일품 기하와 벡터

정답 및 풀이

Ⅰ 평면 곡선

01 이차곡선

개념 & 기출 유형 본책 8쪽 ~ 11쪽

001 ④ 002 $\frac{3}{2}$ 003 ④ 004 9 005 13
006 4 007 ③ 008 ④ 009 12 010 12
011 ④ 012 $20\sqrt{21}$ 013 -56 014 ④ 015 $\frac{7}{2}$
016 ④ 017 ④ 018 280 019 $\frac{1}{2}$ 020 8
021 ③ 022 ② 023 ③ 024 ①

내신 1등급 도전하기 본책 12쪽 ~ 15쪽

025 96 026 ③ 027 ⑤ 028 ④ 029 169
030 11 031 ⑤ 032 $8\sqrt{2}$ 033 ① 034 153
035 ② 036 24 037 ③ 038 16 039 30
040 $\frac{40}{41}$ 041 ③ 042 6 043 ② 044 $\frac{7}{2}$
045 ③ 046 7 047 9 048 ④ 049 ③
050 ①

수능 따라잡기 본책 16쪽

051 72 052 3 053 ② 054 ④ 055 ①
056 24

02 평면 곡선의 접선

개념 & 기출 유형 본책 17쪽 ~ 20쪽

057 ② 058 36 059 ① 060 ③ 061 9
062 ③ 063 ② 064 4 065 ③ 066 ③
067 ④ 068 3 069 ③ 070 $\frac{17}{5}$ 071 ⑤
072 ④ 073 1 074 ③ 075 ⑤
076 $4+2\sqrt{10}$ 077 ② 078 ② 079 $\sqrt{3}$
080 ②

내신 1등급 도전하기 본책 21쪽 ~ 24쪽

081 ④ 082 ② 083 2 084 9 085 ②
086 ⑤ 087 -2 088 ③ 089 $\sqrt{17}$ 090 ③
091 ③ 092 ③ 093 ② 094 ④ 095 -2
096 $4\sqrt{2}$ 097 ③ 098 8 099 $\sqrt{5}$ 100 ⑤
101 $\frac{51}{10}$ 102 ③ 103 $-\frac{1}{2}$ 104 ④ 105 ①

수능 따라잡기 본책 25쪽

106 ⑤ 107 128 108 ⑤ 109 ③ 110 14
111 8

1등급 완성하기 본책 26쪽 ~ 30쪽

112 ① 113 2 114 ④ 115 ⑤ 116 $4\sqrt{3}$
117 ④ 118 20 119 68 120 $\frac{9}{2}$ 121 $\sqrt{3}$
122 ② 123 26 124 $8\sqrt{2}$ 125 16 126 12
127 -5 128 ③ 129 ① 130 ② 131 15
132 26 133 $\sqrt{10}$ 134 ② 135 ③ 136 47
137 ④ 138 9 139 $2\sqrt{6}$ 140 ② 141 ③
142 17 143 ④ 144 20π

Ⅱ 평면벡터

03 벡터의 연산

개념 & 기출 유형 본책 32쪽 ~ 33쪽

145 6 146 5 147 16 148 ⑤ 149 ②
150 ④ 151 ② 152 4 153 9 154 32
155 ③

내신1등급 도전하기

본책 34쪽 ~ 36쪽

156 12	157 ③	158 ④	159 ⑤	160 ⑤
161 1	162 $\frac{5}{3}$	163 ①	164 $-\frac{1}{3}$	165 ⑤
166 0	167 $\frac{\sqrt{2}}{5}$	168 ①	169 ②	170 2
171 5	172 ②	173 21		

수능 따라잡기

본책 37쪽

174 ②	175 76	176 18	177 ④	178 40
179 248				

04 평면벡터의 성분과 내적

개념 & 기출 유형

본책 38쪽 ~ 41쪽

180 ④	181 0	182 ①	183 2	184 ③
185 33	186 ⑤	187 ⑤	188 ②	189 2
190 ⑤	191 5	192 ③	193 ②	194 ③
195 15	196 ⑤	197 ④	198 ③	199 ②
200 ③	201 ③	202 ①		

내신1등급 도전하기

본책 42쪽 ~ 46쪽

203 ⑤	204 2	205 ①	206 ③	207 6
208 9	209 $\frac{8}{7}$	210 ③	211 6	212 $\frac{7}{4}$
213 ①	214 ③	215 ②	216 $\frac{1+3\sqrt{3}}{2}$	
217 ③	218 7	219 30	220 ③	221 22
222 ③	223 $\frac{8}{3}$	224 $\frac{1}{4}$	225 $-\frac{1}{3}$	226 ②
227 $-\frac{\sqrt{15}}{6}$		228 ②	229 ④	230 3
231 ④	232 ④	233 ①	234 ⑤	235 4

수능 따라잡기

본책 47쪽

236 ④	237 3	238 56	239 ③	240 ⑤
241 77				

05 평면 운동

개념 & 기출 유형

본책 48쪽 ~ 49쪽

242 48	243 16m	244 ④	245 ②	246 ④
247 ①	248 4π	249 ③	250 40 km	251 ④
252 36	253 ③			

내신1등급 도전하기

본책 50쪽 ~ 51쪽

254 4	255 ③	256 ⑤	257 ⑤	258 18
259 $3\sqrt{5}$	260 $\frac{1}{\sqrt{1+e^2}}$		261 80초	262 ①
263 ②	264 ⑤	265 19	266 ④	

수능 따라잡기

본책 52쪽

267 ④	268 ⑤	269 $\frac{1}{8}$	270 70	271 ③

1등급 완성하기

본책 53쪽 ~ 57쪽

272 29	273 ⑤	274 9	275 ⑤	276 10
277 ④	278 3	279 ③	280 ②	281 ②
282 ②	283 $(9, -10)$		284 ⑤	285 ⑤
286 4	287 ④	288 32	289 14	290 $\sqrt{5}\pi$
291 ④	292 12	293 ②	294 ③	295 $\frac{5}{4}$
296 ⑤	297 30	298 2π	299 1	300 ⑤
301 8				

Ⅲ 공간도형과 공간벡터

06 공간도형

개념 & 기출 유형 본책 60쪽 ~ 64쪽

302 ⑤ 303 ⑤ 304 20 305 6 306 ③
307 ③ 308 4
309 모서리 CH, 모서리 DI, 모서리 EJ
310 면 ABD, 면 BCD 311 ⑤ 312 ② 313 6
314 풀이 58쪽 315 ③ 316 (가) ⊥ (나) ⊥
317 ④ 318 7 319 ① 320 $\frac{\sqrt{7}}{2}$ 321 ②
322 ④ 323 $2\sqrt{3}$ 324 $20\sqrt{3}$ 325 12 cm 326 $\frac{\pi}{3}$
327 ③ 328 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

내신 1등급 도전하기 본책 65쪽 ~ 68쪽

329 ② 330 6 331 ① 332 ⑤ 333 ③
334 8 335 ① 336 $\frac{2\sqrt{6}}{5}$ 337 ④ 338 60°
339 ③ 340 (가) AC (나) BDF 341 ③ 342 $\sqrt{3}$
343 ① 344 ④ 345 $\frac{12}{5}$ 346 $\frac{1}{3}$ 347 $-\frac{1}{3}$
348 ④ 349 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 350 ② 351 ③ 352 150

수능 따라잡기 본책 69쪽

353 ③ 354 15 355 ④ 356 ① 357 19
358 3

07 공간좌표

개념 & 기출 유형 본책 70쪽 ~ 72쪽

359 ③ 360 $(0,\ 1,\ 0)$ 361 -4 362 ②
363 ② 364 $(-1,\ 0,\ 0)$ 365 $(4,\ 3,\ 1)$
366 ⑤ 367 ① 368 0 369 ① 370 ②
371 ② 372 ③ 373 $(x-3)^2+(y+4)^2+z^2=25$
374 ③ 375 ② 376 $\frac{4}{7}$

내신 1등급 도전하기 본책 73쪽 ~ 75쪽

377 2 378 $(6,\ 5,\ \sqrt{3})$ 379 $-8-\sqrt{2}$
380 ④ 381 ⑤ 382 ④ 383 ③ 384 $\frac{4}{3}$
385 ① 386 ① 387 4 388 $4\sqrt{5}$ 389 ③
390 ④
391 $(y-4)^2+(z+5\sqrt{3})^2=91$ 또는 $(y-4)^2+(z-5\sqrt{3})^2=91$
392 ① 393 ① 394 $\sqrt{122}$

수능 따라잡기 본책 76쪽

395 ⑤ 396 ② 397 40 398 4 399 ③
400 ④ 401 18

08 공간벡터

개념 & 기출 유형 본책 77쪽 ~ 78쪽

402 ④ 403 ④ 404 7 405 -1 406 ①
407 ① 408 ④ 409 3 410 ② 411 $\frac{4}{5}$
412 $\vec{p}=(3\sqrt{3},\ 3\sqrt{3},\ 3\sqrt{3})$, $\vec{p}=(-3\sqrt{3},\ -3\sqrt{3},\ -3\sqrt{3})$

내신 1등급 도전하기 본책 79쪽 ~ 80쪽

413 ⑤ 414 ④ 415 $2\sqrt{14}$ 416 ⑤ 417 $6\sqrt{6}$
418 $\frac{\sqrt{182}}{7}$ 419 15 420 ④ 421 ② 422 $\frac{5}{18}$
423 107 424 ④ 425 6

수능 따라잡기 본책 81쪽

426 12	427 ④	428 ③	429 ②	430 ④
431 5				

09 도형의 방정식

개념 & 기출 유형 본책 82쪽 ~ 85쪽

432 -6	433 ③	434 ⑤	435 ②	436 5
437 4	438 2	439 ⑤	440 1	441 ②
442 1	443 ①	444 ⑤	445 -8	
446 $2x-2y+z-2=0$	447 ①	448 ①	449 6	
450 $\frac{9\sqrt{2}}{2}$	451 1	452 ③	453 $2\sqrt{5}$	454 ④
455 ③				

내신 1등급 도전하기 본책 86쪽 ~ 89쪽

456 3	457 15	458 ②	459 ⑤	460 ③
461 ⑤	462 ⑤	463 16	464 ③	465 $-\frac{1}{3}$
466 $\frac{\sqrt{6}}{18}$	467 2	468 ③	469 $\sqrt{11}$	470 4
471 $4\sqrt{5}$	472 ④	473 ③	474 $\frac{11}{18}$	475 ③
476 3π	477 35π	478 ⑤	479 ④	480 ③

수능 따라잡기 본책 90쪽

481 70	482 ②	483 ⑤	484 ②	485 7
486 ①				

1등급 완성하기 본책 91쪽 ~ 95쪽

487 ③	488 ②	489 20	490 ④	491 $3\sqrt{3}$
492 $\frac{50\sqrt{41}}{41}$		493 $\frac{8\sqrt{3}}{3}$	494 $8\sqrt{3}$	495 ③
496 2	497 139	498 16	499 ②	500 ②
501 -10	502 -11	503 ⑤	504 ②	505 ⑤
506 ①	507 ③	508 ③	509 ③	510 ②
511 21	512 ③	513 $\frac{1}{3}$	514 21	515 50
516 ④	517 11			

Ⅰ 평면 곡선

01 이차곡선 본책 8쪽

001 포물선 $y^2=4px$의 꼭짓점의 좌표는 $(0,\ 0)$이고, 준선의 방정식은 $x=-p$이므로 꼭짓점과 준선 사이의 거리는 p이다.

$\therefore p=4$

즉 포물선의 방정식은

$y^2=4\cdot 4x$, 즉 $y^2=16x$

$x=4$를 $y^2=16x$에 대입하면 $y=\pm 8$이므로 직선 $x=4$와 포물선 $y^2=16x$가 만나는 두 점의 좌표는

$(4,\ 8),\ (4,\ -8)$

따라서 구하는 거리는

$8-(-8)=16$

답 ④

002 $y^2=-8x=4\cdot(-2)x$에서 초점은

$F(-2,\ 0)$

$x^2=6y=4\cdot\frac{3}{2}y$에서 초점은 $F'\left(0,\ \frac{3}{2}\right)$

따라서 $\triangle OFF'$의 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$

답 $\frac{3}{2}$

> 일품 BOX
>
> ① 포물선 $y^2=4px$의 초점의 좌표는 $(p,\ 0)$
>
> ② 포물선 $x^2=4py$의 초점의 좌표는 $(0,\ p)$

003 점 P의 자취는 원의 중심 $(-3,\ 0)$을 초점으로 하고 직선 $x=3$을 준선으로 하는 포물선이므로 l의 방정식은

$y^2=4\cdot(-3)x$, 즉 $y^2=-12x$

원 $(x+3)^2+y^2=16$과 포물선 l의 교점의 x좌표는

$(x+3)^2-12x=16$, $\quad x^2-6x-7=0$

$(x+1)(x-7)=0 \quad \therefore x=-1\ (\because x\le 0)$

$x=-1$을 $y^2=-12x$에 대입하면 $y=\pm 2\sqrt{3}$이므로 두 점 A, B의 좌표는

$(-1,\ 2\sqrt{3}),\ (-1,\ -2\sqrt{3})$

$\therefore \overline{AB}=2\sqrt{3}-(-2\sqrt{3})=4\sqrt{3}$

답 ④

> $y^2=-12x$에서 $y^2\ge 0$이므로
>
> $-12x\ge 0 \quad \therefore x\le 0$

004 두 점 A, B의 x좌표를 각각 x_1, x_2라 하면

$\overline{AC}+\overline{BD}=x_1+x_2=5$

이때 포물선 $y^2=8x=4\cdot 2x$의 초점을 F라 하면 $F(2,\ 0)$이고, 준선의 방정식은 $x=-2$이므로

$\overline{AF}=x_1+2$, $\overline{BF}=x_2+2$

$\therefore \overline{AB}=\overline{AF}+\overline{BF}$

$=x_1+x_2+4=9$

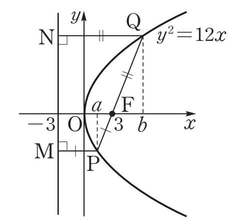
답 9

005 두 점 P, Q의 x좌표를 각각 a, b라 하면

$\frac{a+b}{2}=\frac{7}{2} \quad \therefore a+b=7$

포물선 $y^2=12x=4\cdot 3x$의 초점을 F라 하면 $F(3,\ 0)$이고, 준선의 방정식은 $x=-3$이다.

한편 직선 $y=k(x-3)$은 k의 값에 관계없이 항상 점 $(3,\ 0)$을 지나므로 오른쪽 그림과 같이 두 점 P, Q에서 준선에 내린 수선의 발을 각각 M, N이라 하면



$\overline{PQ}=\overline{PF}+\overline{FQ}=\overline{PM}+\overline{QN}$

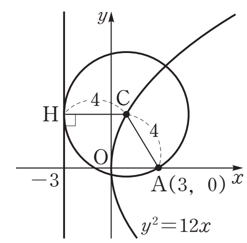
$=(3+a)+(3+b)$

$=6+a+b=13$

답 13

006 $y^2=12x=4\cdot 3x$에서 점 $A(3,\ 0)$은 주어진 포물선의 초점이고, 준선의 방정식은 $x=-3$이다.

오른쪽 그림과 같이 점 C에서 포물선의 준선 $x=-3$에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\overline{CH}=\overline{CA}=4$

이므로 원은 직선 $x=-3$과 접한다.

> 원의 반지름의 길이

따라서 점 C의 x좌표는

$-3+4=1$이므로 $x=1$을 $y^2=12x$에 대입하면

$y=2\sqrt{3}\ (\because y>0)$

$\therefore C(1,\ 2\sqrt{3})$

즉 주어진 원의 방정식은

$(x-1)^2+(y-2\sqrt{3})^2=16$

$y=0$을 위의 식에 대입하면

$(x-1)^2=4$, $\quad x-1=\pm 2$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=3$

따라서 원이 x축과 만나는 두 점의 좌표는

$(-1,\ 0),\ (3,\ 0)$

이므로 원이 x축에 의하여 잘린 현의 길이는

$3-(-1)=4$

답 4

007 주어진 타원의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$이라 하면 장축의 길이가 12이므로

> 초점이 x축 위에 있으므로 타원의 방정식을
>
> $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$
>
> 로 놓는다.

$2a=12 \quad \therefore a=6$

단축의 길이가 8이므로

$2b=8 \quad \therefore b=4$

$\sqrt{6^2-4^2}=2\sqrt{5}$이므로 초점의 좌표는

$(2\sqrt{5},\ 0),\ (-2\sqrt{5},\ 0)$

따라서 두 초점 사이의 거리는

$2\sqrt{5}-(-2\sqrt{5})=4\sqrt{5}$

답 ③

008 주어진 타원의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$이라 하면 장축의 길이는 $2a$이고,

> 타원 위의 점 P와 두 초점 F, F′에 대하여
>
> $\overline{PF}+\overline{PF'}=$(장축의 길이)

$\overline{PF}+\overline{PF'}$

$=\sqrt{(-2\sqrt{3})^2}+\sqrt{(-3-3)^2+(-2\sqrt{3})^2}$

$=2\sqrt{3}+4\sqrt{3}=6\sqrt{3}$

이므로 타원의 정의에 의하여

$2a=6\sqrt{3}\qquad\therefore a=3\sqrt{3}$

$a^2-b^2=3^2$에서 $\qquad b^2=(3\sqrt{3})^2-3^2=18$

$\therefore b=3\sqrt{2}\ (\because b>0)$

따라서 타원의 단축의 길이는 $\qquad 2b=6\sqrt{2}$ 답 ④

다른 풀이 타원의 방정식을 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$이라 하면 초점의 좌표가 $(3,\ 0)$, $(-3,\ 0)$이므로

$a^2-b^2=3^2$에서 $\qquad b^2=a^2-9\qquad\cdots\cdots$ ㉠

또 타원이 점 $\mathrm{P}(3,\ 2\sqrt{3})$을 지나므로

$\dfrac{3^2}{a^2}+\dfrac{(2\sqrt{3})^2}{b^2}=1\qquad\therefore 9b^2+12a^2=a^2b^2$

㉠을 위의 식에 대입하면

$9(a^2-9)+12a^2=a^2(a^2-9)$

$a^4-30a^2+81=0,\qquad(a^2-27)(a^2-3)=0$

$\therefore a^2=27,\ b^2=18\ (\because$ ㉠$)$

$a>b>0$이므로 $\qquad a=3\sqrt{3},\ b=3\sqrt{2}$

따라서 타원의 단축의 길이는 $\qquad 2b=6\sqrt{2}$

009 타원 $3x^2+5y^2=30$, 즉 $\dfrac{x^2}{10}+\dfrac{y^2}{6}=1$의 초점의 좌표는 $\qquad(2,\ 0)$, $(-2,\ 0)$

타원 $5x^2+2y^2=30$, 즉 $\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{15}=1$의 초점의 좌표는

$(0,\ 3)$, $(0,\ -3)$

따라서 네 점 $(2,\ 0)$, $(-2,\ 0)$, $(0,\ 3)$, $(0,\ -3)$을 꼭짓점으로 하는 사각형의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\cdot4\cdot6=12$ 답 12

참고 주어진 사각형은 네 변의 길이가 모두 같으므로 마름모이다.

010 타원 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{a^2}=1$의 장축의 길이는 10이므로 타원의 정의에 의하여 $\qquad\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{PF'}}=10$

이때 $\overline{\mathrm{PF}}:\overline{\mathrm{PF'}}=2:3$이므로 $\qquad\overline{\mathrm{PF}}=4,\ \overline{\mathrm{PF'}}=6$

직각삼각형 $\mathrm{PF'F}$에서 $\qquad\overline{\mathrm{F'F}}=\sqrt{6^2+4^2}=2\sqrt{13}$

또 $\mathrm{F}(\sqrt{25-a^2},\ 0)$, $\mathrm{F'}(-\sqrt{25-a^2},\ 0)$이므로

$\overline{\mathrm{F'F}}=2\sqrt{25-a^2}$

따라서 $2\sqrt{25-a^2}=2\sqrt{13}$에서

$25-a^2=13\qquad\therefore a^2=12$ 답 12

011 타원 $\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{20}=1$의 초점의 좌표는

$\mathrm{F}(4,\ 0)$, $\mathrm{F'}(-4,\ 0)$

이고 타원의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{PF'}}=2\cdot6=12$

$x^2+y^2-8x=0$에서 $\qquad(x-4)^2+y^2=16$

즉 주어진 원의 중심은 $\mathrm{F}(4,\ 0)$이고 반지름의 길이는 4이다.

일품 BOX

$\overline{\mathrm{PF}}$는 원의 반지름이다.

두 삼각형의 높이가 같으므로 넓이의 비는 밑변의 길이의 비와 같다.

㉠에서 $\ b^2=a^2-9>0$
$\therefore a^2>9$

타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$의 초점의 좌표는
① $a>b>0$일 때, $(\pm\sqrt{a^2-b^2},\ 0)$
② $b>a>0$일 때, $(0,\ \pm\sqrt{b^2-a^2})$

따라서 $\overline{\mathrm{PF}}=4$, $\overline{\mathrm{PF'}}=12-4=8$이므로

$\overline{\mathrm{PF'}}-\overline{\mathrm{PF}}=4$ 답 ④

012 주어진 타원의 초점을 $\mathrm{F}(c,\ 0)$, $\mathrm{F'}(-c,\ 0)$ $(c>0)$이라 하면 $\triangle\mathrm{PF'F}:\triangle\mathrm{PFA}=4:3$에서

$\overline{\mathrm{FF'}}:\overline{\mathrm{FA}}=4:3,\qquad 2c:(a-c)=4:3$

$6c=4(a-c)\qquad\therefore 5c=2a\qquad\cdots\cdots$ ㉠

이때 $\triangle\mathrm{PF'F}$의 둘레의 길이가 28이므로

$(\overline{\mathrm{PF'}}+\overline{\mathrm{PF}})+\overline{\mathrm{FF'}}=2a+2c=28$

$\therefore a+c=14\qquad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\qquad a=10,\ c=4$

$a^2-b^2=c^2$에서 $\qquad b^2=10^2-4^2=84$

$\therefore b=2\sqrt{21}\ (\because b>0)$

$\therefore ab=20\sqrt{21}$ 답 $20\sqrt{21}$

013 쌍곡선의 방정식을 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=-1$ $(a>0,\ b>0)$이라 하면 주축의 길이는 $2b$이므로 쌍곡선의 정의에 의하여 $\qquad 2b=6\qquad\therefore b=3$

$a^2+b^2=4^2$에서 $\qquad a^2=4^2-3^2=7$

따라서 쌍곡선의 방정식은

$\dfrac{x^2}{7}-\dfrac{y^2}{9}=-1\qquad\therefore 9x^2-7y^2=-63$

즉 $p=7$, $q=-63$이므로 $\qquad p+q=-56$ 답 -56

014 타원 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{7}=1$의 초점의 좌표는

$(3,\ 0)$, $(-3,\ 0)$

쌍곡선의 방정식을 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,\ b>0)$이라 하면 주축의 길이가 4이므로

$2a=4\qquad\therefore a=2$

$a^2+b^2=3^2$에서 $\qquad b^2=3^2-2^2=5$

따라서 쌍곡선의 방정식은

$\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{5}=1$

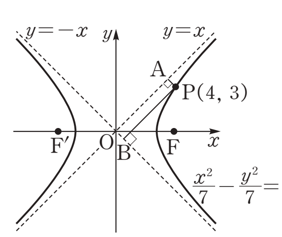
$y=5$를 위의 식에 대입하면

$\dfrac{x^2}{4}-5=1,\qquad x^2=24\qquad\therefore x=\pm2\sqrt{6}$

즉 두 교점의 좌표는 $(2\sqrt{6},\ 5)$, $(-2\sqrt{6},\ 5)$이므로 구하는 거리는

$2\sqrt{6}-(-2\sqrt{6})=4\sqrt{6}$ 답 ④

015 쌍곡선 $x^2-y^2=7$, 즉 $\dfrac{x^2}{7}-\dfrac{y^2}{7}=1$의 점근선의 방정식은



$y=\pm\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}}x$

$\therefore y=\pm x$

점 P(4, 3)에서 직선 $y=x$, 즉 $x-y=0$에 내린 수선의 발을 A라 하면

$$\overline{AP}=\frac{|4-3|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

점 P(4, 3)에서 직선 $y=-x$, 즉 $x+y=0$에 내린 수선의 발을 B라 하면

$$\overline{BP}=\frac{|4+3|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{7\sqrt{2}}{2}$$

따라서 구하는 사각형의 넓이는

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{7\sqrt{2}}{2}=\frac{7}{2}$$

답 $\frac{7}{2}$

016 타원 $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$의 초점의 좌표는

$(8,\ 0)$, $(-8,\ 0)$

이므로 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$에서

$a^2+b^2=64$ …… ㉠

쌍곡선의 주축의 길이는 $2a$이고, $|\overline{PF}-\overline{PF'}|=8$이므로 쌍곡선의 정의에 의하여

$2a=8$ $\therefore a=4$

$a=4$를 ㉠에 대입하면 $b^2=64-16=48$

$\therefore b=4\sqrt{3}$ ($\because b>0$)

$\therefore ab=16\sqrt{3}$

답 ④

017 쌍곡선 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{20}=1$의 주축의 길이는

$2\cdot4=8$

이므로 쌍곡선의 정의에 의하여

$\overline{PF'}-\overline{PF}=8$ …… ㉠

$\overline{QF}-\overline{QF'}=8$ …… ㉡

㉠+㉡을 하면

$(\overline{PF'}-\overline{PF})+(\overline{QF}-\overline{QF'})=16$

$\therefore \overline{PF'}+\overline{QF}=\overline{PF}+\overline{QF'}+16$

$=13+16=29$

답 ④

018 쌍곡선 $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{11}=1$의 초점의 좌표는

$(-6,\ 0)$, $(6,\ 0)$

이므로 $\overline{FF'}=12$

$\triangle PF'F$의 둘레의 길이가 40이므로

$\overline{PF}+\overline{FF'}+\overline{PF'}=40$

$\therefore \overline{PF}+\overline{PF'}=28$ …… ㉠

또 쌍곡선의 주축의 길이는 $2\cdot5=10$이므로 쌍곡선의 정의에 의하여

$|\overline{PF'}-\overline{PF}|=10$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$|\overline{PF}^2-\overline{PF'}^2|=|(\overline{PF}+\overline{PF'})(\overline{PF}-\overline{PF'})|$

$=28\cdot10=280$

답 280

일품 BOX

□AOBP는 직사각형이다.

① 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$의 초점의 좌표는 $(\pm\sqrt{a^2+b^2},\ 0)$

② 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$의 초점의 좌표는 $(0,\ \pm\sqrt{a^2+b^2})$

019 $x^2+2x-2y+5=0$에서

$(x+1)^2=2(y-2)$

즉 주어진 포물선은 포물선 $x^2=2y$를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 초점의 좌표는 $\left(0-1,\ \frac{1}{2}+2\right)$, 즉 $\left(-1,\ \frac{5}{2}\right)$, 꼭짓점의 좌표는 $(-1,\ 2)$이고, 준선의 방정식은 $y=\frac{3}{2}$이다.

한편 초점에서 포물선 위의 점 P에 이르는 거리는 점 P에서 준선에 이르는 거리와 같으므로 점 $\left(-1,\ \frac{5}{2}\right)$, 즉 초점에서 포물선에 이르는 최단 거리는 포물선의 꼭짓점 $(-1,\ 2)$와 준선 $y=\frac{3}{2}$ 사이의 거리인 $\frac{1}{2}$과 같다.

답 $\frac{1}{2}$

020 타원 $\frac{(x+1)^2}{9}+\frac{(y-4)^2}{5}=1$은 타원 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$을 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이므로 초점의 좌표는

$(\sqrt{9-5}-1,\ 4)$, $(-\sqrt{9-5}-1,\ 4)$, 즉

$(1,\ 4)$, $(-3,\ 4)$

$\therefore \triangle OFF'=\frac{1}{2}\cdot4\cdot4=8$

답 8

021 쌍곡선 $\frac{(x-2)^2}{9}-(y+1)^2=1$은 쌍곡선 $\frac{x^2}{9}-y^2=1$을 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

ㄱ. 쌍곡선 $\frac{x^2}{9}-y^2=1$의 주축의 길이가 $2\cdot3=6$이므로 주어진 쌍곡선의 주축의 길이도 6이다.

ㄴ. 쌍곡선 $\frac{x^2}{9}-y^2=1$의 초점의 좌표가 $(\sqrt{10},\ 0)$, $(-\sqrt{10},\ 0)$이므로 주어진 쌍곡선의 초점의 좌표는

$(\sqrt{10}+2,\ -1)$, $(-\sqrt{10}+2,\ -1)$

ㄷ. 쌍곡선 $\frac{x^2}{9}-y^2=1$의 점근선의 방정식이

$y=\frac{1}{3}x$, $y=-\frac{1}{3}x$

이므로 주어진 쌍곡선의 점근선의 방정식은

$y=\frac{1}{3}(x-2)-1$, $y=-\frac{1}{3}(x-2)-1$

$\therefore y=\frac{1}{3}x-\frac{5}{3}$, $y=-\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}$

따라서 두 점근선의 y절편의 합은

$-\frac{5}{3}+\left(-\frac{1}{3}\right)=-2$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

022 $(k+1)x^2+(2k-8)y^2+3x-5=0$이 쌍곡선을 나타내려면

$(k+1)(2k-8)<0 \qquad \therefore -1<k<4$

따라서 정수 k는 0, 1, 2, 3의 4개이다. 답 ②

023 포물선의 준선이 y축에 평행하므로 $\quad a=0$

즉 주어진 포물선의 방정식은

$y^2+by=4x-c \qquad \cdots\cdots$ ㉠

포물선 $y^2=4x$의 초점의 좌표는 $(1,\ 0)$이고 주어진 포물선의 초점의 좌표는 $(4,\ 2)$이므로 포물선 ㉠은 포물선 $y^2=4x$를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 포물선의 방정식은

$(y-2)^2=4(x-3) \qquad \therefore y^2-4x-4y+16=0$

즉 $b=-4$, $c=16$이므로

$a+b+c=12$ 답 ③

024 주어진 이차곡선은 두 점 A, B를 초점으로 하고 장축이 x축에 평행한 타원이다.

$\overline{AB}=2$이므로 주어진 이차곡선은 두 초점의 좌표가 $(1,\ 0)$, $(-1,\ 0)$인 타원을 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

따라서 타원의 방정식을 $\dfrac{(x-1)^2}{m^2}+\dfrac{(y+1)^2}{n^2}=1$

$(m>n>0)$이라 하면

$2m=4 \qquad \therefore m=2$

$m^2-n^2=1^2$에서 $\qquad n^2=2^2-1=3$

따라서 타원의 방정식은

$\dfrac{(x-1)^2}{4}+\dfrac{(y+1)^2}{3}=1$

$3(x-1)^2+4(y+1)^2=12$

$\therefore 3x^2+4y^2-6x+8y-5=0$

즉 $a=-6$, $b=8$, $c=-5$이므로

$a-b+c=-19$ 답 ①

025 문제 이해 포물선 $y^2=4px\,(p>0)$의 초점은 $\mathrm{F}(p,\ 0)$이므로 $x=p$를 $y^2=4px$에 대입하면

$y^2=4p^2 \qquad \therefore y=2p$ 또는 $y=-2p$ ● 20%

해결 과정 즉 $\mathrm{A}(p,\ 2p)$, $\mathrm{B}(p,\ -2p)$이므로 두 점 A, B에서 준선 $x=-p$에 내린 수선의 발은 각각 $\mathrm{C}(-p,\ 2p)$, $\mathrm{D}(-p,\ -2p)$이다. ● 20%

□ACDB에서

$\overline{AC}=\overline{BD}=p-(-p)=2p$,

$\overline{AB}=\overline{CD}=2p-(-2p)=4p$

이므로 □ACDB의 둘레의 길이는

$2(2p+4p)=24\sqrt{3} \qquad \therefore p=2\sqrt{3}$ ● 30%

답 구하기 따라서 □ACDB의 넓이는

$2p\cdot 4p=4\sqrt{3}\cdot 8\sqrt{3}=96$ ● 30%

답 96

일품 BOX

- 준선이 y축에 평행한 포물선의 방정식은 $(y-n)^2=4p(x-m)$ 꼴이다. 즉 x^2의 계수는 0이다.
- $\mathrm{A}(2,\ -1)$, $\mathrm{B}(0,\ -1)$에서 타원의 초점의 y좌표가 같으므로 장축이 x축과 평행하다.
- 마름모의 대각선은 서로를 수직이등분한다.

026 조건 (가)에 의하여 포물선의 꼭짓점의 좌표는 $(0,\ 0)$, 조건 (나)에 의하여 포물선의 축은 y축이다.

또 조건 (가), (다)에 의하여 초점의 좌표는 $(0,\ 2)$이다.

따라서 구하는 포물선의 방정식은

$x^2=4\cdot 2y$, 즉 $x^2=8y$ 답 ③

027 포물선 $y^2=4x$의 초점은 $\mathrm{F}(1,\ 0)$이고, 준선의 방정식은 $x=-1$이므로 $\mathrm{H}(-1,\ b)$이다.

$\overline{PH}=\overline{FH}$이므로

$|a+1|=\sqrt{(-1-1)^2+b^2}$

위의 식의 양변을 제곱하면

$a^2+2a+1=4+b^2 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

이때 점 P는 포물선 $y^2=4x$ 위의 점이므로

$b^2=4a \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $\qquad a^2+2a+1=4+4a$

$a^2-2a-3=0, \qquad (a+1)(a-3)=0$

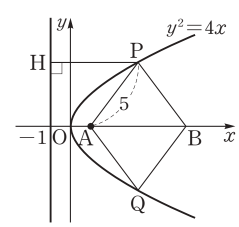
$\therefore a=3\ (\because a>0)$

$a=3$을 ㉡에 대입하면

$b^2=12 \qquad \therefore b=2\sqrt{3}\ (\because b>0)$

$\therefore ab=6\sqrt{3}$ 답 ⑤

028 점 $\mathrm{A}(1,\ 0)$은 주어진 포물선의 초점이고, 준선의 방정식은 $x=-1$이다.



오른쪽 그림과 같이 점 P에서 준선 $x=-1$에 내린 수선의 발을 H라 하면 포물선의 정의에 의하여

$\overline{PH}=\overline{PA}=5$

이므로 점 P의 x좌표는

$-1+5=4$

$x=4$를 $y^2=4x$에 대입하면

$y^2=16 \qquad \therefore y=\pm 4$

$\therefore \mathrm{P}(4,\ 4)$, $\mathrm{Q}(4,\ -4)$

이때 $\overline{AB}$와 $\overline{PQ}$의 중점이 일치하므로 점 B의 x좌표를 a라 하면

$\dfrac{1+a}{2}=4 \qquad \therefore a=7$

즉 $\mathrm{B}(7,\ 0)$이므로 $\qquad \overline{AB}=7-1=6$

따라서 □PAQB의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\cdot 6\cdot 8=24$ 답 ④

029 $y^2=8x=4\cdot 2x$에서 점 $\mathrm{A}(2,\ 0)$은 주어진 포물선의 초점이고, 준선의 방정식은 $x=-2$이다.

이때 $\overline{AP}=8$이므로 점 P와 준선 사이의 거리는 8이다.

$\therefore \overline{PR}=8-2=6$

점 P의 좌표를 $(6,\ a)$라 하면 $\qquad a^2=8\cdot 6=48$

$\therefore a=4\sqrt{3}\ (\because a>0)$

두 점 $A(2,\ 0)$, $P(6,\ 4\sqrt{3})$을 지나는 직선 l의 방정식은

$$y=\frac{4\sqrt{3}}{6-2}(x-2)$$

두 점 $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$를 지나는 직선의 방정식은

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

(단, $x_1 \neq x_2$)

$$\therefore y=\sqrt{3}(x-2) \qquad \cdots\cdots ㉠$$

점 Q는 직선 l 위의 점이므로 ㉠을 $y^2=8x$에 대입하면

$\{\sqrt{3}(x-2)\}^2=8x$

$3x^2-20x+12=0,\qquad (3x-2)(x-6)=0$

$\therefore x=\frac{2}{3}\ (\because x<2)$

$x=\frac{2}{3}$를 ㉠에 대입하면 $\quad y=-\frac{4\sqrt{3}}{3}$

$\therefore Q\left(\frac{2}{3},\ -\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$

사다리꼴 PRSQ에서

$\overline{PR}=6,\ \overline{QS}=\frac{2}{3},\ \overline{RS}=4\sqrt{3}+\frac{4\sqrt{3}}{3}=\frac{16\sqrt{3}}{3}$

이므로 □PRSQ의 넓이는

$$\frac{1}{2}\cdot\left(6+\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{16\sqrt{3}}{3}=\frac{160\sqrt{3}}{9}$$

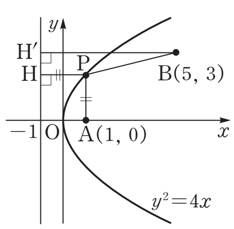
따라서 $m=9,\ n=160$이므로

$m+n=169$

답 169

030 문제 이해 점 $A(1,\ 0)$은 주어진 포물선의 초점이고, 준선의 방정식은 $x=-1$이다. ● 20%

해결 과정 오른쪽 그림과 같이 두 점 P, B에서 준선 $x=-1$에 내린 수선의 발을 각각 H, H′이라 하면



$\overline{PA}=\overline{PH}$이므로

$\overline{PA}+\overline{BP}=\overline{PH}+\overline{BP}$

$\geq\overline{BH'}$

$=5-(-1)=6$ ● 50%

$\overline{PH}+\overline{BP}$의 길이는 세 점 H, P, B가 한 직선 위에 있을 때 최소이다.

답 구하기 이때 $\overline{AB}=\sqrt{(5-1)^2+3^2}=5$이므로

△ABP의 둘레의 길이는

$\overline{PA}+\overline{AB}+\overline{BP}\geq\overline{AB}+\overline{BH'}=11$

따라서 △ABP의 둘레의 길이의 최솟값은 11이다. ● 30%

답 11

031 $7|x|+5|y|=35$에

$x=0$을 대입하면 $\quad 5|y|=35 \qquad \therefore y=\pm7$

$y=0$을 대입하면 $\quad 7|x|=35 \qquad \therefore x=\pm5$

즉 네 점 $(0,\ 7)$, $(0,\ -7)$, $(5,\ 0)$, $(-5,\ 0)$을 꼭짓점으로 하는 타원의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (b>a>0)$

이라 하면

$a=5,\ b=7$

따라서 초점의 좌표는

$(0,\ 2\sqrt{6})$, $(0,\ -2\sqrt{6})$

$\sqrt{7^2-5^2}=2\sqrt{6}$

이므로 두 초점 사이의 거리는

$2\sqrt{6}-(-2\sqrt{6})=4\sqrt{6}$

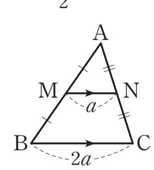
답 ⑤

일품 BOX

△ABC의 두 변 AB, AC의 중점을 각각 M, N이라 하면

$\overline{MN}\,/\!/\,\overline{BC}$,

$\overline{MN}=\frac{1}{2}\overline{BC}$



032 해결 과정 원의 넓이가 16π이므로 원의 반지름의 길이는 4이다.

이때 원의 지름의 길이와 타원의 단축의 길이가 같으므로

$2b=8 \qquad \therefore b=4$ ● 40%

또 초점 F의 좌표가 $(4,\ 0)$이므로 $a^2-b^2=4^2$에서

$a^2=4^2+4^2=32 \qquad \therefore a=4\sqrt{2}\ (\because a>0)$ ● 40%

답 구하기 따라서 타원의 장축의 길이는

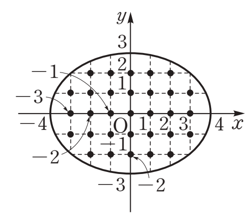
$2a=8\sqrt{2}$ ● 20%

답 $8\sqrt{2}$

033 점 $P(a,\ b)$를 지나는 모든 직선이 타원과 서로 다른 두 점에서 만나려면 점 P가 타원의 내부에 있어야 한다.

이때 타원 $9x^2+16y^2=144$,

즉 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$은 오른쪽 그림과 같으므로 $a,\ b$가 정수인 점 $P(a,\ b)$의 개수는



$5\cdot5+3\cdot2=31$

답 ①

034 해결 과정 $\overline{MN}=\frac{1}{2}\overline{FF'}$, $\overline{OM}=\frac{1}{2}\overline{PF'}$,

$\overline{ON}=\frac{1}{2}\overline{PF}$이므로 ● 20%

$$\overline{MN}+\overline{OM}+\overline{ON}=\frac{1}{2}\overline{FF'}+\frac{1}{2}\overline{PF'}+\frac{1}{2}\overline{PF}$$

$$=\frac{1}{2}(\overline{FF'}+\overline{PF'}+\overline{PF})$$

$$=\frac{1}{2}(6+\overline{PF'}+\overline{PF})=12$$

$\therefore \overline{PF'}+\overline{PF}=18$ ● 40%

따라서 타원의 정의에 의하여 장축의 길이가 18이므로

$2a=18 \qquad \therefore a=9$

$a^2-b^2=3^2$에서 $\qquad b^2=9^2-3^2=72$ ● 30%

답 구하기 $\therefore a^2+b^2=153$ ● 10%

답 153

035 △POA=△PBO이므로

$\overline{OA}=\overline{OB}$이므로

△POA=△PBO

△POF : △PBA=3 : 8에서

△POF : △POA=3 : 4

$\therefore \overline{OF}:\overline{OA}=3:4$

$\overline{OF}=3k\ (k>0)$라 하면 $\overline{OA}=4k$이므로 타원의 정의에 의하여 $\quad \overline{PF'}+\overline{PF}=8k$

△PF′F의 둘레의 길이가 28이므로

$\overline{PF'}+\overline{F'F}+\overline{PF}=28$

$8k+2\cdot3k=28,\qquad 14k=28 \qquad \therefore k=2$

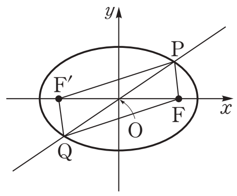
따라서 $A(8,\ 0)$, $F(6,\ 0)$이므로

$a=8,\ b^2=8^2-6^2=28$

$\therefore a^2+b^2=92$

답 ②

036 오른쪽 그림과 같이 초점이 F, F′인 타원의 중심을 지나는 임의의 직선이 타원과 만나는 두 점을 각각 P, Q라 하면 두 점 P, Q는 타원의 중심에 대하여 대칭이므로 사각형 PF′QF는 평행사변형이다.



즉 $\overline{\mathrm{FQ}}=\overline{\mathrm{PF'}}$이므로

$$\overline{\mathrm{FP}}+\overline{\mathrm{FQ}}=\overline{\mathrm{FP}}+\overline{\mathrm{PF'}}=8$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{6}\overline{\mathrm{FP}_k}=(\overline{\mathrm{FP}_1}+\overline{\mathrm{FP}_4})+(\overline{\mathrm{FP}_2}+\overline{\mathrm{FP}_5})+(\overline{\mathrm{FP}_3}+\overline{\mathrm{FP}_6})=8+8+8=24$$

답 24

참고 $\triangle$POF′과 $\triangle$QOF에서

$\overline{\mathrm{F'O}}=\overline{\mathrm{FO}}$, $\overline{\mathrm{OP}}=\overline{\mathrm{OQ}}$, $\angle\mathrm{F'OP}=\angle\mathrm{FOQ}$

이므로 $\triangle\mathrm{POF'}\equiv\triangle\mathrm{QOF}$ (SAS 합동)

따라서 $\angle\mathrm{PF'O}=\angle\mathrm{QFO}$, $\overline{\mathrm{PF'}}=\overline{\mathrm{QF}}$, 즉 한 쌍의 대변이 평행하고 그 길이가 같으므로 □PF′QF는 평행사변형이다.

037 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{12}=1$의 초점의 좌표는

F(4, 0), F′(−4, 0)

이므로

$$\overline{\mathrm{FF'}}=4-(-4)=8$$

쌍곡선의 정의에 의하여 $\overline{\mathrm{PF'}}-\overline{\mathrm{PF}}=4$이므로

$$\overline{\mathrm{PF}}=\overline{\mathrm{PF'}}-4=12-4=8$$

즉 $\overline{\mathrm{PF}}=\overline{\mathrm{F'F}}=8$이므로 $\triangle$PF′F는 이등변삼각형이다.

따라서 점 F에서 $\overline{\mathrm{PF'}}$에 내린 수선의 발을 H라 하면 직각삼각형 PHF에서

$$\overline{\mathrm{FH}}=\sqrt{\overline{\mathrm{PF}}^2-\overline{\mathrm{PH}}^2}=\sqrt{8^2-6^2}=2\sqrt{7}$$

답 ③

038 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{k}=1$의 초점의 좌표는

$\mathrm{F}(\sqrt{16+k},\ 0)$, $\mathrm{F'}(-\sqrt{16+k},\ 0)$

쌍곡선의 주축의 길이가 $2\cdot4=8$이므로

$$\overline{\mathrm{AF'}}-\overline{\mathrm{AF}}=8 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

또 $\triangle$AF′B의 둘레의 길이가 32이므로

$$2(\overline{\mathrm{AF'}}+\overline{\mathrm{AF}})=32$$

$$\therefore \overline{\mathrm{AF'}}+\overline{\mathrm{AF}}=16 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$\overline{\mathrm{AF'}}=12,\ \overline{\mathrm{AF}}=4$$

즉 $\mathrm{A}(\sqrt{16+k},\ 4)$이므로 이것을 주어진 쌍곡선의 방정식에 대입하면

$$\frac{16+k}{16}-\frac{16}{k}=1,\qquad 1+\frac{k}{16}-\frac{16}{k}=1$$

$$\frac{k}{16}=\frac{16}{k},\qquad k^2=16^2$$

$$\therefore k=16\ (\because k>0)$$

답 16

일품 BOX

두 직선이 서로 수직이면 두 직선의 기울기의 곱은 −1이다.

㉠을 ㉡에 대입하면

$\dfrac{16}{a^2}-\dfrac{1}{a^2}=1$

$\dfrac{15}{a^2}=1\quad\therefore a^2=15$

$\therefore b^2=15$

두 변의 길이가 a, b이고 그 끼인 각의 크기가 θ인 삼각형의 넓이

➡ $\dfrac{1}{2}ab\sin\theta$

$\overline{\mathrm{AF}}=\overline{\mathrm{BF}}$, $\overline{\mathrm{AF'}}=\overline{\mathrm{BF'}}$이므로 $\triangle$AF′B의 둘레의 길이는

$\overline{\mathrm{AF'}}+\overline{\mathrm{F'B}}+\overline{\mathrm{BF}}+\overline{\mathrm{AF}}$

$=\overline{\mathrm{AF'}}+\overline{\mathrm{AF'}}+\overline{\mathrm{AF}}+\overline{\mathrm{AF}}$

$=2(\overline{\mathrm{AF'}}+\overline{\mathrm{AF}})$

039 쌍곡선의 두 점근선의 방정식은 $y=\dfrac{b}{a}x$, $y=-\dfrac{b}{a}x$이고 두 점근선이 서로 수직이므로

$$\frac{b}{a}\cdot\left(-\frac{b}{a}\right)=-1\qquad\therefore a^2=b^2 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

점 (4, 1)이 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점이므로

$$\frac{16}{a^2}-\frac{1}{b^2}=1 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a^2=15$, $b^2=15$

$$\therefore a^2+b^2=30$$

답 30

040 쌍곡선 $5x^2-36y^2=180$, 즉 $\dfrac{x^2}{36}-\dfrac{y^2}{5}=1$의 초점의 좌표는

$(\sqrt{41},\ 0)$, $(-\sqrt{41},\ 0)$

이므로 구하는 쌍곡선의 방정식을 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$이라 하면

$$a^2+b^2=41 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

주축의 길이가 10이므로

$$2a=10\qquad\therefore a=5$$

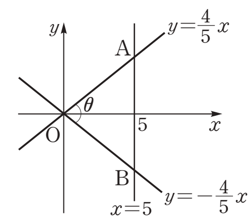
$a=5$를 ㉠에 대입하면

$$25+b^2=41\qquad\therefore b^2=16$$

따라서 쌍곡선의 방정식은

$$\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1$$

이 쌍곡선의 점근선의 방정식은 $y=\pm\dfrac{4}{5}x$이므로 오른쪽 그림에서



A(5, 4), B(5, −4)

$$\therefore \overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{OB}}=\sqrt{5^2+4^2}=\sqrt{41}$$

이때 $\triangle$AOB의 넓이는

$$\frac{1}{2}\cdot\overline{\mathrm{AB}}\cdot5=\frac{1}{2}\cdot\overline{\mathrm{OA}}\cdot\overline{\mathrm{OB}}\cdot\sin\theta$$

$$\frac{1}{2}\cdot8\cdot5=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{41}\cdot\sqrt{41}\cdot\sin\theta$$

$$\therefore \sin\theta=\frac{40}{41}$$

답 $\dfrac{40}{41}$

다른 풀이 원점에서 $\overline{\mathrm{AB}}$에 내린 수선의 발을 H라 하면 직각삼각형 AOH에서

$$\sin\frac{\theta}{2}=\frac{4}{\sqrt{41}},\quad \cos\frac{\theta}{2}=\frac{5}{\sqrt{41}}$$

$$\therefore \sin\theta=2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}=2\cdot\frac{4}{\sqrt{41}}\cdot\frac{5}{\sqrt{41}}=\frac{40}{41}$$

041 쌍곡선의 정의에 의하여

$$\overline{\mathrm{PF'}}-\overline{\mathrm{PF}}=10 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$$\overline{\mathrm{QF'}}-\overline{\mathrm{QF}}=10 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠+㉡을 하면

$(\overline{\mathrm{PF'}}+\overline{\mathrm{QF'}})-(\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{QF}})=20$

$\therefore \overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{QF}}=(\overline{\mathrm{PF'}}+\overline{\mathrm{QF'}})-20$

$=14+18-20=12$

답 ③

042 문제 이해 쌍곡선 $5x^2-4y^2=20$, 즉

$\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{5}=1$의 초점의 좌표는 $(3,\ 0)$, $(-3,\ 0)$이므로 두 점 A, D는 쌍곡선의 초점이다. ● 20%

해결 과정 쌍곡선의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{BD}}-\overline{\mathrm{BA}}=4$ …… ㉠

$\overline{\mathrm{CD}}-\overline{\mathrm{CA}}=4$ …… ㉡

△BDC의 둘레의 길이가 20이므로

$\overline{\mathrm{BD}}+\overline{\mathrm{CD}}+\overline{\mathrm{CA}}+\overline{\mathrm{BA}}=20$ …… ㉢ ● 50%

답 구하기 ㉢−㉠−㉡을 하면

$2(\overline{\mathrm{BA}}+\overline{\mathrm{CA}})=12$

$\therefore \overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{BA}}+\overline{\mathrm{CA}}=6$ ● 30%

답 6

043 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{20}=1$의 초점의 좌표는 $\mathrm{F}(6,\ 0)$, $\mathrm{F'}(-6,\ 0)$이고 주축의 길이는 $2\cdot4=8$이므로 쌍곡선의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{PF'}}-\overline{\mathrm{PF}}=8$

$\therefore \overline{\mathrm{QF'}}=\overline{\mathrm{PF'}}-\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{PF'}}-\overline{\mathrm{PF}}=8$

따라서 $\overline{\mathrm{QF}}+\overline{\mathrm{QF'}}=6+8=14$이므로 타원의 정의에 의하여 구하는 타원의 장축의 길이는 14이다. 답 ②

044 문제 이해 $y=x^2+2ax+b$에서

$y=(x+a)^2-a^2+b$, 즉 $(x+a)^2=y+a^2-b$

이므로 주어진 포물선은 포물선 $x^2=y$를 x축의 방향으로 $-a$만큼, y축의 방향으로 $b-a^2$만큼 평행이동한 것이다. ● 40%

해결 과정 포물선 $x^2=y=4\cdot\dfrac{1}{4}y$의 초점의 좌표가 $\left(0,\ \dfrac{1}{4}\right)$이므로 주어진 포물선의 초점의 좌표는

$\left(-a,\ \dfrac{1}{4}+b-a^2\right)$

따라서 $-a=\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{1}{4}+b-a^2=4$이므로

$a=-\dfrac{1}{2}$, $b=4$ ● 50%

답 구하기 $\therefore a+b=\dfrac{7}{2}$ ● 10%

답 $\dfrac{7}{2}$

045 타원의 중심의 좌표가 $(5,\ 3)$이므로 장축의 길이는 10, 단축의 길이는 6이다.

따라서 주어진 타원은 타원 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$을 x축의 방향으로 5만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이므로 타원의 방정식은

$$\frac{(x-5)^2}{25}+\frac{(y-3)^2}{9}=1$$

타원 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$의 초점의 좌표가 $(4,\ 0)$, $(-4,\ 0)$이므로 주어진 타원의 초점의 좌표는

$\mathrm{F}(4+5,\ 3)$, $\mathrm{F'}(-4+5,\ 3)$, 즉

$\mathrm{F}(9,\ 3)$, $\mathrm{F'}(1,\ 3)$

$\therefore \overline{\mathrm{BF'}}+\overline{\mathrm{F'A}}+\overline{\mathrm{AF}}+\overline{\mathrm{FC}}$

$=(\overline{\mathrm{BC}}-\overline{\mathrm{FF'}})+(\overline{\mathrm{F'A}}+\overline{\mathrm{AF}})$

$=(10-8)+10=12$

답 ③

일품 BOX

$\overline{\mathrm{BF'}}+\overline{\mathrm{FC}}=\overline{\mathrm{BC}}-\overline{\mathrm{FF'}}$이고, 타원의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{F'A}}+\overline{\mathrm{FA}}=10$

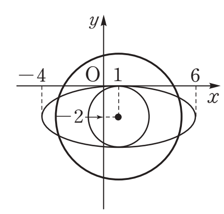
046 문제 이해 $4x^2+25y^2-8x+100y+4=0$에서

$4(x-1)^2+25(y+2)^2=100$

$\therefore \dfrac{(x-1)^2}{25}+\dfrac{(y+2)^2}{4}=1$

즉 주어진 이차곡선은 중심의 좌표가 $(1,\ -2)$, 장축의 길이가 10, 단축의 길이가 4인 타원이다. ● 30%

해결 과정 오른쪽 그림에서 원이 타원과 서로 다른 네 점에서 만나려면 원의 지름 $2a$는 타원의 단축의 길이보다 길고 장축의 길이보다 짧아야 하므로



$4<2a<10$

$\therefore 2<a<5$ ● 50%

답 구하기 따라서 정수 a는 3, 4이므로 구하는 합은

$3+4=7$ ● 20%

답 7

047 $x^2-y^2+4y-3=0$에서

$x^2-(y-2)^2=-1$

이므로 평행이동 f에 의하여 옮겨진 쌍곡선 F의 방정식은

$(x+a)^2-(y-3)^2=-1$

평행이동

$f:(x,\ y)\longrightarrow(x-a,\ y+1)$

에 의하여 도형은 x축의 방향으로 $-a$만큼, y축의 방향으로 1만큼 옮겨진다.

쌍곡선 F와 직선 $y=2x$의 교점의 x좌표는 이차방정식

$(x+a)^2-(2x-3)^2+1=0$, 즉

$3x^2-2(a+6)x-a^2+8=0$

의 실근이고, 두 교점이 원점에 대하여 대칭이므로 두 근의 합은 0이다. 즉 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

이차방정식

$ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라 하면

$\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$, $\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$

$\dfrac{2(a+6)}{3}=0$, $\quad a+6=0 \quad \therefore a=-6$

따라서 쌍곡선 F의 방정식은

$(x-6)^2-(y-3)^2=-1$

쌍곡선 $x^2-y^2=-1$의 초점의 좌표는 $(0,\ \sqrt{2})$, $(0,\ -\sqrt{2})$이므로 쌍곡선 F의 초점의 좌표는

$(6,\ 3+\sqrt{2})$, $(6,\ 3-\sqrt{2})$

즉 $p=6$, $q=3$이므로 $\quad p+q=9$

답 9

1등급 비밀노트

평행이동 $(x,\ y) \longrightarrow (x+a,\ y+b)$에 대하여
① 점: x좌표에 $x+a$, y좌표에 $y+b$를 대입한다.
② 도형: x 대신 $x-a$, y 대신 $y-b$를 대입한다.

048 $x^2-2y^2+4y+k-14=0$에서

$x^2-2(y-1)^2=12-k$

이 이차곡선이 x축에 평행한 주축을 갖는 쌍곡선이려면

$12-k>0$, 즉 $k<12$

따라서 자연수 k는 $1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 11$의 11개이다.

답 ④

049 ㄱ. $a=1$이면

$x^2+y^2+bx+2y+1=0$

$\therefore \left(x+\frac{b}{2}\right)^2+(y+1)^2=\frac{b^2}{4}$

이때 $\frac{b^2}{4}>0$이므로 주어진 이차곡선은 원이다.

ㄴ. $a=0$이면 $y^2+bx+2y+1=0$

$\therefore (y+1)^2=-bx$

위의 방정식이 나타내는 포물선은 포물선 $y^2=-bx$를 y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.
$b<0$일 때 포물선 $y^2=-bx$는 제1사분면, 제4사분면을 지나므로 주어진 이차곡선도 제1사분면, 제4사분면을 지난다.

ㄷ. $b=2a$이면 $ax^2+y^2+2ax+2y+1=0$

$a(x+1)^2+(y+1)^2=a$

$\therefore (x+1)^2+\frac{(y+1)^2}{a}=1$

$a<0$이므로 위의 방정식이 나타내는 쌍곡선은 쌍곡선 $x^2+\frac{y^2}{a}=1$, 즉 $x^2-\frac{y^2}{-a}=1$을 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

쌍곡선 $x^2-\frac{y^2}{-a}=1$의 초점의 좌표는

$(\sqrt{1-a},\ 0),\ (-\sqrt{1-a},\ 0)$

이므로 주어진 이차곡선의 초점의 좌표는

$(\sqrt{1-a}-1,\ -1),\ (-\sqrt{1-a}-1,\ -1)$

이때 $\sqrt{1-a}-1>0$이므로 점 $(\sqrt{1-a}-1,\ -1)$은 제4사분면 위에 있다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

050 $ax^2+y^2+by=0$이 타원을 나타내려면 $a>0$이어야 하므로 a는 자연수이다.
따라서 $ab=-4$에서

$a=1,\ b=-4$ 또는 $a=2,\ b=-2$
또는 $a=4,\ b=-1$

(i) $a=1,\ b=-4$일 때,

$x^2+y^2-4y=0$, 즉 $x^2+(y-2)^2=4$

따라서 주어진 이차곡선은 원이다.

(ii) $a=2,\ b=-2$일 때,

$2x^2+y^2-2y=0$, $\quad 2x^2+(y-1)^2=1$

$\therefore \frac{x^2}{\frac{1}{2}}+(y-1)^2=1$

따라서 주어진 이차곡선은 타원이고 장축의 길이는

$2\cdot 1=2$

(iii) $a=4,\ b=-1$일 때,

$4x^2+y^2-y=0$, $\quad 4x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$

$\therefore \frac{x^2}{\frac{1}{16}}+\frac{\left(y-\frac{1}{2}\right)^2}{\frac{1}{4}}=1$

따라서 주어진 이차곡선은 타원이고 장축의 길이는

$2\cdot\frac{1}{2}=1$

이상에서 구하는 길이의 합은

$2+1=3$

답 ①

051 포물선 $y^2=-8x=4\cdot(-2)x$의 초점은 $\mathrm{F}(-2,\ 0)$, 준선의 방정식은 $x=2$이고, 포물선 $y^2=8x=4\cdot 2x$의 초점은 $\mathrm{F'}(2,\ 0)$, 준선의 방정식은 $x=-2$이므로 $\quad \overline{\mathrm{FF'}}=4$

$\mathrm{Q}(a,\ b)\ (a>0,\ b>0)$라 하면

$\overline{\mathrm{PQ}}=2a$

또 $\overline{\mathrm{FP}}$의 길이는 점 P와 준선 $x=2$ 사이의 거리와 같고, $\overline{\mathrm{F'Q}}$의 길이는 점 Q와 준선 $x=-2$ 사이의 거리와 같으므로

$\overline{\mathrm{FP}}=\overline{\mathrm{F'Q}}=a+2$

사다리꼴 $\mathrm{PFF'Q}$의 둘레의 길이가 12이므로

$2a+2(a+2)+4=12$

$4a=4 \qquad \therefore a=1$

따라서 $b^2=8a=8$에서 $b=2\sqrt{2}$이므로 사다리꼴 $\mathrm{PFF'Q}$의 넓이 S는

$S=\frac{1}{2}\cdot(2+4)\cdot 2\sqrt{2}=6\sqrt{2}$

$\therefore S^2=(6\sqrt{2})^2=72$

답 72

1등급 비밀노트

포물선 위의 임의의 점과 초점 사이의 거리를 구할 때에는 포물선의 정의를 이용하는 경우가 많다.

052 포물선 $x^2=8y=4\cdot 2y$의 초점은 $\mathrm{F}(0,\ 2)$이고, 준선의 방정식은 $y=-2$이다.
이때 $\overline{\mathrm{AF}}$, $\overline{\mathrm{BF}}$, $\overline{\mathrm{CF}}$의 길이는 각각 세 점 A, B, C와 준선 $y=-2$ 사이의 거리와 같으므로

일품 BOX

$12-k<0$이면 이차곡선은 y축에 평행한 주축을 갖는 쌍곡선이다.

두 포물선 $y^2=-8x$, $y^2=8x$는 y축에 대하여 대칭이므로
$\mathrm{P}(-a,\ b)$
$\therefore \overline{\mathrm{PQ}}=a-(-a)$
$=2a$

$-a>0$이므로
$\sqrt{1-a}>1$
$\therefore \sqrt{1-a}-1>0$

이차곡선
$Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0$
이 타원을 나타내면
$AB>0$이다.

$\overline{AF}=k+2$, $\overline{BF}=k+3+2=k+5$, $\overline{CF}=3k+2$

즉 $k+2$, $k+5$, $3k+2$가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2(k+5)=(k+2)+(3k+2)$

$2k+10=4k+4 \quad \therefore k=3$

답 3

1등급 비밀노트

등차수열, 등비수열을 이루는 세 수가 주어지면 각각 등차중항, 등비중항을 이용한다.

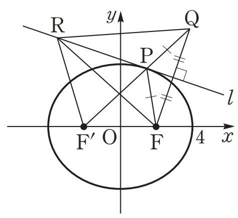
일품 BOX

세 실수 a, b, c가 이 순서대로 등차수열을 이루면

$b=\dfrac{a+c}{2}$, 즉

$2b=a+c$

053 ㄱ. 오른쪽 그림에서



$\overline{FR}=\overline{QR}$이므로

$\overline{FR}+\overline{F'R}$

$=\overline{QR}+\overline{F'R}$

$\geq\overline{F'Q}$

$=\overline{F'P}+\overline{PF}=8$

따라서 점 R가 점 P와 일치할 때, $\overline{FR}+\overline{F'R}$는 최솟값 8을 갖는다.

타원 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{12}=1$의 장축의 길이는 $2\cdot4=8$이므로

$\overline{F'P}+\overline{PF}=8$

ㄴ. ㄱ에 의하여 직선 l 위의 점 중 P를 제외한 모든 점은 점 F와 F′에 이르는 거리의 합이 8보다 크므로 타원 밖의 점이다.

따라서 직선 l은 타원과 오직 한 점에서 만나므로 접선이다.

ㄷ. $\overline{F'Q}=8$이므로 점 Q가 나타내는 도형은 중심이 F′이고 반지름의 길이가 8인 원이다.

$a\geq0$, $b\geq0$이고, 점 P의 좌표가 $(0,\ 2\sqrt{3})$일 때, $\triangle PF'O$에서 $\overline{F'O}=2$, $\overline{OP}=2\sqrt{3}$이므로

$\angle PF'F=\dfrac{\pi}{3}$

따라서 점 Q의 자취의 길이는

$8\cdot\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{8}{3}\pi$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ②

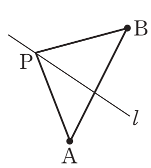
반지름의 길이가 r, 중심각의 크기가 θ인 부채꼴의 호의 길이는

$r\theta$

1등급 비밀노트

두 점 A, B가 직선 l을 사이에 두고 있을 때, 두 점 A, B와 직선 l 위의 점 P 사이의 거리의 합의 최솟값은 $\overline{AB}$의 길이와 같다. 즉

$\overline{AP}+\overline{BP}\geq\overline{AB}$



054 포물선의 초점을 $F(p,\ 0)\ (p>0)$이라 하면 포물선의 방정식은

$y^2=4px$

이때 포물선과 타원의 교점 A, B의 x좌표가 p이므로

$y^2=4p\cdot p$

$\therefore y=\pm2p$

즉 $A(p,\ 2p)$, $B(p,\ -2p)$이므로

$\overline{AB}=4p=8 \quad \therefore p=2$

따라서 $A(2,\ 4)$이고, 타원의 다른 한 초점을 F′이라 하면 타원의 두 초점은 $F(2,\ 0)$, $F'(-2,\ 0)$이므로

$\overline{PQ}=\overline{AF}+\overline{AF'}$

$=\sqrt{(2-2)^2+4^2}+\sqrt{(2+2)^2+4^2}$

$=4+4\sqrt{2}$

타원의 장축의 길이는 타원 위의 한 점에서 두 초점까지의 거리의 합과 같다.

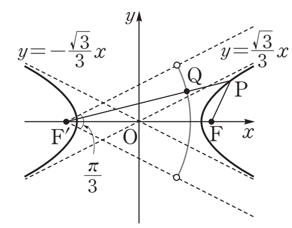
$\therefore \triangle APQ=\dfrac{1}{2}\cdot\overline{PQ}\cdot\overline{AF}$

$=\dfrac{1}{2}\cdot(4+4\sqrt{2})\cdot4$

$=8+8\sqrt{2}$

답 ④

055 쌍곡선의 정의에 의하여



$\overline{F'Q}=\overline{F'P}-\overline{PQ}$

$=\overline{F'P}-\overline{PF}$

$=2\cdot2\sqrt{3}$

$=4\sqrt{3}$

이때 쌍곡선의 점근선의 방정식은

$y=\pm\dfrac{2}{2\sqrt{3}}x$, 즉 $y=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}x$

이므로 직선 PF′의 기울기를 m이라 하면

$-\dfrac{\sqrt{3}}{3}<m<\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

따라서 점 Q가 나타내는 도형은 중심이 F′이고 반지름의 길이가 $4\sqrt{3}$, 중심각의 크기가 $\dfrac{\pi}{3}$인 부채꼴의 호이므로 구하는 자취의 길이는

직선 $y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x$가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 θ라 하면

$\tan\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$\therefore \theta=\dfrac{\pi}{6}$

$4\sqrt{3}\cdot\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}\pi$

답 ①

056 두 초점의 좌표를 $F(c,\ 0)$, $F'(-c,\ 0)\ (c>0)$이라 하면 $\overline{FF'}=8$에서 $\quad c=4$

또 $\overline{PA}=\overline{PF}$이고 $\overline{AF'}=4\sqrt{2}$이므로

$\overline{PF'}-\overline{PF}=\overline{PF'}-\overline{PA}=\overline{AF'}=4\sqrt{2}$

$\overline{PA}$와 $\overline{PF}$는 주어진 원의 반지름이다.

쌍곡선의 정의에 의하여 $\overline{PF'}-\overline{PF}=2a$이므로

$2a=4\sqrt{2} \quad \therefore a=2\sqrt{2}$

$b^2=c^2-a^2$에서 $\quad b^2=4^2-(2\sqrt{2})^2=8$

$\therefore a^2+2b^2=(2\sqrt{2})^2+16=24$

답 24

02 평면 곡선의 접선 본책 17쪽

057 $x^2+2y^2-xy-2x-5=0$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$2x+4y\frac{dy}{dx}-y-x\frac{dy}{dx}-2=0$$

$$(x-4y)\frac{dy}{dx}=2x-y-2$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{2x-y-2}{x-4y}\ (x\neq 4y)$$

따라서 점 $(1,\ 2)$에서의 접선의 기울기는

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2-2-2}{1-8}=\frac{2}{7}$$

답 ②

058 $2\sqrt{x}+\sqrt{y}=7$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{2\sqrt{y}}\cdot\frac{dy}{dx}=0$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=-\frac{2\sqrt{y}}{\sqrt{x}}\ (x\neq 0)$$

점 $(a,\ b)$에서의 접선의 기울기가 -3이므로

$$-\frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a}}=-3$$

$$\therefore 3\sqrt{a}-2\sqrt{b}=0 \quad \cdots\cdots ㉠$$

한편 점 $(a,\ b)$가 곡선 $2\sqrt{x}+\sqrt{y}=7$ 위의 점이므로

$$2\sqrt{a}+\sqrt{b}=7 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=4,\ b=9$

$$\therefore ab=36$$

답 36

059 $x^2+y^2+axy+b=0$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$2x+2y\frac{dy}{dx}+ay+ax\frac{dy}{dx}=0$$

$$(ax+2y)\frac{dy}{dx}=-(2x+ay)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=-\frac{2x+ay}{ax+2y}\ (ax\neq -2y)$$

점 $(2,\ 1)$에서의 $\frac{dy}{dx}$의 값이 $-\frac{7}{8}$이므로

$$-\frac{4+a}{2a+2}=-\frac{7}{8},\qquad 32+8a=14a+14$$

$$6a=18 \qquad \therefore a=3$$

한편 점 $(2,\ 1)$이 곡선 $x^2+y^2+3xy+b=0$ 위의 점이므로 $4+1+6+b=0$ $\quad\therefore b=-11$

$$\therefore a+b=-8$$

답 ①

060 포물선 $y^2=8x$ 위의 점 $\mathrm{A}(2,\ 4)$에서의 접선의 방정식은

$$4y=4(x+2),\ 즉\ y=x+2$$

이 직선에 수직이고 점 A를 지나는 직선의 방정식은

$$y-4=-(x-2) \qquad \therefore y=-x+6$$

따라서 구하는 직선의 y절편은 6이다.

답 ③

일품 BOX

$y=f(x)g(x)$이면
$y'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

수직인 두 직선의 기울기의 곱은 -1이다.

$\square$PHQF는 마름모이다.

061 포물선 $y^2=12x$ 위의 점 $(a,\ b)$에서의 접선의 방정식은

$$by=6(x+a),\ 즉\ y=\frac{6}{b}x+\frac{6a}{b}$$

이므로 x절편은 $-a$, y절편은 $\frac{6a}{b}$이다.

따라서 접선과 x축 및 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\frac{1}{2}\cdot a\cdot\frac{6a}{b}=\frac{9}{2},\qquad \frac{3a^2}{b}=\frac{9}{2}$$

$$\therefore b=\frac{2}{3}a^2 \quad \cdots\cdots ㉠$$

한편 점 $(a,\ b)$가 포물선 $y^2=12x$ 위의 점이므로

$$b^2=12a \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$\left(\frac{2}{3}a^2\right)^2=12a,\qquad \frac{4}{9}a^4=12a$$

$$a^3=27 \qquad \therefore a=3\ (\because a>0)$$

$a=3$을 ㉠에 대입하면 $b=6$

$$\therefore a+b=9$$

답 9

062 포물선 $y^2=6x$ 위의 점 $\mathrm{P}(6,\ 6)$에서의 접선의 방정식은

$$6y=3(x+6),\ 즉\ y=\frac{1}{2}x+3$$

이므로 접선이 x축과 만나는 점의 좌표는

$$\mathrm{Q}(-6,\ 0)$$

한편 포물선 $y^2=6x=4\cdot\frac{3}{2}x$에서 초점은 $\mathrm{F}\left(\frac{3}{2},\ 0\right)$, 준선의 방정식은 $x=-\frac{3}{2}$이므로 점 $\mathrm{P}(6,\ 6)$에서 준선에 내린 수선의 발은 $\mathrm{H}\left(-\frac{3}{2},\ 6\right)$이다.

$$\therefore \overline{\mathrm{PF}}=\overline{\mathrm{PH}}=6+\frac{3}{2}=\frac{15}{2},$$

$$\overline{\mathrm{QH}}=\sqrt{\left(-\frac{3}{2}+6\right)^2+6^2}=\frac{15}{2},$$

$$\overline{\mathrm{QF}}=\frac{3}{2}-(-6)=\frac{15}{2}$$

따라서 $\square$PHQF의 둘레의 길이는

$$4\cdot\frac{15}{2}=30$$

답 ③

063 포물선 $y^2=4x$ 위의 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은

$$y_1y=2(x+x_1),\ 즉\ y=\frac{2}{y_1}x+\frac{2x_1}{y_1}$$

직선 $y=\frac{1}{2}x$에 수직인 직선의 기울기는 -2이므로

$$\frac{2}{y_1}=-2 \qquad \therefore y_1=-1$$

이때 $y_1^{\ 2}=4x_1$이므로

$$1=4x_1 \qquad \therefore x_1=\frac{1}{4}$$

즉 접선의 방정식은 $y=-2x-\frac{1}{2}$이고 이 직선이 점 $(3,\ a)$를 지나므로

$$a=-6-\frac{1}{2}=-\frac{13}{2}$$

답 ②

064 포물선 $y^2=4px$와 직선 $y=2x+3$의 교점의 x좌표는

$$(2x+3)^2=4px$$

$$\therefore 4x^2+4(3-p)x+9=0$$

주어진 포물선과 직선은 만나지 않으므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=\{2(3-p)\}^2-4\cdot9<0, \qquad p^2-6p<0$$

$$p(p-6)<0 \qquad \therefore 0<p<6$$

한편 포물선 위의 점과 직선 $y=2x+3$ 사이의 거리의 최솟값은 기울기가 2인 포물선의 접선과 직선 $y=2x+3$ 사이의 거리와 같다.

포물선 $y^2=4px$ 위의 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은

$$y_1y=2p(x+x_1),\ 즉\ y=\frac{2p}{y_1}x+\frac{2px_1}{y_1}$$

이고 이 직선의 기울기가 2이므로

$$\frac{2p}{y_1}=2 \qquad \therefore y_1=p$$

이때 $y_1^{\ 2}=4px_1$이므로

$$p^2=4px_1 \qquad \therefore x_1=\frac{p}{4}$$

즉 접선의 방정식은 $\quad y=2x+\frac{p}{2}$

$$\therefore 4x-2y+p=0$$

직선 $y=2x+3$ 위의 점 $(0,\ 3)$과 직선 $4x-2y+p=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|-6+p|}{\sqrt{4^2+(-2)^2}}=\frac{\sqrt{5}}{5}, \qquad |p-6|=2$$

$$p-6=\pm2 \qquad \therefore p=4\ (\because 0<p<6)$$

답 4

참고 기울기가 m인 직선 l과 포물선 사이의 거리의 최솟값은 기울기가 m인 포물선의 접선과 직선 l 사이의 거리와 같다.

065 포물선 $y^2=4x$ 위의 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은

$$y_1y=2(x+x_1)$$

이 직선이 점 $A(0,\ 2)$를 지나므로

$$2y_1=2x_1 \qquad \therefore x_1=y_1$$

이때 $y_1^{\ 2}=4x_1$이므로

$$x_1^{\ 2}=4x_1, \qquad x_1(x_1-4)=0$$

$$\therefore x_1=0\ 또는\ x_1=4$$

따라서 두 점 P, Q의 좌표는 $(0,\ 0)$, $(4,\ 4)$이므로 $\triangle$APQ의 넓이는

$$\frac{1}{2}\cdot2\cdot4=4$$

답 ③

일품 BOX

포물선과 직선이 만나면 거리의 최솟값은 0이다.

좌표평면에서 점 $(x_1,\ y_1)$과 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$의 초점의 좌표는

$$(\pm\sqrt{a^2-b^2},\ 0)$$

066 점 $(1,\ a)$가 타원 $2x^2+y^2=6$ 위의 점이므로

$$2+a^2=6, \qquad a^2=4$$

$$\therefore a=2\ (\because a>0)$$

타원 $2x^2+y^2=6$ 위의 점 $(1,\ 2)$에서의 접선의 방정식은

$$2x+2y=6,\ 즉\ x+y=3$$

이 직선이 점 $(b,\ 5)$를 지나므로

$$b+5=3 \qquad \therefore b=-2$$

$$\therefore a+b=0$$

답 ③

067 점 P의 좌표를 $(x_1,\ y_1)$이라 하면 점 P에서의 접선의 방정식은

$$\frac{x_1x}{12}+\frac{y_1y}{4}=1$$

$y=0$일 때 $x=\frac{12}{x_1}$, $x=0$일 때 $y=\frac{4}{y_1}$이므로 두 점 A, B의 좌표는

$$A\left(\frac{12}{x_1},\ 0\right),\ B\left(0,\ \frac{4}{y_1}\right)$$

점 $P(x_1,\ y_1)$이 $\overline{AB}$를 $1:3$으로 내분하므로

$$x_1=\frac{1\cdot0+3\cdot\frac{12}{x_1}}{1+3}에서$$

$$4x_1=\frac{36}{x_1}, \qquad x_1^{\ 2}=9 \qquad \therefore x_1=3\ (\because x_1>0)$$

$$y_1=\frac{1\cdot\frac{4}{y_1}+3\cdot0}{1+3}에서$$

$$4y_1=\frac{4}{y_1}, \qquad y_1^{\ 2}=1 \qquad \therefore y_1=1\ (\because y_1>0)$$

따라서 $A(4,\ 0)$, $B(0,\ 4)$이므로

$$\overline{AB}=\sqrt{(-4)^2+4^2}=4\sqrt{2}$$

답 ④

068 타원 $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1$의 두 초점의 좌표는

$$F(\sqrt{3},\ 0),\ F'(-\sqrt{3},\ 0)$$

타원 위의 점 $P(2,\ 1)$에서의 접선의 방정식은

$$\frac{2x}{6}+\frac{y}{3}=1,\ 즉\ x+y-3=0$$

따라서 $\overline{AF}$, $\overline{A'F'}$의 길이는 각각 두 점 F, F'과 직선 $x+y-3=0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\overline{AF}=\frac{|\sqrt{3}-3|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{3-\sqrt{3}}{\sqrt{2}},$$

$$\overline{A'F'}=\frac{|-\sqrt{3}-3|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore \overline{AF}\cdot\overline{A'F'}=\frac{3-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\cdot\frac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=3$$

답 3

069 타원 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{k}=1$ 위의 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은

$$\frac{x_1x}{16}+\frac{y_1y}{k}=1,\ 즉\ y=-\frac{kx_1}{16y_1}x+\frac{k}{y_1}$$

이 직선이 직선 $x+y=6$, 즉 $y=-x+6$과 일치하므로

$$-\frac{kx_1}{16y_1}=-1,\ \frac{k}{y_1}=6$$

$$\therefore k=6y_1,\ x_1=\frac{8}{3}$$

이때 $x_1+y_1=6$이므로 $\quad y_1=6-\frac{8}{3}=\frac{10}{3}$

$$\therefore k=6\cdot\frac{10}{3}=20$$

답 ③

070 △ABP의 넓이는 점 P가 타원의 접선 중 직선 $y=2x$에 평행한 직선 위에 있을 때 최대이다.

타원 $x^2+4y^2=4$ 위의 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은

$$x_1x+4y_1y=4,\ 즉\ y=-\frac{x_1}{4y_1}x+\frac{1}{y_1}$$

이 직선의 기울기가 2이므로

$$-\frac{x_1}{4y_1}=2 \qquad \therefore x_1=-8y_1$$

이때 ${x_1}^2+4{y_1}^2=4$이므로

$$64{y_1}^2+4{y_1}^2=4, \qquad {y_1}^2=\frac{1}{17}$$

$$\therefore y_1=\pm\frac{\sqrt{17}}{17}$$

따라서 접선의 방정식은 $\quad y=2x\pm\sqrt{17}$

두 직선 $y=2x+\sqrt{17}$, $y=2x$ 사이의 거리는 직선 $y=2x$ 위의 한 점 $(0,\ 0)$과 직선 $y=2x+\sqrt{17}$, 즉 $2x-y+\sqrt{17}=0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|\sqrt{17}|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\sqrt{\frac{17}{5}}$$

두 직선 $y=2x-\sqrt{17}$, $y=2x$ 사이의 거리도 $\sqrt{\frac{17}{5}}$이므로 $\quad d=\sqrt{\frac{17}{5}} \qquad \therefore d^2=\frac{17}{5}$

답 $\frac{17}{5}$

071 타원 $6x^2+y^2=6$ 위의 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은

$$6x_1x+y_1y=6$$

이 직선이 점 $(1,\ 6)$을 지나므로

$$6x_1+6y_1=6 \qquad \therefore y_1=1-x_1$$

이때 $6{x_1}^2+{y_1}^2=6$이므로

$$6{x_1}^2+(1-x_1)^2=6, \qquad 7{x_1}^2-2x_1-5=0$$

$$(7x_1+5)(x_1-1)=0$$

$$\therefore x_1=-\frac{5}{7}\ 또는\ x_1=1$$

따라서 두 접점의 좌표는 $\left(-\frac{5}{7},\ \frac{12}{7}\right)$, $(1,\ 0)$이므로 구하는 거리는

$$\sqrt{\left(-\frac{5}{7}-1\right)^2+\left(\frac{12}{7}\right)^2}=\sqrt{\left(-\frac{12}{7}\right)^2+\left(\frac{12}{7}\right)^2}$$

$$=\frac{12\sqrt{2}}{7}$$

답 ⑤

일품 BOX

• △ABP의 밑변을 $\overline{AB}$라 하면 점 P와 직선 AB 사이의 거리, 즉 높이가 최대일 때 △ABP의 넓이가 최대이다.

• 주어진 쌍곡선의 두 점근선 $y=\pm x$는 서로 수직이므로 △AOB에서 $\overline{AO}$를 밑변이라 하면 높이는 $\overline{BO}$이다.

• $x_1>0$, $y_1>0$이므로 $\frac{x_1}{y_1}>0$

072 쌍곡선 $\frac{x^2}{10}-\frac{y^2}{6}=1$ 위의 점 $P(5,\ 3)$에서의 접선의 방정식은

$$\frac{5x}{10}-\frac{3y}{6}=1,\ 즉\ y=x-2$$

이므로 이 직선이 x축과 만나는 점은 $A(2,\ 0)$이다.

쌍곡선 $\frac{x^2}{10}-\frac{y^2}{6}=1$의 초점은 $F(4,\ 0)$이므로 △PAF의 넓이는

$$\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 3=3$$

답 ④

073 쌍곡선 $x^2-y^2=1$ 위의 점 $(2,\ \sqrt{3})$에서의 접선의 방정식은

$$2x-\sqrt{3}y=1 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

쌍곡선의 점근선의 방정식은 $\quad y=\pm x$

$y=x$를 ㉠에 대입하면

$$2x-\sqrt{3}x=1, \qquad (2-\sqrt{3})x=1$$

$$\therefore x=2+\sqrt{3}$$

$y=-x$를 ㉠에 대입하면

$$2x+\sqrt{3}x=1, \qquad (2+\sqrt{3})x=1$$

$$\therefore x=2-\sqrt{3}$$

따라서 두 점 A, B의 좌표는 $(2+\sqrt{3},\ 2+\sqrt{3})$, $(2-\sqrt{3},\ -2+\sqrt{3})$이므로 △AOB의 넓이는

$$\frac{1}{2}\cdot\overline{AO}\cdot\overline{BO}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2(2+\sqrt{3})^2}\cdot\sqrt{2(2-\sqrt{3})^2}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot(2+\sqrt{3})\cdot(2-\sqrt{3})$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 1=1$$

답 1

074 타원 $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1$ 위의 점 $P(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은

$$\frac{x_1x}{6}+\frac{y_1y}{3}=1,\ 즉\ y=-\frac{x_1}{2y_1}x+\frac{3}{y_1}$$

이므로 접선의 기울기는 $\quad -\frac{x_1}{2y_1}$

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-y^2=1$ 위의 점 $P(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은

$$\frac{x_1x}{a^2}-y_1y=1,\ 즉\ y=\frac{x_1}{a^2y_1}x-\frac{1}{y_1}$$

이므로 접선의 기울기는 $\quad \frac{x_1}{a^2y_1}$

두 직선이 서로 수직이므로

$$-\frac{x_1}{2y_1}\cdot\frac{x_1}{a^2y_1}=-1$$

$$\left(\frac{x_1}{y_1}\right)^2=2a^2 \qquad \therefore \frac{x_1}{y_1}=\pm\sqrt{2}a\ (\because a>0)$$

이때 점 $P(x_1,\ y_1)$은 제1사분면 위의 점이고 $a>0$이므로 $\quad \frac{x_1}{y_1}=\sqrt{2}a$

답 ③

075 쌍곡선 $9x^2-5y^2=45$ 위의 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은

$$9x_1x-5y_1y=45,\ \text{즉}\ y=\frac{9x_1}{5y_1}x-\frac{9}{y_1}$$

이 직선의 기울기가 3이므로

$$\frac{9x_1}{5y_1}=3 \qquad \therefore 3x_1=5y_1$$

이때 $9{x_1}^2-5{y_1}^2=45$이므로

$$25{y_1}^2-5{y_1}^2=45, \qquad {y_1}^2=\frac{9}{4}$$

$$\therefore y_1=\pm\frac{3}{2}$$

따라서 접선의 방정식은 $y=3x\pm6$이므로 두 점 A, B의 좌표는

$(0,\ 6),\ (0,\ -6)$

또 쌍곡선 $9x^2-5y^2=45$, 즉 $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{9}=1$의 두 초점 F, F′의 좌표는

$(\sqrt{14},\ 0),\ (-\sqrt{14},\ 0)$

이므로 구하는 사각형의 넓이는

$$\frac{1}{2}\cdot\{6-(-6)\}\cdot\{\sqrt{14}-(-\sqrt{14})\}=12\sqrt{14}$$ 답 ⑤

076 점 P의 좌표를 $(x_1,\ y_1)$이라 하면 점 P에서의 접선의 방정식은

$$3x_1x-5y_1y=30,\ \text{즉}\ y=\frac{3x_1}{5y_1}x-\frac{6}{y_1}$$

이 직선의 기울기가 1이므로

$$\frac{3x_1}{5y_1}=1 \qquad \therefore y_1=\frac{3}{5}x_1$$

이때 $3{x_1}^2-5{y_1}^2=30$이므로

$$3{x_1}^2-5\cdot\frac{9}{25}{x_1}^2=30, \qquad \frac{6}{5}{x_1}^2=30$$

$${x_1}^2=25 \qquad \therefore x_1=5\ (\because x_1>0)$$

$$\therefore y_1=\frac{3}{5}\cdot5=3$$

따라서 접선의 방정식은 $y=x-2$이므로 점 Q의 좌표는 $(2,\ 0)$이다.

이때 쌍곡선 $3x^2-5y^2=30$, 즉 $\frac{x^2}{10}-\frac{y^2}{6}=1$의 초점의 좌표는

$\mathrm{F}(4,\ 0),\ \mathrm{F'}(-4,\ 0)$

이므로 $\overline{\mathrm{F'Q}}=6,\ \overline{\mathrm{QF}}=2$

또 쌍곡선의 주축의 길이가 $2\sqrt{10}$이므로 쌍곡선의 정의에 의하여

$$\overline{\mathrm{PF'}}-\overline{\mathrm{PF}}=2\sqrt{10}$$

$$\begin{aligned}\therefore d_1-d_2&=(\overline{\mathrm{PF'}}+\overline{\mathrm{F'Q}}+\overline{\mathrm{PQ}})\\&\quad-(\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QF}}+\overline{\mathrm{PF}})\\&=(\overline{\mathrm{PF'}}-\overline{\mathrm{PF}})+(\overline{\mathrm{F'Q}}-\overline{\mathrm{QF}})\\&=2\sqrt{10}+(6-2)\\&=4+2\sqrt{10}\end{aligned}$$ 답 $4+2\sqrt{10}$

일품 BOX

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$의 초점의 좌표는 $(\pm\sqrt{a^2+b^2},\ 0)$

077 쌍곡선 $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{6}=-1$ 위의 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은

$$\frac{x_1x}{5}-\frac{y_1y}{6}=-1,\ \text{즉}\ y=\frac{6x_1}{5y_1}x+\frac{6}{y_1}$$

이 직선이 점 $\mathrm{A}(0,\ 1)$을 지나므로

$$1=\frac{6}{y_1} \qquad \therefore y_1=6$$

이때 $\frac{{x_1}^2}{5}-\frac{{y_1}^2}{6}=-1$이므로

$$\frac{{x_1}^2}{5}-6=-1, \qquad {x_1}^2=25$$

$$\therefore x_1=\pm5$$

따라서 두 점 P, Q의 좌표는 $(5,\ 6),\ (-5,\ 6)$이므로 △APQ의 넓이는

$$\frac{1}{2}\cdot10\cdot5=25$$ 답 ②

078 $\frac{dx}{dt}=3t^2,\ \frac{dy}{dt}=2t+a$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{2t+a}{3t^2}\ (t\neq0)$$

$t=1$일 때 접선의 기울기가 -2이므로

$$\frac{2+a}{3}=-2$$

$$\therefore a=-8$$ 답 ②

079 $\frac{dx}{dt}=1+\frac{1}{t^2},\ \frac{dy}{dt}=1-\frac{1}{t^2}$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{1-\frac{1}{t^2}}{1+\frac{1}{t^2}}=\frac{t^2-1}{t^2+1}$$

$t=a$일 때 접선의 기울기가 $\frac{1}{2}$이므로

$$\frac{a^2-1}{a^2+1}=\frac{1}{2}, \qquad 2a^2-2=a^2+1$$

$$a^2=3 \qquad \therefore a=\sqrt{3}\ (\because a>0)$$ 답 $\sqrt{3}$

다른 풀이 $x^2=t^2+\frac{1}{t^2}-2,\ y^2=t^2+\frac{1}{t^2}+2$이므로

$$y^2=x^2+4$$

위의 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$2y\frac{dy}{dx}=2x$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{x}{y}=\frac{t-\frac{1}{t}}{t+\frac{1}{t}}=\frac{t^2-1}{t^2+1}$$

080 $\frac{dx}{dt}=3t^2+6t+3,\ \frac{dy}{dt}=2t+2$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{2t+2}{3t^2+6t+3}$$

$$=\frac{2(t+1)}{3(t+1)^2}=\frac{2}{3(t+1)}\ (t\neq-1)$$

$x=3$일 때, $3=t^3+3t^2+3t+3$

$t(t^2+3t+3)=0 \quad \therefore t=0$

$t=0$일 때 $y=0$이고 $\frac{dy}{dx}=\frac{2}{3}$이므로 접선의 방정식은

$y=\frac{2}{3}(x-3)$, 즉 $y=\frac{2}{3}x-2$

따라서 구하는 접선의 y절편은 -2이다. 답 ②

081

곡선 $x^2-y^2+2x-y=0$과 직선 $y=x+1$의 교점의 x좌표는

$x^2-(x+1)^2+2x-(x+1)=0$

$\therefore x=-2$

$x=-2$를 $y=x+1$에 대입하면 $\quad y=-1$

따라서 교점의 좌표는 $(-2,\ -1)$이다.

$x^2-y^2+2x-y=0$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$2x-2y\frac{dy}{dx}+2-\frac{dy}{dx}=0$

$(2y+1)\frac{dy}{dx}=2x+2$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{2x+2}{2y+1}\left(y\neq-\frac{1}{2}\right)$

위의 식에 $x=-2$, $y=-1$을 대입하면

$\frac{dy}{dx}=\frac{-4+2}{-2+1}=2$ 답 ④

082

$x^2-2xy+2y^2-5=0$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$2x-2y-2x\frac{dy}{dx}+4y\frac{dy}{dx}=0$

$2(x-2y)\frac{dy}{dx}=2(x-y)$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{x-y}{x-2y}\ (x\neq2y)$

곡선 위의 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 기울기가 2일 때,

$\frac{x_1-y_1}{x_1-2y_1}=2, \quad x_1-y_1=2x_1-4y_1$

$\therefore x_1=3y_1$

이때 $x_1{}^2-2x_1y_1+2y_1{}^2-5=0$이므로

$9y_1{}^2-6y_1{}^2+2y_1{}^2-5=0$

$5y_1{}^2=5 \quad \therefore y_1=\pm1$

즉 두 점 A, B의 좌표는 $(3,\ 1)$, $(-3,\ -1)$이므로 두 직선 l, m의 방정식은

$y-1=2(x-3)$, 즉 $2x-y-5=0$

$y+1=2(x+3)$, 즉 $2x-y+5=0$

두 직선 l, m 사이의 거리는 직선 $2x-y-5=0$ 위의 점 $(0,\ -5)$와 직선 $2x-y+5=0$ 사이의 거리와 같으므로

$\frac{|5+5|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=2\sqrt{5}$ 답 ②

083

해결 과정 $ax^2+bxy+x^3\sqrt{y}=3$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$2ax+by+bx\frac{dy}{dx}+3x^2\sqrt{y}+x^3\cdot\frac{1}{2\sqrt{y}}\cdot\frac{dy}{dx}=0$

점 $(1,\ 1)$에서의 접선의 기울기가 -4이므로

$2a+b-4b+3-2=0$

$\therefore 2a-3b=-1 \quad \cdots\cdots ㉠$ ● 40%

점 $(1,\ 1)$이 곡선 $ax^2+bxy+x^3\sqrt{y}=3$ 위에 있으므로

$a+b+1=3 \quad \therefore a+b=2 \quad \cdots\cdots ㉡$ ● 30%

답 구하기 ㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=1,\ b=1$

$\therefore a^2+b^2=2$ ● 30%

답 2

084

해결 과정 $y^2=ax=4\cdot\frac{a}{4}x$에서 준선의 방정식은 $x=-\frac{a}{4}$이므로 점 $P(4a,\ 2a)$와 준선 사이의 거리는

$4a+\frac{a}{4}=17, \quad \frac{17}{4}a=17 \quad \therefore a=4$ ● 40%

따라서 포물선의 방정식은 $y^2=4x$이고, 이 포물선 위의 점 $P(16,\ 8)$에서의 접선의 방정식은

$8y=2(x+16) \quad \therefore y=\frac{1}{4}x+4$

이 직선이 점 $(4,\ b)$를 지나므로

$b=\frac{1}{4}\cdot4+4=5$ ● 50%

답 구하기 $\therefore a+b=9$ ● 10%

답 9

085

포물선 $y^2=4x$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표는

$x^2=4x, \quad x(x-4)=0$

$\therefore x=4\ (\because x>0)$

따라서 $P(4,\ 4)$이므로 포물선 $y^2=4x$ 위의 점 $P(4,\ 4)$에서의 접선 l의 방정식은

$4y=2(x+4)$, 즉 $y=\frac{1}{2}x+2$

이때 포물선 $y^2=4x$의 초점은 $F(1,\ 0)$이고 직선 FQ의 기울기는 -2이므로 직선 FQ의 방정식은

$y=-2(x-1)$, 즉 $y=-2x+2$

직선 l과 직선 $y=-2x+2$의 교점 Q의 x좌표는

$\frac{1}{2}x+2=-2x+2, \quad \frac{5}{2}x=0$

$\therefore x=0$

따라서 점 Q의 좌표는 $(0,\ 2)$이다.

일품 BOX

$t^2+3t+3=0$의 판별식을 D라 하면
$D=3^2-4\cdot1\cdot3$
$=-3<0$
이므로 실근을 갖지 않는다.

$\frac{dy}{dx}=-4$

$\overline{FQ}\perp l$이고 직선 l의 기울기가 $\frac{1}{2}$이므로 직선 FQ의 기울기는 -2이다.

일품 BOX

또 직선 $y=-2x+2$와 직선 $y=x$의 교점 R의 x좌표는

$-2x+2=x \qquad \therefore x=\frac{2}{3}$

따라서 점 R의 좌표는 $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$이다. 이때

$\overline{PQ}=\sqrt{(-4)^2+(2-4)^2}=2\sqrt{5}$,

$\overline{QR}=\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}-2\right)^2}=\frac{2\sqrt{5}}{3}$

이므로 직각삼각형 PQR의 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot\overline{PQ}\cdot\overline{QR}=\frac{1}{2}\cdot2\sqrt{5}\cdot\frac{2\sqrt{5}}{3}=\frac{10}{3}$ 답 ②

086 ㄱ. 포물선 $y^2=4px$의 준선의 방정식은 $x=-p$이므로

$\overline{PF}=\overline{PH}=x_1-(-p)=x_1+p$

ㄴ. 점 $P(x_1, y_1)$에서의 접선 l의 방정식은

$y_1y=2p(x+x_1)$, 즉

$y=\frac{2p}{y_1}x+\frac{2px_1}{y_1}$ …… ㉠

이므로 직선 PQ의 기울기는 $\frac{2p}{y_1}$

$H(-p, y_1)$, $F(p, 0)$이므로 직선 HF의 기울기는

$\frac{0-y_1}{p-(-p)}=-\frac{y_1}{2p}$

두 직선 PQ, HF의 기울기의 곱은

$\frac{2p}{y_1}\cdot\left(-\frac{y_1}{2p}\right)=-1$

이므로 $\overline{PQ}\perp\overline{HF}$

ㄷ. $y=0$을 ㉠에 대입하면 $x=-x_1$이므로

$Q(-x_1, 0)$

$\therefore \overline{QF}=p-(-x_1)=x_1+p$

따라서 $\overline{PF}=\overline{QF}$이므로 △PQF는 이등변삼각형이다.

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

087 해결 과정 포물선 $y^2=16x$ 위의 점 (x_1, y_1)에서의 접선의 방정식은

$y_1y=8(x+x_1)$, 즉 $y=\frac{8}{y_1}x+\frac{8x_1}{y_1}$ ● 20%

이 직선이 점 $(-2, 0)$을 지나므로

$0=-\frac{16}{y_1}+\frac{8x_1}{y_1} \qquad \therefore x_1=2$

이때 $y_1{}^2=16x_1$이므로

$y_1{}^2=16\cdot2=32$

$\therefore y_1=\pm4\sqrt{2}$ ● 40%

답 구하기 따라서 접선의 방정식은

$y=\pm\sqrt{2}(x+2)$

이므로 두 접선의 기울기의 곱은

$\sqrt{2}\cdot(-\sqrt{2})=-2$ ● 40%

답 -2

088 포물선 $y^2=4px$ 위의 점 (x_1, y_1)에서의 접선의 방정식은

$y_1y=2p(x+x_1)$

이 직선이 점 $A(-2, 1)$을 지나므로

$y_1=2p(-2+x_1) \qquad \therefore 2px_1=y_1+4p$

이때 $y_1{}^2=4px_1$이므로

$y_1{}^2=2(y_1+4p) \qquad \therefore y_1{}^2-2y_1-8p=0$

이 이차방정식의 서로 다른 두 실근을 α, β라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha\beta=-8p$

또 접선 $y_1y=2p(x+x_1)$의 기울기는 각각 $\frac{2p}{\alpha}$, $\frac{2p}{\beta}$이고 두 접선이 서로 수직이므로

$\frac{2p}{\alpha}\cdot\frac{2p}{\beta}=-1, \qquad 4p^2=-\alpha\beta$

$4p^2=8p, \qquad 4p(p-2)=0$

$\therefore p=2\ (\because p>0)$ 답 ③

089 해결 과정 점 P의 좌표를 (x_1, y_1)이라 하면 점 P에서의 접선의 방정식은

$y_1y=x+x_1$

이 직선이 점 $(0, 2)$를 지나므로

$2y_1=x_1$

이때 $y_1{}^2=2x_1$이므로

$y_1{}^2=4y_1, \qquad y_1(y_1-4)=0$

$\therefore y_1=4\ (\because y_1>0)$

$\therefore x_1=2y_1=8$ ● 40%

즉 점 P의 좌표는 $(8, 4)$이고 점 P에서의 접선의 방정식은

$4y=x+8$, 즉 $y=\frac{1}{4}x+2$

따라서 직선 CP의 기울기는 -4이므로 직선 CP의 방정식은

원의 접선은 그 접점을 지나는 반지름과 서로 수직이다.

$y-4=-4(x-8)$, 즉 $y=-4x+36$ ● 40%

답 구하기 즉 $C(9, 0)$이므로 구하는 원의 반지름의 길이는

$\overline{CP}=\sqrt{(8-9)^2+4^2}=\sqrt{17}$ ● 20%

답 $\sqrt{17}$

090 △PFA의 넓이는 점 P가 포물선의 접선 중 직선 AF와 평행한 직선 위에 있을 때 최대이다.

포물선 $y^2=8x=4\cdot2x$의 초점은 $F(2, 0)$이므로

$\overline{AF}=\sqrt{(2-6)^2+(-2)^2}=2\sqrt{5}$

점 P의 좌표를 (x_1, y_1)이라 하면 점 P에서의 접선의 방정식은

$y_1y=4(x+x_1)$, 즉 $y=\frac{4}{y_1}x+\frac{4x_1}{y_1}$

이 직선의 기울기가 $\frac{1}{2}$이므로

직선 AF의 기울기는 $\frac{2-0}{6-2}=\frac{1}{2}$

$\dfrac{4}{y_1}=\dfrac{1}{2}\qquad \therefore y_1=8$

이때 $y_1{}^2=8x_1$이므로

$64=8x_1\qquad \therefore x_1=8$

즉 점 P의 좌표는 (8, 8)이고 직선 AF의 방정식은

$y=\dfrac{1}{2}(x-2)$, 즉 $x-2y-2=0$

이므로 점 P(8, 8)과 직선 AF 사이의 거리는

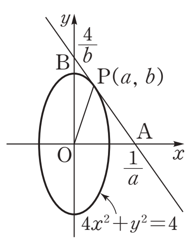
$\dfrac{|8-16-2|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=2\sqrt{5}$

따라서 구하는 넓이의 최댓값은

$\dfrac{1}{2}\cdot 2\sqrt{5}\cdot 2\sqrt{5}=10$

답 ③

091 타원 $4x^2+y^2=4$ 위의 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$에서의 접선의 방정식은



$4ax+by=4$

$y=0$일 때 $x=\dfrac{1}{a}$, $x=0$일 때 $y=\dfrac{4}{b}$이므로 두 점 A, B의 좌표는

$\mathrm{A}\left(\dfrac{1}{a},\ 0\right)$, $\mathrm{B}\left(0,\ \dfrac{4}{b}\right)$

△OAP의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{a}\cdot b=\dfrac{b}{2a}$

△OPB의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{4}{b}\cdot a=\dfrac{2a}{b}$

△OAP : △OPB=2 : 1에서

$\dfrac{b}{2a}:\dfrac{2a}{b}=2:1$

$\dfrac{b}{2a}=\dfrac{4a}{b}\qquad \therefore b^2=8a^2$

이때 $4a^2+b^2=4$이므로

$4a^2+8a^2=4,\qquad 12a^2=4\qquad \therefore a^2=\dfrac{1}{3}$

따라서 $b^2=8\cdot\dfrac{1}{3}=\dfrac{8}{3}$이므로

$a^2+b^2=3$

답 ③

다른 풀이 △OAP : △OPB=2 : 1이므로

$\overline{\mathrm{AP}}:\overline{\mathrm{PB}}=2:1$

즉 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$는 $\overline{\mathrm{AB}}$를 2 : 1로 내분하는 점이므로

$a=\dfrac{2\cdot 0+1\cdot\dfrac{1}{a}}{2+1}$에서

$3a=\dfrac{1}{a}\qquad \therefore a^2=\dfrac{1}{3}$

$b=\dfrac{2\cdot\dfrac{4}{b}+1\cdot 0}{2+1}$에서

$3b=\dfrac{8}{b}\qquad \therefore b^2=\dfrac{8}{3}$

$\therefore a^2+b^2=3$

일품 BOX

092 직선 $y=x$와 타원 $\dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{6}=1$의 교점 A의 x좌표는

$\dfrac{x^2}{12}+\dfrac{x^2}{6}=1,\qquad x^2=4$

$\therefore x=2\ (\because x>0)$

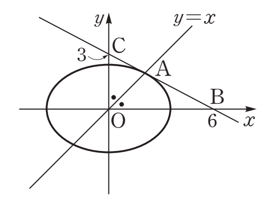
따라서 타원 위의 점 A(2, 2)에서의 접선의 방정식은

$\dfrac{2x}{12}+\dfrac{2y}{6}=1$, 즉 $\dfrac{x}{6}+\dfrac{y}{3}=1$

이므로 B(6, 0), C(0, 3)

오른쪽 그림에서 직선 OA는 ∠COB의 이등분선이므로 △OBC에서

직선 $y=x$가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기는 45°이므로
∠AOB=∠AOC



$\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{OB}}:\overline{\mathrm{OC}}$
$=6:3$
$=2:1$

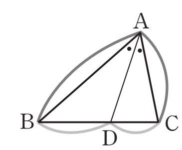
답 ③

1등급 비밀노트

삼각형의 내각의 이등분선의 성질

△ABC에서 ∠A의 이등분선이 $\overline{\mathrm{BC}}$와 만나는 점을 D라 하면

$\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{BD}}:\overline{\mathrm{CD}}$



093 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$이라 하면 점 P에서의 접선의 방정식은

$\dfrac{x_1x}{4}+y_1y=1$, 즉 $x_1x+4y_1y-4=0$

이므로

$\overline{\mathrm{OH}}=\dfrac{|-4|}{\sqrt{x_1{}^2+(4y_1)^2}}=\dfrac{4}{\sqrt{x_1{}^2+16y_1{}^2}}$

이때 $\dfrac{x_1{}^2}{4}+y_1{}^2=1$이므로

$x_1{}^2=4-4y_1{}^2$ …… ㉠

직각삼각형 OPH에서

$\overline{\mathrm{PH}}^2=\overline{\mathrm{OP}}^2-\overline{\mathrm{OH}}^2$

$=x_1{}^2+y_1{}^2-\dfrac{16}{x_1{}^2+16y_1{}^2}$

$=4-4y_1{}^2+y_1{}^2-\dfrac{16}{4-4y_1{}^2+16y_1{}^2}\ (\because ㉠)$

$=4-3y_1{}^2-\dfrac{4}{1+3y_1{}^2}$

$=5-\left(1+3y_1{}^2+\dfrac{4}{1+3y_1{}^2}\right)$

$\le 5-2\sqrt{(1+3y_1{}^2)\cdot\dfrac{4}{1+3y_1{}^2}}$

두 양수 a, b에 대하여
$\dfrac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}$, 즉
$a+b\ge 2\sqrt{ab}$
(단, 등호는 $a=b$일 때 성립)

$=1\left(\text{단, 등호는 } y_1=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\text{일 때 성립}\right)$

따라서 $\overline{\mathrm{PH}}$의 길이의 최댓값은 1이다.

답 ②

094 $y-2x=k$ (k는 상수)로 놓으면 직선 $y-2x=k$, 즉 $y=2x+k$가 주어진 타원과 접할 때 k는 최댓값 또는 최솟값을 갖는다.

타원 $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{8}=1$ 위의 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은

$$\frac{x_1x}{12}+\frac{y_1y}{8}=1,\ 즉\ y=-\frac{2x_1}{3y_1}x+\frac{8}{y_1}$$

이 직선의 기울기가 2이므로

$$-\frac{2x_1}{3y_1}=2 \qquad \therefore x_1=-3y_1$$

이때 $\frac{x_1^2}{12}+\frac{y_1^2}{8}=1$이므로

$$\frac{3y_1^2}{4}+\frac{y_1^2}{8}=1, \qquad y_1^2=\frac{8}{7}$$

$$\therefore y_1=\pm\frac{2\sqrt{14}}{7}$$

따라서 접점의 좌표는 $\left(\pm\frac{6\sqrt{14}}{7},\ \mp\frac{2\sqrt{14}}{7}\right)$ (복호동순)

이므로 k의 최댓값 M과 최솟값 m은

$$M=\frac{2\sqrt{14}}{7}-2\cdot\left(-\frac{6\sqrt{14}}{7}\right)=2\sqrt{14}$$

$$m=-\frac{2\sqrt{14}}{7}-2\cdot\frac{6\sqrt{14}}{7}=-2\sqrt{14}$$

$$\therefore M-m=4\sqrt{14}$$

답 ④

095 해결 과정 타원 $x^2+2y^2=8$ 위의 점 $(a,\ b)$에서의 접선의 방정식은

$$ax+2by=8$$

이 직선이 점 $(-1,\ 4)$를 지나므로

$$-a+8b=8 \qquad \therefore a=8b-8$$ ● 30%

이때 $a^2+2b^2=8$이므로

$$(8b-8)^2+2b^2=8, \qquad 33b^2-64b+28=0$$

$$(3b-2)(11b-14)=0$$

$$\therefore b=\frac{2}{3}\ 또는\ b=\frac{14}{11}$$ ● 30%

그런데 접선 l의 기울기가 양수이므로

$$ab<0$$

$b=\frac{2}{3}$일 때 $ab<0$이므로

$$a=8\cdot\frac{2}{3}-8=-\frac{8}{3}$$ ● 30%

답 구하기 $\therefore a+b=-2$ ● 10%

답 -2

096 주어진 타원의 단축의 길이가 2이므로 장축의 길이를 $2a$ $(a>0)$라 하면 타원의 방정식은

$$\frac{x^2}{a^2}+y^2=1$$

타원과 직선 AC의 접점의 좌표를 $(x_1,\ y_1)$이라 하면 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은

$$\frac{x_1x}{a^2}+y_1y=1$$

이 직선이 점 A$(0,\ 3)$을 지나므로

$$3y_1=1 \qquad \therefore y_1=\frac{1}{3}$$

이때 $y_1=-x_1+3$이므로

$$\frac{1}{3}=-x_1+3 \qquad \therefore x_1=\frac{8}{3}$$

또 $\frac{x_1^2}{a^2}+y_1^2=1$이므로

$$\frac{64}{9a^2}+\frac{1}{9}=1, \qquad 64+a^2=9a^2$$

$$a^2=8 \qquad \therefore a=2\sqrt{2}\ (\because a>0)$$

따라서 구하는 장축의 길이는 $2\cdot2\sqrt{2}=4\sqrt{2}$ 답 $4\sqrt{2}$

다른 풀이 타원 $\frac{x^2}{a^2}+y^2=1$은 직선 AB, 즉 $y=x+3$에 접하므로 $y=x+3$을 타원의 방정식에 대입하면

$$\frac{x^2}{a^2}+(x+3)^2=1$$

$$\therefore (a^2+1)x^2+6a^2x+8a^2=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(3a^2)^2-(a^2+1)\cdot8a^2=0$$

$$a^4-8a^2=0, \qquad a^2(a^2-8)=0$$

$$a^2=8\ (\because a>0) \qquad \therefore a=2\sqrt{2}\ (\because a>0)$$

따라서 구하는 장축의 길이는 $2\cdot2\sqrt{2}=4\sqrt{2}$

097 쌍곡선 $2x^2-8y^2=a$, 즉 $\frac{x^2}{\frac{a}{2}}-\frac{y^2}{\frac{a}{8}}=1$의 점근선의 방정식은

$$y=\pm\frac{\sqrt{\frac{a}{8}}}{\sqrt{\frac{a}{2}}}x,\ 즉\ y=\pm\frac{1}{2}x$$

한편 쌍곡선 $2x^2-8y^2=a$ 위의 점 $\left(b,\ \frac{1}{2}\right)$에서의 접선의 방정식은

$$2bx-4y=a,\ 즉\ y=\frac{b}{2}x-\frac{a}{4}$$

이므로 $\frac{b}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$에서 $\quad b=4$

이때 점 $\left(4,\ \frac{1}{2}\right)$은 쌍곡선 $2x^2-8y^2=a$ 위의 점이므로

$$32-2=a \qquad \therefore a=30$$

$$\therefore a+b=34$$

답 ③

098 문제 이해 △AFB∽△AF′B′(AA 닮음)이고 △AFB : △AF′B′=1 : 9이므로

$\overline{\text{AF}}:\overline{\text{AF'}}=1:3$ ● 20%

일품 BOX

점 $(x_1,\ y_1)$은 직선 AC, 즉 $y=-x+3$ 위의 점이다.

$\frac{b}{2}>0$이므로 접선은 점근선 $y=-\frac{1}{2}x$와 수직이다.

접선 $ax+2by=8$, 즉 $y=-\frac{a}{2b}x+\frac{4}{b}$의 기울기가 양수이려면

$-\frac{a}{2b}>0 \quad \therefore ab<0$

△AFB와 △AF′B′에서
∠FBA=∠F′B′A=90°,
∠FAB=∠F′AB′ (맞꼭지각)
이므로
△AFB∽△AF′B′ (AA 닮음)

해결 과정 쌍곡선 $\frac{x^2}{10}-\frac{y^2}{6}=1$의 초점은 $F(4,\ 0)$, $F'(-4,\ 0)$이므로 $\overline{FF'}=8$

따라서 $\overline{AF}=8\cdot\frac{1}{4}=2$이므로 점 A의 좌표는 $(2,\ 0)$이다. ● 30%

한편 점 $P(a,\ b)$에서의 접선의 방정식은

$$\frac{ax}{10}-\frac{by}{6}=1$$

이 직선이 점 $A(2,\ 0)$을 지나므로

$$\frac{a}{5}=1 \qquad \therefore a=5$$

이때 $\frac{a^2}{10}-\frac{b^2}{6}=1$이므로

$$\frac{5}{2}-\frac{b^2}{6}=1, \qquad \frac{b^2}{6}=\frac{3}{2}$$

$$b^2=9 \qquad \therefore b=3\ (\because b>0)$$ ● 40%

답 구하기 $\therefore a+b=8$ ● 10%

답 8

099 문제 이해 점 P와 직선 $y=2x+3$ 사이의 거리의 최솟값은 기울기가 2인 쌍곡선의 접선과 직선 $y=2x+3$ 사이의 거리와 같다. ● 20%

해결 과정 점 $P(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은

$$2x_1x-y_1y=4,\ 즉\ y=\frac{2x_1}{y_1}x-\frac{4}{y_1}$$

이 직선의 기울기가 2이므로

$$\frac{2x_1}{y_1}=2 \qquad \therefore x_1=y_1$$

이때 $2x_1{}^2-y_1{}^2=4$이므로

$$2x_1{}^2-x_1{}^2=4, \qquad x_1{}^2=4$$

$$\therefore x_1=2\ (\because x_1>0)$$ ● 50%

답 구하기 따라서 구하는 거리의 최솟값은 점 $P(2,\ 2)$와 직선 $y=2x+3$, 즉 $2x-y+3=0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|4-2+3|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\sqrt{5}$$ ● 30%

답 $\sqrt{5}$

100 점 P의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면 점 P에서의 접선의 방정식은

$$2ax-5by=10$$

$$\therefore y=\frac{2a}{5b}x-\frac{2}{b} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

점 $P(a,\ b)$를 지나고 직선 ㉠에 수직인 직선의 방정식은

$$y-b=-\frac{5b}{2a}(x-a)$$

$$\therefore y=-\frac{5b}{2a}x+\frac{7}{2}b \qquad \cdots\cdots ㉡$$

직선 ㉡은 원의 중심 $(7,\ 0)$을 지나므로

$$0=-\frac{35b}{2a}+\frac{7}{2}b, \qquad \frac{5b}{a}=b$$

$$\therefore a=5\ (\because b\neq 0)$$

이때 $2a^2-5b^2=10$이므로

$$50-5b^2=10, \qquad b^2=8$$

$$\therefore b=2\sqrt{2}\ (\because b>0)$$

따라서 점 $P(5,\ 2\sqrt{2})$에서의 접선의 방정식은

$$2\cdot 5x-5\cdot 2\sqrt{2}y=10$$

$$\therefore x-\sqrt{2}y=1 \qquad \cdots\cdots ㉢$$

점 Q에서의 접선은 직선 ㉢과 x축에 대하여 대칭이므로

$$x+\sqrt{2}y=1 \qquad \cdots\cdots ㉣$$

㉢, ㉣을 연립하여 풀면 $x=1,\ y=0$

따라서 두 접선의 교점의 좌표는 $(1,\ 0)$이다. 답 ⑤

1등급 비밀노트

원 위의 점 $(a,\ b)$에서의 접선과 수직이고 점 $(a,\ b)$를 지나는 직선은 이 원의 중심을 지난다.

101 쌍곡선과 원의 접점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은

$$x_1x-5y_1y=1,\ 즉\ y=\frac{x_1}{5y_1}x-\frac{1}{5y_1}$$

이 직선과 두 점 $A(0,\ 3)$, $(x_1,\ y_1)$을 지나는 직선은 서로 수직이므로

$$\frac{x_1}{5y_1}\cdot\frac{y_1-3}{x_1}=-1, \qquad y_1-3=-5y_1$$

$$6y_1=3 \qquad \therefore y_1=\frac{1}{2}$$

이때 $x_1{}^2-5y_1{}^2=1$이므로

$$x_1{}^2-5\cdot\frac{1}{4}=1, \qquad x_1{}^2=\frac{9}{4} \qquad \therefore x_1=\pm\frac{3}{2}$$

따라서 두 점 P, Q의 좌표는

$$P\left(\frac{3}{2},\ \frac{1}{2}\right),\ Q\left(-\frac{3}{2},\ \frac{1}{2}\right)$$

이므로 두 점 P, Q에서의 접선의 방정식은 각각

$$\frac{3}{2}x-\frac{5}{2}y=1, \quad -\frac{3}{2}x-\frac{5}{2}y=1$$

$$\therefore 3x-5y=2,\ 3x+5y=-2$$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $x=0,\ y=-\frac{2}{5}$

즉 점 B의 좌표는 $\left(0,\ -\frac{2}{5}\right)$이므로

$$\square AQBP=2\triangle ABP$$

$$=2\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{17}{5}\cdot\frac{3}{2}\right)=\frac{51}{10}$$

답 $\frac{51}{10}$

두 점 P, Q는 y축에 대하여 대칭이므로 $\triangle AQB=\triangle APB$

$\overline{AB}=3-\left(-\frac{2}{5}\right)=\frac{17}{5}$

102 쌍곡선 $x^2-9y^2=9$ 위의 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은

$$x_1x-9y_1y=9$$

이 직선이 점 $(1,\ 0)$을 지나므로 $x_1=9$

이때 $x_1{}^2-9y_1{}^2=9$이므로

$$81-9y_1{}^2=9, \qquad y_1{}^2=8 \qquad \therefore y_1=\pm 2\sqrt{2}$$

즉 접선의 방정식은

$9x-18\sqrt{2}y=9$ 또는 $9x+18\sqrt{2}y=9$
이므로 직선 l의 방정식은
$9x-18\sqrt{2}y=9$, 즉 $x-2\sqrt{2}y-1=0$
따라서 점 $(n,\ 0)$과 직선 $x-2\sqrt{2}y-1=0$ 사이의 거리는

$$d_n=\frac{|n-1|}{\sqrt{1^2+(-2\sqrt{2})^2}}=\frac{|n-1|}{3}$$

$d_n\geq4$에서

$$\frac{|n-1|}{3}\geq4,\qquad |n-1|\geq12$$

$\therefore\ n\geq13$ (∵ n은 2 이상의 자연수)
따라서 n의 최솟값은 13이다. 답 ③

103 $\frac{dx}{dt}=1-e^t$, $\frac{dy}{dt}=1-\cos t$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{1-\cos t}{1-e^t}\quad(t\neq0)$$

$$\therefore\ \lim_{t\to0}\frac{1}{t}\cdot\frac{dy}{dx}=\lim_{t\to0}\frac{1}{t}\cdot\frac{1-\cos t}{1-e^t}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{1-\cos^2 t}{t(1+\cos t)(1-e^t)}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{\sin^2 t}{t^2(1+\cos t)\cdot\frac{1-e^t}{t}}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{\sin^2 t}{t^2}\cdot\frac{1}{1+\cos t}\cdot\frac{t}{1-e^t}$$

$$=1\cdot\frac{1}{2}\cdot(-1)=-\frac{1}{2}$$

답 $-\frac{1}{2}$

$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$
$\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1$

104 $\frac{dx}{dt}=\frac{2}{(t+1)^2}$, $\frac{dy}{dt}=\frac{t^2+2t+2}{(t+1)^2}$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{t^2+2t+2}{(t+1)^2}}{\frac{2}{(t+1)^2}}=\frac{t^2+2t+2}{2}$$

따라서 $t=n$일 때 접선의 기울기는

$$f(n)=\frac{n^2+2n+2}{2}$$

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{8}f(n)=\sum_{n=1}^{8}\frac{n^2+2n+2}{2}$$

$$=\sum_{n=1}^{8}\left(\frac{1}{2}n^2+n+1\right)$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{8\cdot9\cdot17}{6}+\frac{8\cdot9}{2}+8$$

$$=102+36+8$$

$$=146$$

답 ④

$\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$
$\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

105 $\frac{dx}{dt}=e^t+2e^{2t}+3e^{3t}+\cdots+ne^{nt}$,
$\frac{dy}{dt}=e^t+3e^{3t}+5e^{5t}+\cdots+(2n-1)e^{(2n-1)t}$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{e^t+3e^{3t}+5e^{5t}+\cdots+(2n-1)e^{(2n-1)t}}{e^t+2e^{2t}+3e^{3t}+\cdots+ne^{nt}}$$

따라서 $t=0$일 때 접선의 기울기는

$$g(n)=\frac{1+3+5+\cdots+(2n-1)}{1+2+3+\cdots+n}$$

$$=\frac{n^2}{\frac{n(n+1)}{2}}=\frac{2n}{n+1}$$

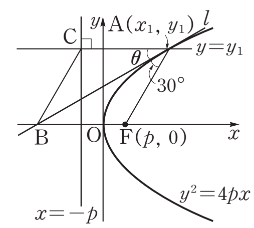
$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)$
$=2\cdot\frac{n(n+1)}{2}-n$
$=n^2$

$g(n)=\frac{9}{5}$에서 $\frac{2n}{n+1}=\frac{9}{5}$, $10n=9n+9$

$\therefore\ n=9$

답 ①

106 접선 l의 방정식은
$y_1y=2p(x+x_1)$
이므로 접선 l과 x축의 교점을 B라 하면
B$(-x_1,\ 0)$
$\therefore\ \overline{\text{BF}}=x_1+p$



주어진 포물선의 준선은 $x=-p$이므로 준선과 직선 $y=y_1$과의 교점을 C라 하면 C$(-p,\ y_1)$
이때 ${y_1}^2=4px_1$이므로

$$\overline{\text{BC}}=\sqrt{(-p+x_1)^2+{y_1}^2}=\sqrt{(-p+x_1)^2+4px_1}$$

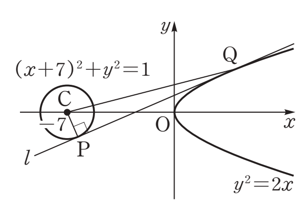
$$=\sqrt{(x_1+p)^2}=x_1+p$$

$\therefore\ \overline{\text{BF}}=\overline{\text{BC}}$
포물선의 정의에 의하여 $\overline{\text{AC}}=\overline{\text{AF}}$이므로
$\triangle\text{ABF}\equiv\triangle\text{ABC}$
$\therefore\ \theta=\angle\text{BAC}=\angle\text{BAF}=30°$ 답 ⑤

다른 풀이 준선은 $x=-p$이고, 점 A에서 준선에 내린 수선의 발을 C라 하면 $\overline{\text{AC}}=x_1+p$
$\overline{\text{AF}}=\overline{\text{AC}}$이므로 $\overline{\text{AF}}=x_1+p=\overline{\text{BF}}$
따라서 $\triangle$ABF는 이등변삼각형이므로
$\angle\text{ABF}=30°$
$\therefore\ \theta=\angle\text{ABF}=30°$ (엇각)

참고 $\triangle$ABF와 $\triangle$ABC에서
$\overline{\text{BF}}=\overline{\text{BC}}$, $\overline{\text{AF}}=\overline{\text{AC}}$, $\overline{\text{AB}}$는 공통
이므로 $\triangle\text{ABF}\equiv\triangle\text{ABC}$ (SSS 합동)이다.
이때 $\overline{\text{AF}}=\overline{\text{BF}}=x_1+p$이므로 $\overline{\text{AC}}=\overline{\text{AF}}=\overline{\text{BF}}=\overline{\text{BC}}$
따라서 $\triangle$ABF와 $\triangle$ABC는 모두 이등변삼각형이다.

107 점 Q의 좌표를 $(x_1,\ y_1)$이라 하면 접선 l의 방정식은
$y_1y=x+x_1$, 즉
$x-y_1y+x_1=0$



직선 l이 원 $(x+7)^2+y^2=1$에 접하므로 원의 중심 C$(-7,\ 0)$과 직선 $x-y_1y+x_1=0$ 사이의 거리는 원의 반지름의 길이와 같다.

$$\frac{|-7+x_1|}{\sqrt{1^2+(-y_1)^2}}=1, \quad |x_1-7|=\sqrt{1+y_1^2}$$

이때 $y_1^2=2x_1$이므로

$$|x_1-7|=\sqrt{1+2x_1}$$

위의 식의 양변을 제곱하여 정리하면

$$x_1^2-16x_1+48=0$$

$$(x_1-4)(x_1-12)=0$$

$$\therefore x_1=4 \text{ 또는 } x_1=12$$

따라서 점 Q의 좌표는 $(4,\ 2\sqrt{2})$이므로 직각삼각형 CPQ에서

$$\overline{PQ}^2=\overline{CQ}^2-\overline{CP}^2$$

$$=\{(4+7)^2+(2\sqrt{2})^2\}-1^2$$

$$=128$$

답 128

$x_1=4$이면 $y_1=\pm2\sqrt{2}$, $x_1=12$이면 $y_1=\pm2\sqrt{6}$이고 $y_1y=x+x_1$, 즉 $y=\frac{1}{y_1}x+\frac{x_1}{y_1}$에서 $y_1=2\sqrt{2}$일 때 기울기가 가장 크다.

108 ㄱ. 점 P의 좌표를 $(x_1,\ y_1)$이라 하면 점 P에서의 접선 l_1의 방정식은

$$\frac{x_1x}{16}+\frac{y_1y}{7}=1 \qquad \therefore m_1=-\frac{7x_1}{16y_1}$$

점 P에서의 접선 l_2의 방정식은

$$y_1y=2p(x+x_1) \qquad \therefore m_2=\frac{2p}{y_1}$$

이때 $y_1^2=4px_1$이므로

$$m_1m_2=-\frac{7x_1}{16y_1}\cdot\frac{2p}{y_1}=-\frac{7px_1}{8y_1^2}$$

$$=-\frac{7px_1}{8\cdot4px_1}=-\frac{7}{32}$$

즉 m_1m_2의 값은 p의 값에 관계없이 항상 일정하다.

ㄴ. 접선 l_2의 방정식 $y_1y=2p(x+x_1)$에서 $y=0$일 때 $x=-x_1$이므로 점 B의 좌표는 $(-x_1,\ 0)$이다.

타원 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1$의 초점의 좌표는

$(3,\ 0)$, $(-3,\ 0)$

이고 $x_1>0$이므로

$$-x_1=-3 \qquad \therefore x_1=3$$

$x_1=3$을 $\frac{x_1^2}{16}+\frac{y_1^2}{7}=1$에 대입하면

$$\frac{9}{16}+\frac{y_1^2}{7}=1, \qquad y_1^2=\frac{49}{16}$$

$$\therefore y_1=\frac{7}{4}\ (\because y_1>0)$$

$$\therefore m_1=-\frac{7x_1}{16y_1}=-\frac{7\cdot3}{16\cdot\frac{7}{4}}=-\frac{3}{4}$$

ㄷ. 접선 l_1의 방정식 $\frac{x_1x}{16}+\frac{y_1y}{7}=1$에서 $y=0$일 때

$x=\frac{16}{x_1}$이므로 점 A의 좌표는 $\left(\frac{16}{x_1},\ 0\right)$이다.

$$\therefore \overline{AB}=\frac{16}{x_1}-(-x_1)$$

$$=\frac{16}{x_1}+x_1\ge2\sqrt{\frac{16}{x_1}\cdot x_1}=8$$

$\frac{16}{x_1}+x_1$에서 $x_1>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계가 성립한다.

이때 등호는 $\frac{16}{x_1}=x_1$, 즉 $x_1=4$일 때 성립하지만 $0<x_1<4$이므로 $\overline{AB}>8$이다.

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

109 쌍곡선 $3x^2-y^2=3$ 위의 점 $P(a,\ b)$에서의 접선의 방정식은

$$3ax-by=3$$

$y=0$일 때 $x=\frac{1}{a}$이므로 점 A의 좌표는 $\left(\frac{1}{a},\ 0\right)$이다.

또 쌍곡선의 점근선의 방정식은 $y=\pm\sqrt{3}x$이므로 기울기가 양수인 점근선 $y=\sqrt{3}x$와 직선 l의 교점의 x좌표는

$$3ax-\sqrt{3}bx=3, \qquad (3a-\sqrt{3}b)x=3$$

$$\therefore x=\frac{3}{3a-\sqrt{3}b}$$

$$\therefore B\left(\frac{3}{3a-\sqrt{3}b},\ \frac{3\sqrt{3}}{3a-\sqrt{3}b}\right)$$

이때 $3a^2-b^2=3$이므로 $\quad b=\sqrt{3a^2-3}\ (\because b>0)$

따라서 △OAB의 넓이는

$$S(a)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{a}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{3a-\sqrt{3}b}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2a(a-\sqrt{a^2-1})}$$

$$\therefore \lim_{a\to\infty}S(a)=\lim_{a\to\infty}\frac{\sqrt{3}}{2a(a-\sqrt{a^2-1})}$$

$$=\lim_{a\to\infty}\frac{\sqrt{3}(a+\sqrt{a^2-1})}{2a\{a^2-(a^2-1)\}}$$

$$=\lim_{a\to\infty}\frac{\sqrt{3}a+\sqrt{3a^2-3}}{2a}$$

$$=\lim_{a\to\infty}\frac{\sqrt{3}+\sqrt{3-\frac{3}{a^2}}}{2}$$

$$=\sqrt{3}$$

답 ③

110 타원 $x^2+3y^2=12$ 위의 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은

$$x_1x+3y_1y=12$$

이 직선이 점 $P(6,\ -2)$를 지나므로

$$6x_1-6y_1=12 \qquad \therefore y_1=x_1-2$$

이때 $x_1^2+3y_1^2=12$이므로

$$x_1^2+3(x_1-2)^2=12, \qquad x_1^2-3x_1=0$$

$$x_1(x_1-3)=0 \qquad \therefore x_1=0 \text{ 또는 } x_1=3$$

따라서 접점의 좌표는 $(0,\ -2)$, $(3,\ 1)$이므로 접선의 방정식은

$$y=-2 \text{ 또는 } x+y=4$$

직선 l이 y축과 만나는 점을 $Q(0,\ k)$라 하면 점 Q에서 두 직선 $y=-2$, $x+y=4$에 이르는 거리가 서로 같으므로

$k+2=\dfrac{|k-4|}{\sqrt{1^2+1^2}}$

$k+2=\dfrac{4-k}{\sqrt{2}}$ $(\because -2<k<4)$

$\sqrt{2}k+2\sqrt{2}=4-k,\quad (\sqrt{2}+1)k=4-2\sqrt{2}$

$\therefore k=\dfrac{4-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}=-8+6\sqrt{2}$

따라서 $a=-8$, $b=6$이므로 $\quad b-a=14$

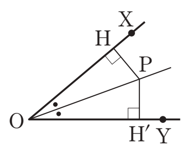
답 14

1등급 |비|밀|노|트|

$\angle$XOY의 이등분선 위의 임의의 점 P에서 반직선 OX, OY에 내린 수선의 발을 각각 H, H′이라 하면

$\triangle$HOP$\equiv\triangle$H′OP(RHA 합동)

이므로 $\quad \overline{\text{PH}}=\overline{\text{PH}'}$

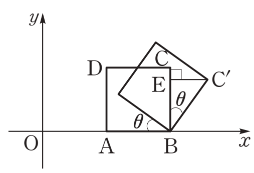


일품 BOX

타원의 두 접선의 y절편이 각각 -2, 4이므로 직선 l의 y절편인 k의 값의 범위는

$-2<k<4$

111 오른쪽 그림과 같이 점 C′에서 $\overline{\text{CB}}$에 내린 수선의 발을 E라 하면 점 C′의 x좌표는



$x=2+\overline{\text{C′E}}$

$=2+\overline{\text{C′B}}\sin\theta$

$=2+\sin\theta$

점 C′의 y좌표는

$y=\overline{\text{BE}}=\overline{\text{C′B}}\cos\theta=\cos\theta$

따라서 $\dfrac{dx}{d\theta}=\cos\theta$, $\dfrac{dy}{d\theta}=-\sin\theta$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

한편 $\sin\theta=\dfrac{1}{3}$일 때

$\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}$

$=\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^2}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\ \left(\because 0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$

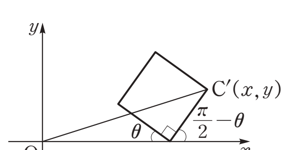
이므로 $\sin\theta=\dfrac{1}{3}$일 때 $\dfrac{dy}{dx}$의 값은

$$-\frac{\frac{1}{3}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}}=-\frac{\sqrt{2}}{4}$$

즉 $p=-\dfrac{\sqrt{2}}{4}$이므로 $\quad \dfrac{1}{p^2}=8$

답 8

다른 풀이 오른쪽 그림에서 점 C′의 x좌표는



$x=2+\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)$

$=2+\sin\theta$

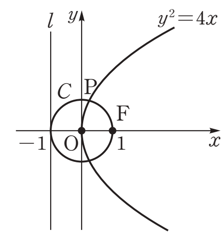
점 C′의 y좌표는

$y=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta$

1등급 완성하기 ▶ 본책 26쪽

112 포물선 $y^2=4x$의 초점은 F$(1,\ 0)$, 준선 l의 방정식은 $x=-1$이다.

오른쪽 그림과 같이 점 F를 지나고 직선 l에 접하는 원 중에서 넓이가 최소인 원은 포물선의 꼭짓점인 원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 1이므로 원 C의 방정식은



$x^2+y^2=1$

이때 원 C와 포물선 $y^2=4x$의 교점 P의 x좌표는

$x^2+4x=1,\quad x^2+4x-1=0$

$\therefore x=-2+\sqrt{5}\ (\because x>0)$

따라서 점 P와 준선 l 사이의 거리는

$-2+\sqrt{5}-(-1)=\sqrt{5}-1$

답 ①

113 점 C가 원점, 직선 CF가 x축이 되도록 포물선을 좌표평면 위에 놓고 포물선의 방정식을 $y^2=4px\ (p>0)$라 하면

C$(0,\ 0)$, F$(p,\ 0)$, A$(p,\ 2p)$, B$(p,\ -2p)$

$\overline{\text{AB}}=2p-(-2p)=4p=4$이므로 $\quad p=1$

따라서 $\triangle$ABC의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\cdot4p\cdot p=\dfrac{1}{2}\cdot4\cdot1=2$

답 2

114 오각형 APOQB의 넓이는 사각형 APOF의 넓이의 2배이다.

포물선 $y^2=12x=4\cdot3x$의 초점은 F$(3,\ 0)$이므로 A$(3,\ 6)$

점 P의 좌표를 $\left(\dfrac{t^2}{12},\ t\right)$라 하면

$\square$APOF$=\triangle$APF$+\triangle$POF

$=\dfrac{1}{2}\cdot6\cdot\left(3-\dfrac{t^2}{12}\right)+\dfrac{1}{2}\cdot3\cdot t$

$=-\dfrac{1}{4}t^2+\dfrac{3}{2}t+9$

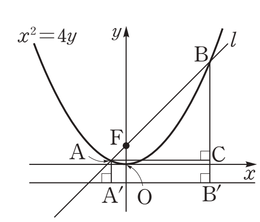
$=-\dfrac{1}{4}(t-3)^2+\dfrac{45}{4}$

따라서 $t=3$일 때 $\square$APOF의 넓이의 최댓값은 $\dfrac{45}{4}$이므로 오각형 APOQB의 넓이의 최댓값은

$2\cdot\dfrac{45}{4}=\dfrac{45}{2}$

답 ④

115 두 점 A, B에서 이 포물선의 준선에 내린 수선의 발을 각각 A′, B′이라 하면



$\overline{\text{AA}'}=\overline{\text{AF}}$,

$\overline{\text{BB}'}=\overline{\text{BF}}$

$\overline{AF} : \overline{BF} = 1 : 4$이므로

$\overline{AA'} = \overline{AF} = k$, $\overline{BB'} = \overline{BF} = 4k\ (k>0)$

라 하고 점 A에서 $\overline{BB'}$에 내린 수선의 발을 C라 하면

$\overline{AB} = \overline{AF} + \overline{BF} = 5k$, $\overline{BC} = \overline{BB'} - \overline{AA'} = 3k$

직각삼각형 ACB에서

$\overline{AC} = \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{BC}^2} = \sqrt{(5k)^2 - (3k)^2} = 4k$

따라서 직선 l의 기울기는

$\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \dfrac{3k}{4k} = \dfrac{3}{4}$ 답 ⑤

116 문제 이해 포물선의 초점이 $F(3,\ 0)$이므로 포물선의 방정식은

$y^2 = 4 \cdot 3x$, 즉 $y^2 = 12x$ ● 20%

해결 과정 점 P의 x좌표가 9이므로 $x=9$, $y=y_1$을 $y^2=12x$에 대입하면

$y_1^{\,2} = 12 \cdot 9 = 108$ $\therefore y_1 = 6\sqrt{3}\ (\because y_1>0)$

따라서 두 점 $P(9,\ 6\sqrt{3})$, $F(3,\ 0)$을 지나는 직선의 방정식은

$y = \dfrac{6\sqrt{3}-0}{9-3}(x-3)$ $\therefore x = \dfrac{y}{\sqrt{3}} + 3$ ● 30%

$x = \dfrac{y}{\sqrt{3}} + 3$을 $y^2 = 12x$에 대입하면

$y^2 = 12\left(\dfrac{y}{\sqrt{3}} + 3\right)$, $y^2 = 4\sqrt{3}y + 36$

$\therefore y^2 - 4\sqrt{3}y - 36 = 0$ ● 30%

답 구하기 이 이차방정식의 두 근이 y_1, y_2이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$y_1 + y_2 = 4\sqrt{3}$ ● 20%

답 $4\sqrt{3}$

117 두 초점의 좌표를 $F(c,\ 0)$, $F'(-c,\ 0)\ (c>0)$이라 하면 직선 PF'의 기울기는

$\dfrac{\overline{PF}}{\overline{FF'}} = \dfrac{\overline{PF}}{2c} = \dfrac{3}{4}$ $\therefore \overline{PF} = \dfrac{3}{2}c$

타원의 정의에 의하여 $\overline{PF} + \overline{PF'} = 2 \cdot 4 = 8$이므로

$\overline{PF'} = 8 - \dfrac{3}{2}c$

직각삼각형 $PF'F$에서 $\overline{PF'}^2 = \overline{FF'}^2 + \overline{PF}^2$이므로

$\left(8 - \dfrac{3}{2}c\right)^2 = (2c)^2 + \left(\dfrac{3}{2}c\right)^2$

$\dfrac{9}{4}c^2 - 24c + 64 = 4c^2 + \dfrac{9}{4}c^2$

$c^2 + 6c - 16 = 0$, $(c+8)(c-2) = 0$

$\therefore c = 2\ (\because c>0)$

따라서 $16 - k = c^2$에서 $k = 16 - 2^2 = 12$ 답 ④

118 문제 이해 타원 $\dfrac{x^2}{36} + \dfrac{y^2}{11} = 1$의 초점의 좌표는 $(5,\ 0)$, $(-5,\ 0)$이므로 두 점 A, B는 타원의 초점이다. ● 30%

일품 BOX

$\overline{OH} = \overline{OF} + \overline{FH}$
$= 3 + 6 = 9$
이므로 점 H의 x좌표와 점 P의 x좌표는 9이다.

두 삼각형의 높이가 같으므로 두 삼각형의 넓이의 비는 밑변의 길이의 비와 같다.

$y^2 - 4\sqrt{3}y - 36 = 0$에서
$(y + 2\sqrt{3})(y - 6\sqrt{3}) = 0$
$\therefore y = -2\sqrt{3}$ 또는 $y = 6\sqrt{3}$

점 P에서 두 점 C, O에 이르는 거리의 합이 일정하다.

해결 과정 타원의 정의에 의하여

$\overline{AP} + \overline{BP} = 12$ …… ㉠

$\overline{AQ} + \overline{BQ} = 12$ …… ㉡

$\overline{AR} + \overline{BR} = 12$ …… ㉢

㉠+㉡+㉢을 하면

$(\overline{AP} + \overline{AQ} + \overline{AR}) + (\overline{BP} + \overline{BQ} + \overline{BR}) = 36$ ● 50%

답 구하기 $\therefore \overline{BP} + \overline{BQ} + \overline{BR}$

$= 36 - (\overline{AP} + \overline{AQ} + \overline{AR})$

$= 36 - 16 = 20$ ● 20%

답 20

119 두 초점의 좌표를 $F(c,\ 0)$, $F'(-c,\ 0)\ (c>0)$이라 하면 $\triangle APA' = 3\triangle FPF'$에서 $\overline{AA'} = 3\overline{FF'}$

즉 $2a = 3 \cdot 2c$에서 $a = 3c$ …… ㉠

또 $\triangle FPF'$의 둘레의 길이가 16이므로

$\overline{PF} + \overline{PF'} + \overline{FF'} = 2a + 2c = 16$

$\therefore a + c = 8$ …… ㉡

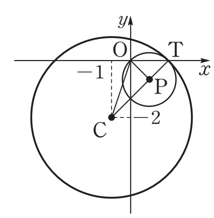
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=6$, $c=2$

$c^2 = a^2 - b^2$에서

$b^2 = 6^2 - 2^2 = 32$

$\therefore a^2 + b^2 = 6^2 + 32 = 68$ 답 68

120 원 $(x+1)^2 + (y+2)^2 = 9$의 중심을 C, 두 원의 접점을 T라 하면



$\overline{CP} + \overline{OP} = \overline{CP} + \overline{PT}$

$= 3$

이므로 점 P의 자취는 두 점 C, O를 초점으로 하는 타원이다.

즉 타원의 정의에 의하여 $2a = 3$이므로

$a = \dfrac{3}{2}$

$2c = \overline{OC} = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$이므로

$c = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$

$c^2 = a^2 - b^2$에서 $b^2 = \dfrac{9}{4} - \dfrac{5}{4} = 1$

$\therefore a^2 + b^2 + c^2 = \left(\dfrac{3}{2}\right)^2 + 1 + \left(\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \dfrac{9}{2}$ 답 $\dfrac{9}{2}$

121 문제 이해 두 점 P, Q의 x좌표를 각각 α, β라 하면

$P(\alpha,\ \alpha-2)$, $Q(\beta,\ \beta-2)$

이므로 선분 PQ의 중점 R의 좌표는

$R\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2},\ \dfrac{\alpha+\beta}{2} - 2\right)$ ● 30%

해결 과정 직선 $y = x - 2$와 타원 $\dfrac{x^2}{m} + \dfrac{y^2}{n} = 1$의 교점의 x좌표는

$$\frac{x^2}{m}+\frac{(x-2)^2}{n}=1, \text{ 즉}$$

$$(m+n)x^2-4mx+4m-mn=0$$

의 두 실근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=\frac{4m}{m+n}$$

따라서 점 R의 좌표는 $\left(\frac{2m}{m+n}, \frac{-2n}{m+n}\right)$ ● 40%

답 구하기 즉 직선 OR의 기울기는

$$\frac{\frac{-2n}{m+n}}{\frac{2m}{m+n}}=-\frac{n}{m}=\tan 120°=-\sqrt{3}$$

$$\therefore \frac{n}{m}=\sqrt{3}$$ ● 30%

답 $\sqrt{3}$

일품 BOX

이차방정식
$ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라 하면
$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$, $\alpha\beta=\frac{c}{a}$

$\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{2m}{m+n}$,
$\frac{\alpha+\beta}{2}-2=\frac{-2n}{m+n}$

세 수 a, b, c가 이 순서대로 등차수열을 이루면
$b=\frac{a+c}{2}$, 즉
$2b=a+c$

122 쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{8}=1$의 초점의 좌표는

$(2\sqrt{3}, 0)$, $(-2\sqrt{3}, 0)$

이므로 이 초점을 공유하는 쌍곡선의 방정식을

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0, b>0)$이라 하면

$a^2+b^2=(2\sqrt{3})^2=12$ …… ㉠

이때 점근선의 방정식이 $y=\pm\frac{b}{a}x$이므로

$\frac{b}{a}=1$ $\quad\therefore a=b$

$a=b$를 ㉠에 대입하면

$a^2+a^2=12$, $\quad a^2=6$ $\quad\therefore a=\sqrt{6}$ ($\because a>0$)

따라서 구하는 쌍곡선의 주축의 길이는

$2a=2\sqrt{6}$

답 ②

123 쌍곡선 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$의 초점의 좌표는

$\text{A}(-5, 0)$, $\text{B}(5, 0)$ $\quad\therefore \overline{\text{AB}}=10$

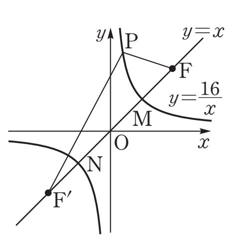
$\overline{\text{PA}}:\overline{\text{PB}}=3:1$이므로 $\overline{\text{PA}}=3k$, $\overline{\text{PB}}=k$ $(k>0)$라 하면 쌍곡선의 정의에 의하여

$\overline{\text{PA}}-\overline{\text{PB}}=3k-k=2\cdot4$ $\quad\therefore k=4$

따라서 $\overline{\text{PA}}=12$, $\overline{\text{PB}}=4$이므로 △ABP의 둘레의 길이는 $\quad\overline{\text{PA}}+\overline{\text{AB}}+\overline{\text{PB}}=26$

답 26

124 쌍곡선 $y=\frac{16}{x}$은 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 초점을 $\text{F}(c, c)$, $\text{F}'(-c, -c)$ $(c>0)$라 하자.



쌍곡선 $y=\frac{16}{x}$과 직선 $y=x$의 두 교점을 각각 M, N이라 하면

$\frac{16}{x}=x$, $\quad x^2=16$ $\quad\therefore x=\pm4$

$\therefore \text{M}(4, 4)$, $\text{N}(-4, -4)$

이때 주어진 쌍곡선의 주축의 길이는 $\overline{\text{MN}}$이므로 쌍곡선의 정의에 의하여

$|\overline{\text{PF}}-\overline{\text{PF}'}|=\overline{\text{MN}}=\sqrt{(-4-4)^2+(-4-4)^2}$
$=8\sqrt{2}$

답 $8\sqrt{2}$

125 **문제 이해** $\overline{\text{PF}}$, $\overline{\text{FF}'}$, $\overline{\text{PF}'}$의 길이가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2\overline{\text{FF}'}=\overline{\text{PF}}+\overline{\text{PF}'}$ ● 30%

해결 과정 쌍곡선 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{20}=1$의 초점은

$\text{F}(6, 0)$, $\text{F}'(-6, 0)$

이므로 $\quad\overline{\text{FF}'}=12$

$\therefore \overline{\text{PF}}+\overline{\text{PF}'}=24$ …… ㉠ ● 30%

쌍곡선의 정의에 의하여

$\overline{\text{PF}'}-\overline{\text{PF}}=2\cdot4=8$ …… ㉡ ● 20%

답 구하기 ㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$\overline{\text{PF}}=8$, $\overline{\text{PF}'}=16$ ● 20%

답 16

126 포물선 $y^2=4(x-2)$는 포물선 $y^2=4x$를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

이때 포물선 $y^2=4x$의 초점의 좌표가 $(1, 0)$이고 준선의 방정식이 $x=-1$이므로 포물선 $y^2=4(x-2)$의 초점은 $\text{C}(3, 0)$이고 준선의 방정식은 $x=1$이다.

또 포물선의 정의에 의하여

$\overline{\text{AB}}-1=\overline{\text{AC}}=5$ $\quad\therefore \overline{\text{AB}}=6$

따라서 점 A의 좌표는 $(6, 4)$, 점 B의 좌표는 $(0, 4)$이므로

$\triangle\text{ABC}=\frac{1}{2}\cdot6\cdot4=12$

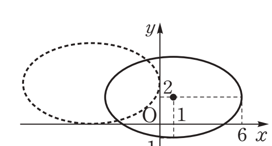
답 12

$x=6$을 $y^2=4(x-2)$에 대입하면
$y^2=16$
$\therefore y=4$ ($\because y>0$)

127 $9(x-1)^2+25(y-2)^2=225$에서

$$\frac{(x-1)^2}{25}+\frac{(y-2)^2}{9}=1$$

이 타원의 중심의 좌표가 $(1, 2)$이고 장축의 길이가 10, 단축의 길이가 6이므로 오른쪽 그림과 같이 타원을 x축의 방향으로 -6만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동하면 주어진 조건을 만족시키는 타원이 된다.



따라서 $a=-6$, $b=1$이므로 $\quad a+b=-5$

답 -5

128 $ax^2+y^2+by=0$에서

$$ax^2+\left(y+\frac{b}{2}\right)^2=\left(\frac{b}{2}\right)^2$$

$$\therefore \frac{x^2}{\frac{1}{a}\left(\frac{b}{2}\right)^2}+\frac{\left(y+\frac{b}{2}\right)^2}{\left(\frac{b}{2}\right)^2}=1 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

ㄱ. $a>1$이면 $\left(\frac{b}{2}\right)^2>\frac{1}{a}\left(\frac{b}{2}\right)^2>0$이므로 ㉠은 타원이고,

이 타원은 타원 $\frac{x^2}{\frac{1}{a}\left(\frac{b}{2}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{b}{2}\right)^2}=1$을 y축의 방향으로 $-\frac{b}{2}$만큼 평행이동한 것이므로 타원의 장축이 y축 위에 놓인다.

따라서 두 초점도 y축 위에 놓인다.

ㄴ. $0<a<1$이면 $0<\left(\frac{b}{2}\right)^2<\frac{1}{a}\left(\frac{b}{2}\right)^2$이므로 ㉠은 타원이고, 장축의 길이는 $2\sqrt{\frac{1}{a}\left(\frac{b}{2}\right)^2}=\frac{b}{\sqrt{a}}$

ㄷ. $a<0$이면 $-\frac{1}{a}\left(\frac{b}{2}\right)^2>0$이므로 ㉠에서

$$\frac{x^2}{-\frac{1}{a}\left(\frac{b}{2}\right)^2}-\frac{\left(y+\frac{b}{2}\right)^2}{\left(\frac{b}{2}\right)^2}=-1$$

따라서 주축의 길이가 $2\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2}=b$인 쌍곡선이다.

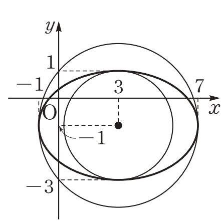
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

129 $x^2-6x+4y^2+8y-3=0$에서

$(x-3)^2+4(y+1)^2=16$

$$\therefore \frac{(x-3)^2}{16}+\frac{(y+1)^2}{4}=1$$

따라서 주어진 이차곡선은 타원 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$을 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.



원 $(x-3)^2+(y+1)^2=n^2$의 중심이 타원의 중심과 일치하므로

(i) $n=1$ 또는 $n=5$일 때, 만나지 않는다.

(ii) $n=2$ 또는 $n=4$일 때, 서로 다른 두 점에서 만난다.

(iii) $n=3$일 때, 서로 다른 네 점에서 만난다.

이상에서

$$\sum_{n=1}^{5} f(n)=f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)$$
$$=0+2+4+2+0=8$$

답 ①

1등급 비밀노트

타원과 원의 중심이 일치할 때, 타원의 장축의 길이를 $2a$, 단축의 길이를 $2b$, 원의 반지름의 길이를 r라 하면

① $r>a$ 또는 $0<r<b$ ➡ 만나지 않는다.

② $r=a$ 또는 $r=b$ ➡ 서로 다른 두 점에서 만난다.

③ $b<r<a$ ➡ 서로 다른 네 점에서 만난다.

일품 BOX

130 포물선 $y^2=2x$ 위의 점 P$(8,\ 4)$에서의 접선 l의 방정식은

$4y=x+8$, 즉 $y=\frac{1}{4}x+2$

포물선 $y^2=2x$ 위의 점 Q$(a,\ b)$에서의 접선 m의 방정식은

$by=x+a$, 즉 $y=\frac{1}{b}x+\frac{a}{b}$

$l\perp m$이므로

$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{b}=-1 \qquad \therefore b=-\frac{1}{4}$

이때 $b^2=2a$이므로

$\frac{1}{16}=2a \qquad \therefore a=\frac{1}{32}$

따라서 직선 m의 y절편은

$$\frac{a}{b}=\frac{\frac{1}{32}}{-\frac{1}{4}}=-\frac{1}{8}$$

답 ②

131 점 P의 좌표를 $(x_1,\ y_1)$이라 하면 점 P에서의 접선의 방정식은

$y_1y=2(x+x_1)$, 즉 $y=\frac{2}{y_1}x+\frac{2x_1}{y_1}$

이므로 점 Q의 좌표는 $\left(0,\ \frac{2x_1}{y_1}\right)$

점 Q를 지나고 $\overline{\text{PQ}}$에 수직인 직선의 방정식은

$y=-\frac{y_1}{2}x+\frac{2x_1}{y_1}$

$y=0$일 때 $x=\frac{4x_1}{y_1^2}=\frac{4x_1}{4x_1}=1$이므로 점 S의 좌표는

$(1,\ 0)$

점 P$(x_1,\ y_1)$은 포물선 $y^2=4x$ 위의 점이므로 $y_1^2=4x_1$

또 점 P를 지나고 $\overline{\text{PQ}}$에 수직인 직선의 방정식은

$y-y_1=-\frac{y_1}{2}(x-x_1)$

$y=0$일 때 $x=x_1+2$이므로 점 R의 좌표는

$(x_1+2,\ 0)$

즉 $\overline{\text{RS}}=x_1+1$이므로 $\quad x_1+1=5 \qquad \therefore x_1=4$

이때 $y_1^2=4x_1$이므로

$y_1^2=16 \qquad \therefore y_1=4\ (\because y_1>0)$

$\therefore$ P$(4,\ 4)$, Q$(0,\ 2)$, S$(1,\ 0)$, R$(6,\ 0)$

따라서

$\overline{\text{PR}}=\sqrt{(6-4)^2+(-4)^2}=2\sqrt{5}$,

$\overline{\text{QS}}=\sqrt{1^2+(-2)^2}=\sqrt{5}$,

$\overline{\text{PQ}}=\sqrt{(-4)^2+(2-4)^2}=2\sqrt{5}$

이므로 □PQSR의 넓이는

□PQSR는 $\overline{\text{PR}}\,/\!/\,\overline{\text{QS}}$인 사다리꼴이다.

$\frac{1}{2}\cdot(2\sqrt{5}+\sqrt{5})\cdot 2\sqrt{5}=15$

답 15

132 문제 이해 포물선 $y^2=16x$ 위의 점 P$(1,\ 4)$에서의 접선의 방정식은

$4y=8(x+1)$, 즉 $y=2x+2$

이므로 점 Q의 좌표는 $(-1,\ 0)$ ● 20%

해결 과정 포물선 $y^2=16x$의 초점은 $F(4,\ 0)$이므로

$\overline{PQ}=\sqrt{(-1-1)^2+(-4)^2}=2\sqrt{5}$,

$\overline{QF}=4-(-1)=5$,

$\overline{FP}=\sqrt{(1-4)^2+4^2}=5$ ● 20%

이때 $\triangle PQF$의 내접원의 반지름의 길이를 r라 하면 $\triangle PQF$의 넓이는

$\frac{1}{2}r(2\sqrt{5}+5+5)=\frac{1}{2}\cdot5\cdot4$

$r(5+\sqrt{5})=10$

$\therefore r=\frac{10}{5+\sqrt{5}}=\frac{5-\sqrt{5}}{2}$ ● 40%

답 구하기 따라서 $p=5,\ q=-1$이므로

$p^2+q^2=5^2+(-1)^2=26$ ● 20%

답 26

133 문제 이해 점 A의 좌표를 $(x_1,\ y_1)$이라 하면 점 A에서의 접선의 방정식은

$y_1y=2(x+x_1)$ ● 20%

해결 과정 이 직선이 점 $P(-2,\ -1)$을 지나므로

$-y_1=2(-2+x_1)$

$\therefore x_1=-\frac{1}{2}y_1+2$ ● 30%

이때 ${y_1}^2=4x_1$이므로

${y_1}^2=4\cdot\left(-\frac{1}{2}y_1+2\right)$, ${y_1}^2+2y_1-8=0$

$(y_1+4)(y_1-2)=0$ $\therefore y_1=2\ (\because y_1>0)$

$x_1=-\frac{1}{2}\cdot2+2=1$이므로

$A(1,\ 2)$ ● 30%

답 구하기 한편 포물선 $y^2=4x$의 준선의 방정식은 $x=-1$이므로

$H(-1,\ 2)$

$\therefore \overline{PH}=\sqrt{(-1+2)^2+(2+1)^2}=\sqrt{10}$ ● 20%

답 $\sqrt{10}$

134 점 P의 좌표를 $(x_1,\ y_1)$이라 하면 $H(x_1,\ 0)$이므로 $\overline{OH}=x_1$

점 P에서의 접선의 방정식은 $\frac{x_1x}{12}+\frac{y_1y}{3}=1$

$y=0$일 때 $x=\frac{12}{x_1}$이므로 $\overline{OQ}=\frac{12}{x_1}$

$\therefore \overline{OH}\cdot\overline{OQ}=x_1\cdot\frac{12}{x_1}=12$

답 ②

135 포물선 $y^2=x$ 위의 점 $(1,\ 1)$에서의 접선의 방정식은 $y=\frac{1}{2}(x+1)$ ······ ㉠

타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 $(1,\ 1)$에서의 접선의 방정식은

$\frac{x}{a^2}+\frac{y}{b^2}=1$, 즉 $y=-\frac{b^2}{a^2}x+b^2$ ······ ㉡

두 직선 ㉠, ㉡이 서로 수직이므로

$\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{b^2}{a^2}\right)=-1$, $\therefore b^2=2a^2$

이때 $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1$이므로

$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{2a^2}=1$, $\frac{3}{2a^2}=1$ $\therefore a^2=\frac{3}{2}$

따라서 $b^2=2\cdot\frac{3}{2}=3$이므로

$a^2+b^2=\frac{9}{2}$

답 ③

136 타원 $x^2+\frac{y^2}{3}=1$과 포물선 $y^2=8x$의 교점의 x좌표는

$x^2+\frac{8}{3}x=1$, $3x^2+8x-3=0$

$(x+3)(3x-1)=0$

$\therefore x=\frac{1}{3}\ (\because x>0)$

$\therefore P\left(\frac{1}{3},\ \frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$

포물선 $y^2=8x=4\cdot2x$의 준선 l의 방정식은 $x=-2$이고, 점 P에서의 포물선의 접선의 방정식은

$\frac{2\sqrt{6}}{3}y=4\left(x+\frac{1}{3}\right)$

$x=-2$일 때,

$\frac{2\sqrt{6}}{3}y=-\frac{20}{3}$ $\therefore y=-\frac{5\sqrt{6}}{3}$

$\therefore A\left(-2,\ -\frac{5\sqrt{6}}{3}\right)$

점 P에서의 타원의 접선의 방정식은

$\frac{1}{3}x+\frac{2\sqrt{6}}{9}y=1$

$x=-2$일 때,

$\frac{2\sqrt{6}}{9}y=\frac{5}{3}$ $\therefore y=\frac{5\sqrt{6}}{4}$

$\therefore B\left(-2,\ \frac{5\sqrt{6}}{4}\right)$

$\therefore \overline{AB}=\frac{5\sqrt{6}}{4}-\left(-\frac{5\sqrt{6}}{3}\right)=\frac{35\sqrt{6}}{12}$

따라서 $p=12,\ q=35$이므로

$p+q=47$

답 47

137 직선 AC와 타원이 제2사분면에서 접하는 점의 좌표를 $(x_1,\ y_1)$이라 하면 직선 AC의 방정식은

$\frac{x_1x}{9}+\frac{y_1y}{5}=1$

이 직선이 점 $A(-5,\ 0)$을 지나므로

$-\frac{5}{9}x_1=1$ $\therefore x_1=-\frac{9}{5}$

일품 BOX

세 변의 길이가 $a,\ b,\ c$인 $\triangle ABC$의 내접원의 반지름의 길이가 r일 때, $\triangle ABC=\frac{1}{2}r(a+b+c)$

점 $(1,\ 1)$은 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점이다.

$y^2=8\cdot\frac{1}{3}=\frac{8}{3}$에서 $y=\frac{2\sqrt{6}}{3}\ (\because y>0)$

이때 $\dfrac{x_1^{\,2}}{9}+\dfrac{y_1^{\,2}}{5}=1$이므로

$$\dfrac{\frac{81}{25}}{9}+\dfrac{y_1^{\,2}}{5}=1, \qquad \dfrac{y_1^{\,2}}{5}=\dfrac{16}{25}$$

$$y_1^{\,2}=\dfrac{16}{5} \qquad \therefore y_1=\dfrac{4\sqrt{5}}{5}\ (\because y_1>0)$$

따라서 직선 AC의 방정식은

$$-\dfrac{1}{5}x+\dfrac{4\sqrt{5}}{25}y=1$$

$x=3$일 때,

$$-\dfrac{3}{5}+\dfrac{4\sqrt{5}}{25}y=1, \qquad \dfrac{4\sqrt{5}}{25}y=\dfrac{8}{5}$$

$$\therefore y=2\sqrt{5}$$

따라서 점 C의 좌표는 $(3,\ 2\sqrt{5})$이고, 점 B는 점 C와 x축에 대하여 대칭이므로 점 B의 좌표는 $(3,\ -2\sqrt{5})$이다.

$$\therefore \overline{\mathrm{BC}}=2\sqrt{5}-(-2\sqrt{5})=4\sqrt{5}$$

답 ④

138 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{5}-\dfrac{y^2}{4}=1$의 초점은 $\mathrm{F}(3,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-3,\ 0)$이고, 점 Q가 선분 F′F를 2 : 1로 내분하므로 점 Q의 좌표는 $(1,\ 0)$이다.

쌍곡선 $\dfrac{x^2}{5}-\dfrac{y^2}{4}=1$ 위의 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$에서의 접선의 방정식은

$$\dfrac{ax}{5}-\dfrac{by}{4}=1$$

이 직선이 점 $\mathrm{Q}(1,\ 0)$을 지나므로

$$\dfrac{a}{5}=1 \qquad \therefore a=5$$

이때 $\dfrac{a^2}{5}-\dfrac{b^2}{4}=1$이므로

$$5-\dfrac{b^2}{4}=1, \qquad b^2=16 \qquad \therefore b=4\ (\because b>0)$$

$$\therefore a+b=9$$

답 9

139 해결 과정 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{6}-\dfrac{y^2}{2}=1$ 위의 점 $\mathrm{P}(3,\ 1)$에서의 접선의 방정식은

$$\dfrac{3x}{6}-\dfrac{y}{2}=1$$

$$\therefore x-y=2 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

● 20%

두 점근선의 방정식은

$$y=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}}x,\ 즉\ y=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}x \qquad \cdots\cdots ㉡$$

● 20%

㉠, ㉡에서 두 교점 A, B의 x좌표는

$$x-\dfrac{\sqrt{3}}{3}x=2에서 \qquad x=\dfrac{6}{3-\sqrt{3}}=3+\sqrt{3}$$

$$x+\dfrac{\sqrt{3}}{3}x=2에서 \qquad x=\dfrac{6}{3+\sqrt{3}}=3-\sqrt{3}$$

즉 두 점 A, B의 좌표는

$$\mathrm{A}(3+\sqrt{3},\ 1+\sqrt{3}),\ \mathrm{B}(3-\sqrt{3},\ 1-\sqrt{3})$$

● 40%

답 구하기 따라서 선분 AB의 길이는

$$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{\{3-\sqrt{3}-(3+\sqrt{3})\}^2+\{1-\sqrt{3}-(1+\sqrt{3})\}^2}$$

$$=\sqrt{(-2\sqrt{3})^2+(-2\sqrt{3})^2}=2\sqrt{6}$$

● 20%

답 $2\sqrt{6}$

140 쌍곡선 $4x^2-9y^2=36$ 위의 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은

$$4x_1x-9y_1y=36,\ 즉\ y=\dfrac{4x_1}{9y_1}x-\dfrac{4}{y_1}$$

이 접선의 기울기가 2이므로

$$\dfrac{4x_1}{9y_1}=2 \qquad \therefore 2x_1=9y_1$$

이때 $4x_1^{\,2}-9y_1^{\,2}=36$이므로

$$81y_1^{\,2}-9y_1^{\,2}=36, \qquad y_1^{\,2}=\dfrac{1}{2}$$

$$\therefore y_1=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$$

즉 접선의 방정식은

$$y=2x\pm4\sqrt{2}$$

$k>0$이므로 직선 $y=2x+4\sqrt{2}$를 x축의 방향으로 k만큼 평행이동하면 직선 $y=2x$와 일치한다.

따라서 $y=2(x-k)+4\sqrt{2}=2x-2k+4\sqrt{2}$에서

$$-2k+4\sqrt{2}=0 \qquad \therefore k=2\sqrt{2}$$

답 ②

141 ㄱ. 쌍곡선 $2x^2-y^2=4$, 즉 $\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{4}=1$의 초점의 좌표는

$$(\sqrt{6},\ 0),\ (-\sqrt{6},\ 0)$$

ㄴ. 쌍곡선 $2x^2-y^2=4$ 위의 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은

$$2x_1x-y_1y=4,\ 즉\ y=\dfrac{2x_1}{y_1}x-\dfrac{4}{y_1}$$

이 직선의 기울기가 $\sqrt{6}$이므로

$$\dfrac{2x_1}{y_1}=\sqrt{6} \qquad \therefore x_1=\dfrac{\sqrt{6}}{2}y_1$$

이때 $2x_1^{\,2}-y_1^{\,2}=4$이므로

$$3y_1^{\,2}-y_1^{\,2}=4, \qquad y_1^{\,2}=2 \qquad \therefore y_1=\pm\sqrt{2}$$

따라서 접선의 방정식은

$$y=\sqrt{6}x\pm2\sqrt{2}$$

이므로 접선의 y절편은 $\pm2\sqrt{2}$이다.

ㄷ. 기울기가 1인 접선의 방정식을 $y=x+k$라 하면

$2x^2-(x+k)^2=4$에서

$$x^2-2kx-k^2-4=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$$\dfrac{D}{4}=k^2+k^2+4=0 \qquad \therefore k^2=-2$$

이를 만족시키는 실수 k의 값은 존재하지 않으므로 기울기가 1인 접선은 존재하지 않는다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

일품 BOX

$\left(\dfrac{2\cdot3+1\cdot(-3)}{2+1},\ 0\right)$, 즉 $(1,\ 0)$

직선 $y=2x-4\sqrt{2}$를 x축의 방향으로 k만큼 평행이동하면

$y=2(x-k)-4\sqrt{2}$
$=2x-2k-4\sqrt{2}$

이때 $-2k-4\sqrt{2}<0$이므로 $y=2x$와 일치하는 양수 k의 값은 존재하지 않는다.

다른 풀이 ㄷ. 쌍곡선 위의 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식이 $y=\dfrac{2x_1}{y_1}x-\dfrac{4}{y_1}$이고 이 직선의 기울기가 1이면

$\dfrac{2x_1}{y_1}=1 \qquad \therefore 2x_1=y_1$

이때 $2x_1^{\,2}-y_1^{\,2}=4$이므로

$2x_1^{\,2}-4x_1^{\,2}=4 \qquad \therefore x_1^{\,2}=-2$

따라서 실수 x_1의 값이 존재하지 않으므로 기울기가 1인 접선은 존재하지 않는다.

142 **전략** 직선 CF와 쌍곡선의 점근선이 서로 수직임을 이용하여 점 C의 좌표를 구한다.

Step 1 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{16}=1$의 점근선의 방정식은

$y=\pm\dfrac{4}{2}x$, 즉 $y=\pm 2x$

Step 2 이때 직선 CF는 직선 $y=2x$와 서로 수직이므로 직선 CF의 기울기는 $-\dfrac{1}{2}$이고, 초점 F의 좌표는 $(2\sqrt{5},\ 0)$이므로 직선 CF의 방정식은

$y=-\dfrac{1}{2}(x-2\sqrt{5})$, 즉 $y=-\dfrac{1}{2}x+\sqrt{5}$

즉 점 C의 좌표는 $(0,\ \sqrt{5})$이므로

$\overline{OP}=\overline{OC}=\sqrt{5}$

$\triangle PF'F$에서 $\overline{F'F}$의 중점이 O이므로 $\overline{PF'}=a$, $\overline{PF}=b$라 하면

$a^2+b^2=2\{(\sqrt{5})^2+(2\sqrt{5})^2\}=50$

쌍곡선의 정의에 의하여

$a-b=2\cdot 2=4$

Step 3 따라서 $a^2+b^2=(a-b)^2+2ab$에서

$50=16+2ab \qquad \therefore ab=17$

$\therefore \overline{PF}\cdot\overline{PF'}=17$

답 17

143 **전략** 포물선 위의 점에서의 접선의 방정식을 이용하여 두 직선 l, m의 교점과 점 R의 좌표를 구한다.

Step 1 ㄱ. 점 $P(s^2,\ s)$에서의 접선 l의 방정식은

$sy=\dfrac{1}{2}(x+s^2)$, 즉 $y=\dfrac{1}{2s}x+\dfrac{1}{2}s$

점 $Q(t^2,\ t)$에서의 접선 m의 방정식은

$ty=\dfrac{1}{2}(x+t^2)$, 즉 $y=\dfrac{1}{2t}x+\dfrac{1}{2}t$

$l\perp m$이므로

$\dfrac{1}{2s}\cdot\dfrac{1}{2t}=-1 \qquad \therefore st=-\dfrac{1}{4}$

Step 2 ㄴ. 두 직선 l, m의 교점의 x좌표는

$\dfrac{1}{2s}x+\dfrac{1}{2}s=\dfrac{1}{2t}x+\dfrac{1}{2}t$

$\dfrac{t-s}{2st}x=\dfrac{1}{2}(t-s) \qquad \therefore x=st$

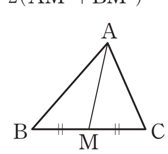
일품 BOX

점 R는 두 직선 l, m의 교점을 지나고 x축에 평행한 직선 위에 있으므로 교점과 y좌표가 같다.

$\triangle ABC$에서 $\overline{BC}$의 중점을 M이라 할 때,

$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2$

$=2(\overline{AM}^2+\overline{BM}^2)$



$\therefore y=\dfrac{1}{2s}\cdot st+\dfrac{1}{2}s=\dfrac{1}{2}(s+t)$

따라서 점 R의 y좌표가 $\dfrac{1}{2}(s+t)$이므로 점 R는 선분 PQ의 중점이다.

Step 3 ㄷ. 포물선 $y^2=x=4\cdot\dfrac{1}{4}x$의 초점의 좌표는 $\left(\dfrac{1}{4},\ 0\right)$이고, 직선 PQ의 방정식은

$y-s=\dfrac{s-t}{s^2-t^2}(x-s^2)$, 즉

$y=\dfrac{1}{s+t}(x-s^2)+s$

$x=\dfrac{1}{4}$을 위의 식에 대입하면

$y=\dfrac{1}{s+t}\left(\dfrac{1}{4}-s^2\right)+s$

ㄱ에서 $st=-\dfrac{1}{4}$이므로

$y=\dfrac{1}{s+t}(-st-s^2)+s=\dfrac{-s(s+t)}{s+t}+s$

$=-s+s=0$

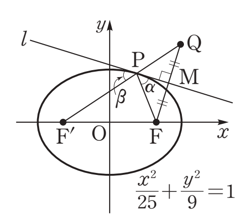
따라서 직선 PQ는 포물선의 초점 $\left(\dfrac{1}{4},\ 0\right)$을 지난다.

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ④

144 **전략** 주어진 타원의 성질을 이용하여 $\overline{F'Q}$의 길이를 구한다.

Step 1 오른쪽 그림과 같이 직선 l과 선분 FQ의 교점을 M이라 하고, 두 직선 PF, PF'이 직선 l과 이루는 각의 크기를 각각 α, β라 하면 주어진 타원의 성질에 의하여



$\alpha=\beta$이고 $\triangle PFM\equiv\triangle PQM$이므로 $\angle QPM=\beta$이다.

따라서 세 점 F', P, Q는 한 직선 위에 있다.

Step 2 타원의 정의에 의하여

$\overline{PF'}+\overline{PF}=2\cdot 5=10$

$\overline{PF}=\overline{PQ}$이므로 $\qquad \overline{PF'}+\overline{PQ}=10$

$\therefore \overline{F'Q}=10$

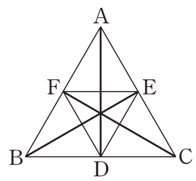
Step 3 따라서 점 Q가 나타내는 도형은 점 F'을 중심으로 하고 반지름의 길이가 10인 원이므로 구하는 도형의 둘레의 길이는 20π이다.

답 20π

Ⅱ 평면벡터

03 벡터의 연산 본책 32쪽

145 △ABC는 한 변의 길이가 2인 정삼각형이므로



$\overline{AD}=\overline{BE}=\overline{CF}$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 2=\sqrt{3}$

따라서 크기가 $\sqrt{3}$인 벡터는

$\overrightarrow{AD},\ \overrightarrow{DA},\ \overrightarrow{BE},\ \overrightarrow{EB},\ \overrightarrow{CF},\ \overrightarrow{FC}$

의 6개이다. 답 6

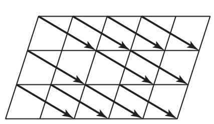
일품 BOX: 한 변의 길이가 a인 정삼각형의 높이는 $\frac{\sqrt{3}}{2}a$이다.

146 $\overline{AC}=\sqrt{6^2+8^2}=10$이고, 점 M은 직각삼각형 ABC의 외심이므로

$|\overrightarrow{BM}|=\frac{1}{2}\overline{AC}=\frac{1}{2}\cdot 10=5$ 답 5

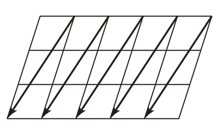
일품 BOX: 직각삼각형의 외심은 빗변의 중점과 일치한다.

147 $\vec{a}$와 시점은 다르지만 서로 같은 벡터는 오른쪽 그림과 같이 11개이다.



$\therefore m=11$

또 $\vec{b}$와 크기는 같으나 방향이 반대인 벡터는 오른쪽 그림과 같이 5개이다.



$\therefore n=5$

$\therefore m+n=16$ 답 16

148 ㄱ. $\overrightarrow{OC}=-\overrightarrow{OA}=-\vec{a}$

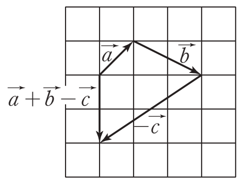
ㄴ. $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}=-\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=-\vec{b}-\vec{a}$

ㄷ. $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC}=-\overrightarrow{OB}-(-\overrightarrow{OA})=-\vec{b}+\vec{a}$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

149 $\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$는 오른쪽 그림과 같으므로

$|\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}|=2$ 답 ②



150 $2\vec{x}-3\vec{y}=\vec{a}$ …… ㉠

$\vec{x}-2\vec{y}=\vec{b}$ …… ㉡

㉠－㉡×2를 하면 $\vec{y}=\vec{a}-2\vec{b}$ …… ㉢

㉢을 ㉡에 대입하여 정리하면 $\vec{x}=2\vec{a}-3\vec{b}$

$\therefore \vec{x}+2\vec{y}=2\vec{a}-3\vec{b}+2(\vec{a}-2\vec{b})=4\vec{a}-7\vec{b}$ 답 ④

151 $\vec{x}+3\vec{y}=-\vec{a}+8\vec{b}$ …… ㉠

$2\vec{x}-\vec{y}=5\vec{a}-5\vec{b}$ …… ㉡

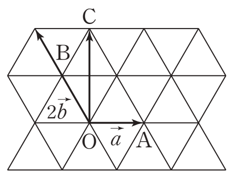
㉠×2－㉡을 하면 $7\vec{y}=-7\vec{a}+21\vec{b}$

$\therefore \vec{y}=-\vec{a}+3\vec{b}$ …… ㉢

㉢을 ㉠에 대입하여 정리하면 $\vec{x}=2\vec{a}-\vec{b}$

$\therefore \vec{x}+\vec{y}=2\vec{a}-\vec{b}+(-\vec{a}+3\vec{b})=\vec{a}+2\vec{b}$

오른쪽 그림에서 $\vec{a}+2\vec{b}=\overrightarrow{OC}$이고 한 변의 길이가 1인 정삼각형의 높이는 $\frac{\sqrt{3}}{2}$이므로



$|\vec{x}+\vec{y}|=2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$ 답 ②

152 $2(2\vec{a}-\vec{x})-3(\vec{b}-\vec{a})=-\vec{x}$에서

$4\vec{a}-2\vec{x}-3\vec{b}+3\vec{a}=-\vec{x}$ $\therefore \vec{x}=7\vec{a}-3\vec{b}$

따라서 $m=7,\ n=-3$이므로 $m+n=4$ 답 4

153 $\overrightarrow{AB}+a\overrightarrow{BC}=b\overrightarrow{AB}+5\overrightarrow{AC}$

$=b\overrightarrow{AB}+5(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})$

$=(b+5)\overrightarrow{AB}+5\overrightarrow{BC}$

두 벡터 $\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{BC}$는 서로 평행하지 않으므로

$1=b+5,\ a=5$ $\therefore a=5,\ b=-4$

$\therefore a-b=9$ 답 9

일품 BOX: 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있지 않으므로 두 벡터 $\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{BC}$는 평행하지 않다.

154 $\vec{p}+\vec{q}=\vec{0}$에서

$l\vec{a}+m\vec{b}+(-4\vec{a}+n\vec{b})=\vec{0}$

$\therefore (l-4)\vec{a}+(m+n)\vec{b}=\vec{0}$

두 벡터 $\vec{a},\ \vec{b}$가 서로 평행하지 않으므로

$l-4=0,\ m+n=0$

$\therefore l=4,\ m=-n$ …… ㉠

또 두 벡터 $\vec{q},\ \vec{r}$가 서로 평행하므로

$\vec{q}=k\vec{r}\ (k\neq 0)$

라 하면 $-4\vec{a}+n\vec{b}=k(n\vec{a}-2\vec{b})$이므로

$-4=kn,\ n=-2k$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$k=\pm\sqrt{2},\ n=\mp 2\sqrt{2}$ (복호동순) …… ㉡

㉠, ㉡에서

$l=4,\ m=\pm 2\sqrt{2},\ n=\mp 2\sqrt{2}$ (복호동순)

$\therefore l^2+m^2+n^2=16+8+8=32$ 답 32

일품 BOX: $n=-2k$를 $-4=kn$에 대입하면 $-4=-2k^2,\ k^2=2$ $\therefore k=\pm\sqrt{2}$

155 세 점 P, Q, R가 한 직선 위에 있으려면

$\overrightarrow{PR}=m\overrightarrow{PQ}\ (m\neq 0)$

가 성립해야 한다. 이때

$\overrightarrow{PR}=\overrightarrow{OR}-\overrightarrow{OP}=(k\vec{p}+4\vec{q})-\vec{p}=(k-1)\vec{p}+4\vec{q}$,

$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}=\vec{q}-\vec{p}$

이므로

$(k-1)\vec{p}+4\vec{q}=m(\vec{q}-\vec{p})$

$\therefore (k-1)\vec{p}+4\vec{q}=-m\vec{p}+m\vec{q}$

두 벡터 $\vec{p},\ \vec{q}$가 서로 평행하지 않으므로

$k-1=-m,\ 4=m$

$\therefore k=-3$ 답 ③

156 단위벡터는

$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{DC}$

의 6개이므로 $m=6$

크기가 2인 벡터는

$\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BE}, \overrightarrow{CF}, \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{EB}, \overrightarrow{FC}$

의 6개이므로 $n=6$

$\therefore m+n=12$

답 12

157 $\vec{x}=k\overrightarrow{AB}\,(k<0)$인 벡터 $\vec{x}$는 벡터 $\overrightarrow{AB}$와 방향이 반대인 벡터이다.

이때 세 선분 BA, CG, DF는 서로 평행하므로 벡터 $\overrightarrow{AB}$와 방향이 반대인 벡터는

$\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CG}, \overrightarrow{DF}$

따라서 구하는 원소의 개수는 3이다.

답 ③

158 $3\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{BC}+2\overrightarrow{AC}$

$=3\overrightarrow{AB}-2(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})+2\overrightarrow{AC}$

$=3\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}$

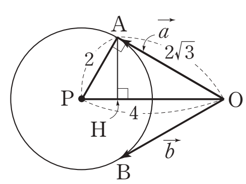
$=5\overrightarrow{AB}$

$\therefore |3\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{BC}+2\overrightarrow{AC}|$

$=|5\overrightarrow{AB}|=5\cdot1=5$

답 ④

159 점 A에서 $\overline{OP}$에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\overline{OP}=\sqrt{2^2+(2\sqrt{3})^2}=4$이므로 △OAP에서

$\frac{1}{2}\cdot2\cdot2\sqrt{3}=\frac{1}{2}\cdot4\cdot\overline{AH}$

$\therefore \overline{AH}=\sqrt{3}$

이때 △AHO에서 $\overline{OH}=\sqrt{(2\sqrt{3})^2-(\sqrt{3})^2}=3$이므로

$|\overrightarrow{OP}|:|\overrightarrow{OH}|=4:3$

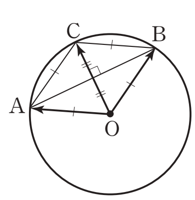
$\therefore \overrightarrow{OP}=\frac{4}{3}\overrightarrow{OH}=\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})=\frac{2}{3}(\vec{a}+\vec{b})$

답 ⑤

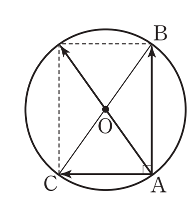
다른 풀이 △OAP에서 $\overline{OA}^2=\overline{OH}\cdot\overline{OP}$

$(2\sqrt{3})^2=\overline{OH}\cdot4$ $\quad\therefore \overline{OH}=3$

160 ㄱ. 오른쪽 그림과 같이 원 위의 임의의 점 A에 대하여 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$를 만족시키는 두 점 B, C가 항상 존재한다.



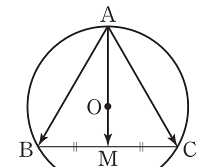
ㄴ. $\angle BAC=90^\circ$이면 $\overline{BC}$는 원 O의 지름이므로 오른쪽 그림에서



$|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|=2|\overrightarrow{AO}|$

$=2$

ㄷ. △ABC가 정삼각형이면 정삼각형의 외접원의 중심은 무게중심과 같으므로 $\overline{BC}$의 중점을 M이라 하면



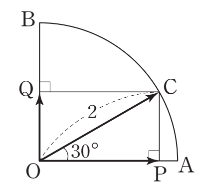
$|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|=2|\overrightarrow{AM}|$

$=2\cdot\frac{3}{2}|\overrightarrow{AO}|=|3\overrightarrow{AO}|=3$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

161 (문제 이해) 점 C에서 $\overline{OA}$와 $\overline{OB}$에 내린 수선의 발을 각각 P, Q라 하면



$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}$ ● 30%

(해결 과정) $\angle AOC=30^\circ$, $\overline{OC}=2$이므로

$\overline{OP}=\overline{OC}\cos30^\circ=\sqrt{3}$,

$\overline{OQ}=\overline{CP}=\overline{OC}\sin30^\circ=1$ ● 20%

즉 $\overrightarrow{OP}=\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{a}$, $\overrightarrow{OQ}=\frac{1}{2}\vec{b}$이므로

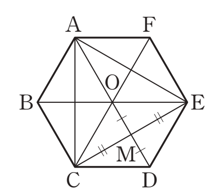
$\overrightarrow{OC}=\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$ ● 30%

(답 구하기) 따라서 $m=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $n=\frac{1}{2}$이므로

$m^2+n^2=1$ ● 20%

답 1

162 (해결 과정) 오른쪽 그림과 같이 정육각형의 세 대각선 AD, BE, CF의 교점을 O라 하면 □ABOF는 평행사변형이므로 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AO}$ ● 30%



$\therefore \overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AF}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AF})+2\overrightarrow{AD}$

$=\overrightarrow{AO}+2\overrightarrow{AD}$

$=\overrightarrow{AO}+4\overrightarrow{AO}$

$=5\overrightarrow{AO}$ ● 30%

또 $\overline{CE}$의 중점을 M이라 하면

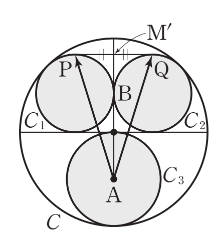
$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AE}=2\overrightarrow{AM}=2\cdot\frac{3}{2}\overrightarrow{AO}=3\overrightarrow{AO}$ ● 30%

(답 구하기) 따라서 $5\overrightarrow{AO}=k\cdot3\overrightarrow{AO}$에서

$k=\frac{5}{3}$ ● 10%

답 $\frac{5}{3}$

163 두 점 P, Q는 직선 AB에 대하여 대칭이므로 $\overline{PQ}$의 중점을 M이라 하면 점 M은 항상 직선 AB 위에 있다.



이때 $|\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AQ}|=2|\overrightarrow{AM}|$이므로 $|\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AQ}|$의 값이 최대가 되려면 $\overline{AM}$의 길이가 최대이어야 한다.

일품 BOX

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{ED}$, $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{FE}$, $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{FA}$

△OAB는 $\overline{OA}=\overline{OB}$인 이등변삼각형이므로 점 H는 $\overline{AB}$의 중점이다.

$\therefore \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=2\overrightarrow{OH}$

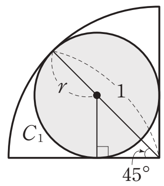
점 O는 △ACE의 무게중심이므로

$\overline{AO}=\frac{2}{3}\overline{AM}$

$\therefore \overline{AM}=\frac{3}{2}\overline{AO}$

직선 PQ가 두 원 C_1, C_2에 모두 접할 때, 직선 PQ와 직선 AB가 만나는 점을 M′이라 하면 $\overline{\mathrm{BM'}}$의 길이는 두 원 C_1, C_2의 반지름의 길이와 같다.

한편 오른쪽 그림과 같이 원 C_1의 반지름의 길이를 r라 하면



$$r+\sqrt{2}r=1$$

$$\therefore r=\frac{1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}-1$$

즉 $\overline{\mathrm{BM'}}=r=\sqrt{2}-1$이고

$$\overline{\mathrm{AM}}\le\overline{\mathrm{AM'}}=2(\sqrt{2}-1)+\frac{1}{2}=2\sqrt{2}-\frac{3}{2}$$

이므로 $\overline{\mathrm{AM}}$의 길이의 최댓값은 $2\sqrt{2}-\frac{3}{2}$이다.

따라서 $2|\overrightarrow{\mathrm{AM}}|$, 즉 $|\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{AQ}}|$의 최댓값은

$$2\left(2\sqrt{2}-\frac{3}{2}\right)=4\sqrt{2}-3$$

답 ①

164 $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{DC}}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AD}})$

$$=\frac{1}{3}(\vec{b}-2\vec{a})=-\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$$

따라서 $m=-\frac{2}{3}$, $n=\frac{1}{3}$이므로

$$m+n=-\frac{1}{3}$$

답 $-\frac{1}{3}$

165 ㄱ. $\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PC}}+\overrightarrow{\mathrm{PD}}=\overrightarrow{\mathrm{AD}}$에서

$$\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PC}}+\overrightarrow{\mathrm{PD}}=\overrightarrow{\mathrm{PD}}-\overrightarrow{\mathrm{PA}}$$

$$\therefore 2\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\vec{0}$$

ㄴ. $2\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\vec{0}$에서

$$2(\overrightarrow{\mathrm{BA}}-\overrightarrow{\mathrm{BP}})+\overrightarrow{\mathrm{PB}}+(\overrightarrow{\mathrm{BC}}-\overrightarrow{\mathrm{BP}})=\vec{0}$$

$$2\overrightarrow{\mathrm{BA}}+2\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}=\vec{0}$$

$$4\overrightarrow{\mathrm{PB}}=-2\overrightarrow{\mathrm{BA}}-\overrightarrow{\mathrm{BC}}$$

$$\therefore \overrightarrow{\mathrm{PB}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{4}\vec{b}$$

ㄷ. $\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\vec{b}$에서 $\overrightarrow{\mathrm{PC}}-\overrightarrow{\mathrm{PB}}=\vec{b}$이므로

$$\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\vec{b}=\left(\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{4}\vec{b}\right)+\vec{b}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{3}{4}\vec{b}$$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

166 $\overrightarrow{\mathrm{PA}}+2\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PC}}+2\overrightarrow{\mathrm{PD}}$

$$=-\overrightarrow{\mathrm{AP}}+2(\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}})+(\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}})+2(\overrightarrow{\mathrm{AD}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}})$$

$$=2\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}+2\overrightarrow{\mathrm{AD}}-6\overrightarrow{\mathrm{AP}}$$

$$=2(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}})+\overrightarrow{\mathrm{AC}}-6\overrightarrow{\mathrm{AP}}$$

$$=3\overrightarrow{\mathrm{AC}}-6\overrightarrow{\mathrm{AP}}$$

일품 BOX: $\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

이므로 $3\overrightarrow{\mathrm{AC}}-6\overrightarrow{\mathrm{AP}}=k\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

$$\therefore \overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{3-k}{6}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

따라서 점 P는 직선 AC 위에 있고, 점 P가 직사각형 ABCD의 내부에 있으려면 두 점 A, C를 제외한 $\overline{\mathrm{AC}}$ 위에 있어야 하므로

$$0<\frac{3-k}{6}<1,\qquad 0<3-k<6$$

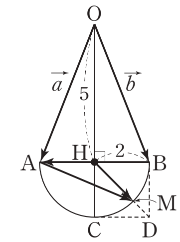
$$\therefore -3<k<3$$

즉 정수 k는 -2, -1, 0, 1, 2이므로 구하는 합은

$$-2+(-1)+0+1+2=0$$

답 0

167 문제 이해 꼭짓점 O에서 $\overline{\mathrm{AB}}$에 내린 수선의 발을 H, $\overline{\mathrm{OH}}$의 연장선이 반원과 만나는 점을 C라 하면



일품 BOX: 점 H는 반원의 중심과 일치한다.

$$\overrightarrow{\mathrm{AM}}=\overrightarrow{\mathrm{HM}}-\overrightarrow{\mathrm{HA}}$$ ● 40%

해결 과정 이때

$$\overrightarrow{\mathrm{HA}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{BA}}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}})$$

$$=\frac{1}{2}(\vec{a}-\vec{b}),$$

$$\overrightarrow{\mathrm{HM}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{\mathrm{HD}}=\frac{\sqrt{2}}{2}(\overrightarrow{\mathrm{HB}}+\overrightarrow{\mathrm{HC}})$$

일품 BOX: 정사각형 HCDB에서 $\overline{\mathrm{HD}}=2\sqrt{2}$, $\overline{\mathrm{HM}}=2$이므로

$$\overrightarrow{\mathrm{HM}}=\frac{2}{2\sqrt{2}}\overrightarrow{\mathrm{HD}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{\mathrm{HD}}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left\{\frac{1}{2}(\vec{b}-\vec{a})+\frac{1}{5}(\vec{a}+\vec{b})\right\}$$

일품 BOX:

$$\overrightarrow{\mathrm{HB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\vec{b}-\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})=\frac{1}{2}(\vec{b}-\vec{a})$$

$$\overrightarrow{\mathrm{HC}}=\frac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})=\frac{1}{5}(\vec{a}+\vec{b})$$

$$=-\frac{3\sqrt{2}}{20}\vec{a}+\frac{7\sqrt{2}}{20}\vec{b}$$

이므로

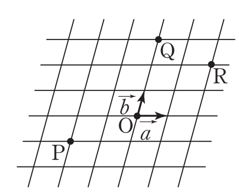
$$\overrightarrow{\mathrm{AM}}=-\frac{3\sqrt{2}+10}{20}\vec{a}+\frac{7\sqrt{2}+10}{20}\vec{b}$$ ● 50%

답 구하기 따라서 $s=-\frac{3\sqrt{2}+10}{20}$, $t=\frac{7\sqrt{2}+10}{20}$이므로

$$s+t=\frac{\sqrt{2}}{5}$$ ● 10%

답 $\frac{\sqrt{2}}{5}$

168 오른쪽 그림과 같이 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$를 잡으면



$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=-2\vec{a}-\vec{b},$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=3\vec{b},$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=2\vec{a}+2\vec{b}$$

이므로

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=s\overrightarrow{\mathrm{OP}}+t\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$$

$$=s(-2\vec{a}-\vec{b})+t\cdot 3\vec{b}$$

$$=-2s\vec{a}+(-s+3t)\vec{b}$$

즉 $-2s\vec{a}+(-s+3t)\vec{b}=2\vec{a}+2\vec{b}$에서 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$는 서로 평행하지 않으므로

$$-2s=2,\quad -s+3t=2$$

따라서 $s=-1$, $t=\frac{1}{3}$이므로

$$s+t=-\frac{2}{3}$$

답 ①

169 $3\overrightarrow{\mathrm{AP}}=4\overrightarrow{\mathrm{AB}}$에서

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\frac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{AP}} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

Ⅱ 평면벡터

$3\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{AQ}$에서 $3(\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{AP})=\overrightarrow{AQ}$

$\therefore \overrightarrow{AQ}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AP}$ …… ㉡

$\overrightarrow{QB}=-3\overrightarrow{PR}$에서

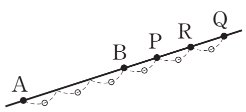
$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AQ}=3(\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AR})$ …… ㉢

㉠, ㉡을 ㉢에 대입하면

$\frac{3}{4}\overrightarrow{AP}-\frac{3}{2}\overrightarrow{AP}=3\overrightarrow{AP}-3\overrightarrow{AR}$

$3\overrightarrow{AR}=\frac{15}{4}\overrightarrow{AP}$ $\therefore \overrightarrow{AR}=\frac{5}{4}\overrightarrow{AP}$ …… ㉣

㉠, ㉡, ㉣에서 평면 위의 다섯 개의 점 A, B, P, Q, R는 오른쪽 그림과 같이 한 직선 위에 있다.



따라서 점 A에서 가까운 점부터 차례대로 나열하면 B, P, R, Q이다.

답 ②

170 문제 이해 $\vec{a}-3\vec{b}+t(\vec{b}-2\vec{c})+4\vec{c}=\vec{0}$에서

$\vec{a}-3\vec{b}+t\vec{b}-2t\vec{c}+4\vec{c}=\vec{0}$

$\therefore \vec{a}+(t-3)\vec{b}+2(2-t)\vec{c}=\vec{0}$ ● 30%

해결 과정 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 서로 평행하므로

$\vec{a}=k\vec{b}\ (k\neq 0)$라 하면

$k\vec{b}+(t-3)\vec{b}+2(2-t)\vec{c}=\vec{0}$

$\therefore (k+t-3)\vec{b}+2(2-t)\vec{c}=\vec{0}$ ● 30%

두 벡터 $\vec{b}$, $\vec{c}$는 서로 평행하지 않으므로

$k+t-3=0,\ 2-t=0$ ● 30%

답 구하기 $\therefore t=2,\ k=1$ ● 10% 답 2

171 $\overrightarrow{BA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$라 하면

$\overrightarrow{BP}=\frac{1}{4}\vec{a},\ \overrightarrow{BQ}=\frac{1}{5}(\vec{a}+\vec{b})$

이때

$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{BQ}-\overrightarrow{BP}=\frac{1}{5}(\vec{a}+\vec{b})-\frac{1}{4}\vec{a}=-\frac{1}{20}\vec{a}+\frac{1}{5}\vec{b},$

$\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BP}=-\frac{1}{4}\vec{a}+\vec{b}$

이므로 $\overrightarrow{PC}=k\overrightarrow{PQ}$에서

$-\frac{1}{4}\vec{a}+\vec{b}=k\left(-\frac{1}{20}\vec{a}+\frac{1}{5}\vec{b}\right)=-\frac{k}{20}\vec{a}+\frac{k}{5}\vec{b}$

즉 $-\frac{k}{20}=-\frac{1}{4},\ \frac{k}{5}=1$이므로 $k=5$

답 5

172 $\overrightarrow{DA}+2\overrightarrow{DB}+4\overrightarrow{DC}=2\overrightarrow{AB}$에서

$\overrightarrow{DA}+2\overrightarrow{DB}+4\overrightarrow{DC}=2(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB})$

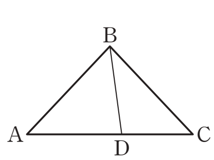
$\overrightarrow{DA}-2\overrightarrow{AD}=-4\overrightarrow{DC}$

$\therefore 3\overrightarrow{AD}=4\overrightarrow{DC}$

따라서 점 D는 $\overline{AC}$를 $4:3$으로 내분하는 점이므로

$\frac{S_2}{S_1}=\frac{3}{4}$

답 ②



일품 BOX

• 두 삼각형 ABD, BCD는 높이가 같으므로 넓이의 비는 밑변의 길이의 비와 같다. 즉 $S_1:S_2=\overline{AD}:\overline{DC}$

173 문제 이해 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$라 하면

$\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{5}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{5}\vec{b}$

$\overrightarrow{AD}=t\overrightarrow{AE}=t\left(\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{5}\vec{b}\right)$

$=\frac{1}{2}t\vec{a}+\frac{1}{5}t\vec{b}\ (t\neq 0)$ ● 30%

해결 과정 세 점 B, D, C가 한 직선 위에 있으므로

$\overrightarrow{BD}=m\overrightarrow{BC}\ (m\neq 0)$라 하면

$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}t\vec{a}+\frac{1}{5}t\vec{b}-\vec{a}$

$=\left(\frac{1}{2}t-1\right)\vec{a}+\frac{1}{5}t\vec{b},$

$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}$

이므로 $\left(\frac{1}{2}t-1\right)\vec{a}+\frac{1}{5}t\vec{b}=m(\vec{b}-\vec{a})$ ● 40%

$\frac{1}{2}t-1=-m,\ \frac{1}{5}t=m$

위의 두 식을 연립하여 풀면

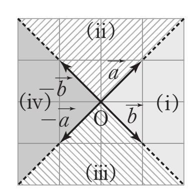
$m=\frac{2}{7},\ t=\frac{10}{7}$ ● 20%

답 구하기 따라서 $\overrightarrow{AD}=\frac{10}{7}\overrightarrow{AE}$이므로

$|\overrightarrow{AE}|=\frac{7}{10}|\overrightarrow{AD}|=\frac{7}{10}\times 30=21$ ● 10%

답 21

174 네 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $-\vec{a}$, $-\vec{b}$가 오른쪽 그림과 같으므로 벡터 $m\vec{a}+n\vec{b}$의 시점을 O라 할 때, 종점이 존재하는 영역은 다음과 같이 4가지로 나눌 수 있다. (단, 경계선 제외)



(i) $m>0,\ n>0$ (ii) $m>0,\ n<0$

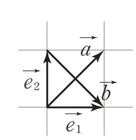
(iii) $m<0,\ n>0$ (iv) $m<0,\ n<0$

따라서 집합 C의 원소가 될 수 있는 벡터는 영역 (ii), (iii)에 있는 벡터 $\vec{p}$, $\vec{r}$, $\vec{u}$의 3개이다.

답 ②

• $mn<0$이면 $m>0,\ n<0$ 또는 $m<0,\ n>0$

다른 풀이 오른쪽 그림과 같이 두 벡터 $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$를 잡으면



$\vec{a}=\vec{e_1}+\vec{e_2},\ \vec{b}=\vec{e_1}-\vec{e_2}$

즉 $\vec{e_1}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}),\ \vec{e_2}=\frac{1}{2}(\vec{a}-\vec{b})$이므로

$\vec{p}=\vec{e_1}+2\vec{e_2}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})+(\vec{a}-\vec{b})$

$=\frac{3}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}$

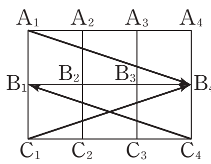
$\vec{r}=-2\vec{e_2}=-(\vec{a}-\vec{b})=-\vec{a}+\vec{b}$

$\vec{u}=2\vec{e_1}-3\vec{e_2}=\vec{a}+\vec{b}-\frac{3}{2}(\vec{a}-\vec{b})$

$=-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{5}{2}\vec{b}$

따라서 집합 C의 원소가 될 수 있는 벡터는 $\vec{p}$, $\vec{r}$, $\vec{u}$의 3개이다.

175 $|x+y|$는 $x=\overrightarrow{A_1B_4}$, $y=\overrightarrow{C_1B_4}$일 때 최댓값을 가지므로 최댓값은



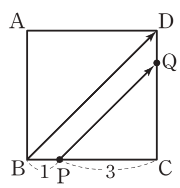
$$|x+y|=|\overrightarrow{A_1B_4}+\overrightarrow{C_1B_4}|$$
$$=|\overrightarrow{B_1C_4}+\overrightarrow{B_1A_4}|$$
$$=2|\overrightarrow{B_1B_4}|=6$$
$\therefore M=6$

$|x-y|$는 $x=\overrightarrow{A_1B_4}$, $y=\overrightarrow{C_4B_1}$일 때 최댓값을 가지므로 최댓값은

$$|x-y|=|\overrightarrow{A_1B_4}-\overrightarrow{C_4B_1}|=|\overrightarrow{A_1B_4}+\overrightarrow{B_1C_4}|$$
$$=|2\overrightarrow{A_1B_4}|=2\sqrt{10}$$
$\therefore m=2\sqrt{10}$

$\therefore M^2+m^2=36+40=76$ 답 76

176 $\overrightarrow{PC}=-3\overrightarrow{PB}$에서



$\overline{PC}=3\overline{PB}$

$\therefore \overline{PB}=1,\ \overline{PC}=3$

한편

$$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}=-\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC}$$
$$=-(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC})$$
$$=-\overrightarrow{BD}$$

이므로 $\overrightarrow{PQ}=-k\overrightarrow{BD}$를 만족시키는 실수 k가 존재하면 두 벡터 $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{BD}$는 서로 평행하다.

$\therefore \overline{QC}=\overline{PC}=3$

직각삼각형 PCQ에서

$\overline{PQ}=\sqrt{3^2+3^2}=3\sqrt{2}$

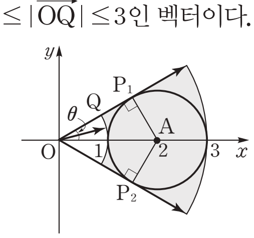
$\therefore |\overrightarrow{PQ}|^2=(3\sqrt{2})^2=18$ 답 18

177 $k=1$일 때, $|\overrightarrow{OQ}|=\dfrac{|\overrightarrow{OP}|}{|\overrightarrow{OP}|}=1$

$k=3$일 때, $|\overrightarrow{OQ}|=3\dfrac{|\overrightarrow{OP}|}{|\overrightarrow{OP}|}=3$

즉 $\overrightarrow{OQ}$는 $\overrightarrow{OP}$와 방향은 같고 $1\le|\overrightarrow{OQ}|\le3$인 벡터이다.

원점을 지나는 직선이 원 $(x-2)^2+y^2=1$과 접하는 점을 각각 P_1, P_2라 하고 $\angle AOP_1=\theta$라 하면



$$\sin\theta=\frac{\overline{AP_1}}{\overline{OA}}=\frac{1}{2}$$
$\therefore \theta=\dfrac{\pi}{6}$

$\angle P_1OP_2=2\theta=\dfrac{\pi}{3}$이므로 점 Q가 나타내는 도형은 위의 그림의 어두운 부분과 같다.

따라서 구하는 넓이는

$$\frac{1}{2}\cdot3^2\cdot\frac{\pi}{3}-\frac{1}{2}\cdot1^2\cdot\frac{\pi}{3}=\frac{4}{3}\pi$$ 답 ④

일품 BOX

삼각형의 무게중심은 중선을 꼭짓점으로부터 2 : 1로 내분한다.

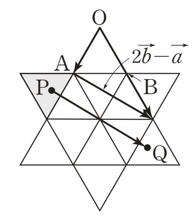
$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}$
$=\overrightarrow{PB}+3\overrightarrow{PB}$
$=4\overrightarrow{PB}$
이므로 $\overline{PB}=1$

반지름의 길이가 r, 중심각의 크기가 θ인 부채꼴의 넓이는 $\dfrac{1}{2}r^2\theta$

1등급 비밀노트

벡터의 종점의 자취를 찾을 때에는 먼저 벡터의 방향을 확인하고, 벡터의 크기가 어떻게 변하는지 파악한다.

178 주어진 두 정삼각형의 각 변의 삼등분점을 연결하면 오른쪽 그림과 같이 합동인 12개의 정삼각형이 만들어진다.



어두운 정삼각형의 높이를 h라 하면

$$|\overrightarrow{PQ}|=\left(2+\frac{2}{3}\right)h=\frac{8}{3}h$$

이때 $2\vec{b}-\vec{a}$와 $\overrightarrow{PQ}$는 평행하고

$$|2\vec{b}-\vec{a}|=2h,\ 즉\ h=\frac{1}{2}|2\vec{b}-\vec{a}|$$

이므로

$$\overrightarrow{PQ}=\frac{8}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot(2\vec{b}-\vec{a})=-\frac{4}{3}\vec{a}+\frac{8}{3}\vec{b}$$

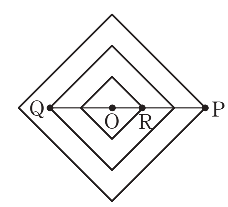
따라서 $s=-\dfrac{4}{3}$, $t=\dfrac{8}{3}$이므로

$$10(t-s)=10\cdot\left\{\frac{8}{3}-\left(-\frac{4}{3}\right)\right\}=40$$ 답 40

179 $\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{RQ}=-(\overrightarrow{QP}+\overrightarrow{QR})$에서

$$|\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{RQ}|=|\overrightarrow{QP}+\overrightarrow{QR}|$$

오른쪽 그림과 같이 세 점 Q, R, P가 대각선 위에 놓일 때 $|\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{RQ}|$는 최댓값을 가지므로 최댓값은



$M=10+6=16$

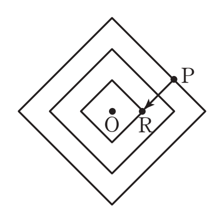
한편

$$\overrightarrow{PQ}-\overrightarrow{RQ}=\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QR}=\overrightarrow{PR}$$

이므로

$$|\overrightarrow{PQ}-\overrightarrow{RQ}|=|\overrightarrow{PR}|$$

오른쪽 그림과 같이 두 점 P, R가 $\overline{PR}$가 정사각형의 한 변과 수직이 되도록 놓일 때 $|\overrightarrow{PR}|$는 최솟값을 가지므로 $|\overrightarrow{PR}|=a$라 하면 $\sqrt{2}a=4$에서



$a=2\sqrt{2}$

$\therefore m=2\sqrt{2}$

$\therefore M^2-m^2=256-8=248$ 답 248

1등급 비밀노트

두 벡터 $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{RQ}$가 같은 방향일 때, $|\overrightarrow{QP}+\overrightarrow{QR}|$는 최댓값을 갖는다. 이때 두 벡터의 종점이 같으므로 세 점 P, Q, R는 일직선 위에 있다.

04 평면벡터의 성분과 내적 본책 38쪽

180 두 점 P, Q의 위치벡터를 각각 $\vec{p}$, $\vec{q}$라 하면

$\vec{p}=\dfrac{2\vec{b}+\vec{a}}{2+1}=\dfrac{\vec{a}+2\vec{b}}{3}$,

$\vec{q}=\dfrac{4\vec{b}-\vec{a}}{4-1}=\dfrac{-\vec{a}+4\vec{b}}{3}$

이므로 $\overline{PQ}$의 중점 M의 위치벡터 $\vec{m}$은

$\vec{m}=\dfrac{\vec{p}+\vec{q}}{2}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\vec{a}+2\vec{b}}{3}+\dfrac{-\vec{a}+4\vec{b}}{3}\right)=\vec{b}$

따라서 $k=0$, $l=1$이므로

$k+l=1$ 답 ④

181 $\overrightarrow{OC}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{OA}$이므로

$\overrightarrow{OP}=\dfrac{2\overrightarrow{OC}+3\overrightarrow{OB}}{2+3}=\dfrac{2}{5}\overrightarrow{OC}+\dfrac{3}{5}\overrightarrow{OB}$

$=\dfrac{2}{5}\times\dfrac{3}{2}\overrightarrow{OA}+\dfrac{3}{5}\overrightarrow{OB}$

$=\dfrac{3}{5}\overrightarrow{OA}+\dfrac{3}{5}\overrightarrow{OB}$

따라서 $m=\dfrac{3}{5}$, $n=\dfrac{3}{5}$이므로

$m-n=0$ 답 0

182 $\vec{a}+t\vec{b}=(-1,\ -2)+t(2,\ -2)$

$=(-1+2t,\ -2-2t)$

$3(\vec{a}-\vec{c})=3\{(-1,\ -2)-(2,\ -4)\}=(-9,\ 6)$

따라서 $(-1+2t,\ -2-2t)=(-9,\ 6)$이므로

$-1+2t=-9$, $-2-2t=6$

$\therefore t=-4$ 답 ①

183 $\overrightarrow{AB}=(-2\cos\theta,\ 2\sin\theta)$이므로

$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(-2\cos\theta)^2+(2\sin\theta)^2}$

$=\sqrt{4(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}=2$

이때 $|\overrightarrow{BA}|=|\overrightarrow{AB}|$이므로

$3|\overrightarrow{AB}|-|2\overrightarrow{BA}|=3|\overrightarrow{AB}|-2|\overrightarrow{AB}|$

$=|\overrightarrow{AB}|=2$ 답 2

184 $\vec{c}=t\vec{a}+(1-t)\vec{b}$

$=t(1,\ -2)+(1-t)(2,\ -3)$

$=(t,\ -2t)+(2-2t,\ -3+3t)$

$=(2-t,\ -3+t)$

$\therefore |\vec{c}|=\sqrt{(2-t)^2+(-3+t)^2}$

$=\sqrt{2t^2-10t+13}$

$=\sqrt{2\left(t-\dfrac{5}{2}\right)^2+\dfrac{1}{2}}$

따라서 벡터 $\vec{c}$의 크기는 $t=\dfrac{5}{2}$일 때 최솟값 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$를 갖는다. 답 ③

일품 BOX

반원에 대한 원주각의 크기는 90°이다.

$\overline{OC}:\overline{AC}=3:1$이므로
$\overline{OC}:\overline{OA}=3:2$
$\therefore \overline{OC}=\dfrac{3}{2}\overline{OA}$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

이차방정식
$ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라 하면
$\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$, $\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$

185 $\angle APB=90°$이므로

$\overline{BP}=\sqrt{7^2-4^2}=\sqrt{33}$

$\angle ABP=\theta$라 하면 $\cos\theta=\dfrac{\overline{BP}}{\overline{AB}}=\dfrac{\sqrt{33}}{7}$이므로

$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BP}=|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BP}|\cos\theta$

$=7\times\sqrt{33}\times\dfrac{\sqrt{33}}{7}=33$ 답 33

186 $\vec{a}\cdot\vec{b}=(x-3,\ 2)\cdot(4-x,\ 10)$

$=(x-3)(4-x)+20$

$=-x^2+7x+8$

이므로 $\vec{a}\cdot\vec{b}<0$에서

$-x^2+7x+8<0$, $x^2-7x-8>0$

$(x+1)(x-8)>0$ $\therefore x<-1$ 또는 $x>8$

따라서 $\vec{a}\cdot\vec{b}<0$을 만족시키는 자연수 x의 최솟값은 9이다. 답 ⑤

187 점 P의 좌표를 $(m,\ 2m^2)$(m은 실수)이라 하면

$\overrightarrow{AB}=(4,\ 1)$, $\overrightarrow{AP}=(m+1,\ 2m^2-3)$

$\therefore \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP}=(4,\ 1)\cdot(m+1,\ 2m^2-3)$

$=4(m+1)+2m^2-3$

$=2m^2+4m+1$

$=2(m+1)^2-1$

따라서 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP}$는 $m=-1$, 즉 $P(-1,\ 2)$일 때 최솟값 -1을 갖는다. 답 ⑤

188 $|\vec{a}-\vec{b}|^2=(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})$

$=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

$=1-2\vec{a}\cdot\vec{b}+9$

즉 $6=1-2\vec{a}\cdot\vec{b}+9$에서 $\vec{a}\cdot\vec{b}=2$

$\therefore (\vec{a}+2\vec{b})\cdot(3\vec{a}-\vec{b})=3|\vec{a}|^2+5\vec{a}\cdot\vec{b}-2|\vec{b}|^2$

$=3\times1^2+5\times2-2\times3^2$

$=-5$ 답 ②

189 $|\overrightarrow{AB}|^2=|\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}|^2$

$=(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})\cdot(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})$

$=|\overrightarrow{OB}|^2-2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+|\overrightarrow{OA}|^2$

$=\alpha^2-2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+\beta^2$

이때 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=8$, $\alpha\beta=5$

이므로

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\dfrac{\alpha^2+\beta^2-|\overrightarrow{AB}|^2}{2}$

$=\dfrac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta-|\overrightarrow{AB}|^2}{2}$

$=\dfrac{8^2-2\times5-(5\sqrt{2})^2}{2}$

$=2$ 답 2

일품 BOX

190 $|2\vec{a}+\vec{b}|^2=7^2$에서

$(2\vec{a}+\vec{b})\cdot(2\vec{a}+\vec{b})=49$

$\therefore\ 4|\vec{a}|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=49$ ······ ㉠

$|2\vec{a}-\vec{b}|^2=3^2$에서

$(2\vec{a}-\vec{b})\cdot(2\vec{a}-\vec{b})=9$

$\therefore\ 4|\vec{a}|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=9$ ······ ㉡

㉠−㉡을 하면 $8\vec{a}\cdot\vec{b}=40$

$\therefore\ \vec{a}\cdot\vec{b}=5$

답 ⑤

191 $2\vec{a}-\vec{b}=2(1,\ 0)-(x,\ -1)=(2-x,\ 1)$이므로

$$\cos 45^\circ=\frac{(2\vec{a}-\vec{b})\cdot\vec{c}}{|2\vec{a}-\vec{b}||\vec{c}|}=\frac{(2-x)\times2+1\times1}{\sqrt{(2-x)^2+1^2}\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{-2x+5}{\sqrt{x^2-4x+5}\sqrt{5}}$$

즉 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{-2x+5}{\sqrt{x^2-4x+5}\sqrt{5}}$이므로

$2(-2x+5)=\sqrt{10}\sqrt{x^2-4x+5}$

$4(-2x+5)^2=10(x^2-4x+5)$

$3x^2-20x+25=0,\quad (3x-5)(x-5)=0$

$\therefore\ x=5$ ($\because$ x는 정수)

답 5

192 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 서로 수직이므로 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$에서

$(x,\ 4)\cdot(x,\ 1-x)=0,\quad x^2-4x+4=0$

$(x-2)^2=0\quad \therefore\ x=2$

따라서 $\vec{b}=(2,\ -1)$, $\vec{c}=(4,\ 2)$이므로

$$\cos\theta=\frac{\vec{b}\cdot\vec{c}}{|\vec{b}||\vec{c}|}=\frac{2\times4+(-1)\times2}{\sqrt{2^2+(-1)^2}\sqrt{4^2+2^2}}=\frac{6}{\sqrt{5}\sqrt{20}}=\frac{3}{5}$$

답 ③

193 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 서로 평행하므로 $\vec{b}=k\vec{a}\ (k\neq0)$라 하면

$x=k,\ y=-3k$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=20$에서

$(1,\ -3)\cdot(k,\ -3k)=20,\quad k+9k=20$

$10k=20\quad \therefore\ k=2$

따라서 $x=2,\ y=-6$이므로

$x+y=-4$

답 ②

194 두 점 $\mathrm{A}(-2,\ 5)$, $\mathrm{B}(3,\ 2)$를 지나는 직선의 방정식은

$\dfrac{x+2}{3+2}=\dfrac{y-5}{2-5}$, 즉 $\dfrac{x+2}{5}=\dfrac{y-5}{-3}$

따라서 $a=5$, $b=-5$이므로

$a+b=0$

답 ③

두 점 $\mathrm{A}(a_1,\ a_2)$, $\mathrm{B}(b_1,\ b_2)$를 지나는 직선의 방향벡터 $\vec{u}$는
$\vec{u}=(b_1-a_1,\ b_2-a_2)$

195 직선 $\dfrac{x-1}{2}=y+3$의 방향벡터는 $(2,\ 1)$이므로 점 $\mathrm{P}(5,\ 3)$을 지나고 법선벡터가 $(2,\ 1)$인 직선의 방정식은

$2(x-5)+(y-3)=0$, 즉 $2x+y-13=0$

따라서 $a=2$, $b=-13$이므로

$a-b=15$

답 15

196 $t=\dfrac{x+1}{3}$, $t=\dfrac{-y+3}{2}$이므로

$x=3t-1$에서
$3t=x+1$
$\therefore\ t=\dfrac{x+1}{3}$
$y=-2t+3$에서
$2t=-y+3$
$\therefore\ t=\dfrac{-y+3}{2}$

$\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{-y+3}{2}$, 즉 $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-3}{-2}$

이 직선의 방향벡터는 $(3,\ -2)$이므로 점 $\mathrm{P}(2,\ -1)$을 지나고 방향벡터가 $(3,\ -2)$인 직선의 방정식은

$\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+1}{-2}$

따라서 $a=-2$, $b=-2$이므로

$ab=4$

답 ⑤

197 주어진 두 직선의 방향벡터를 각각 $\vec{u_1}$, $\vec{u_2}$라 하면

$\vec{u_1}=(1,\ -3)$, $\vec{u_2}=(4,\ 3)$

이므로

$$\cos\theta=\frac{|\vec{u_1}\cdot\vec{u_2}|}{|\vec{u_1}||\vec{u_2}|}=\frac{|1\times4+(-3)\times3|}{\sqrt{1^2+(-3)^2}\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{5}{\sqrt{10\times5}}=\frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$\therefore\ \sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)^2}=\frac{3\sqrt{10}}{10}\ \left(\because\ 0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$$

답 ④

198 주어진 두 직선의 방향벡터를 각각 $\vec{u_1}$, $\vec{u_2}$라 하면

$\vec{u_1}=\left(\dfrac{k}{2}-1,\ 2k-1\right)$, $\vec{u_2}=\left(7,\ \dfrac{k}{2}\right)$

$\dfrac{2x+1}{k-2}=\dfrac{x+\frac{1}{2}}{\frac{k}{2}-1}$,
$\dfrac{2y-1}{k}=\dfrac{y-\frac{1}{2}}{\frac{k}{2}}$

두 직선이 서로 수직이려면 두 직선의 방향벡터 $\vec{u_1}$, $\vec{u_2}$가 서로 수직이어야 하므로 $\vec{u_1}\cdot\vec{u_2}=0$에서

$\left(\dfrac{k}{2}-1\right)\times7+(2k-1)\times\dfrac{k}{2}=0$

$\therefore\ k^2+3k-7=0$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 모든 실수 k의 값의 합은 -3이다.

답 ③

199 주어진 세 직선의 방향벡터를 각각 $\vec{u_1}$, $\vec{u_2}$, $\vec{u_3}$이라 하면

$\vec{u_1}=(1,\ k)$, $\vec{u_2}=(2,\ k^2-3)$, $\vec{u_3}=\left(\dfrac{3}{2},\ \dfrac{k-2}{2}\right)$

세 직선이 서로 평행하려면 세 직선의 방향벡터가 서로 평행하여야 하므로

$\dfrac{1}{k}=\dfrac{2}{k^2-3}=\dfrac{3}{k-2}$

즉 $\frac{1}{k}=\frac{3}{k-2}$에서 $\quad k-2=3k$

$2k=-2 \qquad \therefore k=-1$

답 ②

200 $(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA})\cdot(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OB})=\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=0$이므로 점 P가 나타내는 도형은 $\overline{AB}$를 지름으로 하는 원, 즉 중심의 좌표가 $(a,\ 0)$이고 반지름의 길이가 $|b|$인 원이다.

ㄱ. $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=0$이므로 두 벡터 $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{BP}$가 이루는 각의 크기는 $90°$이다.
따라서 $\triangle APB$는 $\angle APB=90°$인 직각삼각형이다.

ㄴ. 원의 중심은 원점이 아니므로 $\overline{OP}$의 길이는 일정하지 않다.

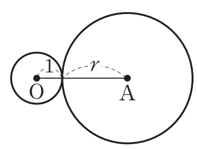
ㄷ. 반지름의 길이가 $|b|$이므로 점 P가 나타내는 도형의 넓이는 πb^2이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

201 $|\overrightarrow{OP}|=1$을 만족시키는 점 P가 나타내는 도형은 중심이 원점 O이고 반지름의 길이가 1인 원이고, $|\overrightarrow{AQ}|=r$를 만족시키는 점 Q가 나타내는 도형은 중심이 A(3, 4)이고 반지름의 길이가 r인 원이다.

이 두 원이 만나도록 하는 r의 최솟값은 두 원이 외접할 때의 반지름의 길이 r와 같다.



두 원이 외접할 때 두 원의 중심 사이의 거리는 반지름의 길이의 합과 같으므로

$\sqrt{3^2+4^2}=1+r, \qquad 5=1+r$

$\therefore r=4$

따라서 두 도형이 만나도록 하는 r의 최솟값은 4이다.

답 ③

202 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=0$에서 $\angle APB=90°$이므로 점 P가 나타내는 도형은 $\overline{AB}$를 지름으로 하는 원이다.

이때 원의 지름의 길이는

$\overline{AB}=\sqrt{(5-2)^2+(-1-3)^2}=5$

이므로 구하는 도형의 둘레의 길이는

$2\pi\times\frac{5}{2}=5\pi$

답 ①

203 평행사변형 ABCD에서

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$ ...... ㉠

$\overline{BC}$의 중점이 M이므로

$\overrightarrow{AM}=\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{2}$

$\therefore \overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AC}$ ...... ㉡

$\overline{CD}$를 3 : 1로 내분하는 점이 N이므로

$\overrightarrow{AN}=\frac{3\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC}}{3+1}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$

$\therefore \overrightarrow{AD}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AN}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ ...... ㉢

㉡, ㉢을 ㉠에 대입하면

일품 BOX

두 점 $A(a,\ b)$, $B(a,\ -b)$에 대하여 $\overline{AB}$의 중점의 좌표는 $(a,\ 0)$

$\begin{cases} x+\frac{1}{4}y=1 & \cdots ㉠ \\ \frac{1}{2}x+y=1 & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉡×2−㉠을 하면

$\frac{7}{4}y=1 \quad \therefore y=\frac{4}{7}$

이것을 ㉠에 대입하면

$x+\frac{1}{7}=1 \quad \therefore x=\frac{6}{7}$

$5\overline{DC}=3\overline{AB}$이므로

$\overline{DC}=\frac{3}{5}\overline{AB}$

이때 $\overline{DC}\,/\!/\,\overline{AB}$이므로

$\overrightarrow{DC}=\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}=\frac{3}{5}\vec{p}$

$\overrightarrow{AC}=(2\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AC})+\left(\frac{4}{3}\overrightarrow{AN}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right)$

$=2\overrightarrow{AM}+\frac{4}{3}\overrightarrow{AN}-\frac{4}{3}\overrightarrow{AC}$

$\therefore \overrightarrow{AC}=\frac{6}{7}\overrightarrow{AM}+\frac{4}{7}\overrightarrow{AN}$

따라서 $x=\frac{6}{7}$, $y=\frac{4}{7}$이므로

$x+y=\frac{10}{7}$

답 ⑤

다른 풀이 $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AD}+\frac{1}{4}\overrightarrow{DC}$이므로

$\overrightarrow{AC}=x\overrightarrow{AM}+y\overrightarrow{AN}$

$=x\left(\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\right)+y\left(\overrightarrow{AD}+\frac{1}{4}\overrightarrow{DC}\right)$

$=\left(x+\frac{1}{4}y\right)\overrightarrow{AB}+\left(\frac{1}{2}x+y\right)\overrightarrow{BC}$

$(\because \overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC})$

이때 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$이므로

$x+\frac{1}{4}y=1,\ \frac{1}{2}x+y=1$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$x=\frac{6}{7},\ y=\frac{4}{7}$

204 문제 이해 점 E는 $\overline{DB}$를 1 : 2로 내분하는 점이므로

$\overrightarrow{CE}=\frac{\overrightarrow{CB}+2\overrightarrow{CD}}{3}$ ● 20%

해결 과정 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB}$에서

$\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{DC}$

$=\vec{p}-\vec{q}-\frac{3}{5}\vec{p}=\frac{2}{5}\vec{p}-\vec{q}$

또 $\overrightarrow{CD}=-\frac{3}{5}\vec{p}$이므로 ● 30%

$\overrightarrow{CE}=\frac{\frac{2}{5}\vec{p}-\vec{q}+2\left(-\frac{3}{5}\vec{p}\right)}{3}$

$=-\frac{4}{15}\vec{p}-\frac{1}{3}\vec{q}$ ● 30%

답 구하기 따라서 $a=-\frac{4}{15}$, $b=-\frac{1}{3}$이므로

$30(a-b)=30\left\{-\frac{4}{15}-\left(-\frac{1}{3}\right)\right\}=2$ ● 20%

답 2

205 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$라 하면

$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}\vec{a}$, $\overrightarrow{AQ}=\frac{m\vec{a}+\vec{b}}{m+1}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{a}+\vec{b}$

이므로

$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{AP}=\frac{m\vec{a}+\vec{b}}{m+1}-\frac{1}{3}\vec{a}$

$=\frac{2m-1}{3(m+1)}\vec{a}+\frac{1}{m+1}\vec{b}$

$$\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AP}=(\vec{a}+\vec{b})-\frac{1}{3}\vec{a}=\frac{2}{3}\vec{a}+\vec{b}$$

이때 세 점 P, Q, C가 한 직선 위에 있으므로

$$\overrightarrow{PQ}=t\,\overrightarrow{PC}\ (t\neq 0)$$

라 하면

$$\frac{2m-1}{3(m+1)}\vec{a}+\frac{1}{m+1}\vec{b}=t\left(\frac{2}{3}\vec{a}+\vec{b}\right)$$

두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 서로 평행하지 않으므로

$$\frac{2m-1}{3(m+1)}=\frac{2}{3}t,\quad \frac{1}{m+1}=t$$

에서 $\frac{2m-1}{3}t=\frac{2}{3}t,\quad 2m-1=2$

$$\therefore m=\frac{3}{2}$$

답 ①

206 $\overrightarrow{OQ}=\frac{1}{3}(2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OP})$에서 점 Q는 $\overline{AP}$를 $1:2$로 내분하는 점이므로 $P(a,\ b)$, $Q(x,\ y)$라 하면

$$x=\frac{a-12}{3},\quad y=\frac{b+6}{3}$$

$$\therefore a=3x+12,\quad b=3y-6$$

또 점 $P(a,\ b)$는 원 $(x-3)^2+(y+3)^2=36$ 위의 점이므로

$$(a-3)^2+(b+3)^2=36$$

$$(3x+12-3)^2+(3y-6+3)^2=36$$

$$\therefore (x+3)^2+(y-1)^2=4$$

따라서 점 Q가 나타내는 도형은 중심의 좌표가 $(-3,\ 1)$이고, 반지름의 길이가 2인 원이므로 구하는 도형의 둘레의 길이는

$$2\pi\times 2=4\pi$$

답 ③

1등급 비밀노트

① $\overrightarrow{OP}=\frac{n}{m}\overrightarrow{OA}+\frac{m-n}{m}\overrightarrow{OB}$이면 점 P는 $\overline{AB}$를 $(m-n):n$으로 내분하는 점이다.

② $\overrightarrow{OQ}=-\frac{n}{m}\overrightarrow{OA}+\frac{m+n}{m}\overrightarrow{OB}$이면 점 Q는 $\overline{AB}$를 $(m+n):n$으로 외분하는 점이다.

207 $\overrightarrow{PA}+2\overrightarrow{PB}+3\overrightarrow{PC}=\vec{0}$에서

$$3\overrightarrow{PC}=-(\overrightarrow{PA}+2\overrightarrow{PB})$$

$$\therefore \overrightarrow{PC}=-\frac{\overrightarrow{PA}+2\overrightarrow{PB}}{3}$$

이때 $\overline{AB}$를 $2:1$로 내분하는 점을 Q라 하면

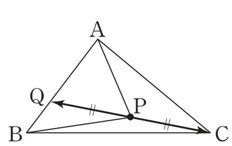
$$\overrightarrow{PQ}=\frac{\overrightarrow{PA}+2\overrightarrow{PB}}{3}$$

이므로 $\overrightarrow{PQ}=-\overrightarrow{PC}$

즉 점 P는 $\overline{CQ}$의 중점이므로

$$\overline{CP}:\overline{PQ}=1:1$$

따라서 △PBC의 넓이를 S라 하면



일품 BOX

$\overline{CP}:\overline{PQ}=1:1$이므로 △PQB=△PBC
$\overline{BQ}:\overline{QA}=1:2$이므로 △PAQ=2△PQB
$\overline{CP}:\overline{PQ}=1:1$이므로 △PCA=△PAQ

$\overline{BC}$를 $m:n$으로 내분하는 점의 위치벡터는 $\frac{m\overrightarrow{AC}+n\overrightarrow{AB}}{m+n}$로 나타낼 수 있으므로 이와 같은 꼴이 되도록 양변을 5로 나눈다.

두 점 $A(-6,\ 3)$, $P(a,\ b)$에 대하여 $\overline{AP}$를 $1:2$로 내분하는 점의 좌표는 $\left(\frac{a-12}{3},\ \frac{b+6}{3}\right)$

△PQB$=S$, △PAQ$=2S$, △PCA$=2S$

이므로

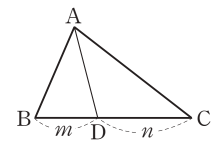
$$\triangle ABC=\triangle PBC+\triangle PQB+\triangle PAQ+\triangle PCA$$
$$=S+S+2S+2S=6S$$

$$\therefore \frac{\triangle ABC}{\triangle PBC}=\frac{6S}{S}=6$$

답 6

1등급 비밀노트

오른쪽 그림과 같이 높이가 같은 두 삼각형 ABD와 ADC의 넓이의 비는 밑변의 길이의 비와 같다. 즉 △ABD : △ADC$=m:n$

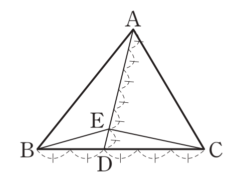


208 문제 이해 $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$에서

$$6\overrightarrow{AE}=3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}$$

$$\therefore \frac{6}{5}\overrightarrow{AE}=\frac{3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}}{5}$$ ● 30%

해결 과정 즉 $\frac{6}{5}\overrightarrow{AE}$의 종점은 $\overline{BC}$를 $2:3$으로 내분하는 점이고, $\overline{AE}$의 연장선이 $\overline{BC}$와 만나는 점이 D이므로



$$\frac{6}{5}\overline{AE}=\overline{AD}$$

$$\therefore \overline{AE}:\overline{ED}=5:1$$ ● 30%

따라서 △EBD의 넓이를 $2S$라 하면

△EDC$=3S$, △ABE$=10S$

△ABE$=30$에서 $10S=30$ $\therefore S=3$ ● 30%

답 구하기 $\therefore$ △EDC$=3S=9$ ● 10%

답 9

209 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$라 하면

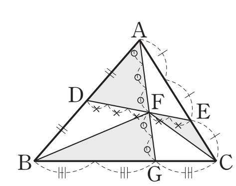
$$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\vec{a},\quad \overrightarrow{AE}=\frac{2}{3}\vec{b}$$

$\overline{DF}:\overline{FE}=3:2$이므로

$$\overrightarrow{AF}=\frac{3\overrightarrow{AE}+2\overrightarrow{AD}}{5}=\frac{3\times\frac{2}{3}\vec{b}+2\times\frac{1}{2}\vec{a}}{5}$$
$$=\frac{\vec{a}+2\vec{b}}{5}$$

$$\therefore \frac{5}{3}\overrightarrow{AF}=\frac{5}{3}\times\frac{\vec{a}+2\vec{b}}{5}=\frac{\vec{a}+2\vec{b}}{3}$$

따라서 $\frac{5}{3}\overrightarrow{AF}$의 종점은 $\overline{BC}$를 $2:1$로 내분하는 점이고, $\overline{AF}$의 연장선과 $\overline{BC}$가 만나는 점이 G이므로



$$\frac{5}{3}\overline{AF}=\overline{AG}$$

$$\therefore \overline{AF}:\overline{FG}=3:2,\quad \overline{BG}:\overline{GC}=2:1$$

따라서 △CEF의 넓이를 S라 하면

$\triangle AFE = 2\triangle CEF = 2S$,

$\triangle ADF = \frac{3}{2}\triangle AFE = 3S$,

$\triangle BFD = \triangle ADF = 3S$,

$\triangle BGF = \frac{2}{3}(\triangle ADF + \triangle BFD) = 4S$,

$\triangle CFG = \frac{1}{2}\triangle BGF = 2S$

$\therefore \dfrac{\triangle ADF + \triangle BGF + \triangle CEF}{\triangle AFE + \triangle BFD + \triangle CFG}$

$= \dfrac{3S + 4S + S}{2S + 3S + 2S} = \dfrac{8}{7}$

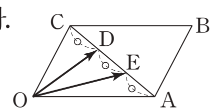
답 $\frac{8}{7}$

210 (i) $x = \frac{1}{3}$일 때, $\overrightarrow{OP_1} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OC}$이므로

점 P_1은 $\overline{AC}$를 $2:1$로 내분하는 점이다.

$x = \frac{2}{3}$일 때, $\overrightarrow{OP_1} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$이므로 점 P_1은

$\overline{AC}$를 $1:2$로 내분하는 점이다.



따라서 점 P_1의 자취는 오른쪽 그림에서 $\overline{DE}$이다.

(ii) $-1 \le y \le 1$에서

$0 \le y^2 \le 1$

$y^2 = 0$일 때, $\overrightarrow{OP_2} = \overrightarrow{OC}$

$y^2 = 1$일 때, $\overrightarrow{OP_2} = \overrightarrow{OA}$

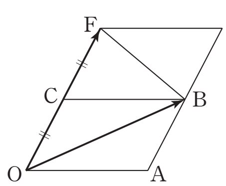
따라서 점 P_2의 자취는 $\overline{AC}$이다.

(iii) $0 \le z \le \frac{1}{2}$에서 $0 \le 2z \le 1$

$2z = 0$일 때, $\overrightarrow{OP_3} = 2\overrightarrow{OC}$

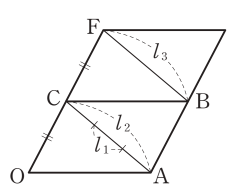
$2z = 1$일 때,

$\overrightarrow{OP_3} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$



따라서 점 P_3의 자취는 오른쪽 그림에서 $\overline{BF}$이다.

이상에서 l_1, l_2, l_3은 각각 오른쪽 그림과 같으므로

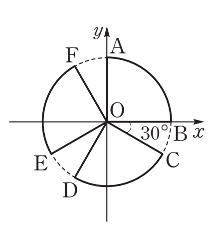


$3l_1 = l_2 = l_3$

$\therefore 6l_1 = l_2 + l_3$

답 ③

211 오른쪽 그림과 같이 사분원의 중심 O가 원점, $\overline{OB}$, $\overline{OA}$가 각각 x축, y축의 양의 방향과 일치하도록 주어진 도형을 좌표평면에 놓으면



$C(\cos 30°, -\sin 30°)$,

$D(-\cos 60°, -\sin 60°)$,

$E(-\cos 30°, -\sin 30°)$,

$F(-\cos 60°, \sin 60°)$

에서

$C\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, $D\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,

$E\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, $F\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

이때

$\overrightarrow{FE} - \overrightarrow{DC} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$\qquad - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$= (-\sqrt{3}, -\sqrt{3})$

이고 $\vec{a} = (0, 1)$, $\vec{b} = (1, 0)$이므로

$k\vec{a} + l\vec{b} = k(0, 1) + l(1, 0) = (l, k)$

따라서 $k = -\sqrt{3}$, $l = -\sqrt{3}$이므로

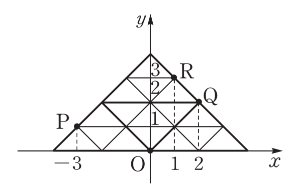
$k^2 + l^2 = 3 + 3 = 6$

답 6

1등급 비밀노트

벡터의 성분이 주어지지 않은 경우에는 주어진 도형을 좌표평면에 적당히 놓은 후 성분을 구하여 주어진 식에 대입한다.

212 문제 이해 오른쪽 그림과 같이 점 O가 원점이 되도록 주어진 도형을 좌표평면에 놓으면



$P(-3, 1)$,

$Q(2, 2)$,

$R(1, 3)$ ● 40%

해결 과정 $\overrightarrow{OR} = s\overrightarrow{OP} + t\overrightarrow{OQ}$에서

$(1, 3) = s(-3, 1) + t(2, 2)$

$= (-3s + 2t, s + 2t)$

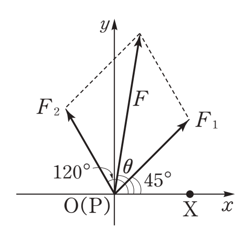
$\therefore -3s + 2t = 1$, $s + 2t = 3$ ● 40%

답 구하기 위의 두 식을 연립하여 풀면

$s = \frac{1}{2}$, $t = \frac{5}{4}$ $\quad\therefore s + t = \frac{7}{4}$ ● 20%

답 $\frac{7}{4}$

213 오른쪽 그림과 같이 점 P가 원점, 직선 PX가 x축, 점 P를 지나고 직선 PX에 수직인 직선이 y축과 일치하도록 주어진 그림을 좌표평면에 놓으면



$F_1 = (10\sqrt{2}\cos 45°, 10\sqrt{2}\sin 45°) = (10, 10)$,

$F_2 = (12\cos 120°, 12\sin 120°) = (-6, 6\sqrt{3})$

이므로

$F = F_1 + F_2 = (10, 10) + (-6, 6\sqrt{3})$

$= (4, 10 + 6\sqrt{3})$

$\therefore \tan\theta = \dfrac{10 + 6\sqrt{3}}{4} = \dfrac{5}{2} + \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

따라서 $a = \frac{5}{2}$, $b = \frac{3}{2}$이므로

$a + b = 4$

답 ①

일품 BOX

$\angle BOC$
$= \angle DOE = \angle AOF$
$= \frac{1}{3} \times (360° - 90° \times 3)$
$= 30°$

$\begin{cases} -3s + 2t = 1 & \cdots ㉠ \\ s + 2t = 3 & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉡−㉠을 하면

$4s = 2 \quad \therefore s = \frac{1}{2}$

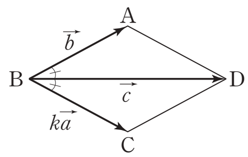
이것을 ㉡에 대입하면

$2t = \frac{5}{2} \quad \therefore t = \frac{5}{4}$

$|\overrightarrow{OF_1}| = 10\sqrt{2}$

$|\overrightarrow{OF_2}| = 12$

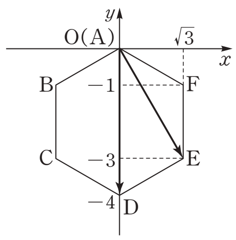
214 벡터 $\vec{c}$가 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각을 이등분하는 경우는 오른쪽 그림과 같은 마름모 ABCD에서 $\vec{c}=\overrightarrow{BD}$일 때이다.



따라서 $|\vec{b}|=|k\vec{a}|$, 즉 $|\vec{b}|=k|\vec{a}|$이므로

$$k=\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}=\frac{\sqrt{(-5)^2+5^2}}{\sqrt{1^2+(-3)^2}}=\frac{\sqrt{50}}{\sqrt{10}}=\sqrt{5}$$ 답 ③

215 오른쪽 그림과 같이 점 A가 원점, $\overline{AD}$가 y축의 음의 방향과 일치하도록 주어진 정육각형을 좌표평면에 놓으면



A$(0,\ 0)$, D$(0,\ -4)$, E$(\sqrt{3},\ -3)$

에서 $\overrightarrow{AD}=(0,\ -4)$, $\overrightarrow{AE}=(\sqrt{3},\ -3)$이므로

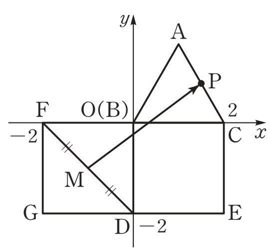
$$(1-x)\overrightarrow{AD}+x\overrightarrow{AE}$$
$$=(1-x)(0,\ -4)+x(\sqrt{3},\ -3)$$
$$=(\sqrt{3}x,\ x-4)$$
$$\therefore |(1-x)\overrightarrow{AD}+x\overrightarrow{AE}|=\sqrt{(\sqrt{3}x)^2+(x-4)^2}$$
$$=\sqrt{4x^2-8x+16}$$

즉 $\sqrt{4x^2-8x+16}=4\sqrt{3}$에서

$4x^2-8x+16=48$, $\quad x^2-2x-8=0$,

$(x+2)(x-4)=0 \quad \therefore x=4\ (\because x>0)$ 답 ②

216 오른쪽 그림과 같이 꼭짓점 B가 원점, $\overline{BC}$가 x축의 양의 방향, $\overline{BD}$가 y축의 음의 방향과 일치하도록 주어진 도형을 좌표평면에 놓고 정사각형 BDEC와 합동인 정사각형 FGDB를 그리면



A$(1,\ \sqrt{3})$, C$(2,\ 0)$

$\overline{DF}$의 중점을 M이라 하면

$$\frac{1}{2}\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{DP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{FD}+\overrightarrow{DP}$$
$$=\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DP}=\overrightarrow{MP}$$

이므로 $\left|\frac{1}{2}\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{DP}\right|$의 최솟값은 $|\overrightarrow{MP}|$의 최솟값과 같고, $|\overrightarrow{MP}|$의 최솟값은 점 M$(-1,\ -1)$과 직선 AC 사이의 거리와 같다.

이때 직선 AC의 방정식은

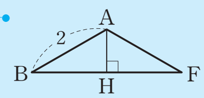
$$y=\frac{0-\sqrt{3}}{2-1}(x-2),\ \text{즉}\ \sqrt{3}x+y-2\sqrt{3}=0$$

이므로 구하는 최솟값은

$$\frac{|-\sqrt{3}-1-2\sqrt{3}|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}}=\frac{1+3\sqrt{3}}{2}$$ 답 $\frac{1+3\sqrt{3}}{2}$

일품 BOX

$28+6\sqrt{3}$
$=1+6\sqrt{3}+27$
$=1+6\sqrt{3}+(3\sqrt{3})^2$
$=(1+3\sqrt{3})^2$



정육각형의 한 내각의 크기는

$\frac{180°\times(6-2)}{6}=120°$

이므로 점 A에서 $\overline{BF}$에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\angle BAH=60°$,
$\angle ABH=30°$
$\therefore \overline{AH}=1$, $\overline{HF}=\sqrt{3}$

$|\overrightarrow{PE}+\overrightarrow{PF}|=2|\overrightarrow{PM}|$
이므로
$|\overrightarrow{EP}+\overrightarrow{FP}|=2|\overrightarrow{MP}|$

다른 풀이 E$(2,\ -2)$에서 $\quad \overrightarrow{BE}=(2,\ -2)$

직선 AC의 방정식은

$$y=-\sqrt{3}x+2\sqrt{3}$$

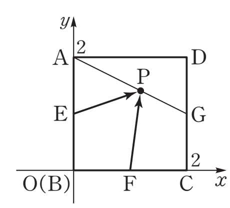
이므로 점 P의 좌표를 $(t,\ -\sqrt{3}t+2\sqrt{3})\ (1\le t\le 2)$이라 하면

$$\frac{1}{2}\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{DP}=\frac{1}{2}(2,\ -2)+(t,\ -\sqrt{3}t+2\sqrt{3}+2)$$
$$=(t+1,\ -\sqrt{3}t+2\sqrt{3}+1)$$
$$\therefore \left|\frac{1}{2}\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{DP}\right|$$
$$=\sqrt{(t+1)^2+(-\sqrt{3}t+2\sqrt{3}+1)^2}$$
$$=\sqrt{4t^2-2(5+\sqrt{3})t+14+4\sqrt{3}}$$
$$=\sqrt{4\left(t-\frac{5+\sqrt{3}}{4}\right)^2+\frac{28+6\sqrt{3}}{4}}$$
$$=\sqrt{4\left(t-\frac{5+\sqrt{3}}{4}\right)^2+\left(\frac{1+3\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

따라서 $\left|\frac{1}{2}\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{DP}\right|$는 $t=\frac{5+\sqrt{3}}{4}$일 때, 최솟값 $\frac{1+3\sqrt{3}}{2}$을 갖는다.

참고 점 M에서 직선 AP에 내린 수선의 발은 선분 AP 위에 있다.

217 오른쪽 그림과 같이 꼭짓점 B가 원점, $\overline{BC}$, $\overline{AB}$가 각각 x축, y축의 양의 방향과 일치하도록 주어진 정사각형을 좌표평면에 놓으면



A$(0,\ 2)$, E$(0,\ 1)$,
F$(1,\ 0)$, G$(2,\ 1)$

이때 직선 AG의 방정식은

$$y-2=\frac{1-2}{2-0}x,\ \text{즉}\ y=-\frac{1}{2}x+2$$

이므로 점 P의 좌표를 $\left(t,\ -\frac{1}{2}t+2\right)\ (0\le t\le 2)$라 하면

$$\overrightarrow{EP}+\overrightarrow{FP}=\left(t,\ -\frac{1}{2}t+1\right)+\left(t-1,\ -\frac{1}{2}t+2\right)$$
$$=(2t-1,\ -t+3)$$
$$\therefore |\overrightarrow{EP}+\overrightarrow{FP}|=\sqrt{(2t-1)^2+(-t+3)^2}$$
$$=\sqrt{5t^2-10t+10}$$
$$=\sqrt{5(t-1)^2+5}$$

따라서 $|\overrightarrow{EP}+\overrightarrow{FP}|$는 $t=1$일 때 최솟값 $\sqrt{5}$를 갖는다.

답 ③

다른 풀이 $\overline{EF}$의 중점을 M이라 하면

$$\text{M}\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$$

이때 $|\overrightarrow{EP}+\overrightarrow{FP}|=2|\overrightarrow{MP}|$이고 $|\overrightarrow{MP}|$의 최솟값은 점 M$\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$과 직선 AG, 즉 $x+2y-4=0$ 사이의 거리와 같으므로 구하는 최솟값은

$$2\times\frac{\left|\frac{1}{2}+1-4\right|}{\sqrt{1^2+2^2}}=2\times\frac{\sqrt{5}}{2}=\sqrt{5}$$

218 해결 과정 $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OA}$

$=|\overrightarrow{OB}||\overrightarrow{OA}|\cos(\angle AOB)$

$=|\overrightarrow{OB}||\overrightarrow{OA}|\dfrac{|\overrightarrow{OA}|}{|\overrightarrow{OB}|}$

$=|\overrightarrow{OA}|^2=9$ ● 30%

$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=|\overrightarrow{OB}||\overrightarrow{OC}|\cos(\angle BOC)$

$=|\overrightarrow{OB}||\overrightarrow{OC}|\dfrac{|\overrightarrow{OC}|}{|\overrightarrow{OB}|}$

$=|\overrightarrow{OC}|^2=16$ ● 30%

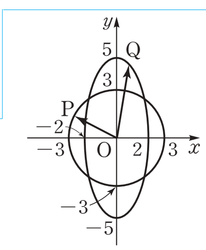
답 구하기 $\therefore \overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OB}\cdot(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})$

$=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OA}$

$=16-9=7$ ● 40%

답 7

219 문제 이해 두 곡선 $x^2+y^2=9$, $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{25}=1$은 오른쪽 그림과 같으므로



$|\overrightarrow{OP}|=3$,

$2\le|\overrightarrow{OQ}|\le5$ ● 30%

해결 과정 두 벡터 $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$가 이루는 각의 크기를 θ라 하면

$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=|\overrightarrow{OP}||\overrightarrow{OQ}|\cos\theta$

$=3|\overrightarrow{OQ}|\cos\theta$

이므로 $|\overrightarrow{OQ}|=5$, $\cos\theta=1$일 때 최댓값 15를 갖고, $|\overrightarrow{OQ}|=5$, $\cos\theta=-1$일 때 최솟값 -15를 갖는다. ● 60%

답 구하기 따라서 $M=15$, $m=-15$이므로

$M-m=30$ ● 10%

답 30

220 $\langle\vec{a}\rangle=\dfrac{\vec{a}}{\vec{a}\cdot\vec{a}}=\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|^2}$

ㄱ. $\vec{a}\cdot\langle\vec{a}\rangle=\vec{a}\cdot\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|^2}=\dfrac{|\vec{a}|^2}{|\vec{a}|^2}=1$

ㄴ. $\langle\langle\vec{a}\rangle\rangle=\left\langle\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|^2}\right\rangle=\dfrac{\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|^2}}{\left|\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|^2}\right|^2}=\dfrac{\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|^2}}{\dfrac{|\vec{a}|^2}{|\vec{a}|^4}}=\vec{a}$

ㄷ. $\langle\vec{a}+\langle\vec{a}\rangle\rangle=\left\langle\vec{a}+\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|^2}\right\rangle=\left\langle\dfrac{(|\vec{a}|^2+1)\vec{a}}{|\vec{a}|^2}\right\rangle$

$=\dfrac{\dfrac{(|\vec{a}|^2+1)\vec{a}}{|\vec{a}|^2}}{\left|\dfrac{(|\vec{a}|^2+1)\vec{a}}{|\vec{a}|^2}\right|^2}$

$=\dfrac{\dfrac{(|\vec{a}|^2+1)\vec{a}}{|\vec{a}|^2}}{\dfrac{(|\vec{a}|^2+1)^2|\vec{a}|^2}{|\vec{a}|^4}}=\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|^2+1}$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

일품 BOX

$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{25}=1$은 초점의 좌표가 $(0,\ -\sqrt{21})$, $(0,\ \sqrt{21})$이고 장축의 길이가 10, 단축의 길이가 4인 타원이다.

$\vec{x}\cdot\vec{a}$

$=(x,\ y)\cdot(0,\ -1)$

$=-y$

포물선 $y^2=4x$를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

$\begin{cases}3\vec{a}+\vec{b}=\vec{x} & \cdots ㉠\\ 3\vec{a}-\vec{b}=\vec{y} & \cdots ㉡\end{cases}$

㉠+㉡을 하면

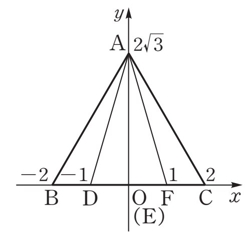
$6\vec{a}=\vec{x}+\vec{y}$

$\therefore \vec{a}=\dfrac{1}{6}(\vec{x}+\vec{y})$

이것을 ㉠에 대입하면

$\vec{b}=\dfrac{1}{2}(\vec{x}-\vec{y})$

221 문제 이해 오른쪽 그림과 같이 점 E가 원점, $\overline{EC}$, $\overline{AE}$가 각각 x축, y축의 양의 방향과 일치하도록 $\triangle ABC$를 좌표평면에 놓으면



$A(0,\ 2\sqrt{3})$, $B(-2,\ 0)$,

$C(2,\ 0)$, $D(-1,\ 0)$,

$E(0,\ 0)$, $F(1,\ 0)$ ● 40%

해결 과정 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}=(-2,\ -2\sqrt{3})+(0,\ -2\sqrt{3})$

$=(-2,\ -4\sqrt{3})$

$\overrightarrow{FE}-\overrightarrow{CA}=(-1,\ 0)-(-2,\ 2\sqrt{3})$

$=(1,\ -2\sqrt{3})$ ● 40%

답 구하기 $\therefore (\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE})\cdot(\overrightarrow{FE}-\overrightarrow{CA})$

$=(-2,\ -4\sqrt{3})\cdot(1,\ -2\sqrt{3})$

$=-2\times1+(-4\sqrt{3})\times(-2\sqrt{3})$

$=22$ ● 20%

답 22

다른 풀이 $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE})\cdot(\overrightarrow{FE}-\overrightarrow{CA})$

$=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{FE}-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{FE}-\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{CA}$

$=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{FE}|\cos60°-|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{CA}|\cos120°+|\overrightarrow{AE}||\overrightarrow{FE}|\cos90°-|\overrightarrow{AE}||\overrightarrow{CA}|\cos150°$

$=4\times1\times\dfrac{1}{2}-4\times4\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)+0-2\sqrt{3}\times4\times\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$=2+8+0+12$

$=22$

222 $\vec{x}-\vec{b}=(x-2,\ y-2)$,

$\vec{x}-(\vec{x}\cdot\vec{a})\vec{a}=(x,\ y)-(-y)(0,\ -1)=(x,\ 0)$

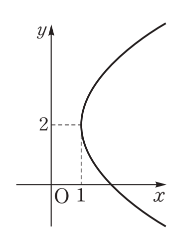
이므로 $|\vec{x}-\vec{b}|=|\vec{x}-(\vec{x}\cdot\vec{a})\vec{a}|$에서

$\sqrt{(x-2)^2+(y-2)^2}=\sqrt{x^2}$

$(x-2)^2+(y-2)^2=x^2$

$\therefore (y-2)^2=4(x-1)$

따라서 벡터 $\vec{x}$의 종점 X는 포물선 $(y-2)^2=4(x-1)$ 위를 움직이므로 점 X가 존재하는 사분면은 제1, 4사분면이다.



답 ③

223 $3\vec{a}+\vec{b}=\vec{x}$, $3\vec{a}-\vec{b}=\vec{y}$라 하면

$|\vec{x}|=2$, $|\vec{y}|=1$

또 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$를 $\vec{x}$, $\vec{y}$로 나타내면

$\vec{a}=\dfrac{1}{6}(\vec{x}+\vec{y})$, $\vec{b}=\dfrac{1}{2}(\vec{x}-\vec{y})$

$\therefore \vec{a}+\vec{b}=\frac{1}{3}(2\vec{x}-\vec{y})$

두 벡터 $\vec{x}$, $\vec{y}$가 이루는 각의 크기를 θ라 하면

$|2\vec{x}-\vec{y}|^2=(2\vec{x}-\vec{y})\cdot(2\vec{x}-\vec{y})$
$=4|\vec{x}|^2-4\vec{x}\cdot\vec{y}+|\vec{y}|^2$
$=16-4|\vec{x}||\vec{y}|\cos\theta+1$
$=17-8\cos\theta$

이때 $-1\le\cos\theta\le1$이므로

$9\le|2\vec{x}-\vec{y}|^2\le25$, $\quad 3\le|2\vec{x}-\vec{y}|\le5$

$1\le\frac{1}{3}|2\vec{x}-\vec{y}|\le\frac{5}{3}$ $\quad\therefore 1\le|\vec{a}+\vec{b}|\le\frac{5}{3}$

따라서 $|\vec{a}+\vec{b}|$의 최댓값은 $\frac{5}{3}$, 최솟값은 1이므로

$M=\frac{5}{3}$, $m=1$

$\therefore M+m=\frac{8}{3}$ 답 $\frac{8}{3}$

224 점 G가 △ABC의 무게중심이므로

$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

즉 $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}=-\overrightarrow{GC}$이므로

$|\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}|^2=|-\overrightarrow{GC}|^2$

$|\overrightarrow{GA}|^2+2\overrightarrow{GA}\cdot\overrightarrow{GB}+|\overrightarrow{GB}|^2=|\overrightarrow{GC}|^2$

$16+2|\overrightarrow{GA}||\overrightarrow{GB}|\cos\theta+36=64$

$48\cos\theta=12$ $\quad\therefore \cos\theta=\frac{1}{4}$ 답 $\frac{1}{4}$

225 문제 이해 $|k\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{2}|\vec{a}+k\vec{b}|$에서

$|k\vec{a}-\vec{b}|^2=2|\vec{a}+k\vec{b}|^2$

$\therefore k^2|\vec{a}|^2-2k\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$
$=2(|\vec{a}|^2+2k\vec{a}\cdot\vec{b}+k^2|\vec{b}|^2)$ ● 30%

해결 과정 이때 $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$이므로

$k^2-2k\vec{a}\cdot\vec{b}+1=2(1+2k\vec{a}\cdot\vec{b}+k^2)$

$6k\vec{a}\cdot\vec{b}=-k^2-1$

$\therefore \vec{a}\cdot\vec{b}=-\frac{k^2+1}{6k}=-\frac{1}{6}\left(k+\frac{1}{k}\right)$

이때 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$k+\frac{1}{k}\ge2\sqrt{k\times\frac{1}{k}}=2$ (등호는 $k=1$일 때 성립)

이므로

$-\frac{1}{6}\left(k+\frac{1}{k}\right)\le-\frac{1}{6}\times2=-\frac{1}{3}$ ● 50%

답 구하기 따라서 $\vec{a}\cdot\vec{b}$는 $k=1$일 때 최댓값 $-\frac{1}{3}$을 갖는다. ● 20%

답 $-\frac{1}{3}$

226 $\overrightarrow{BH}=k\overrightarrow{BD}$ $(k>0)$이므로

$\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BH}=\overrightarrow{AB}+k\overrightarrow{BD}$
$=\overrightarrow{AB}+k(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})=\vec{a}+k(\vec{b}-\vec{a})$
$=(1-k)\vec{a}+k\vec{b}$ ······ ㉠

일품 BOX

$-1\le\cos\theta\le1$에서
$-8\le-8\cos\theta\le8$
$9\le17-8\cos\theta\le25$
$\therefore 9\le|2\vec{x}-\vec{y}|^2\le25$

$a>0$, $b>0$일 때,
$\frac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}$
(단, 등호는 $a=b$일 때 성립)

$\overrightarrow{AH}\perp\overrightarrow{BD}$이므로 $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BD}=0$에서

$\{(1-k)\vec{a}+k\vec{b}\}\cdot(-\vec{a}+\vec{b})=0$

$-(1-k)|\vec{a}|^2+(1-k)\vec{a}\cdot\vec{b}-k\vec{b}\cdot\vec{a}+k|\vec{b}|^2=0$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$이므로

$k(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2)=|\vec{a}|^2$

$\therefore k=\frac{|\vec{a}|^2}{|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2}$ ······ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$\overrightarrow{AH}=\frac{|\vec{b}|^2}{|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2}\vec{a}+\frac{|\vec{a}|^2}{|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2}\vec{b}$

따라서 $p=\frac{|\vec{b}|^2}{|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2}$, $q=\frac{|\vec{a}|^2}{|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2}$이므로

$p-q=\frac{|\vec{b}|^2-|\vec{a}|^2}{|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2}$ 답 ②

227 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$라 하면

$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$이므로

$\vec{a}\cdot(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=0$

$|\vec{a}|^2+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}=0$

$\therefore 3+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}=0$ ······ ㉠

마찬가지로 $\vec{b}\cdot(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=0$, $\vec{c}\cdot(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=0$이므로

$3+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}=0$ ······ ㉡

$5+\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}=0$ ······ ㉢

㉠+㉡+㉢을 하면

$11+2(\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{a}\cdot\vec{c})=0$

$\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{a}\cdot\vec{c}=-\frac{11}{2}$ ······ ㉣

㉡, ㉣에서 $\quad\vec{a}\cdot\vec{c}=-\frac{5}{2}$

$\therefore \cos\theta=\frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}}{|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OC}|}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{c}}{|\vec{a}||\vec{c}|}$
$=\frac{-\frac{5}{2}}{\sqrt{3}\sqrt{5}}=-\frac{\sqrt{15}}{6}$ 답 $-\frac{\sqrt{15}}{6}$

228 $\overrightarrow{BA}=(-2,\ 1)$, $\overrightarrow{BC}=(2,\ 6)$이므로

$|\overrightarrow{BA}|=\sqrt{(-2)^2+1^2}=\sqrt{5}$,

$|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{2^2+6^2}=2\sqrt{10}$

이때

$\cos(\angle ABC)=\frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|}$
$=\frac{-2\times2+1\times6}{\sqrt{5}\times2\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{2}}{10}$

이므로

$\sin(\angle ABC)=\sqrt{1-\cos^2(\angle ABC)}$
$=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{10}\right)^2}=\frac{7\sqrt{2}}{10}$

$\therefore \triangle ABC=\frac{1}{2}|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|\sin(\angle ABC)$
$=\frac{1}{2}\times\sqrt{5}\times2\sqrt{10}\times\frac{7\sqrt{2}}{10}=7$ 답 ②

229 $2\vec{a}-\vec{b}=2\left(3,\ \frac{1}{2}\right)-(8,\ -3)=(-2,\ 4)$에서

$|2\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{(-2)^2+4^2}=2\sqrt{5}$

이므로 $\quad \vec{c}=\frac{1}{2\sqrt{5}}(-2,\ 4)=\left(-\frac{1}{\sqrt{5}},\ \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$

따라서 $c_1=-\frac{1}{\sqrt{5}},\ c_2=\frac{2}{\sqrt{5}}$이므로

$c_1c_2=-\frac{1}{\sqrt{5}}\times\frac{2}{\sqrt{5}}=-\frac{2}{5}$

답 ④

230 해결 과정 직선 $x=2t-1,\ y=-3t+2$의 방향벡터를 $\vec{u}$라 하면

$\vec{u}=(2,\ -3)$ ● 20%

따라서 점 $(4,\ -1)$을 지나고 법선벡터가 $\vec{u}=(2,\ -3)$인 직선의 방정식은

$2(x-4)-3(y+1)=0$

$\therefore y=\frac{2}{3}x-\frac{11}{3}$ ● 50%

답 구하기 즉 $f(x)=\frac{2}{3}x-\frac{11}{3}$이므로

$f(10)=\frac{2}{3}\times10-\frac{11}{3}=3$ ● 30%

답 3

231 $\frac{x-4}{3}=\frac{y-5}{5}=t$($t$는 실수)로 놓으면

$x=3t+4,\ y=5t+5$

이므로 $\mathrm{H}(3t+4,\ 5t+5)$로 놓을 수 있다.

$\therefore \overrightarrow{\mathrm{AH}}=(3t-1,\ 5t+4)$

직선 $\frac{x-4}{3}=\frac{y-5}{5}$의 방향벡터를 $\vec{u}$라 하면

$\vec{u}=(3,\ 5)$

$\overrightarrow{\mathrm{AH}}\perp\vec{u}$이므로 $\overrightarrow{\mathrm{AH}}\cdot\vec{u}=0$에서

$(3t-1,\ 5t+4)\cdot(3,\ 5)=0$

$3(3t-1)+5(5t+4)=0$

$34t+17=0 \qquad \therefore t=-\frac{1}{2}$

따라서 $\mathrm{H}\left(\frac{5}{2},\ \frac{5}{2}\right)$이므로 $\quad a=\frac{5}{2},\ b=\frac{5}{2}$

$\therefore a+b=5$

답 ④

다른 풀이 직선 $\frac{x-4}{3}=\frac{y-5}{5}$ 위의 임의의 점을 $\mathrm{P}(3t+4,\ 5t+5)$로 놓으면 $\overline{\mathrm{AP}}$의 길이가 최소일 때 점 P와 점 H는 일치한다. 이때

$\overline{\mathrm{AP}}^2=(3t-1)^2+(5t+4)^2$

$=34t^2+34t+17$

$=34\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{17}{2}$

이므로 $\overline{\mathrm{AP}}^2$은 $t=-\frac{1}{2}$일 때 최솟값을 갖고 $\overline{\mathrm{AP}}$의 길이도 최소이다.

따라서 $\mathrm{H}\left(\frac{5}{2},\ \frac{5}{2}\right)$이므로 $\quad a=\frac{5}{2},\ b=\frac{5}{2}$

$\therefore a+b=5$

일품 BOX

방향벡터가 각각 $\vec{u_1}=(a_1,\ a_2)$, $\vec{u_2}=(b_1,\ b_2)$인 두 직선이 서로 평행하면

$\vec{u_1}/\!/\vec{u_2}$

$\iff \vec{u_1}=k\vec{u_2}\ (k\neq0)$

$\iff \frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}$

232 주어진 두 직선의 방향벡터를 각각 $\vec{u_1},\ \vec{u_2}$라 하면

$\vec{u_1}=(k,\ -2),\ \vec{u_2}=(k+3,\ 4)$

두 직선이 서로 수직이면 $\vec{u_1}\cdot\vec{u_2}=0$에서

$k(k+3)+(-2)\times4=0$

$k^2+3k-8=0$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 모든 실수 k의 값의 곱은 -8이므로

$\alpha\beta=-8$

또 두 직선이 서로 평행하면

$\frac{k}{k+3}=\frac{-2}{4},\qquad 4k=-2k-6 \qquad \therefore k=-1$

$\therefore \gamma=-1$

$\therefore \alpha\beta\gamma=-8\times(-1)=8$

답 ④

233 주어진 두 직선의 방향벡터를 각각 $\vec{u_1},\ \vec{u_2}$라 하면

$\vec{u_1}=(2,\ a),\ \vec{u_2}=(1,\ 3)$

두 직선이 이루는 각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$이므로

$\cos\frac{\pi}{4}=\frac{|\vec{u_1}\cdot\vec{u_2}|}{|\vec{u_1}||\vec{u_2}|}=\frac{|2\times1+a\times3|}{\sqrt{2^2+a^2}\sqrt{1^2+3^2}}$

$=\frac{|2+3a|}{\sqrt{4+a^2}\times\sqrt{10}}$

즉 $\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{|2+3a|}{\sqrt{4+a^2}\times\sqrt{10}}$에서

$2|2+3a|=\sqrt{20}\sqrt{4+a^2}$

$4(9a^2+12a+4)=20(a^2+4)$

$16a^2+48a-64=0$

$\therefore a^2+3a-4=0$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 모든 실수 a의 값의 합은 -3이다.

답 ①

234 $\overrightarrow{\mathrm{PA}}=(-1-x,\ 1-y),\ \overrightarrow{\mathrm{PB}}=(1-x,\ -1-y)$이므로 $\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}=-1$에서

$(-1-x)(1-x)+(1-y)(-1-y)=-1$

$x^2-1+y^2-1=-1$

$\therefore x^2+y^2=1 \qquad \cdots\cdots ㉠$

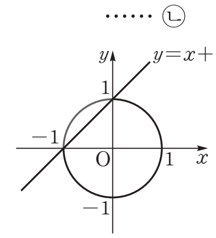
$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BA}}\le2$에서

$(x,\ y)\cdot(-2,\ 2)\le2$

$-2x+2y\le2$

$\therefore y\le x+1 \qquad \cdots\cdots ㉡$

㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 점 P가 나타내는 도형은 오른쪽 그림과 같이 중심이 원점이고 반지름의 길이가 1인 원의 제2사분면에 있는 부분을 제외한 부분이므로 구하는 도형의 길이는



$\frac{3}{4}\times2\pi=\frac{3}{2}\pi$

답 ⑤

235 문제 이해 $|\vec{x}-\vec{a}|=r$를 만족시키는 도형은 중심이 $A(1,\ -2)$이고 반지름의 길이가 r인 원이다. ● 30%

해결 과정 점 $A(1,\ -2)$와 직선 $\dfrac{x-2}{2}=y-4$, 즉 $x-2y+6=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|1+4+6|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{11}{\sqrt{5}}$$ ● 30%

답 구하기 이때 $4^2<\left(\dfrac{11}{\sqrt{5}}\right)^2<5^2$이므로 $|\vec{x}-\vec{a}|=r$를 만족시키는 도형이 직선 $\dfrac{x-2}{2}=y-4$와 만나지 않도록 하는 자연수 r는 1, 2, 3, 4의 4개이다. ● 40%

답 4

236 $\overline{DP}=m$, $\overline{PB}=n$이라 하면 점 P가 $\overline{DB}$를 $m:n$으로 내분하므로

$$\overrightarrow{CP}=\frac{m\overrightarrow{CB}+n\overrightarrow{CD}}{m+n}$$

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB}$에서

$$\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{DC}$$
$$=\vec{b}-\vec{a}-\frac{2}{3}\vec{b}=-\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$$

또 $\overrightarrow{CD}=-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}=-\dfrac{2}{3}\vec{b}$이므로

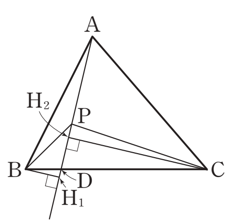
$$\overrightarrow{CP}=\frac{m\left(-\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}\right)+n\left(-\frac{2}{3}\vec{b}\right)}{m+n}$$
$$=\frac{-m\vec{a}+\frac{m-2n}{3}\vec{b}}{m+n}$$
$$=-\frac{m}{m+n}\vec{a}+\frac{m-2n}{3(m+n)}\vec{b}$$

따라서 $s=-\dfrac{m}{m+n}$, $t=\dfrac{m-2n}{3(m+n)}$이므로

$$s+t=-\frac{2(m+n)}{3(m+n)}=-\frac{2}{3}$$

답 ④

237 직선 AP와 $\overline{BC}$의 교점을 D라 하고 두 점 B, C에서 직선 AP에 내린 수선의 발을 각각 H_1, H_2라 하면



$\triangle ABP : \triangle CAP=1:3$

이므로 $\overline{AP}$를 밑변이라 하면 $\overline{AP}$에 대한 높이의 비는 $1:3$이다.

즉 $\overline{BH_1}:\overline{CH_2}=1:3$에서 두 삼각형 BDH_1, CDH_2의 닮음비가 $1:3$이므로

$$\overline{BD}:\overline{CD}=1:3$$

$$\therefore \overrightarrow{AD}=\frac{3\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{4}$$

$\triangle BCP=4S$라 하면 $\triangle PBD : \triangle PDC=1:3$이므로

$$\triangle PBD=\frac{1}{4}\triangle BCP=S$$

일품 BOX

원의 반지름의 길이를 r, 원과 직선 사이의 거리를 d라 할 때, 원과 직선이 만나지 않으려면 $r<d$

$\triangle BDH_1$과 $\triangle CDH_2$에서
$\angle BH_1D=\angle CH_2D=90°$,
$\angle BDH_1=\angle CDH_2$ (맞꼭지각)
이므로
$\triangle BDH_1 \backsim \triangle CDH_2$ (AA 닮음)

또 $\triangle ABP : \triangle BCP=1:2$에서 $\triangle ABP=2S$

즉 $\triangle ABP : \triangle PBD=2:1$이므로 $\overline{AP}:\overline{PD}=2:1$

$$\therefore \overline{AD}:\overline{AP}=3:2$$

$$\therefore \overrightarrow{AP}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}\times\frac{3\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{4}$$
$$=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$$

따라서 $m=\dfrac{1}{2}$, $n=\dfrac{1}{6}$이므로

$$\frac{m}{n}=3$$

답 3

238 점 A가 출발한 후 10초 동안에는 $\vec{a}=(1,\ -1)$의 방향으로 매초 $\sqrt{2}$의 속력으로 움직이고 $|\vec{a}|=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$이므로 1초 동안 점 A는 $\vec{a}$의 방향으로 $|\vec{a}|$만큼 움직였다.

또 점 A가 출발한 지 10초 후부터 20초 동안에는 $\vec{b}=(3,\ 4)$의 방향으로 매초 2의 속력으로 움직이고 $|\vec{b}|=\sqrt{3^2+4^2}=5$이므로 1초 동안 점 A는 $\vec{b}$의 방향으로 $\dfrac{2}{5}|\vec{b}|$만큼 움직였다.

따라서 점 A가 출발한 지 30초 후의 위치벡터는

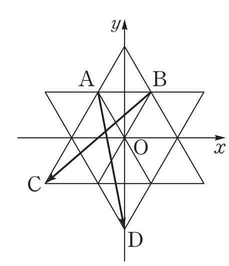
$$10\vec{a}+20\times\frac{2}{5}\vec{b}=10(1,\ -1)+8(3,\ 4)$$
$$=(34,\ 22)$$

이므로 $p=34$, $q=22$

$$\therefore p+q=56$$

답 56

239 주어진 정삼각형의 각 변의 삼등분점을 연결하면 한 변의 길이가 2인 정삼각형 12개로 이루어진 도형이 만들어진다.



이 도형을 오른쪽 그림과 같이 좌표평면에 놓으면

$A(-1,\ \sqrt{3})$, $B(1,\ \sqrt{3})$,
$C(-3,\ -\sqrt{3})$, $D(0,\ -2\sqrt{3})$

이므로

$$\overrightarrow{AD}=(1,\ -3\sqrt{3}),\ \overrightarrow{BC}=(-4,\ -2\sqrt{3})$$

$$\therefore \cos\theta=\frac{\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{AD}||\overrightarrow{BC}|}$$
$$=\frac{1\times(-4)+(-3\sqrt{3})\times(-2\sqrt{3})}{\sqrt{1^2+(-3\sqrt{3})^2}\sqrt{(-4)^2+(-2\sqrt{3})^2}}$$
$$=\frac{14}{\sqrt{28}\sqrt{28}}$$
$$=\frac{1}{2}$$

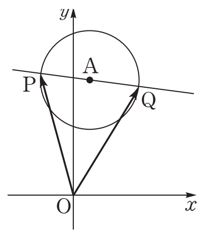
답 ③

240 $|\overrightarrow{AT}|=3$을 만족시키는 점 T가 나타내는 도형은 중심이 $A(1,\ 7)$이고 반지름의 길이가 3인 원이다.

또 직선 $\frac{x-1}{m}=\frac{y-7}{n}$은 점 A(1, 7)을 지나므로 직선과 원의 교점 P, Q에 대하여 $\overline{PQ}$는 이 원의 지름이다.
따라서 오른쪽 그림에서

$$|\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}|=2|\overrightarrow{OA}|$$
$$=2\sqrt{1^2+7^2}$$
$$=10\sqrt{2}$$

답 ⑤



241 $|\vec{a}-\vec{b}|:|\vec{a}+\vec{b}|=2:3$이므로

$3|\vec{a}-\vec{b}|=2|\vec{a}+\vec{b}|$

양변을 제곱하면

$9|\vec{a}-\vec{b}|^2=4|\vec{a}+\vec{b}|^2$

$9(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=4(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})$

$9(|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2)=4(|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2)$

$26\vec{a}\cdot\vec{b}=5(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2)$

$\therefore \vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{5}{26}(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2)$

$$\therefore \cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{\frac{5}{26}(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2)}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{\frac{5}{26}(|\vec{a}|^2+4|\vec{a}|^2)}{|\vec{a}|\times2|\vec{a}|}\ (\because |\vec{b}|=2|\vec{a}|)=\frac{25}{52}$$

따라서 $p=52$, $q=25$이므로

$p+q=77$

답 77

1등급 비밀노트

벡터의 크기에 대한 관계식이 주어진 경우 내적을 구할 때에는

$$|k\vec{a}+l\vec{b}|^2=(k\vec{a}+l\vec{b})\cdot(k\vec{a}+l\vec{b})=k^2|\vec{a}|^2+2kl\vec{a}\cdot\vec{b}+l^2|\vec{b}|^2$$

임을 이용한다.

일품 BOX

$y=x^n$ (n은 실수)이면 $y'=nx^{n-1}$

$f(x)$, $g(x)$ ($g(x)\neq0$)가 미분가능할 때, $y=\frac{f(x)}{g(x)}$이면 $y'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$

05 평면 운동

본책 48쪽

242 점 P가 원점을 지날 때 $x=0$이므로

$t^4-3t^3-t^2+3t=0$, $\quad t^2(t^2-1)-3t(t^2-1)=0$

$(t^2-1)(t^2-3t)=0$, $\quad t(t+1)(t-1)(t-3)=0$

$\therefore t=1$ 또는 $t=3$ ($\because t>0$)

따라서 점 P는 $t=1$일 때 출발 후 처음으로 다시 원점을 지나고, $t=3$일 때 두 번째로 다시 원점을 지난다.
점 P의 시각 t에서의 속도를 $v(t)$, 가속도를 $a(t)$라 하면

$v(t)=f'(t)=4t^3-9t^2-2t+3$

$a(t)=v'(t)=12t^2-18t-2$

따라서 $t=1$일 때 속도 α와 $t=3$일 때 가속도 β는

$\alpha=4-9-2+3=-4$, $\beta=108-54-2=52$

$\therefore \alpha+\beta=48$

답 48

243 $s=\sqrt{t}(12-t)=12\sqrt{t}-t\sqrt{t}$이므로 자동차가 제동을 건 지 t초 후의 속도를 v라 하면

$$v=\frac{ds}{dt}=\frac{12}{2\sqrt{t}}-\frac{3}{2}\sqrt{t}=\frac{12-3t}{2\sqrt{t}}$$

자동차가 정지할 때의 속도는 0이므로

$\frac{12-3t}{2\sqrt{t}}=0 \qquad \therefore t=4$

따라서 자동차가 제동을 건 후 4초 동안 움직인 거리는

$\sqrt{4}(12-4)=16$(m)

답 16 m

244 점 P의 시각 t에서의 속도를 $v(t)$, 가속도를 $a(t)$라 하면

$$v(t)=f'(t)=3-\frac{2}{(t+1)^2}$$

$$a(t)=v'(t)=\frac{2\cdot2(t+1)}{(t+1)^4}=\frac{4}{(t+1)^3}$$

따라서 $t=1$에서의 속도와 가속도는 각각

$v(1)=3-\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$, $a(1)=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$

답 ④

245 $\frac{dx}{dt}=2$, $\frac{dy}{dt}=2t-2$이므로 점 P의 시각 t에서의 속도를 $\vec{v}$라 하면

$\vec{v}=(2,\ 2t-2)$

따라서 $t=2$에서의 속도는 $\vec{v}=(2,\ 2)$이므로 속력은

$|\vec{v}|=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$

답 ②

246 $\frac{dx}{dt}=1-2\sin 2t$, $\frac{dy}{dt}=-2\cos 2t$에서

$\frac{d^2x}{dt^2}=-4\cos 2t$, $\frac{d^2y}{dt^2}=4\sin 2t$

이므로 점 P의 시각 t에서의 가속도를 $\vec{a}$라 하면

$\vec{a}=(-4\cos 2t,\ 4\sin 2t)$

따라서 $t=\frac{3}{4}\pi$에서의 가속도는 $(0,\ -4)$이다.

답 ④

247 $\frac{dx}{dt}=3at^2+5,\ \frac{dy}{dt}=-4t$에서

$\frac{d^2x}{dt^2}=6at,\ \frac{d^2y}{dt^2}=-4$

이므로 점 P의 시각 t에서의 가속도를 $\vec{a}$라 하면

$\vec{a}=(6at,\ -4)$

이때 $t=2$에서의 가속도의 크기가 $4\sqrt{2}$이므로

$\sqrt{(12a)^2+(-4)^2}=4\sqrt{2},\quad 144a^2+16=32$

$a^2=\frac{1}{9}$

$\therefore a=\frac{1}{3}\ (\because a>0)$

답 ①

248 시각 t에서의 점 P의 위치를 $s(t)$라 하면

$s(t)=0+\int_0^t 2\sin\frac{t}{2}\,dt$

$=\left[-4\cos\frac{t}{2}\right]_0^t=-4\cos\frac{t}{2}+4$

점 P가 원점을 지날 때 $s(t)=0$이므로

$-4\cos\frac{t}{2}+4=0,\quad \cos\frac{t}{2}=1$

$\frac{t}{2}=2\pi,\ 4\pi,\ 6\pi,\ \cdots\ (\because t>0)$

$\therefore t=4\pi,\ 8\pi,\ 12\pi,\ \cdots$

따라서 출발 후 처음으로 원점을 지나는 시각은 4π이다.

답 4π

249 $t=0$에서 $t=\frac{2}{3}\pi$까지 점 P가 움직인 거리는

$\int_0^{\frac{2}{3}\pi}|\cos t|\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\,dt-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2}{3}\pi}\cos t\,dt$

$=\left[\sin t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\left[\sin t\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2}{3}\pi}$

$=1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-1\right)$

$=\frac{4-\sqrt{3}}{2}$

답 ③

250 고속열차가 출발한 후 a분 동안 달린 거리는

$\int_0^a \frac{5}{9}t^2\,dt=\left[\frac{5}{27}t^3\right]_0^a=\frac{5}{27}a^3$

고속열차가 5 km를 달리는 데 걸린 시간은

$\frac{5}{27}a^3=5\qquad \therefore a=3$

3분 이후부터 고속열차의 속도는

$v(3)=\frac{5}{9}\cdot 3^2=5\,(\text{km/min})$

이므로 출발한 후 10분 동안 달린 거리는

$5+5\cdot 7=40\,(\text{km})$

답 40 km

251 $\frac{dx}{dt}=\sqrt{3}\cos t-\sin t,\ \frac{dy}{dt}=-\sqrt{3}\sin t-\cos t$

이므로 $t=0$에서 $t=\frac{5}{2}\pi$까지 점 P가 움직인 거리는

일품 BOX

- $t=2$에서의 가속도는 $\vec{a}=(12a,\ -4)$
- 운동 방향을 바꿀 때의 속도는 0이다.
- 3분 동안 5 km를 달리고 7분 동안 5 km/min의 속도로 달린다.

방정식 $g(x)+a=0$의 서로 다른 실근의 개수는 함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=-a$의 교점의 개수와 같다.

$\int_0^{\frac{5}{2}\pi}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$

$=\int_0^{\frac{5}{2}\pi}\sqrt{(\sqrt{3}\cos t-\sin t)^2+(-\sqrt{3}\sin t-\cos t)^2}\,dt$

$=\int_0^{\frac{5}{2}\pi}2\,dt=\left[2t\right]_0^{\frac{5}{2}\pi}=5\pi$

답 ④

252 $\frac{dx}{dt}=6t,\ \frac{dy}{dt}=3-3t^2$이므로 구하는 곡선의 길이는

$\int_0^3\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt=\int_0^3\sqrt{(6t)^2+(3-3t^2)^2}\,dt$

$=\int_0^3\sqrt{9(t^2+1)^2}\,dt$

$=3\int_0^3(t^2+1)\,dt$

$=3\left[\frac{1}{3}t^3+t\right]_0^3$

$=36$

답 36

253 $f'(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$이므로 구하는 곡선의 길이는

$\int_{-2}^2\sqrt{1+\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2}\,dx=\int_{-2}^2\sqrt{\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2}\,dx$

$=\int_{-2}^2\frac{e^x+e^{-x}}{2}\,dx$

$=\frac{1}{2}\left[e^x-e^{-x}\right]_{-2}^2$

$=e^2-\frac{1}{e^2}$

답 ③

254 문제 이해 두 점 P, Q의 시각 t에서의 속도를 각각 v_P, v_Q라 하면

$v_P=\frac{2t}{t^2+1},\ v_Q=3t^2-18t+24$ ● 30%

해결 과정 $t>0$에서 $v_P>0$이고 두 점 P, Q가 서로 반대 방향으로 움직이면 $v_Pv_Q<0$이므로

$v_Q=3t^2-18t+24<0$

$3(t-2)(t-4)<0\qquad \therefore 2<t<4$ ● 50%

답 구하기 $t=2$일 때 점 Q의 위치는 20, $t=4$일 때 점 Q의 위치는 16이므로 점 Q가 움직인 거리는

$|16-20|=4$ ● 20%

답 4

255 점 P의 시각 t에서의 속도를 $v(t)$라 하면

$v(t)=f'(t)=4t^3-12t+a$

점 P가 운동 방향을 두 번 바꾸므로 방정식 $v(t)=0$은 서로 다른 두 개의 양의 근을 갖는다.

$4t^3-12t+a=0$에서

$4t^3-12t=-a$ ······ ㉠

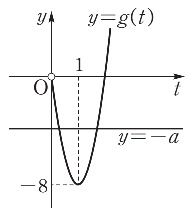
$g(t)=4t^3-12t$라 하면

$g'(t)=12t^2-12=12(t+1)(t-1)$

$g'(t)=0$에서 $\quad t=1\ (\because t>0)$

t	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$g'(t)$		$-$	0	$+$
$g(t)$		↘	-8	↗

따라서 $y=g(t)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 방정식 ㉠이 서로 다른 두 개의 양의 근을 가지려면



$$-8<-a<0$$

$$\therefore 0<a<8$$

답 ③

참고 t가 양수이므로 방정식 $4t^3-12t+a=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는 것이 아니라 서로 다른 두 개의 양의 근을 가짐에 유의한다.

256 점 P의 시각 t에서의 속도를 $v(t)$라 하면

$$v(t)=f'(t)=2\cos 2t-2\sin 2t$$

$$=2\sqrt{2}\cos\left(2t+\frac{\pi}{4}\right)$$

삼각함수의 합성
$a\cos\theta-b\sin\theta$
$=\sqrt{a^2+b^2}\cos(\theta+\alpha)$
$\left(\text{단, } \cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \sin\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$

$-2\sqrt{2}\le 2\sqrt{2}\cos\left(2t+\frac{\pi}{4}\right)\le 2\sqrt{2}$이므로 속도의 최댓값은 $2\sqrt{2}$이고 이때 $\cos\left(2t+\frac{\pi}{4}\right)=1$이므로

$$2t_1+\frac{\pi}{4}=2\pi,\ 2t_2+\frac{\pi}{4}=4\pi,\ 2t_3+\frac{\pi}{4}=6\pi,\ \cdots$$

$$t_1=\frac{7}{8}\pi,\ t_2=\frac{15}{8}\pi,\ t_3=\frac{23}{8}\pi,\ \cdots$$

$$\therefore t_n=\frac{8n-1}{8}\pi\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{nt_1}{t_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot\frac{7}{8}\pi}{\frac{8n-1}{8}\pi}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{7n}{8n-1}=\frac{7}{8}$$

답 ⑤

257 점 P의 x좌표가 매초 1씩 증가하므로 점 P의 시각 t에서의 위치를 $(x,\ y)$라 하면

$$x=t,\ y=8e^{-t}$$

$e^xy=8$에서
$y=\frac{8}{e^x}=8e^{-x}$
$x=t$이므로
$y=8e^{-t}$

이때 $\frac{dx}{dt}=1,\ \frac{dy}{dt}=-8e^{-t}$이고

$$\frac{d^2x}{dt^2}=0,\ \frac{d^2y}{dt^2}=8e^{-t}$$

이므로 점 P의 시각 t에서의 속도를 $\vec{v}$, 가속도를 $\vec{a}$라 하면

$$\vec{v}=(1,\ -8e^{-t}),\ \vec{a}=(0,\ 8e^{-t})$$

점 P의 위치가 $(\ln 4,\ 2)$일 때, 즉 $t=\ln 4$에서의 속도와 가속도는 각각

$$\vec{v}=(1,\ -2),\ \vec{a}=(0,\ 2)$$

따라서 속력과 가속도의 크기는 각각

$$|\vec{v}|=\sqrt{1^2+(-2)^2}=\sqrt{5},\ |\vec{a}|=\sqrt{0^2+2^2}=2$$

답 ⑤

258 해결 과정 $\frac{dx}{dt}=3(1-\cos t),\ \frac{dy}{dt}=3\sin t$

이므로 점 P의 시각 t에서의 속력은

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=\sqrt{\{3(1-\cos t)\}^2+(3\sin t)^2}$$

$$=3\sqrt{2-2\cos t}$$

● 40%

$\sqrt{2-2\cos t}$의 값이 최대이려면 $\cos t$의 값이 최소이어야 하므로
$\cos t=-1$

$\cos t=-1$일 때, 즉 $t=\pi$일 때 점 P의 속력이 최대이고, 시각 $t=\pi$에서의 점 P의 위치는 $(3\pi,\ 6)$이므로

$$a=3\pi,\ b=6$$

● 40%

답 구하기 $\therefore \frac{ab}{\pi}=\frac{3\pi\cdot 6}{\pi}=18$ ● 20%

답 18

259 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치를 $(x,\ y)$라 하면

$$x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$$

이때 원점과 점 P 사이의 거리 r는 매초 3씩 증가하므로 $r=3t$이고, 직선 OP가 x축의 양의 방향과 이루는 각 θ는 매초 2라디안씩 증가하므로 $\theta=2t$이다.

즉 $x=3t\cos 2t,\ y=3t\sin 2t$이므로

$$\frac{dx}{dt}=3\cos 2t-6t\sin 2t$$

$$\frac{dy}{dt}=3\sin 2t+6t\cos 2t$$

따라서 점 P의 시각 t에서의 속력은

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

$$=\sqrt{(3\cos 2t-6t\sin 2t)^2+(3\sin 2t+6t\cos 2t)^2}$$

$$=\sqrt{36t^2+9}$$

이므로 점 P가 원점을 출발한 지 1초 후의 속력은

$$\sqrt{36+9}=3\sqrt{5}$$

답 $3\sqrt{5}$

260 점 P의 좌표를 $(x,\ e^x)$이라 하면

$$\mathrm{Q}(x,\ 0)$$

$y=e^x$의 양변을 t에 대하여 미분하면

$$\frac{dy}{dt}=e^x\frac{dx}{dt}$$

점 P의 속력은

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+e^{2x}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}$$

$$=\sqrt{1+e^{2x}}\,\frac{dx}{dt}$$

이때 점 P의 속력이 1이므로

$$\sqrt{1+e^{2x}}\,\frac{dx}{dt}=1 \qquad \therefore \frac{dx}{dt}=\frac{1}{\sqrt{1+e^{2x}}}$$

점 Q의 속력은

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=\frac{dx}{dt}=\frac{1}{\sqrt{1+e^{2x}}}$$

점 Q는 x축 위를 움직이므로
$\frac{dy}{dt}=0$

따라서 $x=1$일 때 점 Q의 속력은

$$\frac{1}{\sqrt{1+e^2}}$$

답 $\frac{1}{\sqrt{1+e^2}}$

261 해결 과정 물을 넣기 시작한 지 t초 후의 수면의 높이를 $h(t)$ cm라 하면

$$h(t)=\int_0^t \frac{1}{\sqrt{1+t}}dt=\left[2\sqrt{1+t}\right]_0^t$$
$$=2\sqrt{1+t}-2$$ ● 60%

답 구하기 $h(t)=16$에서

$2\sqrt{1+t}-2=16$

$\sqrt{1+t}=9,\quad 1+t=81$

$\therefore t=80$

따라서 수면의 높이가 16 cm가 되는 것은 물을 넣기 시작한 지 80초 후이다. ● 40%

답 80초

262 자동차가 출발한 지 2초 후의 속도는

$v(2)=e$ (m/s)

정지하기 전 2초 동안의 가속도를 a m/s^{2}이라 하고 속도를 $v(t)=at+b$ (a, b는 상수)라 하면

$v(18)=e$, $v(20)=0$이므로

$18a+b=e,\ 20a+b=0$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=-\frac{e}{2},\ b=10e$

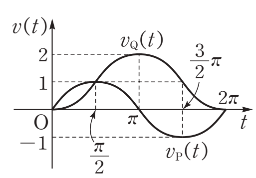
$\therefore v(t)=-\frac{e}{2}t+10e$

따라서 구하는 거리는

$$\int_0^2 e^{\frac{t}{2}}dt+\int_2^{18} e\,dt+\int_{18}^{20}\left(-\frac{e}{2}t+10e\right)dt$$
$$=\left[2e^{\frac{t}{2}}\right]_0^2+\left[et\right]_2^{18}+\left[-\frac{e}{4}t^2+10et\right]_{18}^{20}$$
$$=(2e-2)+(18e-2e)+(100e-99e)$$
$$=19e-2\,(\mathrm{m})$$

답 ①

263 $v_{\mathrm{P}}(t)$, $v_{\mathrm{Q}}(t)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 시각 $t=\frac{\pi}{2}$, $t=2\pi$에서 두 점 P, Q의 속도가 같아진다.



$\therefore a=\frac{\pi}{2},\ b=2\pi$

즉 $t=\frac{\pi}{2}$에서 $t=2\pi$까지 두 점 P, Q가 움직인 거리는 각각

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi}|\sin t|dt=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin t\,dt+\int_{\pi}^{2\pi}(-\sin t)dt$$
$$=\left[-\cos t\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}+\left[\cos t\right]_{\pi}^{2\pi}$$
$$=1+\{1-(-1)\}=3$$
$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi}|1-\cos t|dt=\int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi}(1-\cos t)dt$$
$$=\left[t-\sin t\right]_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi}=\frac{3}{2}\pi+1$$

따라서 구하는 합은

$$3+\left(\frac{3}{2}\pi+1\right)=\frac{3}{2}\pi+4$$

답 ②

일품 BOX

$b=-20a$를 $18a+b=e$에 대입하면

$-2a=e$

$\therefore a=-\frac{e}{2}$

$\therefore b=-20\times\left(-\frac{e}{2}\right)=10e$

$0\le t\le\frac{\pi}{2}$에서

$\sin t\ge0,\ \cos t\ge0$

$\therefore 3\sin t\cos t\ge0$

배각의 공식

① $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$

② $\cos 2\alpha$
$=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$
$=2\cos^2\alpha-1$
$=1-2\sin^2\alpha$

③ $\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

264 $\frac{dx}{dt}=-3\cos^2 t\sin t,\ \frac{dy}{dt}=3\sin^2 t\cos t$에서

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2$$
$$=(-3\cos^2 t\sin t)^2+(3\sin^2 t\cos t)^2$$
$$=9\cos^4 t\sin^2 t+9\sin^4 t\cos^2 t$$
$$=9\cos^2 t\sin^2 t(\cos^2 t+\sin^2 t)$$
$$=9\cos^2 t\sin^2 t$$

따라서 구하는 거리는

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{9\cos^2 t\sin^2 t}\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}3\sin t\cos t\,dt$$
$$=\frac{3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2t\,dt$$
$$=\frac{3}{2}\left[-\frac{1}{2}\cos 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=\frac{3}{2}\left\{\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)\right\}$$
$$=\frac{3}{2}$$

답 ⑤

265 해결 과정 $\frac{dx}{dt}=4,\ \frac{dy}{dt}=2(t+1)-\frac{2}{t+1}$

이므로

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=4^2+\left\{2(t+1)-\frac{2}{t+1}\right\}^2$$
$$=\left\{2(t+1)+\frac{2}{t+1}\right\}^2$$ ● 30%

따라서 $t=0$에서 $t=3$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^3\sqrt{\left\{2(t+1)+\frac{2}{t+1}\right\}^2}dt$$
$$=\int_0^3\left\{2t+2+\frac{2}{t+1}\right\}dt$$
$$=\left[t^2+2t+2\ln(t+1)\right]_0^3$$
$$=15+4\ln 2$$

이므로 $a=15,\ b=4$ ● 60%

답 구하기 $\therefore a+b=19$ ● 10%

답 19

266 $\frac{dx}{dt}=e^t(\cos t-\sin t),\ \frac{dy}{dt}=e^t(\sin t+\cos t)$

이므로 구하는 곡선의 길이는

$$\int_0^{\ln 4}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt$$
$$=\int_0^{\ln 4}e^t\sqrt{(\cos t-\sin t)^2+(\sin t+\cos t)^2}dt$$
$$=\int_0^{\ln 4}\sqrt{2}e^t dt=\left[\sqrt{2}e^t\right]_0^{\ln 4}=3\sqrt{2}$$

답 ④

267 점 M의 시각 t에서의 위치를 $f(t)$라 하면

$$f(t)=\frac{1}{2}\{(t^3-9t^2+10t)+(t^2+6t)\}$$
$$=\frac{1}{2}(t^3-8t^2+16t)$$

점 M의 시각 t에서의 속도를 $v(t)$라 하면

$$v(t)=f'(t)=\frac{1}{2}(3t^2-16t+16)$$

점 M이 운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이므로 $v(t)=0$에서

$$3t^2-16t+16=0$$
$$(3t-4)(t-4)=0$$
$$\therefore t=\frac{4}{3} \text{ 또는 } t=4$$

따라서 점 M이 처음으로 운동 방향을 바꾸는 시각은 $\frac{4}{3}$이다.

답 ④

268 $\frac{dx}{dt}=3\cos t-1$, $\frac{dy}{dt}=-\sqrt{5}\sin t$이므로 점 P의 시각 t에서의 속력은

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$
$$=\sqrt{(3\cos t-1)^2+(-\sqrt{5}\sin t)^2}$$
$$=\sqrt{9\cos^2 t-6\cos t+1+5\sin^2 t}$$
$$=\sqrt{9\cos^2 t-6\cos t+1+5(1-\cos^2 t)}$$
$$=\sqrt{4\cos^2 t-6\cos t+6}$$
$$=\sqrt{4\left(\cos t-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{15}{4}}$$

따라서 점 P의 속력의 최솟값은 $\cos t=\frac{3}{4}$일 때 $\frac{\sqrt{15}}{2}$이다.

답 ⑤

269 시각 t에서의 두 점 P, Q의 위치를 각각 $f(t)$, $g(t)$라 하고, $h(t)=f(t)-g(t)$라 하면

$$h(t)=\int_0^t 4\sin 2t\,dt-\int_0^t \sin t\,dt$$
$$=\Big[-2\cos 2t\Big]_0^t-\Big[-\cos t\Big]_0^t$$
$$=-2\cos 2t+\cos t+1$$
$$=-2(2\cos^2 t-1)+\cos t+1$$
$$=-4\cos^2 t+\cos t+3$$
$$=-4\left(\cos t-\frac{1}{8}\right)^2+\frac{49}{16}$$

$0\le t\le\pi$에서 $-1\le\cos t\le1$이므로

$$-2\le h(t)\le\frac{49}{16}$$

따라서 $|h(t)|$는 $\cos t=\frac{1}{8}$일 때 최대이므로

$$\cos\alpha=\frac{1}{8}$$

답 $\frac{1}{8}$

일품 BOX

$v(t+3)=v(t)$이므로
$$\int_{18}^{20} v(t)dt$$
$$=\int_0^2 v(t)dt=5$$

(점 Q의 x좌표)
$$=\cos t+t\cos\frac{\pi}{6}$$
$$=\cos t+\frac{\sqrt{3}}{2}t$$
(점 Q의 y좌표)
$$=\sin t+t\sin\frac{\pi}{6}$$
$$=\sin t+\frac{1}{2}t$$

$$\cos t-\sqrt{3}\sin t$$
$$=2\left(\frac{1}{2}\cos t-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin t\right)$$
$$=2\cos\left(t+\frac{\pi}{3}\right)$$

반각의 공식
① $\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}$
② $\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2}$
③ $\tan^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$

270 $\int_2^5 v(t)dt=\int_2^3 v(t)dt+\int_3^5 v(t)dt$

$$=\int_2^3 v(t)dt+\int_0^2 v(t)dt$$
$$=\int_2^3 v(t)dt+5=1$$

이므로 $\int_2^3 v(t)dt=-4$

따라서 $\int_0^3 v(t)dt=\int_0^2 v(t)dt+\int_2^3 v(t)dt=1$이므로

$$a=\int_0^{20} v(t)dt$$
$$=\int_0^3 v(t)dt+\int_3^6 v(t)dt$$
$$+\cdots+\int_{15}^{18} v(t)dt+\int_{18}^{20} v(t)dt$$
$$=\underbrace{1+1+\cdots+1}_{6\text{개}}+5=11$$

또 $\int_0^3 |v(t)|dt=\int_0^2 v(t)dt-\int_2^3 v(t)dt=9$이므로

$$b=\int_0^{20} |v(t)|dt$$
$$=\int_0^3 |v(t)|dt+\int_3^6 |v(t)|dt$$
$$+\cdots+\int_{15}^{18} |v(t)|dt+\int_{18}^{20} |v(t)|dt$$
$$=\underbrace{9+9+\cdots+9}_{6\text{개}}+5=59$$
$$\therefore a+b=70$$

답 70

271 점 P가 매초 1라디안의 속력으로 움직이므로 점 P가 점 A(1, 0)을 출발한 지 t초 후에 $\angle POA=t$, $\overset{\frown}{AP}=t$이다.

따라서 $P(\cos t, \sin t)$이므로

$$Q\left(\cos t+\frac{\sqrt{3}}{2}t,\ \sin t+\frac{1}{2}t\right)$$

$x=\cos t+\frac{\sqrt{3}}{2}t$, $y=\sin t+\frac{1}{2}t$라 하면 구하는 거리는

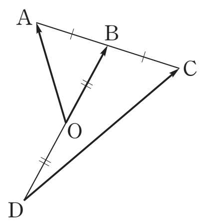
$$\int_0^{\frac{2}{3}\pi}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$
$$=\int_0^{\frac{2}{3}\pi}\sqrt{\left(-\sin t+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\cos t+\frac{1}{2}\right)^2}\,dt$$
$$=\int_0^{\frac{2}{3}\pi}\sqrt{\sin^2 t-\sqrt{3}\sin t+\frac{3}{4}+\cos^2 t+\cos t+\frac{1}{4}}\,dt$$
$$=\int_0^{\frac{2}{3}\pi}\sqrt{2-\sqrt{3}\sin t+\cos t}\,dt$$
$$=\int_0^{\frac{2}{3}\pi}\sqrt{2\left\{1+\cos\left(t+\frac{\pi}{3}\right)\right\}}\,dt$$
$$=\int_0^{\frac{2}{3}\pi}\sqrt{4\cos^2\frac{1}{2}\left(t+\frac{\pi}{3}\right)}\,dt$$
$$=\int_0^{\frac{2}{3}\pi}2\cos\frac{1}{2}\left(t+\frac{\pi}{3}\right)dt$$
$$=\left[4\sin\frac{1}{2}\left(t+\frac{\pi}{3}\right)\right]_0^{\frac{2}{3}\pi}$$
$$=4-2=2$$

답 ③

1등급 완성하기

▶ 본책 53쪽

272 두 점 C, D를 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로



$\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BC}$

$=2\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{AB}$

$=2\overrightarrow{OB}+(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})$

$=-\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}$

$=-\vec{a}+3\vec{b}$

따라서 $m=-1$, $n=3$이므로

$m+10n=-1+30=29$

답 29

273 $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}$이므로

$\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{BC}=2(\vec{b}-\vec{a})=2\vec{b}-2\vec{a}$

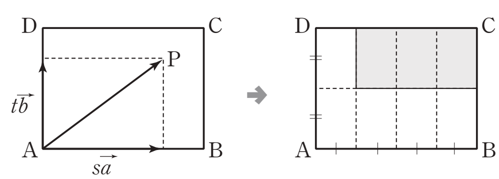
$\therefore \overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE}=(2\vec{b}-2\vec{a})-\vec{a}=-3\vec{a}+2\vec{b}$

따라서 $m=-3$, $n=2$이므로

$m+n=-1$

답 ⑤

274 다음 그림과 같이 점 P는 어두운 부분의 경계 및 내부에 존재하므로 점 P가 존재하는 영역의 넓이는 □ABCD의 넓이의 $\frac{3}{8}$이다.



따라서 구하는 넓이는

$24\cdot\frac{3}{8}=9$

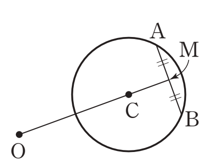
답 9

275 $\overline{AB}$의 중점을 M이라 하면

$|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}|=2|\overrightarrow{OM}|$

이므로 $|\overrightarrow{OM}|$의 값이 최대일 때 $|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}|$의 값도 최대이다.

원 $(x-1)^2+(y+7)^2=9$의 중심을 C$(1,\ -7)$이라 하면 오른쪽 그림과 같이 세 점 O, C, M이 한 직선 위에 있을 때 $|\overrightarrow{OM}|$의 값이 최대이다.



이때

$|\overrightarrow{CM}|=\sqrt{|\overrightarrow{CA}|^2-|\overrightarrow{MA}|^2}$

$=\sqrt{3^2-1^2}=2\sqrt{2}$,

$|\overrightarrow{OC}|=\sqrt{1^2+(-7)^2}$

$=5\sqrt{2}$

이므로 구하는 최댓값은

$|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}|=2|\overrightarrow{OM}|=2(|\overrightarrow{OC}|+|\overrightarrow{CM}|)$

$=2(5\sqrt{2}+2\sqrt{2})=14\sqrt{2}$

답 ⑤

일품 BOX

$m+n=1$

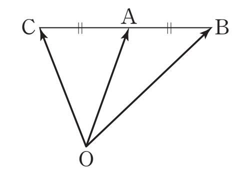
$m+n=1$, $m\ge0$, $n\ge0$일 때 $\overrightarrow{OP}=m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}$를 만족시키는 점 P의 자취는 선분 AB임을 이용한다.

276 해결 과정 $\overrightarrow{OP}=(1-t)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$에서

$\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=t(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})$

$\therefore \overrightarrow{AP}=t\overrightarrow{AB}$ ● 30%

즉 직선 AB의 연장선 위에 $\overline{AB}=\overline{AC}$가 되도록 하는 점 C를 잡으면 $-1\le t\le1$에서 점 P의 자취는 선분 CB이다.



● 40%

답 구하기 따라서 구하는 자취의 길이는

$\overline{CB}=2\overline{AB}=2\sqrt{(-1-3)^2+(1+2)^2}=10$ ● 30%

답 10

277 $\overrightarrow{OP}=m(2\overrightarrow{OA})+n(3\overrightarrow{OB})$

$=\dfrac{m(2\overrightarrow{OA})+n(3\overrightarrow{OB})}{m+n}$

이므로 점 P는 두 벡터 $2\overrightarrow{OA}$, $3\overrightarrow{OB}$의 종점을 연결한 선분 위의 점이다. 이때

$3\overrightarrow{OB}-2\overrightarrow{OA}=(6,\ -6)-(2,\ 0)=(4,\ -6)$

이므로 구하는 도형의 길이는

$|3\overrightarrow{OB}-2\overrightarrow{OA}|=\sqrt{4^2+(-6)^2}=2\sqrt{13}$

답 ④

278 해결 과정 (i) $m+2n=2$일 때,

$\frac{1}{2}m+n=1$이므로

$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}m(2\overrightarrow{OA})+n\overrightarrow{OB}$

에서 A$'(2,\ 0)$이라 하면 $2\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OA'}$

즉 점 P의 자취는 $\overline{A'B}$이다. ● 30%

(ii) $m+2n=4$일 때,

$\frac{1}{4}m+\frac{1}{2}n=1$이므로

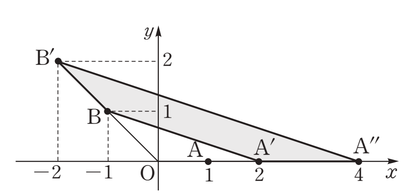
$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{4}m(4\overrightarrow{OA})+\frac{1}{2}n(2\overrightarrow{OB})$

에서 A$''(4,\ 0)$, B$'(-2,\ 2)$라 하면

$4\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OA''}$, $2\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB'}$

즉 점 P의 자취는 $\overline{A''B'}$이다. ● 30%

(i), (ii)에서 주어진 조건을 만족시키는 점 P가 나타내는 도형은 다음 그림의 사다리꼴 A$'$A$''$B$'$B의 경계 및 내부이다. ● 20%



답 구하기 따라서 구하는 넓이는

$\triangle OA''B'-\triangle OA'B=\frac{1}{2}\times4\times2-\frac{1}{2}\times2\times1$

$=3$ ● 20%

답 3

279 $\overrightarrow{AD}=\dfrac{5\overrightarrow{AC}-2\overrightarrow{AB}}{5-2}=-\dfrac{2}{3}\vec{a}+\dfrac{5}{3}\vec{b}$이므로

$\overrightarrow{AP}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}=-\dfrac{1}{3}\vec{a}+\dfrac{5}{6}\vec{b}$

$\therefore \overrightarrow{CP}=\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AC}=-\dfrac{1}{3}\vec{a}+\dfrac{5}{6}\vec{b}-\vec{b}$

$=-\dfrac{1}{3}\vec{a}-\dfrac{1}{6}\vec{b}$

따라서 $m=-\dfrac{1}{3}$, $n=-\dfrac{1}{6}$이므로

$m+n=-\dfrac{1}{2}$ 답 ③

280 $\vec{a}+\vec{b}=(1+p,\ 1-p)$, $\vec{a}-\vec{b}=(1-p,\ 1+p)$에서

$|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{(1+p)^2+(1-p)^2}=\sqrt{2(1+p^2)}$

$|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{(1-p)^2+(1+p)^2}=\sqrt{2(1+p^2)}$

이므로

$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=|\vec{a}+\vec{b}||\vec{a}-\vec{b}|\cos 60°$

$=2(1+p^2)\times\dfrac{1}{2}$

$=1+p^2$ …… ㉠

$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=(1+p,\ 1-p)\cdot(1-p,\ 1+p)$

$=(1+p)(1-p)$

$+(1-p)(1+p)$

$=2(1-p^2)$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $1+p^2=2(1-p^2)$

$3p^2=1$ $\therefore p^2=\dfrac{1}{3}$ 답 ②

281 점 P의 좌표를 $\left(\dfrac{m^2}{2},\ m\right)$이라 하면

$\overrightarrow{AP}=\left(\dfrac{m^2}{2}-4,\ m+1\right)$, $\overrightarrow{AB}=(1,\ 4)$

이므로

$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}=\left(\dfrac{m^2}{2}-4,\ m+1\right)\cdot(1,\ 4)$

$=\left(\dfrac{m^2}{2}-4\right)+4(m+1)$

$=\dfrac{1}{2}(m+4)^2-8$

따라서 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}$는 $m=-4$일 때 최솟값 -8을 갖는다. 답 ②

282 점 P의 좌표를 $(m,\ m-1)$이라 하면

$\overrightarrow{AP}-2\overrightarrow{BP}=(m,\ m-2)-2(m,\ m+1)$

$=(-m,\ -m-4)$

$\therefore |\overrightarrow{AP}-2\overrightarrow{BP}|=\sqrt{(-m)^2+(-m-4)^2}$

$=\sqrt{2(m+2)^2+8}$

따라서 $|\overrightarrow{AP}-2\overrightarrow{BP}|$는 $m=-2$일 때 최솟값 $2\sqrt{2}$를 갖는다. 답 ②

283 문제 이해 $\overrightarrow{AB}\,/\!/\,\overrightarrow{PQ}$이므로

$\overrightarrow{PQ}=k\overrightarrow{AB}\,(k>0)$라 하면

$\overrightarrow{PQ}=k(3,\ -4)=(3k,\ -4k)$ ● 20%

해결 과정 이때 $|\overrightarrow{PQ}|=10$이므로

$\sqrt{(3k)^2+(-4k)^2}=10$

$5k=10$ $\therefore k=2$

$\therefore \overrightarrow{PQ}=(6,\ -8)$ ● 40%

한편 점 Q의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면

$\overrightarrow{PQ}=(x-3,\ y+2)$

이므로 $x-3=6$, $y+2=-8$

$\therefore x=9$, $y=-10$ ● 30%

답 구하기 따라서 점 Q의 좌표는 $(9,\ -10)$이다. ● 10%

답 $(9,\ -10)$

일품 BOX

$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2)$이고 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기가 θ일 때,
$\vec{a}\cdot\vec{b}$
$=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$
$=a_1b_1+a_2b_2$

방향이 같은 두 벡터는 서로 평행하다.

284 $|2\vec{a}-\vec{b}|=6$의 양변을 제곱하면

$4|\vec{a}|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=36$

$36-4\vec{a}\cdot\vec{b}+4=36$

$\therefore \vec{a}\cdot\vec{b}=1$

두 벡터 $\vec{a}+t\vec{b}$, $\vec{a}-\vec{b}$가 서로 수직이려면

$(\vec{a}+t\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=0$

$|\vec{a}|^2+(t-1)\vec{a}\cdot\vec{b}-t|\vec{b}|^2=0$

$9+(t-1)-4t=0$, $-3t+8=0$

$\therefore t=\dfrac{8}{3}$ 답 ⑤

285 $\overrightarrow{BA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$라 하면

$\overrightarrow{BD}=\dfrac{2\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}}{2+1}=\dfrac{1}{3}\vec{a}+\dfrac{2}{3}\vec{b}$

$\overrightarrow{BE}=m\vec{a}$, $\overrightarrow{BF}=n\vec{b}$ $(0<m<1,\ 0<n<1)$라 하면

$\overline{BE}:\overline{BF}=3:2$이므로

$m|\vec{a}|:n|\vec{b}|=3:2$

$3m:4n=3:2$

$6m=12n$ $\therefore m=2n$ …… ㉠

이때 세 점 E, G, F가 한 직선 위에 있으므로

$\overrightarrow{BG}=l\overrightarrow{BE}+(1-l)\overrightarrow{BF}$ $(0<l<1)$

$=lm\vec{a}+(1-l)n\vec{b}$

$=2nl\vec{a}+(1-l)n\vec{b}$ ($\because$ ㉠)

또 $\overrightarrow{BG}=k\overrightarrow{BD}$ $(0<k<1)$이므로

$2nl\vec{a}+(1-l)n\vec{b}=k\left(\dfrac{1}{3}\vec{a}+\dfrac{2}{3}\vec{b}\right)$

$\vec{a}$와 $\vec{b}$는 서로 평행하지 않으므로

$2nl=\dfrac{1}{3}k$ …… ㉡

$(1-l)n=\dfrac{2}{3}k$ …… ㉢

㉡÷㉢을 하면 $\dfrac{2l}{1-l}=\dfrac{1}{2}$

$1-l=4l$, $5l=1$ $\therefore l=\dfrac{1}{5}$

따라서 $\overrightarrow{BG}=\dfrac{\overrightarrow{BE}+4\overrightarrow{BF}}{5}$이므로 점 G는 $\overline{EF}$를 $4:1$로 내분하는 점이다.

$\therefore \dfrac{\overline{EG}}{\overline{GF}}=4$ 답 ⑤

286 $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{|\vec{a}-2x\vec{b}|-|\vec{a}|}{x}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{(|\vec{a}-2x\vec{b}|-|\vec{a}|)(|\vec{a}-2x\vec{b}|+|\vec{a}|)}{x(|\vec{a}-2x\vec{b}|+|\vec{a}|)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{|\vec{a}-2x\vec{b}|^2-|\vec{a}|^2}{x(|\vec{a}-2x\vec{b}|+|\vec{a}|)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{|\vec{a}|^2-4x\vec{a}\cdot\vec{b}+4x^2|\vec{b}|^2-|\vec{a}|^2}{x(|\vec{a}-2x\vec{b}|+|\vec{a}|)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-4\vec{a}\cdot\vec{b}+4x|\vec{b}|^2}{|\vec{a}-2x\vec{b}|+|\vec{a}|}$$

$$=\frac{-4\vec{a}\cdot\vec{b}}{2|\vec{a}|}=\frac{-2|\vec{a}||\vec{b}|\cos120^\circ}{|\vec{a}|}$$

$$=\frac{-2\times4\times4\times\left(-\frac{1}{2}\right)}{4}=4$$

답 4

287 $\overrightarrow{OP}=a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}=\frac{3}{2}a\overrightarrow{OC}+b\overrightarrow{OB}$이고, 점 P는 $\overline{BC}$ 위에 있으므로

$\frac{3}{2}a+b=1$ …… ㉠

또 $\overrightarrow{OP}=a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}=a\overrightarrow{OA}+4b\overrightarrow{OD}$이고, 점 P는 $\overline{AD}$ 위에 있으므로

$a+4b=1$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=\frac{3}{5},\ b=\frac{1}{10}$

$\therefore a+b=\frac{7}{10}$

답 ④

일품 BOX

㉠×4−㉡을 하면

$5a=3\quad\therefore a=\frac{3}{5}$

$a=\frac{3}{5}$을 ㉠에 대입하면

$\frac{9}{10}+b=1$

$\therefore b=\frac{1}{10}$

288 해결 과정 $\angle ABC=\angle ADC=90^\circ$이므로 $\angle BAC=\theta_1,\ \angle DAC=\theta_2$라 하면

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos\theta_1$$
$$=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\frac{|\overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{AC}|}$$
$$=|\overrightarrow{AB}|^2=49$$

● 30%

$$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AD}||\overrightarrow{AC}|\cos\theta_2$$
$$=|\overrightarrow{AD}||\overrightarrow{AC}|\frac{|\overrightarrow{AD}|}{|\overrightarrow{AC}|}$$
$$=|\overrightarrow{AD}|^2=81$$

● 30%

답 구하기 $\therefore \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AC}\cdot(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})$
$$=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}$$
$$=81-49=32$$

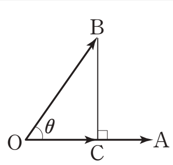
● 40%

답 32

1등급 비밀노트

벡터 $\overrightarrow{OB}$를 벡터 $\overrightarrow{OA}$ 위로 정사영시킨 벡터를 $\overrightarrow{OC}$라 하고 두 벡터 $\overrightarrow{OA}$와 $\overrightarrow{OB}$가 이루는 각의 크기를 θ라 하면

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\cos\theta$$
$$=|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\frac{|\overrightarrow{OC}|}{|\overrightarrow{OB}|}$$
$$=|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OC}|$$



289 문제 이해 $\overrightarrow{AB}=\vec{a},\ \overrightarrow{AC}=\vec{b}$라 하면

$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\vec{a},\ \overrightarrow{AE}=\frac{2}{3}\vec{b}$

$$\therefore \overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE})$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}\right)$$
$$=\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$$

● 30%

해결 과정 $\overrightarrow{AG}=k\overrightarrow{AF}$ (k는 실수)라 하면

$\overrightarrow{AG}=\frac{k}{4}\vec{a}+\frac{k}{3}\vec{b}$

● 20%

이때 점 G는 $\overline{BC}$ 위에 있으므로

$\frac{k}{4}+\frac{k}{3}=1,\quad \frac{7}{12}k=1$

$\therefore k=\frac{12}{7}$

● 30%

답 구하기 $\therefore |\overrightarrow{AF}|=\frac{1}{k}|\overrightarrow{AG}|$
$$=\frac{7}{12}\times24=14$$

● 20%

답 14

290 $\frac{x-1}{2}=y+2=t$ (t는 실수)라 하면

$x=2t+1,\ y=t-2$

이므로 $H(2t+1,\ t-2)$로 놓으면

$\overrightarrow{AH}=(2t-1,\ t-3)$ …… ㉠

주어진 직선의 방향벡터를 $\vec{u}$라 하면 $\vec{u}=(2,\ 1)$이고 $\overrightarrow{AH}\perp\vec{u}$이므로 $\overrightarrow{AH}\cdot\vec{u}=0$에서

$(2t-1,\ t-3)\cdot(2,\ 1)=0$

$2(2t-1)+(t-3)=0$

$5t-5=0\qquad\therefore t=1$

따라서 $H(3,\ -1)$이고 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{HP}=0$에서 $\angle APH=90^\circ$이므로 점 P의 자취는 두 점 A, H를 지름의 양 끝 점으로 하는 원이다.

이때

$\overline{AH}=\sqrt{(3-2)^2+(-1-1)^2}=\sqrt{5}$

이므로 구하는 도형의 둘레의 길이는

$\sqrt{5}\pi$

답 $\sqrt{5}\pi$

291 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OP}=|\overrightarrow{OP}|^2=x^2+y^2$이므로 조건 (가)에 의하여

$x^2+y^2\le2$ …… ㉠

$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{AB}=(1-x,\ -y)\cdot(0,\ 1)=-y$이므로 조건 (나)에 의하여

$-y\ge0$, 즉 $y\le0$ …… ㉡

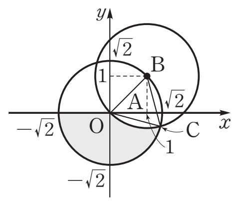
$\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BP}$이므로 조건 (다)에 의하여

$|\overrightarrow{BP}|\ge\sqrt{2}$, 즉 $|\overrightarrow{BP}|^2\ge2$

$\therefore (x-1)^2+(y-1)^2\ge2$ …… ㉢

점 B를 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$인 원의 경계 및 외부이다.

㉠, ㉡, ㉢을 모두 만족시키는 영역은 오른쪽 그림의 어두운 부분(경계선 포함)과 같다.



이때 두 원의 교점 중 제4사분면에 있는 점을 C라 하면 △BOC는 정삼각형이므로

$\angle \mathrm{BOC}=\dfrac{\pi}{3}$ $\quad\therefore \angle \mathrm{AOC}=\dfrac{\pi}{12}$

따라서 구하는 영역의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times(\sqrt{2})^2\times\dfrac{11}{12}\pi-\left\{\dfrac{1}{2}\times(\sqrt{2})^2\times\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times(\sqrt{2})^2\right\}$

$=\dfrac{11}{12}\pi-\left(\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=\dfrac{7}{12}\pi+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

답 ④

• $\angle \mathrm{BOA}=\dfrac{\pi}{4}$이므로
$\angle \mathrm{AOC}=\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{4}$
$=\dfrac{\pi}{12}$

• (부채꼴 BOC의 넓이) − △BOC

292 문제 이해 점 P의 시각 t에서의 속도를 $v(t)$라 하면

$v(t)=f'(t)=3t^2+2mt+n$ ● 10%

해결 과정 $t=2$에서 점 P의 위치가 8이므로

$f(2)=8+4m+2n=8$

$\therefore 2m+n=0$ ...... ㉠

또 $t=2$에서 점 P의 운동 방향이 바뀌므로

$v(2)=12+4m+n=0$

$\therefore 4m+n=-12$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$m=-6,\ n=12$ ● 50%

점 P의 시각 t에서의 가속도를 $a(t)$라 하면

$a(t)=v'(t)=6t+2m=6t-12$ ● 20%

답 구하기 따라서 $t=4$에서의 점 P의 가속도는

$a(4)=24-12=12$ ● 20%

답 12

• 운동 방향이 바뀔 때의 속도는 0이다.

293 $f(t)=g(t)$에서

$t^2-2t-6=t^3-3t^2-t$

$t^3-4t^2+t+6=0$

$(t+1)(t-2)(t-3)=0$

$\therefore t=2$ 또는 $t=3$ ($\because t>0$)

따라서 두 점 P, Q가 처음 만나는 시각은 $t=2$이고, 두 번째 만나는 시각은 $t=3$이다.

시각 t에서의 점 P의 속도를 $v(t)$, 점 Q의 가속도를 $a(t)$라 하면

$v(t)=f'(t)=2t-2,$

$a(t)=g''(t)=6t-6$

이므로 두 점 P, Q가 처음으로 만날 때 점 P의 속력은

$|v(2)|=|4-2|=2$

이고 두 번째로 만날 때 점 Q의 가속도의 크기는

$|a(3)|=|18-6|=12$

답 ②

•
$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & -4 & 1 & 6 \\ & & -1 & 5 & -6 \\ \hline & 1 & -5 & 6 & 0 \end{array}$$
t^3-4t^2+t+6
$=(t+1)(t^2-5t+6)$
$=(t+1)(t-2)(t-3)$

• $g'(t)=3t^2-6t-1$

294 점 P의 시각 t에서의 속도를 $v(t)$라 하면

$v(t)=f'(t)=e^{-t}-(t-1)e^{-t}=(2-t)e^{-t}$

이므로

$v'(t)=-e^{-t}-(2-t)e^{-t}=(t-3)e^{-t}$

$v'(t)=0$에서 $\quad t=3$

t	0	$\cdots$	3	$\cdots$
$v'(t)$		$-$	0	$+$
$v(t)$	2	↘	극소	↗

따라서 $v(t)$는 $t=3$에서 극소이면서 최소이므로 구하는 점 P의 위치는

$f(3)=2e^{-3}=\dfrac{2}{e^3}$

답 ③

295 $\dfrac{dx}{dt}=\cos t$

$\dfrac{dy}{dt}=-2\cos t\sin t+2\sin 2t$

$=-2\sin t\cos t+4\sin t\cos t$

$=2\sin t\cos t$

따라서 점 P의 시각 t에서의 속력은

$\sqrt{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2}=\sqrt{\cos^2 t+4\sin^2 t\cos^2 t}$

$=\sqrt{\cos^2 t+4(1-\cos^2 t)\cos^2 t}$

$=\sqrt{-4\cos^4 t+5\cos^2 t}$

$=\sqrt{-4\left(\cos^2 t-\dfrac{5}{8}\right)^2+\dfrac{25}{16}}$

이므로 점 P의 속력의 최댓값은 $\cos^2 t=\dfrac{5}{8}$일 때 $\dfrac{5}{4}$이다.

답 $\dfrac{5}{4}$

296 ㄱ. 속력 $|v(t)|$는 $t=6$에서 최댓값 4를 갖는다.

ㄴ. 점 P가 출발한 후 4초 동안 이동한 거리는

$\displaystyle\int_0^4 v(t)\,dt=4$

점 P가 출발한 후 8초 동안 이동한 거리는

$\displaystyle\int_0^8 |v(t)|dt=\int_0^4 v(t)\,dt+\int_4^8\{-v(t)\}dt$

$=4+8=12$

따라서 점 P가 출발한 후 8초 동안 이동한 거리는 출발한 후 4초 동안 이동한 거리의 3배이다.

ㄷ. 점 P의 시각 $t=1.5$에서의 위치는

$\displaystyle\int_0^{1.5} v(t)\,dt=2$

점 P의 시각 $t=5.5$에서의 위치는

$\displaystyle\int_0^{5.5} v(t)\,dt=4-2.25=1.75$

따라서 점 P의 시각 $t=1.5$에서의 위치는 시각 $t=5.5$에서의 위치보다 원점에서 멀리 있다.

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

일품 BOX

• $\dfrac{1}{2}\times(1+3)\times2=4$

• $\dfrac{1}{2}\times4\times4=8$

• $4\le t\le6$에서
$v(t)=-2t+8$
따라서 $v(5.5)=-3$이므로
$\dfrac{1}{2}\times1.5\times3=2.25$

297 A, B의 출발 위치를 각각 0, 30이라 하고, 시각 t초에서의 A, B의 위치를 각각 $f(t)$, $g(t)$라 하면

$$f(t)=\int_0^t te^t dt=\Big[te^t\Big]_0^t-\int_0^t e^t dt$$
$$=te^t-\Big[e^t\Big]_0^t=te^t-e^t+1$$
$$g(t)=30+\int_0^t 29e^t dt=30+\Big[29e^t\Big]_0^t$$
$$=30+(29e^t-29)=29e^t+1$$

$f(t)=g(t)$에서 $\quad te^t-e^t+1=29e^t+1$

$(t-30)e^t=0 \qquad \therefore t=30$

$\therefore a=30$

답 30

298 $\dfrac{dx}{dt}=-2\sin t$, $\dfrac{dy}{dt}=-2\cos t$이므로 $t=0$에서 $t=\pi$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^\pi \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$
$$=\int_0^\pi \sqrt{(-2\sin t)^2+(-2\cos t)^2}\,dt$$
$$=\int_0^\pi 2\,dt=\Big[2t\Big]_0^\pi=2\pi$$

답 2π

299 전략 내분점과 외분점의 위치벡터를 이용할 수 있도록 주어진 식을 변형한다.

Step 1 $3\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+4\overrightarrow{PC}=k\overrightarrow{AB}$에서

$3\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+4\overrightarrow{PC}=k(\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{PA})$

$4\overrightarrow{PC}=-(3+k)\overrightarrow{PA}+(k-1)\overrightarrow{PB}$

$\therefore \overrightarrow{PC}=-\dfrac{(1-k)\overrightarrow{PB}+(3+k)\overrightarrow{PA}}{4}$

Step 2 (i) $k<-3$일 때,

$\overline{AB}$를 $(1-k):(-3-k)$로 외분하는 점을 D라 하면

$\overrightarrow{PC}=-\overrightarrow{PD}$

(ii) $k=-3$일 때, $\quad \overrightarrow{PC}=-\overrightarrow{PB}$

(iii) $-3<k<1$일 때,

$\overline{AB}$를 $(1-k):(3+k)$로 내분하는 점을 D′이라 하면

$\overrightarrow{PC}=-\overrightarrow{PD'}$

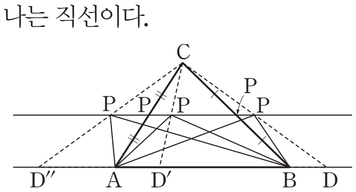
(iv) $k=1$일 때, $\quad \overrightarrow{PC}=-\overrightarrow{PA}$

(v) $k>1$일 때,

$\overline{AB}$를 $(k-1):(3+k)$로 외분하는 점을 D″이라 하면

$\overrightarrow{PC}=-\overrightarrow{PD''}$

Step 3 이상에서 점 P의 자취는 $\overline{CA}$의 중점과 $\overline{CB}$의 중점을 지나는 직선이다.



일품 BOX

$\overrightarrow{PC}=\dfrac{m\overrightarrow{PB}+n\overrightarrow{PA}}{m+n}$는

(i) $m>0$, $n>0$일 때, $\overline{AB}$를 $m:n$으로 내분하는 점 C의 위치벡터를 나타낸다.

(ii) $m>0$, $n<0$일 때, $\overline{AB}$를 $m:(-n)$으로 외분하는 점 C의 위치벡터를 나타낸다.

8초에 1바퀴씩 회전하므로 1초에 $\dfrac{2\pi}{8}=\dfrac{\pi}{4}$만큼씩 회전한다.

이때 △PAB의 넓이는 k의 값에 관계없이 항상 일정하므로

$$\frac{S(k)}{S(2k)}=1$$

답 1

참고 $\overrightarrow{PC}=-\overrightarrow{PA}$, $\overrightarrow{PC}=-\overrightarrow{PB}$, $\overrightarrow{PC}=-\overrightarrow{PD}$, $\overrightarrow{PC}=-\overrightarrow{PD'}$, $\overrightarrow{PC}=-\overrightarrow{PD''}$이므로 $\overrightarrow{PC}$는 $\overrightarrow{PA}$, $\overrightarrow{PB}$, $\overrightarrow{PD}$, $\overrightarrow{PD'}$, $\overrightarrow{PD''}$과 크기가 같고 방향이 반대인 벡터이다.
이때 세 점 D, D′, D″은 모두 직선 AB 위의 점이므로 점 P는 $\overline{CA}$의 중점과 $\overline{CB}$의 중점을 지나는 직선 위의 점이다.

300 전략 점 P의 위치벡터를 이용하여 t의 값에 따른 점 P의 위치를 구한다.

Step 1 $\vec{p}=(1-t)\vec{a}+t\vec{b}=\vec{a}+t(\vec{b}-\vec{a})$

$=\vec{a}+t\overrightarrow{AB}$

Step 2 ㄱ. 점 P가 구간 ㉣에 있도록 하는 t의 값의 범위는 $t>2$이다.

Step 3 ㄴ. $t<-1$이면 점 P는 구간 ㉠에 있다.

Step 4 ㄷ. 점 Q의 위치벡터를 $\vec{q}$라 하고, $\overline{PQ}$의 중점 M의 위치벡터를 $\vec{m}$이라 하면

$\vec{p}=\vec{a}+t_1\overrightarrow{AB}$, $\vec{q}=\vec{a}+t_2\overrightarrow{AB}$

이므로

$$\vec{m}=\frac{\vec{p}+\vec{q}}{2}=\frac{2\vec{a}+(t_1+t_2)\overrightarrow{AB}}{2}$$
$$=\vec{a}+\frac{t_1+t_2}{2}\overrightarrow{AB}$$

이때 $0<t_1+t_2<2$에서 $0<\dfrac{t_1+t_2}{2}<1$이므로 점 M은 구간 ㉢에 있다.

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

301 전략 t초 후의 점 P의 위치를 순서쌍으로 나타낸다.

Step 1 점 P가 시계바늘이 도는 반대 방향으로 매초 $\dfrac{\pi}{4}$만큼씩 회전하므로 t초 후의 점 P의 위치 (x, y)는

$$x=2\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}t\right)=-2\sin\frac{\pi}{4}t$$
$$y=2\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}t\right)=2\cos\frac{\pi}{4}t$$

Step 2 이때 $\dfrac{dx}{dt}=-\dfrac{\pi}{2}\cos\dfrac{\pi}{4}t$, $\dfrac{dy}{dt}=-\dfrac{\pi}{2}\sin\dfrac{\pi}{4}t$

이므로

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{\pi^2}{8}\sin\frac{\pi}{4}t,\quad \frac{d^2y}{dt^2}=-\frac{\pi^2}{8}\cos\frac{\pi}{4}t$$

Step 3 따라서 점 P의 가속도의 크기는

$$\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2}$$
$$=\sqrt{\left(\frac{\pi^2}{8}\sin\frac{\pi}{4}t\right)^2+\left(-\frac{\pi^2}{8}\cos\frac{\pi}{4}t\right)^2}$$
$$=\sqrt{\left(\frac{\pi^2}{8}\right)^2}=\frac{\pi^2}{8}$$

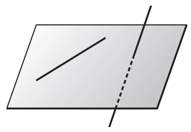
$\therefore n=8$

답 8

Ⅲ 공간도형과 공간벡터

06 공간도형 본책 60쪽

302 ⑤ 오른쪽 그림과 같이 꼬인 위치에 있는 두 직선은 한 평면을 결정하지 않는다.



답 ⑤

303 ① 세 점 A, B, G는 한 직선 위에 있지 않은 세 점이므로 한 평면을 결정한다.
② 직선 AE와 이 직선 위에 있지 않은 한 점 C는 한 평면을 결정한다.
③ 직선 AC와 직선 EG는 서로 평행하므로 한 평면을 결정한다.
④ 직선 AE와 직선 EG는 점 E에서 만나므로 한 평면을 결정한다.
⑤ 직선 AB와 직선 EG는 꼬인 위치에 있으므로 두 직선 AB와 EG를 포함하는 평면은 존재하지 않는다.

답 ⑤

304 한 직선 위에 있지 않은 서로 다른 세 점은 한 평면을 결정하므로 6개의 점 중에서 3개를 택하면 한 평면이 결정된다.

$$\therefore {}_6C_3=\frac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2\cdot1}=20$$

답 20

305 직선 AB와 만나는 직선은 직선 AF, 직선 AG, 직선 BC, 직선 BH, 직선 CD, 직선 EF의 6개이다.

답 6

306 모서리 AB와 꼬인 위치에 있는 모서리는 모서리 CG, 모서리 DH, 모서리 EH, 모서리 FG의 4개이다. 마찬가지로 직육면체의 각 모서리마다 꼬인 위치에 있는 모서리는 4개씩 존재하므로

$12\times4=48$(쌍)

직육면체의 모서리의 개수

이때 각 경우는 한 번씩 중복되므로

$\frac{1}{2}\times48=24$(쌍)

답 ③

307 △ABC에서 두 점 M, N은 각각 $\overline{AB}$, $\overline{AC}$의 중점이므로 직선 MN과 직선 BC는 서로 평행하다.
또 □BCDE에서 두 직선 BC, ED는 서로 평행하므로 직선 MN과 직선 ED도 서로 평행하다.

$\therefore a=2$

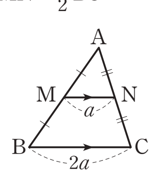
직선 MN과 네 직선 AD, AE, BE, CD는 서로 만나지도 않고 평행하지도 않으므로 꼬인 위치에 있다.

$\therefore b=4$

$\therefore ab=8$

답 ③

△ABC의 두 변 AB, AC의 중점을 각각 M, N이라 하면
$\overline{MN}/\!/\overline{BC}$,
$\overline{MN}=\frac{1}{2}\overline{BC}$



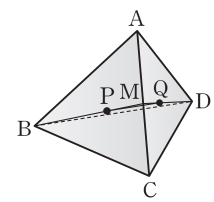
308 모서리 AB를 포함하는 면은
면 ABCD, 면 AEFB의 2개 $\therefore a=2$
모서리 AB와 한 점에서 만나는 면은
면 AEHD, 면 BFGC의 2개 $\therefore b=2$
$\therefore a+b=4$

답 4

309 답 모서리 CH, 모서리 DI, 모서리 EJ

310 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AC}$의 중점을 M이라 하면 두 점 P, Q가 각각 △ABC, △ACD의 무게중심이므로 두 직선 PQ, BD는 평면 MBD 위에 있다.

두 점 P, Q는 각각 $\overline{BM}$, $\overline{DM}$ 위에 있다.



이때 $\overline{BP}:\overline{PM}=\overline{DQ}:\overline{QM}$이므로 두 직선 PQ, BD는 평행하다.

2 : 1

따라서 직선 PQ와 평행한 면은
면 ABD, 면 BCD

직선 BD를 포함하고 직선 PQ를 포함하지 않는 면은 직선 PQ와 평행하다.

답 면 ABD, 면 BCD

311 ㄱ. 모서리 AB와 평행한 모서리는
모서리 DC, 모서리 EF, 모서리 HG
의 3개이다.
ㄴ. 모서리 AD와 평행한 면은
면 BFGC, 면 EFGH
의 2개이다.
ㄷ. 면 AEHD와 평행한 면은 면 BFGC의 1개이다.
이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

312 두 평면 ACD, BCD의 교선은 직선 CD이다.
직선 CD와 한 점에서 만나는 면은
면 ABC, 면 ABD의 2개 $\therefore a=2$
또 직선 CD와 꼬인 위치에 있는 모서리는
모서리 AB의 1개 $\therefore b=1$
$\therefore a+b=3$

답 ②

313 두 평면 AEGC, AFGD의 교선은 직선 AG이므로 이 직선과 꼬인 위치에 있는 모서리는
모서리 BC, 모서리 BF, 모서리 CD, 모서리 DH, 모서리 EF, 모서리 EH
의 6개이다.

답 6

314 두 평면 α, β는 평행하므로 만나지 않는다. 이때 직선 l은 평면 α 위에 있고 직선 m은 평면 β 위에 있으므로 두 직선 l, m도 만나지 않는다.
그런데 두 직선 l, m은 모두 한 평면 γ 위에 있으므로 $l/\!/m$이다.

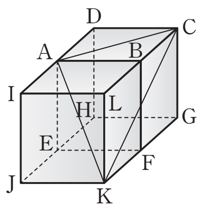
답 풀이 참조

315 (i) $\overline{AC}\perp\overline{AE}$이므로 직선 AE와 평행한 직선 BF, 직선 CG, 직선 DH는 모두 직선 AC와 수직이다.

일품 BOX

(ii) $\overline{AC} \perp \overline{BD}$이므로 직선 BD와 평행한 직선 FH도 직선 AC와 수직이다.

(iii) 오른쪽 그림과 같이 합동인 정육면체를 이어 붙여 직육면체를 만들면 $\overline{DF} /\!/ \overline{AK}$이므로 두 직선 AC, DF가 이루는 각의 크기는 두 직선 AC, AK가 이루는 각의 크기와 같다.



이때 정육면체 한 모서리의 길이를 a라 하면

$\overline{AC}=\sqrt{2}a$, $\overline{AK}=\sqrt{3}a$, $\overline{CK}=\sqrt{5}a$

이므로 △AKC에서

$\overline{CK}^2=\overline{AC}^2+\overline{AK}^2$

즉 △AKC는 ∠CAK$=90°$인 직각삼각형이다.

$\therefore \overline{AC} \perp \overline{DF}$

같은 방법으로 하면 $\quad \overline{AC} \perp \overline{BH}$

이상에서 구하는 직선의 개수는

$4+2+2=8$ 답 ③

316 직선 l과 평면 α의 교점을 O라 하면 두 직선 m, n을 점 O를 지나는 두 직선 m', n'으로 각각 평행이동할 수 있다.

이때 두 직선 m', n'은 평면 α 위의 평행하지 않은 두 직선이고 $m'\boxed{\perp}l$, $n'\boxed{\perp}l$이다.

한편 m, n은 임의의 직선이므로 직선 l은 평면 α 위의 모든 직선과 수직이다.

$\therefore l \perp \alpha$

∴ (가) ⊥ (나) ⊥ 답 (가) ⊥ (나) ⊥

317 △ABC와 △BCD는 모두 정삼각형이고, $\overline{BM}=\overline{MC}$이므로 $\overline{AM}$, $\overline{DM}$은 각각 △ABC, △BCD의 중선이다.

$\therefore \overline{BC} \perp \overline{AM}$, $\overline{BC} \perp \overline{DM}$

따라서 $\overline{BC}$와 평면 AMD는 수직이므로 $\overline{BC}$와 평면 AMD가 이루는 각의 크기는 $90°$이다. 답 ④

318 $\overline{PQ} \perp \alpha$, $\overline{QR} \perp \overline{AB}$이므로 삼수선의 정리에 의하여 $\quad \overline{PR} \perp \overline{AB}$

직각삼각형 PRQ에서

$\overline{PR}=\sqrt{4^2+3^2}=5$

따라서 직각삼각형 ARP에서

$\overline{AP}=\sqrt{(2\sqrt{6})^2+5^2}=7$ 답 7

319 $\overline{DH} \perp$(평면 EFGH), $\overline{DP} \perp \overline{EG}$이므로 삼수선의 정리에 의하여 $\quad \overline{HP} \perp \overline{EG}$

직각삼각형 EGH에서 $\overline{EG}=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$이므로

$\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{5}\cdot\overline{HP}$

△EGH

$=\frac{1}{2}\cdot\overline{EH}\cdot\overline{HG}$

$=\frac{1}{2}\cdot\overline{EG}\cdot\overline{HP}$

$\therefore \overline{HP}=\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$

따라서 직각삼각형 DHP에서

$\overline{DP}=\sqrt{3^2+\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2}=\frac{7\sqrt{5}}{5}$ 답 ①

320 $\overline{OC}=\overline{OA}=1$이므로 $\quad \overline{OB}=\sqrt{3}$

직각삼각형 OAB에서

$\overline{AB}=\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=2$

점 O에서 $\overline{AB}$에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\sqrt{3}=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\overline{OH} \quad \therefore \overline{OH}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

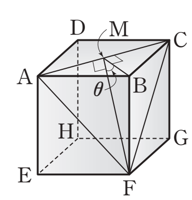
이때 $\overline{CO} \perp$(평면 OAB), $\overline{OH} \perp \overline{AB}$이므로 삼수선의 정리에 의하여 $\quad \overline{CH} \perp \overline{AB}$

따라서 직각삼각형 OCH에서

$\overline{CH}=\sqrt{1^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{7}}{2}$

$\therefore \triangle ABC=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\frac{\sqrt{7}}{2}=\frac{\sqrt{7}}{2}$ 답 $\frac{\sqrt{7}}{2}$

321 오른쪽 그림과 같이 점 B에서 $\overline{AC}$에 내린 수선의 발을 M이라 하면



$\overline{AC} \perp \overline{BM}$, $\overline{AC} \perp \overline{FM}$

이므로 두 평면 ABCD와 AFC가 이루는 각의 크기는 $\overline{BM}$과 $\overline{FM}$이 이루는 각의 크기와 같다.

$\therefore \theta=\angle BMF$

직각삼각형 BMF에서

$\overline{BM}=\sqrt{2}$, $\overline{FM}=\sqrt{2^2+(\sqrt{2})^2}=\sqrt{6}$

□ABCD는 정사각형이므로

$\overline{BM}=\frac{1}{2}\overline{BD}=\sqrt{2}$

△MFB에서

$\overline{FM}=\sqrt{\overline{BF}^2+\overline{BM}^2}$

이므로

$\cos\theta=\frac{\overline{BM}}{\overline{FM}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 답 ②

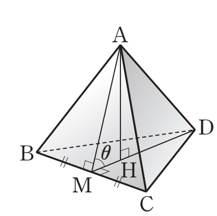
다른 풀이 △AFC의 밑면 ABCD 위로의 정사영은 △ABC이므로

△ABC$=$△AFC$\cos\theta$

$\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot(2\sqrt{2})^2\cos\theta$

$2=2\sqrt{3}\cos\theta \qquad \therefore \cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}$

322 오른쪽 그림과 같이 $\overline{BC}$의 중점을 M이라 하면



$\overline{AM} \perp \overline{BC}$, $\overline{DM} \perp \overline{BC}$

이므로 두 평면 ABC, BCD가 이루는 각의 크기는 $\overline{AM}$과 $\overline{DM}$이 이루는 각의 크기와 같다.

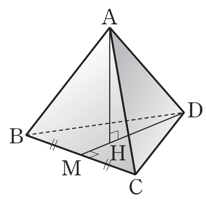
$\therefore \theta=\angle AMD$

점 A에서 평면 BCD에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 H는 △BCD의 무게중심이므로

$$\cos\theta=\frac{\overline{\mathrm{MH}}}{\overline{\mathrm{AM}}}=\frac{\frac{1}{3}\overline{\mathrm{DM}}}{\overline{\mathrm{AM}}}=\frac{1}{3}\ (\because \overline{\mathrm{DM}}=\overline{\mathrm{AM}})$$

답 ④

323 오른쪽 그림과 같이 점 A에서 평면 BCD에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{\mathrm{AD}}$의 평면 BCD 위로의 정사영은 $\overline{\mathrm{HD}}$이다.

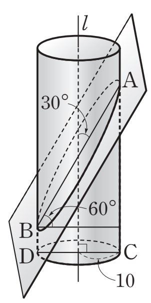


이때 점 H는 △BCD의 무게중심이므로 $\overline{\mathrm{BC}}$의 중점을 M이라 하면

$$\overline{\mathrm{HD}}=\frac{2}{3}\overline{\mathrm{DM}}=\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 6=2\sqrt{3}$$

답 $2\sqrt{3}$

324 오른쪽 그림에서 타원의 장축 AB의 밑면 위로의 정사영은 $\overline{\mathrm{CD}}$이므로 타원의 장축의 길이를 $2a$라 하면



$2a\cos 60°=20 \qquad \therefore a=20$

타원의 단축의 길이를 $2b$라 하면 단축의 길이가 원기둥의 밑면의 지름의 길이와 같으므로

$2b=20 \qquad \therefore b=10$

따라서 구하는 두 초점 사이의 거리는

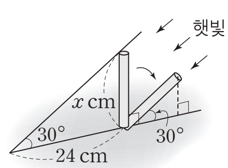
$2\sqrt{a^2-b^2}=2\sqrt{20^2-10^2}=20\sqrt{3}$

답 $20\sqrt{3}$

325 막대기의 길이를 x cm라 하면

$x=24\tan 30°=8\sqrt{3}$

이때 그림자가 생기지 않으려면 오른쪽 그림과 같이 막대기를 지면과 30°의 각을 이루도록 기울여야 한다.



따라서 구하는 정사영의 길이는

$$8\sqrt{3}\cos 30°=8\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=12\,(\mathrm{cm})$$

답 12 cm

326 △ABC의 세 변의 길이가 각각 3, 4, 5이므로 △ABC는 빗변의 길이가 5인 직각삼각형이다.

$$\therefore \triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 4=6$$

이때 두 평면 α, β가 이루는 예각의 크기를 θ라 하면 $\triangle\mathrm{A'B'C'}=\triangle\mathrm{ABC}\cos\theta$에서

$3=6\cos\theta, \qquad \cos\theta=\frac{1}{2}$

$$\therefore \theta=\frac{\pi}{3}\left(\because 0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$$

답 $\frac{\pi}{3}$

327 잘린 단면의 밑면 위로의 정사영은 한 변의 길이가 a인 정사각형이므로 잘린 단면의 넓이를 S라 하면

일품 BOX

삼각형의 무게중심은 세 중선의 길이를 각 꼭짓점으로부터 각각 2 : 1로 나눈다.

$\triangle\mathrm{MBE}=\frac{1}{4}\square\mathrm{BCDE}$

밑면의 지름

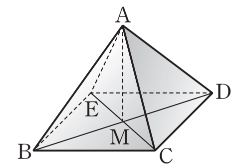
타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$에 대하여
① 장축의 길이: $2a$
② 단축의 길이: $2b$
③ 초점의 좌표: $(\pm\sqrt{a^2-b^2},\ 0)$

$S\cos 60°=a^2, \qquad \frac{1}{2}S=a^2$

$\therefore S=2a^2$

답 ③

328 □BCDE의 두 대각선 BD, CE의 교점을 M이라 하면 △ABE의 평면 BCDE 위로의 정사영은 △MBE이다. 이때 평면 ABE와 평면 BCDE가 이루는 각의 크기를 θ라 하면 △MBE=△ABE $\cos\theta$이므로



$$\cos\theta=\frac{\triangle\mathrm{MBE}}{\triangle\mathrm{ABE}}=\frac{\frac{1}{4}\cdot 2^2}{\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 2^2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

따라서 도형 F'의 넓이를 S라 하면

$$S=\triangle\mathrm{MBE}\cos\theta=1\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

답 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

329 결정되는 평면의 개수가 최대이려면 네 점 A, B, C, D가 모두 두 직선 l, m 위에 있지 않고, 한 직선과 한 점으로 만들어지는 평면 위에 나머지 세 점이 있지 않아야 한다.

(i) 두 직선 l, m으로 만들 수 있는 평면의 개수는 1이다.

(ii) 두 직선 l, m 중 한 직선과 네 점 A, B, C, D 중 한 점으로 만들 수 있는 평면의 개수는

$2\cdot 4=8$

(iii) 다섯 개의 점 O, A, B, C, D 중 세 점으로 만들 수 있는 평면의 개수는

${}_5\mathrm{C}_3=10$

이상에서 구하는 평면의 최대 개수는

$1+8+10=19$

답 ②

330 (i) 세 꼭짓점 B, C, D로 만들 수 있는 평면은 평면 BCD

(ii) $\overline{\mathrm{AE}}$와 $\overline{\mathrm{AC}}$로 만들 수 있는 평면은 평면 AEC

(iii) $\overline{\mathrm{AE}}$와 꼭짓점 B로 만들 수 있는 평면은 평면 ABE

$\overline{\mathrm{AE}}$와 꼭짓점 D로 만들 수 있는 평면은 평면 AED

$\overline{\mathrm{AC}}$와 꼭짓점 B로 만들 수 있는 평면은 평면 ABC

$\overline{\mathrm{AC}}$와 꼭짓점 D로 만들 수 있는 평면은 평면 ACD

이상에서 구하는 평면의 개수는

$1+1+4=6$

답 6

참고 $\overline{\mathrm{AE}}$와 $\overline{\mathrm{AC}}$, $\overline{\mathrm{AE}}$와 꼭짓점 C로 만들 수 있는 평면은 평면 AEC로 서로 같은 평면이다. 또 꼭짓점 C는 $\overline{\mathrm{AC}}$ 위에 있으므로 $\overline{\mathrm{AC}}$와 꼭짓점 C로는 평면을 만들 수 없다.

331 ㄱ. 네 점 P, Q, S, U에 대하여 세 점 P, Q, S를 지나는 평면이 점 U를 포함하지 않으므로 직선 PQ와 직선 SU는 꼬인 위치에 있다.

ㄴ. $\overline{PQ} /\!/ \overline{BC}$, $\overline{TU} /\!/ \overline{BC}$이므로 $\overline{PQ} /\!/ \overline{TU}$

또 $\overline{PQ}=\overline{TU}=\frac{1}{2}\overline{BC}$이므로 □PQTU는 평행사변형이다.

따라서 직선 PT와 직선 QU는 한 점에서 만난다.

ㄷ. 네 점 T, U, R, S에 대하여 세 점 R, T, U를 지나는 평면이 점 S를 포함하지 않으므로 직선 TU와 직선 RS는 꼬인 위치에 있다.

이상에서 서로 만나는 직선끼리 짝지은 것은 ㄴ뿐이다.

답 ①

332 ㄱ. 모서리 BC와 평행한 평면은

평면 AED, 평면 EFD

의 2개이다.

ㄴ. 평면 ABC와 평행한 모서리는

모서리 DE, 모서리 EF, 모서리 FD

의 3개이다.

ㄷ. 모서리 AB와 꼬인 위치에 있는 모서리는

모서리 CD, 모서리 CF, 모서리 DE, 모서리 EF

의 4개이다.

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

333 평면 AHG는 꼭짓점 B를 지나므로 평면 AHGB와 평행한 모서리는

모서리 DC, 모서리 EF

의 2개이다.

답 ③

334 평면 CIJD와 평면 GHIJKL의 교선은 직선 IJ이므로 직선 IJ와 꼬인 위치에 있는 직선은

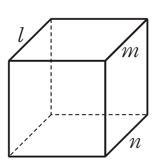
직선 AB, 직선 BC, 직선 DE, 직선 EF,

직선 AG, 직선 BH, 직선 EK, 직선 FL

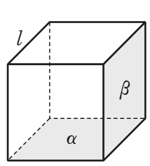
의 8개이다.

답 8

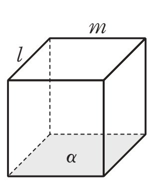
335 ㄱ. 오른쪽 그림과 같이 $l /\!/ m$, $l /\!/ n$이면 $m /\!/ n$이다.



ㄴ. 오른쪽 그림과 같이 $l /\!/ \alpha$, $l /\!/ \beta$이지만 두 평면 α, β가 만날 수도 있다.



ㄷ. 오른쪽 그림과 같이 $l /\!/ \alpha$, $m /\!/ \alpha$이지만 두 직선 l, m이 한 점에서 만날 수도 있다.



이상에서 옳은 것은 ㄱ뿐이다.

답 ①

일품 BOX

$\overline{AP}=\frac{1}{2}\overline{AC}=\sqrt{2}a$

평면 ABC와 평면 DEF는 서로 평행하므로 평면 DEF 위의 모든 직선은 평면 ABC와 평행하다.

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$
$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$
$\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

평면 AHG와 평면 AHGB는 같은 평면이다.

△ABC, △AEB는 모두 ∠B=90°인 직각이등변삼각형이므로
$\overline{AB}=\overline{BC}$, $\overline{AB}=\overline{BE}$

1등급 비밀노트

직선과 평면의 위치 관계에 대한 문제는 정육면체의 면과 모서리의 관계를 이용하면 편리하다.

336 문제 이해 $\overline{AM} /\!/ \overline{DN}$이므로 두 직선 CM, DN이 이루는 각의 크기는 두 직선 CM, AM이 이루는 각의 크기와 같다.

$\therefore \theta = \angle AMC$ ● 20%

해결 과정 정육면체의 한 모서리의 길이를 $2a$라 하면

$\overline{AC}=2\sqrt{2}a$, $\overline{AM}=\overline{CM}=\sqrt{5}a$

이므로 이등변삼각형 AMC의 꼭짓점 M에서 $\overline{AC}$에 내린 수선의 발을 P라 하면

$\overline{MP}=\sqrt{\overline{AM}^2-\overline{AP}^2}=\sqrt{(\sqrt{5}a)^2-(\sqrt{2}a)^2}=\sqrt{3}a$

따라서 직각삼각형 AMP에서

$\sin\frac{\theta}{2}=\frac{\overline{AP}}{\overline{AM}}=\frac{\sqrt{2}a}{\sqrt{5}a}=\frac{\sqrt{10}}{5}$,

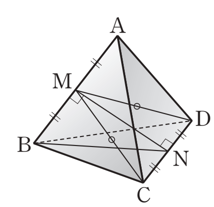
$\cos\frac{\theta}{2}=\frac{\overline{MP}}{\overline{AM}}=\frac{\sqrt{3}a}{\sqrt{5}a}=\frac{\sqrt{15}}{5}$ ● 50%

답 구하기 $\therefore \sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$

$=2\cdot\frac{\sqrt{10}}{5}\cdot\frac{\sqrt{15}}{5}=\frac{2\sqrt{6}}{5}$ ● 30%

답 $\frac{2\sqrt{6}}{5}$

337 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AB}$, $\overline{CD}$의 중점을 각각 M, N이라 하면 △MCD는 $\overline{MC}=\overline{MD}$인 이등변삼각형이므로



$\overline{CD}\perp\overline{MN}$

같은 방법으로 하면 $\overline{AB}\perp\overline{MN}$

따라서 $\overline{PQ}$의 길이의 최솟값은 $\overline{MN}$의 길이와 같다.

이때 $\overline{BM}=1$, $\overline{BN}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 2=\sqrt{3}$이므로 직각삼각형 BNM에서

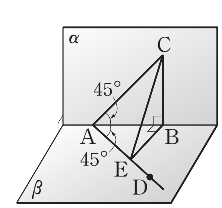
$\overline{MN}=\sqrt{(\sqrt{3})^2-1^2}=\sqrt{2}$

답 ④

1등급 비밀노트

꼬인 위치에 있는 두 직선 위에 있는 두 점 사이의 거리가 최소가 되는 것은 두 점을 이은 직선이 꼬인 위치에 있는 두 직선과 모두 수직이 될 때이다.

338 문제 이해 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AB}\perp\overline{BE}$가 되도록 직선 AD 위에 점 E를 잡으면



$\overline{AB}=\overline{BC}$, $\overline{AB}=\overline{BE}$

$\therefore \overline{BC}=\overline{BE}$ ⋯ ㉠ ● 30%

해결 과정 $\overline{AB}=a$라 하면

$\overline{AC}=\overline{AE}=\sqrt{2}a$ …… ㉡ ● 20%

㉠에서 $\triangle CEB$는 $\angle B=90^\circ$인 직각이등변삼각형이므로

$\overline{CE}=\sqrt{2}a$ …… ㉢ ● 20%

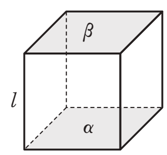
답 구하기 ㉡, ㉢에서 $\triangle AEC$는 정삼각형이므로

$\angle CAE=60^\circ$

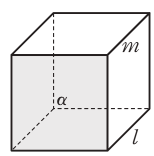
$\therefore \angle CAD=60^\circ$ ● 30%

답 60°

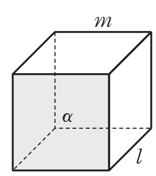
339 ㄱ. 오른쪽 그림과 같이 $l\perp\alpha$, $l\perp\beta$이면 $\alpha /\!/ \beta$이다.



ㄴ. 오른쪽 그림과 같이 $l\perp\alpha$, $m\perp\alpha$이면 $l /\!/ m$이다.



ㄷ. 오른쪽 그림과 같이 $l\perp\alpha$, $m /\!/ \alpha$이지만 두 직선 l, m이 꼬인 위치에 있을 수도 있다.



이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ③

340 정사각형의 두 대각선은 서로 수직이므로

(직선 AC)$\perp$(직선 BD) …… ㉠

또 평면 ABCD와 직선 BF가 수직이므로

(직선 $\boxed{AC}$)$\perp$(직선 BF) …… ㉡

㉠, ㉡에서 (직선 AC)$\perp$(평면 $\boxed{BDF}$)

$\therefore$ (직선 AC)$\perp$(직선 DF)

$\therefore$ (가) AC (나) BDF 답 (가) AC (나) BDF

일품 BOX: 직선 l이 평면 α에 수직이면 직선 l은 평면 α 위의 모든 직선과 수직이다.

341 $\overline{PO}\perp\alpha$이고, 직선 l은 평면 α에 포함되므로

$\overline{PO}\perp l$ …… ㄱ

한편 $\overline{OH}\perp l$이므로 직선 l은 $\overline{PO}$와 $\overline{OH}$를 포함하는 평면 PHO와 수직이다. …… ㄴ

이때 $\overline{PH}$는 평면 PHO에 포함되므로

$\overline{PH}\perp l$ …… ㄱ

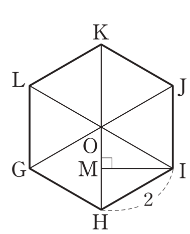
이상에서 위의 증명 과정에 이용된 성질은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

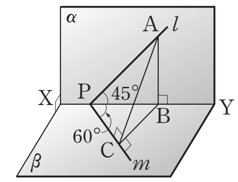
342 $\overline{CI}\perp$(평면 GHIJKL), $\overline{CM}\perp\overline{HK}$이므로 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{MI}\perp\overline{HK}$이다.

즉 오른쪽 그림의 정육각형에서 $\triangle OHI$는 정삼각형이므로

$\overline{MI}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 2=\sqrt{3}$ 답 $\sqrt{3}$



343 오른쪽 그림과 같이 직선 l 위의 한 점 A에서 두 직선 XY, m에 내린 수선의 발을 각각 B, C라 하면 $\overline{AB}\perp\beta$, $\overline{AC}\perp m$이므로 삼수선의 정리에 의하여



$\overline{BC}\perp m$

$\overline{PB}=a$라 하면 직각삼각형 APB에서

$\overline{PA}=\sqrt{2}a$

직각삼각형 BPC에서

$\overline{PC}=\overline{PB}\cos 60^\circ=\frac{1}{2}a$

따라서 직각삼각형 APC에서

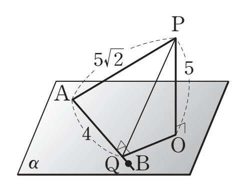
$$\cos\theta=\frac{\overline{PC}}{\overline{PA}}=\frac{\frac{1}{2}a}{\sqrt{2}a}=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

답 ①

1등급 비밀노트

삼수선의 정리를 이용하여 두 직선 l, m을 포함하는 평면 위에 삼각형을 만들어 두 직선 l, m이 이루는 각의 크기를 구한다. 이때 두 평면 α, β가 이루는 각의 크기가 두 직선 l, m이 이루는 각의 크기와 같지 않음에 주의한다.

344 $\overline{PO}\perp\alpha$, $\overline{OQ}\perp\overline{AB}$이므로 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{PQ}\perp\overline{AB}$



직각삼각형 AQP에서

$\overline{PQ}=\sqrt{(5\sqrt{2})^2-4^2}$

$=\sqrt{34}$

따라서 직각삼각형 PQO에서

$\overline{OQ}=\sqrt{(\sqrt{34})^2-5^2}=3$ 답 ④

345 문제 이해 $\overline{AB}\perp\alpha$, $\overline{BC}\perp\overline{CD}$이므로 삼수선의 정리에 의하여

$\overline{AC}\perp\overline{CD}$ ● 20%

해결 과정 직각삼각형 ABC에서

$\overline{AC}=\sqrt{4^2+3^2}=5$

직각삼각형 BCD에서

$\overline{CD}=\sqrt{5^2-3^2}=4$

$\therefore \triangle ACD=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 5=10$ ● 40%

답 구하기 이때 점 B와 평면 ACD 사이의 거리를 h라 하면 삼각뿔 A$-$BCD의 부피에서

$\frac{1}{3}\cdot\triangle BCD\cdot\overline{AB}=\frac{1}{3}\cdot\triangle ACD\cdot h$

$\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 4\right)\cdot 4=\frac{1}{3}\cdot 10\cdot h$

$\frac{10}{3}h=8$ $\therefore h=\frac{12}{5}$ ● 40%

답 $\frac{12}{5}$

일품 BOX

346 문제 이해 점 A의 평면 BCED 위로의 정사영이 $\triangle$ABC의 무게중심 G와 일치하므로

$\overline{AD}=\overline{AE}$ ● 30%

> 두 점 A, G에서 $\overline{DE}$에 내린 수선의 발이 일치하려면
> $\overline{AD}=\overline{AE}$
> 이어야 하고, 이때의 수선의 발은 $\overline{DE}$의 중점이다.

해결 과정 또 $\overline{DE}$의 중점을 M이라 하면

$\overline{AM}\perp\overline{DE},\ \overline{MG}\perp\overline{DE}$

이므로 두 평면 ADE, BCED가 이루는 각의 크기는 $\overline{AM}$과 $\overline{MG}$가 이루는 각의 크기와 같다.

$\therefore \theta=\angle AMG$ ● 20%

정삼각형 ABC에서

$\overline{AM}+\overline{MG}=\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 6=2\sqrt{3}$ …… ㉠

직각삼각형 AMG에서 $\overline{AM}^2-\overline{MG}^2=\overline{AG}^2$

$(\overline{AM}+\overline{MG})(\overline{AM}-\overline{MG})=(\sqrt{6})^2$

$2\sqrt{3}(\overline{AM}-\overline{MG})=6$

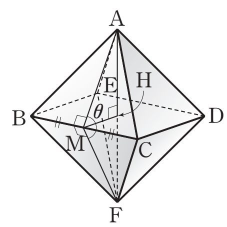
$\therefore \overline{AM}-\overline{MG}=\sqrt{3}$ …… ㉡ ● 30%

답 구하기 ㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$\overline{AM}=\frac{3\sqrt{3}}{2},\ \overline{MG}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore \cos\theta=\frac{\overline{MG}}{\overline{AM}}=\frac{1}{3}$ ● 20% 답 $\frac{1}{3}$

347 문제 이해 $\overline{BC}$의 중점을 M이라 하면



$\overline{AM}\perp\overline{BC},\ \overline{FM}\perp\overline{BC}$

이므로 두 평면 ABC, BCF가 이루는 각의 크기는 $\overline{AM}$과 $\overline{FM}$이 이루는 각의 크기와 같다.

$\therefore \theta=\angle AMF$ ● 30%

해결 과정 정팔면체의 한 모서리의 길이를 a라 하면

$\overline{AM}=\overline{FM}=\frac{\sqrt{3}}{2}a$

점 A에서 평면 BCDE에 내린 수선의 발을 H라 하면 직각삼각형 AMH에서

$\cos\frac{\theta}{2}=\frac{\overline{MH}}{\overline{AM}}=\frac{\frac{a}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}a}=\frac{\sqrt{3}}{3}$ ● 40%

답 구하기 $\therefore \cos\theta=2\cos^2\frac{\theta}{2}-1$

$=2\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2-1=-\frac{1}{3}$ ● 30%

> $\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta$
> $=2\cos^2\theta-1$
> $=1-2\sin^2\theta$

답 $-\frac{1}{3}$

348 $\overline{AD}\perp\triangle BCD,\ \overline{BC}\perp\overline{BD}$이므로 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{AB}\perp\overline{BC}$

직각삼각형 ABC에서 $\overline{AC}=\sqrt{24^2+7^2}=25$

한편 $\overline{AD}\perp\triangle BCD$에서

$\overline{BD}\perp\overline{AD},\ \overline{CD}\perp\overline{AD}$

이므로 두 평면 ABD, ACD가 이루는 각의 크기는 $\overline{BD}$와 $\overline{CD}$가 이루는 각의 크기와 같다.

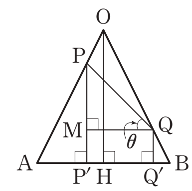
$\therefore \theta=\angle BDC$

직각삼각형 ACD에서 $\overline{CD}=\sqrt{25^2-15^2}=20$

따라서 직각삼각형 BCD에서

$\sin\theta=\frac{\overline{BC}}{\overline{CD}}=\frac{7}{20}$ 답 ④

349 문제 이해 오른쪽 그림과 같이 두 점 P, Q의 밑면 위로의 정사영을 각각 P′, Q′, 점 Q를 지나고 $\overline{P'Q'}$에 평행한 직선이 $\overline{PP'}$과 만나는 점을 M이라 하면 $\overline{PQ}$와 원뿔의 밑면이 이루는 각의 크기는 $\overline{PQ}$, $\overline{MQ}$가 이루는 각의 크기와 같다.



$\therefore \theta=\angle PQM$ ● 30%

해결 과정 점 O에서 $\overline{AB}$에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\triangle APP'\backsim\triangle AOH$ (AA 닮음)이므로

$\overline{AP'}:\overline{AH}=\overline{AP}:\overline{AO}$에서 $\overline{AP'}:4=3:4$

> 점 P는 $\overline{OA}$를 1 : 3으로 내분하는 점이므로
> $\overline{AP}:\overline{PO}=3:1$
> $\therefore \overline{AP}:\overline{AO}=3:4$

$\therefore \overline{AP'}=3$

$\overline{PP'}:\overline{OH}=\overline{AP}:\overline{AO}$에서 $\overline{PP'}:8=3:4$

$\therefore \overline{PP'}=6$

$\triangle BQQ'\backsim\triangle BOH$ (AA 닮음)이므로

$\overline{BQ'}:\overline{BH}=\overline{BQ}:\overline{BO}$에서 $\overline{BQ'}:4=1:4$

> 점 Q는 $\overline{OB}$를 3 : 1로 내분하는 점이므로
> $\overline{BQ}:\overline{QO}=1:3$
> $\therefore \overline{BQ}:\overline{BO}=1:4$

$\therefore \overline{BQ'}=1$

$\overline{QQ'}:\overline{OH}=\overline{BQ}:\overline{BO}$에서 $\overline{QQ'}:8=1:4$

$\therefore \overline{QQ'}=2$ ● 40%

답 구하기 $\overline{PM}=\overline{PP'}-\overline{QQ'}=6-2=4$이므로 직각삼각형 PMQ에서

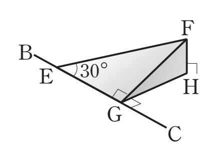
$\overline{PQ}=\sqrt{\overline{PM}^2+\overline{MQ}^2}=\sqrt{4^2+4^2}=4\sqrt{2}$

> $\overline{MQ}$
> $=\overline{P'Q'}$
> $=\overline{AB}-(\overline{AP'}+\overline{BQ'})$
> $=8-(3+1)$
> $=4$

$\therefore \sin\theta=\frac{\overline{PM}}{\overline{PQ}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ● 30%

답 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

350 [그림 1]과 같이 점 F에서 선분 BC와 평면 BCD에 내린 수선의 발을 각각 G, H라 하면



[그림 1]

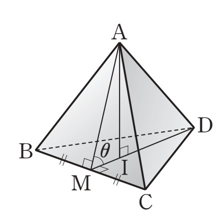
$\overline{EG}=\overline{EF}\cos 30°$

$=2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$

$\overline{FG}=\overline{EF}\sin 30°=2\cdot\frac{1}{2}=1$

$\overline{FH}\perp$(평면 BCD), $\overline{FG}\perp\overline{BC}$이므로 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{GH}\perp\overline{BC}$

한편 [그림 2]에서 평면 ABC와 평면 BCD가 이루는 각의 크기를 θ라 하고, 점 A에서 평면 BCD에 내린 수선의 발을 I라 하면 점 I는 $\triangle$BCD의 무게중심이므로



[그림 2]

$$\cos\theta=\frac{\overline{\mathrm{MI}}}{\overline{\mathrm{AM}}}=\frac{\frac{1}{3}\overline{\mathrm{DM}}}{\overline{\mathrm{AM}}}=\frac{1}{3}\quad(\because\ \overline{\mathrm{AM}}=\overline{\mathrm{DM}})$$

이때 두 평면 ABC와 BCD가 이루는 각의 크기 θ는 [그림 1]에서 두 선분 FG와 GH가 이루는 각의 크기와 같으므로

$\theta=\angle\mathrm{FGH}$

따라서 $\cos\theta=\dfrac{\overline{\mathrm{GH}}}{\overline{\mathrm{FG}}}=\dfrac{1}{3}$이므로

$\overline{\mathrm{GH}}=\dfrac{1}{3}\ (\because\ \overline{\mathrm{FG}}=1)$

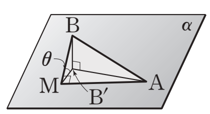
$\overline{\mathrm{EF}}$의 평면 BCD 위로의 정사영은 $\overline{\mathrm{EH}}$이므로 직각삼각형 EGH에서

$$\overline{\mathrm{EH}}=\sqrt{\overline{\mathrm{EG}}^2+\overline{\mathrm{GH}}^2}$$
$$=\sqrt{(\sqrt{3})^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{2\sqrt{7}}{3}$$

답 ②

참고 $\overline{\mathrm{EF}}$의 평면 BCD 위로의 정사영의 길이를 $\overline{\mathrm{EF}}\cos\theta=\dfrac{1}{3}\overline{\mathrm{EF}}$로 계산하지 않도록 주의한다.

351 $\overline{\mathrm{AM}}$이 평면 α 위에 오도록 △ABC를 평행이동시키면 오른쪽 그림과 같다.



이때 $\overline{\mathrm{BB'}}\perp\alpha$, $\overline{\mathrm{BM}}\perp\overline{\mathrm{AM}}$이므로 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{\mathrm{B'M}}\perp\overline{\mathrm{AM}}$

즉 평면 ABC와 평면 α가 이루는 각의 크기는 $\overline{\mathrm{BM}}$과 $\overline{\mathrm{B'M}}$이 이루는 각의 크기와 같다.

$\therefore\ \theta=\angle\mathrm{BMB'}$

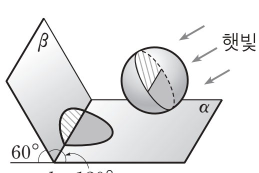
직각삼각형 ABB′에서 $\overline{\mathrm{BB'}}=\sqrt{8^2-7^2}=\sqrt{15}$

직각삼각형 BMB′에서 $\overline{\mathrm{B'M}}=\sqrt{4^2-(\sqrt{15})^2}=1$

$\therefore\ \cos\theta=\dfrac{\overline{\mathrm{B'M}}}{\overline{\mathrm{BM}}}=\dfrac{1}{4}$

답 ③

352 문제 이해 햇빛이 평면 α와 이루는 각의 크기가 30°이므로 햇빛은 평면 β와 수직으로 만난다.



● 20%

해결 과정 평면 α에 생긴 그림자의 넓이를 S_1이라 하면

$S_1\cos60^\circ=\dfrac{1}{2}\times\pi\times10^2$

$\dfrac{1}{2}S_1=50\pi\qquad\therefore\ S_1=100\pi$ ● 30%

또 평면 β에 생긴 그림자의 넓이를 S_2라 하면

$S_2=\dfrac{1}{2}\times\pi\times10^2=50\pi$ ● 30%

답 구하기 따라서 그림자의 넓이의 합은

$S_1+S_2=150\pi$

$\therefore\ a=150$ ● 20%

답 150

일품 BOX

$\theta=\angle\mathrm{BAF}$

$\overline{\mathrm{AB'}}=\overline{\mathrm{A'B'}}=7$

$\overline{\mathrm{BM}}=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{BC}}=4$

△PBQ는 $\overline{\mathrm{PB}}=\overline{\mathrm{PQ}}$인 이등변삼각형이므로 $\overline{\mathrm{PM}}$은 $\overline{\mathrm{BQ}}$의 수직이등분선이다.

$\overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=2$

$\overline{\mathrm{BM}}=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{BQ}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$

△ABC의 점 A에서 $\overline{\mathrm{BC}}$에 내린 수선의 발을 N이라 하면

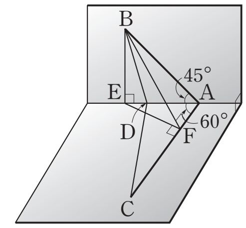
$\overline{\mathrm{AB}}\cdot\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{BC}}\cdot\overline{\mathrm{AN}}$

$1\cdot\sqrt{3}=2\cdot\overline{\mathrm{AN}}$

$\therefore\ \overline{\mathrm{AN}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore\ \overline{\mathrm{PH}}=\overline{\mathrm{AN}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

353 $\overline{\mathrm{AD}}$를 접는 선으로 하여 △ABD와 △ADC가 수직이 되도록 접으면 오른쪽 그림과 같이 △ABD와 △ADC는 서로 수직인 두 평면 위에 놓인다.



이때 점 B에서 직선 AD에 내린 수선의 발을 E라 하고 점 E에서 $\overline{\mathrm{AC}}$에 내린 수선의 발을 F라 하면

$\overline{\mathrm{BE}}\perp(\text{평면 ADC})$, $\overline{\mathrm{EF}}\perp\overline{\mathrm{AC}}$

이므로 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{\mathrm{BF}}\perp\overline{\mathrm{AC}}$

$\overline{\mathrm{AE}}=a$라 하면 직각삼각형 ABE에서

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{2}a$

직각삼각형 AEF에서

$\overline{\mathrm{AF}}=\overline{\mathrm{AE}}\cos60^\circ=\dfrac{1}{2}a$

따라서 직각삼각형 AFB에서

$$\cos\theta=\frac{\overline{\mathrm{AF}}}{\overline{\mathrm{AB}}}=\frac{\frac{1}{2}a}{\sqrt{2}a}=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

답 ③

354 직각삼각형 ABP에서

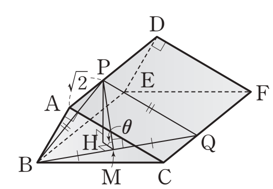
$\overline{\mathrm{PB}}=\sqrt{1^2+(\sqrt{2})^2}=\sqrt{3}$

$\therefore\ \overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{PB}}=\sqrt{3}$

이때 $\overline{\mathrm{CA}}=\sqrt{3}$이므로 □ACQP는 직사각형이다.

$\therefore\ \overline{\mathrm{CQ}}=\overline{\mathrm{AP}}=\sqrt{2}$

오른쪽 그림과 같이 점 P에서 평면 BCFE에 내린 수선의 발을 H, $\overline{\mathrm{BQ}}$의 중점을 M이라 하면



$\overline{\mathrm{PH}}\perp(\text{평면 BCFE})$,

$\overline{\mathrm{PM}}\perp\overline{\mathrm{BQ}}$

이므로 삼수선의 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{HM}}\perp\overline{\mathrm{BQ}}$

즉 두 평면 PBQ, BCFE가 이루는 각의 크기는 $\overline{\mathrm{PM}}$과 $\overline{\mathrm{HM}}$이 이루는 각의 크기와 같다.

$\therefore\ \theta=\angle\mathrm{PMH}$

직각삼각형 BCQ에서

$\overline{\mathrm{BQ}}=\sqrt{2^2+(\sqrt{2})^2}=\sqrt{6}$

이므로 직각삼각형 PBM에서

$$\overline{\mathrm{PM}}=\sqrt{(\sqrt{3})^2-\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$$

이때 $\overline{\mathrm{PH}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$이므로 직각삼각형 PHM에서

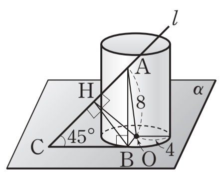
$$\overline{\mathrm{HM}}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore\ \cos\theta=\frac{\overline{\mathrm{HM}}}{\overline{\mathrm{PM}}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore\ 30\cos^2\theta=30\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=15$$

답 15

355 오른쪽 그림과 같이 점 A에서 밑면에 내린 수선의 발을 B, 직선 l과 평면 α가 만나는 점을 C라 하면 직선 BC는 원기둥의 밑면의 접선이다.



따라서 $\overline{OB}\perp\overline{BC}$, $\overline{OB}\perp\overline{AB}$이므로

$\overline{OB}\perp$(평면 ABC)

이때 점 B에서 직선 l에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{OB}\perp$(평면 ABC), $\overline{BH}\perp l$

이므로 삼수선의 정리에 의하여

$\overline{OH}\perp l$

즉 $\overline{OH}$의 길이는 점 O와 직선 l 사이의 거리와 같다.

이때

$\overline{BC}=\overline{AB}=\sqrt{8^2-4^2}=4\sqrt{3}$,

$\overline{BH}=\overline{BC}\sin 45°=4\sqrt{3}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{6}$

이므로 직각삼각형 HBO에서

$\overline{OH}=\sqrt{(2\sqrt{6})^2+4^2}=2\sqrt{10}$

답 ④

356 ㄱ. $\overline{EF}\,/\!/\,\overline{AC}$이고 $\overline{HG}\,/\!/\,\overline{AC}$이므로

$\overline{EF}\,/\!/\,\overline{HG}$

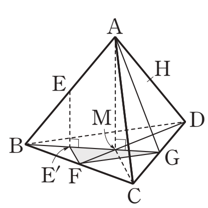
또 $\overline{EF}=\overline{HG}=\dfrac{1}{2}\overline{AC}$이므로 □EFGH는 평행사변형이다.

따라서 네 점 E, F, G, H는 한 평면 위에 있다.

ㄴ. $\overline{EF}=\dfrac{1}{2}\overline{AC}=1$, $\overline{FG}=\dfrac{1}{2}\overline{BD}=1$이므로 직각삼각형 EFG의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\cdot1\cdot1=\dfrac{1}{2}$

ㄷ. △BCD의 무게중심을 M이라 하면 꼭짓점 A의 평면 BCD 위로의 정사영은 △BCD의 무게중심과 같으므로 $\overline{AB}$의 평면 BCD 위로의 정사영은 $\overline{MB}$이다.



즉 점 E의 평면 BCD 위로의 정사영 E′은 $\overline{MB}$의 중점이고 △EFG의 평면 BCD 위로의 정사영은 △E′FG다.

이때

$\overline{E'F}\,/\!/\,\overline{CM}$,

$\overline{E'F}=\dfrac{1}{2}\overline{CM}=\dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot2\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$,

$\overline{FG}\,/\!/\,\overline{BD}$, $\overline{FG}=\dfrac{1}{2}\overline{BD}=\dfrac{1}{2}\cdot2=1$

이고, $\overline{BD}\perp\overline{CM}$에서 $\overline{FG}\perp\overline{E'F}$이므로

$\triangle E'FG=\dfrac{1}{2}\cdot\overline{E'F}\cdot\overline{FG}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{3}\cdot1=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$

이상에서 옳은 것은 ㄱ뿐이다.

답 ①

일품 BOX

직각삼각형 BCE에서
$\overline{EC}=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$
직각삼각형 ECG에서
$\overline{EG}=\sqrt{(\sqrt{3})^2-1^2}$
$=\sqrt{2}$
따라서 $\overline{EF}=\overline{FG}=1$, $\overline{EG}=\sqrt{2}$이므로 △EFG는 빗변이 $\overline{EG}$인 직각이등변삼각형이다.

정사각형 BCDE의 두 대각선의 교점을 H라 하면 △ABC의 평면 BCDE 위로의 정사영은 △HBC이다.

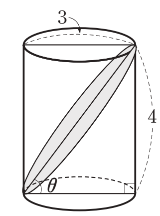
1등급 비밀노트

정사면체와 관련된 문제에서는 다음과 같은 내용을 기억하면 편리하다.

① 한 꼭짓점에서 밑면에 내린 수선의 발은 밑면의 무게중심과 일치한다.

② 두 면이 이루는 각 θ에 대하여 $\cos\theta=\dfrac{1}{3}$이다.

357 구하는 수면의 넓이는 오른쪽 그림의 어두운 부분의 넓이와 같다. 이때 수면과 밑면이 이루는 각의 크기를 θ라 하면



$$\cos\theta=\frac{3}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{3}{5}$$

구하는 수면의 넓이를 S라 하면

$$S\cos\theta=\pi\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2,\quad \frac{3}{5}S=\frac{9}{4}\pi$$

$$\therefore S=\frac{15}{4}\pi$$

따라서 $a=4$, $b=15$이므로

$a+b=19$

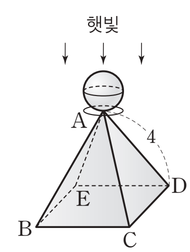
답 19

1등급 비밀노트

수면을 포함한 평면을 α, 밑면을 포함한 평면을 β라 할 때, 수면의 평면 β 위로의 정사영은 밑면이 된다.

이때 밑면의 평면 α 위로의 정사영이 수면이라고 생각하지 않도록 주의한다.

358 구의 중심을 지나면서 평면 BCDE에 평행한 평면이 구를 자른 단면은 반지름의 길이가 1인 원이다. 이때 이 원을 꼭짓점 A에 원의 중심이 놓이도록 평행하게 이동하면 구의 그림자의 넓이의 합은 원이 사각뿔의 4개의 옆면에 생기는 그림자의 넓이의 합과 같다.



원과 평면 ABC가 이루는 각의 크기를 θ라 하면 θ는 두 평면 ABC, BCDE가 이루는 각의 크기와 같다.

이때 정삼각형 ABC의 넓이는 $\dfrac{\sqrt{3}}{4}\cdot4^2=4\sqrt{3}$이고 정사각형 BCDE의 넓이는 16이므로

$$\cos\theta=\frac{4}{4\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

따라서 구하는 그림자의 넓이의 합을 S라 하면

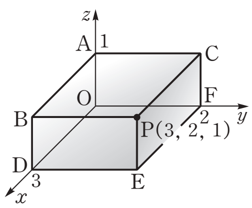
$$\pi=S\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}S\quad\therefore S=\sqrt{3}\pi$$

따라서 $a=\sqrt{3}$이므로 $a^2=3$

답 3

07 공간좌표 본책 70쪽

359 주어진 직육면체는 오른쪽 그림과 같으므로



A$(0,\ 0,\ 1)$,
B$(3,\ 0,\ 1)$,
C$(0,\ 2,\ 1)$,
D$(3,\ 0,\ 0)$,
E$(3,\ 2,\ 0)$, F$(0,\ 2,\ 0)$

따라서 $a+b+c$의 값이 최대인 점은 E$(3,\ 2,\ 0)$이므로 구하는 최댓값은 5이다.

답 ③

360 점 P$(-2,\ 1,\ 3)$과 xy평면에 대하여 대칭인 점은 Q$(-2,\ 1,\ -3)$이므로 점 Q에서 y축에 내린 수선의 발의 좌표는 $(0,\ 1,\ 0)$이다.

답 $(0,\ 1,\ 0)$

> 점 $(a,\ b,\ c)$를 좌표평면에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는
> ① xy평면 ➡ $(a,\ b,\ -c)$
> ② yz평면 ➡ $(-a,\ b,\ c)$
> ③ zx평면 ➡ $(a,\ -b,\ c)$

361 점 P$(2,\ a,\ b)$와 z축에 대하여 대칭인 점은 Q$(-2,\ -a,\ b)$이므로

$-a=0 \qquad \therefore a=0$

점 P$(2,\ a,\ b)$에서 yz평면에 내린 수선의 발은 H$(0,\ a,\ b)$이므로

$b=-4$

$\therefore a+b=-4$

답 -4

362 $\overline{\text{PA}}=\sqrt{1^2+(a-1)^2}=\sqrt{a^2-2a+2}$,

$\overline{\text{PB}}=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$

이때 $\overline{\text{PA}}=2\overline{\text{PB}}$이므로

$\sqrt{a^2-2a+2}=2\sqrt{5}$

$\therefore a^2-2a-18=0$

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 모든 실수 a의 값의 합은 2이다.

답 ②

> 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 $\alpha,\ \beta$라 하면
> $\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a},\ \alpha\beta=\dfrac{c}{a}$

363 점 P$(5,\ 3,\ -4)$와 yz평면에 대하여 대칭인 점은

P$'(-5,\ 3,\ -4)$

점 Q$(1,\ -1,\ 2)$와 x축에 대하여 대칭인 점은

Q$'(1,\ 1,\ -2)$

$\therefore \overline{\text{P}'\text{Q}'}=\sqrt{(1+5)^2+(1-3)^2+(-2+4)^2}$
$=2\sqrt{11}$

답 ②

364 점 R의 좌표를 $(a,\ 0,\ 0)$이라 하면

$\overline{\text{PR}}^2=(a-2)^2+(-1)^2+(-2)^2=a^2-4a+9$

$\overline{\text{QR}}^2=(a+3)^2+(-3)^2+(-1)^2=a^2+6a+19$

$\overline{\text{PR}}=\overline{\text{QR}}$에서 $\overline{\text{PR}}^2=\overline{\text{QR}}^2$이므로

$a^2-4a+9=a^2+6a+19$

$10a=-10 \qquad \therefore a=-1$

$\therefore$ R$(-1,\ 0,\ 0)$

답 $(-1,\ 0,\ 0)$

일품 BOX

> 두 점 A$(x_1,\ y_1,\ z_1)$, B$(x_2,\ y_2,\ z_2)$에 대하여 $\overline{\text{AB}}$의 중점의 좌표는
> $\left(\dfrac{x_1+x_2}{2},\ \dfrac{y_1+y_2}{2},\ \dfrac{z_1+z_2}{2}\right)$

365 $\overline{\text{AB}}$를 $3:1$로 내분하는 점 C의 좌표는

$\left(\dfrac{3\cdot5+1\cdot1}{3+1},\ \dfrac{3\cdot3+1\cdot3}{3+1},\ \dfrac{3\cdot1+1\cdot5}{3+1}\right)$

$\therefore$ C$(4,\ 3,\ 2)$

따라서 점 D의 좌표는 $(4,\ 3,\ 0)$이므로 $\overline{\text{CD}}$의 중점의 좌표는

$\left(\dfrac{4+4}{2},\ \dfrac{3+3}{2},\ \dfrac{2+0}{2}\right)$, 즉 $(4,\ 3,\ 1)$

답 $(4,\ 3,\ 1)$

366 점 A$(2,\ 3,\ 4)$와 x축에 대하여 대칭인 점은

P$(2,\ -3,\ -4)$

점 A$(2,\ 3,\ 4)$와 yz평면에 대하여 대칭인 점은

Q$(-2,\ 3,\ 4)$

따라서 $\overline{\text{PQ}}$를 $2:1$로 외분하는 점의 좌표는

$\left(\dfrac{2\cdot(-2)-1\cdot2}{2-1},\ \dfrac{2\cdot3-1\cdot(-3)}{2-1},\ \dfrac{2\cdot4-1\cdot(-4)}{2-1}\right)$

$\therefore (-6,\ 9,\ 12)$

답 ⑤

367 $\triangle$ABC의 무게중심의 좌표는

$\left(\dfrac{1-2+a}{3},\ \dfrac{2+3+b}{3},\ \dfrac{3+4+c}{3}\right)$

이 점이 원점과 일치하므로

$\dfrac{a-1}{3}=0,\ \dfrac{b+5}{3}=0,\ \dfrac{c+7}{3}=0$

따라서 $a=1,\ b=-5,\ c=-7$이므로

$a+b+c=-11$

답 ①

368 구의 반지름의 길이를 r라 하면 구의 중심의 좌표가 $(2,\ -3,\ 1)$이므로 주어진 구의 방정식은

$(x-2)^2+(y+3)^2+(z-1)^2=r^2$

이 구가 원점을 지나므로

$(-2)^2+3^2+(-1)^2=r^2 \qquad \therefore r^2=14$

따라서 구의 방정식은

$(x-2)^2+(y+3)^2+(z-1)^2=14$

즉 $x^2+y^2+z^2-4x+6y-2z=0$이므로

$a=-4,\ b=6,\ c=-2,\ d=0$

$\therefore a+b+c+d=0$

답 0

369 주어진 구의 중심은 $\overline{\text{AB}}$의 중점이므로 그 좌표는

$\left(\dfrac{-2+6}{2},\ \dfrac{-4+2}{2},\ \dfrac{6+6}{2}\right)$, 즉 $(2,\ -1,\ 6)$

또 $\overline{\text{AB}}$가 구의 지름이므로 구의 반지름의 길이는

$\dfrac{1}{2}\overline{\text{AB}}=\dfrac{1}{2}\sqrt{(6+2)^2+(2+4)^2+(6-6)^2}=5$

따라서 구의 방정식은

$(x-2)^2+(y+1)^2+(z-6)^2=5^2$

이므로

$a=2,\ b=-1,\ c=6,\ r=5$

$\therefore a+b+c+r=12$ 답 ①

1등급 비밀노트

두 점 A, B를 지름의 양 끝 점으로 하는 원 또는 구의 중심은 $\overline{\mathrm{AB}}$의 중점과 일치하고, 반지름의 길이는 $\frac{1}{2}\overline{\mathrm{AB}}$와 같다.

370 xy평면, yz평면, zx평면에 동시에 접하고 반지름의 길이가 r인 구의 방정식은

$(x-r)^2+(y-r)^2+(z-r)^2=r^2$

이 구가 점 $(1,\ 2,\ 3)$을 지나므로

$(1-r)^2+(2-r)^2+(3-r)^2=r^2$

$\therefore r^2-6r+7=0$

두 구의 반지름의 길이를 각각 $r_1,\ r_2$라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$r_1+r_2=6,\ r_1r_2=7$

따라서 두 구의 부피의 합은

$$\frac{4}{3}\pi r_1{}^3+\frac{4}{3}\pi r_2{}^3=\frac{4}{3}\pi(r_1{}^3+r_2{}^3)$$
$$=\frac{4}{3}\pi\{(r_1+r_2)^3-3r_1r_2(r_1+r_2)\}$$
$$=\frac{4}{3}\pi(6^3-3\cdot7\cdot6)=120\pi$$ 답 ②

371 zx평면 위의 점은 y좌표가 0이므로 주어진 구의 방정식에 $y=0$을 대입하면

$x^2+(0-3)^2+z^2=16\qquad \therefore x^2+z^2=7$

따라서 $a=0,\ b=0,\ c=0,\ r=\sqrt{7}$이므로

$a+b+c+r=\sqrt{7}$ 답 ②

372 구의 반지름의 길이를 r라 하면 구의 중심의 좌표가 $(2,\ 6,\ 5)$이므로 주어진 구의 방정식은

$(x-2)^2+(y-6)^2+(z-5)^2=r^2$

이 구가 점 $(7,\ 2,\ 8)$을 지나므로

$(7-2)^2+(2-6)^2+(8-5)^2=r^2\qquad \therefore r^2=50$

즉 구의 방정식은

$(x-2)^2+(y-6)^2+(z-5)^2=50$

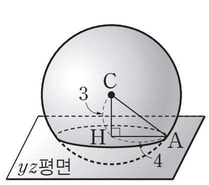
xy평면 위의 점은 z좌표가 0이므로 위의 식에 $z=0$을 대입하면

$(x-2)^2+(y-6)^2=25$

따라서 구하는 원의 둘레의 길이는

$2\pi\cdot5=10\pi$ 답 ③

373 오른쪽 그림과 같이 구의 중심을 C, 점 C에서 yz평면에 내린 수선의 발을 H, 구와 yz평면의 교선 위의 한 점을 A라 하면



$\pi\cdot\overline{\mathrm{AH}}^2=16\pi\qquad \therefore \overline{\mathrm{AH}}=4$

일품 BOX

점 $(a,\ b,\ c)$와 yz평면 사이의 거리는 $|a|$와 같다.

구가 점 $(1,\ 2,\ 3)$을 지나므로 구의 중심의 x좌표, y좌표, z좌표는 모두 양수이다.

두 점 $(2,\ 6,\ 5)$, $(7,\ 2,\ 8)$ 사이의 거리로 구할 수도 있다.

또 주어진 구의 중심과 yz평면 사이의 거리는 3이므로

$\overline{\mathrm{CH}}=3$

직각삼각형 ACH에서

$\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{4^2+3^2}=5$

따라서 구하는 구의 방정식은

$(x-3)^2+(y+4)^2+z^2=25$

답 $(x-3)^2+(y+4)^2+z^2=25$

다른 풀이 구의 반지름의 길이를 r라 하면 구의 중심의 좌표가 $(3,\ -4,\ 0)$이므로 주어진 구의 방정식은

$(x-3)^2+(y+4)^2+z^2=r^2$

yz평면 위의 점은 x좌표가 0이므로 위의 식에 $x=0$을 대입하면

$(y+4)^2+z^2=r^2-9$

이때 $r^2-9=16$에서 $\quad r^2=25$

$\therefore (x-3)^2+(y+4)^2+z^2=25$

374 $x^2+y^2+z^2-2x+4y-4z+a=0$에서

$(x-1)^2+(y+2)^2+(z-2)^2=9-a$

$x^2+y^2+z^2+2x-2z-2=0$에서

$(x+1)^2+y^2+(z-1)^2=4$

따라서 두 구의 중심의 좌표가 각각

$(1,\ -2,\ 2),\ (-1,\ 0,\ 1)$

이므로 두 구의 중심 사이의 거리는

$\sqrt{(-1-1)^2+(0+2)^2+(1-2)^2}=3$

두 구가 외접하려면 두 구의 반지름의 길이의 합이 중심 사이의 거리와 같아야 하므로

$\sqrt{9-a}+2=3,\qquad \sqrt{9-a}=1$

$9-a=1\qquad \therefore a=8$ 답 ③

375 $x^2+y^2+z^2-2x-4y+6z+5=0$에서

$(x-1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=9$

$x^2+y^2+z^2-2x+4y=a$에서

$(x-1)^2+(y+2)^2+z^2=a+5$

따라서 두 구의 중심의 좌표가 각각

$(1,\ 2,\ -3),\ (1,\ -2,\ 0)$

이므로 두 구의 중심 사이의 거리는

$\sqrt{(1-1)^2+(-2-2)^2+(0+3)^2}=5$

두 구가 내접하려면 두 구의 반지름의 길이의 차가 중심 사이의 거리와 같아야 하므로

$|\sqrt{a+5}-3|=5,\qquad \sqrt{a+5}-3=\pm5$

$\therefore \sqrt{a+5}=8\ (\because \sqrt{a+5}>0)$

따라서 두 구의 반지름의 길이는 각각 3, 8이므로 구하는 곱은 24이다. 답 ②

376 $x^2+y^2+z^2+4x-12y+6z+40=0$에서

$(x+2)^2+(y-6)^2+(z+3)^2=9$

두 구의 중심을 각각 C, C′이라 하면

$\mathrm{C}(0,\ 0,\ 0),\ \mathrm{C'}(-2,\ 6,\ -3)$

이므로 두 구의 중심 사이의 거리는

$\overline{CC'}=\sqrt{(-2)^2+6^2+(-3)^2}=7$

이때 $\overline{CC'}$은 두 구의 반지름의 길이의 합과 같으므로 두 구는 외접한다.

즉 점 P는 $\overline{CC'}$을 $4:3$으로 내분하는 점이므로 그 좌표는

$$P\left(\frac{4\cdot(-2)+3\cdot0}{4+3},\ \frac{4\cdot6+3\cdot0}{4+3},\ \frac{4\cdot(-3)+3\cdot0}{4+3}\right)$$

$$\therefore P\left(-\frac{8}{7},\ \frac{24}{7},\ -\frac{12}{7}\right)$$

따라서 $a=-\frac{8}{7}$, $b=\frac{24}{7}$, $c=-\frac{12}{7}$이므로

$a+b+c=\frac{4}{7}$ 답 $\frac{4}{7}$

1등급 비밀노트

두 구 $(x-a_1)^2+(y-b_1)^2+(z-c_1)^2=r_1^2$, $(x-a_2)^2+(y-b_2)^2+(z-c_2)^2=r_2^2$이 외접할 때 접점의 좌표는 두 점 $(a_1,\ b_1,\ c_1)$, $(a_2,\ b_2,\ c_2)$를 이은 선분을 $r_1:r_2\ (r_1>0,\ r_2>0)$로 내분하는 점의 좌표와 같다.

377 점 P의 좌표는 $(2a,\ 2a,\ a)$이므로 점 P와 원점에 대하여 대칭인 점의 좌표는 $(-2a,\ -2a,\ -a)$이다.

따라서 $l=-2a$, $m=-2a$, $n=-a$이므로

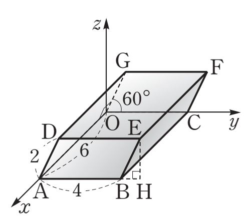
$lm+n=14$에서

$-2a\cdot(-2a)-a=14$

$4a^2-a-14=0$, $(4a+7)(a-2)=0$

$\therefore a=2\ (\because a>0)$ 답 2

378 $\angle GOA=90°$이므로 평행사변형 OCFG는 yz평면 위에 있다. 오른쪽 그림과 같이 꼭짓점 E에서 xy평면에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\angle EBH=60°$이므로



$\overline{BH}=\overline{EB}\cos60°=2\cdot\frac{1}{2}=1$,

$\overline{EH}=\overline{EB}\sin60°=2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$

또 $\overline{OA}=6$이므로 꼭짓점 E의 좌표는

$(6,\ 4+1,\ \sqrt{3})$, 즉 $(6,\ 5,\ \sqrt{3})$ 답 $(6,\ 5,\ \sqrt{3})$

379 문제 이해 조건 (가)에서 점 B의 z좌표가 양수이므로 점 A의 z좌표도 양수이다. ● 20%

해결 과정 $\overline{OA}=6$이므로 점 A의 좌표는

$(0,\ 0,\ 6)$

조건 (나)에 의하여 점 B의 좌표를 $(5,\ \sqrt{2},\ k)\ (k>0)$라 하고 점 B에서 $\overline{OA}$에 내린 수선의 발을 M이라 하면

$M(0,\ 0,\ k)$

이때 $\overline{OM}=\frac{1}{2}\overline{OA}=3$이므로 $k=3$ ● 30%

일품 BOX

점 P가 $\overline{CC'}$ 위에 있고, $\overline{CP}=4$, $\overline{C'P}=3$이므로 점 P는 $\overline{CC'}$을 $4:3$으로 내분하는 점이다.

두 양수 a, b에 대하여 $\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$, 즉 $a+b\geq2\sqrt{ab}$ (단, 등호는 $a=b$일 때 성립)

$\angle EBH=\angle DAB=\angle GOC=60°$

점 $A(0,\ 0,\ 6)$과 xy평면에 대하여 대칭인 점의 좌표는

$(0,\ 0,\ -6)$

점 $B(5,\ \sqrt{2},\ 3)$과 z축에 대하여 대칭인 점의 좌표는

$(-5,\ -\sqrt{2},\ 3)$ ● 30%

답 구하기 따라서 $a=0$, $b=0$, $c=-6$, $d=-5$, $e=-\sqrt{2}$, $f=3$이므로

$a+b+c+d+e+f=-8-\sqrt{2}$ ● 20%

답 $-8-\sqrt{2}$

380 $\overline{PQ}=\sqrt{(b-a)^2+(b+a)^2+(2-1)^2}$

$=\sqrt{2a^2+2b^2+1}$

이때 $a>0$, $b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$2a^2+2b^2+1\geq2\sqrt{2a^2\cdot2b^2}+1$

$=4ab+1=4\cdot2+1=9$

(단, 등호는 $a=b$일 때 성립)

따라서 $\overline{PQ}$의 길이의 최솟값은 3이다. 답 ④

381 $\overline{AB}=\sqrt{(4-2)^2+(5-1)^2+(1+3)^2}=6$

두 점 A, B의 xy평면 위로의 정사영은 각각

$A'(2,\ 1,\ 0)$, $B'(4,\ 5,\ 0)$

이므로 $\overline{A'B'}=\sqrt{(4-2)^2+(5-1)^2}=2\sqrt{5}$

따라서 $\overline{A'B'}=\overline{AB}\cos\theta$에서

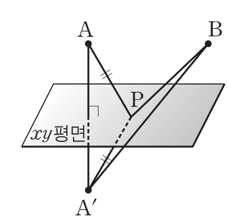
$\cos\theta=\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}=\frac{\sqrt{5}}{3}$ 답 ⑤

382 $a>0$에서 두 점 A, B의 z좌표의 부호가 같으므로 두 점은 좌표공간에서 xy평면을 기준으로 같은 쪽에 있다.

점 A와 xy평면에 대하여 대칭인 점을 A′이라 하면

$A'(1,\ 3,\ -8)$

오른쪽 그림에서



$\overline{AP}+\overline{BP}$

$=\overline{A'P}+\overline{BP}$

$\geq\overline{A'B}$

$=\sqrt{(3-1)^2+(4-3)^2+(a+8)^2}$

$=\sqrt{a^2+16a+69}$

따라서 $\sqrt{a^2+16a+69}=3\sqrt{14}$이므로

$a^2+16a-57=0$, $(a+19)(a-3)=0$

$\therefore a=3\ (\because a>0)$ 답 ④

1등급 비밀노트

두 점 A, B와 평면 α 위의 한 점 P에 대하여 $\overline{AP}+\overline{BP}$의 최솟값은

① 두 점 A, B가 평면 α에 대하여 서로 다른 쪽에 있으면
➡ $\overline{AB}$의 길이와 같다.

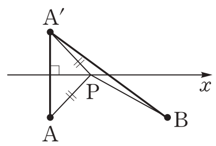
② 두 점 A, B가 평면 α에 대하여 같은 쪽에 있으면
➡ 두 점 중 한 점과 평면 α에 대하여 대칭인 점을 찾아 ①을 이용한다.

383 직선 AB와 x축은 서로 평행하므로 한 평면을 결정한다. 이 평면에서 두 점 A, B는 x축을 기준으로 같은 쪽에 있다.

점 A와 x축에 대하여 대칭인 점을 A′이라 하면

$A'(1,\ -1,\ -1)$

오른쪽 그림에서



$\overline{AP}+\overline{BP}$

$=\overline{A'P}+\overline{BP}$

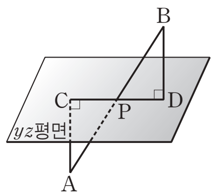
$\geq \overline{A'B}$

$=\sqrt{(-4-1)^2+(1+1)^2+(1+1)^2}$

$=\sqrt{33}$

답 ③

384 (문제 이해) 두 점 A, B에서 yz평면에 내린 수선의 발을 각각 C, D라 하면



$\overline{AC}=|-3a|=3a$,

$\overline{BD}=|3a|=3a$ ● 30%

(해결 과정) 이때 $\triangle ACP\equiv\triangle BDP$(ASA 합동)이므로

$\overline{AP}=\overline{BP}$

즉 점 P는 $\overline{AB}$의 중점이므로

$$\mathrm{P}\left(\frac{-3a+3a}{2},\ \frac{2a+(-a)}{2},\ \frac{a+4a}{2}\right)$$

$$\therefore \mathrm{P}\left(0,\ \frac{a}{2},\ \frac{5}{2}a\right)$$

$$\therefore \alpha=0,\ \beta=\frac{a}{2},\ \gamma=\frac{5}{2}a$$ ● 50%

(답 구하기) 이때 $\alpha+\beta+\gamma=4$이므로

$$\frac{a}{2}+\frac{5}{2}a=4,\qquad 3a=4$$

$$\therefore a=\frac{4}{3}$$ ● 20%

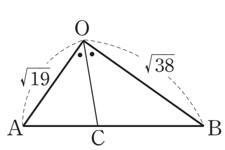
답 $\frac{4}{3}$

385 $\overline{OA}=\sqrt{1^2+3^2+3^2}=\sqrt{19}$,

$\overline{OB}=\sqrt{2^2+(-5)^2+3^2}=\sqrt{38}$이므로

$\overline{OA}:\overline{OB}=1:\sqrt{2}$

오른쪽 그림의 $\triangle OAB$에서



$\overline{OA}:\overline{OB}=\overline{AC}:\overline{BC}$

$=1:\sqrt{2}$

즉 점 C는 $\overline{AB}$를 $1:\sqrt{2}$로 내분하는 점이므로

$$\mathrm{C}\left(\frac{1\cdot 2+\sqrt{2}\cdot 1}{1+\sqrt{2}},\ \frac{1\cdot(-5)+\sqrt{2}\cdot 3}{1+\sqrt{2}},\ \frac{1\cdot 3+\sqrt{2}\cdot 3}{1+\sqrt{2}}\right)$$

$$\therefore \mathrm{C}\left(\frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}},\ \frac{-5+3\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}},\ \frac{3+3\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\right)$$

따라서 $a+b+c=\dfrac{7\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}=14-7\sqrt{2}$이므로

$p=14,\ q=-7$

$\therefore p+q=7$

답 ①

일품 BOX

평면의 결정 조건

① 한 직선 위에 있지 않은 세 점

② 한 직선과 그 위에 있지 않은 한 점

③ 한 점에서 만나는 두 직선

④ 평행한 두 직선

● $\triangle ACP$와 $\triangle BDP$에서

$\overline{AC}=\overline{BD}$,

$\angle ACP=\angle BDP=90^\circ$,

$\angle PAC$

$=90^\circ-\angle APC$

$=90^\circ-\angle BPD$

$=\angle PBD$

이므로

$\triangle ACP\equiv\triangle BDP$

(ASA 합동)

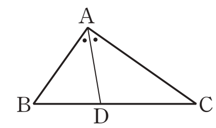
1등급 비밀노트

삼각형의 내각의 이등분선의 성질을 이용하는 문제는 두 점 사이의 거리, 선분의 내분점과 외분점에 관련된 문제에서 자주 쓰이므로 반드시 기억하도록 한다.

오른쪽 그림의 $\triangle ABC$에서

$\angle BAD=\angle CAD$이면

$\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{BD}:\overline{CD}$



386 $\overline{AB}$를 $2:1$로 내분하는 점의 y좌표가 0이므로

$$\frac{2\cdot 4+1\cdot a}{2+1}=0,\qquad 8+a=0\qquad \therefore a=-8$$

$\overline{AB}$를 $1:3$으로 내분하는 점의 z좌표가 0이므로

$$\frac{1\cdot b+3\cdot(-1)}{1+3}=0,\qquad b-3=0\qquad \therefore b=3$$

$\therefore a+b=-5$

답 ①

387 $\overline{AP}=\dfrac{2}{5}\overline{AB}$에서 $5\overline{AP}=2\overline{AB}$

$\therefore \overline{AP}:\overline{AB}=2:5$

즉 점 P는 $\overline{AB}$를 $2:3$으로 내분하는 점이므로

$$\mathrm{P}\left(\frac{2\cdot(-1)+3\cdot 3}{2+3},\ \frac{2\cdot 0+3\cdot(-1)}{2+3},\ \frac{2\cdot 5+3\cdot 2}{2+3}\right)$$

$$\therefore \mathrm{P}\left(\frac{7}{5},\ -\frac{3}{5},\ \frac{16}{5}\right)$$

따라서 $a=\dfrac{7}{5},\ b=-\dfrac{3}{5},\ c=\dfrac{16}{5}$이므로

$a+b+c=4$

답 4

참고 $\overline{AP}:\overline{AB}=2:5$에서 점 B는 $\overline{AP}$를 $5:3$으로 외분하는 점임을 이용하여 점 P의 좌표를 구할 수도 있다.

388 중심의 좌표가 $(2,\ 5,\ -1)$이고 zx평면에 접하는 구의 방정식은

$(x-2)^2+(y-5)^2+(z+1)^2=25$

y축 위의 점은 x좌표와 z좌표가 모두 0이므로 위의 식에 $x=0,\ z=0$을 대입하면

$(-2)^2+(y-5)^2+1^2=25,\qquad (y-5)^2=20$

$y-5=\pm 2\sqrt{5}\qquad \therefore y=5\pm 2\sqrt{5}$

따라서 두 점 A, B의 좌표는 $(0,\ 5+2\sqrt{5},\ 0)$, $(0,\ 5-2\sqrt{5},\ 0)$이므로

$\overline{AB}=5+2\sqrt{5}-(5-2\sqrt{5})=4\sqrt{5}$

답 $4\sqrt{5}$

389 두 구 C_1, C_2의 xy평면 위로의 정사영의 방정식은 각각

$(x-a-1)^2+y^2=25,\ (x-1)^2+(y-2)^2=16$

이 두 원의 중심의 좌표가 각각 $(a+1,\ 0,\ 0)$, $(1,\ 2,\ 0)$이므로 두 원의 중심 사이의 거리는

$\sqrt{a^2+4}$

두 원이 외접하려면 두 원의 반지름의 길이의 합이 중심 사이의 거리와 같아야 하므로

$\sqrt{a^2+4}=5+4,\quad a^2+4=81$

$\therefore a^2=77$

또 구 C_2의 yz평면 위로의 정사영의 방정식은

$(y-2)^2+(z-b)^2=16$

이 원이 y축과 접하므로

$|b|=4 \quad \therefore b^2=16$

$\therefore a^2+b^2=93$ 답 ③

일품 BOX

yz평면 위에 있는 원이 y축에 접하면 반지름의 길이는 |(중심의 z좌표)|와 같다.

390 $x^2+y^2+z^2-4x-8y-4z+8=0$에서

$(x-2)^2+(y-4)^2+(z-2)^2=16$

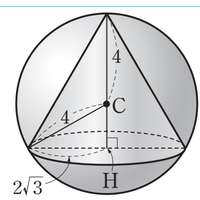
이므로 주어진 구의 중심의 좌표는 (2, 4, 2)이고 반지름의 길이는 4이다.

원뿔의 밑면이 xy평면 위에 있으므로 밑면인 원의 방정식은

$(x-2)^2+(y-4)^2=12$

xy평면 위의 점은 z좌표가 0이므로 주어진 구의 방정식에 $z=0$을 대입한다.

즉 주어진 구의 중심을 C, 점 C에서 xy평면에 내린 수선의 발을 H라 하면 오른쪽 그림에서



$\overline{\mathrm{CH}}=\sqrt{4^2-(2\sqrt{3})^2}=2$

따라서 구하는 원뿔의 부피는

$\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot(2\sqrt{3})^2\cdot 6=24\pi$ 답 ④

391 문제 이해 구의 중심의 좌표를 $(3,\ 4,\ a)$라 하면 구의 방정식은

$(x-3)^2+(y-4)^2+(z-a)^2=100$ ● 30%

해결 과정 xy평면 위의 점은 z좌표가 0이므로 위의 식에 $z=0$을 대입하면

$(x-3)^2+(y-4)^2=100-a^2$

이 식이 $(x-3)^2+(y-4)^2=25$와 같으므로

$100-a^2=25,\quad a^2=75$

$\therefore a=\pm 5\sqrt{3}$

따라서 주어진 구의 방정식은

$(x-3)^2+(y-4)^2+(z\pm 5\sqrt{3})^2=100$ ● 40%

답 구하기 yz평면 위의 점은 x좌표가 0이므로 위의 식에 $x=0$을 대입하면 구하는 교선의 방정식은

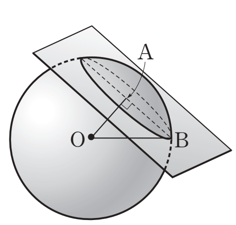
$(y-4)^2+(z+5\sqrt{3})^2=91$

또는 $(y-4)^2+(z-5\sqrt{3})^2=91$ ● 30%

답 $(y-4)^2+(z+5\sqrt{3})^2=91$ 또는 $(y-4)^2+(z-5\sqrt{3})^2=91$

392 $1^2+2^2+3^2=14<25$

이므로 오른쪽 그림과 같이 점 A는 구 $x^2+y^2+z^2=25$의 내부에 있다.



즉 구와 평면의 교선 위의 한 점을 B라 하면 구와 평면이 만나서 생기는 도형은 반지름이 $\overline{\mathrm{AB}}$인 원이다.

이때 $\overline{\mathrm{OA}}=\sqrt{1^2+2^2+3^2}=\sqrt{14}$, $\overline{\mathrm{OB}}=5$이므로

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{5^2-(\sqrt{14})^2}=\sqrt{11}$

따라서 구하는 도형의 넓이는

$\pi\cdot(\sqrt{11})^2=11\pi$ 답 ①

393 집합 A가 나타내는 도형은 중심의 좌표가 (0, 0, 0)이고 반지름의 길이가 3인 구이고, 집합 B가 나타내는 도형은 중심의 좌표가 $(a,\ b,\ c)$이고 반지름의 길이가 2인 구이므로 두 구의 중심 사이의 거리는

$\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

이때 $A\cap B\neq\varnothing$에서 두 구가 만나야 하므로

$3-2\le\sqrt{a^2+b^2+c^2}\le 3+2$

$\therefore 1\le a^2+b^2+c^2\le 25$

따라서 점 $(a,\ b,\ c)$의 자취는 중심의 좌표가 (0, 0, 0)이고 반지름의 길이가 1인 구와 중심의 좌표가 (0, 0, 0)이고 반지름의 길이가 5인 구의 사이 및 각각의 구의 구면이므로 구하는 도형의 부피는

$\frac{4}{3}\pi\cdot 5^3-\frac{4}{3}\pi\cdot 1^3=\frac{496}{3}\pi$ 답 ①

394 문제 이해 주어진 두 구의 교선을 포함하는 구의 방정식은

$(x^2+y^2+z^2-2x-6y-4z-22)$

$+k(x^2+y^2+z^2+2x+4y+6z-11)=0\ (k\neq -1)$

$\cdots\cdots$ ㉠ ● 40%

해결 과정 이 구가 원점을 지나므로 $x=0,\ y=0,\ z=0$을 ㉠에 대입하면

$-22-11k=0 \quad \therefore k=-2$ ● 30%

$k=-2$를 ㉠에 대입하면

$x^2+y^2+z^2+6x+14y+16z=0$

$\therefore (x+3)^2+(y+7)^2+(z+8)^2=122$ ● 20%

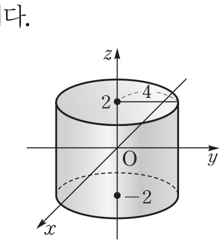
답 구하기 따라서 구하는 구의 반지름의 길이는 $\sqrt{122}$이다. ● 10%

답 $\sqrt{122}$

395 $\triangle$OPQ에서 $\overline{\mathrm{OP}}$를 밑변으로 하면 높이는 z축과 점 Q 사이의 거리이고 $\overline{\mathrm{OP}}=2$이므로 $\triangle\mathrm{OPQ}=4$에서 z축과 점 Q 사이의 거리는 4이다.

따라서 점 Q가 나타내는 도형의 방정식은

$x^2+y^2=16,\ -2\le z\le 2$



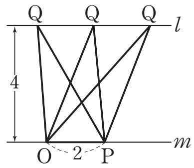
이므로 점 Q가 나타내는 도형은 오른쪽 그림과 같이 밑면의 반지름의 길이가 4이고 중심의 좌표가 각각 (0, 0, −2), (0, 0, 2), 높이가 4인 원기둥의 옆면이다.

따라서 구하는 도형의 넓이는

$2\pi\cdot 4\cdot 4=32\pi$ 답 ⑤

(원기둥의 옆넓이)
=(밑면의 둘레의 길이)
×(원기둥의 높이)

참고 오른쪽 그림과 같이 평행한 두 직선 l, m에 대하여 직선 l 위의 임의의 한 점 Q와 직선 m 사이의 거리가 일정함을 이용하면 점 Q는 z축에 평행하고 z축으로부터의 거리가 4인 직선 위에 있음을 알 수 있다.



1등급 비밀노트

좌표공간에서 점 $P(x,\ y,\ z)$가 다음과 같을 때, 점 P의 자취는

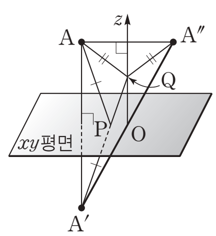
① $x^2+y^2+z^2=r^2\ (r>0)$
➡ 반지름의 길이가 r인 구

② $x^2+y^2=r^2\ (r>0)$, $a\le z\le b\ (a<b)$
$y^2+z^2=r^2\ (r>0)$, $a\le x\le b\ (a<b)$
$x^2+z^2=r^2\ (r>0)$, $a\le y\le b\ (a<b)$
➡ 밑면의 반지름의 길이가 r이고, 높이가 $b-a$인 원기둥의 옆면

396 점 A와 xy평면에 대하여 대칭인 점을 A′이라 하면 $A'(1,\ -2,\ -3)$

점 A와 z축에 대하여 대칭인 점을 A″이라 하면

$A''(-1,\ 2,\ 3)$



이때 $\overline{AP}=\overline{A'P}$, $\overline{QA}=\overline{QA''}$이므로

$\overline{AP}+\overline{PQ}+\overline{QA}$
$=\overline{A'P}+\overline{PQ}+\overline{QA''}$
$\ge\overline{A'A''}$
$=\sqrt{(-1-1)^2+(2+2)^2+(3+3)^2}$
$=2\sqrt{14}$

$\therefore a=2\sqrt{14}$

이때 등호는 $\overline{PQ}=0$일 때 성립하므로

$b=0$

$\therefore a+b=2\sqrt{14}$ 답 ②

참고 $A'(1,\ -2,\ -3)$, $A''(-1,\ 2,\ 3)$이므로 두 점 A′, A″은 원점에 대하여 대칭이다.
따라서 $\overline{AP}+\overline{PQ}+\overline{QA}$의 길이가 최소일 때, 두 점 P, Q는 원점과 일치한다.

397 평면 α를 xy평면이라 하면 세 점 A, B, C를 각각

$A(x_1,\ y_1,\ 3)$, $B(x_2,\ y_2,\ 4)$, $C(x_3,\ y_3,\ 5)$

라 할 수 있다.

이때 △ABC의 무게중심 G와 xy평면 사이의 거리 l은 무게중심 G의 z좌표의 절댓값과 같으므로

$$l=\frac{3+4+5}{3}=4$$

$\therefore 10l=10\cdot4=40$ 답 40

참고 평면 α를 yz평면이라 하면 세 점 A, B, C를 각각
$A(3,\ y_1,\ z_1)$, $B(4,\ y_2,\ z_2)$, $C(5,\ y_3,\ z_3)$
이라 하고 같은 방법으로 풀 수 있다.

398 $P(2\sin\alpha\cos\beta,\ 2\cos\alpha\cos\beta,\ 2\sin\beta)$에서

$x=2\sin\alpha\cos\beta$, $y=2\cos\alpha\cos\beta$, $z=2\sin\beta$

라 하면

$x^2+y^2+z^2$
$=4\sin^2\alpha\cos^2\beta+4\cos^2\alpha\cos^2\beta+4\sin^2\beta$
$=4\cos^2\beta(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)+4\sin^2\beta$
$=4\cos^2\beta+4\sin^2\beta$
$=4(\sin^2\beta+\cos^2\beta)=4$

$\therefore x^2+y^2+z^2=4$ …… ㉠

즉 점 P의 자취는 중심이 원점이고 반지름의 길이가 2인 구이다.

이때 yz평면 위의 점은 x좌표가 0이므로 $x=0$을 ㉠에 대입하면

$y^2+z^2=4$

따라서 구하는 도형의 넓이는

$\pi\cdot2^2=4\pi$

이므로 $a=4$ 답 4

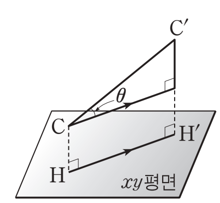
399 xy평면, yz평면, zx평면에 모두 접하고 중심의 좌표가 모두 양수인 두 구의 반지름의 길이를 각각 r, $r'\ (r>r')$이라 하면 두 구의 중심의 좌표를 각각 $C(r,\ r,\ r)$, $C'(r',\ r',\ r')$으로 놓을 수 있다.

$\therefore \overline{CC'}=\sqrt{(r-r')^2+(r-r')^2+(r-r')^2}$
$=\sqrt{3}(r-r')\ (\because r>r')$

이때 두 구의 중심 C, C′의 xy평면 위로의 정사영을 각각 H, H′이라 하면

$H(r,\ r,\ 0)$, $H'(r',\ r',\ 0)$

이므로



$\overline{HH'}$
$=\sqrt{(r-r')^2+(r-r')^2}$
$=\sqrt{2}(r-r')$

따라서 $\overline{HH'}=\overline{CC'}\cos\theta$이므로

$\sqrt{2}(r-r')=\sqrt{3}(r-r')\cos\theta$

$\therefore \cos\theta=\frac{\sqrt{6}}{3}$

$\therefore \sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 답 ③

일품 BOX

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$에서
$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}$
$\left(0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right)$

1등급 비밀노트

좌표공간에서 두 선분이 이루는 각의 크기를 구할 때, 두 선분이 만나지 않으면 한 선분을 평행이동하여 두 선분의 한쪽 끝 점이 일치하도록 만든다.

400 yz평면 위의 점은 x좌표가 0이므로 주어진 구의 방정식에 $x=0$을 대입하면

$y^2+z^2-2y-6z+6=0$

$\therefore (y-1)^2+(z-3)^2=4$

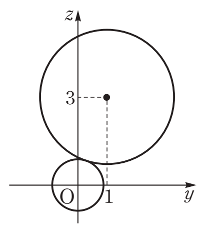
이 원이 점 $(0,\ a,\ b)$를 지나므로

$(a-1)^2+(b-3)^2=4$ …… ㉠

이때

$a^2+b^2=k\ (k>0)$ …… ㉡

로 놓으면 점 $(0,\ a,\ b)$는 yz평면에서 중심의 좌표가 $(0,\ 0,\ 0)$이고 반지름의 길이가 $\sqrt{k}$인 원 위의 점이므로 두 원 ㉠, ㉡이 오른쪽 그림과 같이 외접할 때 k의 값이 최소이다.



즉 $\sqrt{k}+2=\sqrt{1^2+3^2}$이므로

$\sqrt{k}=\sqrt{10}-2$

$\therefore k=14-4\sqrt{10}$

답 ④

1등급 비밀노트

최대·최소를 구하는 문제에서

① x^2+y^2의 최대·최소 ➡ $x^2+y^2=k\,(k>0)$로 놓고 중심이 원점인 원의 크기가 가장 클 때와 가장 작을 때를 찾는다.

② $x+y$의 최대·최소 ➡ $x+y=k$로 놓으면 $y=-x+k$이므로 기울기가 -1인 직선의 y절편이 가장 클 때와 가장 작을 때를 찾는다.

401 구가 x축, y축, z축에 동시에 접하면 구의 중심에서 x축, y축, z축에 이르는 거리가 모두 같다.

구의 중심의 좌표를 $(a,\ a,\ a)(a>0)$라 하면 구의 중심에서 x축에 내린 수선의 발의 좌표가 $(a,\ 0,\ 0)$이므로 구의 반지름의 길이는

$\sqrt{a^2+a^2}=\sqrt{2}a\ (\because a>0)$

즉 구의 방정식은

$(x-a)^2+(y-a)^2+(z-a)^2=2a^2$

xy평면 위의 점은 z좌표가 0이므로 위의 식에 $z=0$을 대입하면

$(x-a)^2+(y-a)^2=a^2$

이 원의 넓이가 9π이므로

$\pi a^2=9\pi,\quad a^2=9\quad \therefore a=3\ (\because a>0)$

따라서 구의 반지름의 길이 r는 $3\sqrt{2}$이므로

$r^2=(3\sqrt{2})^2=18$

답 18

1등급 비밀노트

구의 중심의 좌표가 $(a,\ b,\ c)$이고

① x축에 접할 때 ➡ $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=b^2+c^2$

② y축에 접할 때 ➡ $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=a^2+c^2$

③ z축에 접할 때 ➡ $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=a^2+b^2$

08 공간벡터

본책 77쪽

일품 BOX

벡터 $\overrightarrow{AB}$의 크기는 $\overline{AB}$의 길이와 같다.

402 ㄱ. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CH}-\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}-\overrightarrow{AF}$

$=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{FE}$

$\therefore |\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CH}-\overrightarrow{AF}|=|\overrightarrow{FE}|=1$

ㄴ. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{EH}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{FG}$

$=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FG}=\overrightarrow{AG}$

$\therefore |\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{EH}|=|\overrightarrow{AG}|$

$=\sqrt{1^2+1^2+1^2}=\sqrt{3}$

ㄷ. △AFH에서 $\overline{FH}$의 중점을 M이라 하면 직각삼각형 AFM에서 $\overline{AF}=\sqrt{2}$, $\overline{MF}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$이므로

△AFM은 ∠AMF$=90°$인 직각삼각형이다.

$\overline{AM}=\sqrt{\overline{AF}^2-\overline{MF}^2}$

$=\sqrt{(\sqrt{2})^2-\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

$\therefore |\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{AH}|=2|\overrightarrow{AM}|=\sqrt{6}$

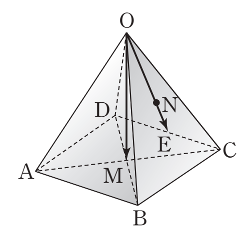
이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ④

403 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=2\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}=2\overrightarrow{OM}$이므로

$\overrightarrow{OM}=\dfrac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}}{4}$

오른쪽 그림과 같이 모서리 CD의 중점을 E라 하면



두 점 P, Q의 위치벡터를 각각 $\vec{p}$, $\vec{q}$라 할 때, $\overline{PQ}$의 중점의 위치벡터는 $\dfrac{\vec{p}+\vec{q}}{2}$

$\overrightarrow{OE}=\dfrac{\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}}{2}$,

$\overrightarrow{ON}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{OE}$

이므로

$\overrightarrow{ON}=\dfrac{\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}}{3}$

$\therefore \overrightarrow{MN}=\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM}$

$=\dfrac{\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}}{3}-\dfrac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}}{4}$

$=\dfrac{\vec{c}+\vec{d}}{3}-\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{4}$

$=\dfrac{-3\vec{a}-3\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{12}$

답 ④

404 점 P가 평면 ABC 위에 있으므로

$\overrightarrow{AP}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AC}\,(m,\ n$은 실수$)$

로 놓으면

$\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=m(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})+n(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})$

$(1,\ -1,\ a)=m(-1,\ -1,\ 4)+n(-2,\ 0,\ -3)$

$(1,\ -1,\ a)=(-m-2n,\ -m,\ 4m-3n)$

따라서 $-m-2n=1$, $-m=-1$, $4m-3n=a$이므로

$m=1,\ n=-1,\ a=7$

답 7

1등급 비밀노트

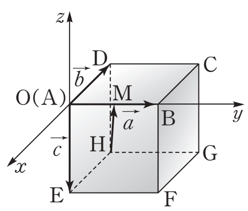
점 P가 평면 ABC 위에 있으면 네 점 A, B, C, P가 한 평면 위에 있으므로 $\overrightarrow{AP}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AC}\,(m,\ n$은 실수$)$로 나타낼 수 있다.

405 $\vec{a}+\vec{b}=(3,\ -t+1,\ 2)+(0,\ 1,\ 3t+2)$
$=(3,\ -t+2,\ 3t+4)$

$\therefore |\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{3^2+(-t+2)^2+(3t+4)^2}$
$=\sqrt{10t^2+20t+29}$
$=\sqrt{10(t+1)^2+19}$

따라서 벡터 $\vec{a}+\vec{b}$의 크기는 $t=-1$일 때 최솟값 $\sqrt{19}$를 갖는다. 답 -1

406 오른쪽 그림과 같이 꼭짓점 A가 원점, 모서리 AD가 x축의 음의 방향, 모서리 AB가 y축의 양의 방향, 모서리 AE가 z축의 음의 방향과 일치하도록 정육면체를 좌표공간에 놓고 정육면체의 한 모서리의 길이를 t라 하면



$\vec{a}=(0,\ t,\ 0),\ \vec{b}=(-t,\ 0,\ 0),\ \vec{c}=(0,\ 0,\ -t)$

이때 $\overrightarrow{AH}=(-t,\ 0,\ -t)$, $\overrightarrow{AM}=\left(0,\ \frac{t}{2},\ 0\right)$이므로

$\overrightarrow{HM}=\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AH}$
$=\left(0,\ \frac{t}{2},\ 0\right)-(-t,\ 0,\ -t)$
$=\left(t,\ \frac{t}{2},\ t\right)$

$\overrightarrow{HM}=x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}$에서

$\left(t,\ \frac{t}{2},\ t\right)=x(0,\ t,\ 0)+y(-t,\ 0,\ 0)+z(0,\ 0,\ -t)$
$=(-ty,\ tx,\ -tz)$

따라서 $t=-ty,\ \frac{t}{2}=tx,\ t=-tz$이므로

$x=\frac{1}{2},\ y=-1,\ z=-1$

$\therefore x+y+z=-\frac{3}{2}$ 답 ①

다른 풀이 $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\vec{a},\ \overrightarrow{AH}=\vec{b}+\vec{c}$이므로

$\overrightarrow{HM}=\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AH}$
$=\frac{1}{2}\vec{a}-(\vec{b}+\vec{c})=\frac{1}{2}\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}$

따라서 $x=\frac{1}{2},\ y=-1,\ z=-1$이므로

$x+y+z=-\frac{3}{2}$

407 두 벡터 $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{AG}$가 이루는 각의 크기를 θ라 하면 직각삼각형 AEG에서 $|\overrightarrow{AE}|=|\overrightarrow{AG}|\cos\theta$이므로

$a=\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AG}=|\overrightarrow{AE}||\overrightarrow{AG}|\cos\theta=|\overrightarrow{AE}|^2=1$

두 벡터 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CF}$가 이루는 각의 크기는 90°이므로

일품 BOX $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{DE}$이므로 두 벡터 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CF}$가 이루는 각의 크기는 두 벡터 $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{DE}$가 이루는 각의 크기와 같다.

$b=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CF}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{CF}|\cos 90^\circ$
$=1\times\sqrt{2}\times 0=0$

$\angle ACF=60^\circ$에서 두 벡터 $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CF}$가 이루는 각의 크기는 120°이므로

일품 BOX △AFC는 정삼각형이므로 $\angle ACF=60^\circ$

$c=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CF}=|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{CF}|\cos 120^\circ$
$=\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$

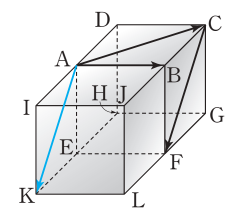
일품 BOX $|\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{CF}|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$

$\therefore a+2b+3c=1+2\times 0+3\times(-1)=-2$

답 ①

1등급 비밀노트

시점이 서로 다른 두 벡터가 이루는 각의 크기를 구할 때에는 한 벡터를 평행이동하여 시점을 일치시킨다.
즉 오른쪽 그림에서 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CF}$가 이루는 각의 크기는 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AK}$가 이루는 각의 크기와 같고, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CF}$가 이루는 각의 크기는 $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AK}$가 이루는 각의 크기와 같다.

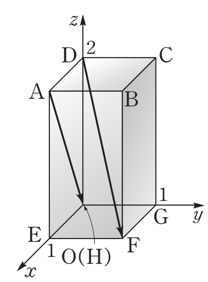


408 $|\vec{a}+\vec{b}|^2=(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})$
$=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$
$=3^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+4^2$
$=25+2\vec{a}\cdot\vec{b}$

즉 $49=25+2\vec{a}\cdot\vec{b}$이므로 $\vec{a}\cdot\vec{b}=12$

$\therefore (2\vec{a}-\vec{b})\cdot(3\vec{a}+\vec{b})=6|\vec{a}|^2-\vec{a}\cdot\vec{b}-|\vec{b}|^2$
$=6\times 3^2-12-4^2$
$=26$ 답 ④

409 오른쪽 그림과 같이 꼭짓점 H가 원점, 모서리 HE, HG, HD가 각각 x축, y축, z축의 양의 방향과 일치하도록 직육면체를 좌표공간에 놓으면



A$(1,\ 0,\ 2)$,
D$(0,\ 0,\ 2)$,
F$(1,\ 1,\ 0)$

이므로

$\overrightarrow{AH}=(-1,\ 0,\ -2)$, $\overrightarrow{DF}=(1,\ 1,\ -2)$

$\therefore \overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{DF}=(-1,\ 0,\ -2)\cdot(1,\ 1,\ -2)$
$=-1\times 1+0\times 1+(-2)\times(-2)$
$=3$ 답 3

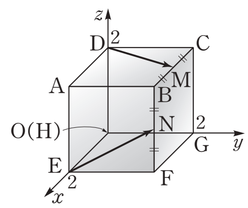
410 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 서로 수직이므로 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$에서

$(-2,\ x,\ 4)\cdot(2,\ x,\ 2-x)=0$
$-4+x^2+8-4x=0,\quad x^2-4x+4=0$
$(x-2)^2=0\quad \therefore x=2$

따라서 $\vec{b}=(2,\ 2,\ 0)$, $\vec{c}=(4,\ 0,\ -4)$이므로

$\cos\theta=\frac{\vec{b}\cdot\vec{c}}{|\vec{b}||\vec{c}|}$
$=\frac{2\times 4+2\times 0+0\times(-4)}{\sqrt{2^2+2^2+0^2}\sqrt{4^2+0^2+(-4)^2}}$
$=\frac{8}{2\sqrt{2}\times 4\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$ 답 ②

411 오른쪽 그림과 같이 꼭짓점 H가 원점, 모서리 HE, HG, HD가 각각 x축, y축, z축의 양의 방향과 일치하도록 정육면체를 좌표공간에 놓으면



$D(0,\ 0,\ 2)$, $E(2,\ 0,\ 0)$,
$M(1,\ 2,\ 2)$, $N(2,\ 2,\ 1)$

이므로

$\overrightarrow{DM}=(1,\ 2,\ 0)$, $\overrightarrow{EN}=(0,\ 2,\ 1)$

$$\therefore \cos\theta=\frac{\overrightarrow{DM}\cdot\overrightarrow{EN}}{|\overrightarrow{DM}||\overrightarrow{EN}|}$$
$$=\frac{1\times0+2\times2+0\times1}{\sqrt{1^2+2^2+0^2}\sqrt{0^2+2^2+1^2}}$$
$$=\frac{4}{\sqrt{5}\sqrt{5}}=\frac{4}{5}$$

답 $\frac{4}{5}$

412 $\vec{a}\perp\vec{p}$, $\vec{b}\perp\vec{p}$이므로 $\vec{p}=(x,\ y,\ z)$라 하면

$\vec{a}\cdot\vec{p}=0$에서

$(2,\ -1,\ -1)\cdot(x,\ y,\ z)=0$

$\therefore 2x-y-z=0$ …… ㉠

$\vec{b}\cdot\vec{p}=0$에서

$(1,\ -3,\ 2)\cdot(x,\ y,\ z)=0$

$\therefore x-3y+2z=0$ …… ㉡

㉠$\times2+$㉡을 하면 $5x-5y=0$ $\therefore y=x$

이것을 ㉠에 대입하면 $2x-x-z=0$ $\therefore z=x$

따라서 $\vec{p}=(x,\ x,\ x)$이고 $|\vec{p}|=9$이므로

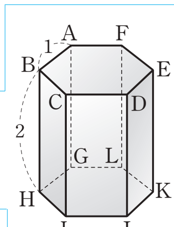
$\sqrt{x^2+x^2+x^2}=9$, $3x^2=81$

$x^2=27$ $\therefore x=\pm3\sqrt{3}$

$\therefore \vec{p}=(3\sqrt{3},\ 3\sqrt{3},\ 3\sqrt{3})$ 또는
$\vec{p}=(-3\sqrt{3},\ -3\sqrt{3},\ -3\sqrt{3})$

답 $\vec{p}=(3\sqrt{3},\ 3\sqrt{3},\ 3\sqrt{3})$, $\vec{p}=(-3\sqrt{3},\ -3\sqrt{3},\ -3\sqrt{3})$

413 오른쪽 그림에서 가로, 세로의 길이가 각각 $\sqrt{3}$, 2인 직사각형 AGIC, BHJD, CIKE의 대각선을 나타내는 벡터의 크기가 $\sqrt{7}$이므로



$a=3\times2\times2=12$

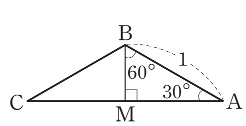
또 한 변의 길이가 2인 정사각형 AGJD, BHKE, CILF의 대각선을 나타내는 벡터의 크기가 $2\sqrt{2}$이므로

$b=3\times2\times2=12$

$\therefore a+b=24$

답 ⑤

참고 오른쪽 그림과 같이 점 B에서 $\overline{AC}$에 내린 수선의 발을 M이라 하면



$\overline{AM}=\overline{AB}\cos30°=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore \overline{AC}=2\overline{AM}=\sqrt{3}$

일품 BOX

면 ABC와 면 FDE는 합동이고 서로 평행하므로
$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{NF}$

시점이 같지 않아도 크기와 방향이 같은 두 벡터는 서로 같으므로 두 직사각형
AGIC와 FLJD,
BHJD와 AGKE,
CIKE와 BHLF
에서 구한 벡터는 서로 같다.

한 직사각형에는 2개의 대각선이 있고, $\overrightarrow{AI}$, $\overrightarrow{IA}$와 같이 한 대각선에서 서로 다른 벡터는 2개씩 있다.

414 ㄱ. □ABFD와 □BCDE는 합동인 정사각형이므로

$|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}|=|\overrightarrow{AF}|=|\overrightarrow{BD}|$

ㄴ. $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{FD}-\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{FD}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{FD}+\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{FE}=-\overrightarrow{AC}$

$\therefore \overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DE}\neq\overrightarrow{FD}-\overrightarrow{BC}$

ㄷ. $\overline{BC}$의 중점을 M, $\overline{DE}$의 중점을 N이라 하면

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AM}$,

$\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{EF}=-(\overrightarrow{FD}+\overrightarrow{FE})$
$=-2\overrightarrow{FN}=2\overrightarrow{NF}$

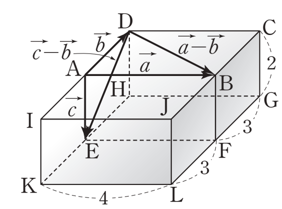
$\therefore \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{EF}$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ④

다른풀이 ㄷ. $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DF}$, $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{EF}$이므로
$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{EF}$

415 오른쪽 그림과 같이 주어진 직육면체와 합동인 직육면체를 이어 붙이면



$|\vec{a}-2\vec{b}+\vec{c}|$
$=|(\vec{a}-\vec{b})+(\vec{c}-\vec{b})|$
$=|\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DE}|=|\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BL}|$
$=|\overrightarrow{DL}|=\sqrt{4^2+(3+3)^2+2^2}$
$=2\sqrt{14}$

답 $2\sqrt{14}$

416 $\overrightarrow{OP}=m(3\overrightarrow{OA})+n(4\overrightarrow{OB})$이므로 점 P는 두 벡터 $3\overrightarrow{OA}$, $4\overrightarrow{OB}$의 종점을 연결한 선분 위를 움직인다.

따라서 점 P가 나타내는 도형의 길이는

$|4\overrightarrow{OB}-3\overrightarrow{OA}|=|(8,\ -4,\ 4)-(3,\ -9,\ 9)|$
$=|(5,\ 5,\ -5)|$
$=\sqrt{5^2+5^2+(-5)^2}$
$=5\sqrt{3}$

답 ⑤

1등급 비밀노트

$\overrightarrow{OP}=m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}$를 만족시키는 점 P의 자취는

① $m+n=1$ ➡ 직선 AB
② $m\geq0$, $n\geq0$, $m+n=1$ ➡ 선분 AB
③ $m\geq0$, $n\geq0$, $m+n\leq1$ ➡ △OAB의 내부와 그 둘레
④ $0\leq m\leq1$, $0\leq n\leq1$ ➡ 두 선분 OA, OB를 이웃하는 두 변으로 하는 평행사변형의 내부와 그 둘레

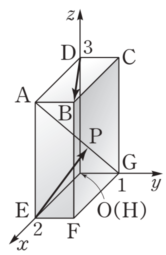
417 $\overrightarrow{AG}=\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}}{3}$이므로

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{AG}$
$=3(1-3,\ 2-4,\ 2+2)$
$=(-6,\ -6,\ 12)$

$\therefore |\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}|=\sqrt{(-6)^2+(-6)^2+12^2}$
$=6\sqrt{6}$

답 $6\sqrt{6}$

418 오른쪽 그림과 같이 꼭짓점 H가 원점, 모서리 HE, HG, HD가 각각 x축, y축, z축의 양의 방향과 일치하도록 직육면체를 좌표공간에 놓으면



$A(2,\ 0,\ 3)$, $B(2,\ 1,\ 3)$,
$D(0,\ 0,\ 3)$, $E(2,\ 0,\ 0)$,
$G(0,\ 1,\ 0)$

이므로

$\overrightarrow{EA}=(0,\ 0,\ 3)$, $\overrightarrow{EG}=(-2,\ 1,\ 0)$,
$\overrightarrow{DB}=(2,\ 1,\ 0)$

$\overrightarrow{EP}=(1-t)\overrightarrow{EA}+t\overrightarrow{EG}\ (0\le t\le 1)$라 하면

$\overrightarrow{EP}=(1-t)(0,\ 0,\ 3)+t(-2,\ 1,\ 0)$
$=(-2t,\ t,\ 3-3t)$

$\therefore \overrightarrow{EP}+\overrightarrow{DB}=(-2t,\ t,\ 3-3t)+(2,\ 1,\ 0)$
$=(-2t+2,\ t+1,\ 3-3t)$

$\therefore |\overrightarrow{EP}+\overrightarrow{DB}|$
$=\sqrt{(-2t+2)^2+(t+1)^2+(3-3t)^2}$
$=\sqrt{14t^2-24t+14}$
$=\sqrt{14\left(t-\frac{6}{7}\right)^2+\frac{26}{7}}$

따라서 $|\overrightarrow{EP}+\overrightarrow{DB}|$는 $t=\frac{6}{7}$일 때 최솟값 $\sqrt{\frac{26}{7}}$, 즉 $\frac{\sqrt{182}}{7}$를 갖는다.

답 $\frac{\sqrt{182}}{7}$

419 문제 이해 세 점 O, A, P가 한 직선 위에 있으므로 $\overrightarrow{OP}=k\overrightarrow{OA}\ (k\ne 0)$라 하면

$\overrightarrow{OP}=(k,\ -2k,\ 0)$ ● 30%

해결 과정 $\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OP}$
$=(-1,\ 1,\ -1)-(k,\ -2k,\ 0)$
$=(-1-k,\ 1+2k,\ -1)$

$\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OP}$
$=(4,\ 3,\ 1)-(k,\ -2k,\ 0)$
$=(4-k,\ 3+2k,\ 1)$

$\therefore \overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}$
$=(-1-k,\ 1+2k,\ -1)\cdot(4-k,\ 3+2k,\ 1)$
$=(-1-k)(4-k)+(1+2k)(3+2k)+(-1)\times 1$
$=5k^2+5k-2$
$=5\left(k+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{13}{4}$ ● 40%

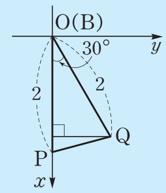
답 구하기 따라서 $\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}$는 $k=-\frac{1}{2}$일 때 최솟값 $-\frac{13}{4}$을 갖고, 이때의 점 P의 좌표는 $\left(-\frac{1}{2},\ 1,\ 0\right)$이므로

$a=-\frac{1}{2}$, $b=1$, $c=0$

$\therefore 10a+20b+30c=-5+20=15$ ● 30%

답 15

일품 BOX



점 Q의 x좌표는
$2\cos 30°=\sqrt{3}$
점 Q의 y좌표는
$2\sin 30°=1$

점 P는 $\overline{AG}$ 위를 움직이는 점이므로
$\overrightarrow{EP}$
$=(1-t)\overrightarrow{EA}+t\overrightarrow{EG}$
$(0\le t\le 1)$
와 같이 나타낼 수 있다.

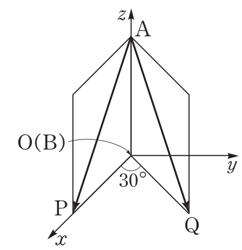
$\overline{AB}\perp\overline{AD}$, $\overline{AD}\perp\overline{AE}$, $\overline{AE}\perp\overline{AB}$

$|\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{AF}|$에서
$\overline{AD}=\overline{AE}$
$|\overrightarrow{AF}|=|\overrightarrow{CF}|$에서
$\overline{AB}=\overline{AD}$

세 점 O, A, P가 한 직선 위에 있다.
$\Longleftrightarrow \overrightarrow{OA}\,/\!/\,\overrightarrow{OP}$
$\Longleftrightarrow \overrightarrow{OP}=k\overrightarrow{OA}$
(단, $k\ne 0$)

점 Q는 $\overline{BC}$를 $2:1$로 내분하는 점이므로
$\overrightarrow{OQ}$
$=\frac{2\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OB}}{2+1}$
$=\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OC}$

420 오른쪽 그림과 같이 점 B가 원점, $\overline{BP}$, $\overline{BA}$가 각각 x축, z축의 양의 방향과 일치하도록 접은 종이를 좌표공간에 놓으면



$A(0,\ 0,\ 2)$,
$P(2,\ 0,\ 0)$,
$Q(\sqrt{3},\ 1,\ 0)$

이므로 $\overrightarrow{AP}=(2,\ 0,\ -2)$, $\overrightarrow{AQ}=(\sqrt{3},\ 1,\ -2)$

$\therefore \overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}=(2,\ 0,\ -2)\cdot(\sqrt{3},\ 1,\ -2)$
$=2\times\sqrt{3}+0\times 1+(-2)\times(-2)$
$=4+2\sqrt{3}$

답 ④

421 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AE}=\vec{c}$라 하면

$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=0$

ㄱ. $|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{\overline{AB}^2+\overline{AD}^2}$, $|\overrightarrow{AF}|=\sqrt{\overline{AB}^2+\overline{AE}^2}$,
$|\overrightarrow{CF}|=|\overrightarrow{AH}|=\sqrt{\overline{AD}^2+\overline{AE}^2}$
이때 $|\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{AF}|=|\overrightarrow{CF}|$이면
$\overline{AB}=\overline{AD}=\overline{AE}$
따라서 주어진 직육면체는 정육면체이다.

ㄴ. $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{EB}=(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot(\vec{a}-\vec{c})$
$=\vec{a}\cdot\vec{a}-\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{a}-\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}-\vec{c}\cdot\vec{c}$
$=|\vec{a}|^2-|\vec{c}|^2$
이때 $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{EB}=0$이면
$|\vec{a}|^2-|\vec{c}|^2=0 \qquad \therefore |\vec{a}|=|\vec{c}|$
따라서 □AEFB는 정사각형이다.

ㄷ. $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{CE}=(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot(-\vec{a}-\vec{b}+\vec{c})$
$=-\vec{a}\cdot\vec{a}-\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}-\vec{b}\cdot\vec{a}-\vec{b}\cdot\vec{b}$
$+\vec{b}\cdot\vec{c}-\vec{c}\cdot\vec{a}-\vec{c}\cdot\vec{b}+\vec{c}\cdot\vec{c}$
$=-|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2$
이때 $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{CE}=0$이면
$-|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2=0 \qquad \therefore |\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2=|\vec{c}|^2$
따라서 주어진 직육면체는 정육면체가 아니다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ②

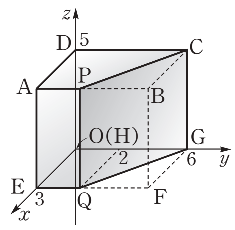
422 $|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|=1$이므로

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}$
$=1\times 1\times\cos 60°=\frac{1}{2}$

$\therefore \overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{MQ}$
$=(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OM})\cdot(\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OM})$
$=\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}\right)$
$=\frac{2}{9}|\overrightarrow{OB}|^2+\frac{4}{9}\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}-\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OA}$
$-\frac{1}{6}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}+\frac{1}{4}|\overrightarrow{OA}|^2$
$=\frac{2}{9}+\frac{2}{9}-\frac{1}{6}-\frac{1}{12}-\frac{1}{6}+\frac{1}{4}=\frac{5}{18}$

답 $\frac{5}{18}$

423 문제 이해 오른쪽 그림과 같이 꼭짓점 H가 원점, 모서리 HE, HG, HD가 각각 x축, y축, z축의 양의 방향과 일치하도록 주어진 도형을 좌표공간에 놓으면



$$\mathrm{D}(0,\ 0,\ 5),\ \mathrm{E}(3,\ 0,\ 0),\ \mathrm{G}(0,\ 6,\ 0)$$

또 직각삼각형 PBC에서 $\overline{\mathrm{PC}}=5$, $\overline{\mathrm{BC}}=3$이므로

$$\overline{\mathrm{PB}}=\sqrt{5^2-3^2}=4$$

$\therefore \mathrm{P}(3,\ 2,\ 5),\ \mathrm{Q}(3,\ 2,\ 0)$ ● 40%

해결 과정 이때

$$\overrightarrow{\mathrm{PG}}=(-3,\ 4,\ -5),\ \overrightarrow{\mathrm{DQ}}=(3,\ 2,\ -5)$$

이므로

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{\mathrm{PG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DQ}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PG}}||\overrightarrow{\mathrm{DQ}}|}$$

$$=\frac{-3\times3+4\times2+(-5)\times(-5)}{\sqrt{(-3)^2+4^2+(-5)^2}\sqrt{3^2+2^2+(-5)^2}}$$

$$=\frac{24}{5\sqrt{2}\times\sqrt{38}}=\frac{12\sqrt{19}}{95}$$ ● 40%

답 구하기 따라서 $a=95$, $b=12$이므로

$a+b=107$ ● 20%

답 107

424 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$가 서로 평행하므로

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=k\overrightarrow{\mathrm{OB}}\ (k\neq0)$$

라 하면

$$(n,\ 2,\ -4)=k(m,\ -1,\ 2)$$

$$n=km,\ 2=-k,\ -4=2k$$

$$\therefore k=-2,\ n=-2m$$

한편

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(m-2,\ -2,\ 8),$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(n-2,\ 1,\ 2)=(-2m-2,\ 1,\ 2)$$

이고 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$가 서로 수직이므로

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0$에서

$$(m-2,\ -2,\ 8)\cdot(-2m-2,\ 1,\ 2)=0$$

$$(m-2)(-2m-2)+(-2)\times1+8\times2=0$$

$$-2m^2+2m+18=0$$

$$\therefore m^2-m-9=0$$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 모든 m의 값의 곱은 -9이므로

$$ac=-9$$

이때 $n=-2m$이므로

$$bd=-2a\times(-2c)=4ac=-36$$

$$\therefore abcd=324$$

답 ④

425 문제 이해 점 H가 선분 OB 위에 있으므로

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=k\overrightarrow{\mathrm{OB}}\ (0\le k\le1)$$

라 하면 $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=(3k,\ 4k,\ 0)$ ● 20%

해결 과정 이때 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{HA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$가 서로 수직이므로

$\overrightarrow{\mathrm{HA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=0$에서

$$(\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OH}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=0$$

$$(5-3k,\ -4k,\ 1)\cdot(3,\ 4,\ 0)=0$$

$$(5-3k)\times3+(-4k)\times4+1\times0=0$$

$$-25k+15=0$$

$\therefore k=\dfrac{3}{5}$ ● 40%

답 구하기 따라서 $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\left(\dfrac{9}{5},\ \dfrac{12}{5},\ 0\right)$이므로

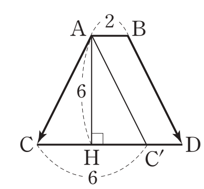
$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{HB}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OH}})$$

$$=(5,\ 0,\ 1)\cdot\left(\frac{6}{5},\ \frac{8}{5},\ 0\right)$$

$$=5\times\frac{6}{5}+0\times\frac{8}{5}+1\times0=6$$ ● 40%

답 6

426 오른쪽 그림과 같이 등변사다리꼴 ACDB에서 점 A를 지나고 $\overline{\mathrm{BD}}$에 평행한 직선이 $\overline{\mathrm{CD}}$와 만나는 점을 C′이라 하고, 점 A에서 $\overline{\mathrm{CD}}$에 내린 수선의 발을 H라 하면



$$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{BD}}|=|\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{AC'}}|=2|\overrightarrow{\mathrm{AH}}|$$

$$=2\times6=12$$

답 12

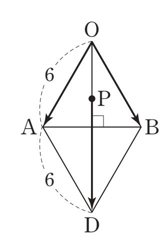
427 $\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}})+\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

$$=(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}})-\overrightarrow{\mathrm{OP}}$$

이때 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}$라 하면

$$\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{PD}}$$

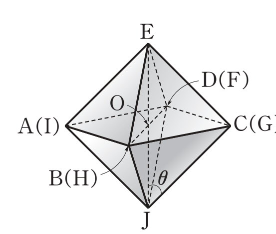
따라서 점 P가 평면 OAB 위에 있을 때 $|\overrightarrow{\mathrm{PD}}|$, 즉 $|\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}|$는 최솟값을 갖고, 이때 점 P는 정삼각형 OAB의 무게중심이므로 $|\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}|$의 최솟값은



$$\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times6+\frac{\sqrt{3}}{2}\times6=4\sqrt{3}$$

답 ④

428 주어진 전개도로 만든 정팔면체는 오른쪽 그림과 같으므로 $\overline{\mathrm{BD}}$와 $\overline{\mathrm{EJ}}$의 교점을 O, $\angle\mathrm{CJO}=\theta$라 하면



$$\overrightarrow{\mathrm{AE}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{JA}}+\overrightarrow{\mathrm{JC}})$$

$$=\overrightarrow{\mathrm{AE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{JE}}=\overrightarrow{\mathrm{JC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{JE}}$$

$$=|\overrightarrow{\mathrm{JC}}||\overrightarrow{\mathrm{JE}}|\cos\theta$$

$$=|\overrightarrow{\mathrm{JC}}|\times2|\overrightarrow{\mathrm{JO}}|\times\frac{|\overrightarrow{\mathrm{JO}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{JC}}|}$$

$$=2|\overrightarrow{\mathrm{JO}}|^2=2\times(2\sqrt{2})^2$$

$$=16$$

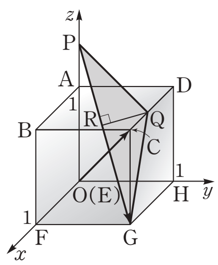
답 ③

일품 BOX

정사면체와 구가 접하는 접점은 정사면체의 각 면의 무게중심과 같다.

직각삼각형 EBJ에서 $\overline{\mathrm{BE}}=\overline{\mathrm{BJ}}=4$이므로 $\overline{\mathrm{JE}}=4\sqrt{2}$ $\therefore \overline{\mathrm{JO}}=2\sqrt{2}$

429 오른쪽 그림과 같이 꼭짓점 E가 원점, 모서리 EF, EH, EA가 각각 x축, y축, z축의 양의 방향과 일치하도록 정육면체를 좌표공간에 놓으면



C$(1,\ 1,\ 1)$, G$(1,\ 1,\ 0)$

P$(0,\ 0,\ k)$라 하면 두 벡터 $\overrightarrow{PG}$, $\overrightarrow{EC}$가 서로 수직이므로 $\overrightarrow{PG}\cdot\overrightarrow{EC}=0$에서

$(1,\ 1,\ -k)\cdot(1,\ 1,\ 1)=0$

$2-k=0 \qquad \therefore k=2$

$\therefore$ P$(0,\ 0,\ 2)$

Q$(t,\ 1,\ 1)\ (0\le t\le 1)$이라 하고 점 Q에서 $\overline{PG}$에 내린 수선의 발을 R라 하면

$\overrightarrow{OR}=(1-s)\overrightarrow{OP}+s\overrightarrow{OG}\ (0\le s\le 1)$

로 놓을 수 있으므로

$\overrightarrow{OR}=(1-s)(0,\ 0,\ 2)+s(1,\ 1,\ 0)$

$=(s,\ s,\ 2-2s)$

두 벡터 $\overrightarrow{PG}$, $\overrightarrow{RQ}$가 서로 수직이므로 $\overrightarrow{PG}\cdot\overrightarrow{RQ}=0$에서

$(1,\ 1,\ -2)\cdot(t-s,\ 1-s,\ 2s-1)=0$

$1\times(t-s)+1\times(1-s)+(-2)\times(2s-1)=0$

$\therefore t=6s-3$

즉 $\overrightarrow{RQ}=(5s-3,\ 1-s,\ 2s-1)$이므로

$|\overrightarrow{RQ}|^2=(5s-3)^2+(1-s)^2+(2s-1)^2$

$=30s^2-36s+11$

$=30\left(s-\dfrac{3}{5}\right)^2+\dfrac{1}{5}\ge\dfrac{1}{5}$

따라서 △PGQ의 넓이의 최솟값은

$\dfrac{1}{2}\times\sqrt{6}\times\dfrac{\sqrt{5}}{5}=\dfrac{\sqrt{30}}{10}$ 답 ②

430 (i) 점 P_1의 좌표를 $(x_1,\ y_1,\ z_1)$이라 하면

$\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{OA}=(x_1+1,\ y_1+2,\ z_1+1)$

이므로 $|\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{OA}|=1$에서

$\sqrt{(x_1+1)^2+(y_1+2)^2+(z_1+1)^2}=1$

$\therefore (x_1+1)^2+(y_1+2)^2+(z_1+1)^2=1$

따라서 점 P_1이 나타내는 도형은 중심의 좌표가 $(-1,\ -2,\ -1)$이고 반지름의 길이가 1인 구이다.

$\therefore r_1=1$

(ii) 점 P_2의 좌표를 $(x_2,\ y_2,\ z_2)$라 하면

$\overrightarrow{P_2A}+\overrightarrow{P_2B}=(1-x_2,\ 2-y_2,\ 1-z_2)$
$\qquad+(1-x_2,\ 2-y_2,\ -1-z_2)$
$=(2-2x_2,\ 4-2y_2,\ -2z_2)$

이므로 $|\overrightarrow{P_2A}+\overrightarrow{P_2B}|=1$에서

$\sqrt{(2-2x_2)^2+(4-2y_2)^2+(-2z_2)^2}=1$

$(2-2x_2)^2+(4-2y_2)^2+(-2z_2)^2=1$

$\therefore (x_2-1)^2+(y_2-2)^2+{z_2}^2=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2$

따라서 점 P_2가 나타내는 도형은 중심의 좌표가 $(1,\ 2,\ 0)$이고 반지름의 길이가 $\dfrac{1}{2}$인 구이다.

$\therefore r_2=\dfrac{1}{2}$

(iii) 점 P_3의 좌표를 $(x_3,\ y_3,\ z_3)$이라 하면

$\overrightarrow{P_3A}\cdot\overrightarrow{P_3B}$
$=(1-x_3,\ 2-y_3,\ 1-z_3)\cdot(1-x_3,\ 2-y_3,\ -1-z_3)$
$=(x_3-1)^2+(y_3-2)^2+{z_3}^2-1$

이므로 $\overrightarrow{P_3A}\cdot\overrightarrow{P_3B}=1$에서

$(x_3-1)^2+(y_3-2)^2+{z_3}^2-1=1$

$\therefore (x_3-1)^2+(y_3-2)^2+{z_3}^2=2$

따라서 점 P_3이 나타내는 도형은 중심의 좌표가 $(1,\ 2,\ 0)$이고 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$인 구이다.

$\therefore r_3=\sqrt{2}$

이상에서 $\quad r_2<r_1<r_3$ 답 ④

1등급 비밀노트

점 P의 자취의 방정식을 구할 때에는 P$(x,\ y,\ z)$로 놓고, 주어진 조건을 이용하여 x, y, z 사이의 관계식을 구한다.

431 세 점 O, A, B를 지나는 평면과 벡터 $\overrightarrow{CX}$가 서로 수직이므로

$\overrightarrow{CX}\perp\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{CX}\perp\overrightarrow{OB}$

$\therefore \overrightarrow{CX}\cdot\overrightarrow{OA}=0,\ \overrightarrow{CX}\cdot\overrightarrow{OB}=0$

$\overrightarrow{CX}=\overrightarrow{OX}-\overrightarrow{OC}=\vec{x}-\vec{c}=p\vec{a}+q\vec{b}-\vec{c}$이므로

$\overrightarrow{CX}\cdot\overrightarrow{OA}=(p\vec{a}+q\vec{b}-\vec{c})\cdot\vec{a}$
$=p|\vec{a}|^2+q\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{a}\cdot\vec{c}=0 \quad \cdots\cdots ㉠$

$\overrightarrow{CX}\cdot\overrightarrow{OB}=(p\vec{a}+q\vec{b}-\vec{c})\cdot\vec{b}$
$=p\vec{a}\cdot\vec{b}+q|\vec{b}|^2-\vec{b}\cdot\vec{c}=0 \quad \cdots\cdots ㉡$

이때

$|\vec{a}|^2=0^2+2^2+(-2)^2=8$,

$|\vec{b}|^2=(-1)^2+1^2+1^2=3$,

$\vec{a}\cdot\vec{b}=(0,\ 2,\ -2)\cdot(-1,\ 1,\ 1)$
$=0\times(-1)+2\times1+(-2)\times1=0$,

$\vec{b}\cdot\vec{c}=(-1,\ 1,\ 1)\cdot(1,\ -1,\ 0)$
$=-1\times1+1\times(-1)+1\times0=-2$,

$\vec{a}\cdot\vec{c}=(0,\ 2,\ -2)\cdot(1,\ -1,\ 0)$
$=0\times1+2\times(-1)+(-2)\times0=-2$

이므로 이것을 ㉠, ㉡에 각각 대입하면

$8p+2=0,\ 3q+2=0$

따라서 $p=-\dfrac{1}{4}$, $q=-\dfrac{2}{3}$이므로

$12(p-q)=12\times\left\{-\dfrac{1}{4}-\left(-\dfrac{2}{3}\right)\right\}=5$ 답 5

일품 BOX

$(1-z_3)(-1-z_3)$
$=(z_3-1)(z_3+1)$
$={z_3}^2-1$

직선이 평면과 수직이면 평면 위의 모든 직선과 수직이다.

△PGQ에서 밑변을 $\overline{PG}$라 하면 높이는 $\overline{RQ}$이다.

$|\overrightarrow{PG}|$
$=\sqrt{1^2+1^2+(-2)^2}$
$=\sqrt{6}$

$|\overrightarrow{QR}|^2\ge\dfrac{1}{5}$에서

$|\overrightarrow{QR}|\ge\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

09 도형의 방정식 본책 82쪽

432 $2t=x$, $4t+1=y$, $-t+1=z$로 놓으면

$$t=\frac{x}{2},\ t=\frac{y-1}{4},\ t=1-z$$

이므로 점 P가 나타내는 도형의 방정식은

$$\frac{x}{2}=\frac{y-1}{4}=1-z$$

$$\therefore \frac{x}{-2}=\frac{y-1}{-4}=z-1$$

따라서 $a=-2$, $b=-4$이므로

$a+b=-6$ 답 -6

433 두 점 $A(2,\ 3,\ -4)$, $B(-1,\ 1,\ a)$를 지나는 직선의 방정식은

$$\frac{x-2}{-1-2}=\frac{y-3}{1-3}=\frac{z+4}{a+4}$$

이 직선이 y축 위의 점 $(0,\ b,\ 0)$을 지나므로

$$\frac{-2}{-3}=\frac{b-3}{-2}=\frac{4}{a+4}$$

$\frac{2}{3}=\frac{b-3}{-2}$에서 $3b-9=-4$ $\therefore b=\frac{5}{3}$

$\frac{2}{3}=\frac{4}{a+4}$에서 $2a+8=12$ $\therefore a=2$

$\therefore a+b=\frac{11}{3}$ 답 ③

434 점 $A(-1,\ 2,\ 3)$을 지나고 y축에 평행한 직선의 방정식은

$x=-1,\ z=3$

이 직선과 원점 사이의 거리는 점 $(-1,\ 0,\ 3)$과 원점 사이의 거리와 같으므로

$\sqrt{(-1)^2+0^2+3^2}=\sqrt{10}$ 답 ⑤

435 세 직선 l, m, n의 방향벡터를 각각 $\vec{u_1}$, $\vec{u_2}$, $\vec{u_3}$이라 하면

$\vec{u_1}=(a,\ -1,\ b)$, $\vec{u_2}=(-2,\ 1,\ 3)$, $\vec{u_3}=(1,\ c,\ 1)$

$l /\!/ m$에서 $\vec{u_1} /\!/ \vec{u_2}$이므로

$$\frac{a}{-2}=\frac{-1}{1}=\frac{b}{3} \quad \cdots\cdots ㉠$$

$l\perp n$에서 $\vec{u_1}\perp\vec{u_3}$이므로 $\vec{u_1}\cdot\vec{u_3}=0$

$\therefore a-c+b=0$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=2$, $b=-3$, $c=-1$

$\therefore a+b+c=-2$ 답 ②

436 직선 $\frac{x-1}{3}=-\frac{y}{2}=\frac{z-3}{k}$의 방향벡터를 $\vec{u_1}$, x축의 방향벡터를 $\vec{u}$라 하면

$\vec{u_1}=(3,\ -2,\ k)$, $\vec{u}=(1,\ 0,\ 0)$

주어진 직선이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 $45°$이므로

$$\cos 45°=\frac{|\vec{u_1}\cdot\vec{u}|}{|\vec{u_1}||\vec{u}|}$$
$$=\frac{|3\times1+(-2)\times0+k\times0|}{\sqrt{3^2+(-2)^2+k^2}\sqrt{1^2+0^2+0^2}}$$
$$=\frac{3}{\sqrt{13+k^2}}$$

즉 $\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{3}{\sqrt{13+k^2}}$이므로

$\sqrt{26+2k^2}=6$, $26+2k^2=36$

$\therefore k^2=5$ 답 5

437 $x-1=2-y=\frac{z-2}{2}=t$ (t는 실수)로 놓으면

$x=t+1$, $y=-t+2$, $z=2t+2$

이므로 $H(t+1,\ -t+2,\ 2t+2)$로 놓을 수 있다.

주어진 직선의 방향벡터를 $\vec{u}$라 하면

$\vec{u}=(1,\ -1,\ 2)$

이때 원점을 O라 하면 $\overrightarrow{OH}\perp\vec{u}$에서 $\overrightarrow{OH}\cdot\vec{u}=0$이므로

$t+1-(-t+2)+2(2t+2)=0$

$6t+3=0$ $\therefore t=-\frac{1}{2}$

따라서 $H\left(\frac{1}{2},\ \frac{5}{2},\ 1\right)$이므로 $a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{5}{2}$, $c=1$

$\therefore a+b+c=4$ 답 4

1등급 비밀노트

점 C에서 직선 l에 내린 수선의 발 H의 좌표를 구할 때 다음을 이용한다.

(i) 점 H가 직선 l 위에 있다.
➡ 직선 l 위의 한 점의 좌표를 매개변수로 나타낸다.

(ii) $\overrightarrow{CH}$와 직선 l이 서로 수직이다.
➡ $\overrightarrow{CH}\perp\vec{u}$이므로 $\overrightarrow{CH}\cdot\vec{u}=0$
(단, $\vec{u}$는 직선 l의 방향벡터이다.)

438 두 점 $(1,\ 3,\ -2)$, $(2,\ -1,\ 1)$을 지나는 직선의 방향벡터는

$(1,\ -4,\ 3)$

점 $(1,\ 1,\ 0)$을 지나고 법선벡터가 $(1,\ -4,\ 3)$인 평면의 방정식은

$(x-1)-4(y-1)+3z=0$

$\therefore x-4y+3z+3=0$

따라서 $a=-4$, $b=3$, $c=3$이므로

$a+b+c=2$ 답 2

439 xy평면 위의 점은 z좌표가 0이므로 $z=0$을 $\frac{x-1}{2}=y+3=z+1$에 대입하면

$\frac{x-1}{2}=y+3=0+1$ $\therefore x=3$, $y=-2$

$\therefore A(3,\ -2,\ 0)$

일품 BOX

좌표축 또는 좌표평면 위의 점의 좌표는 다음과 같이 나타낸다.
① x축 ➡ $(a,\ 0,\ 0)$
② y축 ➡ $(0,\ b,\ 0)$
③ z축 ➡ $(0,\ 0,\ c)$
④ xy평면 ➡ $(a,\ b,\ 0)$
⑤ yz평면 ➡ $(0,\ b,\ c)$
⑥ zx평면 ➡ $(a,\ 0,\ c)$

점 $(x_1,\ y_1,\ z_1)$을 지나고 y축에 평행한 직선의 방정식
➡ $x=x_1$, $z=z_1$

두 직선이 평행하면 두 직선의 방향벡터도 평행하고, 두 직선이 수직이면 두 직선의 방향벡터도 수직이다.

또 yz평면 위의 점은 x좌표가 0이므로 $x=0$을

$x+1=\frac{y}{2}=\frac{z-1}{3}$에 대입하면

$0+1=\frac{y}{2}=\frac{z-1}{3}$ $\qquad\therefore y=2,\ z=4$

$\therefore$ B$(0,\ 2,\ 4)$

구하는 평면의 방정식을

$ax+by+cz+d=0$ …… ㉠

으로 놓으면 이 평면이 세 점 O, A, B를 지나므로

$d=0,\ 3a-2b+d=0,\ 2b+4c+d=0$

$\therefore a=\frac{2}{3}b,\ c=-\frac{1}{2}b,\ d=0$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $\frac{2}{3}bx+by-\frac{1}{2}bz=0$

$\therefore 4x+6y-3z=0$

답 ⑤

440 z축에 수직인 평면 α의 방정식을

$z=k$

로 놓으면 이 평면과 평면 $x+y+z=1$이 만나서 생기는 교선의 방정식은 $x+y+k=1$에서

$x+k=-y+1,\ z=k$

따라서 구하는 방향벡터는 $(1,\ -1,\ 0)$이므로

$a=1,\ b=0 \qquad \therefore a+b=1$

답 1

441 평면 $2x-4y+4z-3=0$의 법선벡터를 $\vec{n}$, yz평면, zx평면의 법선벡터를 각각 $\vec{n_1}$, $\vec{n_2}$라 하면

$\vec{n}=(2,\ -4,\ 4),\ \vec{n_1}=(1,\ 0,\ 0),\ \vec{n_2}=(0,\ 1,\ 0)$

이므로

$$\cos\theta_1=\frac{|\vec{n}\cdot\vec{n_1}|}{|\vec{n}||\vec{n_1}|}=\frac{|2\times1+(-4)\times0+4\times0|}{\sqrt{2^2+(-4)^2+4^2}\sqrt{1^2+0^2+0^2}}=\frac{1}{3}$$

$$\cos\theta_2=\frac{|\vec{n}\cdot\vec{n_2}|}{|\vec{n}||\vec{n_2}|}=\frac{|2\times0+(-4)\times1+4\times0|}{\sqrt{2^2+(-4)^2+4^2}\sqrt{0^2+1^2+0^2}}=\frac{2}{3}$$

$\therefore \cos\theta_1-\cos\theta_2=-\frac{1}{3}$

답 ②

442 세 평면 α, β, γ의 법선벡터를 각각 $\vec{n_1}$, $\vec{n_2}$, $\vec{n_3}$이라 하면

$\vec{n_1}=(a,\ b,\ -6),\ \vec{n_2}=(1,\ c,\ 2),$

$\vec{n_3}=(2,\ -2,\ -3)$

$\alpha /\!/ \beta$에서 $\vec{n_1} /\!/ \vec{n_2}$이므로

$\frac{a}{1}=\frac{b}{c}=\frac{-6}{2}$

$\therefore a=-3,\ b=-3c$ …… ㉠

또 $\alpha\perp\gamma$에서 $\vec{n_1}\perp\vec{n_3}$이므로 $\vec{n_1}\cdot\vec{n_3}=0$

$2a-2b+18=0$

$\therefore a-b+9=0$ …… ㉡

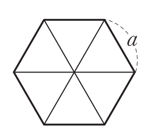
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $b=6,\ c=-2$

$\therefore a+b+c=1$

답 1

일품 BOX

- 세 점 O, A, B의 좌표를 ㉠에 각각 대입한다.
- $d=0$이므로 $3a-2b=0$ $\therefore a=\frac{2}{3}b$ 또 $2b+4c=0$이므로 $c=-\frac{1}{2}b$
- $b=0$이면 $a=c=0$이므로 ㉠은 평면의 방정식이 아니다. 따라서 $b\neq0$이므로 양변에 $\frac{6}{b}$을 곱한다.
- 법선벡터가 $(0,\ 0,\ 1)$인 평면



한 변의 길이가 a인 정육각형의 넓이는 한 변의 길이가 a인 정삼각형 6개의 넓이의 합과 같다.

직선과 평면이 만나지 않으면 직선과 평면은 평행하므로 직선의 방향벡터와 평면의 법선벡터는 수직이다.

443 두 평면 $x+y-2z-1=0$, $2x+y+z-2=0$의 법선벡터를 각각 $\vec{n_1}$, $\vec{n_2}$라 하면

$\vec{n_1}=(1,\ 1,\ -2),\ \vec{n_2}=(2,\ 1,\ 1)$

두 평면이 이루는 예각의 크기를 θ라 하면

$$\cos\theta=\frac{|\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}|}{|\vec{n_1}||\vec{n_2}|}=\frac{|1\times2+1\times1+(-2)\times1|}{\sqrt{1^2+1^2+(-2)^2}\sqrt{2^2+1^2+1^2}}=\frac{1}{6}$$

한편 한 변의 길이가 2인 정육각형의 넓이를 S라 하면

$S=6\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times2^2=6\sqrt{3}$

이므로 평면 $2x+y+z-2=0$ 위로의 정사영의 넓이는

$S\cos\theta=6\sqrt{3}\times\frac{1}{6}=\sqrt{3}$

답 ①

444 평면 $3x+4y-5z=0$의 법선벡터를 $\vec{n}$, 직선 $x-3=\frac{3-y}{4}=z$의 방향벡터를 $\vec{u}$라 하면

$\vec{n}=(3,\ 4,\ -5),\ \vec{u}=(1,\ -4,\ 1)$

이므로

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta=\frac{|\vec{n}\cdot\vec{u}|}{|\vec{n}||\vec{u}|}=\frac{|3\times1+4\times(-4)+(-5)\times1|}{\sqrt{3^2+4^2+(-5)^2}\sqrt{1^2+(-4)^2+1^2}}=\frac{18}{5\sqrt{2}\times3\sqrt{2}}=\frac{3}{5}$$

$$\therefore \cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=\frac{4}{5}\left(\because 0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$$

답 ⑤

445 직선 $\frac{x}{a}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-1}{3-a}$의 방향벡터를 $\vec{u_1}$, 평면 $x-4y+2z=1$의 법선벡터를 $\vec{n_1}$이라 하면

$\vec{u_1}=(a,\ 2,\ 3-a),\ \vec{n_1}=(1,\ -4,\ 2)$

$\vec{u_1}\perp\vec{n_1}$이므로 $\vec{u_1}\cdot\vec{n_1}=0$에서

$a\times1+2\times(-4)+(3-a)\times2=0$

$-a-2=0 \qquad \therefore a=-2$

따라서 직선 $x-2=1-y=\frac{z}{-2}$의 방향벡터를 $\vec{u_2}$, 평면 $2x+by+cz=3$의 법선벡터를 $\vec{n_2}$라 하면

$\vec{u_2}=(1,\ -1,\ -2),\ \vec{n_2}=(2,\ b,\ c)$

$\vec{u_2} /\!/ \vec{n_2}$이므로

$\frac{2}{1}=\frac{b}{-1}=\frac{c}{-2} \qquad \therefore b=-2,\ c=-4$

$\therefore a+b+c=-8$

답 -8

446 구하는 평면의 방정식을 $ax+by+cz+d=0$으로 놓으면 평면이 두 점 $(1,\ 0,\ 0)$, $(0,\ -1,\ 0)$을 지나므로

$a+d=0,\ -b+d=0$ …… ㉠

직선 m의 방향벡터를 $\vec{u}$, 평면의 법선벡터를 $\vec{n}$이라 하면

$\vec{u}=(1,\ 0,\ -2),\ \vec{n}=(a,\ b,\ c)$

$\vec{u}\perp\vec{n}$이므로 $\vec{u}\cdot\vec{n}=0$에서

$a-2c=0 \quad \therefore c=\frac{1}{2}a$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $a=-d,\ b=d,\ c=-\frac{1}{2}d$

따라서 구하는 평면의 방정식은

$-dx+dy-\frac{1}{2}dz+d=0$

$\therefore 2x-2y+z-2=0$ 답 $2x-2y+z-2=0$

447 주어진 평면의 방정식은

$2(x-1)-(y-2)+2(z-3)=0$

$\therefore 2x-y+2z-6=0$

따라서 평면 $2x-y+2z-6=0$과 점 $(4, 3, 2)$ 사이의 거리는

$\frac{|8-3+4-6|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}}=1$ 답 ①

448 평면 $x+y-2z=0$의 법선벡터를 $\vec{n_1}$, 평면 $ax+by+cz-6=0$의 법선벡터를 $\vec{n_2}$라 하면

$\vec{n_1}=(1,\ 1,\ -2),\ \vec{n_2}=(a,\ b,\ c)$

$\vec{n_1}/\!/\vec{n_2}$이므로 $\vec{n_2}=k\vec{n_1}\,(k\neq0)$이라 하면

$a=k,\ b=k,\ c=-2k$

또 점 $(1,\ 1,\ 1)$과 평면 $ax+by+cz-6=0$ 사이의 거리가 $2\sqrt{6}$이므로

$\frac{|a+b+c-6|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=2\sqrt{6}$

$\frac{|k+k+(-2k)-6|}{\sqrt{k^2+k^2+(-2k)^2}}=2\sqrt{6}$

$\frac{\sqrt{6}}{|k|}=2\sqrt{6}, \quad |k|=\frac{1}{2} \quad \therefore k=\pm\frac{1}{2}$

$\therefore a^2+b^2+c^2=6k^2=6\times\frac{1}{4}=\frac{3}{2}$ 답 ①

다른 풀이 평면 $x+y-2z=0$에 평행한 평면의 방정식을 $x+y-2z+d=0$이라 하면 이 평면과 점 $(1,\ 1,\ 1)$ 사이의 거리가 $2\sqrt{6}$이므로

$\frac{|1+1-2+d|}{\sqrt{1^2+1^2+(-2)^2}}=2\sqrt{6}$

$|d|=12 \quad \therefore d=\pm12$

따라서 평면의 방정식은

$x+y-2z+12=0$ 또는 $x+y-2z-12=0$

$\therefore -\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}y+z-6=0$ 또는

$\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y-z-6=0$

즉 $a=-\frac{1}{2},\ b=-\frac{1}{2},\ c=1$ 또는 $a=\frac{1}{2},\ b=\frac{1}{2}$, $c=-1$이므로

$a^2+b^2+c^2=\frac{3}{2}$

일품 BOX

두 점 $(-1,\ 3,\ -2)$, $(0,\ 3,\ -4)$를 지나는 직선의 방향벡터는 $(0+1,\ 3-3,\ -4+2)$, 즉 $(1,\ 0,\ -2)$

x축 위의 점은 y좌표와 z좌표가 0이므로 $y=0$, $z=0$을 평면 α의 방정식에 대입하면

$x=3$

$\therefore Q(3,\ 0,\ 0)$

449 점 $A(3,\ 0,\ -1)$을 지나고 평면 $2x-3y+az+1=0$에 평행한 평면 α의 방정식은

$2(x-3)-3y+a(z+1)=0$

$\therefore 2x-3y+az+a-6=0$

점 $B(8,\ 3,\ 0)$과 평면 α 사이의 거리가 1이므로

$\frac{|16-9+a-6|}{\sqrt{2^2+(-3)^2+a^2}}=1, \quad \frac{|a+1|}{\sqrt{13+a^2}}=1$

$|a+1|=\sqrt{13+a^2}, \quad a^2+2a+1=13+a^2$

$2a=12 \quad \therefore a=6$ 답 6

450 $x-1=y+2=\frac{z+1}{2}=t$(t는 실수)로 놓으면

$x=t+1,\ y=t-2,\ z=2t-1$

이므로 $P(t+1,\ t-2,\ 2t-1)$로 놓을 수 있다.

이때 평면 α가 점 $P(t+1,\ t-2,\ 2t-1)$을 지나므로

$(t+1)-2(t-2)+(2t-1)=3$

$\therefore t=-1$

$\therefore P(0,\ -3,\ -3)$

또 평면 α가 x축과 만나는 점 Q의 좌표는

$(3,\ 0,\ 0)$

이때

$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=(0,\ -3,\ -3)\cdot(3,\ 0,\ 0)=0$

이므로 $\triangle POQ$는 $\angle POQ=90^\circ$인 직각삼각형이다.

$\therefore \triangle POQ=\frac{1}{2}\times\overline{OP}\times\overline{OQ}$

$=\frac{1}{2}\times\sqrt{(-3)^2+(-3)^2}\times3$

$=\frac{9\sqrt{2}}{2}$ 답 $\frac{9\sqrt{2}}{2}$

451 주어진 두 평면의 교선을 포함하는 평면의 방정식은

$2x-y-4z-3+k(x+y-z+1)=0$ (k는 실수) …… ㉠

평면 ㉠이 점 $(2,\ 1,\ 2)$를 지나므로

$-8+2k=0 \quad \therefore k=4$

$k=4$를 ㉠에 대입하면

$6x+3y-8z+1=0$

따라서 $a=6,\ b=3,\ c=-8$이므로

$a+b+c=1$ 답 1

452 $x^2+y^2+z^2+2x-4y-1=0$에서

$(x+1)^2+(y-2)^2+z^2=6$

이므로 주어진 구의 중심의 좌표는 $(-1,\ 2,\ 0)$이고 반지름의 길이는 $\sqrt{6}$이다.

구의 중심 $(-1,\ 2,\ 0)$과 평면 $x-y+2z+k=0$ 사이의 거리는 구의 반지름의 길이인 $\sqrt{6}$과 같으므로

$\frac{|-1-2+k|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+2^2}}=\sqrt{6}, \quad \frac{|-3+k|}{\sqrt{6}}=\sqrt{6}$

$|-3+k|=6, \quad -3+k=\pm6$

$\therefore k=-3$ 또는 $k=9$

따라서 모든 실수 k의 값의 합은

$-3+9=6$ 답 ③

453 $|\overrightarrow{AP}|=\sqrt{5}$를 만족시키는 점 P가 나타내는 도형은 중심이 A(2, 4, 5)이고 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$인 구이므로 점 P와 원점 사이의 거리의 최솟값은

$\sqrt{2^2+4^2+5^2}-\sqrt{5}=3\sqrt{5}-\sqrt{5}=2\sqrt{5}$ 답 $2\sqrt{5}$

454 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=0$이므로 $\angle APB=90°$

즉 점 P가 나타내는 도형은 두 점 A, B를 지름의 양 끝 점으로 하는 구이므로 지름의 길이는

$\overline{AB}=\sqrt{(4-2)^2+(3-1)^2+(-3+1)^2}=2\sqrt{3}$

따라서 반지름의 길이는 $\sqrt{3}$이므로 구하는 도형의 부피는

$\frac{4}{3}\pi\times(\sqrt{3})^3=4\sqrt{3}\pi$ 답 ④

455 $(\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{p}-\vec{a})=25$를 만족시키는 점 P가 나타내는 도형은 중심이 A(3, 4, 0)이고 반지름의 길이가 5인 구이므로 구의 방정식은

$(x-3)^2+(y-4)^2+z^2=25$

x축 위의 점은 y좌표, z좌표가 0이므로 위의 식에 $y=0$, $z=0$을 대입하면

$(x-3)^2+(-4)^2=25$

$(x-3)^2=9$, $\quad x-3=\pm3$

$\therefore x=0$ 또는 $x=6$

따라서 점 P가 나타내는 도형과 x축이 만나는 두 점 사이의 거리는

$6-0=6$ 답 ③

456 직선 l이 점 B를 지나면서 △ABC의 넓이를 이등분하므로 직선 l은 $\overline{AC}$의 중점을 지난다.

이때 $\overline{AC}$의 중점의 좌표는

$\left(\frac{2+4}{2}, \frac{3+1}{2}, \frac{0+4}{2}\right)$, 즉 (3, 2, 2)

이므로 직선 l의 방정식은

$$\frac{x-5}{3-5}=\frac{y-1}{2-1}=\frac{z-3}{2-3}$$

$\therefore \frac{x-5}{2}=1-y=z-3$

이 직선이 xy평면 위의 점 $(a, b, 0)$을 지나므로

$\frac{a-5}{2}=1-b=0-3 \qquad \therefore a=-1, b=4$

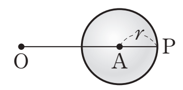
$\therefore a+b=3$ 답 3

457 해결 과정 두 점 C(−1, 2, 0), D(0, 0, 2)를 지나는 직선의 방정식은

$$\frac{x+1}{0+1}=\frac{y-2}{0-2}=\frac{z-0}{2-0}$$

$\therefore x+1=\frac{2-y}{2}=\frac{z}{2}$ ● 30%

일품 BOX



중심이 A이고 반지름의 길이가 r인 구 위를 움직이는 점 P와 구 밖의 점 O에 대하여 $\overline{OP}$의 길이의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하면

$M=\overline{OA}+r$,
$m=\overline{OA}-r$

중심의 좌표가 (a, b, c)이고 반지름의 길이가 r인 구가

① xy평면에 접하면 $r=|c|$

② yz평면에 접하면 $r=|a|$

③ zx평면에 접하면 $r=|b|$

$x+1=\frac{2-y}{2}=\frac{z}{2}=t$ (t는 실수)로 놓으면

$x=t-1$, $y=-2t+2$, $z=2t$

이므로 $P(t-1, -2t+2, 2t)$로 놓을 수 있다. ● 20%

$\therefore \overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$

$=(-t-2, 2t-2, -2t+1)$

$\cdot(-t-1, 2t-3, -2t)$

$=(-t-2)(-t-1)+(2t-2)(2t-3)$

$+(-2t+1)(-2t)$

$=t^2+3t+2+4t^2-10t+6+4t^2-2t$

$=9t^2-9t+8=9\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{23}{4}$ ● 30%

답 구하기 따라서 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$는 $t=\frac{1}{2}$일 때 최솟값 $\frac{23}{4}$을 갖고 이때의 점 P의 좌표는 $\left(-\frac{1}{2}, 1, 1\right)$이므로

$a=-\frac{1}{2}$, $b=1$, $c=1$

$\therefore 10(a+b+c)=15$ ● 20%

답 15

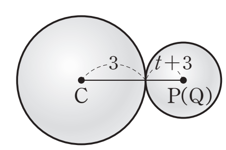
458 구 C의 중심 C(3, 3, 3)을 지나고 방향벡터가 (2, 2, 1)인 직선 l의 방정식은

$$\frac{x-3}{2}=\frac{y-3}{2}=z-3$$

$\frac{x-3}{2}=\frac{y-3}{2}=z-3=t$($t$는 실수)로 놓으면

$x=2t+3$, $y=2t+3$, $z=t+3$

이때 중심의 좌표가 $(2t+3, 2t+3, t+3)$이고 xy평면에 접하는 구의 반지름의 길이는 $|t+3|$이고, 이 구가 구 C에 외접하므로 두 구의 중심 사이의 거리는 두 구의 반지름의 길이의 합과 같다. 즉



$\sqrt{(2t)^2+(2t)^2+t^2}=3+|t+3|$

(i) $t\geq-3$일 때,

$\sqrt{9t^2}=3+(t+3)$, $\quad \sqrt{9t^2}=t+6$

$9t^2=t^2+12t+36$, $\quad 2t^2-3t-9=0$

$(2t+3)(t-3)=0 \qquad \therefore t=-\frac{3}{2}$ 또는 $t=3$

(ii) $t<-3$일 때,

$\sqrt{9t^2}=3-(t+3)$, $\quad \sqrt{9t^2}=-t$

$9t^2=t^2$, $\quad t^2=0 \qquad \therefore t=0$

그런데 $t<-3$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $\quad t=-\frac{3}{2}$ 또는 $t=3$

따라서 두 점 P, Q의 좌표는 $\left(0, 0, \frac{3}{2}\right)$, (9, 9, 6)이므로

$\overline{PQ}=\sqrt{(9-0)^2+(9-0)^2+\left(6-\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{27}{2}$ 답 ②

459 직선 l의 방향벡터를 $\vec{u}=(a, b, c)$라 하고 두 직선 l_1, l_2의 방향벡터를 각각 $\vec{u_1}$, $\vec{u_2}$라 하면

$\vec{u_1}=(2,\ 1,\ 3)$, $\vec{u_2}=(3,\ 2,\ 1)$

이때 $l \perp l_1$, $l \perp l_2$이므로 $\vec{u}\cdot\vec{u_1}=0$, $\vec{u}\cdot\vec{u_2}=0$에서

$2a+b+3c=0$, $3a+2b+c=0$

$\therefore a=-5c,\ b=7c$

따라서 $\vec{u}=(-5c,\ 7c,\ c)$이므로 직선 l의 방정식은

$$\frac{x-1}{-5c}=\frac{y+1}{7c}=\frac{z+2}{c}$$

$$\therefore \frac{x-1}{-5}=\frac{y+1}{7}=z+2$$

xy평면 위의 점은 z좌표가 0이므로 위의 식에 $z=0$을 대입하면

$$\frac{x-1}{-5}=\frac{y+1}{7}=0+2 \qquad \therefore x=-9,\ y=13$$

즉 $p=-9$, $q=13$, $r=0$이므로

$p+q+r=4$

답 ⑤

460 두 직선 l_1, l_2의 방향벡터를 각각 $\vec{u_1}$, $\vec{u_2}$라 하면

$\vec{u_1}=(a+1,\ a-1,\ a)$, $\vec{u_2}=(2,\ 3,\ -1)$

두 직선 l_1, l_2가 이루는 각의 크기가 $60°$이므로

$$\cos 60° =\frac{|\vec{u_1}\cdot\vec{u_2}|}{|\vec{u_1}||\vec{u_2}|}$$

$$=\frac{|(a+1)\times 2+(a-1)\times 3+a\times(-1)|}{\sqrt{(a+1)^2+(a-1)^2+a^2}\sqrt{2^2+3^2+(-1)^2}}$$

$$=\frac{|4a-1|}{\sqrt{3a^2+2}\sqrt{14}}$$

즉 $\frac{1}{2}=\frac{|4a-1|}{\sqrt{3a^2+2}\sqrt{14}}$에서

$\sqrt{14(3a^2+2)}=2|4a-1|$

$14(3a^2+2)=4(4a-1)^2$

$11a^2-16a-12=0$, $\quad (11a+6)(a-2)=0$

$\therefore a=2\ (\because a>0)$

즉 $\frac{x}{3}=y=\frac{z-1}{2}=t$ (t는 실수)로 놓으면

$x=3t$, $y=t$, $z=2t+1$

이므로 직선 l_1 위의 점의 좌표는 $(3t,\ t,\ 2t+1)$로 놓을 수 있다.

이때 직선 l_1은 $t>0$이면 영역 $S(1)$, $-\frac{1}{2}<t<0$이면 영역 $S(3)$, $t<-\frac{1}{2}$이면 영역 $S(7)$을 지난다.

따라서 직선 l_1이 지나는 영역은 $S(1)$, $S(3)$, $S(7)$이다.

답 ③

1등급 비밀노트

직선 l_1 위의 점의 좌표를 매개변수로 나타낸 후 매개변수의 값에 따른 x좌표, y좌표, z좌표의 부호를 각각 조사하면 직선 l_1이 지나는 영역을 찾을 수 있다.

이때 각 좌표가 0이 되는 t의 값, 즉 $3t=0$, $t=0$, $2t+1=0$일 때를 기준으로 하여 좌표의 부호를 조사한다.

따라서 $t<-\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}<t<0$, $t>0$의 세 가지 경우로 나눈다.

일품 BOX

$\begin{cases} 2a+b+3c=0 \cdots ㉠ \\ 3a+2b+c=0 \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠$\times 2-$㉡을 하면

$a+5c=0$

$\therefore a=-5c$

이것을 ㉠에 대입하면

$-10c+b+3c=0$

$\therefore b=7c$

직선 F의 방향벡터는 $(2,\ 1,\ 1)$이고 직선 G의 방향벡터는 $(1,\ 1,\ 2)$이므로 두 직선 F, G는 평행하지 않다.

$2s=kt$를

$s+1=kt-k$,

$s-1=2kt+k$

에 각각 대입하면

$s=k+1 \quad \cdots ㉢$

$3s=-k-1 \quad \cdots ㉣$

㉢, ㉣을 연립하여 풀면

$s=0$, $k=-1$

$\therefore t=0$

461 점 $A(2,\ 0,\ 1)$에서 직선 l에 내린 수선의 발을 H라 하고, $\frac{x+1}{2}=y-4=\frac{z-5}{-3}=t$ (t는 실수)로 놓으면

$x=2t-1$, $y=t+4$, $z=-3t+5$

이므로 $H(2t-1,\ t+4,\ -3t+5)$로 놓을 수 있다.

이때

$\overrightarrow{AH}=(2t-3,\ t+4,\ -3t+4) \quad \cdots\cdots ㉠$

이고 직선 l의 방향벡터를 $\vec{u}$라 하면

$\vec{u}=(2,\ 1,\ -3)$

$\overrightarrow{AH}\perp\vec{u}$이므로 $\overrightarrow{AH}\cdot\vec{u}=0$에서

$2(2t-3)+(t+4)-3(-3t+4)=0$

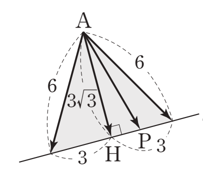
$14t-14=0 \qquad \therefore t=1$

$t=1$을 ㉠에 대입하면 $\overrightarrow{AH}=(-1,\ 5,\ 1)$이므로

$|\overrightarrow{AH}|=\sqrt{(-1)^2+5^2+1^2}=3\sqrt{3}$

직선 l 위의 점 P가 $|\overrightarrow{AP}|\le 6$을 만족시키므로

$|\overrightarrow{HP}|\le 3$



따라서 $\overrightarrow{AP}$가 나타내는 도형의 넓이는 밑변의 길이가 6이고 높이가 $3\sqrt{3}$인 삼각형의 넓이와 같으므로

$\frac{1}{2}\times 6\times 3\sqrt{3}=9\sqrt{3}$

답 ⑤

462 $P(2s,\ s+1,\ s-1)$에서

$x=2s$, $y=s+1$, $z=s-1$

이므로 도형 F는 직선 $\frac{x}{2}=y-1=z+1$이다.

$Q(t,\ t-1,\ 2t+1)$에서

$x=t$, $y=t-1$, $z=2t+1$

이므로 도형 G는 직선 $x=y+1=\frac{z-1}{2}$이다.

ㄱ. 직선 F 위의 점 $(2s,\ s+1,\ s-1)$의 좌표를 직선 G의 방정식 $x=y+1=\frac{z-1}{2}$에 대입하면

$2s=s+2=\frac{s-2}{2}$

$2s=s+2$에서 $\quad s=2$

그러나 $s=2$는 $s+2=\frac{s-2}{2}$를 만족시키지 않는다.

따라서 두 직선 F, G는 만나지 않고 평행하지도 않으므로 같은 평면 위에 있지 않다.

ㄴ. 직선 PQ가 원점을 지나려면 어떤 실수 s, t에 대하여 $\overrightarrow{OP}=k\overrightarrow{OQ}$ $(k\neq 0)$이어야 하므로

$(2s,\ s+1,\ s-1)=k(t,\ t-1,\ 2t+1) \quad \cdots\cdots ㉠$

이때 $s=t=0$, $k=-1$이면 ㉠이 성립한다.

따라서 어떤 실수 s, t에 대하여 직선 PQ는 원점을 지난다.

ㄷ. 직선 PQ의 방향벡터는

$\overrightarrow{PQ}=(t-2s,\ t-s-2,\ 2t-s+2)$

x축의 방향벡터를 $\vec{u}$라 하면 $\quad \vec{u}=(1,\ 0,\ 0)$

직선 PQ가 x축에 평행하려면 $\quad \overrightarrow{PQ}/\!/\vec{u}$

어떤 실수 $s,\ t$에 대하여 $\overrightarrow{PQ}=l\vec{u}\ (l\neq0)$라 하면

$(t-2s,\ t-s-2,\ 2t-s+2)=l(1,\ 0,\ 0)$ …… ㉡

이때 $t=-4,\ s=-6,\ l=8$이면 ㉡이 성립한다.

일품 BOX

$\begin{cases} t-s-2=0 & \cdots ㉤ \\ 2t-s+2=0 & \cdots ㉥ \end{cases}$

㉥－㉤을 하면

$t+4=0 \quad \therefore t=-4$

이것을 ㉤에 대입하면

$-4-s-2=0$

$\therefore s=-6$

$t=-4,\ s=-6$을

$t-2s=l$에 대입하면

$l=-4+12=8$

따라서 어떤 실수 $s,\ t$에 대하여 직선 PQ는 x축과 평행하다.

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ⑤

참고 직선 PQ가 원점 O를 지난다.

$\Longleftrightarrow$ 세 점 O, P, Q가 한 직선 위에 있다.

$\Longleftrightarrow \overrightarrow{OP}/\!/\overrightarrow{OQ}$

$\Longleftrightarrow \overrightarrow{OP}=k\overrightarrow{OQ}\ (k\neq0)$

463 문제 이해 $x-1=\dfrac{2-y}{3}=\dfrac{z}{4}=t$ (t는 실수)로 놓으면

$x=t+1,\ y=2-3t,\ z=4t$

이것을 직선 l_2의 방정식에 대입하면

$\dfrac{t-5}{2}=1-3t=2-4t \quad \therefore t=1$

$\therefore P(2,\ -1,\ 4)$ ● 30%

해결 과정 이때 x축을 포함하는 평면은 원점을 지나므로

$c=0$

$\therefore ax+by+z=0$ …… ㉠

x축의 방향벡터를 $\vec{u}$, 평면 ㉠의 법선벡터를 $\vec{n}$이라 하면

$\vec{u}=(1,\ 0,\ 0),\ \vec{n}=(a,\ b,\ 1)$

평면 ㉠이 x축을 포함하므로 $\vec{u}\perp\vec{n}$에서 $\quad \vec{u}\cdot\vec{n}=0$

$\therefore a=0$ ● 30%

따라서 점 P$(2,\ -1,\ 4)$는 평면 $by+z=0$ 위의 점이므로

$-b+4=0 \quad \therefore b=4$ ● 30%

답 구하기 $\therefore a^2+b^2+c^2=16$ ● 10%

답 16

464 평면 α의 방정식을 $ax+by+cz+d=0$으로 놓으면 평면 α의 법선벡터는 $(a,\ b,\ c)$이다.

이때 xy평면, yz평면, zx평면의 법선벡터는 각각 $(0,\ 0,\ 1),\ (1,\ 0,\ 0),\ (0,\ 1,\ 0)$이므로 평면 α가 xy평면, yz평면, zx평면과 이루는 각의 크기를 각각 θ_1, θ_2, θ_3, 구하는 정사영의 넓이를 S'이라 하면

평면 α 위의 넓이가 S인 도형의 평면 β 위로의 정사영의 넓이를 S'이라 할 때, 두 평면 α, β가 이루는 각의 크기를 θ라 하면

$S'=S\cos\theta$

$\dfrac{S}{2}=S\cos\theta_1$, 즉 $\dfrac{S}{2}=S\dfrac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ … ㉠

$\dfrac{S}{4}=S\cos\theta_2$, 즉 $\dfrac{S}{4}=S\dfrac{|a|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ … ㉡

$S'=S\cos\theta_3$, 즉 $S'=S\dfrac{|b|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ … ㉢

㉠, ㉡, ㉢의 각 변을 제곱하여 변끼리 더하면

$\dfrac{S^2}{4}+\dfrac{S^2}{16}+(S')^2=S^2$

$(S')^2=\dfrac{11}{16}S^2 \quad \therefore S'=\dfrac{\sqrt{11}}{4}S$ 답 ③

465 해결 과정 두 평면 $x+3y+\sqrt{6}z-1=0$, $ax-y+\sqrt{6}z+1=0$의 법선벡터를 각각 $\overrightarrow{n_1}$, $\overrightarrow{n_2}$라 하고 두 평면이 이루는 각의 크기를 θ라 하면

$\overrightarrow{n_1}=(1,\ 3,\ \sqrt{6}),\ \overrightarrow{n_2}=(a,\ -1,\ \sqrt{6})$

이므로

$\cos\theta=\dfrac{|\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|}$

$=\dfrac{|1\times a+3\times(-1)+\sqrt{6}\times\sqrt{6}|}{\sqrt{1^2+3^2+(\sqrt{6})^2}\sqrt{a^2+(-1)^2+(\sqrt{6})^2}}$

$=\dfrac{|a+3|}{4\sqrt{a^2+7}}$ ● 50%

답 구하기 반지름의 길이가 2인 원의 넓이는 4π, 정사영의 넓이는 π이므로

$4\pi\cos\theta=\pi, \quad \dfrac{|a+3|}{4\sqrt{a^2+7}}=\dfrac{1}{4}$

$|a+3|=\sqrt{a^2+7}, \quad a^2+6a+9=a^2+7$

$6a=-2 \quad \therefore a=-\dfrac{1}{3}$ ● 50%

답 $-\dfrac{1}{3}$

466 $x-1=2-y=\dfrac{2-z}{3}=t$ (t는 실수)로 놓으면

$x=t+1,\ y=2-t,\ z=2-3t$

이것을 직선 l_2의 방정식에 대입하면

$\dfrac{t+5}{5}=\dfrac{2-t}{2}=3t+1 \quad \therefore t=0$

$\therefore P(1,\ 2,\ 2)$

또 평면 α의 법선벡터를 $\vec{n}=(a,\ b,\ c)$라 하면 벡터 $\vec{n}$은 두 직선 l_1, l_2의 방향벡터와 각각 수직이므로

$(a,\ b,\ c)\cdot(1,\ -1,\ -3)=0,$

$(a,\ b,\ c)\cdot(5,\ 2,\ -1)=0$

$a-b-3c=0,\ 5a+2b-c=0$

$\therefore b=-2a,\ c=a$

$\begin{cases} a-b-3c=0 & \cdots ㉠ \\ 5a+2b-c=0 & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠×2＋㉡을 하면

$7a-7c=0$

$\therefore c=a$

이것을 ㉠에 대입하면

$a-b-3a=0$

$\therefore b=-2a$

따라서 $\vec{n}=(a,\ -2a,\ a)$, 즉 $\vec{n}=(1,\ -2,\ 1)$이므로

$\sin\theta=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=\dfrac{|\overrightarrow{OP}\cdot\vec{n}|}{|\overrightarrow{OP}||\vec{n}|}$

$=\dfrac{|1\times1+2\times(-2)+2\times1|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}\sqrt{1^2+(-2)^2+1^2}}$

$=\dfrac{1}{3\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{6}}{18}$ 답 $\dfrac{\sqrt{6}}{18}$

467 해결 과정 직선 l의 방향벡터를 $\vec{u}$, 두 평면 α, β의 법선벡터를 각각 $\overrightarrow{n_1}$, $\overrightarrow{n_2}$라 하면

$\vec{u}=(1,\ 2,\ 1),\ \overrightarrow{n_1}=(2,\ -1,\ 1),\ \overrightarrow{n_2}=(a,\ b,\ c)$

직선 l이 평면 β에 포함되므로 $\vec{u}\perp\overrightarrow{n_2}$에서

평면 β의 법선벡터는 평면 β 위의 모든 직선과 수직이다.

$\vec{u}\cdot\overrightarrow{n_2}=0$

$\therefore a+2b+c=0$ …… ㉠

또 $\alpha\perp\beta$에서 $\overrightarrow{n_1}\perp\overrightarrow{n_2}$이므로 $\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}=0$

$\therefore 2a-b+c=0$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하면 $a=3b,\ c=-5b$

$\therefore \beta:\ 3bx+by-5bz-20=0$ ● 60%

이때 직선 l이 평면 β 위에 있으므로 직선 l 위의 점 $(1,\ 2,\ 3)$은 평면 β 위에 있다.

즉 $3b+2b-15b-20=0$에서 $b=-2$ ● 20%

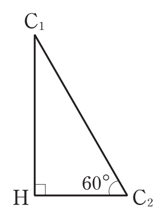
답 구하기 따라서 $\beta:\ -6x-2y+10z-20=0$이므로

$a=-6,\ b=-2,\ c=10$

$\therefore a+b+c=2$ ● 20%

답 2

468 점 C_1에서 평면 β에 내린 수선의 발을 H라 하면 두 평면 α, β 사이의 거리는 평면 α 위의 한 점 $(0,\ 0,\ 2)$와 평면 β 사이의 거리와 같으므로



$$\overline{C_1H}=\frac{|4+5|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}}=3$$

$\triangle C_1HC_2$에서 $\overline{C_1C_2}=\dfrac{3}{\sin 60^\circ}=2\sqrt{3}$

답 ③

469 평면 α의 법선벡터를 $\vec{n}$, 직선 l의 방향벡터를 $\vec{u}$라 하면 $\vec{n}=(1,\ 1,\ -3)$, $\vec{u}=(a,\ b,\ c)$이므로

$$\cos(90^\circ-30^\circ)=\frac{|\vec{n}\cdot\vec{u}|}{|\vec{n}||\vec{u}|}$$
$$=\frac{|1\times a+1\times b+(-3)\times c|}{\sqrt{1^2+1^2+(-3)^2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$
$$=\frac{|a+b-3c|}{\sqrt{11}\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

즉 $\dfrac{1}{2}=\dfrac{|a+b-3c|}{\sqrt{11}\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$이므로

$$\frac{|a+b-3c|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{\sqrt{11}}{2}$$

이때 평면 β의 방정식은

$a(x-0)+b(y-0)+c(z-0)=0$

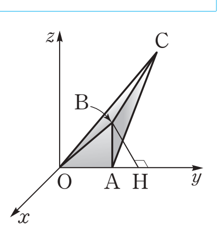
$\therefore ax+by+cz=0$

따라서 점 $(2,\ 2,\ -6)$과 평면 β 사이의 거리는

$$\frac{|2a+2b-6c|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{2|a+b-3c|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$
$$=2\times\frac{\sqrt{11}}{2}=\sqrt{11}$$

답 $\sqrt{11}$

470 점 $B(2,\ 3,\ 2)$에서 직선 OA에 내린 수선의 발을 H라 하면 $H(0,\ 3,\ 0)$이므로



$\overline{BH}=\sqrt{2^2+0^2+2^2}=2\sqrt{2}$

세 점 O, A, B를 지나는 평면의 방정식을 $ax+by+cz+d=0$

일품 BOX

㉡−㉠을 하면
$a-3b=0$
$\therefore a=3b$
이것을 ㉠에 대입하면
$3b+2b+c=0$
$\therefore c=-5b$

$5a+10c+d=0$,
$5a+10b+10c+d=0$
이므로
$10b=0\quad \therefore b=0$
따라서 $d=0$이므로
$5a+10c=0$
$\therefore a=-2c$

평면 β는 직선 l과 수직이므로 평면 β의 법선벡터는 $\vec{u}=(a,\ b,\ c)$이다.

직선 OA는 y축과 일치한다.

점 $(a,\ b,\ c)$에서 다음에 내린 수선의 발의 좌표는
① x축: $(a,\ 0,\ 0)$
② y축: $(0,\ b,\ 0)$
③ z축: $(0,\ 0,\ c)$
④ xy평면: $(a,\ b,\ 0)$
⑤ yz평면: $(0,\ b,\ c)$
⑥ zx평면: $(a,\ 0,\ c)$

으로 놓고 세 점 O, A, B의 좌표를 각각 대입하면

$d=0,\ 2b+d=0,\ 2a+3b+2c+d=0$

$\therefore b=0,\ c=-a,\ d=0$

세 점 O, A, B를 지나는 평면의 방정식은

$ax-az=0$, 즉 $x-z=0$

이때 점 $C(-1,\ 4,\ 5)$와 평면 $x-z=0$ 사이의 거리를 h라 하면

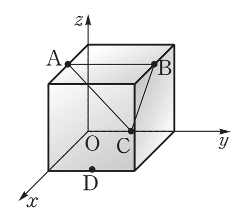
$$h=\frac{|-1-5|}{\sqrt{1^2+0^2+(-1)^2}}=3\sqrt{2}$$

따라서 삼각뿔 O−ABC의 부피는

$$\frac{1}{3}\times\triangle OAB\times h=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\overline{OA}\times\overline{BH}\times h$$
$$=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times2\times2\sqrt{2}\times3\sqrt{2}$$
$$=4$$

답 4

471 문제 이해 오른쪽 그림과 같이 주어진 정육면체를 좌표공간에 놓으면



$A(5,\ 0,\ 10)$,
$B(5,\ 10,\ 10)$,
$C(0,\ 5,\ 0)$,
$D(10,\ 5,\ 0)$ ● 30%

해결 과정 이때 세 점 A, B, C를 지나는 평면의 방정식을

$ax+by+cz+d=0$

으로 놓고 세 점 A, B, C의 좌표를 각각 대입하면

$5a+10c+d=0,\ 5a+10b+10c+d=0,$
$5b+d=0$

$\therefore a=-2c,\ b=0,\ d=0$

세 점 A, B, C를 지나는 평면의 방정식은

$-2cx+cz=0$, 즉 $2x-z=0$ ● 50%

답 구하기 따라서 점 $D(10,\ 5,\ 0)$과 평면 $2x-z=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|20|}{\sqrt{2^2+0^2+(-1)^2}}=4\sqrt{5}$$ ● 20%

답 $4\sqrt{5}$

472 $\dfrac{x+y}{z+3}=k$(k는 실수)라 하면

$x+y=k(z+3)$

$\therefore x+y-kz-3k=0$

점 P가 주어진 구 위의 점이므로 이 평면과 주어진 구가 만나야 한다.

이때 구의 중심 $(0,\ 0,\ 0)$과 평면 $x+y-kz-3k=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|-3k|}{\sqrt{1^2+1^2+(-k)^2}}=\frac{|3k|}{\sqrt{k^2+2}}$$

이고 구의 반지름의 길이는 $2\sqrt{2}$이므로

$$\frac{|3k|}{\sqrt{k^2+2}}\le 2\sqrt{2},\qquad \frac{9k^2}{k^2+2}\le 8$$

$9k^2\le 8k^2+16,\quad k^2\le 16$

$\therefore -4\le k\le 4$

따라서 $M=4$, $m=-4$이므로

$M^2+m^2=4^2+(-4)^2=32$ 답 ④

473 두 평면 α, β의 교선을 포함하는 평면 γ의 방정식은

$2x+y-z+2+k(x-y+z-3)=0$ (k는 실수)

$\therefore (2+k)x+(1-k)y+(k-1)z+2-3k=0$

평면 γ의 법선벡터를 $\vec{n}$, 직선 $\frac{1-x}{4}=y+2=1-z$의 방향벡터를 $\vec{u}$라 하면

$\vec{n}=(2+k,\ 1-k,\ k-1)$, $\vec{u}=(-4,\ 1,\ -1)$

$\vec{n}/\!/\vec{u}$이므로 $\vec{n}=t\vec{u}\ (t\neq 0)$라 하면

$(2+k,\ 1-k,\ k-1)=t(-4,\ 1,\ -1)$

$\therefore 2+k=-4t,\ 1-k=t,\ k-1=-t$

위의 세 식을 연립하여 풀면 $k=2$, $t=-1$

즉 평면 γ의 방정식은 $4x-y+z-4=0$이므로 평면 γ가 x축, z축과 만나는 점의 좌표는 각각

$(1,\ 0,\ 0)$, $(0,\ 0,\ 4)$

따라서 구하는 두 점 사이의 거리는

$\sqrt{(-1)^2+4^2}=\sqrt{17}$ 답 ③

474 평면 α의 방정식을 $ax+by+cz+d=0$으로 놓고 세 점 O, A, B의 좌표를 각각 대입하면

$d=0,\ 2a+2b+d=0,\ 3a+3c+d=0$

$\therefore b=-a,\ c=-a,\ d=0$

평면 α의 방정식은

$ax-ay-az=0$, 즉 $x-y-z=0$

또 점 P(1, 1, 2)를 지나고 평면 α에 수직인 직선의 방정식은

$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-2}{-1}$, 즉 $x-1=1-y=2-z$

$x-1=1-y=2-z=t$ (t는 실수)로 놓으면

$x=t+1,\ y=-t+1,\ z=-t+2$

이므로 $\mathrm{H}(t+1,\ -t+1,\ -t+2)$로 놓을 수 있다.

이때 점 H는 평면 α 위의 점이므로

$t+1-(-t+1)-(-t+2)=0$

$3t=2\qquad \therefore t=\frac{2}{3}$

즉 $\mathrm{H}\left(\frac{5}{3},\ \frac{1}{3},\ \frac{4}{3}\right)$이므로 $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=a\overrightarrow{\mathrm{OA}}+b\overrightarrow{\mathrm{OB}}$에서

$\left(\frac{5}{3},\ \frac{1}{3},\ \frac{4}{3}\right)=a(2,\ 2,\ 0)+b(3,\ 0,\ 3)$

$=(2a+3b,\ 2a,\ 3b)$

따라서 $2a+3b=\frac{5}{3}$, $2a=\frac{1}{3}$, $3b=\frac{4}{3}$이므로

$a=\frac{1}{6},\ b=\frac{4}{9}\qquad \therefore a+b=\frac{11}{18}$ 답 $\frac{11}{18}$

일품 BOX

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(-2)^2+4^2}=2\sqrt{5}$

$\overline{\mathrm{AH}}=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{2}$

x축 위의 점은 (y좌표)$=$(z좌표)$=0$

z축 위의 점은 (x좌표)$=$(y좌표)$=0$

점 P(1, 1, 2)를 지나고 방향벡터가 (1, −1, −1)인 직선

475 두 구 C_1, C_2의 중심은 각각

$\mathrm{C_1}(0,\ -3,\ -1)$, $\mathrm{C_2}(4,\ -1,\ 3)$

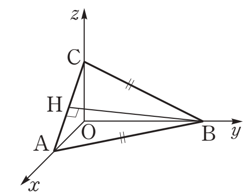
$\overline{\mathrm{C_1C_2}}$의 중점을 M이라 하면 $\mathrm{M}(2,\ -2,\ 1)$

이때 $\overrightarrow{\mathrm{C_1C_2}}=(4,\ 2,\ 4)$이므로 점 M을 지나고 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{C_1C_2}}$에 수직인 평면 α의 방정식은

$4(x-2)+2(y+2)+4(z-1)=0$

$\therefore 2x+y+2z-4=0$

평면 α가 x축, y축, z축과 만나는 점이 각각 A, B, C이므로



A(2, 0, 0),

B(0, 4, 0),

C(0, 0, 2)

따라서 △ABC는 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{BC}}=2\sqrt{5}$인 이등변삼각형이므로 점 B에서 $\overline{\mathrm{AC}}$에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{(-2)^2+2^2}=2\sqrt{2}$,

$\overline{\mathrm{BH}}=\sqrt{\overline{\mathrm{AB}}^2-\overline{\mathrm{AH}}^2}=\sqrt{(2\sqrt{5})^2-(\sqrt{2})^2}=3\sqrt{2}$

$\therefore \triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{2}\times 3\sqrt{2}=6$ 답 ③

참고 평면 α에 대하여 대칭인 두 구는 반지름의 길이가 같고 중심이 평면 α에 대하여 대칭이다.

476 해결 과정 $x^2+y^2+z^2+4y-6z-20=0$에서

$x^2+(y+2)^2+(z-3)^2=33$

이 구의 중심을 지나는 평면 α와 구가 만나서 생기는 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{33}$이므로 그 넓이는

$\pi\times(\sqrt{33})^2=33\pi$ ● 30%

두 평면 α, β의 법선벡터를 각각 $\vec{n_1}$, $\vec{n_2}$라 하고 두 평면 α, β가 이루는 예각의 크기를 θ라 하면

$\vec{n_1}=(1,\ -1,\ 3)$, $\vec{n_2}=(1,\ 3,\ 1)$이므로

$$\cos\theta=\frac{|\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}|}{|\vec{n_1}||\vec{n_2}|}$$

$$=\frac{|1\times1+(-1)\times3+3\times1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+3^2}\sqrt{1^2+3^2+1^2}}$$

$$=\frac{1}{11}$$ ● 50%

답 구하기 따라서 구하는 도형의 넓이는

$33\pi\cos\theta=33\pi\times\frac{1}{11}=3\pi$ ● 20%

답 3π

477 해결 과정 점 A의 평면 α 위로의 정사영을 $\mathrm{P}(a,\ b,\ c)$라 하면

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(a-3,\ b-4,\ c-5)$

평면 α의 법선벡터를 $\vec{n}$이라 하면 $\vec{n}=(1,\ 2,\ 2)$

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}/\!/\vec{n}$이므로 $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=t\vec{n}\ (t\neq0)$이라 하면

$a-3=t,\ b-4=2t,\ c-5=2t$

$\therefore a=t+3,\ b=2t+4,\ c=2t+5$ ● 20%

즉 $P(t+3,\ 2t+4,\ 2t+5)$이고, 점 P는 평면 α 위에 있으므로

$$(t+3)+2(2t+4)+2(2t+5)-3=0$$

$$9t+18=0 \qquad \therefore t=-2$$

$$\therefore P(1,\ 0,\ 1)$$ ● 30%

이때 구의 반지름의 길이는 $\overline{AP}$의 길이와 같으므로

$$\sqrt{(1-3)^2+(0-4)^2+(1-5)^2}=6$$

즉 구의 방정식은 $(x-1)^2+y^2+(z-1)^2=36$이므로 이 구가 xy평면과 만나서 생기는 도형의 방정식은

$$(x-1)^2+y^2=35$$ ● 40%

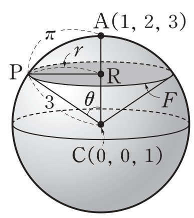
$z=0$을 구의 방정식에 대입한다.

답 구하기 따라서 구하는 도형은 반지름의 길이가 $\sqrt{35}$인 원이므로 그 넓이는

$$\pi\times(\sqrt{35})^2=35\pi$$ ● 10%

답 35π

478 구 $x^2+y^2+(z-1)^2=9$의 중심을 $C(0,\ 0,\ 1)$, 점 $A(1,\ 2,\ 3)$에서 거리가 π인 구 위의 점을 P, 부채꼴 CAP의 중심각의 크기를 θ라 하면



$$\pi=3\theta \qquad \therefore \theta=\frac{\pi}{3}$$

반지름의 길이가 r, 중심각의 크기가 θ인 부채꼴의 호의 길이를 l이라 하면
$l=r\theta$

이때 도형 F는 원이므로 원의 중심을 R, 반지름의 길이를 r라 하면

$$r=3\sin\frac{\pi}{3}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

따라서 도형 F는 반지름의 길이가 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$인 원이므로 원의 넓이는

$$\pi\times\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{27}{4}\pi$$

또 도형 F를 포함하는 평면의 법선벡터는

$$\overrightarrow{CA}=(1,\ 2,\ 2)$$

이고 xy평면의 법선벡터를 $\vec{n}$, 두 평면이 이루는 예각의 크기를 θ'이라 하면 $\vec{n}=(0,\ 0,\ 1)$이므로

$$\cos\theta'=\frac{|\overrightarrow{CA}\cdot\vec{n}|}{|\overrightarrow{CA}||\vec{n}|}$$

$$=\frac{|1\times0+2\times0+2\times1|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}\sqrt{0^2+0^2+1^2}}=\frac{2}{3}$$

따라서 구하는 정사영의 넓이는

$$\frac{27}{4}\pi\times\frac{2}{3}=\frac{9}{2}\pi$$

답 ⑤

1등급 비밀노트

도형 F의 평면 α 위로의 정사영 문제는 다음과 같은 순서로 해결한다.

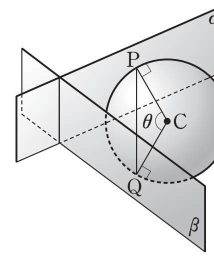
(i) 도형 F가 어떤 도형인지 파악하고 넓이를 구한다.

(ii) 도형 F를 포함한 평면과 평면 α가 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta$의 값을 구한다.

(iii) (i), (ii)를 이용하여 도형 F의 평면 α 위로의 정사영의 넓이를 구한다.

일품 BOX

479 오른쪽 그림과 같이 $\angle PCQ=\theta$라 하고 두 평면 α, β의 법선벡터를 각각 $\overrightarrow{n_1}$, $\overrightarrow{n_2}$라 하면



$$\overrightarrow{n_1}=(2,\ -4,\ 5),$$

$$\overrightarrow{n_2}=(4,\ 2,\ -5)$$

$\overrightarrow{n_1}$, $\overrightarrow{n_2}$가 이루는 각의 크기는 θ 또는 $\pi-\theta$이므로

$$|\cos\theta|=\frac{|\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|}$$

$$=\frac{|2\times4+(-4)\times2+5\times(-5)|}{\sqrt{2^2+(-4)^2+5^2}\sqrt{4^2+2^2+(-5)^2}}$$

$$=\frac{5}{9}$$

따라서 $\sin\theta=\sqrt{1-\left(\frac{5}{9}\right)^2}=\frac{2\sqrt{14}}{9}$이므로

두 변의 길이가 a, b이고 그 끼인 각의 크기가 θ인 삼각형의 넓이는
$\frac{1}{2}ab\sin\theta$

$$\triangle CPQ=\frac{1}{2}|\overrightarrow{CP}||\overrightarrow{CQ}|\sin\theta$$

$$=\frac{1}{2}r^2\times\frac{2\sqrt{14}}{9}=\frac{\sqrt{14}}{9}r^2$$

$$\therefore a=\frac{\sqrt{14}}{9}$$

답 ④

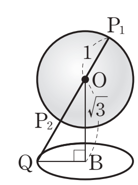
480 $|\overrightarrow{OA}|=1$을 만족시키는 점 A가 나타내는 도형은 중심이 원점이고 반지름의 길이가 1인 구이고, $|\overrightarrow{BC}|=1$을 만족시키는 평면 $x+y+z=3$ 위의 점 C가 나타내는 도형은 중심이 점 $B(1,\ 1,\ 1)$이고 반지름의 길이가 1인 원이다.

이때 원점 O에서 평면 $x+y+z=3$에 내린 수선의 발이 점 $B(1,\ 1,\ 1)$이므로 원점 O와 평면 $x+y+z=3$ 사이의 거리는

$\overrightarrow{OB}=(1,\ 1,\ 1)$이므로 벡터 $\overrightarrow{OB}$는 평면 $x+y+z=3$에 수직이다.

$$\overline{OB}=\sqrt{1^2+1^2+1^2}=\sqrt{3},\ \overline{BQ}=1$$

따라서 $\overline{PQ}$의 길이가 최대, 최소가 되도록 하는 점 P를 각각 P_1, P_2라 하면



$$\overline{P_1Q}=\overline{QO}+\overline{OP_1}$$

$$=\sqrt{\overline{OB}^2+\overline{BQ}^2}+1$$

$$=\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}+1$$

$$=2+1=3$$

$$\overline{P_2Q}=\overline{QO}-\overline{OP_2}=\sqrt{\overline{OB}^2+\overline{BQ}^2}-1$$

$$=\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}-1=2-1=1$$

이므로

$$\overline{P_1Q}\times\overline{P_2Q}=3$$

답 ③

481 직선 l 위의 점을 $P(a,\ b,\ c)(a>0)$라 하면 직선 l의 yz평면 위로의 정사영의 방정식이

$$3y+2z=0,\ x=0$$

이므로 $\quad 3b+2c=0 \qquad \therefore b=-\frac{2}{3}c$

또 직선 l의 zx평면 위로의 정사영의 방정식이

$$2x-z=0,\ y=0$$

이므로 $\quad 2a-c=0 \qquad \therefore a=\frac{1}{2}c$

즉 $\mathrm{P}\left(\frac{1}{2}c,\ -\frac{2}{3}c,\ c\right)$이므로 원점을 지나는 직선 l의 방향벡터는 $(3,\ -4,\ 6)$

이때 x축의 방향벡터는 $(1,\ 0,\ 0)$이므로

$$\cos\theta=\frac{|3\times1+(-4)\times0+6\times0|}{\sqrt{3^2+(-4)^2+6^2}\sqrt{1^2+0^2+0^2}}=\frac{3}{\sqrt{61}}$$

따라서 $\cos^2\theta=\frac{9}{61}$이므로 $p=61,\ q=9$

$\therefore p+q=70$

답 70

1등급 비밀노트

① x축의 방향벡터, yz평면의 법선벡터 ➡ $(1,\ 0,\ 0)$
② y축의 방향벡터, zx평면의 법선벡터 ➡ $(0,\ 1,\ 0)$
③ z축의 방향벡터, xy평면의 법선벡터 ➡ $(0,\ 0,\ 1)$

482 $\mathrm{A}(3,\ 3,\ 3\sqrt{14})$, $\mathrm{C}(6,\ 6,\ 0)$, $\mathrm{D}(0,\ 6,\ 0)$이므로

$$\mathrm{M}\left(\frac{3+6}{3},\ \frac{3+6+6}{3},\ \frac{3\sqrt{14}}{3}\right)$$

$\therefore \mathrm{M}(3,\ 5,\ \sqrt{14})$

따라서 두 점 $\mathrm{B}(6,\ 0,\ 0)$, $\mathrm{M}(3,\ 5,\ \sqrt{14})$를 지나는 직선의 방정식은

$$\frac{x-6}{3-6}=\frac{y}{5}=\frac{z}{\sqrt{14}},\ \text{즉}\ \frac{6-x}{3}=\frac{y}{5}=\frac{z}{\sqrt{14}}$$

$\frac{6-x}{3}=\frac{y}{5}=\frac{z}{\sqrt{14}}=t$ (t는 실수)로 놓으면

$x=-3t+6,\ y=5t,\ z=\sqrt{14}t$

이므로 $\mathrm{P}(-3t+6,\ 5t,\ \sqrt{14}t)$로 놓을 수 있다.

이때 $\mathrm{E}(0,\ 0,\ 0)$이므로

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{\mathrm{PE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PC}}\\&=(3t-6,\ -5t,\ -\sqrt{14}t)\cdot(3t,\ -5t+6,\ -\sqrt{14}t)\\&=3t(3t-6)-5t(-5t+6)-\sqrt{14}t\times(-\sqrt{14}t)\\&=9t^2-18t+25t^2-30t+14t^2\\&=48t^2-48t=48\left(t-\frac{1}{2}\right)^2-12\end{aligned}$$

따라서 $\overrightarrow{\mathrm{PE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PC}}$는 $t=\frac{1}{2}$일 때 최솟값 -12를 갖고, 이때의 점 P의 좌표는 $\left(\frac{9}{2},\ \frac{5}{2},\ \frac{\sqrt{14}}{2}\right)$이므로

$a=\frac{9}{2},\ b=\frac{5}{2},\ c=\frac{\sqrt{14}}{2}$

$\therefore a+b=7$

답 ②

일품 BOX

점 A에서 □BCDE에 내린 수선의 발은 □BCDE의 두 대각선의 교점과 같다. 이때 □BCDE의 두 대각선의 교점의 좌표는 $(3,\ 3,\ 0)$이고, 사각뿔의 높이가 $3\sqrt{14}$이므로
$\mathrm{A}(3,\ 3,\ 3\sqrt{14})$

$0<\theta<\pi$에서 θ의 값이 커질수록 $\cos\theta$의 값은 작아진다.

$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$
$\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$
$=2\cos^2\alpha-1$
$=1-2\sin^2\alpha$
$\tan2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

483 C_1: $x^2+y^2+z^2-2x-4y=17$ …… ㉠

C_2: $x^2+y^2+z^2-4z=21$ …… ㉡

㉠$-$㉡을 하면 $-2x-4y+4z=-4$

$\therefore x+2y-2z-2=0$

즉 두 구가 만나서 생기는 원을 포함하는 평면을 α라 하면 평면 α의 방정식은 $x+2y-2z-2=0$이다.

이때 ㉠에서 $(x-1)^2+(y-2)^2+z^2=22$

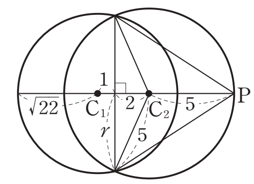
㉡에서 $x^2+y^2+(z-2)^2=25$

두 구 C_1, C_2의 중심을 각각 $\mathrm{C_1}$, $\mathrm{C_2}$라 하면

$\mathrm{C_1}(1,\ 2,\ 0)$, $\mathrm{C_2}(0,\ 0,\ 2)$

두 점 $\mathrm{C_1}$, $\mathrm{C_2}$와 평면 α 사이의 거리를 각각 h_1, h_2라 하면

$$h_1=\frac{|1+4-2|}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}}=1,$$
$$h_2=\frac{|-4-2|}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}}=2$$



따라서 평면 α와 두 구 위의 점 P까지의 거리의 최댓값은

$2+5=7$

이때 두 구 C_1, C_2가 만나서 생기는 원의 반지름의 길이를 r라 하면

$r=\sqrt{5^2-2^2}=\sqrt{21}$

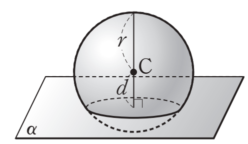
이므로 원뿔의 부피의 최댓값은

$\frac{1}{3}\times\pi\times(\sqrt{21})^2\times7=49\pi$

답 ⑤

1등급 비밀노트

구 C의 반지름의 길이를 r, 구 C의 중심과 평면 α 사이의 거리를 d라 할 때, 평면 α와 구 C 위의 한 점 사이의 거리의 최댓값은 $r+d$이다.



484 $x^2+y^2+z^2-2x+4y-20=0$에서

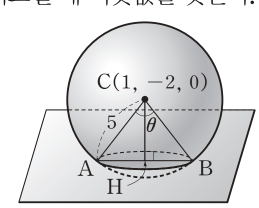
$(x-1)^2+(y+2)^2+z^2=25$

이므로 이 구의 중심은 $\mathrm{C}(1,\ -2,\ 0)$이고 반지름의 길이는 5이다.

$\angle\mathrm{ACB}=\theta$라 하면

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{CA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CB}}&=|\overrightarrow{\mathrm{CA}}||\overrightarrow{\mathrm{CB}}|\cos\theta\\&=5\times5\times\cos\theta\\&=25\cos\theta\end{aligned}$$

이므로 $\overrightarrow{\mathrm{CA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CB}}$는 $\cos\theta$가 최소일 때 최솟값을 갖는다.



오른쪽 그림과 같이 $\cos\theta$가 최소일 때는 두 점 A, B가 구와 평면이 만나서 생기는 원의 지름의 양 끝 점일 때이므로 구의 중심 $\mathrm{C}(1,\ -2,\ 0)$에서 평면 $2x-y-2z+8=0$에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{\mathrm{CH}}=\frac{|2+2+8|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+(-2)^2}}=4$$

$$\therefore \cos\theta=2\cos^2\frac{\theta}{2}-1$$
$$=2\times\left(\frac{4}{5}\right)^2-1=\frac{7}{25}$$

따라서 $\overrightarrow{\mathrm{CA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CB}}$의 최솟값은

$25\cos\theta=25\times\frac{7}{25}=7$

답 ②

485 평면 $ax+y-z+4=0$에 수직이고 점 $(0,\ 2,\ -3)$을 지나는 직선의 방정식은

$$\frac{x}{a}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+3}{-1},\ \text{즉}\ \frac{x}{a}=y-2=-z-3$$

$\frac{x}{a}=y-2=-z-3=t$ (t는 실수)로 놓으면

$$x=at,\ y=t+2,\ z=-t-3$$

이므로 이 직선 위의 점을 $(at,\ t+2,\ -t-3)$으로 놓을 수 있다.

이 점이 구 $x^2+y^2+z^2=11$ 위에 있으면

$$(at)^2+(t+2)^2+(-t-3)^2=11$$

$$\therefore (a^2+2)t^2+10t+2=0$$

이 이차방정식이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 판별식을 D라 하면

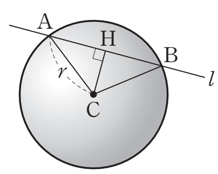
$$\frac{D}{4}=5^2-2(a^2+2)>0,\qquad a^2<\frac{21}{2}$$

$$\therefore -\frac{\sqrt{42}}{2}<a<\frac{\sqrt{42}}{2}$$

따라서 구하는 정수 a는 $-3,\ -2,\ -1,\ \cdots,\ 3$의 7개이다.

답 7

486 구의 중심 $C(1,\ 0,\ 0)$에서 직선 l에 내린 수선의 발을 H라 하고



$$\frac{x+2}{2}=-y+1=\frac{z-7}{3}=t\ (t\text{는 실수})$$

로 놓으면

$$x=2t-2,\ y=-t+1,\ z=3t+7$$

이므로 $H(2t-2,\ -t+1,\ 3t+7)$로 놓을 수 있다.

$$\therefore \overrightarrow{CH}=(2t-3,\ -t+1,\ 3t+7)$$

직선 l의 방향벡터를 $\vec{u}$라 하면 $\vec{u}=(2,\ -1,\ 3)$

$\overrightarrow{CH}\perp\vec{u}$이므로 $\overrightarrow{CH}\cdot\vec{u}=0$에서

$$2(2t-3)-(-t+1)+3(3t+7)=0$$

$$14t+14=0\qquad \therefore t=-1$$

즉 $\overrightarrow{CH}=(-5,\ 2,\ 4)$이므로

$$|\overrightarrow{CH}|=\sqrt{(-5)^2+2^2+4^2}=3\sqrt{5}$$

직각삼각형 ACH에서

$\overline{AH}=\sqrt{r^2-(3\sqrt{5})^2}=\sqrt{r^2-45}$이므로

$$\overline{AB}=2\overline{AH}=2\sqrt{r^2-45}$$

$$\therefore S(r)=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{CH}=3\sqrt{5}\sqrt{r^2-45}$$

이때 $15\le S(r)\le 30$에서

$$15\le 3\sqrt{5}\sqrt{r^2-45}\le 30$$

$$\sqrt{5}\le\sqrt{r^2-45}\le 2\sqrt{5},\qquad 5\le r^2-45\le 20$$

$$50\le r^2\le 65\qquad \therefore \sqrt{50}\le r\le\sqrt{65}\ (\because r>0)$$

$$\therefore [r]=7\ \text{또는}\ [r]=8$$

따라서 구하는 모든 $[r]$의 값의 합은

$$7+8=15$$

답 ①

일품 BOX

직선 l이 평면 α 위의 평행하지 않은 두 직선 m, n과 수직이면 직선 l은 평면 α와 수직이다.

$\overline{AP}=\frac{1}{2}\overline{AC}=2\sqrt{2}$

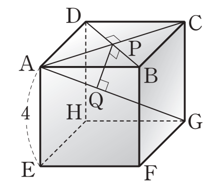
세 변의 길이가 a, b, c인 △ABC의 내접원의 반지름의 길이가 r일 때,
△ABC $=\frac{1}{2}r(a+b+c)$

1등급 완성하기

▶ 본책 91쪽

487 $\overline{PQ}$의 길이는 $\overline{PQ}\perp\overline{BD}$, $\overline{PQ}\perp\overline{AG}$일 때 최소이다.

오른쪽 그림에서



$\overline{CG}\perp$(평면 BCD)이므로

$$\overline{BD}\perp\overline{CG}$$

또 $\overline{BD}\perp\overline{AC}$이므로

$$\overline{BD}\perp(\text{평면 AGC})$$

$\overline{AC}$와 $\overline{BD}$의 교점을 P라 하고 점 P에서 $\overline{AG}$에 내린 수선의 발을 Q라 하면

$$\overline{PQ}\perp\overline{BD},\ \overline{PQ}\perp\overline{AG}$$

△AGC에서 $\angle CAG=\theta$라 하면

$$\sin\theta=\frac{\overline{CG}}{\overline{AG}}=\frac{4}{4\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

따라서 $\overline{PQ}$의 길이의 최솟값은 △APQ에서

$$\overline{PQ}=\overline{AP}\sin\theta=2\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$$

답 ③

488 □ABFD는 마름모이므로 $\overline{AB}/\!/\overline{DF}$이다. 즉 두 직선 AB와 CF가 이루는 각의 크기는 두 직선 DF와 CF가 이루는 각의 크기와 같고 △CFD는 정삼각형이므로 $\theta_1=60°$

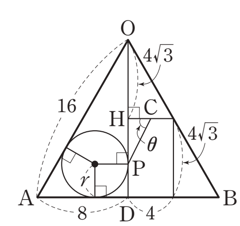
또 두 직선 AB와 EF가 이루는 각의 크기는 두 직선 DF와 EF가 이루는 각의 크기와 같고 △DEF는 정삼각형이므로 $\theta_2=60°$

$$\therefore \cos(\theta_1+\theta_2)=\cos 120°=-\frac{1}{2}$$

답 ②

489 원뿔의 밑면의 반지름의 길이는 8, 높이는 $\sqrt{16^2-8^2}=8\sqrt{3}$이고 원기둥의 밑면의 지름의 길이는 4, 높이는 $4\sqrt{3}$이므로 원뿔의 꼭짓점에서 밑면에 내린 수선의 발은 원기둥의 밑면인 원 위의 한 점이다.

오른쪽 그림과 같은 단면에서 원뿔의 밑면의 중심을 D라 하고, 점 C에서 $\overline{OD}$에 내린 수선의 발을 H라 하자.



구의 반지름의 길이를 r라 하면 △OAD에서

$$\frac{1}{2}\times8\times8\sqrt{3}=\frac{1}{2}r(16+8+8\sqrt{3})$$

$$8\sqrt{3}=(3+\sqrt{3})r$$

$$\therefore r=\frac{8\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}=4\sqrt{3}-4$$

또 $\overline{CH}=2$, $\overline{PH}=4\sqrt{3}-(4\sqrt{3}-4)=4$이므로

$$\tan\theta=\frac{\overline{PH}}{\overline{CH}}=2$$

$$\therefore 10\tan\theta=20$$

답 20

490 사각뿔의 옆넓이를 S라 하면 사각뿔의 네 옆면의 밑면 위로의 정사영은 정사각형 ABCD이므로

$$S\cos 60^\circ=10, \quad S\times\frac{1}{2}=10$$

$$\therefore S=20$$

답 ④

491 해결 과정 $S_1=\frac{\sqrt{3}}{4}\times 2^2\times\cos 30^\circ=\frac{3}{2}$,

$S_2=S_1\cos 30^\circ=\frac{3\sqrt{3}}{4}$,

$S_3=S_2\cos 30^\circ=\frac{9}{8}$,

$\vdots$

$S_n=\frac{3}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n-1}$ ● 50%

이므로

$$S_{2n}=\frac{3}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2n-1}=\frac{3\sqrt{3}}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$$ ● 20%

답 구하기 $\therefore \sum_{n=1}^{\infty}S_{2n}=\dfrac{\frac{3\sqrt{3}}{4}}{1-\frac{3}{4}}=3\sqrt{3}$ ● 30%

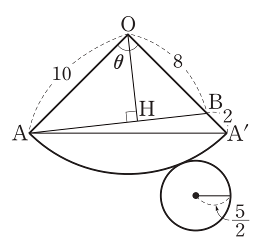
답 $3\sqrt{3}$

일품 BOX

$\frac{3}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2n-1}$
$=\frac{3}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2n-2}$
$=\frac{3\sqrt{3}}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$

$-1<r<1$일 때,
$\sum_{n=1}^{\infty}ar^{n-1}=\frac{a}{1-r}$

492 문제 이해 오른쪽 그림과 같이 주어진 원뿔의 전개도에서 점 P가 최단 거리로 움직인 경로는 $\overline{\mathrm{AB}}$이다. ● 30%



해결 과정 이때 부채꼴 OAA′의 중심각의 크기를 θ라 하면

$$10\theta=2\pi\times\frac{5}{2} \quad \therefore \theta=\frac{\pi}{2}$$

● 호 AA′의 길이는 밑면인 원의 둘레의 길이와 같다.

즉 △OAB는 직각삼각형이므로

$$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{10^2+8^2}=2\sqrt{41}$$ ● 30%

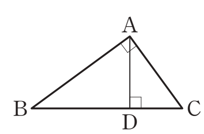
답 구하기 이때 점 O에서 $\overline{\mathrm{AB}}$에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 P가 위쪽 방향으로 이동하는 동안 움직인 거리는 $\overline{\mathrm{AH}}$의 길이와 같으므로 △OAB에서

$$\overline{\mathrm{OA}}^2=\overline{\mathrm{AH}}\times\overline{\mathrm{AB}}$$

$$100=\overline{\mathrm{AH}}\times 2\sqrt{41}$$

$$\therefore \overline{\mathrm{AH}}=\frac{50\sqrt{41}}{41}$$ ● 40%

답 $\frac{50\sqrt{41}}{41}$

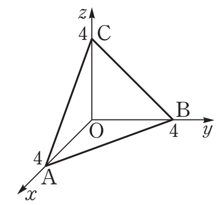


① $\overline{\mathrm{AB}}^2=\overline{\mathrm{BD}}\times\overline{\mathrm{BC}}$
② $\overline{\mathrm{AC}}^2=\overline{\mathrm{CD}}\times\overline{\mathrm{CB}}$
③ $\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{AC}}$
$=\overline{\mathrm{AD}}\times\overline{\mathrm{BC}}$

1등급 비밀노트

점 P가 최단 거리로 이동할 때, 점 P의 자취는 원뿔의 전개도에서 선분 AB로 나타나지만 이 전개도로 원뿔을 만들었을 때에는 원뿔의 옆면이 곡면이기 때문에 선분 AB가 곡선이 된다. 이때 그 경로가 위쪽으로 향하다 아래쪽으로 방향을 바꾸는 시점은 선분 AB 위의 점 중에서 점 O와 거리가 가장 짧은 점 H에 도달했을 때이다.

493 주어진 조건을 만족시키는 세 점 A, B, C를 오른쪽 그림과 같이 나타낼 수 있다.



이때 △ABC의 zx평면 위로의 정사영은 △AOC이므로 평면 ABC와 zx평면이 이루는 각의 크기를 θ라 하면 △ABC$\cos\theta$=△AOC에서

$$\cos\theta=\frac{\triangle\mathrm{AOC}}{\triangle\mathrm{ABC}}=\frac{\frac{1}{2}\times4\times4}{\frac{\sqrt{3}}{4}\times(4\sqrt{2})^2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

따라서 △AOC의 평면 ABC 위로의 정사영의 넓이는

$$\triangle\mathrm{AOC}\cos\theta=\frac{1}{2}\times4\times4\times\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{8\sqrt{3}}{3}$$

답 $\frac{8\sqrt{3}}{3}$

494 $\overline{\mathrm{AB}}$가 xy평면과 평행하므로 두 점 A, B의 z좌표는 서로 같다. 즉

$$\mathrm{A}(-2,\ 2\sqrt{3},\ k),\ \mathrm{B}(2,\ 2\sqrt{3},\ k)$$

라 하면 △OAB의 무게중심의 z좌표가 4이므로

$$\frac{k+k}{3}=4 \quad \therefore k=6$$

이때

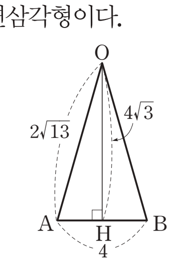
$$\overline{\mathrm{OA}}=\sqrt{(-2)^2+(2\sqrt{3})^2+6^2}=2\sqrt{13},$$

$$\overline{\mathrm{AB}}=2-(-2)=4,$$

$$\overline{\mathrm{OB}}=\sqrt{2^2+(2\sqrt{3})^2+6^2}=2\sqrt{13}$$

이므로 △OAB는 $\overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{OB}}$인 이등변삼각형이다.

오른쪽 그림과 같이 점 O에서 $\overline{\mathrm{AB}}$에 내린 수선의 발을 H라 하면



$$\overline{\mathrm{OH}}=\sqrt{(2\sqrt{13})^2-2^2}=4\sqrt{3}$$

$$\therefore \triangle\mathrm{OAB}=\frac{1}{2}\times4\times4\sqrt{3}=8\sqrt{3}$$

답 $8\sqrt{3}$

495 $x^2+y^2+z^2-4x+6y-6z=0$에서

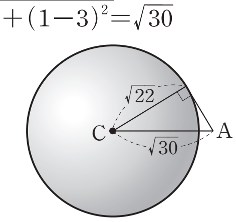
$$(x-2)^2+(y+3)^2+(z-3)^2=22$$

이므로 구의 중심의 좌표는 (2, -3, 3)이고 반지름의 길이는 $\sqrt{22}$이다.

이때 구의 중심을 C라 하면

$$\overline{\mathrm{CA}}=\sqrt{(3-2)^2+(2+3)^2+(1-3)^2}=\sqrt{30}$$

이므로 오른쪽 그림에서 점 A와 접점 사이의 거리는



$$\sqrt{(\sqrt{30})^2-(\sqrt{22})^2}$$

$$=2\sqrt{2}$$

답 ③

496 $\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2=\overline{\mathrm{AB}}^2$이므로 △ABP는 ∠APB=90°인 직각삼각형이다.

즉 점 P가 나타내는 도형은 $\overline{\mathrm{AB}}$를 지름으로 하는 구이므로 구의 반지름의 길이를 r라 하면

$4\pi r^2=36\pi, \quad r^2=9$

$\therefore r=3\ (\because r>0)$

따라서 $\overline{AB}=6$이므로 $\quad \overline{AB}^2=36$

$(-2-a)^2+(a+3-1)^2+(3-1)^2=36$

$a^2+4a-12=0, \quad (a+6)(a-2)=0$

$\therefore a=2\ (\because a>0)$

답 2

1등급 비밀노트

두 점 A, B에 대하여 $\angle APB=90°$를 만족시키는 점 P의 자취는
① 좌표평면에서 ➡ $\overline{AB}$를 지름으로 하는 원
② 좌표공간에서 ➡ $\overline{AB}$를 지름으로 하는 구

497 $x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z-11=0$에서

$(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=25$

이므로 이 구의 중심의 좌표는 $(1,\ 2,\ 3)$이고 반지름의 길이는 5이다.

$x^2+y^2+z^2+2x+2y+6z-a=0$에서

$(x+1)^2+(y+1)^2+(z+3)^2=a+11$

이므로 이 구의 중심의 좌표는 $(-1,\ -1,\ -3)$이고 반지름의 길이는 $\sqrt{a+11}$이다.

이때 두 구의 중심 사이의 거리는

$\sqrt{(-1-1)^2+(-1-2)^2+(-3-3)^2}=7$

이므로 두 구가 교선이 원이 되게 만나려면

$|\sqrt{a+11}-5|<7<5+\sqrt{a+11}$

$|\sqrt{a+11}-5|<7$에서 $\quad -7<\sqrt{a+11}-5<7$

$\therefore -2<\sqrt{a+11}<12 \quad \cdots\cdots$ ㉠

$7<5+\sqrt{a+11}$에서 $\quad 2<\sqrt{a+11} \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $\quad 2<\sqrt{a+11}<12$

$4<a+11<144 \quad \therefore -7<a<133$

따라서 구하는 정수 a의 개수는

$133-(-7)-1=139$

답 139

498 문제 이해 xy평면 위의 점은 z좌표가 0이므로 주어진 구의 방정식에 $z=0$을 대입하면

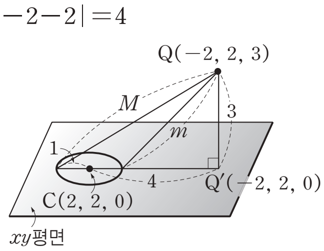
$x^2+y^2-4x-4y+7=0$

$\therefore (x-2)^2+(y-2)^2=1$

따라서 구와 xy평면의 교선은 중심의 좌표가 $(2,\ 2,\ 0)$이고 반지름의 길이가 1인 원이다. ● 40%

해결 과정 이 원의 중심을 C라 하고 점 $Q(-2,\ 2,\ 3)$의 xy평면 위로의 정사영을 Q′이라 하면 $Q'(-2,\ 2,\ 0)$이므로

$\overline{CQ'}=|-2-2|=4$



일품 BOX

반지름의 길이가 각각 r, $r'(r>r')$인 두 구의 중심 사이의 거리를 d라 할 때, 두 구가 교선이 원이 되게 만나려면

$r-r'<d<r+r'$

정수 a, b에 대하여 x의 범위가 다음과 같을 때, 정수 x의 개수는
① $a\le x\le b$ ➡ $b-a+1$
② $a\le x<b$ ➡ $b-a$
③ $a<x\le b$ ➡ $b-a$
④ $a<x<b$ ➡ $b-a-1$

앞의 그림에서

$M=\sqrt{(4+1)^2+3^2}=\sqrt{34}$

$m=\sqrt{(4-1)^2+3^2}=3\sqrt{2}$ ● 50%

답 구하기 $\therefore M^2-m^2=34-18=16$ ● 10%

답 16

499 $\overrightarrow{AD}=2\vec{x}$, $\overrightarrow{AB}=2\vec{y}$, $\overrightarrow{AE}=2\vec{z}$로 놓으면

$\vec{a}=2\vec{x}+\vec{y} \quad \cdots\cdots$ ㉠

$\vec{b}=\vec{x}+2\vec{y} \quad \cdots\cdots$ ㉡

$\vec{c}=2\vec{y}+\vec{z} \quad \cdots\cdots$ ㉢

㉠$\times 2-$㉡을 하면 $\quad 2\vec{a}-\vec{b}=3\vec{x}$

$\therefore \vec{x}=\frac{2}{3}\vec{a}-\frac{1}{3}\vec{b}$

㉠에서

$\vec{y}=\vec{a}-2\vec{x}=\vec{a}-2\left(\frac{2}{3}\vec{a}-\frac{1}{3}\vec{b}\right)=-\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}$

㉢에서

$\vec{z}=\vec{c}-2\vec{y}=\vec{c}-2\left(-\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}\right)=\frac{2}{3}\vec{a}-\frac{4}{3}\vec{b}+\vec{c}$

ㄱ. $\overrightarrow{AB}=2\vec{y}=-\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{4}{3}\vec{b}$

ㄴ. $\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AD}=2\vec{z}-2\vec{x}$

$=2\left(\frac{2}{3}\vec{a}-\frac{4}{3}\vec{b}+\vec{c}\right)-2\left(\frac{2}{3}\vec{a}-\frac{1}{3}\vec{b}\right)$

$=-2\vec{b}+2\vec{c}$

ㄷ. $\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AE}$

$=2\vec{x}+2\vec{y}-2\vec{z}=2\vec{y}-(2\vec{z}-2\vec{x})$

$=2\left(-\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}\right)-(-2\vec{b}+2\vec{c})\ (\because$ ㄴ$)$

$=-\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{10}{3}\vec{b}-2\vec{c}$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ②

500 $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{AP}$

$=(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CQ})-(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EP})$

$=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CQ})-(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EP})$

$=\left(\vec{a}+\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}\right)-\left(\vec{c}+\frac{1}{2}\vec{a}\right)$

$=\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}-\frac{2}{3}\vec{c}$

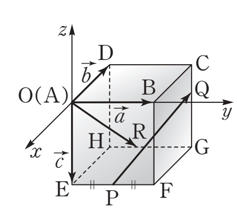
$\overrightarrow{AR}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EH}+\overrightarrow{HR}=\vec{c}+\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{a}$

$\therefore \overrightarrow{PQ}-\overrightarrow{AR}=\left(\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}-\frac{2}{3}\vec{c}\right)-\left(\vec{c}+\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{a}\right)$

$=\frac{1}{6}\vec{a}-\frac{5}{3}\vec{c}$

답 ②

다른 풀이 정육면체의 한 모서리의 길이를 t라 하고 꼭짓점 A가 원점, 모서리 AD가 x축의 음의 방향, 모서리 AB가 y축의 양의 방향, 모서리 AE가 z축의 음의 방향과 일치하도록 정육면체를 좌표공간에 놓으면



$\vec{a}=(0,\ t,\ 0),\ \vec{b}=(-t,\ 0,\ 0),\ \vec{c}=(0,\ 0,\ -t)$
이때

$\overrightarrow{PQ}=\left(-t,\ \frac{1}{2}t,\ \frac{2}{3}t\right),\ \overrightarrow{AR}=\left(-t,\ \frac{1}{3}t,\ -t\right)$

이므로

$\overrightarrow{PQ}-\overrightarrow{AR}=\left(0,\ \frac{1}{6}t,\ \frac{5}{3}t\right)$

$\overrightarrow{PQ}-\overrightarrow{AR}=l\vec{a}+m\vec{b}+n\vec{c}$라 하면

$$\left(0,\ \frac{1}{6}t,\ \frac{5}{3}t\right)=l(0,\ t,\ 0)+m(-t,\ 0,\ 0)+n(0,\ 0,\ -t)=(-mt,\ lt,\ -nt)$$

이므로 $l=\frac{1}{6},\ m=0,\ n=-\frac{5}{3}$

$\therefore \overrightarrow{PQ}-\overrightarrow{AR}=\frac{1}{6}\vec{a}-\frac{5}{3}\vec{c}$

501 문제 이해 $\overrightarrow{AB}=\vec{a},\ \overrightarrow{AH}=\vec{b}$라 하면
$\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HG}=\vec{b}+\vec{a}$이므로

$\overrightarrow{AP}=2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AH}=2\vec{a}-\vec{b},$

$\overrightarrow{AQ}=-\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AH}=-\vec{a}+3\vec{b},$

$\overrightarrow{AR}=5\overrightarrow{AG}+k\overrightarrow{AH}=5(\vec{a}+\vec{b})+k\vec{b}$

$=5\vec{a}+(5+k)\vec{b}$ ● 60%

해결 과정 이때 세 점 P, Q, R가 한 직선 위에 있으므로 $\overrightarrow{PQ}=t\overrightarrow{QR}\ (t\neq0)$라 하면

$\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{AP}=t(\overrightarrow{AR}-\overrightarrow{AQ})$

$-\vec{a}+3\vec{b}-(2\vec{a}-\vec{b})$

$=t\{5\vec{a}+(5+k)\vec{b}-(-\vec{a}+3\vec{b})\}$

$-3\vec{a}+4\vec{b}=t\{6\vec{a}+(2+k)\vec{b}\}$ ● 20%

답 구하기 따라서 $-3=6t,\ 4=t(2+k)$이므로

$t=-\frac{1}{2},\ k=-10$ ● 20%

답 -10

502 문제 이해 원점 O에 대하여

$\overrightarrow{OP}=(1-t)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$ (t는 실수)

라 하면

$\overrightarrow{OP}=(1-t)(2,\ 3,\ 4)+t(3,\ 0,\ 6)$

$=(2-2t,\ 3-3t,\ 4-4t)+(3t,\ 0,\ 6t)$

$=(2+t,\ 3-3t,\ 4+2t)$ ● 30%

해결 과정 이때

$\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OP}$

$=(-1,\ 3,\ 4)-(2+t,\ 3-3t,\ 4+2t)$

$=(-3-t,\ 3t,\ -2t)$

$\overrightarrow{PD}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OP}$

$=(1,\ 5,\ -5)-(2+t,\ 3-3t,\ 4+2t)$

$=(-1-t,\ 2+3t,\ -9-2t)$

이므로

$\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PD}$

$=(-3-t,\ 3t,\ -2t)\cdot(-1-t,\ 2+3t,\ -9-2t)$

$=(-3-t)(-1-t)+3t(2+3t)-2t(-9-2t)$

$=t^2+4t+3+6t+9t^2+18t+4t^2$

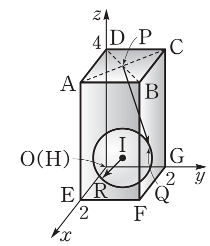
$=14t^2+28t+3$

$=14(t+1)^2-11$ ● 60%

답 구하기 따라서 $\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PD}$는 $t=-1$일 때 최솟값 -11을 갖는다. ● 10%

답 -11

503 오른쪽 그림과 같이 꼭짓점 H가 원점, 모서리 HE, HG, HD가 각각 x축, y축, z축의 양의 방향과 일치하도록 직육면체를 좌표공간에 놓으면



E(2, 0, 0), I(1, 1, 1),

P(1, 1, 4), Q(1, 2, 1)

이때 $\overrightarrow{IE}=(1,\ -1,\ -1)$이므로

$\overrightarrow{IR}=\frac{\overrightarrow{IE}}{|\overrightarrow{IE}|}=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,\ -1,\ -1)$

또 $\overrightarrow{PQ}=(0,\ 1,\ -3)$이므로

$\overrightarrow{PQ}+2\sqrt{3}\,\overrightarrow{IR}$

$=(0,\ 1,\ -3)+2\sqrt{3}\times\frac{1}{\sqrt{3}}(1,\ -1,\ -1)$

$=(0,\ 1,\ -3)+(2,\ -2,\ -2)$

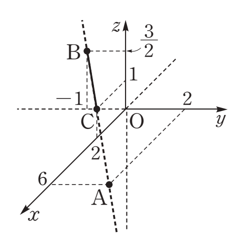
$=(2,\ -1,\ -5)$

$\therefore |\overrightarrow{PQ}+2\sqrt{3}\,\overrightarrow{IR}|=\sqrt{2^2+(-1)^2+(-5)^2}$

$=\sqrt{30}$

답 ⑤

504 주어진 직선이 xy평면, yz평면, zx평면과 만나는 점을 각각 A, B, C라 하면



A(6, 2, 0),

$B\left(0,\ -1,\ \frac{3}{2}\right),$

C(2, 0, 1)

이때 직선의 $x\geq0,\ y\leq0,\ z\geq0$인 부분의 길이는 주어진 직선이 yz평면, zx평면에 의하여 잘린 선분의 길이와 같으므로

$$\overline{BC}=\sqrt{(2-0)^2+(0+1)^2+\left(1-\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{21}}{2}$$

답 ②

505 점 P의 좌표를 $(x,\ y,\ z)$라 하면 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OA}=0$에서

$(x,\ y,\ z)\cdot(1,\ 2,\ -2)=0$

$\therefore x+2y-2z=0$ …… ㉠

즉 점 P의 자취는 구와 평면 ㉠의 교선이다.

일품 BOX

$P\left(0,\ \frac{1}{2}t,\ -t\right),$
$Q\left(-t,\ t,\ -\frac{1}{3}t\right),$
$A(0,\ 0,\ 0),$
$R\left(-t,\ \frac{1}{3}t,\ -t\right)$

접하는 구의 지름의 길이는 밑면인 정사각형의 한 변의 길이와 같으므로 구의 반지름의 길이는 1이다.

직선의 방정식에 $z=0$, $x=0$, $y=0$을 각각 대입하여 좌표를 구한다.

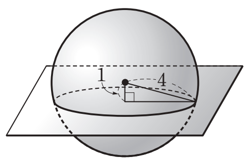
공간도형과 공간벡터 Ⅲ

이때 구의 중심 $(3,\ 0,\ 3)$과 평면 ㉠ 사이의 거리는

$$\frac{|3-6|}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}}=1$$

이므로 오른쪽 그림에서 교선인 원의 반지름의 길이는

$$\sqrt{4^2-1^2}=\sqrt{15}$$

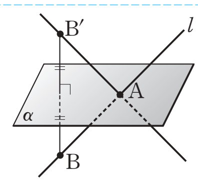


따라서 점 P가 나타내는 도형의 둘레의 길이는

$$2\pi\times\sqrt{15}=2\sqrt{15}\pi$$

답 ⑤

506 평면 α에 대하여 점 B와 대칭인 점을 B′이라 하면 점 B′은 직선



$$x-1=\frac{y+1}{4}=\frac{z-2}{2}$$

위의 점이다.

이때 $x-1=\frac{y+1}{4}=\frac{z-2}{2}=t$ (t는 실수)로 놓으면

$$x=t+1,\ y=4t-1,\ z=2t+2$$

이므로 $\mathrm{B'}(t+1,\ 4t-1,\ 2t+2)$로 놓을 수 있다.

또 직선 BB′의 방향벡터를 $\vec{u}$, 평면 α의 법선벡터를 $\vec{n}$이라 하면

$$\vec{u}=(t-2,\ 4t-p-1,\ 2t-q+2),$$
$$\vec{n}=(1,\ 1,\ 2)$$

직선 BB′과 평면 α가 서로 수직이므로 $\vec{u}\,/\!/\,\vec{n}$에서 $\vec{u}=s\vec{n}\,(s\neq0)$이라 하면

$t-2=s$ …… ㉠

$4t-p-1=s$ …… ㉡

$2t-q+2=2s$ …… ㉢

한편 $\overline{\mathrm{BB'}}$의 중점 $\left(\frac{t+4}{2},\ \frac{4t-1+p}{2},\ \frac{2t+2+q}{2}\right)$가 평면 $x+y+2z=4$ 위에 있으므로

$$\frac{t+4}{2}+\frac{4t-1+p}{2}+2\times\frac{2t+2+q}{2}=4$$

$\therefore 9t+p+2q=1$ …… ㉣

㉠, ㉡, ㉢, ㉣을 연립하여 풀면

$$t=-1,\ s=-3,\ p=-2,\ q=6$$
$$\therefore p+q=4$$

답 ①

일품 BOX

점 P가 평면 α에 대하여 대칭인 점을 P′이라 하면
(i) $\overline{\mathrm{PP'}}\perp\alpha$
(ii) $\overline{\mathrm{PP'}}$의 중점은 평면 α 위에 있다.

㉠을 ㉡, ㉢에 각각 대입하여 정리하면
$p=3t+1,\ q=6$
이것을 ㉣에 대입하면
$9t+3t+1+12=1$
$12t=-12$
$\therefore t=-1$
따라서 $p=-2$이고 ㉠에서
$s=-3$

507 $x=y-1=\frac{1-z}{3}=t$ (t는 실수)로 놓으면

$$x=t,\ y=t+1,\ z=-3t+1$$

이므로 $\mathrm{P}(t,\ t+1,\ -3t+1)$로 놓을 수 있다.

이때 점 P는 평면 $2x+y+2z=0$ 위의 점이므로

$$2t+(t+1)+2(-3t+1)=0$$
$$-3t+3=0$$
$$\therefore t=1$$
$$\therefore \overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1,\ 2,\ -2)$$

평면 $z=1$의 법선벡터를 $\vec{n}$이라 하면

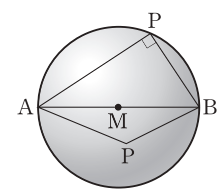
$$\vec{n}=(0,\ 0,\ 1)$$

벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$와 평면 $z=1$이 이루는 예각의 크기가 θ이므로 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$, $\vec{n}$이 이루는 각의 크기는 $\frac{\pi}{2}-\theta$이다.

$$\therefore \cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta$$
$$=\frac{|1\times0+2\times0+(-2)\times1|}{\sqrt{1+2^2+(-2)^2}\sqrt{0^2+0^2+1^2}}$$
$$=\frac{2}{3}$$

답 ③

508 (i) $\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}\le0$이므로 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{PA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{PB}}$가 이루는 각의 크기를 θ라 하면



$$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}$$
$$=|\overrightarrow{\mathrm{PA}}||\overrightarrow{\mathrm{PB}}|\cos\theta\le0$$

즉 $\cos\theta\le0$이므로 $90^\circ\le\theta\le180^\circ$

따라서 점 P는 두 점 A, B를 지름의 양 끝 점으로 하는 구의 경계 및 내부에 있다.

(ii) $|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|$이므로 점 P는 $\overline{\mathrm{AB}}$의 중점을 지나고, 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$에 수직인 평면 위에 있다.

(i), (ii)에서 점 P의 자취는 $\overline{\mathrm{AB}}$의 중점 M을 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\overline{\mathrm{AM}}$의 길이와 같은 원의 경계 및 내부이다. 이때

$$\overline{\mathrm{AM}}=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{AB}}$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{(1-3)^2+(1+3)^2+(0-4)^2}=3$$

이므로 점 P가 나타내는 도형의 넓이는

$$\pi\times3^2=9\pi$$

답 ③

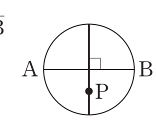
1등급 비밀노트

좌표공간은 좌표평면을 확장한 것과 같으므로 주어진 조건을 좌표평면에서 생각해 보면

(i) $\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}\le0$
➡ 점 P의 자취는 두 점 A, B를 지름의 양 끝 점으로 하는 원의 경계 및 내부이다.

(ii) $|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|$
➡ 점 P의 자취는 $\overline{\mathrm{AB}}$의 중점을 지나고 $\overline{\mathrm{AB}}$에 수직인 직선이다.

(i), (ii)에서 점 P의 자취는 원의 지름 중 $\overline{\mathrm{AB}}$에 수직인 지름이다.



509 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(1,\ -1,\ 1)$

조건 (가)에서 $z=-2x$이므로

$$\mathrm{P}(x,\ y,\ -2x)$$
$$\therefore \overrightarrow{\mathrm{BP}}=(x-2,\ y+1,\ -2x-1)$$

조건 (나)에서 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\perp\overrightarrow{\mathrm{BP}}$이므로 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}=0$

$$(x-2)-(y+1)+(-2x-1)=0$$
$$\therefore x=-y-4$$

따라서 점 P가 나타내는 도형의 방정식은

$$x=\frac{y+4}{-1}=\frac{z}{-2}$$

이므로 점 P가 나타내는 도형은 점 $(0,\ -4,\ 0)$을 지나고 방향벡터가 $(1,\ -1,\ -2)$인 직선이다. 답 ③

일품 BOX

$z=-2x$에서 $x=\frac{z}{-2}$

510 점 $(a,\ b,\ c)$는 구 $x^2+y^2+z^2=36$ 위의 점이므로

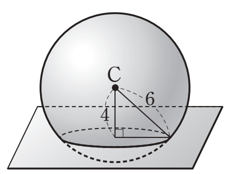
$$a^2+b^2+c^2=36$$

구의 중심 $(0,\ 0,\ 0)$과 평면 $ax+by+cz=24$ 사이의 거리는

원점과 평면 $ax+by+cz+d=0$ 사이의 거리는 $\frac{|d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

$$\frac{|-24|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{24}{6}=4$$

오른쪽 그림에서 구가 평면에 의하여 잘린 단면은 반지름의 길이가 $\sqrt{6^2-4^2}=2\sqrt{5}$인 원이므로 구하는 단면의 넓이는



$$\pi\times(2\sqrt{5})^2=20\pi$$

답 ②

511 두 평면 α, β의 법선벡터를 각각 $\overrightarrow{n_1}$, $\overrightarrow{n_2}$라 하면

$$\overrightarrow{n_1}=(6,\ 3,\ -2),\ \overrightarrow{n_2}=(a,\ b,\ c)$$

$\alpha /\!/ \beta$에서 $\overrightarrow{n_1} /\!/ \overrightarrow{n_2}$이므로 $\overrightarrow{n_2}=t\overrightarrow{n_1}\ (t\neq0)$이라 하면

$$a=6t,\ b=3t,\ c=-2t$$

이때 직선 l의 방향벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(6,\ 3,\ -2)$와 두 평면 α, β의 법선벡터가 같으므로 직선 l은 평면 α, β와 수직이다.

따라서 두 점 A, B 사이의 거리는 두 평면 α, β 사이의 거리와 같다.

즉 평면 α 위의 한 점 $(0,\ 0,\ 2)$와 평면 β: $ax+by+cz-9=0$ 사이의 거리가 1이므로

$$\frac{|2c-9|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=1$$

$$\frac{|2\times(-2t)-9|}{\sqrt{(6t)^2+(3t)^2+(-2t)^2}}=1$$

$$\frac{|-4t-9|}{|7t|}=1,\qquad 4t+9=\pm7t$$

$\therefore t=3$ ($\because t$는 정수)

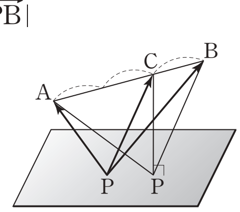
$\therefore a+b+c=7t=7\times3=21$ 답 21

$a=6t$, $b=3t$, $c=-2t$가 모두 정수이므로 t는 정수이다.

512 $\overrightarrow{\mathrm{AP}}+2\overrightarrow{\mathrm{BP}}=-(\overrightarrow{\mathrm{PA}}+2\overrightarrow{\mathrm{PB}})$이므로

$$|\overrightarrow{\mathrm{AP}}+2\overrightarrow{\mathrm{BP}}|=|\overrightarrow{\mathrm{PA}}+2\overrightarrow{\mathrm{PB}}|$$

$\overline{\mathrm{AB}}$를 $2:1$로 내분하는 점을 C라 하면



$$\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{PA}}+2\overrightarrow{\mathrm{PB}}}{3}$$

이므로 $|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|$가 최소일 때 $|\overrightarrow{\mathrm{PA}}+2\overrightarrow{\mathrm{PB}}|$, 즉 $|\overrightarrow{\mathrm{AP}}+2\overrightarrow{\mathrm{BP}}|$도 최소이다.

점 C의 좌표는

$$\left(\frac{2\times2+1\times5}{2+1},\ \frac{2\times5+1\times(-1)}{2+1},\ \frac{2\times4+1\times1}{2+1}\right),$$

즉 $(3,\ 3,\ 3)$

점 $\mathrm{C}(3,\ 3,\ 3)$과 평면 $x-2y+2z+3=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|3-6+6+3|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}}=2$$

이므로

$$|\overrightarrow{\mathrm{AP}}+2\overrightarrow{\mathrm{BP}}|=|3\overrightarrow{\mathrm{PC}}|\geq6$$

따라서 구하는 최솟값은 6이다. 답 ③

513 해결 과정 구의 중심을 C라 하면 $\mathrm{C}(1,\ 0,\ 0)$이므로 평면 α의 법선벡터는

$$\overrightarrow{\mathrm{CA}}=(2,\ 2,\ -2)$$

평면 β의 법선벡터는

$$\overrightarrow{\mathrm{CB}}=(-2,\ 2,\ 2)$$ ● 60%

답 구하기 이때 두 평면 α, β가 이루는 예각의 크기는 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{CA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{CB}}$가 이루는 예각의 크기와 같으므로

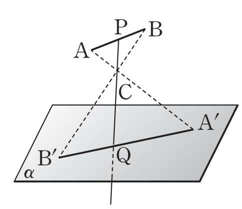
$$\cos\theta=\frac{|\overrightarrow{\mathrm{CA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CB}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{CA}}||\overrightarrow{\mathrm{CB}}|}$$

$$=\frac{|2\times(-2)+2\times2+(-2)\times2|}{\sqrt{2^2+2^2+(-2)^2}\sqrt{(-2)^2+2^2+2^2}}$$

$$=\frac{1}{3}$$ ● 40%

답 $\frac{1}{3}$

514 문제 이해 오른쪽 그림에서 두 직선 AC, BC가 평면 α와 만나는 점을 각각 A′, B′이라 하면 점 Q의 자취는 $\overline{\mathrm{A'B'}}$과 같다. ● 30%



해결 과정 직선 AC의 방정식은

$$\frac{x+1}{1+1}=\frac{y+1}{1+1}=\frac{z+3}{1+3}$$

$$\therefore x+1=y+1=\frac{z+3}{2}$$

직선 BC의 방정식은

$$\frac{x+3}{1+3}=\frac{y-3}{1-3}=\frac{z-5}{1-5}$$

$$\therefore \frac{x+3}{2}=3-y=\frac{5-z}{2}$$ ● 20%

이때 $x+1=y+1=\frac{z+3}{2}=t$ (t는 실수)로 놓으면

$$x=t-1,\ y=t-1,\ z=2t-3$$

이므로 $\mathrm{A'}(t-1,\ t-1,\ 2t-3)$으로 놓을 수 있다.

점 A′이 평면 α: $2x-y+z-5=0$ 위에 있으므로

$$2(t-1)-(t-1)+(2t-3)-5=0$$

$$3t-9=0\qquad\therefore t=3$$

$$\therefore \mathrm{A'}(2,\ 2,\ 3)$$ ● 20%

Ⅲ 공간도형과 공간벡터

또 $\frac{x+3}{2}=3-y=\frac{5-z}{2}=s$ (s는 실수)로 놓으면

$x=2s-3,\ y=-s+3,\ z=-2s+5$

이므로 $\mathrm{B}'(2s-3,\ -s+3,\ -2s+5)$로 놓을 수 있다.

점 B'이 평면 α: $2x-y+z-5=0$ 위에 있으므로

$2(2s-3)-(-s+3)-2s+5-5=0$

$3s-9=0 \quad \therefore s=3$

$\therefore \mathrm{B}'(3,\ 0,\ -1)$ ● 20%

답 구하기 $\therefore l^2=\overline{\mathrm{A'B'}}^2$

$=(3-2)^2+(0-2)^2+(-1-3)^2$

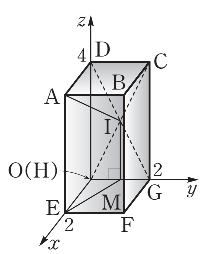
$=21$ ● 10%

답 21

515 전략 직육면체를 좌표공간 위에 놓고 점의 좌표를 이용하여 선분의 길이를 구한다.

Step 1 세 점 A, D, F를 지나는 평면 α는 평면 AFGD와 같으므로 $\overline{\mathrm{CH}}$와 $\overline{\mathrm{DG}}$의 교점을 I라 하면 $\overline{\mathrm{AI}}$는 평면 α와 평면 β 위에 있으므로 교선의 일부이다.

따라서 오른쪽 그림과 같이 꼭짓점 H가 원점, 세 모서리 HE, HG, HD가 각각 x축, y축, z축의 양의 방향과 일치하도록 직육면체를 좌표공간에 놓으면



$\mathrm{A}(2,\ 0,\ 4),\ \mathrm{C}(0,\ 2,\ 4),$

$\mathrm{G}(0,\ 2,\ 0),\ \mathrm{I}(0,\ 1,\ 2)$

이므로

점 I는 직사각형 DHGC의 두 대각선의 교점이므로 $\overline{\mathrm{HC}}$의 중점이다.

$\overline{\mathrm{AI}}=\sqrt{(0-2)^2+(1-0)^2+(2-4)^2}=3$

Step 2 또 $\overline{\mathrm{HG}}$의 중점을 M이라 하면 $\overline{\mathrm{AI}}$의 평면 EFGH 위로의 정사영은 $\overline{\mathrm{EM}}$이고

$\mathrm{E}(2,\ 0,\ 0),\ \mathrm{M}(0,\ 1,\ 0)$

이므로

$\overline{\mathrm{EM}}=\sqrt{(0-2)^2+(1-0)^2}=\sqrt{5}$

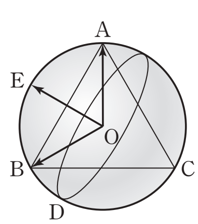
Step 3 $\cos\theta=\frac{\overline{\mathrm{EM}}}{\overline{\mathrm{AI}}}=\frac{\sqrt{5}}{3}$이므로

$90\cos^2\theta=90\times\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2=50$

답 50

516 전략 집합 X는 구 위의 점들의 집합이고, 점 D가 나타내는 도형은 원임을 이해한다.

Step 1 집합 X는 중심이 O이고 반지름의 길이가 1인 구 위의 점들의 집합이다.



정삼각형 ABC의 무게중심이 O이므로 정삼각형 ABC의 한 변의 길이를 x라 하면

$\frac{\sqrt{3}}{2}x\times\frac{2}{3}=1 \quad \therefore x=\sqrt{3}$

Step 2 따라서 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OE}}$라 하면 $|\overrightarrow{\mathrm{OE}}|=1$이고 $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$와 $\overrightarrow{\mathrm{OE}}$가 이루는 각의 크기를 θ라 하면

$\overrightarrow{\mathrm{DA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DB}}$

$=(\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OD}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OD}})$

$=\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}+|\overrightarrow{\mathrm{OD}}|^2$

$=\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OD}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}})+|\overrightarrow{\mathrm{OD}}|^2$

$=\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OE}}+|\overrightarrow{\mathrm{OD}}|^2$

$=1\times1\times\cos120^\circ-1\times1\times\cos\theta+1^2$

$\angle\mathrm{ACB}=60^\circ$이고, 중심각의 크기는 원주각의 크기의 2배이므로 $\angle\mathrm{AOB}=120^\circ$

$=-\frac{1}{2}-\cos\theta+1$

$=\frac{1}{2}-\cos\theta$

즉 $\frac{1}{2}-\cos\theta=\frac{1}{2}$이므로

$\cos\theta=0 \quad \therefore \theta=\frac{\pi}{2}$

Step 3 따라서 점 D가 나타내는 도형은 반지름의 길이가 1인 원이므로 구하는 도형의 넓이는 π이다. 답 ④

517 전략 두 직선에 의하여 결정되는 평면의 법선벡터는 두 직선의 방향벡터와 각각 수직이다.

Step 1 주어진 두 직선은 평행하지 않으므로 한 점에서 만난다.

$x+1=y+3=z=t$ (t는 실수)라 하면

$x=t-1,\ y=t-3,\ z=t$

이것을 $\frac{x+1}{3}=1-y=\frac{z}{a}$에 대입하면

$\frac{t}{3}=4-t=\frac{t}{a} \quad \therefore t=3,\ a=3$

Step 2 두 직선의 방향벡터를 각각 $\overrightarrow{n_1},\ \overrightarrow{n_2}$라 하면

$\overrightarrow{n_1}=(1,\ 1,\ 1),\ \overrightarrow{n_2}=(3,\ -1,\ 3)$

두 직선에 의하여 결정되는 평면의 법선벡터를 $\vec{n}=(p,\ q,\ r)$라 하면 $\overrightarrow{n_1}\perp\vec{n},\ \overrightarrow{n_2}\perp\vec{n}$에서

$\overrightarrow{n_1}\cdot\vec{n}=0,\ \overrightarrow{n_2}\cdot\vec{n}=0$

$p+q+r=0,\ 3p-q+3r=0$

$\therefore r=-p,\ q=0$

$\begin{cases} p+q+r=0 & \cdots ㉠ \\ 3p-q+3r=0 & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠+㉡을 하면

$4p+4r=0$

$\therefore r=-p$

이것을 ㉠에 대입하면

$q=0$

따라서 $\vec{n}=(p,\ 0,\ -p)$, 즉 $\vec{n}=(1,\ 0,\ -1)$이고, 두 직선에 의하여 결정되는 평면은 직선 $x+1=y+3=z$ 위의 점 $(-1,\ -3,\ 0)$을 지나므로 평면의 방정식은

$(x+1)-(z-0)=0$

$\therefore x-z+1=0$

Step 3 평면 $x-z+1=0$과 구 $(x-2)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=b$가 접하면 평면과 구의 중심 $(2,\ 2,\ -1)$ 사이의 거리가 구의 반지름의 길이와 같으므로

$\frac{|2+1+1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\sqrt{b}, \quad 2\sqrt{2}=\sqrt{b}$

$\therefore b=8$

$\therefore a+b=11$

답 11

SINSAGO

Memo

Memo