b)$는 직선 $y=2x-15$에 대하여 대칭이므로 직선 DG의 기울기는 $-\frac{1}{2}$이다.

즉 $\frac{b-10}{a-20}=-\frac{1}{2}$이므로

$a+2b=40$ …… ㉠

또 선분 DG의 중점 $\left(\frac{20+a}{2},\ \frac{10+b}{2}\right)$는 직선 $y=2x-15$ 위의 점이므로

$\frac{10+b}{2}=2\cdot\frac{20+a}{2}-15$

$\therefore 2a-b=0$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=8$, $b=16$

따라서 G$(8,\ 16)$이므로

$\overline{BG}=\sqrt{8^2+16^2}=8\sqrt{5}$ 답 ④

직선 $y=2x-1$과 직선 AC의 교점을 M이라 하면 △APM≡△CPM (SAS 합동)이므로 $\overline{PA}=\overline{PC}$ 마찬가지 방법으로 $\overline{PB}=\overline{PD}$

이등변삼각형의 밑변의 수직이등분선은 이등변삼각형의 꼭지각을 지난다.

두 점 A$(0,\ 10)$, C$(20,\ 0)$을 지나는 직선의 기울기는 $\frac{0-10}{20-0}=-\frac{1}{2}$

$\left(\frac{0+20}{2},\ \frac{10+0}{2}\right)$

만점 도전을 위한 실전 마무리 문제

본책 115~118쪽

01 전략 선분 PQ를 3 : 4로 내분하는 점의 좌표를 m, n에 대한 식으로 나타낸 후 그 좌표가 6과 같음을 이용한다.

풀이 $\overline{AB}$를 $m:n$으로 내분하는 점과 외분하는 점이 각각 P, Q이므로

$P\left(\frac{6m+2n}{m+n}\right)$, $Q\left(\frac{6m-2n}{m-n}\right)$

점 B가 $\overline{PQ}$를 3 : 4로 내분하므로

$\frac{1}{3+4}\left(3\cdot\frac{6m-2n}{m-n}+4\cdot\frac{6m+2n}{m+n}\right)=6$

$\frac{9m-3n}{m-n}+\frac{12m+4n}{m+n}=21$

$(9m-3n)(m+n)+(12m+4n)(m-n)$
$=21(m-n)(m+n)$

$7n^2-mn=0$, $n(7n-m)=0$

$n>0$이므로 $7n-m=0$ $\therefore 7n=m$

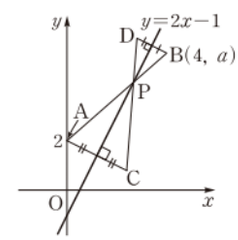
$\therefore m:n=7:1$

따라서 $m=7$, $n=1$이므로 $m+n=8$ 답 ④

만일 $m=14$, $n=2$이면 m, n이 서로소라는 조건을 만족시키지 않는다.

02 전략 직선 l에 대하여 두 점 S, T가 대칭이면 직선 l이 $\overline{ST}$의 수직이등분선임을 이용한다.

풀이 두 삼각형 APC, BPD는 각각 $\overline{PA}=\overline{PC}$, $\overline{PB}=\overline{PD}$인 이등변삼각형이고 직선 $y=2x-1$이 이 두 삼각형의 밑변의 수직이등분선이므로 직선 $y=2x-1$은 점 P를 지난다.



이때 두 직선 AC, BD는 직선 $y=2x-1$과 각각 수직이므로 두 직선 AC, BD는 평행하다. 따라서 △APC∽△BPD이고 두 삼각형 APC, BPD의 넓이의 비가 4 : 1이므로 두 삼각형의 닮음비는 2 : 1이다.

$\therefore \overline{AP}:\overline{BP}=2:1$

즉 점 P는 선분 AB를 2 : 1로 내분하는 점이므로 점 P의 좌표는

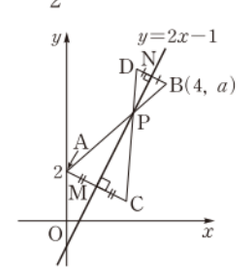
$\left(\frac{2\cdot 4+1\cdot 0}{2+1},\ \frac{2\cdot a+1\cdot 2}{2+1}\right)$ $\therefore \left(\frac{8}{3},\ \frac{2a+2}{3}\right)$

이때 점 P는 직선 $y=2x-1$ 위의 점이므로

$\frac{2a+2}{3}=2\cdot\frac{8}{3}-1$ $\therefore a=\frac{11}{2}$ 답 ④

이등변삼각형의 밑변의 수직이등분선은 이등변삼각형의 꼭지각을 지난다.

다른 풀이 오른쪽 그림과 같이 직선 $y=2x-1$과 두 직선 AC, BD의 교점을 각각 M, N이라 하면 △APM∽△BPN이고 두 삼각형 APM, BPN의 넓이의 비가 4 : 1이므로 두 삼각형의 닮음비는 2 : 1이다.



두 삼각형 APC, BPD의 넓이의 비가 4 : 1이고 △APM$=\frac{1}{2}$△APC, △BPN$=\frac{1}{2}$△BPD 이므로 두 삼각형 APM, BPN의 넓이의 비도 4 : 1이다.

ⓒ좋은책신사고

따라서 $\overline{AM}:\overline{BN}=2:1$이고, $\overline{AM}$, $\overline{BN}$의 길이는 각각 두 점 A, B와 직선 $y=2x-1$, 즉 $2x-y-1=0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|-2-1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}:\frac{|8-a-1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=2:1$$

$$\frac{2|7-a|}{\sqrt{5}}=\frac{3}{\sqrt{5}}$$

$$|7-a|=\frac{3}{2}$$

그런데 $a<7$에서 $7-a>0$이므로

$$7-a=\frac{3}{2} \qquad \therefore a=\frac{11}{2}$$

03 전략 직선 l이 x축, y축과 만나는 두 점과 원점을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 무게중심의 좌표가 $(2, 1)$임을 이용한다.

풀이 직선 l이 x축, y축과 만나는 점을 각각 $A(a, 0)$, $B(0, b)$라 하자. 원점 O에 대하여 △OAB의 무게중심의 좌표가 $(2, 1)$이므로

$$\frac{0+a+0}{3}=2,\ \frac{0+0+b}{3}=1$$

$$\therefore a=6,\ b=3$$

따라서 직선 l의 방정식이 $\frac{x}{6}+\frac{y}{3}=1$, 즉

$y=-\frac{1}{2}x+3$이므로 직선 l의 기울기는 $-\frac{1}{2}$이다.

답 ①

04 전략 점 A를 지나고 직선 l과 수직인 직선의 방정식을 k를 사용하여 나타낸다.

풀이 $kx+y-2k+1=0$에서

$$y=-kx+2k-1$$

$x=0$일 때 $y=2k-1$이므로

$$A(0,\ 2k-1)$$

또 직선 l의 기울기는 $-k$이므로 점 A를 지나고 직선 l과 수직인 직선의 방정식은

$$y=\frac{1}{k}x+2k-1 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

㉠에서 $y=0$일 때 $0=\frac{1}{k}x+2k-1$이므로 직선 ㉠의 x절편은

$$x=-k(2k-1)=-2k^2+k$$

$$=-2\left(k-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{1}{8}$$

따라서 $k=\frac{1}{4}$일 때 직선 ㉠의 x절편은 최댓값 $\frac{1}{8}$을 갖는다.

답 ②

05 전략 정삼각형의 넓이가 최소일 때는 한 변의 길이가 최소일 때임을 이용한다.

풀이 정삼각형 ABC의 넓이가 최소가 되기 위해서는 $\overline{AB}$의 길이가 최소가 되어야 한다.

그런데 두 직선 $y=x+3$, $y=x-1$은 평행하고 두 점 A, B는 각각 두 직선 위의 점이므로 선분 AB의 길이의 최솟값은 두 직선 $y=x+3$, $y=x-1$ 사이의 거리와 같다.

직선 $y=x+3$ 위의 한 점 $(0, 3)$과 직선 $y=x-1$, 즉 $x-y-1=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|-3-1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=2\sqrt{2}$$

이므로 △ABC의 넓이의 최솟값은

$$\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot(2\sqrt{2})^2=2\sqrt{3}$$

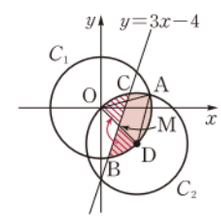
답 ③

06 전략 직선 l이 두 원의 중심을 잇는 선분의 중점을 지남을 이용한다.

풀이 원 C_2의 중심을 D라 하고 선분 OD의 중점을 M이라 하면 점 M의 좌표는

$$\left(\frac{0+2}{2},\ \frac{0-2}{2}\right) \qquad \therefore (1,\ -1)$$

직선 $y=3x-4$는 점 M을 지나므로 구하는 넓이는 오른쪽 그림에서 선분 OD와 두 호 AO, AD로 둘러싸인 부분의 넓이와 같다.



이때 두 원 C_1, C_2는 서로의 중심을 지나므로 삼각형 AOD는 정삼각형이다.

따라서 구하는 넓이는

(부채꼴 AOD의 넓이)+(부채꼴 ADO의 넓이)

$-$△AOD

$$=2\left(\pi\cdot 8\cdot\frac{60}{360}\right)-\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 8$$

$$=\frac{8}{3}\pi-2\sqrt{3}$$

답 ③

07 전략 주어진 방정식을 $(x-a)^2+(x-b)^2=r^2$ 꼴로 변형한 후 반지름의 길이를 k에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 $x^2+y^2+2kx+2(k-1)y+k=0$에서

$$(x+k)^2+\{y+(k-1)\}^2=2k^2-3k+1 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

원의 반지름의 길이는 0보다 커야 하므로

$$2k^2-3k+1>0$$

$$(2k-1)(k-1)>0$$

$$\therefore k<\frac{1}{2} \text{ 또는 } k>1 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

원 ㉠이 반지름의 길이가 $\sqrt{10}$보다 작은 원을 나타내려면

$$2k^2-3k+1<10$$

$$2k^2-3k-9<0$$

$$(2k+3)(k-3)<0$$

$$\therefore -\frac{3}{2}<k<3 \qquad \cdots\cdots ㉢$$

일품 BOX

$y=3x-4$에 $x=1$, $y=-1$을 대입하면 등식이 성립하므로 직선 $y=3x-4$는 점 $(1, -1)$을 지난다.

한 변의 길이가 a인 정삼각형에서

① 높이: $\frac{\sqrt{3}}{2}a$

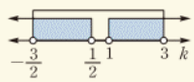
② 넓이: $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

따라서 ㉡, ㉢을 모두 만족시키는 k의 값의 범위는

$$-\frac{3}{2}<k<\frac{1}{2} \text{ 또는 } 1<k<3$$

이므로 구하는 정수 k는 -1, 0, 2의 3개이다. 답 ②

일품 BOX



08 전략 실수 k의 값에 관계없이 $f(x)+k\cdot g(x)=0$이 성립하면 $f(x)=0$, $g(x)=0$임을 이용한다.

풀이 $x^2+y^2+kx+2ky+3k-9=0$에서

$$(x^2+y^2-9)+k(x+2y+3)=0 \quad \cdots\cdots ㉠$$

원 ㉠은 실수 k의 값에 관계없이 항상 원 $x^2+y^2=9$와 직선 $x+2y+3=0$의 교점을 지난다.

따라서 구하는 선분 AB의 길이는 직선 $x+2y+3=0$이 원 $x^2+y^2=9$에 의하여 잘린 선분의 길이와 같다.

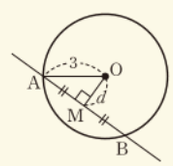
원 $x^2+y^2=9$의 중심 $(0,\ 0)$과 직선 $x+2y+3=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|3|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{3}{\sqrt{5}}$$

이고, 원의 반지름의 길이는 3이므로

$$\overline{AB}=2\sqrt{3^2-\left(\frac{3}{\sqrt{5}}\right)^2}=2\sqrt{\frac{36}{5}}=\frac{12\sqrt{5}}{5}$$

답 ④



$\overline{AB}=2\overline{AM}=2\sqrt{3^2-d^2}$

09 전략 $\angle TPT'=60°$일 때의 점 P의 자취를 그려 본다.

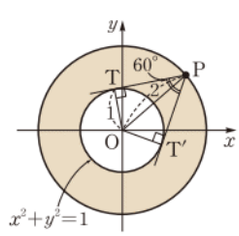
풀이 원 $x^2+y^2=1$의 중심을 O라 할 때, 점 P에서 원 $x^2+y^2=1$에 그은 두 접선이 이루는 각의 크기가 $60°$이면 $\triangle PTO$는 $\angle T=90°$, $\angle OPT=30°$인 직각삼각형이다.

$\angle OPT=\angle OPT'$

이때 $\sin 30°=\frac{\overline{OT}}{\overline{OP}}$이므로

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{\overline{OP}} \qquad \therefore \overline{OP}=2$$

즉 $\angle TPT'=60°$일 때, 점 P는 중심이 원점이고 반지름의 길이가 2인 원 위에 있으므로 $\angle TPT'$의 크기가 $60°$ 이상일 때, 점 P가 존재하는 부분은 오른쪽 그림의 색칠한 부분과 같다.



따라서 구하는 넓이는

$$4\pi-\pi=3\pi$$

답 ②

10 전략 원 $x^2+y^2=r^2\ (r>0)$에 접하고 기울기가 m인 직선의 방정식은 $y=mx\pm r\sqrt{m^2+1}$임을 이용한다.

풀이 기울기가 -3인 접선의 방정식은

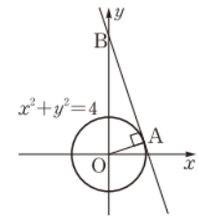
$$y=-3x\pm2\sqrt{(-3)^2+1}$$

$$\therefore y=-3x\pm2\sqrt{10}$$

이때 제1사분면 위의 점 A를 지나는 접선의 방정식은

$$y=-3x+2\sqrt{10}$$

따라서 오른쪽 그림에서 $\overline{OA}=2$, $\overline{OB}=2\sqrt{10}$이므로 직각삼각형 OAB에서

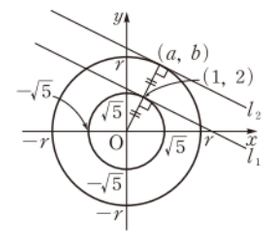


$$\overline{AB}=\sqrt{(2\sqrt{10})^2-2^2}$$
$$=6$$

답 ③

11 전략 원점을 중심으로 하는 두 원의 접선 l_1, l_2 사이의 거리가 $\sqrt{5}$임을 이용하여 r의 값을 구한다.

풀이 두 직선 l_1, l_2 사이의 거리가 $\sqrt{5}$이므로 오른쪽 그림과 같이 점 $(a,\ b)$는 제1사분면 위에 있고



$$r=\sqrt{5}+\sqrt{5}=2\sqrt{5}$$

이다.

따라서 점 $(a,\ b)$는 원 $x^2+y^2=20$ 위의 점이므로

$$a^2+b^2=20 \quad \cdots\cdots ㉠$$

한편 두 직선 l_1, l_2의 방정식은 각각

$$x+2y=5,\ ax+by=20$$

이고, 두 직선이 평행하므로

$$\frac{1}{a}=\frac{2}{b}\neq\frac{5}{20}$$

$$\therefore b=2a\ (a\neq4) \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉡을 ㉠에 대입하면 $a^2+4a^2=20$

$$a^2=4 \qquad \therefore a=\pm2$$

그런데 점 $(a,\ b)$는 제1사분면 위의 점이므로

$$a=2,\ b=4 \qquad \therefore a+b=6$$

답 ⑤

12 전략 공의 그림자가 나타내는 도형은 원임을 이용한다.

풀이 전등을 점 A, 공이 바닥과 닿은 점을 점 O라 하고, 공의 그림자인 원의 한 지름의 양 끝 점을 B, C라 하자.

빛이 수직으로 공의 중심을 지나므로 그림자는 원이다.

오른쪽 그림과 같이 직선 BC를 x축으로 하고 점 O를 지나고 직선 BC에 수직인 직선을 y축으로 하는 좌표평면을 잡으면 점 O는 원점이고, 점 A는 y축 위의 점이다. 1 m를 1로 생각하면 A$(0,\ 10)$이고 공의 중심의 좌표는 $(0,\ 1)$이므로 직선 AB의 방정식을

$$y=mx+10\ (m>0)$$

이라 하면 점 $(0,\ 1)$에서 직선 $y=mx+10$, 즉 $mx-y+10=0$까지의 거리가 원의 반지름의 길이인 1과 같아야 한다. 즉

$$\frac{|-1+10|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=1, \qquad \sqrt{m^2+1}=9$$

$$m^2+1=81, \qquad m^2=80$$

$$\therefore m=4\sqrt{5}\ (\because m>0)$$

따라서 직선 AB의 방정식은 $y=4\sqrt{5}x+10$이므로 점 B의 x좌표는 $y=0$일 때,

$$0=4\sqrt{5}x+10 \qquad \therefore x=-\frac{\sqrt{5}}{2}$$

공의 그림자는 반지름의 길이가 $\frac{\sqrt{5}}{2}$ m인 원이므로 구하는 넓이는 $\pi\cdot\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2=\frac{5}{4}\pi(\mathrm{m}^2)$ 답 ②

1등급 비밀노트

좌표를 이용하여 활용 문제를 해결할 때는 먼저 도형의 한 변이 좌표축 위에 오도록 도형을 좌표평면 위에 놓은 후, 도형의 꼭짓점에 해당하는 점의 좌표를 구하거나 미지수를 사용하여 나타내면 쉽게 해결할 수 있다.

13 전략 원을 대칭이동한 후 평행이동한 도형의 방정식을 구하고, 그 원이 x축과 y축에 접할 때의 중심의 좌표의 조건을 이용한다.

풀이 원 $(x-a)^2+(y+3)^2=4$를 x축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$$(x-a)^2+(y-3)^2=4$$

이 원을 다시 y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 원의 방정식은

$$(x-a)^2+(y-2)^2=4$$

이때 원의 반지름의 길이가 2이므로 이 원이 x축과 y축에 모두 접하려면

$$|a|=2 \qquad \therefore a=2\ (\because a>0)$$ 답 ②

14 전략 보기에 주어진 식이 원 $f(x, y)=0$을 어떻게 이동한 원의 방정식인지 알아본다.

풀이 주어진 원이 x축, y축과 만나는 점을 각각 A, B라 하면 이 원은 세 점 O(0, 0), A(1, 0), B(0, 1)을 지난다. 이때 $\angle AOB=90°$이므로 원 $f(x, y)=0$은 두 점 A, B를 지름의 양 끝 점으로 하는 원이다.

ㄱ. 주어진 원을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 원이 주어진 원과 일치하므로

$$f(y, x)=0$$

ㄴ. 주어진 원을 원점에 대하여 대칭이동한 원이 주어진 원과 일치하지 않으므로

$$f(-x, -y)\neq 0$$

ㄷ. 주어진 원을 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 후 직선 $y=-x$에 대하여 대칭이동한 원이 주어진 원과 일치하므로

$$f(1-y, 1-x)=0$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

15 전략 직선 AH가 $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$의 수직이등분선임을 이용한다.

풀이 선분 AC′이 삼각형 ABC의 무게중심을 지나므로 점 C′은 변 BC의 중점이다.

$$\therefore C'(0, 1)$$

점 H는 선분 CC′의 중점이므로 점 H의 좌표는

$$\left(1, \frac{1}{2}\right)$$

직선 AH는 직선 CC′과 수직이고 직선 CC′의 기울기는 $\frac{1-0}{0-2}=-\frac{1}{2}$이므로 직선 AH의 방정식은

$$y-\frac{1}{2}=2(x-1) \qquad \therefore y=2x-\frac{3}{2}$$

점 A(3, a)가 직선 AH 위의 점이므로

$$a=2\cdot 3-\frac{3}{2}=\frac{9}{2}$$

한편 선분 BB′의 중점이 H이므로

$$\frac{-2+b}{2}=1,\ \frac{2+c}{2}=\frac{1}{2} \qquad \therefore b=4,\ c=-1$$

$$\therefore a+b+c=\frac{15}{2}$$ 답 ③

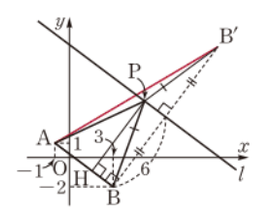
16 전략 $\overline{AB}$의 길이가 정해져 있으므로 점 P가 어느 직선 위에 있어야 하는지 생각해 본다.

풀이 $\overline{AB}=\sqrt{(3+1)^2+(-2-1)^2}=5$

점 P에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면 △ABP의 넓이가 15이므로

$$\frac{1}{2}\cdot 5\cdot\overline{PH}=15 \qquad \therefore \overline{PH}=6$$

따라서 오른쪽 그림과 같이 점 P는 직선 AB와 평행하고 직선 AB로부터의 거리가 6인 직선 l 위의 점이다. 점 B를 직선 l에 대하여 대칭이동한 점을 B′이라 하면 △ABP의 둘레의 길이는



$$\overline{AB}+\overline{AP}+\overline{BP}=\overline{AB}+\overline{AP}+\overline{B'P}\geq\overline{AB}+\overline{AB'}$$

이므로 점 P가 선분 AB′과 직선 l의 교점일 때 최소이다.

이때 $\overline{BB'}=12$이므로 직각삼각형 ABB′에서

$$\overline{AB'}=\sqrt{5^2+12^2}=13$$

$$\therefore \overline{AP}+\overline{BP}=\overline{AB'}=13$$ 답 ③

17 전략 무게중심의 좌표를 $y=px$에 대입하면 등식이 성립함을 이용한다.

풀이 △ABC의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{p-7}{3}, \frac{3-p^2}{3}\right)$$

이 점이 직선 $y=px$ 위에 있으므로

$$\frac{3-p^2}{3}=p\cdot\frac{p-7}{3}$$

$$3-p^2=p^2-7p, \qquad 2p^2-7p-3=0$$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$a=\frac{7}{2},\ b=-\frac{3}{2}$$

$$\therefore a+b=2$$ 답 2

일품 BOX

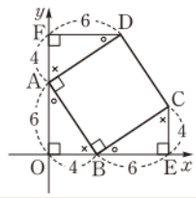
지름의 양 끝 점과 원 위의 한 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형은 직각삼각형이다.

원 $f(x, y)=0$을 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 원의 방정식은 $f(x+1, y+1)=0$ 이 원을 다시 직선 $y=-x$에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은 $f(-y+1, -x+1)=0$

삼각형의 무게중심은 세 중선의 교점이다.

18 전략 □ABCD가 정사각형임을 이용하여 두 점 C, D의 좌표를 구한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 두 점 C, D에서 x축, y축에 내린 수선의 발을 각각 E, F라 하면



$\triangle OAB \equiv \triangle EBC$
$\equiv \triangle FDA$

이므로

$\overline{OA}=\overline{EB}=\overline{FD}=6,\ \overline{OB}=\overline{EC}=\overline{FA}=4$

따라서 두 점 C, D의 좌표는

$C(10,\ 4),\ D(6,\ 10)$

점 M은 $\overline{BC}$의 중점이므로

$M\left(\frac{4+10}{2},\ \frac{0+4}{2}\right) \qquad \therefore M(7,\ 2)$

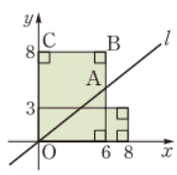
직선 DM의 방정식은

$y-2=\frac{2-10}{7-6}(x-7) \qquad \therefore y=-8x+58$

따라서 직선 DM의 y절편은 58이다. 답 58

19 전략 직선 l에 의하여 이등분된 부분 중 사다리꼴의 넓이를 k에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 오른쪽 그림에서 색칠한 부분의 넓이는



$6\cdot8+2\cdot3=54$

이므로 □OABC의 넓이는 27이다. ⋯ ❶

직선 l의 방정식은 $y=kx$이므로 점 A의 좌표는

$(6,\ 6k)$

□OABC의 넓이가 27이므로

$\frac{1}{2}\cdot\{8+(8-6k)\}\cdot6=27$

$16-6k=9 \qquad \therefore k=\frac{7}{6}$ ⋯ ❷

$\therefore 30k=30\cdot\frac{7}{6}=35$ ⋯ ❸

답 35

채점 기준	비율
❶ 색칠한 부분의 넓이를 이등분한 넓이를 구할 수 있다.	30 %
❷ k의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ $30k$의 값을 구할 수 있다.	20 %

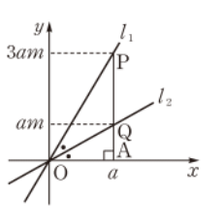
20 전략 두 조건을 모두 만족시키는 두 직선 l_1, l_2를 그리고, 삼각형의 내각의 이등분선의 성질을 이용한다.

풀이 두 직선 l_1과 l_2를

l_1: $y=3mx$,

l_2: $y=mx\ (m>0)$

라 하고, x축 위의 원점이 아닌 한 점을 $A(a,\ 0)\ (a>0)$이라 하자. 점 A를 지나고 x축에 수직인 직선이 두 직선 l_1, l_2와 만나는 점을 각각 P, Q라 하면



$P(a,\ 3am),\ Q(a,\ am)$ ⋯ ❶

조건 (나)에 의하여 $\angle POA=2\angle QOA$이므로 직선 OQ는 $\angle POA$의 이등분선이다.

즉 $\triangle OAP$에서 삼각형의 내각의 이등분선의 성질에 의하여

$\overline{OA}:\overline{OP}=\overline{AQ}:\overline{QP}$

$a:\sqrt{a^2+(3am)^2}=1:2$ ⋯ ❷

$\sqrt{a^2+(3am)^2}=2a$

$a^2+9a^2m^2=4a^2 \qquad \therefore m^2=\frac{1}{3}\ (\because a\neq0)$

$\therefore m=\frac{\sqrt{3}}{3}\ (\because m>0)$

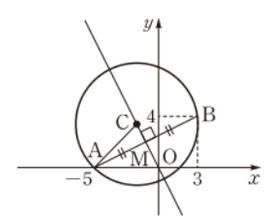
따라서 직선 l_1의 기울기는 $3\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}=\sqrt{3}$ ⋯ ❸

답 $\sqrt{3}$

채점 기준	비율
❶ 조건 (가)를 이용하여 x좌표가 같은 두 직선 l_1, l_2 위의 점을 잡을 수 있다.	30 %
❷ 조건 (나)를 이용하여 비례식을 세울 수 있다.	40 %
❸ 직선 l_1의 기울기를 구할 수 있다.	30 %

21 전략 두 점을 지나는 원의 반지름의 길이가 최소일 때의 원의 중심의 위치를 생각해 본다.

풀이 두 점 A, B를 지나는 원을 C라 하고 그 중심을 C라 하자.



선분 AB는 원 C의 현이고, 점 C에서 현에 내린 수선은 그 현을 이등분하므로 선분 AB의 중점을 M이라 하면 점 C는 점 M을 지나고 선분 AB에 수직인 직선 위에 존재한다.

이때 $\overline{AM}\le\overline{AC}$이므로 $\overline{AM}=\overline{AC}$일 때, 즉 점 M이 원의 중심 C일 때, 원 C의 반지름의 길이가 최소이다.

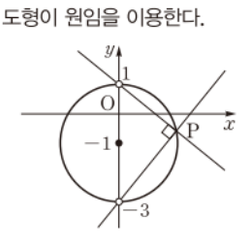
따라서 반지름의 길이의 최솟값 k는

$k=\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}\sqrt{(3+5)^2+4^2}=2\sqrt{5}$

이므로 $k^2=20$ 답 20

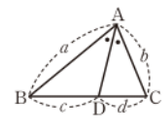
22 전략 두 직선의 y절편은 정해져 있고, 점 P는 수직인 두 직선의 교점이므로 점 P가 나타내는 도형이 원임을 이용한다.

풀이 주어진 두 직선의 기울기가 각각 m, $-\frac{1}{m}$이므로 두 직선은 서로 수직이다.



즉 점 P는 오른쪽 그림과 같이 두 점 $(0,\ 1)$, $(0,\ -3)$을 지름의 양 끝 점으로 하는 원 위의 점이다.

일품 BOX



△ABC에서 ∠BAD=∠CAD이면 $a:b=c:d$

$\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{DA}$, ∠OAB=∠EBC=∠FDA, ∠OBA=∠ECB=∠FAD ∴ △OAB≡△EBC≡△FDA (ASA 합동)

$\overline{AQ}:\overline{QP}=am:(3am-am)=am:2am=1:2$

두 점 A, B의 y좌표가 각각 $6k$, 8이므로 $\overline{AB}=8-6k$

원 C가 두 점 A, B를 지름의 양 끝 점으로 하는 원일 때

m의 값에 관계없이 직선 $y=mx+1$은 점 $(0,\ 1)$을, 직선 $y=-\frac{1}{m}x-3$은 점 $(0,\ -3)$을 항상 지난다.

ⓒ좋은책신사고

그런데 $m\neq0$이므로 $x=0$일 때에는 조건을 만족시키는 점 P가 존재하지 않는다.

따라서 점 P가 나타내는 도형은 중심이

$$\left(0,\ \frac{1-3}{2}\right),\ \text{즉 } (0,\ -1)$$

이고 반지름의 길이가 2인 원에서 $x=0$인 점이 빠진 도형이므로 그 방정식은

$$x^2+(y+1)^2=4\ (x\neq0)$$

답 $x^2+(y+1)^2=4\ (x\neq0)$

일품 BOX

$y=mx+1$,

$y=-\frac{1}{m}x-3$에서

$mx+1=-\frac{1}{m}x-3$

$\left(m+\frac{1}{m}\right)x=-4$

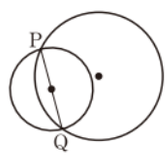
$\frac{m^2+1}{m}x=-4$

$\therefore x=-\frac{4m}{m^2+1}$

따라서 $m\neq0$이면 $x\neq0$이다.

23 전략 $\overline{PQ}$가 원 $x^2+y^2=5$의 지름일 때 $\overline{PQ}$의 길이가 최대임을 이용한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 두 원의 공통인 현 PQ가 원 $x^2+y^2=5$의 지름일 때 선분 PQ의 길이가 최대이므로 직선 PQ가 원 $x^2+y^2=5$의 중심 $(0,\ 0)$을 지나야 한다. ··· ❶



직선 PQ의 방정식은

$$(x-k)^2+(y+2)^2-10-(x^2+y^2-5)=0$$

$$\therefore\ -2kx+4y+k^2-1=0 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

직선 ㉠이 점 $(0,\ 0)$을 지나야 하므로

$$k^2-1=0,\qquad k^2=1$$

$$\therefore\ k=\pm1$$ ··· ❷

따라서 모든 실수 k의 값의 곱은

$$-1\cdot1=-1$$ ··· ❸

답 -1

채점 기준	비율
❶ 직선 PQ가 원 $x^2+y^2=5$의 중심을 지남을 알 수 있다.	30 %
❷ k의 값을 모두 구할 수 있다.	60 %
❸ 모든 실수 k의 값의 곱을 구할 수 있다.	10 %

24 전략 두 직선 사이의 거리가 원의 지름의 길이와 같음을 이용한다.

풀이 두 직선 $4x-3y+a=0$, $4x-3y+b=0$은 평행하고 한 원에 동시에 접하므로 두 직선 사이의 거리는 원의 지름의 길이와 같다.

직선 $4x-3y+a=0$ 위의 한 점 $\left(0,\ \frac{a}{3}\right)$와 직선 $4x-3y+b=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|-a+b|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\frac{|a-b|}{5}$$

원의 넓이가 4π이면 반지름의 길이가 2이므로

$$\frac{|a-b|}{5}=2\cdot2$$

$$\therefore\ |a-b|=20$$

$$\therefore\ a^2+b^2=|a-b|^2+2ab$$
$$=20^2+2\cdot(-84)$$
$$=232$$

답 232

25 전략 도형 $f(x+3,\ y-1)=0$을 도형 $f(x,\ y)=0$으로 옮기는 평행이동을 구한다.

풀이 도형 $f(x+3,\ y-1)=0$을 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동하면 도형 $f(x,\ y)=0$으로 옮겨진다.

따라서 점 $(-1,\ 3)$을 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동하면 점 $(a,\ b)$로 옮겨지므로

$$-1+3=a,\ 3-1=b$$

$$\therefore\ a=2,\ b=2$$

$$\therefore\ a+b=4$$

답 4

26 전략 직선 $y=mx$가 원 C의 넓이를 이등분하므로 직선 $y=mx$가 원 C의 중심을 지남을 이용한다.

풀이 원 $x^2+(y-7)^2=9$의 중심의 좌표가 $(0,\ 7)$이므로 원 C의 중심의 좌표는

$$(n,\ n+12)$$

직선 $y=mx$가 원 C의 중심 $(n,\ n+12)$를 지나므로

$$n+12=mn \qquad \therefore\ m=\frac{n+12}{n}$$

$m=5$일 때, $5=\frac{n+12}{n}$에서 $\quad n=3$

$m=4$일 때, $4=\frac{n+12}{n}$에서 $\quad n=4$

$m=3$일 때, $3=\frac{n+12}{n}$에서 $\quad n=6$

$m=2$일 때, $2=\frac{n+12}{n}$에서 $\quad n=12$

$m=1$일 때, $1=\frac{n+12}{n}$를 만족시키는 n의 값은 없다.

$1=\frac{n+12}{n}$에서

$n=n+12$

$\therefore\ 0=12$

따라서 모순이다.

따라서 구하는 모든 자연수 n의 값의 합은

$$3+4+6+12=25$$

답 25

27 전략 두 포물선의 꼭짓점이 점 $(a,\ b)$에 대하여 대칭임을 이용한다.

풀이 포물선 $y=x^2-2x=(x-1)^2-1$의 꼭짓점을 A라 하면 $\quad A(1,\ -1)$

포물선 $y=-x^2+6x-4=-(x-3)^2+5$의 꼭짓점을 B라 하면 $\quad B(3,\ 5)$ ··· ❶

두 포물선이 점 $(a,\ b)$에 대하여 대칭이므로 포물선의 꼭짓점도 점 $(a,\ b)$에 대하여 대칭이다.

따라서 선분 AB의 중점이 점 $(a,\ b)$이므로

$$a=\frac{1+3}{2}=2,\ b=\frac{-1+5}{2}=2$$ ··· ❷

$$\therefore\ a+b=4$$ ··· ❸

답 4

채점 기준	비율
❶ 두 포물선의 꼭짓점의 좌표를 각각 구할 수 있다.	40 %
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	10 %

28 전략 도형 $f(x, y)=0$을 y축에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은 $f(x, y)=0$에 x 대신 $-x$를 대입한 식임을 이용한다.

풀이 두 점 O(0, 0), A($\sqrt{3}$, 3)을 지나는 직선 l의 방정식은 $y=\sqrt{3}x$이므로 직선 m의 방정식은

$y=-\sqrt{3}x$ ··· ❶

P(a, b) ($a>0$, $b>0$, $a\neq\sqrt{3}$, $b\neq3$)라 하면

$$\overline{PL}=\frac{|\sqrt{3}a-b|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}}=\frac{|\sqrt{3}a-b|}{2},$$

$$\overline{PM}=\frac{|\sqrt{3}a+b|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}}=\frac{|\sqrt{3}a+b|}{2},$$

$\overline{PN}=b$

$$\therefore \overline{PL}^2+\overline{PM}^2+\overline{PN}^2$$
$$=\frac{3a^2-2\sqrt{3}ab+b^2}{4}+\frac{3a^2+2\sqrt{3}ab+b^2}{4}+b^2$$
$$=\frac{3}{2}(a^2+b^2)$$ ··· ❷

이때 $a^2+b^2=12$이므로

$$\overline{PL}^2+\overline{PM}^2+\overline{PN}^2=\frac{3}{2}\cdot12=18$$ ··· ❸

답 18

채점 기준	비율
❶ 두 직선 l, m의 방정식을 구할 수 있다.	30 %
❷ $\overline{PL}^2+\overline{PM}^2+\overline{PN}^2$의 값을 점 P의 좌표를 이용하여 나타낼 수 있다.	50 %
❸ $\overline{PL}^2+\overline{PM}^2+\overline{PN}^2$의 값을 구할 수 있다.	20 %

최상위로 가는 최고 수준 문제

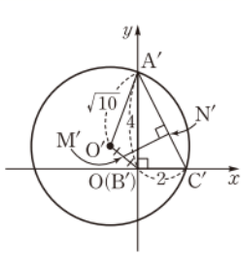
본책 119쪽

01

해결 단계

❶ 점 B를 원점으로 하는 새로운 좌표평면에 주어진 원을 놓았을 때, 두 점 A, C가 옮겨지는 두 점 A′, C′의 좌표를 구한다.
❷ 새로운 좌표평면에 놓인 원의 중심 O′의 좌표를 구한 후 $\overline{O'B'}$의 길이를 구한다.
❸ 직선 A′C′의 방정식과 점 M′의 좌표를 이용하여 $\overline{M'N'}$의 길이를 구한다.
❹ $\overline{OB}\times\overline{MN}$의 값을 구한다.

풀이 ❶ 두 직선 BC, BA를 각각 x축, y축으로 하는 새로운 좌표평면을 잡았을 때, 오른쪽 그림과 같이 점 A, B, C, M, N, O가 옮겨지는 점을 각각 점 A′, B′, C′, M′, N′, O′이라 하면



B′(0, 0), A′(0, 4), C′(2, 0)이다.

❷ 새로운 좌표평면에 놓인 원의 중심 O′의 좌표를 (a, b)라 하면 원의 방정식은

$(x-a)^2+(y-b)^2=10$ ····· ㉠

원 ㉠이 점 A′(0, 4)를 지나므로

$a^2+b^2-8b+6=0$ ····· ㉡

또 원 ㉠이 점 C′(2, 0)을 지나므로

$a^2+b^2-4a-6=0$ ····· ㉢

㉡−㉢을 하면 $4a-8b+12=0$ $\therefore a=2b-3$

이것을 ㉡에 대입하면

$(2b-3)^2+b^2-8b+6=0$

$b^2-4b+3=0$, $(b-1)(b-3)=0$

$\therefore b=1$ 또는 $b=3$

$b=1$이면 $a=2\cdot1-3=-1$

$b=3$이면 $a=2\cdot3-3=3$

그런데 점 (a, b)는 제2사분면 위의 점이므로

$a=-1$, $b=1$

즉 O′(−1, 1)이므로 $\overline{O'B'}=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$

❸ 선분 O′B′의 중점 M′의 좌표는 $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$이고, 직선 A′C′의 방정식은 $2x+y-4=0$이므로

$$\overline{M'N'}=\frac{\left|2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}-4\right|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{9\sqrt{5}}{10}$$

❹ $\therefore \overline{OB}\times\overline{MN}=\overline{O'B'}\times\overline{M'N'}$

$$=\sqrt{2}\cdot\frac{9\sqrt{5}}{10}=\frac{9\sqrt{10}}{10}$$

답 ⑤

02

해결 단계

❶ 두 점 A, B를 지나는 직선의 방정식을 구한다.
❷ 현 AB의 중점을 M이라 하고, $\overline{OM}$, $\overline{AM}$, $\overline{TO}$의 길이를 구한다.
❸ 피타고라스 정리를 이용하여 a^2+4a의 값을 구한다.

풀이 ❶ A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)라 하면 두 점 A, B에서의 접선의 방정식은

$x_1x+y_1y=5$, $x_2x+y_2y=5$

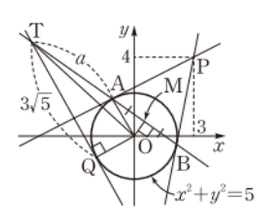
두 접선은 모두 점 P(3, 4)를 지나므로

$3x_1+4y_1=5$, $3x_2+4y_2=5$

따라서 두 점 A, B를 지나는 직선의 방정식은

$3x+4y=5$

❷ 오른쪽 그림과 같이 현 AB의 중점을 M이라 하면 원의 중심 O(0, 0)과 직선 $3x+4y-5=0$ 사이의 거리는



$$\overline{OM}=\frac{|-5|}{\sqrt{3^2+4^2}}=1$$

이고, $\overline{OA}=\sqrt{5}$이므로 직각삼각형 AOM에서

$\overline{AM}=\sqrt{(\sqrt{5})^2-1^2}=2$

또 직각삼각형 TQO에서

$\overline{TO}=\sqrt{(3\sqrt{5})^2+(\sqrt{5})^2}=5\sqrt{2}$

❸ 직각삼각형 TOM에서

$(5\sqrt{2})^2=(a+2)^2+1^2$ $\therefore a^2+4a=45$

답 45

일품 BOX

두 점 A′, C′을 지나고 반지름의 길이가 $\sqrt{10}$인 원은 중심이 점 (−1, 1)인 원과 중심이 점 (3, 3)인 원의 두 개이다.

점 P(a, b)가 원 $x^2+y^2=12$ 위의 점이므로

$a^2+b^2=12$

x절편이 2, y절편이 4이므로

$\frac{x}{2}+\frac{y}{4}=1$

$\therefore 2x+y-4=0$

03

해결 단계

❶ $\frac{b+d}{a+c}$의 값이 점 P와 점 Q를 원점에 대하여 대칭이동한 점 Q′을 지나는 직선의 기울기임을 안다.
❷ $\frac{b+d}{a+c}$의 값이 최대일 때와 최소일 때가 어떤 경우인지 생각해 본다.
❸ $\frac{b+d}{a+c}$의 최댓값과 최솟값의 합을 구한다.

풀이 ❶ $x^2+y^2-6x-10y+30=0$에서

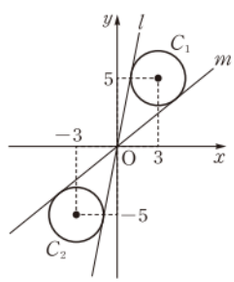
$(x-3)^2+(y-5)^2=4$

$\frac{b+d}{a+c}=\frac{b-(-d)}{a-(-c)}$이므로 $Q'(-c,\ -d)$라 하면

$\frac{b+d}{a+c}$의 값은 두 점 P, Q′을 지나는 직선의 기울기이다.

이때 점 $Q'(-c,\ -d)$는 점 $Q(c,\ d)$를 원점에 대하여 대칭이동한 점이므로 점 Q′은 원 $(x+3)^2+(y+5)^2=4$ 위의 점이다.

❷ C_1: $(x-3)^2+(y-5)^2=4$,
C_2: $(x+3)^2+(y+5)^2=4$
라 하면 오른쪽 그림에서 $\frac{b+d}{a+c}$의 최댓값과 최솟값은 각각 직선 l의 기울기와 직선 m의 기울기와 같다.



두 직선 l, m은 두 원 C_1, C_2에 동시에 접한다.

❸ 이때 두 직선 l, m은 원점을 지나므로 원 $(x-3)^2+(y-5)^2=4$에 접하는 직선의 방정식을 $y=kx$라 하면 원의 중심 $(3,\ 5)$와 직선 $kx-y=0$ 사이의 거리는 원의 반지름의 길이인 2이다.

즉

$$\frac{|3k-5|}{\sqrt{k^2+(-1)^2}}=2$$

$$|3k-5|=2\sqrt{k^2+1}$$

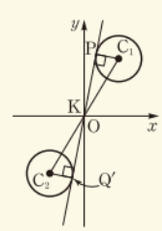
$$(3k-5)^2=4(k^2+1)$$

$$\therefore 5k^2-30k+21=0 \quad \cdots\cdots ㉠$$

따라서 두 직선 l, m의 기울기는 각각 이차방정식 ㉠의 두 근 중 큰 값과 작은 값이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 두 직선 l, m의 기울기의 합은

$$-\frac{-30}{5}=6$$

즉 $\frac{b+d}{a+c}$의 최댓값과 최솟값의 합은 6이다. 답 6



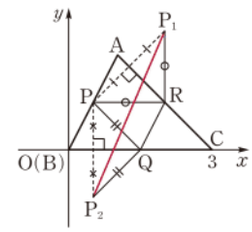
두 직선 C_1C_2, PQ′의 교점을 K라 하면
$\triangle PKC_1 \equiv \triangle Q'KC_2$
이므로 $\overline{C_1K}=\overline{C_2K}$
따라서 직선 PQ′은 $\overline{C_1C_2}$의 중점을 지난다. 그런데 두 점 C_1, C_2는 원점에 대하여 대칭이므로 $\overline{C_1C_2}$의 중점은 원점이다. 즉 직선 PQ′은 원점을 지난다.

04

해결 단계

❶ 점 B를 원점으로 하는 좌표평면을 잡았을 때, 점 A의 좌표를 구한다.
❷ 점 P를 직선 AC, x축에 대하여 각각 대칭이동한 두 점의 좌표를 같은 문자를 사용하여 나타낸다.
❸ 삼각형 PQR의 둘레의 길이가 최소인 경우를 찾아 그 최솟값을 구한다.

풀이 ❶ 오른쪽 그림과 같이 직선 BC를 x축으로 하고 점 B를 지나고 직선 BC에 수직인 직선을 y축으로 하는 좌표평면을 잡으면 점 B는 원점이다.



C(3, 0)이고, 점 A의 좌표를 $(\alpha,\ \beta)$ $(\alpha>0,\ \beta>0)$라 하면

$\overline{AB}^2=5$에서 $\alpha^2+\beta^2=5$ $\cdots\cdots ㉠$

$\overline{AC}^2=8$에서 $(3-\alpha)^2+(-\beta)^2=8$

$\therefore \alpha^2+\beta^2-6\alpha=-1$ $\cdots\cdots ㉡$

㉠−㉡을 하면 $6\alpha=6$ $\therefore \alpha=1$

㉠에 $\alpha=1$을 대입하여 풀면 $\beta=2$ $(\because \beta>0)$

$\therefore A(1,\ 2)$

❷ 직선 AB의 방정식은 $y=2x$이므로 점 P를 $P(a,\ 2a)$ $(0<a<1)$라 하자.

직선 AC의 방정식은 $y=\frac{0-2}{3-1}(x-3)$, 즉

$y=-x+3$이므로 점 P를 직선 AC에 대하여 대칭이동한 점을 $P_1(c,\ d)$라 하면 $\overline{AC}\perp\overline{PP_1}$에서

$$\frac{d-2a}{c-a}=1, \quad d-2a=c-a$$

$$\therefore d-c=a \quad \cdots\cdots ㉢$$

$\overline{PP_1}$의 중점 $\left(\frac{a+c}{2},\ \frac{2a+d}{2}\right)$가 직선 AC 위의 점이므로

$$\frac{2a+d}{2}=-\frac{a+c}{2}+3$$

$$2a+d=-a-c+6$$

$$\therefore d+c=-3a+6 \quad \cdots\cdots ㉣$$

㉢−㉣을 하면 $-2c=4a-6$

$\therefore c=-2a+3$

㉢+㉣을 하면 $2d=-2a+6$

$\therefore d=-a+3$

$\therefore P_1(-2a+3,\ -a+3)$

또 점 P를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 P_2라 하면

$P_2(a,\ -2a)$

❸ 이때 $\overline{RP}=\overline{RP_1}$, $\overline{QP}=\overline{QP_2}$이므로 삼각형 PQR의 둘레의 길이는 $\overline{RP_1}+\overline{RQ}+\overline{QP_2}$의 값과 같다.

$$\begin{aligned}\therefore \overline{RP_1}+\overline{RQ}+\overline{QP_2} &\geq \overline{P_1P_2}\\ &=\sqrt{(a+2a-3)^2+(-2a+a-3)^2}\\ &=\sqrt{(3a-3)^2+(-a-3)^2}\\ &=\sqrt{10a^2-12a+18}\\ &=\sqrt{10\left(a-\frac{3}{5}\right)^2+\frac{72}{5}}\ (0<a<1)\end{aligned}$$

따라서 삼각형 PQR의 둘레의 길이의 최솟값은

$\sqrt{\frac{72}{5}}$, 즉 $\frac{6\sqrt{10}}{5}$ 답 ①