정답 및 풀이

Ⅰ 함수의 극한과 연속

Ⅱ 다항함수의 미분법

Ⅲ 다항함수의 적분법

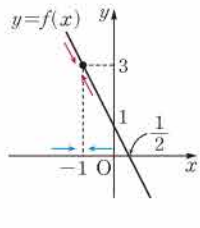
01 함수의 극한

01 함수의 극한

확인

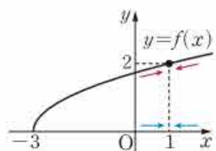
본책 6~7쪽

1 (1) $f(x)=-2x+1$이라 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 x의 값이 -1에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 3에 한없이 가까워진다.



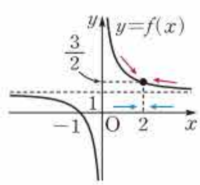
$\therefore \lim_{x\to-1}(-2x+1)=3$

(2) $f(x)=\sqrt{x+3}$이라 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 x의 값이 1에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 2에 한없이 가까워진다.



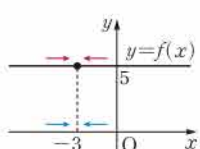
$\therefore \lim_{x\to1}\sqrt{x+3}=2$

(3) $f(x)=\dfrac{1}{x}+1$이라 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 x의 값이 2에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 $\dfrac{3}{2}$에 한없이 가까워진다.



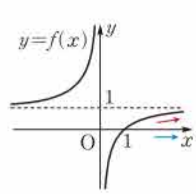
$\therefore \lim_{x\to2}\left(\dfrac{1}{x}+1\right)=\dfrac{3}{2}$

(4) $f(x)=5$라 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 x의 값이 -3에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 5에 한없이 가까워진다.



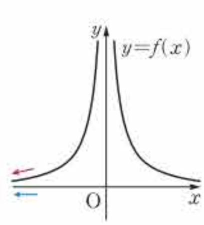
$\therefore \lim_{x\to-3}5=5$ 답 (1) 3 (2) 2 (3) $\dfrac{3}{2}$ (4) 5

2 (1) $f(x)=1-\dfrac{1}{x}$이라 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 x의 값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값은 1에 한없이 가까워진다.



$\therefore \lim_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)=1$

(2) $f(x)=\dfrac{1}{|x|}$이라 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 x의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값은 0에 한없이 가까워진다.



$\therefore \lim_{x\to-\infty}\dfrac{1}{|x|}=0$ 답 (1) 1 (2) 0

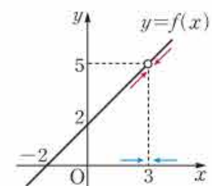
유제

본책 9~10쪽

1 (1) $f(x)=\dfrac{x^2-x-6}{x-3}$이라 하면 $x\neq3$일 때,

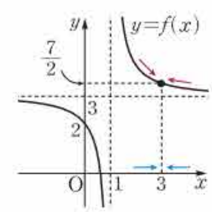
$$f(x)=\frac{x^2-x-6}{x-3}=\frac{(x+2)(x-3)}{x-3}=x+2$$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 x의 값이 3에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 5에 한없이 가까워진다.



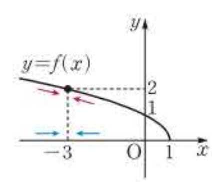
$\therefore \lim_{x\to3}\dfrac{x^2-x-6}{x-3}=5$

(2) $f(x)=\dfrac{1}{x-1}+3$이라 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 x의 값이 3에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 $\dfrac{7}{2}$에 한없이 가까워진다.



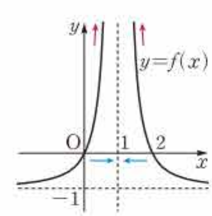
$\therefore \lim_{x\to3}\left(\dfrac{1}{x-1}+3\right)=\dfrac{7}{2}$

(3) $f(x)=\sqrt{-x+1}$이라 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 x의 값이 -3에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 2에 한없이 가까워진다.



$\therefore \lim_{x\to-3}\sqrt{-x+1}=2$

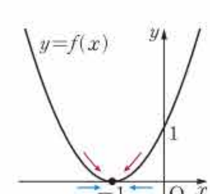
(4) $f(x)=\dfrac{1}{(x-1)^2}-1$이라 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 x의 값이 1에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 한없이 커진다.



$\therefore \lim_{x\to1}\left\{\dfrac{1}{(x-1)^2}-1\right\}=\infty$

답 (1) 5 (2) $\dfrac{7}{2}$ (3) 2 (4) ∞

2 ㄱ. $f(x)=(x+1)^2$이라 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 x의 값이 -1에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 0에 한없이 가까워진다.

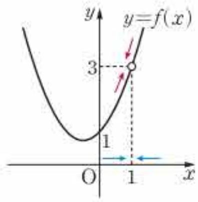


$\therefore \lim_{x\to-1}(x+1)^2=0$

ㄴ. $f(x)=\dfrac{x^3-1}{x-1}$이라 하면 $x\neq1$일 때,

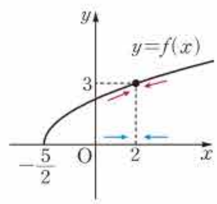
$$f(x)=\frac{x^3-1}{x-1}=\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}=x^2+x+1$$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 x의 값이 1에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 3에 한없이 가까워진다.



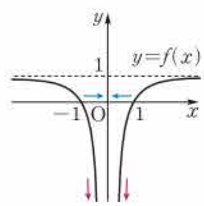
$\therefore \lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-1}{x-1}=3$

ㄷ. $f(x)=\sqrt{2x+5}$라 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 x의 값이 2에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 3에 한없이 가까워진다.



$\therefore \lim\limits_{x\to2}\sqrt{2x+5}=3$

ㄹ. $f(x)=1-\dfrac{1}{|x|}$이라 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 x의 값이 0에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커진다.



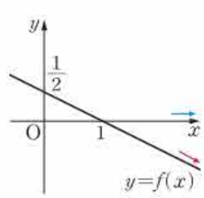
$\therefore \lim\limits_{x\to0}\left(1-\dfrac{1}{|x|}\right)=-\infty$

이상에서 극한값이 존재하는 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

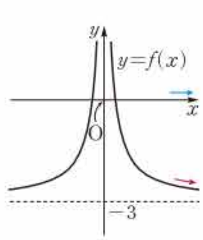
참고 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to a}f(x)=-\infty$는 극한값이 ∞, $-\infty$라는 뜻이 아니라 함수 $f(x)$가 양의 무한대, 음의 무한대로 발산함을 의미한다. 이때는 극한값이 없다고 한다.

3 (1) $f(x)=\dfrac{1-x}{2}$라 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 x의 값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값은 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커진다.



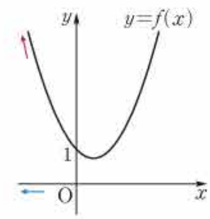
$\therefore \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-x}{2}=-\infty$

(2) $f(x)=\dfrac{1}{|x|}-3$이라 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 x의 값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값은 -3에 한없이 가까워진다.



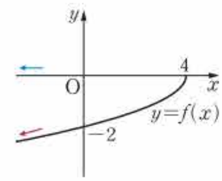
$\therefore \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{|x|}-3\right)=-3$

(3) $f(x)=x^2-x+1$이라 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 x의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값은 한없이 커진다.



$\therefore \lim\limits_{x\to-\infty}(x^2-x+1)=\infty$

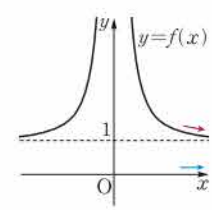
(4) $f(x)=-\sqrt{4-x}$라 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 x의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값은 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커진다.



$\therefore \lim\limits_{x\to-\infty}(-\sqrt{4-x})=-\infty$

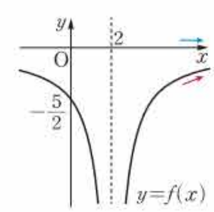
답 (1) $-\infty$ (2) -3 (3) ∞ (4) $-\infty$

4 ㄱ. $f(x)=\dfrac{1}{x^2}+1$이라 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 x의 값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값은 1에 한없이 가까워진다.



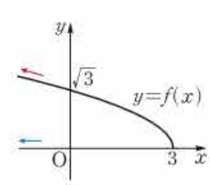
$\therefore \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{x^2}+1\right)=1$

ㄴ. $f(x)=-\dfrac{5}{|x-2|}$라 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 x의 값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값은 0에 한없이 가까워진다.



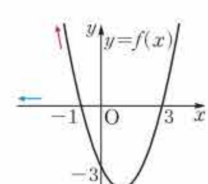
$\therefore \lim\limits_{x\to\infty}\left(-\dfrac{5}{|x-2|}\right)=0$

ㄷ. $f(x)=\sqrt{3-x}$라 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 x의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값은 한없이 커진다.



$\therefore \lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{3-x}=\infty$

ㄹ. $f(x)=x^2-2x-3$이라 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 x의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값은 한없이 커진다.



$\therefore \lim\limits_{x\to-\infty}(x^2-2x-3)=\infty$

이상에서 극한값이 존재하는 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ㄱ, ㄴ

02 우극한과 좌극한

확인 본책 11쪽

1 (1) x의 값이 0보다 작으면서 0에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 2에 한없이 가까워진다.

$\therefore \lim_{x\to 0-} f(x)=2$

(2) x의 값이 2보다 크면서 2에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 4에 한없이 가까워진다.

$\therefore \lim_{x\to 2+} f(x)=4$

(3) x의 값이 4보다 작으면서 4에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 0에 한없이 가까워진다.

$\therefore \lim_{x\to 4-} f(x)=0$

(4) x의 값이 4보다 크면서 4에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 -2에 한없이 가까워진다.

$\therefore \lim_{x\to 4+} f(x)=-2$

답 (1) 2 (2) 4 (3) 0 (4) -2

유제 본책 13~14쪽

1 x의 값이 -2보다 작으면서 -2에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 1에 한없이 가까워진다.

$\therefore \lim_{x\to -2-} f(x)=1$

x의 값이 2보다 크면서 2에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 3에 한없이 가까워진다.

$\therefore \lim_{x\to 2+} f(x)=3$

x의 값이 4보다 작으면서 4에 한없이 가까워질 때 $f(x)$의 값은 0에 한없이 가까워진다.

$\therefore \lim_{x\to 4-} f(x)=0$

$\therefore \lim_{x\to -2-} f(x)+\lim_{x\to 2+} f(x)+\lim_{x\to 4-} f(x)$

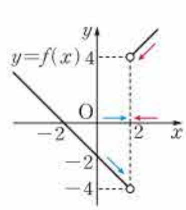
$=1+3+0=4$

답 4

2 (i) $x>2$일 때, $f(x)=\dfrac{(x+2)(x-2)}{x-2}=x+2$

(ii) $x<2$일 때, $f(x)=\dfrac{(x+2)(x-2)}{-(x-2)}=-x-2$

(i), (ii)에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$\lim_{x\to 2+} f(x)=4$, $\lim_{x\to 2-} f(x)=-4$

$\therefore \lim_{x\to 2+} f(x)+\lim_{x\to 2-} f(x)=4-4=0$

답 0

3 ㄱ. $\lim_{x\to 0-} f(x)=0$

ㄷ. $f(x)=t$로 놓으면 $x\to 1-$일 때 $t\to 1+$이므로

$\lim_{x\to 1-} f(f(x))=\lim_{t\to 1+} f(t)=2$

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

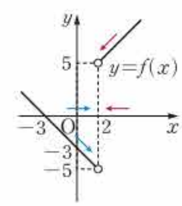
답 ㄴ, ㄷ

4 (1) $f(x)=\dfrac{x^2+x-6}{|x-2|}$이라 하면

(i) $x>2$일 때, $f(x)=\dfrac{(x+3)(x-2)}{x-2}=x+3$

(ii) $x<2$일 때, $f(x)=\dfrac{(x+3)(x-2)}{-(x-2)}=-x-3$

(i), (ii)에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$\lim_{x\to 2+} \dfrac{x^2+x-6}{|x-2|}=5$,

$\lim_{x\to 2-} \dfrac{x^2+x-6}{|x-2|}=-5$

따라서 $\lim_{x\to 2+} \dfrac{x^2+x-6}{|x-2|}\neq \lim_{x\to 2-} \dfrac{x^2+x-6}{|x-2|}$이므로

$\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2+x-6}{|x-2|}$의 값은 존재하지 않는다.

(2) $f(x)=x-[x]$라 하면

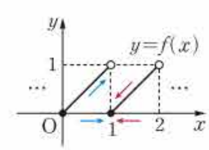
(i) $1\le x<2$일 때,

$[x]=1$이므로 $f(x)=x-1$

(ii) $0\le x<1$일 때,

$[x]=0$이므로 $f(x)=x$

(i), (ii)에서 $0\le x<2$일 때 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$\lim_{x\to 1+} (x-[x])=0$, $\lim_{x\to 1-} (x-[x])=1$

따라서 $\lim_{x\to 1+} (x-[x])\neq \lim_{x\to 1-} (x-[x])$이므로

$\lim_{x\to 1} (x-[x])$의 값은 존재하지 않는다.

(3) $f(x)=\dfrac{|x+2|}{[x]}$라 하면

(i) $-2\le x<-1$일 때,

$[x]=-2$이고 $|x+2|=x+2$이므로

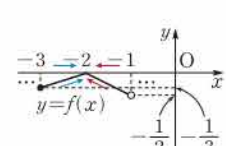
$f(x)=\dfrac{x+2}{-2}=-\dfrac{1}{2}x-1$

(ii) $-3\le x<-2$일 때,

$[x]=-3$이고 $|x+2|=-x-2$이므로

$f(x)=\dfrac{-x-2}{-3}=\dfrac{1}{3}x+\dfrac{2}{3}$

(i), (ii)에서 $-3\le x<-1$일 때 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$$\lim_{x\to-2+}\frac{|x+2|}{[x]}=0,\ \lim_{x\to-2-}\frac{|x+2|}{[x]}=0$$

$$\therefore \lim_{x\to-2}\frac{|x+2|}{[x]}=0$$

답 (1) 존재하지 않는다. (2) 존재하지 않는다. (3) 0

5 ① $\lim_{x\to-1}f(x)=2$

② $\lim_{x\to0+}f(x)=\lim_{x\to0-}f(x)=0$이므로 $\lim_{x\to0}f(x)=0$

③ $\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1-}f(x)=2$이므로 $\lim_{x\to1}f(x)=2$

④ $\lim_{x\to2}f(x)=0$

⑤ $\lim_{x\to3+}f(x)=1,\ \lim_{x\to3-}f(x)=2$이므로

$$\lim_{x\to3+}f(x)\neq\lim_{x\to3-}f(x)$$

따라서 $\lim_{x\to3}f(x)$의 값은 존재하지 않는다.

답 ⑤

03 함수의 극한값의 계산

확인 본책 15~17쪽

1 (1) $\lim_{x\to3}\{f(x)+5g(x)\}=\lim_{x\to3}f(x)+5\lim_{x\to3}g(x)$

$=2+5\cdot(-3)=-13$

(2) $\lim_{x\to3}\{f(x)-2g(x)\}=\lim_{x\to3}f(x)-2\lim_{x\to3}g(x)$

$=2-2\cdot(-3)=8$

(3) $\lim_{x\to3}4f(x)g(x)=4\lim_{x\to3}f(x)\cdot\lim_{x\to3}g(x)$

$=4\cdot2\cdot(-3)=-24$

(4) $\lim_{x\to3}\frac{3f(x)}{g(x)}=\frac{3\lim_{x\to3}f(x)}{\lim_{x\to3}g(x)}=\frac{3\cdot2}{-3}=-2$

답 (1) -13 (2) 8 (3) -24 (4) -2

2 (1) $\lim_{x\to0}\frac{x^2+x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{x(x+1)}{x}=\lim_{x\to0}(x+1)=1$

(2) $\lim_{x\to\infty}\frac{x}{2x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2+\frac{1}{x}}=\frac{1}{2}$

(3) $\lim_{x\to\infty}(x^2-2x)=\lim_{x\to\infty}x^2\left(1-\frac{2}{x}\right)=\infty$

(4) $\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x+1}-1\right)=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\cdot\frac{-x}{x+1}=\lim_{x\to0}\frac{-1}{x+1}=-1$

답 (1) 1 (2) $\frac{1}{2}$ (3) ∞ (4) -1

3 $x\to1$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\to0$이므로 (분자) $\to0$이다.

즉 $\lim_{x\to1}(x^2+ax-3)=0$이므로

$1+a-3=0\qquad \therefore a=2$

답 2

유제 본책 18~25쪽

1 $\lim_{x\to0}\frac{x+3f(x)}{x-f(x)}=\lim_{x\to0}\frac{1+3\cdot\frac{f(x)}{x}}{1-\frac{f(x)}{x}}=\frac{1+3\cdot5}{1-5}=-4$

답 -4

2 $-3f(x)+g(x)=h(x)$라 하면

$g(x)=h(x)+3f(x)$

이때 $\lim_{x\to a}h(x)=-14$이므로

$\lim_{x\to a}g(x)=\lim_{x\to a}\{h(x)+3f(x)\}$

$=-14+3\cdot5=1$

답 1

3 $3f(x)+2g(x)=h(x)$라 하면

$g(x)=\frac{h(x)-3f(x)}{2}$

이때 $\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty,\ \lim_{x\to\infty}h(x)=1$이므로 $\lim_{x\to\infty}\frac{h(x)}{f(x)}=0$

$$\therefore \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-2g(x)}{5f(x)+4g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-2\cdot\frac{h(x)-3f(x)}{2}}{5f(x)+4\cdot\frac{h(x)-3f(x)}{2}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4f(x)-h(x)}{-f(x)+2h(x)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4-\frac{h(x)}{f(x)}}{-1+2\cdot\frac{h(x)}{f(x)}}$$

$$=\frac{4-0}{-1+2\cdot0}=-4$$

답 -4

4 (1) $\lim_{x\to-1}\frac{x^3-x^2-x+1}{x^2-x-2}=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(x-1)^2}{(x+1)(x-2)}$

$=\lim_{x\to-1}\frac{(x-1)^2}{x-2}=-\frac{4}{3}$

(2) $\lim_{x\to0}\frac{x}{1-\sqrt{x+1}}=\lim_{x\to0}\frac{x(1+\sqrt{x+1})}{(1-\sqrt{x+1})(1+\sqrt{x+1})}$

$=\lim_{x\to0}\frac{x(1+\sqrt{x+1})}{-x}$

$=\lim_{x\to0}(-1-\sqrt{x+1})=-2$

(3) $\lim_{x\to-1}\frac{\sqrt[3]{x}+1}{x+1}=\lim_{x\to-1}\frac{\sqrt[3]{x}+1}{(\sqrt[3]{x}+1)(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1)}$

$=\lim_{x\to-1}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1}=\frac{1}{3}$

(4) $\lim_{x\to 2}\frac{3\sqrt{x+2}-6}{\sqrt{x^2+5}-3}$

$=\lim_{x\to 2}\frac{3(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{x+2}+2)(\sqrt{x^2+5}+3)}{(\sqrt{x^2+5}-3)(\sqrt{x^2+5}+3)(\sqrt{x+2}+2)}$

$=\lim_{x\to 2}\frac{3(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)}{(x^2-4)(\sqrt{x+2}+2)}$

$=\lim_{x\to 2}\frac{3(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)}{(x+2)(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}$

$=\lim_{x\to 2}\frac{3(\sqrt{x^2+5}+3)}{(x+2)(\sqrt{x+2}+2)}=\frac{9}{8}$

답 (1) $-\frac{4}{3}$ (2) -2 (3) $\frac{1}{3}$ (4) $\frac{9}{8}$

5 $\lim_{x\to 4}\frac{(\sqrt{x}-2)f(x)}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)f(x)}{(x-4)(\sqrt{x}+2)}$

$=\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)f(x)}{(x-4)(\sqrt{x}+2)}=\lim_{x\to 4}\frac{f(x)}{\sqrt{x}+2}$

$=\frac{-2}{4}=-\frac{1}{2}$

답 $-\frac{1}{2}$

6 (1) $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+x-6}{x+3}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x+1-\frac{6}{x}}{1+\frac{3}{x}}=\infty$

(2) $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+4x+7}{5x^2-2x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{4}{x}+\frac{7}{x^2}}{5-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}=\frac{2}{5}$

(3) $\lim_{x\to\infty}\frac{3x-1}{4x^3+2x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3}{x^2}-\frac{1}{x^3}}{4+\frac{2}{x}}=0$

(4) $\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2+4x}-3}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{4}{x}}-\frac{3}{x}}=2$

답 (1) ∞ (2) $\frac{2}{5}$ (3) 0 (4) 2

7 (1) $x=-t$로 놓으면 $x\to-\infty$일 때 $t\to\infty$이므로

$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+x}-1}{2x+5}=\lim_{t\to\infty}\frac{\sqrt{t^2-t}-1}{-2t+5}$

$=\lim_{t\to\infty}\frac{\sqrt{1-\frac{1}{t}}-\frac{1}{t}}{-2+\frac{5}{t}}=-\frac{1}{2}$

(2) $x=-t$로 놓으면 $x\to-\infty$일 때 $t\to\infty$이므로

$\lim_{x\to-\infty}\frac{3x}{\sqrt{x^2-2x}+\sqrt{4x^2-5x}}=\lim_{t\to\infty}\frac{-3t}{\sqrt{t^2+2t}+\sqrt{4t^2+5t}}$

$=\lim_{t\to\infty}\frac{-3}{\sqrt{1+\frac{2}{t}}+\sqrt{4+\frac{5}{t}}}$

$=-1$

답 (1) $-\frac{1}{2}$ (2) -1

8 (1) $x=-t$로 놓으면 $x\to-\infty$일 때 $t\to\infty$이므로

$\lim_{x\to-\infty}(x^3-4x^2-3)=\lim_{t\to\infty}(-t^3-4t^2-3)$

$=\lim_{t\to\infty}t^3\left(-1-\frac{4}{t}-\frac{3}{t^3}\right)$

$=-\infty$

(2) $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2-x})$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2-x})(\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{x^2-x})}{\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{x^2-x}}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{4x}{\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{x^2-x}}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{4}{\sqrt{1+\frac{3}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}}$

$=2$

(3) $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{4x+1}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\frac{5x}{(x-1)(4x+1)}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{5}{4x^2-3x-1}$

$=-5$

(4) $\lim_{x\to\infty}x\left(\frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-2}}-1\right)$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{x(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2})}{\sqrt{x-2}}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{x(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2})(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2})}{\sqrt{x-2}(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2})}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{4x}{\sqrt{x^2-4}+x-2}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{4}{\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}+1-\frac{2}{x}}=2$

답 (1) $-\infty$ (2) 2 (3) -5 (4) 2

9 $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+ax}-\sqrt{x^2-2ax})$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+ax}-\sqrt{x^2-2ax})(\sqrt{x^2+ax}+\sqrt{x^2-2ax})}{\sqrt{x^2+ax}+\sqrt{x^2-2ax}}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{3ax}{\sqrt{x^2+ax}+\sqrt{x^2-2ax}}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{3a}{\sqrt{1+\frac{a}{x}}+\sqrt{1-\frac{2a}{x}}}=\frac{3a}{2}$

즉 $\frac{3a}{2}=3$이므로 $a=2$

답 2

10 (1) $x\to-2$일 때 0이 아닌 극한값이 존재하고 (분자) $\to 0$ 이므로 (분모) $\to 0$이다.

즉 $\lim_{x\to-2}(ax+b)=0$이므로

$-2a+b=0$

$\therefore b=2a$ …… ㉠

㉠을 주어진 식의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to-2}\frac{x^2+5x+6}{ax+2a}=\lim_{x\to-2}\frac{(x+3)(x+2)}{a(x+2)}$$
$$=\lim_{x\to-2}\frac{x+3}{a}=\frac{1}{a}$$

즉 $\frac{1}{a}=\frac{1}{2}$이므로 $\quad a=2$

$a=2$를 ㉠에 대입하면 $\quad b=4$

(2) $x\to-3$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\to 0$이므로 (분자) $\to 0$이다.

즉 $\lim_{x\to-3}(a\sqrt{x+7}+b)=0$이므로

$2a+b=0 \quad \therefore b=-2a \quad \cdots\cdots$ ㉠

㉠을 주어진 식의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to-3}\frac{a\sqrt{x+7}-2a}{x+3}=\lim_{x\to-3}\frac{a(\sqrt{x+7}-2)(\sqrt{x+7}+2)}{(x+3)(\sqrt{x+7}+2)}$$
$$=\lim_{x\to-3}\frac{a(x+3)}{(x+3)(\sqrt{x+7}+2)}$$
$$=\lim_{x\to-3}\frac{a}{\sqrt{x+7}+2}=\frac{a}{4}$$

즉 $\frac{a}{4}=-5$이므로 $\quad a=-20$

$a=-20$을 ㉠에 대입하면 $\quad b=40$

답 (1) $a=2,\ b=4$ (2) $a=-20,\ b=40$

11 $x\to3$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\to 0$이므로 (분자) $\to 0$이다.

즉 $\lim_{x\to3}(x^2-2x+a)=0$이므로

$3+a=0 \quad \therefore a=-3$

$a=-3$을 주어진 식에 대입하면

$$b=\lim_{x\to3}\frac{x^2-2x-3}{x-3}=\lim_{x\to3}\frac{(x+1)(x-3)}{x-3}$$
$$=\lim_{x\to3}(x+1)=4$$

$\therefore a+b=1$

답 1

12 $x\to-1$일 때 0이 아닌 극한값이 존재하고 (분자) $\to 0$이므로 (분모) $\to 0$이다.

즉 $\lim_{x\to-1}f(x)=\lim_{x\to-1}(x^3+ax+b)=0$이므로

$-1-a+b=0 \quad \therefore b=a+1$

$f(x)=x^3+ax+a+1$이므로 주어진 식의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to-1}\frac{x+1}{x^3+ax+a+1}=\lim_{x\to-1}\frac{x+1}{(x+1)(x^2-x+a+1)}$$
$$=\lim_{x\to-1}\frac{1}{x^2-x+a+1}$$
$$=\frac{1}{a+3}$$

즉 $\frac{1}{a+3}=-\frac{1}{4}$이므로 $\quad a=-7$

따라서 $f(x)=x^3-7x-6$이므로

$f(1)=-12$

답 -12

13 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{3x+2}=2$에서 $f(x)$는 x의 계수가 6인 일차식임을 알 수 있다.

$f(x)=6x+a$ (a는 상수)라 하면

$\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}(6x+a)=6+a$

즉 $6+a=9$이므로 $\quad a=3$

$\therefore f(x)=6x+3$

답 $f(x)=6x+3$

14 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2-2x+4}=3$에서 $f(x)$는 x^2의 계수가 3인 이차식임을 알 수 있다.

또 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x^2+x-2}=5$에서 $x\to1$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\to 0$이므로 (분자) $\to 0$이다.

즉 $\lim_{x\to1}f(x)=0$이므로 $\quad f(1)=0$

$f(x)=3(x-1)(x+a)$ (a는 상수)라 하면

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x^2+x-2}=\lim_{x\to1}\frac{3(x-1)(x+a)}{(x+2)(x-1)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{3(x+a)}{x+2}=a+1$$

즉 $a+1=5$이므로 $\quad a=4$

따라서 $f(x)=3(x-1)(x+4)$이므로

$f(0)=3\cdot(-1)\cdot4=-12$

답 -12

라이트 UP

다항식 $f(x)$에 대하여 다음은 모두 같은 의미이다.

① $f(a)=0$

② $f(x)$는 일차식 $x-a$로 나누어떨어진다.

③ $f(x)$는 일차식 $x-a$를 인수로 갖는다.

15 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2+1}=1$에서 $f(x)$는 x^2의 계수가 1인 이차식임을 알 수 있다.

또 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x^2-1}=-1$에서 $x\to1$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\to 0$이므로 (분자) $\to 0$이다.

즉 $\lim_{x\to1}f(x)=0$이므로 $\quad f(1)=0$

$f(x)=(x-1)(x+a)$ (a는 상수)라 하면

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+a)}{(x+1)(x-1)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{x+a}{x+1}=\frac{a+1}{2}$$

즉 $\frac{a+1}{2}=-1$이므로　　$a=-3$

따라서 $f(x)=(x-1)(x-3)$이므로

$$\lim_{x\to 3}\frac{f(x)}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-1)(x-3)}{x-3}=\lim_{x\to 3}(x-1)=2$$

답 2

16 $\frac{7x+5}{x+4}<f(x)<\frac{7x^2-4x+6}{x^2-2x}$에서

$$\lim_{x\to\infty}\frac{7x+5}{x+4}=7,\ \lim_{x\to\infty}\frac{7x^2-4x+6}{x^2-2x}=7$$

이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=7$$

답 7

17 $f(x)\le h(x)\le g(x)$이고

$$\lim_{x\to -1}f(x)=\lim_{x\to -1}(2x-3)=-5,$$

$$\lim_{x\to -1}g(x)=\lim_{x\to -1}(x^2+4x-2)=-5$$

이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{x\to -1}h(x)=-5$$

답 -5

18 $x>0$일 때, $3x+1>0$이므로 $3x+1<f(x)<3x+4$의 각 변을 제곱하면

$$(3x+1)^2<\{f(x)\}^2<(3x+4)^2$$

각 변을 x^2+x+2로 나누면

$$\frac{(3x+1)^2}{x^2+x+2}<\frac{\{f(x)\}^2}{x^2+x+2}<\frac{(3x+4)^2}{x^2+x+2}$$

이때

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(3x+1)^2}{x^2+x+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{9x^2+6x+1}{x^2+x+2}=9,$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(3x+4)^2}{x^2+x+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{9x^2+24x+16}{x^2+x+2}=9$$

이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\{f(x)\}^2}{x^2+x+2}=9$$

답 9

19 $\mathrm{P}(t,\ 2t+1)$이므로　　$\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{t^2+(2t+1)^2}=\sqrt{5t^2+4t+1}$

직선 PQ의 기울기가 $-\frac{1}{2}$이므로 직선 PQ의 방정식은

$$y-(2t+1)=-\frac{1}{2}(x-t)\qquad \therefore y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}t+1$$

따라서 $\mathrm{Q}\left(0,\ \frac{5}{2}t+1\right)$이므로　　$\overline{\mathrm{OQ}}=\frac{5}{2}t+1$

$$\therefore \lim_{t\to\infty}\frac{\overline{\mathrm{OQ}}}{\overline{\mathrm{OP}}}=\lim_{t\to\infty}\frac{\frac{5}{2}t+1}{\sqrt{5t^2+4t+1}}=\lim_{t\to\infty}\frac{\frac{5}{2}+\frac{1}{t}}{\sqrt{5+\frac{4}{t}+\frac{1}{t^2}}}$$

$$=\frac{\frac{5}{2}}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$$

답 $\frac{\sqrt{5}}{2}$

20 점 $\mathrm{P}(t,\ \sqrt{1-t^2})$에서의 접선의 방정식은

$$tx+\sqrt{1-t^2}\,y=1$$

따라서 $\mathrm{Q}\left(\frac{1}{t},\ 0\right)$이므로

$$S(t)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t}\cdot\sqrt{1-t^2}=\frac{\sqrt{1-t^2}}{2t}$$

$$\therefore \lim_{t\to 1-}\frac{\{S(t)\}^2}{1-t}=\lim_{t\to 1-}\frac{1-t^2}{4t^2(1-t)}=\lim_{t\to 1-}\frac{(1+t)(1-t)}{4t^2(1-t)}$$

$$=\lim_{t\to 1-}\frac{1+t}{4t^2}=\frac{1}{2}$$

답 $\frac{1}{2}$

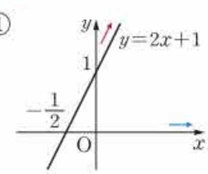
중단원 연습 문제

본책 26~29쪽

01 ②	02 6	03 6	04 ⑤	05 $\frac{11}{5}$
06 ④	07 ④	08 ④	09 1	10 8
11 $\frac{1}{4}$	12 ①	13 3	14 6	15 ④
16 ①	17 ③	18 -1	19 9	20 ④
21 26	22 ⑤	23 $\frac{1}{2}$	24 ②	

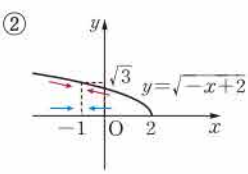
01 전략 그래프를 그려 극한을 조사한다.

풀이 ①



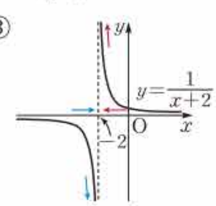
$\therefore \lim_{x\to\infty}(2x+1)=\infty$

②



$\therefore \lim_{x\to -1}\sqrt{-x+2}=\sqrt{3}$

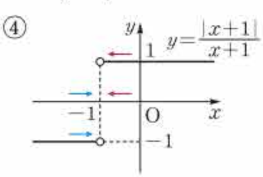
③



$$\therefore \lim_{x\to -2+}\frac{1}{x+2}=\infty,$$

$$\lim_{x\to -2-}\frac{1}{x+2}=-\infty$$

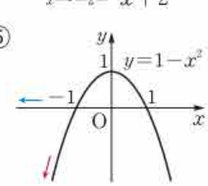
④



$$\therefore \lim_{x\to -1+}\frac{|x+1|}{x+1}=1,$$

$$\lim_{x\to -1-}\frac{|x+1|}{x+1}=-1$$

⑤



$\therefore \lim_{x\to -\infty}(1-x^2)=-\infty$

답 ②

02 전략 $\lim_{x \to a+} f(x)$ ➡ $x>a$이면서 a에 한없이 가까워질 때의 극한
$\lim_{x \to a-} f(x)$ ➡ $x<a$이면서 a에 한없이 가까워질 때의 극한

풀이 $\lim_{x \to 0+} f(x)=2$, $\lim_{x \to -1-} f(x)=1$, $f(2)=3$이므로

$$\lim_{x \to 0+} f(x)+\lim_{x \to -1-} f(x)+f(2)=2+1+3=6$$

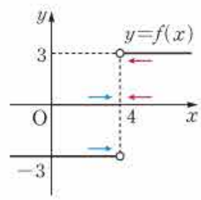
답 6

03 전략 $x>4$일 때와 $x<4$일 때로 나누어 $y=f(x)$의 그래프를 그려 본다.

풀이 (i) $x>4$일 때, $f(x)=\dfrac{3(x-4)}{x-4}=3$

(ii) $x<4$일 때, $f(x)=\dfrac{-3(x-4)}{x-4}=-3$

(i), (ii)에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 ⋯ ❶



$\lim_{x \to 4+} f(x)=3$,

$\lim_{x \to 4-} f(x)=-3$ ⋯ ❷

$\therefore \lim_{x \to 4+} f(x)-\lim_{x \to 4-} f(x)$

$=3-(-3)=6$ ⋯ ❸

답 6

채점 기준	비율
❶ $y=f(x)$의 그래프를 그릴 수 있다.	40 %
❷ $\lim_{x \to 4+} f(x)$, $\lim_{x \to 4-} f(x)$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $\lim_{x \to 4+} f(x)-\lim_{x \to 4-} f(x)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

04 전략 $\lim_{x \to a+} f(f(x))$에서 $f(x)=t$로 놓는다.

풀이 $f(x)=t$로 놓으면 $x \to 0+$일 때 $t \to 3-$이므로

$$\lim_{x \to 0+} f(f(x))=\lim_{t \to 3-} f(t)=3$$

또 $x \to 2+$일 때 $f(x)=3$이므로

$$\lim_{x \to 2+} f(f(x))=f(3)=2$$

$$\therefore \lim_{x \to 0+} f(f(x))+\lim_{x \to 2+} f(f(x))=3+2=5$$

답 ⑤

05 전략 $f(x)+g(x)=p(x)$, $3f(x)-2g(x)=q(x)$로 놓고 $f(x)$를 $p(x)$, $q(x)$에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 $f(x)+g(x)=p(x)$ ⋯⋯ ㉠

$3f(x)-2g(x)=q(x)$ ⋯⋯ ㉡

라 하자.

$2\times$㉠$+$㉡을 하면 $5f(x)=2p(x)+q(x)$

$$\therefore f(x)=\frac{2p(x)+q(x)}{5}$$

이때 $\lim_{x \to 1} p(x)=2$, $\lim_{x \to 1} q(x)=7$이므로

$$\lim_{x \to 1} f(x)=\lim_{x \to 1}\frac{2p(x)+q(x)}{5}=\frac{2}{5}\lim_{x \to 1} p(x)+\frac{1}{5}\lim_{x \to 1} q(x)$$

$$=\frac{2}{5}\cdot 2+\frac{1}{5}\cdot 7=\frac{11}{5}$$

답 $\frac{11}{5}$

06 전략 $2f(x)-3g(x)=h(x)$로 놓고 주어진 식을 $f(x)$와 $h(x)$에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 $2f(x)-3g(x)=h(x)$라 하면

$3g(x)=2f(x)-h(x)$

이때 $\lim_{x \to \infty} h(x)=2$이므로

$$\lim_{x \to \infty}\frac{8f(x)-3g(x)}{3g(x)}$$

$$=\lim_{x \to \infty}\frac{8f(x)-\{2f(x)-h(x)\}}{2f(x)-h(x)}$$

$$=\lim_{x \to \infty}\frac{6f(x)+h(x)}{2f(x)-h(x)}=\lim_{x \to \infty}\frac{6+\frac{h(x)}{f(x)}}{2-\frac{h(x)}{f(x)}}$$

$=3$

답 ④

참고 $f(x)$가 이차함수이므로 $\lim_{x \to \infty} f(x)=\infty$ 또는 $\lim_{x \to \infty} f(x)=-\infty$

이때 $\lim_{x \to \infty} h(x)=2$이므로 $\lim_{x \to \infty}\frac{h(x)}{f(x)}=0$

07 전략 분자, 분모를 각각 인수분해한다.

풀이 $$\lim_{x \to 1}\frac{(x^3-1)f(x)}{12(x^2-1)}=\lim_{x \to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)f(x)}{12(x+1)(x-1)}$$

$$=\lim_{x \to 1}\frac{(x^2+x+1)f(x)}{12(x+1)}$$

$$=\frac{f(1)}{8}$$

즉 $\frac{f(1)}{8}=3$이므로 $f(1)=24$

답 ④

08 전략 $x^2=t$로 치환한다.

풀이 $x^2=t$로 놓으면 $x \to 3$일 때 $t \to 9$이므로

$$\lim_{x \to 3}\frac{f(x^2)-f(9)}{x^2-9}=\lim_{t \to 9}\frac{f(t)-f(9)}{t-9}$$

$$=\lim_{t \to 9}\frac{(t^2+10)-91}{t-9}=\lim_{t \to 9}\frac{t^2-81}{t-9}$$

$$=\lim_{t \to 9}\frac{(t+9)(t-9)}{t-9}$$

$$=\lim_{t \to 9}(t+9)=18$$

답 ④

다른 풀이 $f(x^2)=x^4+10$이므로

$$\lim_{x \to 3}\frac{f(x^2)-f(9)}{x^2-9}=\lim_{x \to 3}\frac{x^4-81}{x^2-9}$$

$$=\lim_{x \to 3}\frac{(x^2+9)(x+3)(x-3)}{(x+3)(x-3)}$$

$$=\lim_{x \to 3}(x^2+9)=18$$

09 전략 분모를 1로 보고 분자를 유리화하여 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴로 변형한다.

풀이 $a \ge 0$이면 $\lim_{x \to \infty}(\sqrt{4x^2+6x+1}+ax)=\infty$이므로

$a<0$

주어진 식의 좌변에서 분모를 1로 보고 분자를 유리화하면

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{4x^2+6x+1}+ax)$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{4x^2+6x+1}+ax)(\sqrt{4x^2+6x+1}-ax)}{\sqrt{4x^2+6x+1}-ax}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(4-a^2)x^2+6x+1}{\sqrt{4x^2+6x+1}-ax} \quad \cdots\cdots ㉠$$

㉠의 극한값이 존재하려면 $4-a^2=0$

$\therefore a=-2$ ($\because a<0$) ⋯➊

따라서 ㉠에서

$$b=\lim_{x\to\infty}\frac{6x+1}{\sqrt{4x^2+6x+1}+2x}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{6+\frac{1}{x}}{\sqrt{4+\frac{6}{x}+\frac{1}{x^2}}+2}=\frac{3}{2} \quad ⋯➋$$

$\therefore a+2b=-2+2\cdot\frac{3}{2}=1$ ⋯➌

답 1

채점 기준	비율
➊ a의 값을 구할 수 있다.	40 %
➋ b의 값을 구할 수 있다.	40 %
➌ $a+2b$의 값을 구할 수 있다.	20 %

10 전략 $\frac{1}{n}=x$로 치환한다.

풀이 $\frac{1}{n}=x$로 놓으면 $n\to\infty$일 때 $x\to 0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}n\left\{f\left(\frac{2}{n}+3\right)-f(3)\right\}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\{f(2x+3)-f(3)\}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\{(2x+3)^2-2(2x+3)+3\}-6}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{4x^2+8x}{x}=\lim_{x\to 0}(4x+8)$$
$$=8$$

답 8

다른 풀이 $f\left(\frac{2}{n}+3\right)=\left(\frac{2}{n}+3\right)^2-2\left(\frac{2}{n}+3\right)+3$

$$=\frac{4}{n^2}+\frac{8}{n}+6$$

이므로

$$\lim_{n\to\infty}n\left\{f\left(\frac{2}{n}+3\right)-f(3)\right\}=\lim_{n\to\infty}n\left\{\left(\frac{4}{n^2}+\frac{8}{n}+6\right)-6\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{4}{n^2}+\frac{8}{n}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4}{n}+8\right)=8$$

11 전략 $x\to a$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\to 0$이면 (분자) $\to 0$임을 이용한다.

풀이 $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)+2}{x-1}=-1$에서 $x\to 1$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\to 0$이므로 (분자) $\to 0$이다.

즉 $\lim_{x\to 1}\{f(x)+2\}=0$이므로 $\lim_{x\to 1}f(x)=-2$

$$\therefore \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\{f(x)\}^2-4}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\{f(x)+2\}\{f(x)-2\}}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\frac{f(x)+2}{x-1}\cdot\{f(x)-2\}}$$
$$=\frac{1}{(-1)\cdot(-2-2)}$$
$$=\frac{1}{4}$$

답 $\frac{1}{4}$

12 전략 $x\to k$일 때 0이 아닌 극한값이 존재하고 (분자) $\to 0$이면 (분모) $\to 0$임을 이용한다.

풀이 $x\to 4$일 때 0이 아닌 극한값이 존재하고 (분자) $\to 0$이므로 (분모) $\to 0$이다.

즉 $\lim_{x\to 4}(\sqrt{x^2+2x-8}-ax)=0$이므로

$4-4a=0 \quad \therefore a=1$

$a=1$을 주어진 식에 대입하면

$$b=\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{\sqrt{x^2+2x-8}-x}$$
$$=\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)(\sqrt{x^2+2x-8}+x)}{(\sqrt{x^2+2x-8}-x)(\sqrt{x^2+2x-8}+x)}$$
$$=\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)(\sqrt{x^2+2x-8}+x)}{2(x-4)}$$
$$=\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x^2+2x-8}+x}{2}=4$$

$\therefore a+b=5$

답 ①

13 전략 $x\to k$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\to 0$이면 (분자) $\to 0$임을 이용한다.

풀이 $\lim_{x\to -1}\frac{f(x)}{x+1}=5$에서 $x\to -1$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\to 0$이므로 (분자) $\to 0$이다.

즉 $\lim_{x\to -1}f(x)=\lim_{x\to -1}(x^3+ax^2+bx)=0$이므로

$-1+a-b=0 \quad \therefore b=a-1$ ⋯➊

$f(x)=x^3+ax^2+(a-1)x$이므로 주어진 식의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^3+ax^2+(a-1)x}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{x(x+1)(x+a-1)}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to -1}x(x+a-1)$$
$$=2-a$$

즉 $2-a=5$이므로

$a=-3$

$\therefore f(x)=x^3-3x^2-4x$ ⋯➋

$f(x)=0$에서 $\quad x(x+1)(x-4)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=4$

따라서 구하는 모든 x의 값의 합은

$-1+0+4=3$ ··· ❸

답 3

채점 기준	비율
❶ b를 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30 %
❷ 함수 $f(x)$를 구할 수 있다.	50 %
❸ $f(x)=0$을 만족시키는 모든 x의 값의 합을 구할 수 있다.	20 %

14 전략 $f(x)$는 이차 이하의 다항함수임을 이용한다.

풀이 조건 ㈎에 의하여 $f(x)$의 최고차항은 삼차보다 작아야 하므로 $f(x)$는 이차 이하의 다항함수이다. ··· ❶

또 조건 ㈏에 의하여 $x \to 2$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\to 0$이므로 (분자) $\to 0$이다.

즉 $\lim_{x\to 2} f(x)=0$이므로 $\quad f(2)=0$ ··· ❷

$f(x)=(ax+b)(x-2)$ (a, b는 상수)라 하면

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(ax+b)(x-2)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to 2}(ax+b)=2a+b$$

$\therefore 2a+b=-1$ ······ ㉠

조건 ㈐에 의하여 방정식 $(ax+b)(x-2)=3$의 한 근이 1이므로

$(a+b)\cdot(-1)=3$

$\therefore a+b=-3$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad a=2$, $b=-5$

따라서 $f(x)=(2x-5)(x-2)$이므로 ··· ❸

$f(4)=(2\cdot 4-5)(4-2)=6$ ··· ❹

답 6

채점 기준	비율
❶ $f(x)$가 이차 이하의 다항함수임을 알 수 있다.	20 %
❷ $f(2)=0$임을 알 수 있다.	20 %
❸ $f(x)$를 구할 수 있다.	50 %
❹ $f(4)$의 값을 구할 수 있다.	10 %

15 전략 두 다항식 $g(x)$, $h(x)$에 대하여 $\lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{h(x)}=\alpha$ $(\alpha\neq 0)$이면 $g(x)$와 $h(x)$의 차수가 같음을 이용한다.

풀이 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-3x^2}{x+4}=a$에서 $f(x)$는 x^2의 계수가 3인 이차식임을 알 수 있다.

또 $\lim_{x\to -2}\frac{f(x)}{x^2+3x+2}=7$에서 $x\to -2$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\to 0$이므로 (분자) $\to 0$이다.

즉 $\lim_{x\to -2} f(x)=0$이므로 $\quad f(-2)=0$

$f(x)=3(x+2)(x+k)$ (k는 상수)라 하면

$$\lim_{x\to -2}\frac{f(x)}{x^2+3x+2}=\lim_{x\to -2}\frac{3(x+2)(x+k)}{(x+2)(x+1)}$$
$$=\lim_{x\to -2}\frac{3(x+k)}{x+1}$$
$$=6-3k$$

즉 $6-3k=7$이므로 $\quad k=-\frac{1}{3}$

따라서 $f(x)=3(x+2)\left(x-\frac{1}{3}\right)=3x^2+5x-2$이므로

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-3x^2}{x+4}=\lim_{x\to\infty}\frac{5x-2}{x+4}=5$$

답 ④

16 전략 함수의 극한에 대한 명제의 참, 거짓을 판별한다.

풀이 ㄱ. $\lim_{x\to a} g(x)=\alpha$, $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\beta$ (α, β는 실수)라 하면

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a}\left\{g(x)\cdot\frac{f(x)}{g(x)}\right\}$$
$$=\lim_{x\to a} g(x)\cdot\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\alpha\beta$$

따라서 $\lim_{x\to a} f(x)$의 값이 존재한다.

ㄴ. [반례] $f(x)=1$, $g(x)=1+\frac{1}{x}$이면 모든 양수 x에 대하여 $f(x)<g(x)$이지만

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty} g(x)=1$$

ㄷ. [반례] $f(x)=\begin{cases}0 & (x\geq a)\\ 1 & (x<a)\end{cases}$, $g(x)=\begin{cases}1 & (x\geq a)\\ 0 & (x<a)\end{cases}$이면

$\lim_{x\to a} f(x)$와 $\lim_{x\to a} g(x)$의 값은 모두 존재하지 않지만 $f(x)+g(x)=1$이므로

$$\lim_{x\to a}\{f(x)+g(x)\}=1$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ뿐이다.

답 ①

17 전략 $\overline{OA}$, $\overline{AC}$, $\overline{OB}$, $\overline{BC}$의 길이를 k에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 $A(k,\ 3\sqrt{k})$, $B(k,\ \sqrt{k})$, $C(k,\ 0)$이므로

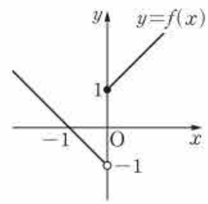
$\overline{OA}=\sqrt{k^2+9k}$, $\overline{AC}=3\sqrt{k}$, $\overline{OB}=\sqrt{k^2+k}$, $\overline{BC}=\sqrt{k}$

$$\therefore \lim_{k\to 0+}\frac{\overline{OA}-\overline{AC}}{\overline{OB}-\overline{BC}}$$
$$=\lim_{k\to 0+}\frac{\sqrt{k^2+9k}-3\sqrt{k}}{\sqrt{k^2+k}-\sqrt{k}}$$
$$=\lim_{k\to 0+}\frac{\sqrt{k+9}-3}{\sqrt{k+1}-1}$$
$$=\lim_{k\to 0+}\frac{(\sqrt{k+9}-3)(\sqrt{k+9}+3)(\sqrt{k+1}+1)}{(\sqrt{k+1}-1)(\sqrt{k+1}+1)(\sqrt{k+9}+3)}$$
$$=\lim_{k\to 0+}\frac{(k+9-9)(\sqrt{k+1}+1)}{(k+1-1)(\sqrt{k+9}+3)}$$
$$=\lim_{k\to 0+}\frac{\sqrt{k+1}+1}{\sqrt{k+9}+3}=\frac{1}{3}$$

답 ③

18 전략 함수 $y=f(x)$의 그래프를 그려 본다.

풀이 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. $f(x)=t$로 놓으면



$x \to 0+$일 때 $t \to 1+$이므로

$$\lim_{x \to 0+} g(f(x)) = \lim_{t \to 1+} g(t) = \lim_{t \to 1+} 2t = 2$$

또 $x \to 0-$일 때 $t \to -1+$이므로

$$\lim_{x \to 0-} g(f(x)) = \lim_{t \to -1+} g(t) = \lim_{t \to -1+} (-3t^2) = -3$$

$$\therefore \lim_{x \to 0+} g(f(x)) + \lim_{x \to 0-} g(f(x)) = 2 + (-3) = -1$$

답 -1

19 전략 $x+1=t$로 치환하여 정리한 후 함수의 극한에 대한 성질을 이용한다.

풀이 $x+1=t$로 놓으면 $x \to -1$일 때 $t \to 0$이므로

$$\lim_{x \to -1} \frac{f(x+1)}{x+1} = \lim_{t \to 0} \frac{f(t)}{t} = 3$$

즉 $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = 3$이므로

$$\lim_{x \to 0} \frac{3x+2f(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \left\{3 + 2 \cdot \frac{f(x)}{x}\right\} = 3 + 2 \cdot 3 = 9$$

답 9

20 전략 $\lim_{x \to a} f(x) = 0$임을 이용하여 함수 $f(x)$의 식을 추론한다.

풀이 $\lim_{x \to a} f(x) \neq 0$이면

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)-(x-a)}{f(x)+(x-a)} = 1$$

이므로 $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ $\quad \therefore f(a) = 0$

따라서 $f(x)=(x-a)(x-b)$ (b는 상수)라 하면

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)-(x-a)}{f(x)+(x-a)} = \lim_{x \to a} \frac{(x-a)(x-b)-(x-a)}{(x-a)(x-b)+(x-a)} = \lim_{x \to a} \frac{(x-a)\{(x-b)-1\}}{(x-a)\{(x-b)+1\}} = \frac{a-b-1}{a-b+1}$$

즉 $\frac{a-b-1}{a-b+1} = \frac{3}{5}$이므로

$$5a-5b-5 = 3a-3b+3$$

$$2a-2b=8 \qquad \therefore a-b=4$$

이때 두 상수 a, b는 방정식 $f(x)=0$의 두 근이므로

$$|\alpha - \beta| = 4$$

답 ④

21 전략 $f(x)=(x-2)^2Q(x)+bx+5$로 놓고 조건을 만족시키는 a, b의 값을 구한다.

풀이 $f(x)$를 $(x-2)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$$f(x)=(x-2)^2Q(x)+bx+5$$

$\lim_{x \to 2} \frac{f(x)-a}{x-2} = 7$에서

$$\lim_{x \to 2} \frac{(x-2)^2Q(x)+bx+5-a}{x-2} = 7 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$x \to 2$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\to 0$이므로 (분자) $\to 0$이다.

즉 $\lim_{x \to 2} \{(x-2)^2Q(x)+bx+5-a\} = 0$이므로

$$2b+5-a=0$$

$$\therefore a = 2b+5 \qquad \cdots\cdots ㉡ \qquad ⋯ ❶$$

㉡을 ㉠의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x \to 2} \frac{(x-2)^2Q(x)+bx+5-(2b+5)}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)^2Q(x)+b(x-2)}{x-2} = \lim_{x \to 2} \{(x-2)Q(x)+b\} = b$$

따라서 $b=7$이므로 이를 ㉡에 대입하면 $\quad a=19$ ⋯ ❷

$\therefore a+b=26$ ⋯ ❸

답 26

채점 기준	비율
❶ a를 b에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40 %
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	10 %

22 전략 $f(x)=x(x-1)Q(x)$ ($Q(x)$는 다항식)로 놓고 조건을 만족시키는 $g(x)$를 구한다.

풀이 $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = 4$, $\lim_{x \to 1} \frac{f(x)}{x-1} = 2$에서 극한값이 존재하고 (분모) $\to 0$이므로 (분자) $\to 0$이다.

즉 $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$, $\lim_{x \to 1} f(x) = 0$이므로

$$f(0)=0, \ f(1)=0$$

$f(x)=x(x-1)Q(x)$ ($Q(x)$는 다항식) $\qquad \cdots\cdots ㉠$

라 하자.

㉠을 $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = 4$에 대입하면

$$\lim_{x \to 0} \frac{x(x-1)Q(x)}{x} = 4$$

$$\lim_{x \to 0} (x-1)Q(x) = 4$$

$$\therefore Q(0) = -4 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠을 $\lim_{x \to 1} \frac{f(x)}{x-1} = 2$에 대입하면

$$\lim_{x \to 1} \frac{x(x-1)Q(x)}{x-1} = 2, \qquad \lim_{x \to 1} xQ(x) = 2$$

$$\therefore Q(1) = 2 \qquad \cdots\cdots ㉢$$

㉡, ㉢을 만족시키는 다항식 $Q(x)$ 중 차수가 가장 낮은 것은 일차식이므로 $Q(x)=ax+b$ (a, b는 상수)라 하면 ㉡, ㉢에서

$b=-4$, $a+b=2$

$\therefore a=6$, $b=-4$

따라서 $g(x)=x(x-1)(6x-4)$이므로

$g(2)=2\cdot1\cdot8=16$ 답 ⑤

23 전략 함수의 극한의 대소 관계를 이용한다.

풀이 $\sqrt{x^2+x}-1<[\sqrt{x^2+x}]\le\sqrt{x^2+x}$이므로 $x>0$일 때

$$\frac{\sqrt{x^2+x}-1}{2x+1}<\frac{[\sqrt{x^2+x}]}{2x+1}\le\frac{\sqrt{x^2+x}}{2x+1}$$

이때

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+x}-1}{2x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x}}-\frac{1}{x}}{2+\frac{1}{x}}=\frac{1}{2},$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+x}}{2x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{2+\frac{1}{x}}=\frac{1}{2}$$

이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{x\to\infty}\frac{[\sqrt{x^2+x}]}{2x+1}=\frac{1}{2}$$ 답 $\frac{1}{2}$

24 전략 먼저 점 A의 좌표를 구한 후 $\overline{PQ}$, $\overline{PR}$를 a에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 점 A는 곡선 $y=-x^2+6$과 직선 $y=x$가 제1사분면에서 만나는 점이므로 점 A의 x좌표는 $-x^2+6=x$에서

$x^2+x-6=0$

$(x+3)(x-2)=0$

$\therefore x=2$ ($\because x>0$)

따라서 $A(2,\ 2)$이므로

$\overline{PQ}=2-a$

한편 $P(a,\ a)$, $R(a,\ -a^2+6)$이므로

$\overline{PR}=-a^2+6-a=-a^2-a+6$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{a\to2-}\frac{\overline{PQ}}{\overline{PR}}&=\lim_{a\to2-}\frac{2-a}{-a^2-a+6}\\&=\lim_{a\to2-}\frac{a-2}{a^2+a-6}\\&=\lim_{a\to2-}\frac{a-2}{(a+3)(a-2)}\\&=\lim_{a\to2-}\frac{1}{a+3}\\&=\frac{1}{5}\end{aligned}$$ 답 ②

I. 함수의 극한과 연속

02 함수의 연속

01 함수의 연속

확인 본책 32~33쪽

1 (1) $f(2)=5$이고 $\lim_{x\to2}f(x)=\lim_{x\to2}(3x-1)=5$이므로

$\lim_{x\to2}f(x)=f(2)$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 연속이다.

(2) 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 정의되어 있지 않으므로 $x=2$에서 불연속이다.

답 (1) 연속 (2) 불연속

2 (1) 함수 $f(x)=\frac{x}{x-3}$는 $x\ne3$일 때, 즉 $x<3$ 또는 $x>3$일 때 연속이므로 구간 $(-\infty,\ 3)$, $(3,\ \infty)$에서 연속이다.

(2) 함수 $f(x)=\sqrt{x+5}$는 구간 $(-5,\ \infty)$에서 연속이고 $\lim_{x\to-5+}f(x)=f(-5)$이므로 구간 $[-5,\ \infty)$에서 연속이다.

답 (1) $(-\infty,\ 3)$, $(3,\ \infty)$ (2) $[-5,\ \infty)$

유제 본책 34~35쪽

1 (1) (i) $f(0)=0$

(ii) $\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\frac{x^2-3x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{x(x-3)}{x}$

$=\lim_{x\to0}(x-3)=-3$

(i), (ii)에서 $\lim_{x\to0}f(x)\ne f(0)$이므로 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

(2) (i) $f(0)=0$

(ii) $\lim_{x\to0+}f(x)=\lim_{x\to0+}x|x|=\lim_{x\to0+}x^2=0$,

$\lim_{x\to0-}f(x)=\lim_{x\to0-}x|x|=\lim_{x\to0-}(-x^2)=0$

즉 $\lim_{x\to0+}f(x)=\lim_{x\to0-}f(x)=0$이므로 $\lim_{x\to0}f(x)=0$

(i), (ii)에서 $\lim_{x\to0}f(x)=f(0)$이므로 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

답 (1) 불연속 (2) 연속

2 ㄱ. $f(x)$가 $x=1$에서 연속이면 모든 실수 x에서 연속이다.

(i) $f(1)=1$

(ii) $\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x+1)(x-1)}{x-1}$

$=\lim_{x\to1}(x+1)=2$

(i), (ii)에서 $\lim_{x\to1}f(x)\ne f(1)$이므로 $f(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

02 함수의 연속

ㄴ. $f(x)$가 $x=-1$에서 연속이면 모든 실수 x에서 연속이다.

(i) $f(-1)=0$

(ii) $\lim_{x \to -1+} f(x)=\lim_{x \to -1+}(\sqrt{x+1})=0$

$\lim_{x \to -1-} f(x)=\lim_{x \to -1-} 0=0$

즉 $\lim_{x \to -1+} f(x)=\lim_{x \to -1-} f(x)=0$이므로

$\lim_{x \to -1} f(x)=0$

(i), (ii)에서 $\lim_{x \to -1} f(x)=f(-1)$이므로 $f(x)$는 $x=-1$에서 연속이다.

따라서 $f(x)$는 모든 실수 x에서 연속이다.

ㄷ. $f(x)$가 $x=-2$에서 연속이면 모든 실수 x에서 연속이다.

$$\lim_{x \to -2+} f(x)=\lim_{x \to -2+}\frac{x^2-4}{|x+2|}=\lim_{x \to -2+}\frac{(x+2)(x-2)}{x+2}$$
$$=\lim_{x \to -2+}(x-2)=-4$$

$$\lim_{x \to -2-} f(x)=\lim_{x \to -2-}\frac{x^2-4}{|x+2|}=\lim_{x \to -2-}\frac{(x+2)(x-2)}{-(x+2)}$$
$$=\lim_{x \to -2-}(-x+2)=4$$

즉 $\lim_{x \to -2+} f(x)\neq\lim_{x \to -2-} f(x)$이므로 극한값 $\lim_{x \to -2} f(x)$가 존재하지 않는다.

따라서 $f(x)$는 $x=-2$에서 불연속이다.

이상에서 모든 실수 x에서 연속인 함수는 ㄴ뿐이다. 답 ㄴ

3 (i) $f(2)=0$이고 $\lim_{x \to 2} f(x)=3$이므로 $\lim_{x \to 2} f(x)\neq f(2)$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극한값은 존재하나 불연속이다.

(ii) $\lim_{x \to 3+} f(x)=2$, $\lim_{x \to 3-} f(x)=1$이므로

$\lim_{x \to 3+} f(x)\neq\lim_{x \to 3-} f(x)$

따라서 극한값 $\lim_{x \to 3} f(x)$가 존재하지 않으므로 $f(x)$는 $x=3$에서 불연속이다.

(i), (ii)에서 $f(x)$의 극한값이 존재하지 않는 x의 값은 3의 1개이고, $f(x)$가 불연속인 x의 값은 2, 3의 2개이므로

$a=1,\ b=2 \qquad \therefore a+b=3$ 답 3

4 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이려면 $x=2$에서 연속이어야 하므로

$\lim_{x \to 2+} f(x)=\lim_{x \to 2-} f(x)=f(2)$

이때

$\lim_{x \to 2+} f(x)=\lim_{x \to 2+}(2x^2-3x+a)=2+a$,

$\lim_{x \to 2-} f(x)=\lim_{x \to 2-}(-x+3)=1$,

$f(2)=2+a$

이므로 $2+a=1$

$\therefore a=-1$ 답 -1

5 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로 $\lim_{x \to 1} f(x)=f(1)$

$\therefore \lim_{x \to 1}\frac{a\sqrt{x+3}+b}{x-1}=1$ …… ㉠

㉠에서 $x \to 1$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\to 0$이므로 (분자) $\to 0$이다.

즉 $\lim_{x \to 1}(a\sqrt{x+3}+b)=0$이므로

$2a+b=0 \qquad \therefore b=-2a$ …… ㉡

㉡을 ㉠의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x \to 1}\frac{a\sqrt{x+3}-2a}{x-1}=\lim_{x \to 1}\frac{a(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}$$
$$=\lim_{x \to 1}\frac{a(x-1)}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}$$
$$=\lim_{x \to 1}\frac{a}{\sqrt{x+3}+2}=\frac{a}{4}$$

즉 $\frac{a}{4}=1$이므로 $a=4$

$a=4$를 ㉡에 대입하면 $b=-8$ 답 $a=4$, $b=-8$

6 $x\neq-1$일 때, $f(x)=\frac{2x^2-x+a}{x+1}$

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이면 $x=-1$에서 연속이므로

$\lim_{x \to -1} f(x)=f(-1)$

$\therefore \lim_{x \to -1}\frac{2x^2-x+a}{x+1}=f(-1)$ …… ㉠

㉠에서 $x \to -1$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\to 0$이므로 (분자) $\to 0$이다.

즉 $\lim_{x \to -1}(2x^2-x+a)=0$이므로

$3+a=0 \qquad \therefore a=-3$

$a=-3$을 ㉠에 대입하면

$$f(-1)=\lim_{x \to -1}\frac{2x^2-x-3}{x+1}$$
$$=\lim_{x \to -1}\frac{(x+1)(2x-3)}{x+1}$$
$$=\lim_{x \to -1}(2x-3)=-5$$ 답 -5

02 연속함수의 성질

확인 본책 37~38쪽

1 (1) $f(x)=(x+1)(x-3)=x^2-2x-3$은 다항함수이므로 모든 실수에서 연속이다.

(2) 두 함수 $y=x+2$, $y=x^2-x$는 다항함수이므로 모든 실수에서 연속이다.

이때 $x^2-x=0$에서 $\quad x(x-1)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=1$

따라서 함수 $f(x)=\dfrac{x+2}{x^2-x}$는 $x\neq0$, $x\neq1$인 모든 실수에서 연속이다.

답 풀이 참조

2 (1) 두 함수 $f(x)$, $g(x)$는 다항함수이므로 모든 실수에서 연속이다. 따라서 함수 $f(x)+2g(x)$는 모든 실수에서 연속이다.

(2) 두 함수 $f(x)$, $g(x)$는 다항함수이므로 모든 실수에서 연속이다.

이때 $g(x)=x^2-3x+2=0$에서 $\quad (x-1)(x-2)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=2$

따라서 함수 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$는 $x\neq1$, $x\neq2$인 모든 실수에서 연속이다.

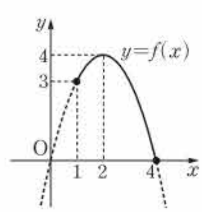
(3) 두 함수 $f(x)$, $g(x)$는 다항함수이므로 모든 실수에서 연속이다.

이때 $f(x)=x^2+3\neq0$이므로 함수 $\dfrac{g(x)}{f(x)}$는 모든 실수에서 연속이다.

답 풀이 참조

3 (1) 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[1, 4]$에서 연속이므로 이 구간에서 최댓값과 최솟값을 갖는다.

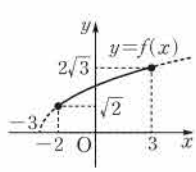
$f(x)=-x^2+4x=-(x-2)^2+4$이므로 구간 $[1, 4]$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$일 때 최댓값 4, $x=4$일 때 최솟값 0을 갖는다.

(2) 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[-2, 3]$에서 연속이므로 이 구간에서 최댓값과 최솟값을 갖는다.

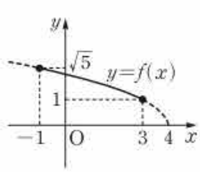
$f(x)=\sqrt{2x+6}=\sqrt{2(x+3)}$이므로 구간 $[-2, 3]$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 함수 $f(x)$는 $x=3$일 때 최댓값 $2\sqrt{3}$, $x=-2$일 때 최솟값 $\sqrt{2}$를 갖는다.

(3) 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[-1, 3]$에서 연속이므로 이 구간에서 최댓값과 최솟값을 갖는다.

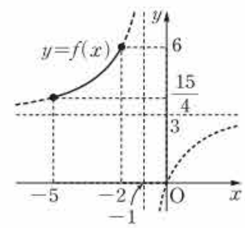
$f(x)=\sqrt{4-x}=\sqrt{-(x-4)}$이므로 구간 $[-1, 3]$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$일 때 최댓값 $\sqrt{5}$, $x=3$일 때 최솟값 1을 갖는다.

(4) 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[-5, -2]$에서 연속이므로 이 구간에서 최댓값과 최솟값을 갖는다.

$f(x)=\dfrac{3x}{x+1}=-\dfrac{3}{x+1}+3$이므로 구간 $[-5, -2]$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 함수 $f(x)$는 $x=-2$일 때 최댓값 6, $x=-5$일 때 최솟값 $\dfrac{15}{4}$를 갖는다.

답 (1) 최댓값: 4, 최솟값: 0
(2) 최댓값: $2\sqrt{3}$, 최솟값: $\sqrt{2}$
(3) 최댓값: $\sqrt{5}$, 최솟값: 1
(4) 최댓값: 6, 최솟값: $\dfrac{15}{4}$

유제 본책 39쪽

1 (1) $f(x)=2x^3-x^2-3x+1$이라 하면 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[-2, -1]$에서 연속이고

$f(-2)=-13<0$, $f(-1)=1>0$

이므로 사잇값의 정리에 의하여 $f(c)=0$인 c가 열린구간 $(-2, -1)$에 적어도 하나 존재한다.

따라서 방정식 $2x^3-x^2-3x+1=0$은 열린구간 $(-2, -1)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

(2) $f(x)=x^4+2x^3-x-7$이라 하면 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[1, 2]$에서 연속이고

$f(1)=-5<0$, $f(2)=23>0$

이므로 사잇값의 정리에 의하여 $f(c)=0$인 c가 열린구간 $(1, 2)$에 적어도 하나 존재한다.

따라서 방정식 $x^4+2x^3-x-7=0$은 열린구간 $(1, 2)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

답 풀이 참조

2 $f(x)=x^2+3x+a$라 하면 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[1, 2]$에서 연속이고

$f(1)=a+4$, $f(2)=a+10$

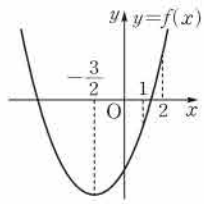
열린구간 $(1, 2)$에서 하나의 실근을 가지려면 $f(1)f(2)<0$이어야 하므로

$(a+4)(a+10)<0 \quad \therefore -10<a<-4$

답 $-10<a<-4$

다른 풀이 $f(x)=x^2+3x+a$

$$=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+a-\frac{9}{4}$$



함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 하므로

$f(1)=a+4<0,\ f(2)=a+10>0$

$\therefore\ -10<a<-4$

3 $g(x)=f(x)-x$라 하면 함수 $g(x)$는 닫힌구간 $[-1,\ 3]$에서 연속이고

$g(-1)=f(-1)-(-1)=1+1=2$

$g(0)=f(0)-0=-1-0=-1$

$g(1)=f(1)-1=2-1=1$

$g(2)=f(2)-2=3-2=1$

$g(3)=f(3)-3=2-3=-1$

따라서

$g(-1)g(0)<0,\ g(0)g(1)<0,\ g(2)g(3)<0$

이므로 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $g(x)=0$, 즉 $f(x)-x=0$은 열린구간 $(-1,\ 0)$, $(0,\ 1)$, $(2,\ 3)$에서 각각 적어도 하나의 실근을 갖는다. 즉 방정식 $f(x)-x=0$은 열린구간 $(-1,\ 3)$에서 적어도 3개의 실근을 갖는다. 답 풀이 참조

중단원 연습 문제

본책 40~42쪽

01 ⑤	**02** ④	**03** 4	**04** ③	**05** $\frac{10}{3}$
06 5	**07** ②	**08** 28	**09** ⑤	**10** ③
11 ①	**12** 풀이 참조		**13** -49	**14** 3
15 -4	**16** ⑤	**17** ④		

01 전략 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)$을 만족시키는 함수를 찾는다.

풀이 ① $\lim\limits_{x\to0+}f(x)=\lim\limits_{x\to0+}3[x]=3\cdot0=0$,

$\lim\limits_{x\to0-}f(x)=\lim\limits_{x\to0-}3[x]=3\cdot(-1)=-3$

이므로 $\lim\limits_{x\to0+}f(x)\neq\lim\limits_{x\to0-}f(x)$

따라서 극한값 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$가 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

②, ③ 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 정의되어 있지 않으므로 $x=0$에서 불연속이다.

④ $\lim\limits_{x\to0+}f(x)=\lim\limits_{x\to0+}\frac{x}{|x|}=\lim\limits_{x\to0+}\frac{x}{x}=1$,

$\lim\limits_{x\to0-}f(x)=\lim\limits_{x\to0-}\frac{x}{|x|}=\lim\limits_{x\to0-}\frac{x}{-x}=-1$

이므로 $\lim\limits_{x\to0+}f(x)\neq\lim\limits_{x\to0-}f(x)$

따라서 극한값 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$가 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

⑤ $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\frac{3x^2+4x}{x}=\lim\limits_{x\to0}(3x+4)=4$

이때 $f(0)=4$이므로 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

답 ⑤

02 전략 함수 $h(x)$에 대하여 $\lim\limits_{x\to1}h(x)=h(1)$을 만족시키는 함수를 찾는다.

풀이 ㄱ. $\lim\limits_{x\to1+}\{f(x)+g(x)\}=1+(-1)=0$

$\lim\limits_{x\to1-}\{f(x)+g(x)\}=-1+1=0$

$\therefore\ \lim\limits_{x\to1}\{f(x)+g(x)\}=0$

이때 $f(1)+g(1)=-1+1=0$이므로

$\lim\limits_{x\to1}\{f(x)+g(x)\}=f(1)+g(1)$

따라서 함수 $f(x)+g(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

ㄴ. $\lim\limits_{x\to1+}\{f(x)-g(x)\}=1-(-1)=2$

$\lim\limits_{x\to1-}\{f(x)-g(x)\}=-1-1=-2$

$\therefore\ \lim\limits_{x\to1+}\{f(x)-g(x)\}\neq\lim\limits_{x\to1-}\{f(x)-g(x)\}$

따라서 극한값 $\lim\limits_{x\to1}\{f(x)-g(x)\}$가 존재하지 않으므로 함수 $f(x)-g(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

ㄷ. $\lim\limits_{x\to1+}f(x)g(x)=1\cdot(-1)=-1$

$\lim\limits_{x\to1-}f(x)g(x)=-1\cdot1=-1$

$\therefore\ \lim\limits_{x\to1}f(x)g(x)=-1$

이때 $f(1)g(1)=-1\cdot1=-1$이므로

$\lim\limits_{x\to1}f(x)g(x)=f(1)g(1)$

따라서 함수 $f(x)g(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

이상에서 $x=1$에서 연속인 함수는 ㄱ, ㄷ이다. 답 ④

03 전략 $\lim\limits_{x\to a+}f(x)=\lim\limits_{x\to a-}f(x)=f(a)$를 만족시키는 a의 값을 구한다.

풀이 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이어야 하므로

$\lim\limits_{x\to a+}f(x)=\lim\limits_{x\to a-}f(x)=f(a)$

$\lim\limits_{x\to a+}4x=\lim\limits_{x\to a-}(x^2-5)=4a$

즉 $4a=a^2-5$이므로 ⋯➊

$a^2-4a-5=0,\quad (a+1)(a-5)=0$

$\therefore a=-1$ 또는 $a=5$

따라서 모든 실수 a의 값의 합은

$-1+5=4$ ⋯➋

답 4

채점 기준	비율
➊ a에 대한 이차방정식을 세울 수 있다.	60 %
➋ a의 값의 합을 구할 수 있다.	40 %

04 전략 $f(x)$가 $x=0$, $x=1$에서 연속이고 $f(1)=f(-1)$임을 이용한다.

풀이 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이면 $x=0$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to 0+}f(x)=\lim_{x\to 0-}f(x)=f(0)$$

$$\lim_{x\to 0+}(3x^2+2ax+b)=\lim_{x\to 0-}(ax+1)=b$$

$\therefore b=1$

또 $x=1$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to 1+}f(x)=\lim_{x\to 1-}f(x)=f(1)$$

이때 $f(x+2)=f(x)$에서 $f(1)=f(-1)$이므로

$$\lim_{x\to 1-}(3x^2+2ax+1)=f(1)=f(-1)$$

$2a+4=-a+1,\quad 3a=-3$

$\therefore a=-1$

$\therefore a+b=0$

답 ③

05 전략 $\lim_{x\to 2}f(x)=f(2)$를 만족시키는 a, b의 값을 구한다.

풀이 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이려면 $x=2$에서 연속이어야 하므로

$$\lim_{x\to 2}f(x)=f(2)$$

$$\therefore \lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+a}-3}{x-2}=b \quad \cdots\cdots ㉠$$

㉠에서 $x\to 2$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\to 0$이므로 (분자) $\to 0$이다.

즉 $\lim_{x\to 2}(\sqrt{x^2+a}-3)=0$이므로 $\quad \sqrt{4+a}-3=0$

$4+a=9\quad \therefore a=5$ ⋯➊

$a=5$를 ㉠에 대입하면

$$b=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(\sqrt{x^2+5}-3)(\sqrt{x^2+5}+3)}{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)}=\lim_{x\to 2}\frac{(x+2)(x-2)}{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x+2}{\sqrt{x^2+5}+3}=\frac{2}{3}$$ ⋯➋

따라서 $a=5$, $b=\frac{2}{3}$이므로

$ab=\frac{10}{3}$ ⋯➌

답 $\frac{10}{3}$

채점 기준	비율
➊ a의 값을 구할 수 있다.	40 %
➋ b의 값을 구할 수 있다.	40 %
➌ ab의 값을 구할 수 있다.	20 %

06 전략 $\lim_{x\to 5}f(x)g(x)=f(5)g(5)$를 만족시키는 k의 값을 구한다.

풀이 함수 $f(x)g(x)$가 $x=5$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to 5+}f(x)g(x)=\lim_{x\to 5-}f(x)g(x)=f(5)g(5)$$

이때 $f(5)g(5)=11(5-k)=55-11k$이고

$$\lim_{x\to 5+}f(x)g(x)=\lim_{x\to 5+}(-x+2)(x-k)$$
$$=-3(5-k)=-15+3k$$

$$\lim_{x\to 5-}f(x)g(x)=\lim_{x\to 5-}(2x+1)(x-k)$$
$$=11(5-k)=55-11k$$

따라서 $-15+3k=55-11k$이므로

$14k=70$

$\therefore k=5$

답 5

07 전략 $f(1)=\lim_{x\to 1}f(x)$임을 이용하여 $f(1)$의 값을 구한다.

풀이 $x\neq\pm1$일 때, $\quad f(x)=\frac{x^4-1}{x^2-1}$

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이면 $x=1$에서 연속이므로

$$f(1)=\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x^4-1}{x^2-1}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x^2+1)(x^2-1)}{x^2-1}$$
$$=\lim_{x\to 1}(x^2+1)=2$$

답 ②

08 전략 $\lim_{x\to 1}f(x)=f(1)$을 만족시키는 a, b의 값을 구한다.

풀이 $x\neq 1$일 때, $\quad f(x)=\frac{a\sqrt{x}+b}{x-1}$

함수 $f(x)$가 $x\geq 0$인 모든 실수에서 연속이면 $x=1$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to 1}f(x)=f(1)$$

$$\therefore \lim_{x\to 1}\frac{a\sqrt{x}+b}{x-1}=7 \quad \cdots\cdots ㉠$$

㉠에서 $x\to 1$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\to 0$이므로 (분자) $\to 0$이다.

즉 $\lim_{x\to 1}(a\sqrt{x}+b)=0$이므로

$a+b=0\quad \therefore b=-a \quad \cdots\cdots ㉡$ ⋯➊

02 함수의 연속

㉡을 ㉠의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1}\frac{a\sqrt{x}-a}{x-1}&=\lim_{x\to1}\frac{a(\sqrt{x}-1)}{x-1}\\&=\lim_{x\to1}\frac{a(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}\\&=\lim_{x\to1}\frac{a(x-1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}\\&=\lim_{x\to1}\frac{a}{\sqrt{x}+1}=\frac{a}{2}\end{aligned}$$

즉 $\frac{a}{2}=7$이므로

$a=14,\ b=-14$ ⋯ ❷

$\therefore a-b=28$ ⋯ ❸

답 28

채점 기준	비율
❶ b를 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40 %
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ $a-b$의 값을 구할 수 있다.	10 %

09 전략 각 함수가 모든 실수 x에서 정의되어 있는지 조사한다.

풀이 ① $f(x)-g(x)=2x^2+1-\frac{1}{x}$이고 이 함수는 $x=0$에서 정의되어 있지 않으므로 $x=0$에서 불연속이다.

② $f(x)g(x)=\frac{2x^2+1}{x}$이고 이 함수는 $x=0$에서 정의되어 있지 않으므로 $x=0$에서 불연속이다.

③ $\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{1}{x(2x^2+1)}$이고 이 함수는 $x=0$에서 정의되어 있지 않으므로 $x=0$에서 불연속이다.

④ $f(g(x))=f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{2}{x^2}+1$이고 이 함수는 $x=0$에서 정의되어 있지 않으므로 $x=0$에서 불연속이다.

⑤ $g(f(x))=g(2x^2+1)=\frac{1}{2x^2+1}$이고 이 함수는 모든 실수에서 연속이다.

답 ⑤

10 전략 연속함수의 성질을 이용하여 참, 거짓을 판별한다.

풀이 ㄱ. $f(x)-g(x)=h(x)$라 하면

$g(x)=f(x)-h(x)$

이때 $f(x)$와 $h(x)$가 연속함수이므로 $g(x)$도 연속함수이다.

ㄴ. [반례] $f(x)=0,\ g(x)=\begin{cases}\frac{1}{x} & (x\neq0)\\ 0 & (x=0)\end{cases}$이면

$f(x)g(x)=0$

따라서 $f(x)$와 $f(x)g(x)$는 연속함수이지만 $g(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

ㄷ. 임의의 실수 a에 대하여 $g(a)=b$라 하면 $g(x)$가 $x=a$에서 연속이므로 $\lim_{x\to a}g(x)=b$

$g(x)=t$로 놓으면 $x\to a$일 때 $t\to b$이므로

$\lim_{x\to a}f(g(x))=\lim_{t\to b}f(t)=f(b)=f(g(a))$

따라서 $f(g(x))$도 연속함수이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

11 전략 주어진 구간에서 함수의 그래프를 살펴본다.

풀이 ㄱ. $x=1$에서 최댓값 1을 갖는다.

ㄴ. $x=1$에서 최솟값 1을 갖는다.

ㄷ. 닫힌구간 $[1,\ 3]$에서 최댓값을 갖지 않는다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ뿐이다.

답 ①

12 전략 $g(x)=f(x)-x^2$으로 놓고 $g(x)$의 함숫값의 부호를 조사한다.

풀이 $g(x)=f(x)-x^2$이라 하면 함수 $g(x)$는 닫힌구간 $[-3,\ 2]$에서 연속이고

$g(-3)=f(-3)-9=-5-9=-14$

$g(-1)=f(-1)-1=3-1=2$

$g(2)=f(2)-4=0-4=-4$

따라서

$g(-3)g(-1)<0,\ g(-1)g(2)<0$

이므로 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $g(x)=0$, 즉 $f(x)-x^2=0$은 열린구간 $(-3,\ -1)$, $(-1,\ 2)$에서 각각 적어도 하나의 실근을 갖는다. 즉 방정식 $f(x)-x^2=0$은 열린구간 $(-3,\ 2)$에서 적어도 2개의 실근을 갖는다.

답 풀이 참조

13 전략 $f(x)$가 $x=2$, $x=-2$에서 연속임을 이용한다.

풀이 $f(-3)=-2$에서

$-9+c=-2 \quad \therefore c=7$ ⋯ ❶

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이면 $x=-2$에서 연속이므로

$\lim_{x\to-2+}f(x)=\lim_{x\to-2-}f(x)=f(-2)$

$\lim_{x\to-2+}(2x^2-b)=\lim_{x\to-2-}(3x+7)=1$

$8-b=1 \quad \therefore b=7$

또 $x=2$에서 연속이므로

$\lim_{x\to2+}f(x)=\lim_{x\to2-}f(x)=f(2)$

$\lim_{x\to2+}(x+a)=\lim_{x\to2-}(2x^2-7)=2+a$

$2+a=1 \quad \therefore a=-1$ ⋯ ❷

$\therefore abc=-49$ ⋯ ❸

답 −49

채점 기준	비율
❶ c의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	60 %
❸ abc의 값을 구할 수 있다.	10 %

14 전략 $g(x)=f(x)+f(x+1)$로 놓고 $g(x)$가 $x=0$에서 연속일 조건을 이용한다.

풀이 $f(x)=\begin{cases} a(2-x) & (x\geq 1) \\ 3 & (x<1) \end{cases}$에서 $x=t+1$로 놓으면

$$f(t+1)=\begin{cases} a(1-t) & (t\geq 0) \\ 3 & (t<0) \end{cases}$$

$$\therefore f(x+1)=\begin{cases} a(1-x) & (x\geq 0) \\ 3 & (x<0) \end{cases}$$

$g(x)=f(x)+f(x+1)$이라 하면 $g(x)$가 $x=0$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to 0+} g(x)=\lim_{x\to 0-} g(x)=g(0)$$

이때 $g(0)=f(0)+f(1)=3+a$이고

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0+} g(x)&=\lim_{x\to 0+} \{f(x)+f(x+1)\}\\&=\lim_{x\to 0+} f(x)+\lim_{x\to 0+} f(x+1)\\&=\lim_{x\to 0+} 3+\lim_{x\to 0+} a(1-x)\\&=3+a\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0-} g(x)&=\lim_{x\to 0-} \{f(x)+f(x+1)\}\\&=\lim_{x\to 0-} f(x)+\lim_{x\to 0-} f(x+1)\\&=\lim_{x\to 0-} 3+\lim_{x\to 0-} 3\\&=3+3=6\end{aligned}$$

따라서 $3+a=6$이므로

$a=3$ 답 3

15 전략 $\lim_{x\to 0+} \{g(x)\}^2=\lim_{x\to 0-} \{g(x)\}^2=\{g(0)\}^2$을 만족시키는 k의 값을 구한다.

풀이 $f(x+2)=(x+2)^2-2(x+2)+k=x^2+2x+k$,

$f(x-2)=(x-2)^2-2(x-2)+k=x^2-6x+8+k$이므로

$$g(x)=\begin{cases} x^2+2x+k & (x\geq 0) \\ x^2-6x+8+k & (x<0) \end{cases}$$

함수 $\{g(x)\}^2$이 $x=0$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to 0+} \{g(x)\}^2=\lim_{x\to 0-} \{g(x)\}^2=\{g(0)\}^2$$

이때 $\{g(0)\}^2=k^2$이고

$$\lim_{x\to 0+} \{g(x)\}^2=\lim_{x\to 0+} (x^2+2x+k)^2=k^2$$

$$\lim_{x\to 0-} \{g(x)\}^2=\lim_{x\to 0-} (x^2-6x+8+k)^2=(8+k)^2$$

따라서 $k^2=(8+k)^2$이므로 $16k+64=0$

$\therefore k=-4$ 답 -4

16 전략 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이므로 $\lim_{x\to 0+} f(x)=\lim_{x\to 0-} f(x)=f(0)$임을 이용한다.

풀이 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to 0+} f(x)=\lim_{x\to 0-} f(x)=f(0)$$

$x<0$일 때, $g(x)=-f(x)+x^2+4$

$x>0$일 때, $g(x)=f(x)-x^2-2x-8$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{x\to 0-} g(x)&=\lim_{x\to 0-} \{-f(x)+x^2+4\}\\&=-f(0)+4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0+} g(x)&=\lim_{x\to 0+} \{f(x)-x^2-2x-8\}\\&=f(0)-8\end{aligned}$$

이때 $\lim_{x\to 0-} g(x)-\lim_{x\to 0+} g(x)=6$이므로

$\{-f(0)+4\}-\{f(0)-8\}=6$, $-2f(0)=-6$

$\therefore f(0)=3$ 답 ⑤

17 전략 함수 $\dfrac{g(x)}{f(x)}$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 함수 $\dfrac{g(x)}{f(x)}$가 $x=2$에서 연속이어야 함을 이용한다.

풀이 $x<2$일 때, $f(x)=x^2-4x+6=(x-2)^2+2>0$

$x\geq 2$일 때, $f(x)=1>0$

따라서 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 $f(x)>0$이다. 이때 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이고 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 불연속이므로 함수 $\dfrac{g(x)}{f(x)}$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $x=2$에서 연속이어야 한다.

즉 $\lim_{x\to 2+} \dfrac{g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to 2-} \dfrac{g(x)}{f(x)}=\dfrac{g(2)}{f(2)}$이어야 하므로

$$\lim_{x\to 2+} \frac{g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to 2+} \frac{ax+1}{1}=2a+1,$$

$$\lim_{x\to 2-} \frac{g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to 2-} \frac{ax+1}{x^2-4x+6}=\frac{2a+1}{2},$$

$$\frac{g(2)}{f(2)}=2a+1$$

에서 $\dfrac{2a+1}{2}=2a+1$, $2a+1=4a+2$

$2a=-1$ $\therefore a=-\dfrac{1}{2}$ 답 ④

03 미분계수와 도함수

01 미분계수

확인

본책 44~46쪽

1 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(3)-f(2)}{3-2}=\dfrac{0-(-2)}{3-2}=2$

답 2

2 (1) $f'(3)=\lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{f(3+\Delta x)-f(3)}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{-(3+\Delta x)+3-(-3+3)}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{-\Delta x}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x \to 0}(-1)=-1$

(2) $f'(3)=\lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{f(3+\Delta x)-f(3)}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{\{(3+\Delta x)^2-(3+\Delta x)\}-(3^2-3)}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{(\Delta x)^2+5\Delta x}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x \to 0}(\Delta x+5)=5$

답 (1) -1 (2) 5

3 (1) 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1,\ 2)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)$이므로

$f'(1)=\lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{\{(1+\Delta x)^2+(1+\Delta x)\}-2}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{(\Delta x)^2+3\Delta x}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x \to 0}(\Delta x+3)$

$=3$

(2) 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2,\ 2)$에서의 접선의 기울기는 $f'(2)$이므로

$f'(2)=\lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{\{-(2+\Delta x)^3+5(2+\Delta x)\}-2}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{-(\Delta x)^3-6(\Delta x)^2-7\Delta x}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x \to 0}\{-(\Delta x)^2-6\Delta x-7\}$

$=-7$

답 (1) 3 (2) -7

유제

본책 47~49쪽

1 x의 값이 1에서 3까지 변할 때의 함수 $f(x)$의 평균변화율은

$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(3)-f(1)}{3-1}=\dfrac{(3a+17)-(a+1)}{2}$

$=\dfrac{2a+16}{2}=a+8$

따라서 $a+8=5$이므로 $a=-3$

답 -3

2 x의 값이 -1에서 a까지 변할 때의 함수 $f(x)$의 평균변화율은

$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(a)-f(-1)}{a-(-1)}=\dfrac{(a^2+2a)-(-1)}{a+1}$

$=\dfrac{(a+1)^2}{a+1}=a+1$

함수 $f(x)$의 $x=1$에서의 미분계수는

$f'(1)=\lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{\{(1+\Delta x)^2+2(1+\Delta x)\}-3}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{(\Delta x)^2+4\Delta x}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x \to 0}(\Delta x+4)=4$

따라서 $a+1=4$이므로 $a=3$

답 3

3 두 점 $\mathrm{A}(1,\ 1)$, $\mathrm{B}(t,\ f(t))$에 대하여 직선 AB의 기울기는 $\dfrac{f(t)-1}{t-1}$

점 B가 점 A에 한없이 가까워지면 $t \to 1$이므로 구하는 값은

$\lim\limits_{t \to 1}\dfrac{f(t)-1}{t-1}=\lim\limits_{t \to 1}\dfrac{(t^3-t+1)-1}{t-1}$

$=\lim\limits_{t \to 1}\dfrac{t(t+1)(t-1)}{t-1}$

$=\lim\limits_{t \to 1}t(t+1)=2$

답 2

4 (1) $\lim\limits_{h \to 0}\dfrac{f(a)-f(a-4h)}{h}=\lim\limits_{h \to 0}\dfrac{f(a-4h)-f(a)}{-h}$

$=\lim\limits_{h \to 0}\dfrac{f(a-4h)-f(a)}{-4h}\cdot 4$

$=f'(a)\cdot 4$

$=-3\cdot 4=-12$

(2) $\lim\limits_{h \to 0}\dfrac{f(a+5h)-f(a)}{6h}=\lim\limits_{h \to 0}\dfrac{f(a+5h)-f(a)}{5h}\cdot\dfrac{5}{6}$

$=f'(a)\cdot\dfrac{5}{6}$

$=-3\cdot\dfrac{5}{6}=-\dfrac{5}{2}$

(3) $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h^2)-f(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h^2)-f(a)}{h^2}\cdot h$

$=f'(a)\cdot 0=0$

(4) $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+2h)-f(a+h)}{3h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+2h)-f(a)+f(a)-f(a+h)}{3h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+2h)-f(a)}{2h}\cdot\frac{2}{3}-\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\cdot\frac{1}{3}$

$=f'(a)\cdot\frac{2}{3}-f'(a)\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{3}f'(a)$

$=\frac{1}{3}\cdot(-3)=-1$

답 (1) -12 (2) $-\frac{5}{2}$ (3) 0 (4) -1

5 $\lim_{h\to 0}\frac{f(3+2h)-f(3)}{5h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(3+2h)-f(3)}{2h}\cdot\frac{2}{5}$

$=f'(3)\cdot\frac{2}{5}$

즉 $\frac{2}{5}f'(3)=2$이므로 $f'(3)=5$

$\therefore \lim_{h\to 0}\frac{f(3-h)-f(3+h)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{f(3-h)-f(3)+f(3)-f(3+h)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{f(3-h)-f(3)}{-h}\cdot(-1)-\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}$

$=-f'(3)-f'(3)=-2f'(3)$

$=-2\cdot 5=-10$

답 -10

6 (1) $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{f(x)-f(1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{f(x)-f(1)}\cdot(x^2+x+1)$

$=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\frac{f(x)-f(1)}{x-1}}\cdot(x^2+x+1)$

$=\frac{1}{f'(1)}\cdot 3=\frac{1}{3}\cdot 3=1$

(2) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2f(1)-f(x)}{x-1}$

$=\lim_{x\to 1}\frac{x^2f(1)-f(1)+f(1)-f(x)}{x-1}$

$=\lim_{x\to 1}\frac{(x^2-1)f(1)-\{f(x)-f(1)\}}{x-1}$

$=\lim_{x\to 1}\frac{(x+1)(x-1)f(1)}{x-1}-\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$

$=\lim_{x\to 1}(x+1)f(1)-f'(1)$

$=2f(1)-f'(1)=2\cdot 5-3=7$

답 (1) 1 (2) 7

7 $\lim_{x\to 1}\frac{f(x^3)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x^3)-f(1)}{x^3-1}\cdot(x^2+x+1)$

$=f'(1)\cdot 3$

$=2\cdot 3=6$

답 6

참고 $x\longrightarrow 1$이면 $x^3\longrightarrow 1$이므로

$\lim_{x\to 1}\frac{f(x^3)-f(1)}{x^3-1}=\lim_{x^3\to 1}\frac{f(x^3)-f(1)}{x^3-1}=f'(1)$

8 $\lim_{x\to -1}\frac{f(x)+1}{x^2+3x+2}=\lim_{x\to -1}\frac{f(x)-f(-1)}{(x+2)(x+1)}$

$=\lim_{x\to -1}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}\cdot\frac{1}{x+2}$

$=f'(-1)\cdot 1$

$=4\cdot 1=4$

답 4

02 미분가능성과 연속성

유제 본책 52쪽

1 (1) (i) $f(0)=0$이고 $\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}x|x|=0$이므로

$\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

(ii) $f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h|h|}{h}$

$=\lim_{h\to 0}|h|=0$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

(i), (ii)에서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이고 미분가능하다.

(2) (i) $f(0)=1$이고

$\lim_{x\to 0+}f(x)=\lim_{x\to 0+}(x^2+x+1)=1,$

$\lim_{x\to 0-}f(x)=\lim_{x\to 0-}(2x+1)=1$

에서 $\lim_{x\to 0}f(x)=1$이므로 $\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

(ii) $\lim_{h\to 0+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{(h^2+h+1)-1}{h}$

$=\lim_{h\to 0+}\frac{h^2+h}{h}$

$=\lim_{h\to 0+}(h+1)=1,$

$\lim_{h\to 0-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0-}\frac{(2h+1)-1}{h}$

$=\lim_{h\to 0-}\frac{2h}{h}=2$

이므로 $\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$, 즉 $f'(0)$은 존재하지 않는다.

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하지 않다.

(i), (ii)에서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이지만 미분가능하지 않다.

답 풀이 참조

2 함수의 그래프가 끊어진 점에서 불연속이므로 함수 $f(x)$는 $x=2$, $x=3$에서 불연속이다.

$\therefore a=2$

함수가 불연속인 점 또는 그래프가 꺾이는 점에서 미분가능하지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=1$, $x=2$, $x=3$에서 미분가능하지 않다.

$\therefore b=3$

$\therefore a+b=5$ 답 5

03 도함수

확인

본책 53~55쪽

1 $f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\{2(x+\Delta x)^2-3(x+\Delta x)\}-(2x^2-3x)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2(\Delta x)^2+4x\Delta x-3\Delta x}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}(2\Delta x+4x-3)=4x-3$

답 $f'(x)=4x-3$

2 (1) $y'=(x^2)'-(5x)'+(7)'=2x-5$

(2) $y'=(x-1)'(2x^2+3)+(x-1)(2x^2+3)'$

$=1\cdot(2x^2+3)+(x-1)\cdot 4x$

$=2x^2+3+4x^2-4x=6x^2-4x+3$

답 (1) $y'=2x-5$ (2) $y'=6x^2-4x+3$

3 $y'=4(-x+3)^{4-1}(-x+3)'$

$=4(-x+3)^3\cdot(-1)$

$=-4(-x+3)^3$ 답 $y'=-4(-x+3)^3$

유제

본책 56~60쪽

1 (1) $y'=2x^3-x^2+2x$

(2) $y'=(x^2-2x-1)'(3x+5)+(x^2-2x-1)(3x+5)'$

$=(2x-2)(3x+5)+(x^2-2x-1)\cdot 3$

$=(6x^2+4x-10)+(3x^2-6x-3)$

$=9x^2-2x-13$

(3) $y'=(x^2+2)'(x+3)(-2x+1)+(x^2+2)(x+3)'(-2x+1)$

$+(x^2+2)(x+3)(-2x+1)'$

$=2x(x+3)(-2x+1)+(x^2+2)\cdot 1\cdot(-2x+1)$

$+(x^2+2)(x+3)\cdot(-2)$

$=(-4x^3-10x^2+6x)+(-2x^3+x^2-4x+2)$

$+(-2x^3-6x^2-4x-12)$

$=-8x^3-15x^2-2x-10$

(4) $y'=5(x^2+3x+4)^4(x^2+3x+4)'$

$=5(x^2+3x+4)^4(2x+3)$

답 풀이 참조

2 $f'(x)=3(2x^2-5x+1)^2(2x^2-5x+1)'$

$=3(2x^2-5x+1)^2(4x-5)$

이므로

$f'(1)=3\cdot(-2)^2\cdot(-1)=-12$,

$f'(2)=3\cdot(-1)^2\cdot 3=9$

$\therefore f'(1)+f'(2)=-3$ 답 -3

3 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$에서 $f(1)=0$이므로

$1+a+b+c=0$

$\therefore a+b+c=-1$ ...... ㉠

$f'(x)=3x^2+2ax+b$에서 $f'(1)=-1$이므로

$3+2a+b=-1$

$\therefore 2a+b=-4$ ...... ㉡

또 $f'(-1)=7$이므로

$3-2a+b=7$

$\therefore -2a+b=4$ ...... ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$a=-2,\ b=0$

$a=-2$, $b=0$을 ㉠에 대입하면 $c=1$

따라서 $f(x)=x^3-2x^2+1$이므로

$f(-1)=-1-2+1=-2$ 답 -2

4 $\lim_{h\to 0}\frac{f(2+3h)-f(2-h)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+3h)-f(2)+f(2)-f(2-h)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+3h)-f(2)}{3h}\cdot 3+\lim_{h\to 0}\frac{f(2-h)-f(2)}{-h}$

$=3f'(2)+f'(2)=4f'(2)$

이때 $f'(x)=3x^2-8x$이므로 구하는 값은

$4f'(2)=4\cdot(3\cdot 2^2-8\cdot 2)=-16$ 답 -16

5 $\frac{1}{n}=h$로 놓으면 $n \to \infty$일 때 $h \to 0$이므로

$$\lim_{n\to\infty} n\left\{f\left(1+\frac{2}{n}\right)-f(1)\right\}=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\{f(1+2h)-f(1)\}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+2h)-f(1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+2h)-f(1)}{2h}\cdot2$$
$$=2f'(1)$$

이때

$$f'(x)=(x^2+2x)'(x-1)+(x^2+2x)(x-1)'$$
$$=(2x+2)(x-1)+(x^2+2x)\cdot1$$
$$=3x^2+2x-2$$

이므로 구하는 값은

$2f'(1)=2\cdot(3\cdot1^2+2\cdot1-2)=6$ 답 6

6 $\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x^2-4}=\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\cdot\frac{1}{x+2}=\frac{1}{4}f'(2)$

즉 $\frac{1}{4}f'(2)=2$이므로 $f'(2)=8$

한편 $f(x)=x^3+ax+b$, $f'(x)=3x^2+a$이므로

$f'(2)=8$에서 $3\cdot2^2+a=8$ $\therefore a=-4$

$f(3)=-1$에서 $3^3-4\cdot3+b=-1$ $\therefore b=-16$

따라서 $f(x)=x^3-4x-16$이므로

$f(-1)=(-1)^3-4\cdot(-1)-16=-13$ 답 -13

7 $f(x)=x^9+x^8+x^7+x^6+x^5$이라 하면 $f(-1)=-1$이므로

$$\lim_{x\to-1}\frac{x^9+x^8+x^7+x^6+x^5+1}{x+1}=\lim_{x\to-1}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}$$
$$=f'(-1)$$

이때 $f'(x)=9x^8+8x^7+7x^6+6x^5+5x^4$이므로

$f'(-1)=9-8+7-6+5=7$

따라서 구하는 값은 7이다. 답 7

8 $f(x)=x^n+2x$라 하면 $f(1)=1^n+2=3$이므로

$$\lim_{x\to1}\frac{x^n+2x-3}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$$

이때 $f'(x)=nx^{n-1}+2$이므로 $f'(1)=11$에서

$n+2=11$ $\therefore n=9$ 답 9

9 $x \to 2$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\to 0$이므로 (분자) $\to 0$이다.

즉 $\lim_{x\to2}(x^a-3x^3-2x-4)=0$이므로

$2^a-3\cdot2^3-2\cdot2-4=0$, $2^a-32=0$

$2^a=32=2^5$ $\therefore a=5$

$f(x)=x^5-3x^3-2x$라 하면 $f(2)=4$이므로

$$\lim_{x\to2}\frac{x^5-3x^3-2x-4}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)$$

이때 $f'(x)=5x^4-9x^2-2$이므로

$b=f'(2)=5\cdot2^4-9\cdot2^2-2=42$

$\therefore a+b=47$ 답 47

10 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 미분가능하면 $x=0$에서 연속이므로

$\lim_{x\to0-}(x^3+ax+b)=f(0)$ $\therefore a=b$ …… ㉠

또 $f(x)$의 $x=0$에서의 미분계수가 존재하므로

$$\lim_{h\to0+}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0+}\frac{(h^2-h+a)-a}{h}$$
$$=\lim_{h\to0+}\frac{h^2-h}{h}=\lim_{h\to0+}(h-1)$$
$$=-1,$$
$$\lim_{h\to0-}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0-}\frac{(h^3+ah+b)-a}{h}$$
$$=\lim_{h\to0-}\frac{h^3+ah}{h}\ (\because ㉠)$$
$$=\lim_{h\to0-}(h^2+a)=a$$

에서 $a=-1$

$a=-1$을 ㉠에 대입하면 $b=-1$

$\therefore ab=1$ 답 1

다른 풀이 $f_1(x)=x^2-x+a\ (x\ge0)$, $f_2(x)=x^3+ax+b\ (x<0)$라 하면

$f_1'(x)=2x-1\ (x>0)$, $f_2'(x)=3x^2+a\ (x<0)$

$f(x)$가 $x=0$에서 미분가능하면 $x=0$에서 연속이므로

$\lim_{x\to0-}f_2(x)=f_1(0)$

$\lim_{x\to0-}(x^3+ax+b)=a$

$\therefore a=b$ …… ㉠

또 $f(x)$의 $x=0$에서의 미분계수가 존재하므로

$\lim_{x\to0+}f_1'(x)=\lim_{x\to0-}f_2'(x)$

$\therefore a=-1$

$a=-1$을 ㉠에 대입하면 $b=-1$

$\therefore ab=1$

11 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 미분가능하면 $x=1$에서 미분가능하다.

즉 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to1-}(x^3+x+b)=f(1)$

$2+b=-1+a$ $\therefore a=b+3$ …… ㉠

또 $f(x)$의 $x=1$에서의 미분계수가 존재하므로

$$\lim_{x\to1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1+}\frac{-x^2+ax-(-1+a)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1+}\frac{-(x^2-1)+a(x-1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1+}\frac{-(x-1)(x-a+1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1+}(-x+a-1)$$
$$=a-2,$$
$$\lim_{x\to1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1-}\frac{x^3+x+b-(-1+a)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1-}\frac{x^3+x-2}{x-1}\ (\because ㉠)$$
$$=\lim_{x\to1-}\frac{(x-1)(x^2+x+2)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1-}(x^2+x+2)$$
$$=4$$

에서 $a-2=4$ $\therefore a=6$

$a=6$을 ㉠에 대입하면 $b=3$

$\therefore a+b=9$ 답 9

12 다항식 x^3-3x+a를 $(x+b)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$x^3-3x+a=(x+b)^2Q(x)$ …… ㉠

위의 식의 양변에 $x=-b$를 대입하면

$-b^3+3b+a=0$ …… ㉡

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$3x^2-3=2(x+b)Q(x)+(x+b)^2Q'(x)$

위의 식의 양변에 $x=-b$를 대입하면

$3b^2-3=0,\quad b^2=1\quad \therefore b=1\ (\because b>0)$

$b=1$을 ㉡에 대입하면

$-1+3+a=0\quad \therefore a=-2$ 답 $a=-2,\ b=1$

13 다항식 x^6+ax^2+b를 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$x^6+ax^2+b=(x-1)^2Q(x)+10x-6$ …… ㉠

위의 식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$1+a+b=4\quad \therefore a+b=3$ …… ㉡

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$6x^5+2ax=2(x-1)Q(x)+(x-1)^2Q'(x)+10$

위의 식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$6+2a=10\quad \therefore a=2$

$a=2$를 ㉡에 대입하면 $b=1$

$\therefore ab=2$ 답 2

중단원 연습 문제

본책 61~64쪽

01 ⑤	02 ④	03 8	04 3	05 $\frac{8}{3}$
06 −2	07 ④	08 ⑤	09 100	10 ③
11 12	12 ①	13 ③	14 3	15 ④
16 9	17 50	18 −1	19 −7	20 2
21 ②	22 ③	23 ③	24 235	25 5
26 ④	27 ③			

01 전략 평균변화율의 정의를 이용한다.

풀이 x의 값이 2에서 6까지 변할 때의 함수 $f(x)$의 평균변화율은

$$\frac{f(6)-f(2)}{6-2}=\frac{0-(-8)}{4}=2$$

x의 값이 0에서 a까지 변할 때의 함수 $f(x)$의 평균변화율은

$$\frac{f(a)-f(0)}{a-0}=\frac{a^2-6a}{a}=a-6$$

따라서 $a-6=2$이므로 $a=8$ 답 ⑤

02 전략 함수 $y=f(x)$에서 x의 값이 a에서 b까지 변할 때의 평균변화율은 $y=f(x)$의 그래프 위의 두 점 $(a, f(a))$, $(b, f(b))$를 지나는 직선의 기울기와 같음을 이용한다.

풀이 직선 OA의 기울기는 x의 값이 0에서 4까지 변할 때의 함수 $f(x)$의 평균변화율과 같으므로

$$\frac{f(4)-f(0)}{4-0}=2$$

한편 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=0$에 대하여 대칭이므로

$f(-4)=f(4)$

따라서 x의 값이 -4에서 0까지 변할 때의 함수 $f(x)$의 평균변화율은

$$\frac{f(0)-f(-4)}{0-(-4)}=\frac{f(0)-f(4)}{4}$$
$$=-\frac{f(4)-f(0)}{4-0}$$
$$=-2$$

답 ④

03 전략 평균변화율과 미분계수의 정의를 이용한다.

풀이 x의 값이 a에서 b까지 변할 때의 함수 $f(x)$의 평균변화율은

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{(b^2-3b+6)-(a^2-3a+6)}{b-a}$$
$$=\frac{(b^2-a^2)-3(b-a)}{b-a}$$
$$=\frac{(b+a)(b-a)-3(b-a)}{b-a}$$
$$=a+b-3 \quad \cdots ❶$$

함수 $f(x)$의 $x=4$에서의 미분계수는

$$f'(4)=\lim_{h\to0}\frac{f(4+h)-f(4)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{\{(4+h)^2-3(4+h)+6\}-10}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{h^2+5h}{h}=\lim_{h\to0}(h+5)=5 \quad \cdots ❷$$

따라서 $a+b-3=5$이므로 $\quad a+b=8$ ⋯ ❸

답 8

채점 기준	비율
❶ x의 값이 a에서 b까지 변할 때의 평균변화율을 구할 수 있다.	40 %
❷ $f'(4)$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	20 %

04 전략 $\lim_{■\to0}\frac{f(a+■)-f(a)}{■}=f'(a)$임을 이용한다.

풀이 $\lim_{h\to0}\frac{f(4+kh)-f(4)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(4+kh)-f(4)}{kh}\cdot k$
$$=kf'(4)=3k$$

따라서 $3k=9$이므로 $\quad k=3$

답 3

05 전략 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a,\ f(a))$에서의 접선의 기울기는 $f'(a)$와 같다.

풀이 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1,\ 9)$에서의 접선의 기울기가 4이므로 $\quad f'(1)=4$

$$\therefore \lim_{h\to0}\frac{f(1+2h)-f(1)}{3h}=\lim_{h\to0}\frac{f(1+2h)-f(1)}{2h}\cdot\frac{2}{3}$$
$$=\frac{2}{3}f'(1)=\frac{2}{3}\cdot4=\frac{8}{3}$$

답 $\frac{8}{3}$

06 전략 $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-b}{x-a}=c$ (c는 상수)이면 $f(a)=b,\ f'(a)=c$임을 이용한다.

풀이 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)-3}{x-1}=5$에서 $x\to1$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\to0$이므로 (분자) $\to0$이다.

즉 $\lim_{x\to1}\{f(x)-3\}=0$이므로 $\quad f(1)=3$ ⋯ ❶

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-3}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$이므로

$f'(1)=5$ ⋯ ❷

$\therefore f(1)-f'(1)=3-5=-2$ ⋯ ❸

답 -2

채점 기준	비율
❶ $f(1)$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ $f'(1)$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $f(1)-f'(1)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

07 전략 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능함을 보이려면 $x=a$에서의 미분계수인 $f'(a)=\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$가 존재함을 보인다.

풀이 ㄱ. $f'(0)=\lim_{h\to0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\frac{1}{h+2}-\frac{1}{2}}{h}$
$$=\lim_{h\to0}\frac{-1}{2(h+2)}=-\frac{1}{4}$$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

ㄴ. $\lim_{h\to0+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0+}\frac{h+|h|}{h}$
$$=\lim_{h\to0+}\frac{h+h}{h}=2,$$
$\lim_{h\to0-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0-}\frac{h+|h|}{h}$
$$=\lim_{h\to0-}\frac{h-h}{h}=0$$

이므로 $\lim_{h\to0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$, 즉 $f'(0)$이 존재하지 않는다.

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하지 않다.

ㄷ. $f'(0)=\lim_{h\to0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{|h|^3-0}{h}$
$$=\lim_{h\to0}\frac{h^2\cdot|h|}{h}=\lim_{h\to0}h|h|=0$$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

이상에서 $x=0$에서 미분가능한 함수는 ㄱ, ㄷ이다.

답 ④

08 전략 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하지 않은 경우
➡ 불연속인 경우, 그래프가 꺾이는 경우

풀이 ① $\lim_{x\to-1+}f(x)=\lim_{x\to-1-}f(x)$이므로 $\lim_{x\to-1}f(x)$의 값이 존재한다.

② 함수 $f(x)$는 $x=-1,\ x=2$에서 불연속이므로 불연속인 x의 값은 2개이다.

③ 함수 $f(x)$는 $x=-1,\ x=0,\ x=1,\ x=2$에서 미분가능하지 않으므로 미분가능하지 않은 x의 값은 4개이다.

④ $f'(-2)=0$이므로 $f'(x)=0$인 x의 값이 존재한다.

⑤ $x=\frac{1}{2}$에서의 접선의 기울기는 양수이므로 $f'\left(\frac{1}{2}\right)>0$이다.

답 ⑤

09 전략 미분법의 공식을 이용하여 $f'(x)$를 구한 후 $x=1$을 대입한다.

풀이 $f(x)=x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\cdots+\frac{1}{100}x^{100}$에서

$f'(x)=1+x+x^2+\cdots+x^{99}$

$\therefore f'(1)=1+1+1+\cdots+1$

$=1\cdot100=100$

답 100

10 전략 곱의 미분법을 이용한다.

풀이 $f(x)=(2x^2-1)(3x-a)(-x+2)$에서

$$\begin{aligned}f'(x)&=(2x^2-1)'(3x-a)(-x+2)\\&\quad+(2x^2-1)(3x-a)'(-x+2)\\&\quad+(2x^2-1)(3x-a)(-x+2)'\\&=4x(3x-a)(-x+2)+(2x^2-1)\cdot3\cdot(-x+2)\\&\quad+(2x^2-1)(3x-a)\cdot(-1)\end{aligned}$$

이때 $f'(2)=14$이므로 $\quad -7(6-a)=14$

$6-a=-2 \qquad \therefore a=8$

답 ③

11 전략 곱의 미분법을 이용하여 $g(x)$를 미분한다.

풀이 $g(x)=(x^2-4x+1)f(x)$에서

$$\begin{aligned}g'(x)&=(x^2-4x+1)'f(x)+(x^2-4x+1)f'(x)\\&=(2x-4)f(x)+(x^2-4x+1)f'(x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore g'(-1)&=-6f(-1)+6f'(-1)\\&=-6\cdot(-4)+6\cdot(-2)\\&=12\end{aligned}$$

답 12

12 전략 그래프를 이용하여 $x=1$, $x=2$, $x=3$에서의 $f(x)$, $f'(x)$의 부호를 알아본다.

풀이 $y=f(x)$의 그래프에서

$f(1)=0, f'(1)>0, f(2)>0, f'(2)=0, f(3)=0, f'(3)<0$

$g(x)=xf(x)$에서 $\quad g'(x)=f(x)+xf'(x)$

ㄱ. $f(1)+f'(1)=f'(1)>0$

ㄴ. $g'(2)=f(2)+2f'(2)=f(2)>0$이므로

$f(2)+g'(2)>0$

ㄷ. $g(3)g'(3)=3f(3)g'(3)$에서

$f(3)=0, g'(3)=f(3)+3f'(3)<0$

이므로 $\quad g(3)g'(3)=0$

이상에서 옳은 것은 ㄱ뿐이다.

답 ①

13 전략 주어진 식을 변형한 후 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$임을 이용한다.

풀이 $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\{f(x)\}^2-\{f(2)\}^2}{x-2}$

$$\begin{aligned}&=\lim_{x\to2}\frac{\{f(x)-f(2)\}\{f(x)+f(2)\}}{x-2}\\&=\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\cdot\lim_{x\to2}\{f(x)+f(2)\}\\&=f'(2)\cdot2f(2)\end{aligned}$$

이때 $f'(x)=10x-4$이므로 구하는 값은

$f'(2)\cdot2f(2)=(10\cdot2-4)\cdot2\cdot(5\cdot2^2-4\cdot2)=384$

답 ③

14 전략 $f(2)=0$임을 이용하여 주어진 극한을 미분계수로 나타낸다.

풀이 $f(2)=0$이므로

$$\begin{aligned}\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)}{3h}&=\frac{1}{3}\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}\\&=\frac{1}{3}f'(2)\end{aligned}$$ ⋯ ❶

이때

$$\begin{aligned}f'(x)&=(x-2)'(x^3-x+3)+(x-2)(x^3-x+3)'\\&=(x^3-x+3)+(x-2)(3x^2-1)\end{aligned}$$

이므로 $\quad f'(2)=2^3-2+3=9$ ⋯ ❷

따라서 구하는 값은 $\quad \dfrac{1}{3}f'(2)=\dfrac{1}{3}\cdot9=3$ ⋯ ❸

답 3

채점 기준	비율
❶ 주어진 극한을 미분계수로 나타낼 수 있다.	50 %
❷ $f'(2)$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ 답을 구할 수 있다.	10 %

15 전략 $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=f'(1)$임을 이용한다.

풀이 $f(x)=2x^2+ax$에서 $\quad f'(x)=4x+a$

$\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=f'(1)=6$이므로

$4+a=6 \qquad \therefore a=2$

답 ④

16 전략 $f(x)=x^{2n+1}+2x^{n+1}+x$로 놓고 $f'(1)$의 값을 구한다.

풀이 $f(x)=x^{2n+1}+2x^{n+1}+x$라 하면 $f(1)=4$이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1}\frac{x^{2n+1}+2x^{n+1}+x-4}{x-1}&=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\\&=f'(1)\end{aligned}$$ ⋯ ❶

이때 $f'(x)=(2n+1)x^{2n}+2(n+1)x^n+1$이므로

$$\begin{aligned}f'(1)&=(2n+1)+2(n+1)+1\\&=4n+4\end{aligned}$$ ⋯ ❷

따라서 $4n+4=40$이므로 $\quad n=9$ ⋯ ❸

답 9

채점 기준	비율
❶ 주어진 등식의 좌변을 미분계수로 나타낼 수 있다.	50 %
❷ $f'(1)$을 n에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40 %
❸ n의 값을 구할 수 있다.	10 %

17 전략 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $(p,\ q)$에서의 접선의 기울기가 m이면 $f(p)=q$, $f'(p)=m$임을 이용한다.

풀이 함수 $f(x)$의 그래프가 점 $(1,\ 10)$을 지나므로 $f(1)=10$에서

$2+a+b=10 \quad \therefore a+b=8$ ...... ㉠

점 (1, 10)에서의 접선의 기울기가 5이므로 $f'(1)=5$

이때 $f'(x)=4x+a$이므로 $4+a=5$

$\therefore a=1$

$a=1$을 ㉠에 대입하면 $b=7$

$\therefore a^2+b^2=50$

답 50

18 전략 곡선 $y=f(x)$ 위의 $x=t$인 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)$임을 이용한다.

풀이 $f(x)=(x^3-a)(2x+3)^2$이라 하면 곡선 $y=f(x)$ 위의 $x=-1$인 점에서의 접선의 기울기가 3이므로

$f'(-1)=3$

이때

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^3-a)'(2x+3)^2+(x^3-a)\{(2x+3)^2\}' \\ &= 3x^2\cdot(2x+3)^2+(x^3-a)\cdot 2(2x+3)(2x+3)' \\ &= 3x^2(2x+3)^2+4(x^3-a)(2x+3) \end{aligned}$$

이므로 $3+4(-1-a)=3$

$-1-a=0 \quad \therefore a=-1$

답 -1

19 전략 $f(x)=ax^2+bx+c\ (a\neq0)$로 놓고 주어진 등식에 대입한 후 계수를 비교한다.

풀이 $f(x)$가 이차함수이므로 $f(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수, $a\neq0$)라 하면 $f'(x)=2ax+b$

$f(x)$와 $f'(x)$를 주어진 식에 대입하면

$(2x+1)(2ax+b)-4(ax^2+bx+c)+5=0$

$\therefore 2(a-b)x+(b-4c+5)=0$

위의 등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로

$a-b=0,\ b-4c+5=0$ ...... ㉠

또 $f(1)=-1$이므로 $a+b+c=-1$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하면 풀면 $a=-1, b=-1, c=1$

따라서 $f'(x)=-2x-1$이므로

$f'(3)=-7$

답 -7

20 전략 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하면 $f'(1)$이 존재함을 이용한다.

풀이 $f(x)$의 $x=1$에서의 미분계수가 존재하므로

$$\begin{aligned} \lim_{x\to1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} &= \lim_{x\to1+}\frac{x^4+a-(1+a)}{x-1} \\ &= \lim_{x\to1+}\frac{(x^2+1)(x+1)(x-1)}{x-1} \\ &= \lim_{x\to1+}(x^2+1)(x+1) \\ &= 4, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x\to1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} &= \lim_{x\to1-}\frac{ax^2+1-(1+a)}{x-1} \\ &= \lim_{x\to1-}\frac{a(x+1)(x-1)}{x-1} \\ &= \lim_{x\to1-}a(x+1)=2a \end{aligned}$$

에서 $2a=4 \quad \therefore a=2$

답 2

21 전략 다항식을 이차식으로 나누었을 때의 나머지는 $ax+b$ (a, b는 상수) 꼴임을 이용한다.

풀이 다항식 $x^{10}+2x+3$을 $(x+1)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)=ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$x^{10}+2x+3=(x+1)^2Q(x)+ax+b$ ...... ㉠

위의 식의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$2=-a+b$ ...... ㉡

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$10x^9+2=2(x+1)Q(x)+(x+1)^2Q'(x)+a$

위의 식의 양변에 $x=-1$을 대입하면 $a=-8$

$a=-8$을 ㉡에 대입하면 $b=-6$

따라서 $R(x)=-8x-6$이므로

$R(-2)=10$

답 ②

22 전략 $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$를 이용할 수 있도록 식을 변형한다.

풀이 $\lim_{x\to-1}\frac{x^2f(1)-f(x^2)}{x+1}$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x\to-1}\frac{x^2f(1)-f(1)+f(1)-f(x^2)}{x+1} \\ &= \lim_{x\to-1}\frac{(x^2-1)f(1)}{x+1}-\lim_{x\to-1}\frac{f(x^2)-f(1)}{x+1} \\ &= f(1)\lim_{x\to-1}(x-1)-\lim_{x\to-1}\frac{f(x^2)-f(1)}{x+1} \\ &= -5\cdot(-2)-\lim_{x\to-1}\frac{f(x^2)-f(1)}{x+1} \\ &= 10-\lim_{x\to-1}\frac{f(x^2)-f(1)}{x+1} \end{aligned}$$

이때 $x^2=t$로 놓으면 $x \longrightarrow -1$일 때 $t \longrightarrow 1$이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x\to-1}\frac{f(x^2)-f(1)}{x+1} &= \lim_{x\to-1}\frac{f(x^2)-f(1)}{x^2-1}\cdot(x-1) \\ &= \lim_{x\to-1}\frac{f(x^2)-f(1)}{x^2-1}\cdot\lim_{x\to-1}(x-1) \\ &= -2\lim_{t\to1}\frac{f(t)-f(1)}{t-1} \\ &= -2f'(1)=-2\cdot3=-6 \end{aligned}$$

따라서 구하는 값은 $10-(-6)=16$

답 ③

23 전략 $y=f(x)$의 그래프가 y축에 대하여 대칭이면 $f(x)=f(-x)$임을 이용한다.

풀이 $y=f(x)$의 그래프가 y축에 대하여 대칭이므로 모든 x에 대하여 $f(x)=f(-x)$가 성립한다.

$$\therefore f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(-x-h)-f(-x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(-x-h)-f(-x)}{-h}\cdot(-1)$$
$$=-f'(-x)$$

따라서 $f'(2)=4$에서 $f'(-2)=-4$이므로

$$\lim_{x\to -2}\frac{f(x^2)-f(4)}{f(x)-f(2)}$$
$$=\lim_{x\to -2}\frac{f(x^2)-f(4)}{x^2-4}\cdot\frac{x^2-4}{f(x)-f(2)}$$
$$=\lim_{x\to -2}\frac{f(x^2)-f(4)}{x^2-4}\cdot\lim_{x\to -2}\frac{x-(-2)}{f(x)-f(-2)}\cdot(x-2)$$
$$=\lim_{x\to -2}\frac{f(x^2)-f(4)}{x^2-4}\cdot\frac{1}{f'(-2)}\cdot(-4)$$
$$=\lim_{x\to -2}\frac{f(x^2)-f(4)}{x^2-4}$$

이때 $x^2=t$로 놓으면 $x\longrightarrow -2$일 때 $t\longrightarrow 4$이므로

$$\lim_{x\to -2}\frac{f(x^2)-f(4)}{x^2-4}=\lim_{t\to 4}\frac{f(t)-f(4)}{t-4}=f'(4)=3$$

따라서 구하는 값은 3이다. 답 ③

라이트 UP

① 다항함수 $f(x)$에 대하여 $y=f(x)$의 그래프가 y축에 대하여 대칭이다.
➡ $f(x)=f(-x)$
➡ $f'(x)=-f'(-x)$

② 다항함수 $f(x)$에 대하여 $y=f(x)$의 그래프가 원점에 대하여 대칭이다.
➡ $f(x)=-f(-x)$
➡ $f'(x)=f'(-x)$

24 **전략** 주어진 식에 $x=0,\ y=0$을 대입하여 $f(0)$의 값을 구한다.

풀이 $f(x+y)=f(x)+f(y)+3xy-2$에 $x=0, y=0$을 대입하면

$$f(0)=f(0)+f(0)-2$$
$$\therefore f(0)=2 \quad \cdots❶$$

또 $f'(1)=10$에서

$$f'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(1)+f(h)+3h-2-f(1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-2}{h}+3$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}+3$$
$$=f'(0)+3$$

즉 $f'(0)+3=10$이므로 $f'(0)=7$ ⋯❷

자연수 k에 대하여

$$f'(k)=\lim_{h\to 0}\frac{f(k+h)-f(k)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(k)+f(h)+3kh-2-f(k)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-2}{h}+3k$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}+3k$$
$$=f'(0)+3k=3k+7 \quad \cdots❸$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{10}f'(k)=\sum_{k=1}^{10}(3k+7)$$
$$=3\sum_{k=1}^{10}k+\sum_{k=1}^{10}7$$
$$=3\cdot\frac{10\cdot 11}{2}+70=235 \quad \cdots❹$$

답 235

채점 기준	비율
❶ $f(0)$의 값을 구할 수 있다.	20%
❷ $f'(0)$의 값을 구할 수 있다.	30%
❸ 자연수 k에 대하여 $f'(k)$를 구할 수 있다.	30%
❹ $\sum_{k=1}^{10}f'(k)$의 값을 구할 수 있다.	20%

25 **전략** $f(x)$가 삼차함수일 때, $f(l)=f(m)=f(n)=k$이면 $f(x)-k=p(x-l)(x-m)(x-n)\ (p\neq 0)$임을 이용한다.

풀이 조건 (가)에 의하여 $f(a)=f(2)=f(6)=k$ (k는 상수)로 놓으면 $f(a)-k=f(2)-k=f(6)-k=0$

$g(x)=f(x)-k$라 하면

$$g(a)=g(2)=g(6)=0$$

이고 $f(x)$의 삼차항의 계수가 1이므로

$$g(x)=(x-a)(x-2)(x-6)$$

즉 $f(x)=(x-a)(x-2)(x-6)+k$이므로

$$f'(x)=(x-a)'(x-2)(x-6)+(x-a)(x-2)'(x-6)$$
$$+(x-a)(x-2)(x-6)'$$
$$=(x-2)(x-6)+(x-a)(x-6)+(x-a)(x-2)$$

조건 (나)에 의하여 $f'(2)=-4$이므로

$$-4(2-a)=-4,\quad 2-a=1\quad \therefore a=1$$
$$\therefore f'(a)=(a-2)(a-6)=-1\cdot(-5)=5$$

답 5

26 **전략** $f'(2)$가 존재함을 이용한다.

풀이 $f(x)=\begin{cases}(x-2)(x-a) & (x\geq 2)\\ -(x-2)(x-a) & (x<2)\end{cases}$

$f(x)$의 $x=2$에서의 미분계수가 존재하므로

$$\lim_{x\to 2+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2+}\frac{(x-2)(x-a)}{x-2}$$
$$=2-a,$$

$$\lim_{x\to 2-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2-}\frac{-(x-2)(x-a)}{x-2}$$
$$=-2+a$$

에서

$2-a=-2+a \qquad \therefore a=2$

따라서 $f'(2)=2-a=2-2=0$이므로

$a+f'(2)=2+0=2$ 답 ④

27 전략 $f(t)$를 구한 후 $t=1$, $t=2$, $t=3$에서의 미분가능성을 조사한다.

풀이 (i) $0<t\le1$일 때, $\quad f(t)=t^2$

(ii) $1<t\le2$일 때,

$$f(t)=1+\frac{1}{2}(1+t)(t-1)=\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{2}$$

(iii) $2<t\le3$일 때,

$$f(t)=1+\frac{1}{2}\cdot(1+2)\cdot1+2(t-2)=2t-\frac{3}{2}$$

(iv) $3<t<4$일 때,

$$f(t)=1+\frac{1}{2}\cdot(1+2)\cdot1+1\cdot2+3(t-3)=3t-\frac{9}{2}$$

이상에서 함수 $f(t)$는

$$f(t)=\begin{cases} t^2 & (0<t\le1) \\ \frac{1}{2}t^2+\frac{1}{2} & (1<t\le2) \\ 2t-\frac{3}{2} & (2<t\le3) \\ 3t-\frac{9}{2} & (3<t<4)\end{cases}$$

$$\therefore f'(t)=\begin{cases} 2t & (0<t<1) \\ t & (1<t<2) \\ 2 & (2<t<3) \\ 3 & (3<t<4)\end{cases}$$

이때

$\lim_{t\to1}f(t)=f(1)=1$,

$\lim_{t\to2}f(t)=f(2)=\frac{5}{2}$,

$\lim_{t\to3}f(t)=f(3)=\frac{9}{2}$

이므로 함수 $f(t)$는 구간 $(0,\ 4)$에서 연속이다.

또

$\lim_{t\to1-}f'(t)=2$, $\lim_{t\to1+}f'(t)=1$,

$\lim_{t\to2-}f'(t)=\lim_{t\to2+}f'(t)=2$,

$\lim_{t\to3-}f'(t)=2$, $\lim_{t\to3+}f'(t)=3$

이므로 함수 $f(t)$는 $t=1$, $t=3$에서 미분가능하지 않다.

따라서 구하는 t의 값의 합은

$1+3=4$ 답 ③

Ⅱ. 다항함수의 미분법

04 도함수의 활용 (1)

01 접선의 방정식

확인 본책 66~67쪽

1 (1) $f(x)=x^2-2x+5$라 하면 $f'(x)=2x-2$이므로

$f'(3)=2\cdot3-2=4$

(2) $f(x)=-x^3+3x^2-10$이라 하면 $f'(x)=-3x^2+6x$이므로

$f'(-2)=-3\cdot(-2)^2+6\cdot(-2)=-24$

답 (1) 4 (2) -24

2 $f(x)=x^2-2x+3$이라 하면 $\quad f'(x)=2x-2$

(1) $f'(2)=2\cdot2-2=2$이므로 구하는 접선의 방정식은

$y-3=2(x-2) \qquad \therefore y=2x-1$

(2) 접점의 좌표를 $(a,\ a^2-2a+3)$이라 하면 접선의 기울기가 -2이므로 $\quad f'(a)=2a-2=-2 \qquad \therefore a=0$

따라서 접점의 좌표는 $(0,\ 3)$이므로 구하는 직선의 방정식은

$y=-2x+3$

(3) 접점의 좌표를 $(a,\ a^2-2a+3)$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(a)=2a-2$이므로 접선의 방정식은

$y-(a^2-2a+3)=(2a-2)(x-a)$

$\therefore y=(2a-2)x-a^2+3 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

직선 ㉠이 점 $(-3,\ 2)$를 지나므로

$2=(2a-2)\cdot(-3)-a^2+3, \qquad a^2+6a-7=0$

$(a+7)(a-1)=0 \qquad \therefore a=-7$ 또는 $a=1$

이것을 ㉠에 각각 대입하면 구하는 접선의 방정식은

$y=-16x-46$, $y=2$

답 (1) $y=2x-1$ (2) $y=-2x+3$ (3) $y=-16x-46$, $y=2$

유제 본책 68~71쪽

1 (1) $f(x)=-x^3+4x$라 하면

$f'(x)=-3x^2+4 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

점 $\mathrm{A}(-1,\ -3)$에서의 접선의 기울기는

$f'(-1)=-3\cdot(-1)^2+4=1$

이므로 구하는 접선의 방정식은

$y+3=1\cdot(x+1) \qquad \therefore y=x-2$

(2) 접선 $y=x-2$가 곡선과 만나는 점의 x좌표는

$-x^3+4x=x-2$에서 $\qquad x^3-3x-2=0$

$(x+1)^2(x-2)=0 \qquad \therefore x=-1$ 또는 $x=2$

따라서 점 P의 좌표는 $(2,\ 0)$이고 점 P에서의 접선의 기울기는 ㉠에서

$f'(2)=-3\cdot2^2+4=-8$

이므로 구하는 접선의 방정식은

$y-0=-8(x-2)$

$\therefore y=-8x+16$

답 (1) $y=x-2$ (2) $y=-8x+16$

2 $f(x)=2x^2-5x+1$이라 하면

$f'(x)=4x-5$

점 $(1,\ -2)$에서의 접선의 기울기는

$f'(1)=4\cdot1-5=-1$

이므로 접선의 방정식은

$y+2=-1\cdot(x-1)$ $\quad\therefore y=-x-1$

이 직선이 점 $(a,\ 4)$를 지나므로

$4=-a-1$ $\quad\therefore a=-5$

답 -5

3 $f(x)=-x^3+ax+b$라 하면

$f'(x)=-3x^2+a$

점 $(-1,\ -1)$이 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$f(-1)=1-a+b=-1$

$\therefore a-b=2$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

점 $(-1,\ -1)$에서의 접선의 기울기는

$f'(-1)=-3+a$

이고 이 점에서의 접선과 수직인 직선의 기울기가 $-\frac{1}{2}$이므로

$(-3+a)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-1,\quad -3+a=2$

$\therefore a=5$

$a=5$를 ㉠에 대입하면 $\quad 5-b=2\quad\therefore b=3$

$\therefore a+b=8$

답 8

라이트 UP

두 직선 $y=ax+b,\ y=cx+d$가

① 평행하면 $\quad a=c,\ b\neq d$

② 수직이면 $\quad ac=-1$

4 $f(x)=x^2+3x-2$라 하면

$f'(x)=2x+3$

접점의 좌표를 $(a,\ a^2+3a-2)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기가 $\tan 135°=-1$이므로

$f'(a)=2a+3=-1$ $\quad\therefore a=-2$

따라서 접점의 좌표는 $(-2,\ -4)$이므로 구하는 직선의 방정식은

$y+4=-(x+2)$ $\quad\therefore y=-x-6$

답 $y=-x-6$

5 $f(x)=x^3+4$라 하면 $\quad f'(x)=3x^2$

곡선 $y=x^3+4$와 직선 $y=3x+a$의 접점의 좌표를 $(t,\ t^3+4)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 3이므로

$f'(t)=3t^2=3$

$t^2=1$ $\quad\therefore t=-1$ 또는 $t=1$

따라서 접점의 좌표는 $(-1,\ 3),\ (1,\ 5)$이므로 접선의 방정식은

$y-3=3(x+1),\ y-5=3(x-1)$

$\therefore y=3x+6,\ y=3x+2$

따라서 구하는 a의 값은 2, 6이다.

답 2, 6

6 $f(x)=x^3-3x^2+x+1$이라 하면

$f'(x)=3x^2-6x+1$

접점의 좌표를 $(a,\ a^3-3a^2+a+1)$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기가 1이므로

$f'(a)=3a^2-6a+1=1,\quad a^2-2a=0$

$a(a-2)=0$ $\quad\therefore a=0$ 또는 $a=2$

따라서 접점의 좌표는 $(0,\ 1),\ (2,\ -1)$이므로 접선의 방정식은

$y-1=x,\ y+1=x-2$

$\therefore x-y+1=0,\ x-y-3=0$

이 두 직선 사이의 거리는 직선 $x-y+1=0$ 위의 점 $(0,\ 1)$과 직선 $x-y-3=0$ 사이의 거리와 같으므로 구하는 거리는

$$\frac{|-1-3|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=2\sqrt{2}$$

답 $2\sqrt{2}$

라이트 UP

평행한 두 직선 사이의 거리

평행한 두 직선 $l,\ l'$ 사이의 거리는 직선 l 위의 임의의 점과 직선 l' 사이의 거리와 같다.

7 $f(x)=x^2-2x+10$이라 하면

$f'(x)=2x-2$

접점의 좌표를 $(a,\ a^2-2a+10)$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(a)=2a-2$이므로 접선의 방정식은

$y-(a^2-2a+10)=(2a-2)(x-a)$

$\therefore y=(2a-2)x-a^2+10$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

직선 ㉠이 점 $(2,\ 1)$을 지나므로

$1=(2a-2)\cdot2-a^2+10,\quad a^2-4a-5=0$

$(a+1)(a-5)=0$ $\quad\therefore a=-1$ 또는 $a=5$

$a=-1$을 ㉠에 대입하면 $\quad y=-4x+9$

$a=5$를 ㉠에 대입하면 $\quad y=8x-15$

따라서 두 접선의 y절편의 합은

$9+(-15)=-6$

답 -6

8 $f(x)=x^3+x$라 하면 $\quad f'(x)=3x^2+1$
접점의 좌표를 $(a,\ a^3+a)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(a)=3a^2+1$이므로 접선의 방정식은
$y-(a^3+a)=(3a^2+1)(x-a)$
$\therefore y=(3a^2+1)x-2a^3 \quad \cdots\cdots$ ㉠
직선 ㉠이 점 $(0,\ 16)$을 지나므로 $\quad 16=-2a^3$
$a^3=-8 \qquad \therefore a=-2$
$a=-2$를 ㉠에 대입하면 $\quad y=13x+16$
따라서 직선 $y=13x+16$이 점 $(k,\ 3)$을 지나므로
$3=13k+16 \qquad \therefore k=-1$ $\quad$ 답 -1

9 $f(x)=x^4+12$라 하면 $\quad f'(x)=4x^3$
접점의 좌표를 $(a,\ a^4+12)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(a)=4a^3$이므로 접선의 방정식은
$y-(a^4+12)=4a^3(x-a)$
$\therefore y=4a^3x-3a^4+12$
이 직선이 원점을 지나므로
$0=-3a^4+12, \quad a^4-4=0$
$(a+\sqrt{2})(a-\sqrt{2})(a^2+2)=0$
$\therefore a=-\sqrt{2}$ 또는 $a=\sqrt{2}$ ($\because a^2+2>0$)
따라서 두 접점 P, Q의 좌표는 $(-\sqrt{2},\ 16)$, $(\sqrt{2},\ 16)$이므로
$\overline{PQ}=\sqrt{2}-(-\sqrt{2})=2\sqrt{2}$ $\quad$ 답 $2\sqrt{2}$

10 $f(x)=ax^3-2x+b,\ g(x)=bx^2+cx$라 하면
$f'(x)=3ax^2-2,\ g'(x)=2bx+c$
두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 점 $(-1,\ 0)$을 지나므로
$f(-1)=0$에서 $\quad -a+2+b=0$
$\therefore a-b=2 \quad \cdots\cdots$ ㉠
$g(-1)=0$에서 $\quad b-c=0$
$\therefore b=c \quad \cdots\cdots$ ㉡
또 $x=-1$인 점에서의 접선의 기울기가 같으므로
$f'(-1)=g'(-1)$에서 $\quad 3a-2=-2b+c$
$\therefore 3a+2b-c=2 \quad \cdots\cdots$ ㉢
㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $\quad a=1,\ b=-1,\ c=-1$
$\therefore a+b+c=-1$ $\quad$ 답 -1

11 $f(x)=-x^3+ax,\ g(x)=bx^2-3x+4$라 하면
$f'(x)=-3x^2+a,\ g'(x)=2bx-3$
두 곡선이 $x=1$인 점에서 공통인 접선을 가지므로
$f(1)=g(1)$에서 $\quad -1+a=b+1$
$\therefore a-b=2 \quad \cdots\cdots$ ㉠
$f'(1)=g'(1)$에서 $\quad -3+a=2b-3$
$\therefore a-2b=0 \quad \cdots\cdots$ ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad a=4,\ b=2$
따라서 두 곡선 $y=-x^3+4x$, $y=2x^2-3x+4$의 접점의 좌표가 $(1,\ 3)$이고 접선의 기울기가 $f'(1)=-3\cdot1^2+4=1$이므로 구하는 접선의 방정식은
$y-3=x-1 \qquad \therefore y=x+2$ $\quad$ 답 $y=x+2$

12 $f(x)=x^2-x+3,\ g(x)=-x^3+ax$라 하면
$f'(x)=2x-1,\ g'(x)=-3x^2+a$
두 곡선이 $x=t$인 점에서 공통인 접선을 갖는다고 하면
$f(t)=g(t)$에서 $\quad t^2-t+3=-t^3+at$
$\therefore t^3+t^2-(a+1)t+3=0 \quad \cdots\cdots$ ㉠
$f'(t)=g'(t)$에서 $\quad 2t-1=-3t^2+a$
$\therefore a=3t^2+2t-1 \quad \cdots\cdots$ ㉡
㉡을 ㉠에 대입하여 정리하면
$2t^3+t^2-3=0 \qquad \therefore (t-1)(2t^2+3t+3)=0$
이때 $2t^2+3t+3=2\left(t+\frac{3}{4}\right)^2+\frac{15}{8}>0$이므로 $\quad t=1$
$t=1$을 ㉡에 대입하면 $\quad a=4$ $\quad$ 답 4

02 평균값 정리

유제 본책 74~75쪽

1 (1) 함수 $f(x)=-x^2+5x-2$는 닫힌구간 $[2,\ 3]$에서 연속이고 열린구간 $(2,\ 3)$에서 미분가능하며 $f(2)=f(3)=4$이므로 롤의 정리에 의하여 $f'(c)=0$인 c가 열린구간 $(2,\ 3)$에 적어도 하나 존재한다.
이때 $f'(x)=-2x+5$이므로
$f'(c)=-2c+5=0 \qquad \therefore c=\frac{5}{2}$
(2) 함수 $f(x)=x^3-3x^2+2x-1$은 닫힌구간 $[1,\ 2]$에서 연속이고 열린구간 $(1,\ 2)$에서 미분가능하며 $f(1)=f(2)=-1$이므로 롤의 정리에 의하여 $f'(c)=0$인 c가 열린구간 $(1,\ 2)$에 적어도 하나 존재한다.
이때 $f'(x)=3x^2-6x+2$이므로
$f'(c)=3c^2-6c+2=0$
$\therefore c=\frac{3+\sqrt{3}}{3}$ ($\because 1<c<2$)
답 (1) $\frac{5}{2}$ (2) $\frac{3+\sqrt{3}}{3}$

2 $f(x)=-x^2+ax+5$라 하면 함수 $f(x)$에 대하여 닫힌구간 $[-1,\ b]$에서 롤의 정리를 만족시키는 상수 1이 존재하므로

$f'(x)=-2x+a$에서

$$f'(1)=-2+a=0 \qquad \therefore a=2$$

따라서 $f(x)=-x^2+2x+5$이고 $f(-1)=f(b)$이므로

$$2=-b^2+2b+5, \qquad b^2-2b-3=0$$

$$(b+1)(b-3)=0 \qquad \therefore b=3\ (\because b>1)$$

$$\therefore a+b=5$$

답 5

3 함수 $f(x)=2x^3+5x^2-4x-1$은 닫힌구간 $[-a, a]$에서 연속이고 열린구간 $(-a, a)$에서 미분가능하다. 이때 닫힌구간 $[-a, a]$에서 롤의 정리를 만족시키려면 $f(-a)=f(a)$이어야 하므로

$$-2a^3+5a^2+4a-1=2a^3+5a^2-4a-1$$

$$4a^3-8a=0, \qquad a(a+\sqrt{2})(a-\sqrt{2})=0$$

$$\therefore a=\sqrt{2}\ (\because a>0)$$

따라서 함수 $f(x)=2x^3+5x^2-4x-1$은 롤의 정리에 의하여 $f'(c)=0$인 c가 열린구간 $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$에 적어도 하나 존재한다.

이때 $f'(x)=6x^2+10x-4$이므로

$$f'(c)=6c^2+10c-4=0, \qquad 3c^2+5c-2=0$$

$$(c+2)(3c-1)=0$$

$$\therefore c=\frac{1}{3}\ (\because -\sqrt{2}<c<\sqrt{2})$$

답 $c=\frac{1}{3}$, $a=\sqrt{2}$

4 (1) 함수 $f(x)=-x^2-6x+1$은 닫힌구간 $[-4, -1]$에서 연속이고 열린구간 $(-4, -1)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여 $\frac{f(-1)-f(-4)}{-1-(-4)}=f'(c)$인 c가 열린구간 $(-4, -1)$에 적어도 하나 존재한다.

이때 $f'(x)=-2x-6$이므로

$$\frac{6-9}{-1-(-4)}=-2c-6, \qquad -2c-6=-1$$

$$\therefore c=-\frac{5}{2}$$

(2) 함수 $f(x)=x^3-4x^2+x-2$는 닫힌구간 $[0, 2]$에서 연속이고 열린구간 $(0, 2)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여 $\frac{f(2)-f(0)}{2-0}=f'(c)$인 c가 열린구간 $(0, 2)$에 적어도 하나 존재한다.

이때 $f'(x)=3x^2-8x+1$이므로

$$\frac{-8-(-2)}{2-0}=3c^2-8c+1$$

$$3c^2-8c+1=-3, \qquad 3c^2-8c+4=0$$

$$(3c-2)(c-2)=0$$

$$\therefore c=\frac{2}{3}\ (\because 0<c<2)$$

답 (1) $-\frac{5}{2}$ (2) $\frac{2}{3}$

5 $a<x\le b$인 임의의 실수 x에 대하여 닫힌구간 $[a, x]$에서 평균값 정리에 의하여

$$\frac{F(x)-F(a)}{x-a}=\boxed{F'(c)}$$

인 c가 열린구간 (a, x)에 적어도 하나 존재한다.

이때 $F'(c)=f'(c)-g'(c)=\boxed{0}$이므로 $F(x)$는 $\boxed{\text{상수}}$함수이다.

$\therefore$ (가) $F'(c)$ (나) 0 (다) 상수

답 (가) $F'(c)$ (나) 0 (다) 상수

중단원 연습 문제

본책 76~78쪽

01 ④	**02** ③	**03** ⑤	**04** ④	**05** 29
06 8	**07** $\sqrt{5}$	**08** -48	**09** 6	**10** 2
11 ⑤	**12** ③	**13** ③	**14** ②	**15** 34
16 ④	**17** $y=9x-5$		**18** 32	**19** ⑤
20 ⑤				

01 전략 접선의 방정식을 구하여 주어진 곡선의 방정식과 연립하여 푼다.

풀이 $f(x)=x^3-5x$라 하면 $\quad f'(x)=3x^2-5$

점 $A(1, -4)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=-2$이므로 접선의 방정식은

$$y+4=-2(x-1) \qquad \therefore y=-2x-2$$

이 직선과 곡선 $y=x^3-5x$의 교점의 x좌표는

$x^3-5x=-2x-2$에서 $\quad x^3-3x+2=0$

$$(x+2)(x-1)^2=0 \qquad \therefore x=-2 \text{ 또는 } x=1$$

따라서 점 B의 좌표는 $(-2, 2)$이므로

$$\overline{AB}=\sqrt{(-2-1)^2+(2+4)^2}=3\sqrt{5}$$

답 ④

02 전략 두 점에서의 접선의 방정식을 연립하여 교점의 x좌표를 구한다.

풀이 $f(x)=x^2-8x+10$이라 하면 $\quad f'(x)=2x-8$

점 $(1, 3)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=-6$이므로 직선 l의 방정식은

$$y-3=-6(x-1) \qquad \therefore y=-6x+9$$

점 $(2, -2)$에서의 접선의 기울기는 $f'(2)=-4$이므로 직선 m의 방정식은

$$y+2=-4(x-2) \qquad \therefore y=-4x+6$$

두 직선 l, m의 교점의 x좌표는 $-6x+9=-4x+6$에서

$$2x=3 \qquad \therefore x=\frac{3}{2}$$

답 ③

03 전략 곡선 $y=h(x)$ 위의 점 (a, b)에서의 접선의 기울기는 $h'(a)$임을 이용한다.

풀이 함수 $g(x)$의 도함수가 $f(x)$이므로

$g'(x)=f(x)$

곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(2,\ g(2))$에서의 접선의 기울기는

$g'(2)=f(2)=(-1)^2=1$

이때 접선의 y절편이 -5이므로 접선의 방정식은

$y=x-5$

$y=0$일 때, $0=x-5$ $\therefore x=5$

따라서 이 접선의 x절편은 5이다. 답 ⑤

04 전략 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 방정식
➡ $y-f(a)=f'(a)(x-a)$

풀이 $f(x)=x^3-nx^2+2x$라 하면

$f'(x)=3x^2-2nx+2$

점 $(1,\ 3-n)$에서의 접선의 기울기는

$f'(1)=3-2n+2=5-2n$

이므로 접선의 방정식은

$y-(3-n)=(5-2n)(x-1)$

$\therefore y=(5-2n)x+n-2$

따라서 $a_n=n-2$이므로

$$\sum_{n=1}^{10}(n-2)=\frac{10\cdot 11}{2}-20$$
$$=55-20=35$$

답 ④

05 전략 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1,\ f(1))$에서의 접선의 기울기가 4임을 이용한다.

풀이 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1,\ f(1))$에서의 접선의 방정식이 $y=4x-6$이므로

$f(1)=4-6=-2,\ f'(1)=4$ ⋯➊

$f(1)=-2$에서 $1+a+b+2=-2$

$\therefore a+b=-5$ ⋯⋯ ㉠

$f'(x)=3x^2+2ax+b$이므로 $f'(1)=4$에서

$3+2a+b=4$

$\therefore 2a+b=1$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=6,\ b=-11$ ⋯➋

따라서 $f(x)=x^3+6x^2-11x+2$이고 곡선 $y=f(x)$가 점 $(2,\ c)$를 지나므로

$c=2^3+6\cdot 2^2-11\cdot 2+2=12$

$\therefore a-b+c=29$ ⋯➌

답 29

채점 기준	비율
➊ $f(1)$, $f'(1)$의 값을 구할 수 있다.	30 %
➋ a, b의 값을 구할 수 있다.	50 %
➌ $a-b+c$의 값을 구할 수 있다.	20 %

06 전략 곡선에 접하고 기울기가 2인 직선의 방정식을 구한다.

풀이 $f(x)=3x^2-4x+8$이라 하면

$f'(x)=6x-4$ ⋯➊

직선 $y=2x+1$을 평행이동한 직선이 곡선과 접하는 접점의 좌표를 $(a,\ 3a^2-4a+8)$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 2이므로

$f'(a)=6a-4=2$ $\therefore a=1$ ⋯➋

따라서 접점의 좌표가 $(1,\ 7)$이므로 $m=1,\ n=7$

$\therefore m+n=8$ ⋯➌

답 8

채점 기준	비율
➊ $f'(x)$를 구할 수 있다.	20 %
➋ a의 값을 구할 수 있다.	60 %
➌ $m+n$의 값을 구할 수 있다.	20 %

07 전략 주어진 직선과 평행한 접선의 접점의 좌표를 구한다.

풀이 $f(x)=x^2+2x-3$이라 하면 $f'(x)=2x+2$

곡선 $y=f(x)$의 접선 중에서 직선 $y=-2x-12$와 평행한 접선이 곡선과 접하는 접점의 좌표를 $(a,\ a^2+2a-3)$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기가 -2이므로

$f'(a)=2a+2=-2$ $\therefore a=-2$

따라서 접점의 좌표는 $(-2,\ -3)$

점 $(-2,\ -3)$과 직선 $y=-2x-12$, 즉 $2x+y+12=0$ 사이의 거리가 구하는 최솟값이므로

$$\frac{|-4-3+12|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\sqrt{5}$$

답 $\sqrt{5}$

08 전략 접점의 좌표를 $(a,\ 2a^2+8)$로 놓고 이 점에서의 접선이 점 $(1, 2)$를 지남을 이용한다.

풀이 $f(x)=2x^2+8$이라 하면 $f'(x)=4x$

접점의 좌표를 $(a,\ 2a^2+8)$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(a)=4a$이므로 접선의 방정식은

$y-(2a^2+8)=4a(x-a)$

$\therefore y=4ax-2a^2+8$

이 직선이 점 $(1,\ 2)$를 지나므로

$2=4a-2a^2+8$, $a^2-2a-3=0$

$(a+1)(a-3)=0$ $\therefore a=-1$ 또는 $a=3$

따라서 두 접선의 기울기의 곱은

$f'(-1)\cdot f'(3)=-4\cdot 12=-48$ 답 -48

09 전략 접점의 좌표를 $(a,\ a^4+a^2+4)$로 놓고 접선의 방정식을 구한다.

풀이 $f(x)=x^4+x^2+4$라 하면

$f'(x)=4x^3+2x$

접점의 좌표를 $(a,\ a^4+a^2+4)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(a)=4a^3+2a$이므로 접선의 방정식은

$$y-(a^4+a^2+4)=(4a^3+2a)(x-a)$$

$$\therefore y=(4a^3+2a)x-3a^4-a^2+4 \quad \cdots ❶$$

이 직선이 원점을 지나므로

$$0=-3a^4-a^2+4, \qquad 3a^4+a^2-4=0$$

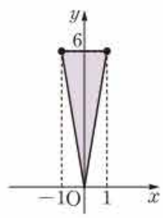
$$(a+1)(a-1)(3a^2+4)=0$$

$$\therefore a=-1 \text{ 또는 } a=1\ (\because 3a^2+4>0) \quad \cdots ❷$$

따라서 접점의 좌표가

$(-1,\ 6),\ (1,\ 6)$

이므로 오른쪽 그림에서 구하는 삼각형의 넓이는



$$\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 6=6 \quad \cdots ❸$$

답 6

채점 기준	비율
❶ 접점의 좌표를 $(a,\ a^4+a^2+4)$로 놓고 접선의 방정식을 세울 수 있다.	40 %
❷ a의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ 삼각형의 넓이를 구할 수 있다.	20 %

10 전략 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 $x=t$인 점에서 공통인 접선을 가지면 $f(t)=g(t)$, $f'(t)=g'(t)$이다.

풀이 $f(x)=-x^3+x+3$, $g(x)=x^2+k$라 하면

$$f'(x)=-3x^2+1,\ g'(x)=2x$$

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 $x=a$인 점에서 공통인 접선을 가진다고 하면

$f(a)=g(a)$에서

$$-a^3+a+3=a^2+k \quad \cdots\cdots ㉠$$

$f'(a)=g'(a)$에서

$$-3a^2+1=2a, \qquad 3a^2+2a-1=0$$

$$(a+1)(3a-1)=0 \qquad \therefore a=-1 \text{ 또는 } a=\frac{1}{3}$$

(i) $a=-1$을 ㉠에 대입하면

$$1-1+3=1+k \qquad \therefore k=2$$

(ii) $a=\frac{1}{3}$을 ㉠에 대입하면

$$-\frac{1}{27}+\frac{1}{3}+3=\frac{1}{9}+k \qquad \therefore k=\frac{86}{27}$$

이때 k가 정수라는 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $\quad k=2$

답 2

11 전략 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 $x=t$인 점에서 만나고 $x=t$인 점에서의 접선이 서로 수직이면 $f(t)=g(t)$, $f'(t)g'(t)=-1$이다.

풀이 $f(x)=x^2$, $g(x)=-2x^2+ax$라 하면

$$f'(x)=2x,\ g'(x)=-4x+a$$

두 곡선이 $x=t$인 점에서 만나고 $x=t$인 점에서의 접선이 서로 수직이라고 하면

$f(t)=g(t)$에서 $\quad t^2=-2t^2+at$

$$\therefore at=3t^2 \quad \cdots\cdots ㉠$$

$f'(t)g'(t)=-1$에서 $\quad 2t(-4t+a)=-1$

$$\therefore -8t^2+2at=-1 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠을 ㉡에 대입하면 $\quad -8t^2+6t^2=-1, \quad t^2=\frac{1}{2}$

$$\therefore t=-\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ 또는 } t=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

(i) $t=-\frac{\sqrt{2}}{2}$를 ㉠에 대입하면

$$-\frac{\sqrt{2}}{2}a=\frac{3}{2} \qquad \therefore a=-\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

(ii) $t=\frac{\sqrt{2}}{2}$를 ㉠에 대입하면

$$\frac{\sqrt{2}}{2}a=\frac{3}{2} \qquad \therefore a=\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

이때 a가 음수라는 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $\quad a=-\frac{3\sqrt{2}}{2}$

답 ⑤

12 전략 $f'(c)=0$을 만족시키는 c의 값을 구한다.

풀이 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[-2,\ 1]$에서 연속이고 열린구간 $(-2,\ 1)$에서 미분가능하며 $f(-2)=f(1)=0$이므로 롤의 정리에 의하여 $f'(c)=0$인 c가 열린구간 $(-2,\ 1)$에 적어도 하나 존재한다. 이때

$$f'(x)=(x-1)^2+2(x+2)(x-1)$$
$$=3(x+1)(x-1)$$

이므로 $\quad f'(c)=3(c+1)(c-1)=0, \quad (c+1)(c-1)=0$

$$\therefore c=-1\ (\because -2<c<1)$$

답 ③

13 전략 $\frac{f(k)-f(3)}{k-3}=f'(4)$를 만족시키는 k의 값을 구한다.

풀이 함수 $f(x)=2x^2-12x+10$에 대하여 닫힌구간 $[3,\ k]$에서 평균값 정리를 만족시키는 상수 4가 존재하므로

$$\frac{f(k)-f(3)}{k-3}=f'(4)$$

가 성립한다.

이때 $f'(x)=4x-12$이므로

$$\frac{2k^2-12k+10-(-8)}{k-3}=4, \qquad \frac{2(k-3)^2}{k-3}=4$$

$k>4$이므로 $\quad k-3=2 \qquad \therefore k=5$

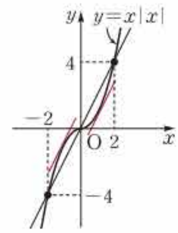
답 ③

14 전략 평균값 정리의 기하적 의미를 생각한다.

풀이 닫힌구간 $[-2, 2]$에서 상수 c가 평균값 정리를 만족시키면 $x=c$에서의 접선의 기울기는 두 점 $(-2, -4)$, $(2, 4)$를 잇는 직선의 기울기와 같다.

함수 $y=x|x|$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 두 점 $(-2, -4)$, $(2, 4)$를 잇는 직선과 평행한 접선을 2개 그을 수 있다.

따라서 상수 c의 개수는 2이다.



답 ②

15 전략 곱의 미분법을 이용하여 $y=f(x)g(x)$의 도함수를 구한다.

풀이 $h(x)=f(x)g(x)$라 하면

$h'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

곡선 $y=h(x)$에서 $x=1$인 점에서의 접선의 기울기는

$h'(1)=f'(1)g(1)+f(1)g'(1)$

$=-1\cdot(-3)+4\cdot2=11$ ··· ❶

$h(1)=f(1)g(1)=4\cdot(-3)=-12$이므로 점 $(1, -12)$를 지나고 기울기가 11인 직선의 방정식은

$y+12=11(x-1)$ $\quad\therefore y=11x-23$ ··· ❷

따라서 $m=11$, $n=-23$이므로

$m-n=34$ ··· ❸

답 34

채점 기준	비율
❶ $x=1$인 점에서의 접선의 기울기를 구할 수 있다.	50 %
❷ 접선의 방정식을 구할 수 있다.	40 %
❸ $m-n$의 값을 구할 수 있다.	10 %

16 전략 두 직선이 서로 수직이면 기울기의 곱이 -1임을 이용한다.

풀이 $f(x)=-x^3+4x+2$라 하면 $\quad f'(x)=-3x^2+4$

점 $(1, 5)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=1$이므로 접선 l의 방정식은

$y-5=x-1$ $\quad\therefore y=x+4$

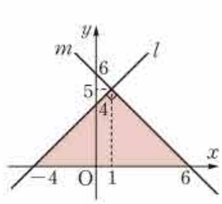
직선 l과 수직인 직선의 기울기는 -1이므로 점 $(1, 5)$를 지나고 기울기가 -1인 직선 m의 방정식은

$y-5=-(x-1)$

$\therefore y=-x+6$

따라서 두 직선 l, m은 오른쪽 그림과 같으므로 구하는 도형의 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot\{6-(-4)\}\cdot5=25$



답 ④

17 전략 두 직선이 서로 평행하면 기울기가 같음을 이용한다.

풀이 $f(x)=x^3+3x^2$이라 하면

$f'(x)=3x^2+6x$

점 A에서의 접선의 기울기는

$f'(-3)=9$ ··· ❶

점 B의 x좌표를 a라 하면 점 B에서의 접선의 기울기는

$f'(a)=3a^2+6a$

두 점 A, B에서의 두 접선이 서로 평행하므로

$3a^2+6a=9$, $\quad a^2+2a-3=0$

$(a+3)(a-1)=0$

$\therefore a=1$ ($\because a\neq-3$) ··· ❷

따라서 점 B의 좌표는 $(1, 4)$이고 접선의 기울기는 9이므로 구하는 접선의 방정식은

$y-4=9(x-1)$

$\therefore y=9x-5$ ··· ❸

답 $y=9x-5$

채점 기준	비율
❶ 점 A에서의 접선의 기울기를 구할 수 있다.	30 %
❷ 점 B의 x좌표를 구할 수 있다.	40 %
❸ 접선의 방정식을 구할 수 있다.	30 %

18 전략 접선 AB, CD의 기울기가 1임을 이용한다.

풀이 $f(x)=x^3-5x$라 하면

$f'(x)=3x^2-5$

직선 AB와 삼차함수 $y=x^3-5x$의 그래프의 접점의 좌표를 (a, a^3-5a)라 하면 직선 AB의 기울기가 1이므로

$f'(a)=3a^2-5=1$

$3a^2=6$ $\quad\therefore a=-\sqrt{2}$ ($\because a<0$)

즉 접점의 좌표는 $(-\sqrt{2}, 3\sqrt{2})$이고 기울기가 1이므로 직선 AB의 방정식은

$y-3\sqrt{2}=x+\sqrt{2}$ $\quad\therefore y=x+4\sqrt{2}$

따라서 두 점 A, B의 좌표는 각각

$\mathrm{A}(0, 4\sqrt{2})$, $\mathrm{B}(-4\sqrt{2}, 0)$

이므로

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(-4\sqrt{2})^2+(-4\sqrt{2})^2}=8$

따라서 정사각형 ABCD의 둘레의 길이는

$4\overline{\mathrm{AB}}=4\cdot8=32$

답 32

라이트 UP

□ABCD가 정사각형이므로 ∠ABC$=90^\circ$이다.
즉 직선 AB가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기는 45°이므로 직선 AB의 기울기는 $\tan45^\circ=1$이다.

19 전략 먼저 $y=x^3+1$ 위의 점 $(1, 2)$에서의 접선의 방정식을 구한다.

풀이 $f(x)=x^3+1$이라 하면

$f'(x)=3x^2$

점 $(1, 2)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=3$이므로 접선의 방정식은 $y-2=3(x-1)$

$\therefore y=3x-1$ …… ㉠

$g(x)=x^2+kx+15$라 하면

$g'(x)=2x+k$

직선 ㉠과 곡선 $y=g(x)$의 접점의 좌표를 $(a, a^2+ka+15)$라 하면 접선의 기울기는 $g'(a)=2a+k$이므로 접선의 방정식은

$y-(a^2+ka+15)=(2a+k)(x-a)$

$\therefore y=(2a+k)x-a^2+15$

이 직선이 직선 ㉠과 일치해야 하므로

$2a+k=3,\ -a^2+15=-1$

$-a^2+15=-1$에서 $a^2=16$

$\therefore a=-4$ 또는 $a=4$

(i) $a=-4$를 $2a+k=3$에 대입하면

$-8+k=3 \quad \therefore k=11$

(ii) $a=4$를 $2a+k=3$에 대입하면

$8+k=3 \quad \therefore k=-5$

(i), (ii)에서 모든 상수 k의 값의 합은

$11+(-5)=6$

답 ⑤

20 전략 접점의 좌표를 (t, t^3-4t+1)로 놓고 접선의 방정식을 구한다.

풀이 $f(x)=x^3-4x+1$이라 하면

$f'(x)=3x^2-4$

접점의 좌표를 (t, t^3-4t+1)이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=3t^2-4$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^3-4t+1)=(3t^2-4)(x-t)$

$\therefore y=(3t^2-4)x-2t^3+1$

이 직선이 점 $(3, k)$를 지나므로

$k=(3t^2-4)\cdot 3-2t^3+1$

$\therefore 2t^3-9t^2+k+11=0$ …… ㉠

방정식 ㉠이 서로 다른 세 실근을 갖고, 이 세 실근이 등차수열을 이루므로 세 실근을 $a-d$, a, $a+d$로 놓으면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$(a-d)+a+(a+d)=\frac{9}{2} \quad \therefore a=\frac{3}{2}$$

따라서 $t=\frac{3}{2}$이 방정식 ㉠의 근이므로

$$2\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^3-9\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2+k+11=0 \quad \therefore k=\frac{5}{2}$$

답 ⑤

05 도함수의 활용 (2)

01 함수의 증가와 감소

유제 본책 82~83쪽

1 (1) $f(x)=x^3-9x^2+15x-2$에서

$f'(x)=3x^2-18x+15=3(x-1)(x-5)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=5$

x	$\cdots$	1	$\cdots$	5	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	5	↘	−27	↗

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty, 1]$, $[5, \infty)$에서 증가하고, 구간 $[1, 5]$에서 감소한다.

(2) $f(x)=-x^3-3x^2-4x$에서

$f'(x)=-3x^2-6x-4$

$=-3(x+1)^2-1<0$

즉 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)<0$이므로 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty, \infty)$에서 감소한다.

답 풀이 참조

2 $f(x)=-x^3-6x^2+ax+4$에서

$f'(x)=-3x^2-12x+a$

주어진 조건에서 함수 $f(x)$는 $x=b$, $x=-1$의 좌우에서 증가와 감소가 바뀌므로 $x=b$, $x=-1$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀐다.

즉 이차방정식 $f'(x)=0$의 두 근이 b, -1이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$b+(-1)=-4,\ b\cdot(-1)=-\frac{a}{3}$$

$\therefore a=-9,\ b=-3$

$\therefore a+b=-12$

답 −12

3 구간 $(-\infty, -1)$, $(2, \infty)$에서 $f'(x)<0$이고 구간 $(-1, 2)$에서 $f'(x)>0$이다.

즉 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty, -1]$, $[2, \infty)$에서 감소하고, 구간 $[-1, 2]$에서 증가한다.

따라서 함수 $f(x)$가 감소하는 구간은 ㄱ, ㄹ이다.

답 ㄱ, ㄹ

4 $f(x)=-x^3-ax^2+ax-5$에서

$f'(x)=-3x^2-2ax+a$

함수 $f(x)$가 구간 $(-\infty, \infty)$에서 감소하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\le 0$이어야 한다.

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=a^2+3a\le 0$

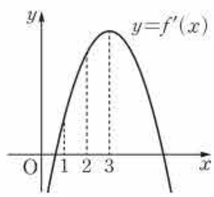
$a(a+3)\le 0$　　$\therefore -3\le a\le 0$

따라서 정수 a는 -3, -2, -1, 0의 4개이다.　　답 4

5 $f(x)=-x^3+9x^2+ax+4$에서

$f'(x)=-3x^2+18x+a=-3(x-3)^2+a+27$

함수 $f(x)$가 구간 $(1, 2)$에서 증가하려면 이 구간에서 $f'(x)\ge 0$이어야 하므로 오른쪽 그림에서



$f'(1)=a+15\ge 0$

$\therefore a\ge -15$

따라서 실수 a의 최솟값은 -15이다.　　답 -15

02 함수의 극대와 극소

유제　　본책 86~88쪽

1 (1) $f(x)=-x^3+6x^2+15x$에서

$f'(x)=-3x^2+12x+15=-3(x+1)(x-5)$

$f'(x)=0$에서　　$x=-1$ 또는 $x=5$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	5	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	-8	↗	100	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=5$에서 극댓값 100, $x=-1$에서 극솟값 -8을 갖는다.

(2) $f(x)=x^3+3x^2-9x-1$에서

$f'(x)=3x^2+6x-9=3(x+3)(x-1)$

$f'(x)=0$에서　　$x=-3$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	26	↘	-6	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-3$에서 극댓값 26, $x=1$에서 극솟값 -6을 갖는다.

(3) $f(x)=x^4-8x^2+3$에서

$f'(x)=4x^3-16x=4x(x+2)(x-2)$

$f'(x)=0$에서　　$x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-13	↗	3	↘	-13	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값 3을 갖고 $x=-2$, $x=2$에서 극솟값 -13을 갖는다.

(4) $f(x)=x^4+4x^3-5$에서

$f'(x)=4x^3+12x^2=4x^2(x+3)$

$f'(x)=0$에서　　$x=-3$ 또는 $x=0$

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	↘	-32	↗	-5	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-3$에서 극솟값 -32를 갖고 극댓값은 없다.

답 풀이 참조

2 $f(x)=2x^3-3x^2-12x+10$에서

$f'(x)=6x^2-6x-12=6(x+1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서　　$x=-1$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	17	↘	-10	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값 17, $x=2$에서 극솟값 -10을 가지므로 함수 $f(x)$의 극댓값과 극솟값의 차는

$17-(-10)=27$　　답 27

3 $f(x)=3x^4+ax^3+b$에서

$f'(x)=12x^3+3ax^2$

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극솟값 1을 가지므로

$f(1)=1$, $f'(1)=0$

$\therefore 3+a+b=1$, $12+3a=0$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=-4$, $b=2$

$\therefore ab=-8$　　답 -8

4 $f(x)=x^3+2ax^2+a^2x$에서

$f'(x)=3x^2+4ax+a^2=(x+a)(3x+a)$

$f'(x)=0$에서　　$x=-a$ 또는 $x=-\frac{a}{3}$

x	$\cdots$	$-a$	$\cdots$	$-\frac{a}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	0	↘	$-\frac{4}{27}a^3$	↗

$a>0$이므로 함수 $f(x)$는 $x=-a$에서 극댓값 0, $x=-\frac{a}{3}$에서 극솟값 $-\frac{4}{27}a^3$을 갖는다.

이때 극댓값과 극솟값의 차가 4이므로

$$0-\left(-\frac{4}{27}a^3\right)=4, \qquad a^3=27$$

$\therefore a=3$ 답 3

5 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ (a, b, c, d는 상수, $a\neq0$)라 하면

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$

함수 $f(x)$는 $x=1$, $x=3$에서 극값을 가지므로

$f'(1)=0$, $f'(3)=0$

$\therefore f'(x)=3a(x-1)(x-3)=3ax^2-12ax+9a$

즉 $2b=-12a$, $c=9a$이므로

$b=-6a$, $c=9a$

$\therefore f(x)=ax^3-6ax^2+9ax+d$

이때 $f(1)=0$이므로

$a-6a+9a+d=0 \qquad \therefore d=-4a$

또 $f(3)=-4$이므로

$27a-54a+27a-4a=-4 \qquad \therefore a=1$

따라서 $f(x)=x^3-6x^2+9x-4$이므로

$f(-1)=-1-6-9-4=-20$ 답 -20

6 ㄱ. $f'(c)=0$이지만 $x=c$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=c$에서 극값을 갖지 않는다.

ㄴ. $f'(e)=0$이고 $x=e$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=e$에서 극댓값을 갖는다.

ㄷ. ㄴ에서 함수 $f(x)$는 $x=e$에서 극댓값을 갖는다.

또 $f'(b)=0$이고 $x=b$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=b$에서 극솟값을 갖는다.

따라서 구간 $[a, f]$에서 함수 $f(x)$가 극값을 갖는 x의 값은 $x=b$, $x=e$의 2개이다.

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ㄴ, ㄷ

7 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$에서

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

$y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표가 -3, 1이므로

$f'(x)=3(x+3)(x-1)=3x^2+6x-9$

즉 $2a=6$, $b=-9$이므로 $\qquad a=3$, $b=-9$

$\therefore f(x)=x^3+3x^2-9x+c$

주어진 그래프에서 $f(x)$는 $x=1$에서 극솟값을 가지므로

$f(1)=-10, \qquad -5+c=-10$

$\therefore c=-5$

따라서 $f(x)=x^3+3x^2-9x-5$이므로 구하는 극댓값은

$f(-3)=-27+27+27-5=22$ 답 22

03 함수의 그래프

유제 본책 91~93쪽

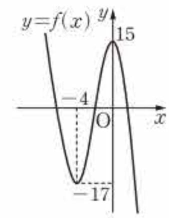
1 (1) $f(x)=-x^3-6x^2+15$에서

$f'(x)=-3x^2-12x=-3x(x+4)$

$f'(x)=0$에서 $\qquad x=-4$ 또는 $x=0$

x	$\cdots$	-4	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	-17	↗	15	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값 15, $x=-4$에서 극솟값 -17을 가지므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



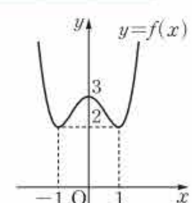
(2) $f(x)=x^4-2x^2+3$에서

$f'(x)=4x^3-4x=4x(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $\qquad x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	2	↗	3	↘	2	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값 3을 갖고 $x=-1$, $x=1$에서 극솟값 2를 가지므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



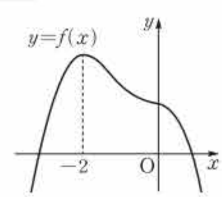
답 풀이 참조

2 $y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표가 -2, 0이므로 $f'(x)=0$에서

$x=-2$ 또는 $x=0$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$
$f(x)$	↗	극대	↘		↘

이때 $f(0)>0$이고 함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 극댓값을 가지므로 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다.



답 풀이 참조

3 $f(x)=x^3+(a+2)x^2+3x-5$에서

$f'(x)=3x^2+2(a+2)x+3$

삼차함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 중근 또는 허근을 가져야 한다.

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(a+2)^2-9\le 0, \qquad a^2+4a-5\le 0$$

$$(a+5)(a-1)\le 0 \qquad \therefore -5\le a\le 1$$

답 $-5\le a\le 1$

4 $f(x)=-3x^4+2ax^3-6ax^2+1$에서

$$f'(x)=-12x^3+6ax^2-12ax$$
$$=-6x(2x^2-ax+2a)$$

사차함수 $f(x)$가 극솟값을 가지려면 극댓값과 극솟값을 모두 가져야 하므로 삼차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가져야 한다. 즉 이차방정식 $2x^2-ax+2a=0$이 0이 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 $2x^2-ax+2a=0$의 판별식을 D라 하면

$$D=a^2-16a>0, \qquad a(a-16)>0$$

$\therefore a<0$ 또는 $a>16$ ...... ㉠

이때 $x=0$이 방정식 $2x^2-ax+2a=0$의 근이 아니어야 하므로

$a\ne 0$ ...... ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

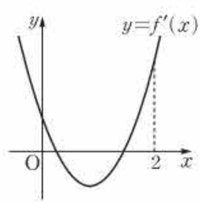
$a<0$ 또는 $a>16$

답 $a<0$ 또는 $a>16$

5 $f(x)=x^3-3ax^2+ax+3$에서

$$f'(x)=3x^2-6ax+a$$

함수 $f(x)$가 $x<2$에서 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 $x<2$에서 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.



(i) 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=9a^2-3a>0, \qquad 3a^2-a>0$$

$$a(3a-1)>0 \qquad \therefore a<0 \text{ 또는 } a>\frac{1}{3}$$

(ii) $f'(2)>0$에서 $\quad 12-11a>0 \quad \therefore a<\frac{12}{11}$

(iii) 이차함수 $y=f'(x)$의 그래프의 축의 방정식은 $x=a$이므로

$a<2$

이상에서 실수 a의 값의 범위는

$$a<0 \text{ 또는 } \frac{1}{3}<a<\frac{12}{11}$$

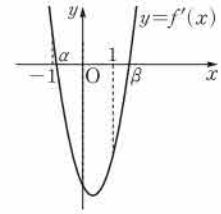
이므로 정수 a의 최댓값은 1이다.

답 1

6 $f(x)=x^3+ax^2+4ax-2$에서

$$f'(x)=3x^2+2ax+4a$$

함수 $f(x)$가 $-1<x<1$에서 극댓값, $x>1$에서 극솟값을 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$의 두 실근을 α, β $(\alpha<\beta)$라 할 때 $-1<\alpha<1$, $\beta>1$이어야 한다.



(i) $f'(-1)>0$에서 $\quad 3+2a>0$

$$\therefore a>-\frac{3}{2}$$

(ii) $f'(1)<0$에서 $\quad 3+6a<0$

$$\therefore a<-\frac{1}{2}$$

(i), (ii)에서 구하는 실수 a의 값의 범위는

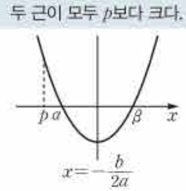
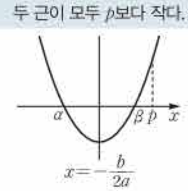
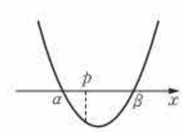
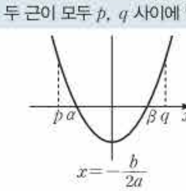
$$-\frac{3}{2}<a<-\frac{1}{2}$$

답 $-\frac{3}{2}<a<-\frac{1}{2}$

라이트 UP

이차방정식의 근의 분리

a, b, c가 실수일 때, 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ $(a>0)$의 두 실근 α, β와 상수 p, q $(p<q)$ 사이의 대소 관계의 조건을 함수 $f(x)=ax^2+bx+c$의 그래프를 이용하여 알아보자. (단, $D=b^2-4ac$)

두 근이 모두 p보다 크다.	두 근이 모두 p보다 작다.
	
(i) $D\ge 0$ (ii) $f(p)>0$ (iii) $-\frac{b}{2a}>p$	(i) $D\ge 0$ (ii) $f(p)>0$ (iii) $-\frac{b}{2a}<p$
두 근 사이에 p가 있다.	**두 근이 모두 p, q 사이에 있다.**
	
$f(p)<0$	(i) $D\ge 0$ (ii) $f(p)>0$, $f(q)>0$ (iii) $p<-\frac{b}{2a}<q$

04 함수의 최대와 최소

유제 본책 95~98쪽

1 (1) $f(x)=2x^3+3x^2-12x-5$에서

$$f'(x)=6x^2+6x-12=6(x+2)(x-1)$$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=1$ $(\because -1\le x\le 2)$

x	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	8	↘	-12	↗	-1

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 최댓값 8, $x=1$에서 최솟값 -12를 갖는다.

(2) $f(x)=x^4-4x^3-8x^2+3$에서

$$f'(x)=4x^3-12x^2-16x=4x(x+1)(x-4)$$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-1$ 또는 $x=0$ ($\because -2\le x\le 3$)

x	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	19	↘	0	↗	3	↘	-96

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 최댓값 19, $x=3$에서 최솟값 -96을 갖는다.

답 (1) 최댓값: 8, 최솟값: -12
(2) 최댓값: 19, 최솟값: -96

2 (1) $f(x)=x^3+6x^2+9x-5$에서

$$f'(x)=3x^2+12x+9=3(x+3)(x+1)$$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-1$ ($\because x\ge -2$)

x	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	-7	↘	-9	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 최솟값 -9를 갖고 최댓값은 없다.

(2) $f(x)=-x^4-8x^3-18x^2$에서

$$f'(x)=-4x^3-24x^2-36x=-4x(x+3)^2$$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-3$ 또는 $x=0$

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$f'(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	↗	-27	↗	0	↘	-27

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 최댓값 0을 갖고 최솟값은 없다.

답 (1) 최댓값: 없다., 최솟값: -9
(2) 최댓값: 0, 최솟값: 없다.

3 $f(x)=3x^4+4x^3+a$에서

$$f'(x)=12x^3+12x^2=12x^2(x+1)$$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-1$ 또는 $x=0$

x	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	0
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0
$f(x)$	$a+16$	↘	$a-1$	↗	a

이때 $a-1<a<a+16$이므로 함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 최댓값 $a+16$, $x=-1$에서 최솟값 $a-1$을 갖는다.

최댓값과 최솟값의 합이 31이므로

$$a+16+a-1=31, \qquad 2a=16$$

$$\therefore a=8$$

답 8

4 $f(x)=3ax^4-8ax^3+b$에서

$$f'(x)=12ax^3-24ax^2=12ax^2(x-2)$$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=2$ ($\because 1\le x\le 3$)

x	1	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-5a+b$	↘	$-16a+b$	↗	$27a+b$

이때 $a>0$이므로

$$-16a+b<-5a+b<27a+b$$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 최댓값 $27a+b$, $x=2$에서 최솟값 $-16a+b$를 갖는다.

즉 $27a+b=33$, $-16a+b=-10$이므로

$$a=1,\ b=6$$

$$\therefore a+b=7$$

답 7

5 $f(x)=2ax^3+9ax^2$에서

$$f'(x)=6ax^2+18ax=6ax(x+3)$$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-3$ ($\because -4\le x\le -1$)

x	-4	$\cdots$	-3	$\cdots$	-1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$16a$	↘	$27a$	↗	$7a$

이때 $a<0$이므로

$$27a<16a<7a$$

즉 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 최댓값 $7a$를 가지므로

$$7a=-21 \qquad \therefore a=-3$$

따라서 함수 $f(x)$의 최솟값은

$$27a=27\cdot(-3)=-81$$

답 -81

6 점 P의 좌표를 $(t,\ t^2)$이라 하면

$$\overline{AP}^2=(t-3)^2+t^4=t^4+t^2-6t+9$$

$f(t)=t^4+t^2-6t+9$라 하면

$$f'(t)=4t^3+2t-6=2(t-1)(2t^2+2t+3)$$

$f'(t)=0$에서 $\quad t=1$ ($\because 2t^2+2t+3>0$)

t	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(t)$	$-$	0	$+$
$f(t)$	↘	극소	↗

따라서 $f(t)$는 $t=1$일 때 극소이면서 최소이므로 $\overline{AP}^2$의 최솟값은

$$f(1)=1+1-6+9=5$$

답 5

7 점 P의 좌표를 $(t,\ t(t-2)^2)\ (0<t<2)$이라 하면
$H(t,\ 0)$
삼각형 POH의 넓이를 $S(t)$라 하면

$$S(t)=\frac{1}{2}\cdot t\cdot t(t-2)^2=\frac{1}{2}t^4-2t^3+2t^2$$

$$\therefore S'(t)=2t^3-6t^2+4t=2t(t-1)(t-2)$$

$S'(t)=0$에서 $\quad t=1\ (\because 0<t<2)$

t	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$S'(t)$		$+$	0	$-$	
$S(t)$		↗	극대	↘	

따라서 $S(t)$는 $t=1$일 때 극대이면서 최대이므로 삼각형 POH의 넓이의 최댓값은

$$S(1)=\frac{1}{2}-2+2=\frac{1}{2}$$

답 $\frac{1}{2}$

8 점 D의 좌표를 $\left(t,\ -\frac{1}{2}t^2+3\right)\ (0<t<\sqrt{6})$이라 하면
$\overline{AD}=2t,\ \overline{CD}=-t^2+6$
직사각형 ABCD의 넓이를 $S(t)$라 하면

$$S(t)=2t(-t^2+6)=-2t^3+12t$$

$$\therefore S'(t)=-6t^2+12=-6(t+\sqrt{2})(t-\sqrt{2})$$

$S'(t)=0$에서 $\quad t=\sqrt{2}\ (\because 0<t<\sqrt{6})$

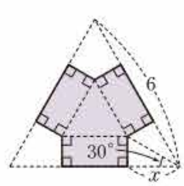
t	0	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$	$\sqrt{6}$
$S'(t)$		$+$	0	$-$	
$S(t)$		↗	극대	↘	

따라서 $S(t)$는 $t=\sqrt{2}$일 때 극대이면서 최대이므로 직사각형 ABCD의 넓이의 최댓값은

$$S(\sqrt{2})=-4\sqrt{2}+12\sqrt{2}=8\sqrt{2}$$

답 $8\sqrt{2}$

9 오른쪽 그림과 같이 정삼각형의 한 꼭짓점으로부터의 거리가 $x\ (x>0)$인 부분까지 자른다고 하면 상자의 밑면은 한 변의 길이가 $6-2x$인 정삼각형이므로



$$6-2x>0 \qquad \therefore 0<x<3$$

이때 상자의 높이는

$$x\tan 30°=\frac{x}{\sqrt{3}}$$

이므로 상자의 부피를 $V(x)$라 하면

$$V(x)=\frac{\sqrt{3}}{4}(6-2x)^2\cdot\frac{x}{\sqrt{3}}$$
$$=x^3-6x^2+9x$$

$$\therefore V'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$$

$V'(x)=0$에서 $\quad x=1\ (\because 0<x<3)$

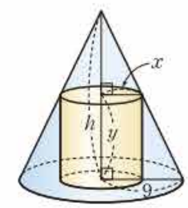
x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	3
$V'(x)$		$+$	0	$-$	
$V(x)$		↗	극대	↘	

따라서 $V(x)$는 $x=1$일 때 극대이면서 최대이므로 상자의 부피의 최댓값은

$$V(1)=1-6+9=4$$

답 4

10 오른쪽 그림과 같이 원기둥의 밑면의 반지름의 길이와 높이를 각각 $x\ (0<x<9),\ y$라 하고, 원뿔의 높이를 h라 하면



$$h:9=(h-y):x$$

$$9(h-y)=hx, \qquad h-y=\frac{hx}{9}$$

$$\therefore y=h\left(1-\frac{1}{9}x\right)$$

원기둥의 부피를 $V(x)$라 하면

$$V(x)=\pi x^2y=\pi x^2h\left(1-\frac{1}{9}x\right)$$
$$=\pi h\left(x^2-\frac{1}{9}x^3\right)$$

$$\therefore V'(x)=\pi h\left(2x-\frac{1}{3}x^2\right)=-\frac{1}{3}\pi hx(x-6)$$

$V'(x)=0$에서 $\quad x=6\ (\because 0<x<9)$

x	0	$\cdots$	6	$\cdots$	9
$V'(x)$		$+$	0	$-$	
$V(x)$		↗	극대	↘	

따라서 $V(x)$는 $x=6$일 때 극대이면서 최대이므로 구하는 원기둥의 밑면의 반지름의 길이는 6이다.

답 6

중단원 연습 문제

본책 99~102쪽

01 ④	**02** ③	**03** 7	**04** ④	**05** $2\sqrt{17}$
06 -2	**07** 16	**08** ③	**09** ④	**10** ④
11 ③	**12** ⑤	**13** ③	**14** ①	**15** ①
16 16	**17** 12	**18** 40개	**19** $(1,\ -1)$	
20 $\frac{128}{9}$	**21** ⑤	**22** $\frac{9}{2}$	**23** 3	**24** ⑤
25 3	**26** ②			

01 전략 구간 $[\alpha,\ \beta]$에서 $f'(x)\le 0$이면 $f(x)$가 감소함을 이용한다.

풀이 $f(x)=x^3+3x^2-9x+10$에서

$$f'(x)=3x^2+6x-9=3(x+3)(x-1)$$

이때 함수 $f(x)$는 $f'(x)\le 0$인 구간에서 감소하므로

$3(x+3)(x-1)\le 0, \quad (x+3)(x-1)\le 0$

$\therefore -3\le x\le 1$

따라서 $\alpha=-3$, $\beta=1$이므로

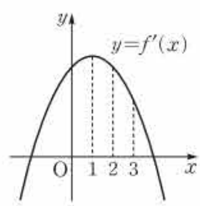
$\beta-\alpha=4$ 답 ④

02 전략 삼차함수 $f(x)$가 구간 (a, b)에서 증가하려면 이 구간에서 $f'(x)\ge 0$이어야 함을 이용한다.

풀이 $f(x)=-x^3+3x^2+ax-6$에서

$f'(x)=-3x^2+6x+a=-3(x-1)^2+a+3$

함수 $f(x)$가 $2<x<3$에서 증가하려면 $2<x<3$에서 $f'(x)\ge 0$이어야 하므로 오른쪽 그림에서



$f'(3)=-9+a\ge 0$

$\therefore a\ge 9$

따라서 실수 a의 최솟값은 9이다. 답 ③

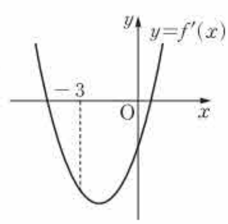
03 전략 어떤 구간에 속하는 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여 $x_1<x_2$일 때 $f(x_1)>f(x_2)$가 성립하면 $f(x)$는 이 구간에서 감소함을 이용한다.

풀이 함수 $f(x)$는 구간 $(-3, 0)$에서 감소하므로 이 구간에서 $f'(x)\le 0$이어야 한다.

$f(x)=x^3+6ax^2+(a-7)x$에서

$f'(x)=3x^2+12ax+a-7$

오른쪽 그림에서



$f'(-3)=-35a+20\le 0$이어야 하므로

$a\ge \frac{4}{7}$ …… ㉠

$f'(0)=a-7\le 0$이어야 하므로

$a\le 7$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$\frac{4}{7}\le a\le 7$

따라서 정수 a는 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7의 7개이다. 답 7

04 전략 함수 $f(x)$가 구간 $(-\infty, \infty)$에서 증가하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\ge 0$이어야 함을 이용한다.

풀이 $f(x)=x^3+ax^2+2ax$에서

$f'(x)=3x^2+2ax+2a$

함수 $f(x)$가 구간 $(-\infty, \infty)$에서 증가하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\ge 0$이어야 한다.

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=a^2-6a\le 0, \quad a(a-6)\le 0$

$\therefore 0\le a\le 6$

따라서 a의 최댓값은 6, 최솟값은 0이므로

$M=6, m=0 \quad \therefore M-m=6$ 답 ④

05 전략 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극값 b를 가지면 극값을 갖는 점의 좌표는 (a, b)임을 이용한다.

풀이 $f(x)=2x^3-6x-1$이라 하면

$f'(x)=6x^2-6=6(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	3	↘	-5	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값 3, $x=1$에서 극솟값 -5를 가지므로 두 점 $(-1, 3)$, $(1, -5)$ 사이의 거리는

$\sqrt{(1+1)^2+(-5-3)^2}=2\sqrt{17}$ 답 $2\sqrt{17}$

06 전략 함수 $f(x)$의 극댓값과 극솟값을 a로 나타낸다.

풀이 $f(x)=x^3+3x^2+a$에서

$f'(x)=3x^2+6x=3x(x+2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=0$ ⋯➊

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$a+4$	↘	a	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 극댓값 $a+4$, $x=0$에서 극솟값 a를 갖는다. ⋯➋

이때 극댓값과 극솟값의 절댓값이 같고 $a\ne a+4$이므로

$a=-(a+4), \quad 2a=-4$

$\therefore a=-2$ ⋯➌

답 -2

채점 기준	비율
➊ $f'(x)=0$인 x의 값을 구할 수 있다.	40 %
➋ 극댓값과 극솟값을 a로 나타낼 수 있다.	40 %
➌ a의 값을 구할 수 있다.	20 %

07 전략 미분가능한 함수 $h(x)$가 $x=a$에서 극값 p를 가지면 $h(a)=p$, $h'(a)=0$이다.

풀이 $g(x)=(x^3+2)f(x)$에서

$g'(x)=3x^2f(x)+(x^3+2)f'(x)$

$g(x)$가 $x=1$에서 극솟값 24를 가지므로

$g(1)=24, g'(1)=0$

$g(1)=3f(1)=24$이므로 $f(1)=8$

$g'(1)=3f(1)+3f'(1)=0$이므로

$24+3f'(1)=0 \quad \therefore f'(1)=-8$

$\therefore f(1)-f'(1)=8-(-8)=16$ 답 16

08 전략 먼저 점 $(1,\ 3)$에서의 곡선 $y=f(x)$의 접선의 방정식을 구한다.

풀이 $f(x)=x^3-4x^2+4x+2$에서

$f'(x)=3x^2-8x+4$

$\therefore f'(1)=3-8+4=-1$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1,\ 3)$에서의 접선의 방정식은

$y-3=-(x-1)$ $\quad\therefore y=-x+4$

즉 $g(x)=-x+4$이므로

$$\begin{aligned}h(x)&=f(x)-g(x)\\&=x^3-4x^2+4x+2-(-x+4)\\&=x^3-4x^2+5x-2\end{aligned}$$

$\therefore h'(x)=3x^2-8x+5=(x-1)(3x-5)$

$h'(x)=0$에서 $\quad x=1$ 또는 $x=\frac{5}{3}$

x	$\cdots$	1	$\cdots$	$\frac{5}{3}$	$\cdots$
$h'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	↗	0	↘	$-\frac{4}{27}$	↗

따라서 함수 $h(x)$는 $x=\frac{5}{3}$에서 극솟값 $-\frac{4}{27}$를 갖는다.

답 ③

09 전략 도함수 $y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 좌우에서 $f'(x)$의 부호를 조사한다.

풀이 ①, ② $x=0$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌지 않으므로 $f(x)$는 $x=0$에서 극값을 갖지 않는다.

③ 구간 $(-\infty,\ -2)$에서 $f'(x)>0$이므로 $f(x)$는 이 구간에서 증가한다.

④, ⑤ $x=-2$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌고, $x=2$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 $f(x)$는 $x=-2$에서 극댓값, $x=2$에서 극솟값을 갖는다.

답 ④

10 전략 $f(x)$는 $x=0$에서 극소, $x=2$에서 극대임을 이용한다.

풀이 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ (a, b, c, d는 상수, $a\neq0$)라 하면

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$

$y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표가 0, 2이므로

$f'(x)=3ax(x-2)=3ax^2-6ax$

즉 $2b=-6a$, $c=0$이므로 $\quad b=-3a$, $c=0$

$\therefore f(x)=ax^3-3ax^2+d$

주어진 그래프에서 $f(x)$는 $x=0$에서 극솟값, $x=2$에서 극댓값을 가지므로

$f(0)=4$, $f(2)=8$

$d=4$, $-4a+d=8$ $\quad\therefore a=-1$, $d=4$

따라서 $f(x)=-x^3+3x^2+4$이므로

$f(1)=-1+3+4=6$

답 ④

11 전략 증감표를 만든 후 함수의 그래프를 그려 본다.

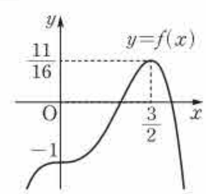
풀이 $f(x)=-x^4+2x^3-1$에서

$f'(x)=-4x^3+6x^2=-2x^2(2x-3)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=0$ 또는 $x=\frac{3}{2}$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{3}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	-1	↗	$\frac{11}{16}$	↘

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



ㄱ. $1<x<\frac{3}{2}$일 때, $f'(x)>0$이므로 함수 $f(x)$는 구간 $\left(1,\ \frac{3}{2}\right)$에서 증가한다.

ㄴ. $f(x)$는 $x=\frac{3}{2}$에서 극대이므로 극값을 갖는 점은 1개이다.

ㄷ. $y=f(x)$의 치역은 $\left\{y\,\middle|\,y\le\frac{11}{16}\right\}$이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

12 전략 삼차함수 $f(x)$가 $x=\alpha$, $x=\beta$에서 극값을 가지면 이차방정식 $f'(x)=0$의 두 실근이 α, β임을 이용한다.

풀이 함수 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$의 그래프에서 $x\longrightarrow\infty$일 때, $f(x)\longrightarrow\infty$이므로 $\quad a>0$

또 그래프가 y축의 양의 부분과 만나므로

$d>0$

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$에서 이차방정식 $f'(x)=0$의 두 실근은 α, β이고, 주어진 그래프에서 $\alpha<0$, $\beta>0$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-\frac{2b}{3a}<0$ $(\because |\alpha|>|\beta|)$

$\alpha\beta=\frac{c}{3a}<0$

이때 $a>0$이므로 $\quad b>0$, $c<0$

$\therefore a+b>0$, $b+d>0$, $ad>0$, $bc<0$, $cd<0$

따라서 옳은 것은 ⑤이다.

답 ⑤

13 전략 도함수 $y=f'(x)$의 그래프를 이용하여 함수 $f(x)$의 증감표를 만든다.

풀이 $y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표가 -2, 1, 3이므로 $f'(x)=0$에서

$x=-2$ 또는 $x=1$ 또는 $x=3$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘		↘	극소	↗	극대	↘

즉 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극소, $x=3$에서 극대이다.
또 $x=-2$ 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌지 않으므로 $f(x)$는 $x=-2$에서 극값을 갖지 않는다.
따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형이 될 수 있는 것은 ③이다.

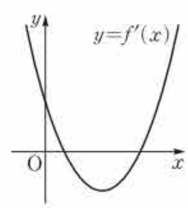
답 ③

14 전략 삼차함수 $f(x)$가 $x>a$에서 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 $x>a$에서 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

풀이 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+ax^2+(2-a)x+6$에서

$f'(x)=x^2+2ax+2-a$

삼차함수 $f(x)$가 $x>0$에서 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 $x>0$에서 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.



(i) 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=a^2+a-2>0,\qquad (a+2)(a-1)>0$

$\therefore a<-2$ 또는 $a>1$

(ii) $f'(0)>0$에서 $\qquad 2-a>0$

$\therefore a<2$

(iii) 이차함수 $y=f'(x)$의 그래프의 축의 방정식은 $x=-a$이므로

$-a>0 \qquad \therefore a<0$

이상에서 구하는 실수 a의 값의 범위는

$a<-2$

답 ①

15 전략 $x-2=t$로 치환하여 t에 대한 함수의 최대·최소를 구한다.

풀이 $x-2=t$로 놓으면 $0\le x\le 3$에서

$-2\le t\le 1$

$g(t)=t^3+9t^2+15t$라 하면

$g'(t)=3t^2+18t+15=3(t+5)(t+1)$

$g'(t)=0$에서 $\qquad t=-1\ (\because -2\le t\le 1)$

t	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	1
$g'(t)$		$-$	0	$+$	
$g(t)$	-2	↘	-7	↗	25

따라서 함수 $g(t)$는 $t=1$에서 최댓값 25, $t=-1$에서 최솟값 -7을 가지므로

$M=25,\ m=-7$

$\therefore M+m=18$

답 ①

16 전략 구간 $[1, 3]$에서 함수 $f(x)$의 극값과 $f(1)$, $f(3)$의 값을 비교한다.

풀이 $f(x)=ax^3-3ax^2+b$에서

$f'(x)=3ax^2-6ax$

$f'(1)=-12$에서 $\qquad 3a-6a=-12$

$\therefore a=4$ ⋯ ❶

즉 $f'(x)=12x^2-24x=12x(x-2)$이므로 $f'(x)=0$에서

$x=2\ (\because 1\le x\le 3)$ ⋯ ❷

x	1	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$b-8$	↘	$b-16$	↗	b

이때 $b-16<b-8<b$이므로 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 최댓값 b를 갖는다.
따라서 $b=12$이므로 ⋯ ❸

$a+b=16$ ⋯ ❹

답 16

채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷ $f'(x)=0$인 x의 값을 구할 수 있다.	20 %
❸ b의 값을 구할 수 있다.	40 %
❹ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	10 %

17 전략 구간 $[-a, a]$에서 함수 $f(x)$의 극값과 $f(-a)$, $f(a)$의 값을 비교한다.

풀이 $f(x)=x^3+ax^2-a^2x+2$에서

$f'(x)=3x^2+2ax-a^2=(x+a)(3x-a)$

$f'(x)=0$에서

$x=-a$ 또는 $x=\frac{a}{3}$

x	$-a$	$\cdots$	$\frac{a}{3}$	$\cdots$	a
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	a^3+2	↘	$2-\frac{5}{27}a^3$	↗	a^3+2

이때 $a>0$이므로

$2-\frac{5}{27}a^3<a^3+2$

즉 함수 $f(x)$는 $x=-a$, $x=a$에서 최댓값 a^3+2, $x=\frac{a}{3}$에서 최솟값 $2-\frac{5}{27}a^3$을 갖는다.

함수 $f(x)$의 최솟값이 $\frac{14}{27}$이므로

$2-\frac{5}{27}a^3=\frac{14}{27},\qquad a^3=8$

$\therefore a=2$

따라서 함수 $f(x)$의 최댓값은

$a^3+2=8+2=10$

이므로 $M=10$

$\therefore a+M=12$

답 12

18 전략 (이익)=(판매 가격)−(생산 비용)임을 이용한다.

풀이 x개를 판매하여 얻은 이익을 $g(x)$원이라 하면

$$g(x)=3000x-f(x)$$
$$=3000x-(x^3-60x^2+3000x)$$
$$=-x^3+60x^2$$
$$\therefore g'(x)=-3x^2+120x=-3x(x-40)$$

$g'(x)=0$에서

$x=0$ 또는 $x=40$

따라서 $g(x)$는 $x=40$일 때 극대이면서 최대이므로 이익을 최대로 하려면 하루에 40개를 생산해야 한다.

x	0	$\cdots$	40	$\cdots$
$g'(x)$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$	0	↗	극대	↘

답 40개

19 전략 점 P의 좌표를 $(t,\ -t^2)$이라 하고 점 P와 점 $(5,\ 1)$ 사이의 거리를 t에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 점 P의 좌표를 $(t,\ -t^2)$이라 하면 점 P와 점 $(5,\ 1)$ 사이의 거리는

$$\sqrt{(5-t)^2+(1+t^2)^2}=\sqrt{t^4+3t^2-10t+26}$$ ··· ❶

이때 $f(t)=t^4+3t^2-10t+26$이라 하면

$$f'(t)=4t^3+6t-10=2(t-1)(2t^2+2t+5)$$

$f'(t)=0$에서

$t=1$ ($\because 2t^2+2t+5>0$) ··· ❷

따라서 함수 $f(t)$는 $t=1$일 때 극소이면서 최소이고, 이때 $\sqrt{f(t)}$도 최소이다.

t	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(t)$	$-$	0	$+$
$f(t)$	↘	극소	↗

따라서 구하는 점 P의 좌표는

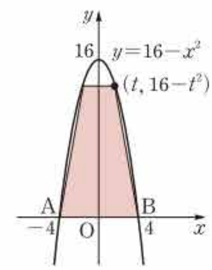
$(1,\ -1)$ ··· ❸

답 $(1,\ -1)$

채점 기준	비율
❶ 점 P와 점 $(5,\ 1)$ 사이의 거리를 t에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	20 %
❷ $f'(t)=0$인 t의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ 점 P의 좌표를 구할 수 있다.	40 %

20 전략 제1사분면 위에 있는 사다리꼴의 꼭짓점의 좌표를 $(t,\ 16-t^2)$으로 놓고 사다리꼴의 넓이를 t에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 제1사분면 위에 있는 사다리꼴의 꼭짓점의 좌표를 $(t,\ 16-t^2)$ $(0<t<4)$이라 하고 사다리꼴의 넓이를 $S(t)$라 하면



$$S(t)=\frac{1}{2}(2t+8)(16-t^2)$$
$$=-t^3-4t^2+16t+64$$
$$\therefore S'(t)=-3t^2-8t+16$$
$$=-(3t-4)(t+4)$$

$S'(t)=0$에서 $t=\frac{4}{3}$ ($\because 0<t<4$)

t	0	$\cdots$	$\frac{4}{3}$	$\cdots$	4
$S'(t)$		$+$	0	$-$	
$S(t)$		↗	극대	↘	

따라서 $t=\frac{4}{3}$일 때 $S(t)$는 극대이면서 최대이므로 넓이가 최대인 사다리꼴의 높이는

$$16-t^2=16-\frac{16}{9}=\frac{128}{9}$$

답 $\frac{128}{9}$

21 전략 $h'(x)$의 부호를 생각하여 참, 거짓을 판별한다.

풀이 $h(x)=f(x)-g(x)$에서

$h'(x)=f'(x)-g'(x)$

모든 실수 x에 대하여 $f'(x)<g'(x)$이므로

$h'(x)<0$

ㄱ. 모든 실수 x에 대하여 $h'(x)<0$이므로 실수 전체의 집합에서 $h(x)$는 감소한다.

ㄴ. $h(0)=f(0)-g(0)=0$이고 $h(x)$는 감소하므로

$a>0$이면 $h(a)<0,\ h(-a)>0$

$a<0$이면 $h(a)>0,\ h(-a)<0$

$\therefore h(a)h(-a)<0$

ㄷ. $h(0)=0$이고 $h(x)$는 실수 전체의 집합에서 감소하므로 $h(x)=0$의 실근은 $x=0$뿐이다.

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

22 전략 함수 $f(x)$의 역함수가 존재하려면 실수 전체의 집합에서 함수 $f(x)$가 증가하거나 감소해야 함을 이용한다.

풀이 $f(x)=x^3-2ax^2+6ax$에서

$f'(x)=3x^2-4ax+6a$

함수 $f(x)$의 역함수가 존재하려면 $f(x)$가 일대일대응이어야 하므로 실수 전체의 집합에서 $f(x)$는 증가해야 한다.

즉 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\ge 0$이어야 한다. ··· ❶

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=4a^2-18a\le 0, \qquad 2a^2-9a\le 0$$

$$a(2a-9)\le 0 \qquad \therefore 0\le a\le \frac{9}{2}$$

따라서 실수 a의 최댓값은 $\frac{9}{2}$이다. ⋯→ ❷

답 $\frac{9}{2}$

채점 기준	비율
❶ 함수 $f(x)$의 역함수가 존재하도록 하는 조건을 구할 수 있다.	50 %
❷ 실수 a의 최댓값을 구할 수 있다.	50 %

23 전략 함수 $f(x)$의 극댓값 또는 극솟값이 0임을 이용한다.

풀이 $f(x)=-\frac{1}{3}x^3+ax^2-12a$에서

$$f'(x)=-x^2+2ax=-x(x-2a)$$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=0$ 또는 $x=2a$ ⋯→ ❶

즉 함수 $f(x)$는 $x=0$, $x=2a$에서 극값을 갖는다.

이때 곡선 $y=f(x)$가 x축에 접하려면

$$f(0)=0 \text{ 또는 } f(2a)=0$$ ⋯→ ❷

그런데 $a>0$이므로 $\quad f(0)=-12a\ne 0$

따라서 $f(2a)=0$이므로

$$-\frac{8}{3}a^3+4a^3-12a=0, \qquad a^3-9a=0$$

$$a(a+3)(a-3)=0 \qquad \therefore a=3\ (\because a>0)$$ ⋯→ ❸

답 3

채점 기준	비율
❶ $f'(x)=0$인 x의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷ 곡선 $y=f(x)$가 x축에 접할 조건을 구할 수 있다.	30 %
❸ 양수 a의 값을 구할 수 있다.	40 %

24 전략 $g(x)=f(x)-f'(x)$라 하고 $y=g(x)$의 그래프를 그려 본다.

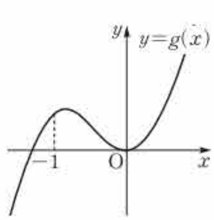
풀이 조건 (가)에서 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)라 하면 $\quad f'(x)=3x^2+2ax+b$

조건 (나)에서 $f(0)=f'(0)$이므로 $\quad c=b$ ⋯⋯ ㉠

$g(x)=f(x)-f'(x)$라 하면

$$g(x)=x^3+ax^2+bx+c-(3x^2+2ax+b)$$
$$=x^3+(a-3)x^2+(b-2a)x\ (\because ㉠)$$
$$\therefore g'(x)=3x^2+2(a-3)x+b-2a$$

이때 $g(0)=f(0)-f'(0)=0$이고 조건 (다)에 의하여 $x\ge -1$인 모든 실수 x에 대하여 $g(x)\ge 0$이므로 $y=g(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



즉 $g(x)$는 $x=0$에서 극솟값을 가지므로

$$g'(0)=0$$

$$b-2a=0 \qquad \therefore b=2a$$ ⋯⋯ ㉡

$$\therefore g(x)=x^3+(a-3)x^2$$

이때 $x\ge -1$에서 $g(x)\ge 0$이므로

$$g(-1)=-1+a-3\ge 0 \qquad \therefore a\ge 4$$ ⋯⋯ ㉢

㉠, ㉡에서 $f(x)=x^3+ax^2+2ax+2a$이므로

$$f(2)=10a+8$$

㉢에서 a의 최솟값이 4이므로 $f(2)$는 $a=4$일 때 최솟값 48을 갖는다.

답 ⑤

25 전략 최고차항의 계수가 양수인 사차함수 $f(x)$가 극댓값을 갖지 않으려면 삼차방정식 $f'(x)=0$이 중근 또는 허근을 가져야 함을 이용한다.

풀이 $f(x)=x^4+4x^3+2(a-3)x^2-3$에서

$$f'(x)=4x^3+12x^2+4(a-3)x$$
$$=4x(x^2+3x+a-3)$$

사차함수 $f(x)$가 극댓값을 갖지 않으려면 삼차방정식 $f'(x)=0$이 한 실근과 서로 다른 두 허근을 갖거나 한 실근과 중근을 갖거나 삼중근을 가져야 한다. ⋯→ ❶

(i) $f'(x)=0$이 한 실근과 서로 다른 두 허근을 갖는 경우

이차방정식 $x^2+3x+a-3=0$이 허근을 가져야 하므로 판별식을 D_1이라 하면

$$D_1=9-4(a-3)<0 \qquad \therefore a>\frac{21}{4}$$

(ii) $f'(x)=0$이 한 실근과 중근을 갖는 경우

이차방정식 $x^2+3x+a-3=0$이 $x=0$을 근으로 갖거나 0이 아닌 실수를 중근으로 가져야 한다.

$x^2+3x+a-3=0$이 $x=0$을 근으로 가지면

$$a-3=0 \qquad \therefore a=3$$

$x^2+3x+a-3=0$이 0이 아닌 실수를 중근으로 가지면 판별식을 D_2라 할 때,

$$D_2=9-4(a-3)=0 \qquad \therefore a=\frac{21}{4}$$

(iii) $f'(x)=0$이 삼중근을 갖는 경우

이차방정식 $x^2+3x+a-3=0$이 $x=0$을 중근으로 가져야 한다. 그런데 $x^2+3x+a-3=0$이 $x=0$을 근으로 가지면 $a=3$이므로 $x^2+3x=0$이 되어 $x=0$을 중근으로 갖지 않는다.

즉 $f'(x)=0$은 삼중근을 갖지 않는다.

이상에서 실수 a의 값의 범위는

$$a=3 \text{ 또는 } a\ge \frac{21}{4}$$ ⋯→ ❷

따라서 실수 a의 최솟값은 3이다. ⋯→ ❸

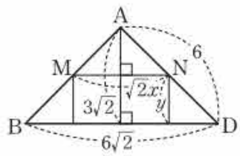
답 3

채점 기준	비율
❶ $f(x)$가 극댓값을 갖지 않도록 하는 $f'(x)=0$의 근의 조건을 알 수 있다.	30 %
❷ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	60 %
❸ a의 최솟값을 구할 수 있다.	10 %

26 전략 닮음비를 이용하여 직육면체의 부피를 함수로 나타낸다.

풀이 밑면이 정사각형인 사각뿔에 내접하는 직육면체의 밑면은 정사각형이다.

직육면체의 밑면의 한 변의 길이를 x $(0<x<6)$, 높이를 y라 하면 오른쪽 그림과 같이 사각뿔을 세 꼭짓점 A, B, D를 지나는 평면으로 잘랐을 때의 단면에서 $\triangle$AMN$\backsim\triangle$ABD이므로



$\sqrt{2}x : 6\sqrt{2}=(3\sqrt{2}-y) : 3\sqrt{2}$

$x : 6=(3\sqrt{2}-y) : 3\sqrt{2}$

$2(3\sqrt{2}-y)=\sqrt{2}x$

$\therefore\ y=3\sqrt{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}x$

직육면체의 부피를 $V(x)$라 하면

$$V(x)=x^2y=x^2\left(3\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)$$
$$=-\frac{\sqrt{2}}{2}(x^3-6x^2)$$
$$\therefore\ V'(x)=-\frac{\sqrt{2}}{2}(3x^2-12x)$$
$$=-\frac{3\sqrt{2}}{2}x(x-4)$$

$V'(x)=0$에서 $\quad x=4$ $(\because\ 0<x<6)$

x	0	$\cdots$	4	$\cdots$	6
$V'(x)$		$+$	0	$-$	
$V(x)$		↗	극대	↘	

따라서 $V(x)$는 $x=4$일 때 극대이면서 최대이므로 직육면체의 부피의 최댓값은

$$V(4)=-\frac{\sqrt{2}}{2}(64-96)=16\sqrt{2}$$

답 ②

Ⅱ. 다항함수의 미분법

06 도함수의 활용 (3)

01 방정식과 부등식에의 활용

확인

본책 104~105쪽

1 $f(x)=x^3-3x^2-9x+7$이라 하면

$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-1$ 또는 $x=3$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	12	↘	-20	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값 12, $x=3$에서 극솟값 -20을 갖고 $12\cdot(-20)=-240<0$이므로 방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 세 실근을 갖는다. 답 서로 다른 세 실근

2 $f(x)=3x^4-4x^3+2$라 하면

$f'(x)=12x^3-12x^2=12x^2(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=0$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	2	↘	1	↗

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 최솟값 1을 가지므로 모든 실수 x에 대하여 $f(x)>0$이다.

따라서 모든 실수 x에 대하여 부등식 $3x^4-4x^3+2>0$이 성립한다.

답 풀이 참조

유제

본책 106~109쪽

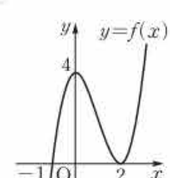
1 (1) $f(x)=x^3-3x^2+4$라 하면

$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=0$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	4	↘	0	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 방정식은 서로 다른 두 실근을 갖는다.



(2) $x^3+2x+2=2x^3-x-1$에서 $\quad -x^3+3x+3=0$

$f(x)=-x^3+3x+3$이라 하면

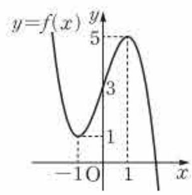
$f'(x)=-3x^2+3=-3(x+1)(x-1)$

06 도함수의 활용 (3)

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-1$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	1	↗	5	↘

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 방정식은 한 실근을 갖는다.



답 (1) 2 (2) 1

다른 풀이 (1) 함수 $f(x)=x^3-3x^2+4$는 $x=0$에서 극댓값 4, $x=2$에서 극솟값 0을 갖고 $4\cdot0=0$이므로 한 실근과 중근, 즉 서로 다른 두 실근을 갖는다.

(2) 함수 $f(x)=-x^3+3x+3$은 $x=1$에서 극댓값 5, $x=-1$에서 극솟값 1을 갖고 $5\cdot1=5>0$이므로 한 실근을 갖는다.

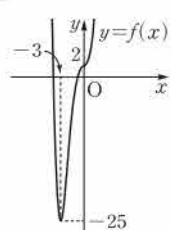
2 (1) $f(x)=x^4+4x^3+2$라 하면

$f'(x)=4x^3+12x^2=4x^2(x+3)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-3$ 또는 $x=0$

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	↘	-25	↗	2	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 방정식은 서로 다른 두 실근을 갖는다.



(2) $3x^4-3x^2-1=x^4+x^2-2$에서

$2x^4-4x^2+1=0$

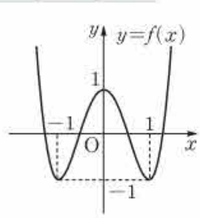
$f(x)=2x^4-4x^2+1$이라 하면

$f'(x)=8x^3-8x=8x(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-1	↗	1	↘	-1	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 방정식은 서로 다른 네 실근을 갖는다.



답 (1) 2 (2) 4

3 $2x^3+3x^2-12x-k=0$에서 $\quad 2x^3+3x^2-12x=k$

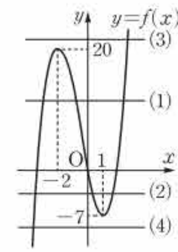
$f(x)=2x^3+3x^2-12x$라 하면

$f'(x)=6x^2+6x-12=6(x+2)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-2$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	20	↘	-7	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



(1) 주어진 방정식이 한 개의 양근과 서로 다른 두 개의 음근을 가지려면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 x좌표가 한 개는 양수이고, 두 개는 음수이어야 하므로

$0<k<20$

(2) 주어진 방정식이 한 개의 음근과 서로 다른 두 개의 양근을 가지려면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 x좌표가 한 개는 음수이고, 두 개는 양수이어야 하므로

$-7<k<0$

(3) 주어진 방정식이 한 개의 양근과 두 개의 허근을 가지려면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 x좌표가 양수 한 개뿐이어야 하므로

$k>20$

(4) 주어진 방정식이 한 개의 음근과 두 개의 허근을 가지려면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 x좌표가 음수 한 개뿐이어야 하므로

$k<-7$

답 (1) $0<k<20$ (2) $-7<k<0$ (3) $k>20$ (4) $k<-7$

4 $2x^3-9x^2-24x-k=0$에서 $\quad 2x^3-9x^2-24x=k$

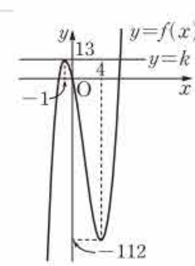
$f(x)=2x^3-9x^2-24x$라 하면

$f'(x)=6x^2-18x-24=6(x+1)(x-4)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-1$ 또는 $x=4$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	13	↘	-112	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고 주어진 방정식이 한 개의 양근과 음의 중근을 가지려면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 x좌표가 양수인 한 점에서 만나고, 음수인 점에서 접해야 하므로 $\quad k=13$



답 13

5 $x^4-8x^2+k=0$에서 $\quad x^4-8x^2=-k$

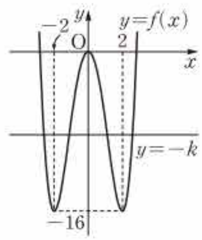
$f(x)=x^4-8x^2$이라 하면

$$f'(x)=4x^3-16x=4x(x+2)(x-2)$$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	-16	$\nearrow$	0	$\searrow$	-16	$\nearrow$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고 주어진 방정식이 서로 다른 네 실근을 가지려면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=-k$가 서로 다른 네 점에서 만나야 하므로



$$-16<-k<0$$

$$\therefore 0<k<16$$

답 $0<k<16$

6 $f(x)=x^3-3x^2-9x+k$라 하면

$$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-1$ 또는 $x=3$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$k+5$	$\searrow$	$k-27$	$\nearrow$

삼차방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 두 실근, 즉 한 실근과 중근을 가지려면 $f(-1)f(3)=0$이어야 하므로

$$(k+5)(k-27)=0 \qquad \therefore k=-5 \text{ 또는 } k=27$$

답 -5, 27

7 $f(x)=x^3-12x+k$라 하면

$$f'(x)=3x^2-12=3(x+2)(x-2)$$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-2$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$k+16$	$\searrow$	$k-16$	$\nearrow$

삼차방정식 $f(x)=0$이 한 실근과 두 허근을 가지려면 $f(-2)f(2)>0$이어야 하므로

$$(k+16)(k-16)>0 \qquad \therefore k<-16 \text{ 또는 } k>16$$

답 $k<-16$ 또는 $k>16$

8 주어진 두 곡선이 서로 다른 세 점에서 만나려면 방정식

$$x^3-4x=-3x^2+20x+k, \text{ 즉 } x^3+3x^2-24x-k=0$$

이 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.

$f(x)=x^3+3x^2-24x-k$라 하면

$$f'(x)=3x^2+6x-24=3(x+4)(x-2)$$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-4$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	-4	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$-k+80$	$\searrow$	$-k-28$	$\nearrow$

삼차방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면 $f(-4)f(2)<0$이어야 하므로

$$(-k+80)(-k-28)<0, \qquad (k-80)(k+28)<0$$

$$\therefore -28<k<80$$

답 $-28<k<80$

9 $2x^4+2ax^2+4ax+3a<3x^4+4x$에서

$$x^4-2ax^2+4(1-a)x-3a>0$$

$f(x)=x^4-2ax^2+4(1-a)x-3a$라 하면

$$f'(x)=4x^3-4ax+4(1-a)$$
$$=4(x+1)(x^2-x-a+1)$$

이때 음의 정수 a에 대하여

$$x^2-x-a+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-a+\frac{3}{4}>0$$

이므로 $f'(x)=0$에서 $\quad x=-1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$-a-3$	$\nearrow$

함수 $f(x)$는 $x=-1$일 때 극소이면서 최소이므로 $f(x)$의 최솟값은 $-a-3$이다.

따라서 모든 실수 x에 대하여 $f(x)>0$이려면

$$-a-3>0$$

$$\therefore a<-3$$

즉 음의 정수 a의 최댓값은 -4이다.

답 -4

10 $f(x)=2x^3-3x^2-12x+a$라 하면

$$f'(x)=6x^2-6x-12=6(x+1)(x-2)$$

$-1<x<2$에서 $f'(x)<0$이므로 이 구간에서 함수 $f(x)$는 감소한다.

따라서 $-1<x<2$에서 $f(x)>0$이려면 $f(2)\geq 0$이어야 하므로

$$16-12-24+a\geq 0, \qquad -20+a\geq 0$$

$$\therefore a\geq 20$$

답 $a\geq 20$

11 $f(x)>g(x)$에서

$$2x^3+6x^2-x>x^3-10x+a$$

$$\therefore x^3+6x^2+9x-a>0$$

$F(x)=x^3+6x^2+9x-a$라 하면

$$F'(x)=3x^2+12x+9=3(x+3)(x+1)$$

$F'(x)=0$에서 $\quad x=-1$ ($\because x>-2$)

x	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$
$F'(x)$		$-$	0	$+$
$F(x)$		$\searrow$	$-a-4$	$\nearrow$

$x>-2$일 때, 함수 $F(x)$는 $x=-1$에서 극소이면서 최소이므로 $F(x)$의 최솟값은 $-a-4$이다.

따라서 $x>-2$일 때 $F(x)>0$이려면

$-a-4>0$

$\therefore a<-4$

즉 정수 a의 최댓값은 -5이다. 답 -5

02 속도와 가속도

확인 본책 111쪽

1 시각 t에서의 점 P의 속도를 v, 가속도를 a라 하면

$v=\dfrac{dx}{dt}=8t-3$, $a=\dfrac{dv}{dt}=8$

따라서 $t=5$에서의 속도와 가속도는

$v=8\cdot5-3=37$, $a=8$

답 속도: 37, 가속도: 8

2 $S=t^3+2t^2+3t$에서

$\dfrac{dS}{dt}=3t^2+4t+3$

따라서 $t=2$에서의 넓이의 변화율은

$3\cdot2^2+4\cdot2+3=23$ 답 23

유제 본책 112~115쪽

1 시각 t에서의 점 P의 속도를 v, 가속도를 a라 하면

$v=\dfrac{dx}{dt}=3t^2-12t-15$, $a=\dfrac{dv}{dt}=6t-12$

(1) $t=4$에서의 점 P의 속도와 가속도는

$v=3\cdot4^2-12\cdot4-15=-15$,

$a=6\cdot4-12=12$

(2) 점 P가 운동 방향을 바꿀 때의 속도는 0이므로

$3t^2-12t-15=0$, $\quad t^2-4t-5=0$

$(t+1)(t-5)=0$ $\quad \therefore t=5$ ($\because t\geq0$)

따라서 $0<t<5$일 때 $v<0$이고, $t>5$일 때 $v>0$이므로 점 P가 운동 방향을 바꿀 때의 시각은 5이다.

(3) $v=3t^2-12t-15=21$에서

$3t^2-12t-36=0$, $\quad t^2-4t-12=0$

$(t+2)(t-6)=0$ $\quad \therefore t=6$ ($\because t\geq0$)

따라서 $t=6$에서의 점 P의 가속도는

$a=6\cdot6-12=24$

답 (1) 속도: -15, 가속도: 12 (2) 5 (3) 24

2 시각 t에서의 점 P의 속도를 v, 가속도를 a라 하면

$v=\dfrac{dx}{dt}=3t^2-20t+27$, $a=\dfrac{dv}{dt}=6t-20$

점 P가 원점을 통과하는 것은 $x=0$일 때이므로

$t^3-10t^2+27t-18=0$, $\quad (t-1)(t-3)(t-6)=0$

$\therefore t=1$ 또는 $t=3$ 또는 $t=6$

따라서 점 P가 마지막으로 원점을 통과하는 것은 $t=6$일 때이므로 구하는 가속도는

$a=6\cdot6-20=16$ 답 16

3 시각 t에서의 점 P의 속도를 v, 가속도를 a라 하면

$v=\dfrac{dx}{dt}=3t^2+2pt+q$, $a=\dfrac{dv}{dt}=6t+2p$

이때 $t=2$에서의 점 P의 속도가 12이므로

$3\cdot2^2+2p\cdot2+q=12$

$\therefore 4p+q=0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

또 $t=2$에서의 점 P의 가속도가 10이므로

$6\cdot2+2p=10$ $\quad \therefore p=-1$

$p=-1$을 ㉠에 대입하면

$-4+q=0$ $\quad \therefore q=4$

$\therefore p+q=3$ 답 3

4 ㄱ. $1<t<3$일 때 그래프의 접선의 기울기는 0이므로 $1<t<3$에서 점 P의 가속도는 0이다.

ㄴ. $v(5)\neq0$이므로 $t=5$에서 점 P는 운동 방향을 바꾸지 않는다.

ㄷ. $t=6$에서 $v'(t)>0$이므로 점 P의 가속도는 양이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ뿐이다. 답 ㄱ

5 위치 $x(t)$의 그래프의 접선의 기울기는 속도 $v(t)$이므로 접선의 기울기가 0인 점의 좌우에서 접선의 기울기의 부호가 바뀔 때 점 P의 운동 방향이 바뀐다.

따라서 점 P의 운동 방향이 처음으로 바뀌는 시각은 b이다.

답 b

6 브레이크를 밟은 지 t초 후의 자동차의 속도를 v m/s라 하면

$$v=\frac{dx}{dt}=24-6t$$

자동차가 정지할 때의 속도는 0 m/s이므로

$$24-6t=0$$

$$\therefore t=4$$

따라서 이 자동차가 4초 동안 움직인 거리는

$$x=24\cdot4-3\cdot4^2=48$$

답 48 m

7 제동을 건 지 t초 후의 열차의 속도를 v m/s라 하면

$$v=\frac{dx}{dt}=4.2-2at$$

이때 열차가 제동을 건 지 3초 후에 정지하므로 $t=3$일 때의 속도는 0 m/s이다.

즉 $4.2-2a\cdot3=0$이므로

$$a=0.7$$

답 0.7

8 t초 후의 로켓의 속도를 v m/s라 하면

$$v=\frac{dh}{dt}=a-10t$$

이때 4초 후에 로켓이 최고 지점에 도달하므로 $t=4$일 때의 속도는 0 m/s이다.

즉 $a-10\cdot4=0$이므로

$$a=40$$

따라서 4초 후의 이 로켓의 지면으로부터의 높이는

$$h=15+40\cdot4-5\cdot4^2=95$$

답 95 m

9 t초 후의 정사각형의 한 변의 길이는 $(2+3t)$ cm이므로 정사각형의 한 대각선의 길이를 l cm라 하면

$$l=(2+3t)\sqrt{2}=3\sqrt{2}t+2\sqrt{2}$$

위의 식의 양변을 t에 대하여 미분하면

$$\frac{dl}{dt}=3\sqrt{2}$$

따라서 정사각형의 한 대각선의 길이의 변화율은 $3\sqrt{2}$ cm/s이다.

답 $3\sqrt{2}$ cm/s

10 (1) t초 후의 공의 반지름의 길이는 $(1+2t)$ cm이므로 공의 겉넓이를 S cm^{2}라 하면

$$S=4\pi(1+2t)^2$$

위의 식의 양변을 t에 대하여 미분하면

$$\frac{dS}{dt}=4\pi\cdot2(1+2t)\cdot2=16\pi(1+2t)$$

따라서 3초 후의 공의 겉넓이의 변화율은

$$16\pi(1+2\cdot3)=112\pi\ (\text{cm}^2/\text{s})$$

(2) t초 후의 공의 부피를 V cm^{3}라 하면

$$V=\frac{4}{3}\pi(1+2t)^3$$

위의 식의 양변을 t에 대하여 미분하면

$$\frac{dV}{dt}=\frac{4}{3}\pi\cdot3(1+2t)^2\cdot2=8\pi(1+2t)^2$$

$1+2t=9$에서 $\quad t=4$

즉 4초 후에 공의 반지름의 길이가 9 cm가 되므로 4초 후의 공의 부피의 변화율은

$$8\pi(1+2\cdot4)^2=648\pi\ (\text{cm}^3/\text{s})$$

답 (1) 112π cm^2/s (2) 648π cm^3/s

중단원 연습 문제

본책 116~118쪽

01 ④ **02** 8 **03** -1 **04** $k<-32$ 또는 $k>0$
05 ① **06** ② **07** ③ **08** 20 **09** ①
10 8 **11** ① **12** ④ **13** -20 m/s
14 ② **15** ③ **16** ④ **17** $-4<a<-3$
18 ⑤ **19** 6 **20** 240

01 전략 $y=f'(x)$의 그래프를 이용하여 $f(x)$의 증감표를 만든다.

풀이 $y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표가 -1, 0, 1이므로 $f'(x)=0$에서

$$x=-1 \text{ 또는 } x=0 \text{ 또는 } x=1$$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 네 실근을 가지려면

$$f(-1)<0,\ f(0)>0,\ f(1)<0$$

이어야 한다.

답 ④

02 전략 주어진 방정식을 $f(x)=a$ 꼴로 변형하고 $y=f(x)$의 그래프를 그려 본다.

풀이 $\frac{1}{3}x^3+a=x^2+3x$에서 $\quad -\frac{1}{3}x^3+x^2+3x=a$

$f(x)=-\frac{1}{3}x^3+x^2+3x$라 하면

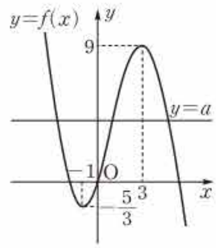
$$f'(x)=-x^2+2x+3=-(x+1)(x-3)$$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-1$ 또는 $x=3$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	$-\frac{5}{3}$	↗	9	↘

06 도함수의 활용 (3)

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. ··· ❶



주어진 방정식이 한 개의 음근과 서로 다른 두 개의 양근을 가지려면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=a$의 교점의 x좌표가 한 개는 음수이고, 두 개는 양수이어야 하므로

$0<a<9$ ··· ❷

따라서 정수 a의 최댓값은 8이다. ··· ❸

답 8

채점 기준	비율
❶ 함수 $y=-\frac{1}{3}x^3+x^2+3x$의 그래프를 그릴 수 있다.	60 %
❷ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	30 %
❸ 정수 a의 최댓값을 구할 수 있다.	10 %

03 전략 곡선 $y=3x^4-4x^3-12x^2+2$를 그려 본다.

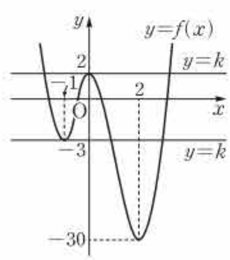
풀이 $f(x)=3x^4-4x^3-12x^2+2$라 하면

$f'(x)=12x^3-12x^2-24x=12x(x+1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$

x	…	-1	…	0	…	2	…
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-3	↗	2	↘	-30	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나려면



$k=-3$ 또는 $k=2$

따라서 구하는 k의 값의 합은

$-3+2=-1$

답 -1

04 전략 (극댓값)×(극솟값)>0이 되도록 하는 k의 값의 범위를 구한다.

풀이 $f(x)=x^3-12x^2+36x+k$라 하면

$f'(x)=3x^2-24x+36=3(x-2)(x-6)$

$f'(x)=0$에서 $x=2$ 또는 $x=6$

x	…	2	…	6	…
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$k+32$	↘	k	↗

삼차방정식 $f(x)=0$이 오직 한 개의 실근을 가지려면 $f(2)f(6)>0$이어야 하므로

$k(k+32)>0$ $\therefore k<-32$ 또는 $k>0$

답 $k<-32$ 또는 $k>0$

05 전략 곡선 $y=p(x)$와 직선 $y=q(x)$가 서로 다른 두 점에서 만나면 방정식 $p(x)=q(x)$는 서로 다른 두 실근을 갖는다.

풀이 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=5x+k$가 서로 다른 두 점에서 만나면 방정식

$x(x+1)(x-4)=5x+k$, 즉 $x^3-3x^2-9x-k=0$

이 서로 다른 두 실근을 가진다.

$g(x)=x^3-3x^2-9x-k$라 하면

$g'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$

$g'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=3$

x	…	-1	…	3	…
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	↗	$-k+5$	↘	$-k-27$	↗

삼차방정식 $g(x)=0$이 서로 다른 두 실근, 즉 한 실근과 중근을 가지려면 $f(-1)f(3)=0$이어야 하므로

$(-k+5)(-k-27)=0$

$k=5$ ($\because k>0$)

답 ①

06 전략 모든 실수 x에 대하여 부등식 $f(x)\geq 0$이 성립하려면 ($f(x)$의 최솟값)≥ 0이어야 함을 이용한다.

풀이 $x^4-2x^2\geq k$에서 $x^4-2x^2-k\geq 0$

$f(x)=x^4-2x^2-k$라 하면

$f'(x)=4x^3-4x=4x(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

x	…	-1	…	0	…	1	…
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$-k-1$	↗	$-k$	↘	$-k-1$	↗

함수 $f(x)$는 $x=-1$, $x=1$일 때 극소이면서 최소이므로 최솟값은 $-k-1$이다.

따라서 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\geq 0$이려면

$-k-1\geq 0$ $\therefore k\leq -1$

즉 실수 k의 최댓값은 -1이다.

답 ②

07 전략 $x>a$에서 $f(x)$가 증가할 때 $f(x)>0$이 성립하려면 $f(a)\geq 0$이어야 함을 이용한다.

풀이 $f(x)=x^3-6x^2+9x+k$라 하면

$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$

$x>3$에서 $f'(x)>0$이므로 함수 $f(x)$는 구간 $(3, \infty)$에서 증가한다.

따라서 $x>3$에서 $f(x)>0$이려면 $f(3)\geq 0$이어야 하므로

$f(3)=3^3-6\cdot 3^2+9\cdot 3+k=k\geq 0$

즉 정수 k의 최솟값은 0이다.

답 ③

08 전략 $-2\le x\le 2$에서 ($f(x)-g(x)$의 최솟값)≥ 0이어야 함을 이용한다.

풀이 $f(x)\ge g(x)$에서

$f(x)-g(x)\ge 0$

$F(x)=f(x)-g(x)$라 하면

$$F(x)=2x^3-3x-(2x^2-x-k)$$
$$=2x^3-2x^2-2x+k$$
$$\therefore F'(x)=6x^2-4x-2$$
$$=2(3x+1)(x-1)$$

$F'(x)=0$에서 $x=-\frac{1}{3}$ 또는 $x=1$ ⋯ ❶

x	-2	$\cdots$	$-\frac{1}{3}$	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$F'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$F(x)$	$k-20$	↗	$k+\frac{10}{27}$	↘	$k-2$	↗	$k+4$

이때 $k-20<k-2<k+\frac{10}{27}<k+4$이므로 $-2\le x\le 2$에서 함수 $F(x)$는 $x=-2$일 때 최솟값 $k-20$을 갖는다. ⋯ ❷

따라서 $-2\le x\le 2$에서 $F(x)\ge 0$이려면

$k-20\ge 0$ $\therefore k\ge 20$

즉 실수 k의 최솟값은 20이다. ⋯ ❸

답 20

채점 기준	비율
❶ $F'(x)=0$인 x의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ 함수 $F(x)$의 최솟값을 k에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40 %
❸ k의 최솟값을 구할 수 있다.	20 %

09 전략 점 M의 시각 t에서의 위치를 먼저 구한 후 점 M의 속도를 구한다.

풀이 시각 t에서의 점 M의 위치를 x라 하면

$$x=\frac{1}{2}\{(2t^3+t^2-4t)+(-3t^2+8t)\}$$
$$=t^3-t^2+2t$$

시각 t에서의 점 M의 속도를 v라 하면

$$v=\frac{dx}{dt}=3t^2-2t+2$$

따라서 $t=2$에서의 점 M의 속도는

$v=3\cdot 2^2-2\cdot 2+2=10$

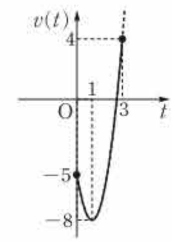
답 ①

10 전략 속력은 속도 v의 절댓값 $|v|$임을 이용한다.

풀이 시각 t에서의 점 P의 속도를 $v(t)$라 하면

$$v(t)=x'(t)=3t^2-6t-5$$
$$=3(t-1)^2-8$$

$0\le t\le 3$에서 $v(t)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$-8\le v(t)\le 4$

$\therefore 0\le |v(t)|\le 8$

따라서 점 P의 속력의 최댓값은 8이다.

답 8

11 전략 점 P가 운동 방향을 바꿀 때의 속도는 0임을 이용한다.

풀이 시각 t에서의 점 P의 속도를 v, 가속도를 a라 하면

$$v=\frac{dx}{dt}=-3t^2+12t-9,\ a=\frac{dv}{dt}=-6t+12$$

점 P가 운동 방향을 바꿀 때의 속도는 0이므로

$-3t^2+12t-9=0$, $t^2-4t+3=0$

$(t-1)(t-3)=0$

$\therefore t=1$ 또는 $t=3$

따라서 점 P가 두 번째로 운동 방향을 바꿀 때는 $t=3$일 때이므로 이때의 점 P의 가속도는

$a=-6\cdot 3+12=-6$

답 ①

12 전략 점 P의 시각 $t=x_1$에서의 가속도는 주어진 그래프의 $t=x_1$에서의 접선의 기울기와 같음을 이용한다.

풀이 ① $t=a$에서의 점 P의 가속도는 $v'(a)$이고 $v'(a)<0$이므로 $t=a$에서의 점 P의 가속도는 음이다.

② $b<t<c$에서 $|v(t)|$의 값이 작아지므로 속력은 감소한다.

③ $c<t<d$에서 $v(t)=0$을 만족시키는 t는 한 개이므로 $c<t<d$에서 점 P는 운동 방향을 한 번 바꾼다.

④ $t=b$에서 $v(t)<0$이므로 점 P는 움직이고 있다.

⑤ $0<t<e$에서 $v'(t)=0$을 만족시키는 t는 b, d의 2개이므로 $0<t<e$에서 점 P의 가속도가 0이 되는 순간이 두 번 있다.

답 ④

13 전략 물체의 높이가 지면으로부터 20 m일 때 속도가 0 m/s임을 이용한다.

풀이 물체의 t초 후의 속도를 v m/s라 하면

$$v=\frac{dh}{dt}=a-10t$$

최고 지점에 도달했을 때 $v=0$이므로

$a-10t=0$ $\therefore t=\frac{a}{10}$ ⋯ ❶

즉 $t=\frac{a}{10}$에서의 물체의 높이가 20 m이므로

$a\cdot\frac{a}{10}-5\cdot\left(\frac{a}{10}\right)^2=20$, $\frac{1}{20}a^2=20$

$a^2=400$ $\therefore a=20$ ($\because a>0$) ⋯ ❷

06 도함수의 활용 (3)

따라서 $h=20t-5t^2$이고 지면에 떨어지는 순간 $h=0$이므로

$$20t-5t^2=0, \qquad t^2-4t=0, \qquad t(t-4)=0$$

$$\therefore t=4\ (\because t>0)$$

따라서 $t=4$에서의 물체의 속도는

$$v=20-10\cdot 4=-20 \quad \cdots❸$$

답 -20 m/s

채점 기준	비율
❶ 최고 지점에 도착하는 시각을 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30 %
❷ a의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ 지면에 떨어지는 순간의 속도를 구할 수 있다.	40 %

14 전략 t초 후의 정삼각형의 한 변의 길이는 $(8+2t)$ cm임을 이용한다.

풀이 t초 후의 정삼각형의 한 변의 길이는 $(8+2t)$ cm

정삼각형의 넓이를 $S\ \mathrm{cm}^2$라 하면

$$S=\frac{\sqrt{3}}{4}(8+2t)^2=\sqrt{3}(t^2+8t+16)$$

위의 식의 양변을 t에 대하여 미분하면

$$\frac{dS}{dt}=\sqrt{3}(2t+8)$$

정삼각형의 넓이가 $64\sqrt{3}\ \mathrm{cm}^2$가 될 때, 즉

$\sqrt{3}(t^2+8t+16)=64\sqrt{3}$에서

$$t^2+8t-48=0, \qquad (t+12)(t-4)=0$$

$$\therefore t=4\ (\because t>0)$$

따라서 $t=4$일 때 정삼각형의 넓이의 변화율은

$$\sqrt{3}(2\cdot 4+8)=16\sqrt{3}\ (\mathrm{cm}^2/\mathrm{s})$$

답 ②

15 전략 주어진 그래프를 이용하여 함수 $h(x)$의 증감표를 만든다.

풀이 $h(x)=f(x)-g(x)$에서

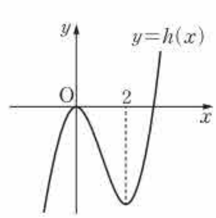
$$h'(x)=f'(x)-g'(x)$$

$h'(x)=0$에서 $\quad x=0$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$h'(x)$	+	0	−	0	+
$h(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

ㄱ, ㄴ. 위의 증감표에 의하여 $0<x<2$에서 $h(x)$는 감소하고 $x=2$에서 극솟값을 갖는다.

ㄷ. $h(0)=f(0)-g(0)=0$이므로 함수 $y=h(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



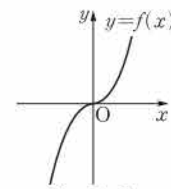
따라서 방정식 $h(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

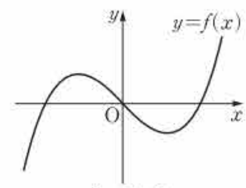
답 ③

16 전략 $y=|f(x)|$의 그래프와 직선 $y=2$가 서로 다른 네 점에서 만나도록 그래프를 그려 본다.

풀이 최고차항의 계수가 1이고 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$를 만족시키는 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 [그림 1] 또는 [그림 2]와 같아야 한다.

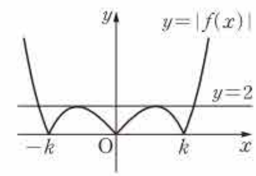


[그림 1]



[그림 2]

이때 방정식 $|f(x)|=2$의 서로 다른 실근의 개수가 4이려면 함수 $y=|f(x)|$의 그래프와 직선 $y=2$가 오른쪽 그림과 같이 서로 다른 네 점에서 만나야 하므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 [그림 2]와 같아야 한다.



함수 $y=f(x)$의 그래프의 0이 아닌 x절편을 각각 $-k$, $k\ (k>0)$라 하면

$$f(x)=x(x+k)(x-k)=x^3-k^2x$$

이므로

$$f'(x)=3x^2-k^2=(\sqrt{3}x+k)(\sqrt{3}x-k)$$

$f'(x)=0$에서

$$x=-\frac{k}{\sqrt{3}} \text{ 또는 } x=\frac{k}{\sqrt{3}}$$

따라서 함수 $f(x)$는

$$x=-\frac{k}{\sqrt{3}}\text{에서 극댓값 } 2,\ x=\frac{k}{\sqrt{3}}\text{에서 극솟값 } -2$$

를 가지므로

$$f\left(\frac{k}{\sqrt{3}}\right)=-2, \qquad \left(\frac{k}{\sqrt{3}}\right)^3-k^2\cdot\frac{k}{\sqrt{3}}=-2$$

$$k^3=3\sqrt{3} \qquad \therefore k=\sqrt{3}$$

즉 $f(x)=x^3-3x$이므로

$$f(3)=3^3-3\cdot 3=18$$

답 ④

참고 함수 $f(x)$가 $f(-x)=-f(x)$를 만족시키면 $y=f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

17 전략 $f(x)=t$로 놓고 주어진 방정식을 만족시키는 t의 값을 구한다.

풀이 $f(x)=t$라 하면

$$(g\circ f)(x)=g(t)=t^2+3t-4$$

$g(t)=0$에서 $\quad (t+4)(t-1)=0$

$$\therefore t=-4 \text{ 또는 } t=1$$

이때 방정식 $(g\circ f)(x)=0$이 부호가 다른 두 실근을 가지므로

방정식 $f(x)=-4$ 또는 $f(x)=1$을 만족시키는 서로 다른 실수 x의 개수는 2이다. ⋯ ❶

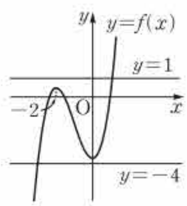
$f(x)=x^3+3x^2+a$에서

$$f'(x)=3x^2+6x=3x(x+2)$$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=0$ ⋯ ❷

x	⋯	-2	⋯	0	⋯
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$a+4$	↘	a	↗

이때 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=-4$ 또는 직선 $y=1$이 x좌표의 부호가 다른 두 점에서 만나려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$$a+4<1,\ a>-4$$

$$\therefore -4<a<-3$$ ⋯ ❸

답 $-4<a<-3$

채점 기준	비율
❶ $f(x)=-4$ 또는 $f(x)=1$의 해가 2개임을 알 수 있다.	30 %
❷ $f'(x)=0$인 x의 값을 구할 수 있다.	20 %
❸ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	50 %

18 전략 점 A에서 그은 접선이 3개 존재하도록 하는 정수 a의 조건을 구한다.

풀이 $y=2x^3+2$에서 $y'=6x^2$

점 $A(1,\ a)$에서 이 곡선에 그은 접선의 접점의 좌표를 $(t,\ 2t^3+2)$라 하면 접선의 방정식은

$$y-(2t^3+2)=6t^2(x-t)$$

$$\therefore y=6t^2x-4t^3+2$$

이 직선이 점 $A(1,\ a)$를 지나므로

$$a=6t^2-4t^3+2$$

$$\therefore 4t^3-6t^2-2+a=0 \quad \cdots\cdots ㉠$$

점 A에서 주어진 곡선에 서로 다른 세 개의 접선을 그으려면 t에 대한 삼차방정식 ㉠이 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.

$f(t)=4t^3-6t^2-2+a$라 하면

$$f'(t)=12t^2-12t=12t(t-1)$$

$f'(t)=0$에서 $t=0$ 또는 $t=1$

t	⋯	0	⋯	1	⋯
$f'(t)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(t)$	↗	$a-2$	↘	$a-4$	↗

삼차방정식 $f(t)=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면 $f(0)f(1)<0$이어야 하므로

$$(a-2)(a-4)<0 \qquad \therefore 2<a<4$$

따라서 정수 a의 값은 3이다. 답 ⑤

19 전략 시각 t에서의 위치가 $x(t)$일 때, 속도는 $x'(t)$이다.

풀이 두 점 P, Q의 속도를 각각 v_P, v_Q라 하면

$$v_P=x_P'(t)=3t^2,\quad v_Q=x_Q'(t)=-6t+9$$ ⋯ ❶

이때 두 점 P, Q의 속도가 같아지면 $v_P=v_Q$이므로

$$3t^2=-6t+9,\qquad 3t^2+6t-9=0$$

$$t^2+2t-3=0,\qquad (t+3)(t-1)=0$$

$$\therefore t=1\ (\because t\ge 0)$$ ⋯ ❷

따라서 두 점 P, Q 사이의 거리는

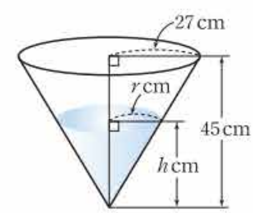
$$|x_P(1)-x_Q(1)|=|3-9|=6$$ ⋯ ❸

답 6

채점 기준	비율
❶ 두 점 P, Q의 속도를 구할 수 있다.	30 %
❷ 속도가 같아지는 시각을 구할 수 있다.	50 %
❸ 두 점 P, Q 사이의 거리를 구할 수 있다.	20 %

20 전략 시각 t에서의 부피가 V일 때, 부피의 변화율은 $\frac{dV}{dt}$이다.

풀이 t초 후의 수면의 반지름의 길이를 r cm, 수면의 높이를 h cm라 하면 오른쪽 그림에서



$$r:h=27:45$$

$$\therefore h=\frac{5}{3}r$$

이때 t초 후의 수면의 반지름의 길이가 t cm이므로

$$r=t$$

물의 부피를 $V\ \mathrm{cm}^3$라 하면

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi t^2\cdot\frac{5}{3}t=\frac{5}{9}\pi t^3$$

위의 식의 양변을 t에 대하여 미분하면

$$\frac{dV}{dt}=\frac{5}{3}\pi t^2$$

따라서 $t=12$일 때 물의 부피의 변화율은

$$\frac{5}{3}\pi\cdot 12^2=240\pi\ (\mathrm{cm}^3/\mathrm{s})$$

$$\therefore a=240$$

답 240

07 부정적분

01 부정적분

확인 본책 120~121쪽

1 (1) $(3x)'=3$이므로 $\int 3dx=3x+C$

(2) $\left(\frac{1}{2}x^2\right)'=x$이므로 $\int xdx=\frac{1}{2}x^2+C$

(3) $(2x^2)'=4x$이므로 $\int 4xdx=2x^2+C$

(4) $(3x^3)'=9x^2$이므로 $\int 9x^2dx=3x^3+C$

답 (1) $3x+C$ (2) $\frac{1}{2}x^2+C$ (3) $2x^2+C$ (4) $3x^3+C$

2 (1) $f(x)=(2x^2+3x+C)'=4x+3$

(2) $f(x)=(x^3-5x^2+C)'=3x^2-10x$

답 (1) $f(x)=4x+3$ (2) $f(x)=3x^2-10x$

3 답 (1) x^2-5x (2) x^2-5x+C

유제 본책 122~123쪽

1 $(x+1)f(x)=(x^3+2x^2+x-3)'$이므로

$(x+1)f(x)=3x^2+4x+1$

$=(x+1)(3x+1)$

따라서 $f(x)=3x+1$이므로

$f(2)=6+1=7$ 답 7

2 $2x^3+ax^2+3=(bx^4-2x^3+cx+1)'$이므로

$2x^3+ax^2+3=4bx^3-6x^2+c$

위의 등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로

$2=4b,\ a=-6,\ 3=c$

$\therefore a=-6,\ b=\frac{1}{2},\ c=3$

$\therefore abc=-9$ 답 -9

3 $f(x)=F'(x)=(x^3+ax^2+bx)'$

$=3x^2+2ax+b$

$f(0)=-5$이므로 $b=-5$

따라서 $f(x)=3x^2+2ax-5$이므로

$f'(x)=6x+2a$

$f'(0)=6$이므로 $2a=6$ $\therefore a=3$

$\therefore a+b=-2$ 답 -2

4 (1) $\frac{d}{dx}\left\{\int xf(x)dx\right\}=2x^3-x^2+3x$이므로

$xf(x)=2x^3-x^2+3x=x(2x^2-x+3)$

따라서 $f(x)=2x^2-x+3$이므로

$f(-1)=2+1+3=6$

(2) $F(x)=\int\left\{\frac{d}{dx}(x^3-2x^2)\right\}dx=x^3-2x^2+C$

이때 $F(-1)=1$이므로

$-3+C=1$ $\therefore C=4$

따라서 $F(x)=x^3-2x^2+4$이므로

$F(1)=1-2+4=3$

답 (1) 6 (2) 3

5 $\frac{d}{dx}\left\{\int(ax^2-3x+2)dx\right\}=2x^2+bx+c$이므로

$ax^2-3x+2=2x^2+bx+c$

위의 등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로

$a=2,\ b=-3,\ c=2$

$\therefore a+b+c=1$ 답 1

6 $f(x)=\int\left\{\frac{d}{dx}(x^3+ax^2)\right\}dx=x^3+ax^2+C$

이때 $f(1)=2$이므로 $1+a+C=2$

$\therefore a+C=1$ ······ ㉠

또 $f(x)=x^3+ax^2+C$에서

$f'(x)=3x^2+2ax$

이고, $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)=-4$이므로

$12+4a=-4$ $\therefore a=-4$

$a=-4$를 ㉠에 대입하면 $-4+C=1$ $\therefore C=5$

따라서 $f(x)=x^3-4x^2+5$이므로

$f(2)=8-16+5=-3$ 답 -3

02 부정적분의 계산

확인 본책 124쪽

1 $\int(2x^3+x^2-2x+5)dx$

$=2\int x^3dx+\int x^2dx-2\int xdx+5\int dx$

$=2\left(\frac{1}{4}x^4+C_1\right)+\left(\frac{1}{3}x^3+C_2\right)-2\left(\frac{1}{2}x^2+C_3\right)+5(x+C_4)$

$=\frac{1}{2}x^4+\frac{1}{3}x^3-x^2+5x+C$

답 $\frac{1}{2}x^4+\frac{1}{3}x^3-x^2+5x+C$

유제 본책 125~128쪽

1 (1) $\int (x+1)(x^2-x+1)dx=\int (x^3+1)dx$

$=\frac{1}{4}x^4+x+C$

(2) $\int \frac{3x^2+2x-1}{x+1}dx=\int \frac{(x+1)(3x-1)}{x+1}dx$

$=\int (3x-1)dx=\frac{3}{2}x^2-x+C$

(3) $\int (x+t)^2dt=\int (x^2+2xt+t^2)dt$

$=\frac{1}{3}t^3+xt^2+x^2t+C$

답 (1) $\frac{1}{4}x^4+x+C$ (2) $\frac{3}{2}x^2-x+C$ (3) $\frac{1}{3}t^3+xt^2+x^2t+C$

2 $f(x)=\int (\sqrt{x}+1)^2dx+\int (\sqrt{x}-1)^2dx$

$=\int \{(\sqrt{x}+1)^2+(\sqrt{x}-1)^2\}dx$

$=\int (2x+2)dx=x^2+2x+C$

이때 $f(2)=5$이므로 $8+C=5$ $\therefore C=-3$

따라서 $f(x)=x^2+2x-3$이므로

$f(1)=1+2-3=0$

답 0

3 $f(x)=\int f'(x)dx=\int (8x^3-3x^2-4x+1)dx$

$=2x^4-x^3-2x^2+x+C$

이때 $f(1)=-3$이므로 $C=-3$

따라서 $f(x)=2x^4-x^3-2x^2+x-3$이므로

$f(2)=32-8-8+2-3=15$

답 15

4 $f'(x)=6x-2$이므로

$f(x)=\int f'(x)dx=\int (6x-2)dx=3x^2-2x+C_1$

이때 $f(0)=0$이므로 $C_1=0$

따라서 $f(x)=3x^2-2x$이므로

$\int f(x)dx=\int (3x^2-2x)dx$

$=x^3-x^2+C$

답 x^3-x^2+C

5 $f'(x)=2x+3$이므로

$f(x)=\int f'(x)dx=\int (2x+3)dx=x^2+3x+C$

이때 곡선 $y=f(x)$가 점 $(0,\ 2)$를 지나므로

$f(0)=2$ $\therefore C=2$

따라서 $f(x)=x^2+3x+2$이므로

$f(-1)=1-3+2=0$

답 0

6 $F(x)$는 함수 $f(x)$의 부정적분이므로

$F'(x)=f(x)$

$xf(x)-F(x)=2x^3+x^2$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)+xf'(x)-f(x)=6x^2+2x$

$xf'(x)=x(6x+2)$

$\therefore f'(x)=6x+2$

$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int (6x+2)dx$

$=3x^2+2x+C$

이때 $f(1)=6$이므로

$5+C=6$ $\therefore C=1$

$\therefore f(x)=3x^2+2x+1$

답 $f(x)=3x^2+2x+1$

7 $F(x)$는 함수 $f(x)$의 부정적분이므로

$F'(x)=f(x)$

$F(x)+\int (x-1)f(x)dx=x^4-4x^3+x^2$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)+(x-1)f(x)=4x^3-12x^2+2x$

$xf(x)=x(4x^2-12x+2)$

$\therefore f(x)=4x^2-12x+2$

$\therefore F(x)=\int f(x)dx=\int (4x^2-12x+2)dx$

$=\frac{4}{3}x^3-6x^2+2x+C$

이때 $F(0)=1$이므로 $C=1$

따라서 $F(x)=\frac{4}{3}x^3-6x^2+2x+1$이므로

$F(3)=36-54+6+1=-11$

답 -11

8 $\int \{f(x)-2x\}dx=xf(x)-4x^3-5x^2$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)-2x=f(x)+xf'(x)-12x^2-10x$

$xf'(x)=12x^2+8x=x(12x+8)$

$\therefore f'(x)=12x+8$

$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int (12x+8)dx$

$=6x^2+8x+C$

이때 $f(-2)=4$이므로

$8+C=4$ $\therefore C=-4$

따라서 $f(x)=6x^2+8x-4$이므로

$f(1)=6+8-4=10$

답 10

9 $f'(x)=x^2+4x+3=(x+3)(x+1)$이므로 $f'(x)=0$에서
$x=-3$ 또는 $x=-1$

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	-1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

즉 함수 $f(x)$는 $x=-3$에서 극댓값 0을 갖고, $x=-1$에서 극솟값을 갖는다. 이때

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int(x^2+4x+3)dx$$
$$=\frac{1}{3}x^3+2x^2+3x+C$$

이므로 $f(-3)=0$에서

$-9+18-9+C=0 \qquad \therefore C=0$

따라서 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+2x^2+3x$이므로 극솟값은

$f(-1)=-\frac{1}{3}+2-3=-\frac{4}{3}$ 답 $-\frac{4}{3}$

10 $f'(x)=a(x+1)(x-3)\ (a>0)$이라 하면 $f'(1)=-4$이므로

$-4a=-4 \qquad \therefore a=1$

$\therefore f'(x)=(x+1)(x-3)$
$=x^2-2x-3$

$y=f'(x)$의 그래프에서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값을 갖고, $x=3$에서 극솟값을 갖는다. 이때

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int(x^2-2x-3)dx$$
$$=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x+C$$

따라서 $M=f(-1)=\frac{5}{3}+C,\ m=f(3)=-9+C$이므로

$M-m=\frac{5}{3}+C-(-9+C)=\frac{32}{3}$ 답 $\frac{32}{3}$

11 $f'(x)=a(x+1)(x-1)\ (a<0)$이라 하면
$f'(x)=a(x^2-1)$

$y=f'(x)$의 그래프에서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극댓값 -2를 갖고, $x=-1$에서 극솟값 -6을 갖는다. 이때

$$f(x)=\int f'(x)dx=a\int(x^2-1)dx$$
$$=a\left(\frac{1}{3}x^3-x\right)+C$$

이므로 $f(1)=-2,\ f(-1)=-6$에서

$-\frac{2}{3}a+C=-2,\ \frac{2}{3}a+C=-6$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=-3,\ C=-4$

따라서 $f(x)=-3\left(\frac{1}{3}x^3-x\right)-4=-x^3+3x-4$이므로

$f(2)=-8+6-4=-6$ 답 -6

중단원 연습 문제

본책 129~131쪽

01 ④	**02** ②	**03** 12	**04** ⑤	**05** -1
06 ⑤	**07** 12	**08** 10	**09** -12	**10** 511
11 ①	**12** 20	**13** ③	**14** $\frac{1}{3}$	
15 $-2<k<2$		**16** ②	**17** ④	**18** ②
19 11	**20** ⑤			

01 전략 $\int h(x)dx=H(x)+C$이면 $h(x)=H'(x)$임을 이용한다.

풀이 $\int F(x)dx=f(x)g(x)$에서

$F(x)=\{f(x)g(x)\}'$
$=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$
$=2x(2x^2+4x-1)+(x^2-3)(4x+4)$

$\therefore F(-1)=-2(2-4-1)+(-2)\cdot 0=6$

답 ④

02 전략 $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)$임을 이용한다.

풀이 $f(x)=\int(x^2+2x)dx$에서

$f'(x)=x^2+2x$

$$\therefore \lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2-h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)+f(2)-f(2-h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{f(2-h)-f(2)}{-h}$$
$=f'(2)+f'(2)=2f'(2)$
$=2(4+4)$
$=16$ 답 ②

03 전략 주어진 등식이 x에 대한 항등식임을 이용한다.

풀이 $\frac{d}{dx}\left\{\int(2x^3+px^2+4x+q)dx\right\}=rx^3-x^2+sx+7$이므로

$2x^3+px^2+4x+q=rx^3-x^2+sx+7$

위의 등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로

$p=-1,\ q=7,\ r=2,\ s=4$

$\therefore p+q+r+s=12$ 답 12

04 전략 먼저 인수분해를 이용하여 피적분함수를 간단히 한다.

풀이 $f(x)=\int \frac{x^3-1}{x^2+x+1}dx+\int \frac{x^3+1}{x^2-x+1}dx$

$=\int \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x^2+x+1}dx$

$+\int \frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x^2-x+1}dx$

$=\int (x-1)dx+\int (x+1)dx$

$=\int \{(x-1)+(x+1)\}dx$

$=\int 2x\,dx=x^2+C$

이때 $f(0)=4$이므로 $\quad C=4$

따라서 $f(x)=x^2+4$이므로 $\quad f(2)=4+4=8$ 답 ⑤

05 전략 $\int f(x)dx \pm \int g(x)dx=\int \{f(x)\pm g(x)\}dx$ (복호동순)임을 이용한다.

풀이 두 조건 (가), (나)의 두 식을 변끼리 더하면

$2f(x)=\int (x^2-x)dx+\int (x^2+5x)dx$

$=\int \{(x^2-x)+(x^2+5x)\}dx$

$=\int (2x^2+4x)dx=\frac{2}{3}x^3+2x^2+C_1$

$\therefore f(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2+\frac{C_1}{2}$

조건 (다)에서 $f(0)=0$이므로 $\quad C_1=0$

$\therefore f(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2$ ··· ❶

두 조건 (가), (나)의 두 식을 변끼리 빼면

$2g(x)=\int (x^2-x)dx-\int (x^2+5x)dx$

$=\int \{(x^2-x)-(x^2+5x)\}dx$

$=\int (-6x)dx=-3x^2+C_2$

$\therefore g(x)=-\frac{3}{2}x^2+\frac{C_2}{2}$

조건 (다)에서 $g(0)=0$이므로 $\quad C_2=0$

$\therefore g(x)=-\frac{3}{2}x^2$ ··· ❷

$\therefore f(-1)g(1)=\left(-\frac{1}{3}+1\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)=-1$ ··· ❸

답 -1

채점 기준	비율
❶ $f(x)$를 구할 수 있다.	40 %
❷ $g(x)$를 구할 수 있다.	40 %
❸ $f(-1)g(1)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

06 전략 $F(x)=\int f(x)dx$임을 이용하여 $F(x)$를 적분상수를 포함한 식으로 나타낸다.

풀이 $F(x)=\int f(x)dx=\int (3x^2-6x-9)dx$

$=x^3-3x^2-9x+C$

이때 $F(-1)=16$이므로 $\quad 5+C=16$

$\therefore C=11$

즉 $F(x)=x^3-3x^2-9x+11$이므로 $F(x)=0$에서

$x^3-3x^2-9x+11=0, \quad (x-1)(x^2-2x-11)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=1\pm2\sqrt{3}$

따라서 방정식 $F(x)=0$의 모든 실근의 합은

$1+(1+2\sqrt{3})+(1-2\sqrt{3})=3$ 답 ⑤

참고 $x^2-2x-11=0$의 판별식을 D라 하면 $\quad \frac{D}{4}=1+11=12>0$

따라서 $x^3-3x^2-9x+11=0$은 세 실근을 가지므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 모든 실근의 합 $-\frac{-3}{1}=3$을 구할 수도 있다.

07 전략 $f(x)=\int f'(x)dx$임을 이용하여 $f(x)$를 적분상수를 포함한 식으로 나타낸다.

풀이 $f'(x)=6x^2+4$이므로

$f(x)=\int f'(x)dx=\int (6x^2+4)dx$

$=2x^3+4x+C$

이때 함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(0, 6)$을 지나므로

$f(0)=6 \quad \therefore C=6$

따라서 $f(x)=2x^3+4x+6$이므로

$f(1)=2+4+6=12$ 답 12

08 전략 곡선 $y=f(x)$ 위의 임의의 점 $(x, f(x))$에서의 접선의 기울기는 $f'(x)$이다.

풀이 $f'(x)=2x+4$이므로

$f(x)=\int f'(x)dx=\int (2x+4)dx$

$=x^2+4x+C=(x+2)^2+C-4$

즉 함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 최솟값 $C-4$를 가지므로

$C-4=6 \quad \therefore C=10$

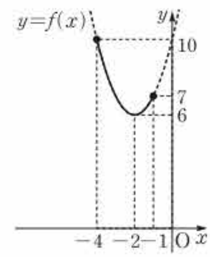
$\therefore f(x)=(x+2)^2+6$

따라서 구간 $[-4, -1]$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $f(x)$는 $x=-4$에서 최댓값

$f(-4)=(-4+2)^2+6$

$=10$

을 갖는다. 답 10



09 전략 다항식 $P(x)$가 $(x-\alpha)(x-\beta)$로 나누어떨어지면 $P(\alpha)=0$, $P(\beta)=0$임을 이용한다.

풀이 $f'(x)=3x^2-4x+a$이므로

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int(3x^2-4x+a)dx$$
$$=x^3-2x^2+ax+C$$

이때 다항식 $f(x)$가 x^2-3x+2, 즉 $(x-1)(x-2)$로 나누어떨어지므로 $f(x)$는 $x-1$, $x-2$로 각각 나누어떨어진다.

인수정리에 의하여

$f(1)=0,\quad f(2)=0$

$1-2+a+C=0,\quad 8-8+2a+C=0$

$\therefore a+C=1,\quad 2a+C=0$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=-1, C=2$

따라서 $f(x)=x^3-2x^2-x+2$이므로

$f(-2)=-8-8+2+2=-12$ 답 -12

라이트 UP

인수정리

다항식 $P(x)$에 대하여

① $P(\alpha)=0$이면 $P(x)$는 일차식 $x-\alpha$로 나누어떨어진다.

② $P(x)$가 일차식 $x-\alpha$로 나누어떨어지면 $P(\alpha)=0$이다.

10 전략 먼저 $f(x)$를 전개하여 나타낸 후 $F(x)$를 구한다.

풀이 $f(x)=\sum_{k=1}^{8}kx^{k-1}=1+2x+3x^2+\cdots+8x^7$에서

$$F(x)=\int f(x)dx=\int(1+2x+3x^2+\cdots+8x^7)dx$$
$$=x+x^2+x^3+\cdots+x^8+C$$

이때 $F(0)=1$이므로

$C=1$

$\therefore F(x)=1+x+x^2+x^3+\cdots+x^8$ ➊

$\therefore F(2)=1+2+2^2+2^3+\cdots+2^8$

$=\dfrac{2^9-1}{2-1}=511$ ➋

답 511

채점 기준	비율
➊ $F(x)$를 구할 수 있다.	60%
➋ $F(2)$의 값을 구할 수 있다.	40%

라이트 UP

첫째항이 a, 공비가 r인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n은

① $r\neq1$일 때, $S_n=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}=\dfrac{a(r^n-1)}{r-1}$

② $r=1$일 때, $S_n=na$

11 전략 구간별로 $f(x)$를 구한 후 $f(x)$가 $x=-1$에서 연속임을 이용한다.

풀이 $f'(x)=\begin{cases}2x-1 & (x>-1)\\ ax+1 & (x<-1)\end{cases}$이므로

$$f(x)=\begin{cases}x^2-x+C_1 & (x>-1)\\ \dfrac{a}{2}x^2+x+C_2 & (x<-1)\end{cases}$$

이때 $f(1)=5$이므로 $1-1+C_1=5 \quad \therefore C_1=5$

또 $f(-2)=0$이므로 $2a-2+C_2=0$

$\therefore 2a+C_2=2$ …… ㉠

$f(x)$가 $x=-1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to-1+}f(x)=\lim_{x\to-1-}f(x)$

$\lim_{x\to-1+}(x^2-x+5)=\lim_{x\to-1-}\left(\dfrac{a}{2}x^2+x+C_2\right)$

$7=\dfrac{a}{2}-1+C_2 \quad \therefore \dfrac{a}{2}+C_2=8$ …… ㉡

㉠$-$㉡을 하면 $\dfrac{3}{2}a=-6 \quad \therefore a=-4$ 답 ①

라이트 UP

함수의 연속

함수 $f(x)$가 실수 a에 대하여 다음 조건을 모두 만족시킬 때, $f(x)$는 $x=a$에서 연속이라 한다.

(i) $x=a$에서 정의되어 있다.

(ii) 극한값 $\lim_{x\to a}f(x)$가 존재한다.

(iii) $\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$

12 전략 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하여 $f'(x)$를 구한 후 미분계수의 정의를 이용한다.

풀이 $\int f(x)dx=xf(x)-x^3-5x^2$의 양변을 x에 대하여 미분하면 $f(x)=f(x)+xf'(x)-3x^2-10x$

$xf'(x)=3x^2+10x=x(3x+10)$

$\therefore f'(x)=3x+10$ ➊

$\therefore \lim_{h\to0}\dfrac{f(h)-f(-h)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\dfrac{f(h)-f(0)+f(0)-f(-h)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\dfrac{f(h)-f(0)}{h}+\lim_{h\to0}\dfrac{f(-h)-f(0)}{-h}$

$=f'(0)+f'(0)=2f'(0)$

$=2\cdot10=20$ ➋

답 20

채점 기준	비율
➊ $f'(x)$를 구할 수 있다.	50%
➋ $\lim_{h\to0}\dfrac{f(h)-f(-h)}{h}$의 값을 구할 수 있다.	50%

13 전략 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하여 $f'(x)$를 구한 후 $f'(x)$를 적분한다.

풀이 $F(x)$는 함수 $f(x)$의 부정적분이므로

$$F'(x)=f(x)$$

$F(x)-(x+1)f(x)=-2x^3-3x^2+3$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f(x)-f(x)-(x+1)f'(x)=-6x^2-6x$$

$$(x+1)f'(x)=6x(x+1)$$

$$\therefore f'(x)=6x$$

$$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int 6x\,dx$$

$$=3x^2+C$$

이때 $f(-1)=0$이므로 $\quad 3+C=0 \quad \therefore C=-3$

따라서 $f(x)=3x^2-3$이므로

$$f(2)=12-3=9$$

답 ③

14 전략 이차함수 $y=g(x)$의 그래프의 꼭짓점의 좌표가 $(p,\ q)$이면 $g(x)=m(x-p)^2+q\ (m\neq 0)$로 놓는다.

풀이 $f'(x)=a(x-2)^2-4\ (a>0)$라 하면 $f'(0)=0$이므로

$$4a-4=0 \qquad \therefore a=1$$

$$\therefore f'(x)=(x-2)^2-4=x^2-4x=x(x-4)$$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=0$ 또는 $x=4$

$y=f'(x)$의 그래프에서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값 11을 갖고, $x=4$에서 극솟값을 갖는다. 이때

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int (x^2-4x)dx$$

$$=\frac{1}{3}x^3-2x^2+C$$

이므로 $f(0)=11$에서 $\quad C=11$

따라서 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2+11$이므로 구하는 극솟값은

$$f(4)=\frac{64}{3}-32+11=\frac{1}{3}$$

답 $\frac{1}{3}$

15 전략 이차함수 $y=g(x)$의 그래프가 두 점 $(\alpha,\ 0)$, $(\beta,\ 0)$을 지나면 $g(x)=m(x-\alpha)(x-\beta)\ (m\neq 0)$로 놓는다.

풀이 $f'(x)=a(x+1)(x-1)\ (a<0)$이라 하면 $f'(0)=3$이므로

$$-a=3 \qquad \therefore a=-3$$

$$\therefore f'(x)=-3(x+1)(x-1)=-3x^2+3 \quad \cdots ❶$$

이때

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int (-3x^2+3)dx$$

$$=-x^3+3x+C$$

이고 $f(0)=0$이므로 $\quad C=0$

$$\therefore f(x)=-x^3+3x \quad \cdots ❷$$

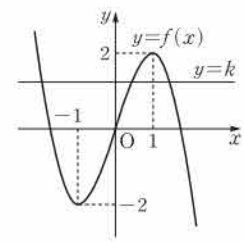
$y=f'(x)$의 그래프에서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극댓값, $x=-1$에서 극솟값을 갖는다.

즉 함수 $f(x)$의

극댓값은 $\quad f(1)=-1+3=2$,

극솟값은 $\quad f(-1)=1-3=-2$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고 방정식 $f(x)=k$가 서로 다른 세 실근을 가지려면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나야 하므로 $\quad -2<k<2 \quad \cdots ❸$



답 $-2<k<2$

채점 기준	비율
❶ $f'(x)$를 구할 수 있다.	30 %
❷ $f(x)$를 구할 수 있다.	30 %
❸ k의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %

16 전략 먼저 $g(x)$와 $x^2+f(x)$의 차수를 구한다.

풀이 이차함수 $f(x)$에 대하여 $f(x)g(x)$가 사차함수이므로 $g(x)$는 이차함수이다. 또 $g(x)=\int \{x^2+f(x)\}dx$이므로 $x^2+f(x)$는 일차함수이어야 한다.

따라서 $f(x)=-x^2+ax+b$ (a, b는 상수, $a\neq 0$)라 하면

$$g(x)=\int \{x^2+f(x)\}dx=\int (ax+b)dx=\frac{a}{2}x^2+bx+C$$

$f(x)g(x)=-2x^4+8x^3$에서

$$(-x^2+ax+b)\left(\frac{a}{2}x^2+bx+C\right)=-2x^4+8x^3$$

$$\therefore -\frac{a}{2}x^4+\left(-b+\frac{a^2}{2}\right)x^3+\left(-C+\frac{3ab}{2}\right)x^2+(aC+b^2)x+bC$$

$$=-2x^4+8x^3$$

위의 등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로

$$-\frac{a}{2}=-2,\ -b+\frac{a^2}{2}=8,\ -C+\frac{3ab}{2}=0,$$

$$aC+b^2=0,\ bC=0$$

$$\therefore a=4,\ b=0,\ C=0$$

따라서 $g(x)=2x^2$이므로 $\quad g(1)=2$

답 ②

17 전략 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 함수의 극한과 $\frac{0}{0}$ 꼴의 함수의 극한을 이용하여 $f(x)$를 구한다.

풀이 조건 (가)에서 $\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{2x+3}=3$이므로 $f'(x)$는 x의 계수가 6인 일차식임을 알 수 있다. 즉

$$f'(x)=6x+k\ (k\text{는 상수}) \quad \cdots\cdots ㉠$$

라 하자.

조건 (나)에서 $x \longrightarrow 3$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\longrightarrow 0$이므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉 $\lim_{x \to 3} f(x)=0$이므로 $\quad f(3)=0$

또 $\lim_{x \to 3} \frac{f(x)}{x-3}=\lim_{x \to 3} \frac{f(x)-f(3)}{x-3}=f'(3)=10$이므로 ㉠에서

$18+k=10 \quad \therefore k=-8$

즉 $f'(x)=6x-8$이므로

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int (6x-8)dx=3x^2-8x+C$$

이때 $f(3)=0$이므로 $\quad 3+C=0 \quad \therefore C=-3$

따라서 $f(x)=3x^2-8x-3$이므로

$f(5)=75-40-3=32$ 답 ④

18 전략 $f'(1)$, $f'(x)$를 각각 미분계수와 도함수의 정의를 이용하여 나타낸 후 $f(x+y)$의 식을 이용하여 정리한다.

풀이 $f(x+y)=f(x)+f(y)-4xy-6$에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)-6 \quad \therefore f(0)=6$

$f'(1)=2$이므로

$$\begin{aligned} f'(1)&=\lim_{h \to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} \\ &=\lim_{h \to 0} \frac{f(1)+f(h)-4h-6-f(1)}{h} \\ &=\lim_{h \to 0} \frac{f(h)-6}{h}-4=2 \end{aligned}$$

즉 $\lim_{h \to 0} \frac{f(h)-6}{h}=6$이므로

$$\begin{aligned} f'(x)&=\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &=\lim_{h \to 0} \frac{f(x)+f(h)-4xh-6-f(x)}{h} \\ &=\lim_{h \to 0} \frac{f(h)-6}{h}-4x \\ &=6-4x \end{aligned}$$

$$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int (6-4x)dx=-2x^2+6x+C$$

이때 $f(0)=6$이므로 $\quad C=6$

따라서 $f(x)=-2x^2+6x+6$이므로

$f(1)=-2+6+6=10$ 답 ②

19 전략 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하고 $f(x)$가 일차함수임을 이용하여 $f(x)$를 구한다.

풀이 $\int xf(x)\,dx=x^2f(x)-2x^3+x^2$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$xf(x)=2xf(x)+x^2f'(x)-6x^2+2x$

$-xf(x)=x^2f'(x)-6x^2+2x$

$\therefore f(x)=-xf'(x)+6x-2$ ······ ㉠ ⋯➊

이때 $f(x)$가 일차함수이므로 $f(x)=ax+b$ (a, b는 상수, $a \neq 0$)라 하면 $\quad f'(x)=a$

㉠에서 $\quad ax+b=-ax+6x-2$

$\therefore ax+b=(-a+6)x-2$

위의 등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로

$a=-a+6$, $b=-2 \quad \therefore a=3, b=-2$

$\therefore f(x)=3x-2$ ⋯➋

따라서 $f(k)=31$에서 $\quad 3k-2=31$

$3k=33 \quad \therefore k=11$ ⋯➌

답 11

채점 기준	비율
➊ 주어진 등식의 양변을 미분하여 정리할 수 있다.	40 %
➋ $f(x)$를 구할 수 있다.	50 %
➌ k의 값을 구할 수 있다.	10 %

20 전략 $f(0)=0$, $f(\alpha)=0$, $f'(\alpha)=0$임을 이용하여 $f(x)=x(x-\alpha)^2$으로 놓는다.

풀이 삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이고, 함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 $x=0$인 점에서 만나고 $x=\alpha$인 점에서 접하므로 $f(x)=x(x-\alpha)^2$이라 하자.

조건 (가)에서 $g'(x)=f(x)+xf'(x)$이므로

$$\begin{aligned} g'(x)&=x(x-\alpha)^2+x\{(x-\alpha)^2+2x(x-\alpha)\} \\ &=2x(x-\alpha)^2+2x^2(x-\alpha) \\ &=2x(x-\alpha)(2x-\alpha) \end{aligned}$$

$g'(x)=0$에서 $\quad x=0$ 또는 $x=\frac{\alpha}{2}$ 또는 $x=\alpha$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{\alpha}{2}$	$\cdots$	α	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

$\alpha>0$이므로 조건 (나)에 의하여 함수 $g(x)$는 $x=\frac{\alpha}{2}$에서 극댓값 81을 갖고, $x=0$, $x=\alpha$에서 극솟값 0을 갖는다.

이때 $g'(x)=\{xf(x)\}'$이므로

$g(x)=xf(x)+C=x^2(x-\alpha)^2+C$

$g(0)=g(\alpha)=0$에서 $\quad C=0$

$\therefore g(x)=x^2(x-\alpha)^2$

$g\left(\frac{\alpha}{2}\right)=81$에서 $\quad \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2\left(\frac{\alpha}{2}-\alpha\right)^2=81$

$\frac{\alpha^4}{16}=81, \quad \alpha^4=16\cdot 81=2^4\cdot 3^4=6^4$

$\therefore \alpha=6 \ (\because \alpha>0)$

따라서 $g(x)=x^2(x-6)^2$이므로

$g\left(\frac{\alpha}{3}\right)=g(2)=2^2(2-6)^2=64$ 답 ⑤

Ⅲ. 다항함수의 적분법

08 정적분

01 정적분

확인 본책 135쪽

1 (1) $\int_0^3 x^3dx=\left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^3=\frac{81}{4}$

(2) $\int_{-1}^2 (2x^2+1)dx=\left[\frac{2}{3}x^3+x\right]_{-1}^2$
$=\left(\frac{16}{3}+2\right)-\left(-\frac{2}{3}-1\right)$
$=9$

(3) $\int_0^1 (6t+3)dt=\left[3t^2+3t\right]_0^1=3+3=6$

(4) $\int_1^2 (3y^2-2)dy=\left[y^3-2y\right]_1^2=(8-4)-(1-2)=5$

답 (1) $\frac{81}{4}$ (2) 9 (3) 6 (4) 5

2 (1) $\int_3^3 (5x^2-9)dx=0$

(2) $\int_1^{-1} (4x+1)dx=\left[2x^2+x\right]_1^{-1}$
$=(2-1)-(2+1)=-2$

답 (1) 0 (2) -2

유제 본책 136쪽

1 (1) $\int_1^2(2x^3-6x^2+1)dx=\left[\frac{1}{2}x^4-2x^3+x\right]_1^2$
$=(8-16+2)-\left(\frac{1}{2}-2+1\right)$
$=-\frac{11}{2}$

(2) $\int_{-1}^3(x+1)(2-3x)dx=\int_{-1}^3(-3x^2-x+2)dx$
$=\left[-x^3-\frac{1}{2}x^2+2x\right]_{-1}^3$
$=\left(-27-\frac{9}{2}+6\right)-\left(1-\frac{1}{2}-2\right)$
$=-24$

(3) $\int_{-1}^{-3}(t+2)(t^2-2t+4)dt=\int_{-1}^{-3}(t^3+8)dt=\left[\frac{1}{4}t^4+8t\right]_{-1}^{-3}$
$=\left(\frac{81}{4}-24\right)-\left(\frac{1}{4}-8\right)=4$

(4) $\int_2^{-2}\frac{9-x^2}{x+3}dx=\int_2^{-2}\frac{(x+3)(-x+3)}{x+3}dx$
$=\int_2^{-2}(-x+3)dx=\left[-\frac{1}{2}x^2+3x\right]_2^{-2}$
$=(-2-6)-(-2+6)=-12$

답 (1) $-\frac{11}{2}$ (2) -24 (3) 4 (4) -12

2 $\int_{-1}^a(2x+a)dx=\left[x^2+ax\right]_{-1}^a=(a^2+a^2)-(1-a)$
$=2a^2+a-1$

즉 $2a^2+a-1=20$이므로 $2a^2+a-21=0$
$(2a+7)(a-3)=0$
$\therefore a=3$ ($\because a>0$)

답 3

3 $\int_0^1 xdx+\frac{1}{2}\int_0^1 x^2dx+\frac{1}{3}\int_0^1 x^3dx+\cdots+\frac{1}{n}\int_0^1 x^ndx$
$=\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1+\frac{1}{3}\left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^1+\cdots+\frac{1}{n}\left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right]_0^1$
$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$
$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$
$=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$

즉 $\frac{n}{n+1}=\frac{15}{16}$이므로 $n=15$

답 15

02 정적분의 계산

확인 본책 137~138쪽

1 (1) $\int_0^1(x^2+3x)dx+\int_0^1(-x^2+x)dx$
$=\int_0^1\{(x^2+3x)+(-x^2+x)\}dx$
$=\int_0^1 4x\,dx=\left[2x^2\right]_0^1$
$=2$

(2) $\int_{-1}^0(x^2+2)dx+\int_0^1(x^2+2)dx=\int_{-1}^1(x^2+2)dx$
$=\left[\frac{1}{3}x^3+2x\right]_{-1}^1$
$=\left(\frac{1}{3}+2\right)-\left(-\frac{1}{3}-2\right)$
$=\frac{14}{3}$

답 (1) 2 (2) $\frac{14}{3}$

2 (1) $\int_{-2}^2(5x^4-3x^2+2)dx=2\int_0^2(5x^4-3x^2+2)dx$
$=2\left[x^5-x^3+2x\right]_0^2$
$=2(32-8+4)=56$

(2) $\int_{-1}^1(x^5+3x^3-2x)dx=0$

답 (1) 56 (2) 0

유제 　　　　　　본책 139~142쪽

1 (1) $\int_{-1}^{1}\frac{x^3}{x-2}dx-\int_{-1}^{1}\frac{8}{t-2}dt$

$=\int_{-1}^{1}\frac{x^3}{x-2}dx-\int_{-1}^{1}\frac{8}{x-2}dx$

$=\int_{-1}^{1}\frac{x^3-8}{x-2}dx=\int_{-1}^{1}\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2}dx$

$=\int_{-1}^{1}(x^2+2x+4)dx=\left[\frac{1}{3}x^3+x^2+4x\right]_{-1}^{1}$

$=\left(\frac{1}{3}+1+4\right)-\left(-\frac{1}{3}+1-4\right)=\frac{26}{3}$

(2) $\int_{2}^{1}(x^3+3x^2-1)dx-\int_{2}^{3}(t^3+3t^2-1)dt$

$=-\int_{1}^{2}(x^3+3x^2-1)dx-\int_{2}^{3}(x^3+3x^2-1)dx$

$=-\int_{1}^{3}(x^3+3x^2-1)dx=-\left[\frac{1}{4}x^4+x^3-x\right]_{1}^{3}$

$=-\left\{\left(\frac{81}{4}+27-3\right)-\left(\frac{1}{4}+1-1\right)\right\}=-44$

답 (1) $\frac{26}{3}$ (2) -44

2 $\int_{-1}^{2}f(x)dx=\int_{-1}^{1}f(x)dx+\int_{1}^{2}f(x)dx$

$=\left\{\int_{-1}^{3}f(x)dx+\int_{3}^{1}f(x)dx\right\}+\int_{1}^{2}f(x)dx$

$=\int_{-1}^{3}f(x)dx-\int_{1}^{3}f(x)dx+\int_{1}^{2}f(x)dx$

$=6-3+2=5$

답 5

3 $\int_{1}^{2}\frac{4x^2}{x+1}dx-\int_{3}^{2}\frac{4x^2}{x+1}dx+\int_{1}^{3}\frac{3x-1}{x+1}dx$

$=\int_{1}^{2}\frac{4x^2}{x+1}dx+\int_{2}^{3}\frac{4x^2}{x+1}dx+\int_{1}^{3}\frac{3x-1}{x+1}dx$

$=\int_{1}^{3}\frac{4x^2}{x+1}dx+\int_{1}^{3}\frac{3x-1}{x+1}dx$

$=\int_{1}^{3}\frac{4x^2+3x-1}{x+1}dx$

$=\int_{1}^{3}\frac{(x+1)(4x-1)}{x+1}dx$

$=\int_{1}^{3}(4x-1)dx=\left[2x^2-x\right]_{1}^{3}$

$=(18-3)-(2-1)=14$

답 14

4 $\int_{-1}^{2}f(x)dx=\int_{-1}^{0}f(x)dx+\int_{0}^{1}f(x)dx+\int_{1}^{2}f(x)dx$

$=\int_{-1}^{0}(x+1)dx+\int_{0}^{1}1\,dx+\int_{1}^{2}(-x^2+2x)dx$

$=\left[\frac{1}{2}x^2+x\right]_{-1}^{0}+\left[x\right]_{0}^{1}+\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_{1}^{2}$

$=-\left(\frac{1}{2}-1\right)+1+\left(-\frac{8}{3}+4\right)-\left(-\frac{1}{3}+1\right)$

$=\frac{13}{6}$

답 $\frac{13}{6}$

5 $a>1$이므로

$\int_{0}^{a}f(x)dx=\int_{0}^{1}f(x)dx+\int_{1}^{a}f(x)dx$

$=\int_{0}^{1}(3x^2-1)dx+\int_{1}^{a}2x\,dx$

$=\left[x^3-x\right]_{0}^{1}+\left[x^2\right]_{1}^{a}$

$=(1-1)+(a^2-1)=a^2-1$

즉 $a^2-1=8$이므로 　$a^2=9$

$\therefore a=3\ (\because a>1)$

답 3

6 $f(x)=\begin{cases}-2x+2 & (x\geq 0)\\ x+2 & (x\leq 0)\end{cases}$이므로

$xf(x)=\begin{cases}-2x^2+2x & (x\geq 0)\\ x^2+2x & (x\leq 0)\end{cases}$

$\therefore \int_{-1}^{1}xf(x)dx=\int_{-1}^{0}xf(x)dx+\int_{0}^{1}xf(x)dx$

$=\int_{-1}^{0}(x^2+2x)dx+\int_{0}^{1}(-2x^2+2x)dx$

$=\left[\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_{-1}^{0}+\left[-\frac{2}{3}x^3+x^2\right]_{0}^{1}$

$=-\left(-\frac{1}{3}+1\right)+\left(-\frac{2}{3}+1\right)=-\frac{1}{3}$

답 $-\frac{1}{3}$

7 (1) $|x|+1=\begin{cases}x+1 & (x\geq 0)\\ -x+1 & (x\leq 0)\end{cases}$이므로

$\int_{-1}^{1}(|x|+1)dx=\int_{-1}^{0}(-x+1)dx+\int_{0}^{1}(x+1)dx$

$=\left[-\frac{1}{2}x^2+x\right]_{-1}^{0}+\left[\frac{1}{2}x^2+x\right]_{0}^{1}$

$=-\left(-\frac{1}{2}-1\right)+\left(\frac{1}{2}+1\right)=3$

(2) $x^2-2x-3=0$, 즉 $(x+1)(x-3)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=3$이므로

$|x^2-2x-3|=\begin{cases}x^2-2x-3 & (x\leq -1 \text{ 또는 } x\geq 3)\\ -x^2+2x+3 & (-1\leq x\leq 3)\end{cases}$

$\therefore \int_{-2}^{2}|x^2-2x-3|dx$

$=\int_{-2}^{-1}(x^2-2x-3)dx+\int_{-1}^{2}(-x^2+2x+3)dx$

$=\left[\frac{1}{3}x^3-x^2-3x\right]_{-2}^{-1}+\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2+3x\right]_{-1}^{2}$

$=\left(-\frac{1}{3}-1+3\right)-\left(-\frac{8}{3}-4+6\right)$

$+\left(-\frac{8}{3}+4+6\right)-\left(\frac{1}{3}+1-3\right)$

$=\frac{34}{3}$

답 (1) 3 (2) $\frac{34}{3}$

8 $2x-3=0$에서 $x=\frac{3}{2}$이므로

$$|2x-3|=\begin{cases} 2x-3 & \left(x\ge\frac{3}{2}\right) \\ -2x+3 & \left(x\le\frac{3}{2}\right)\end{cases}$$

이때 $a>\frac{3}{2}$이므로

$$\begin{aligned}\int_0^a|2x-3|dx&=\int_0^{\frac{3}{2}}(-2x+3)dx+\int_{\frac{3}{2}}^a(2x-3)dx\\&=\Big[-x^2+3x\Big]_0^{\frac{3}{2}}+\Big[x^2-3x\Big]_{\frac{3}{2}}^a\\&=\left(-\frac{9}{4}+\frac{9}{2}\right)+(a^2-3a)-\left(\frac{9}{4}-\frac{9}{2}\right)\\&=a^2-3a+\frac{9}{2}\end{aligned}$$

즉 $a^2-3a+\frac{9}{2}=\frac{5}{2}$이므로

$a^2-3a+2=0,\qquad (a-1)(a-2)=0$

$\therefore a=2\left(\because a>\frac{3}{2}\right)$ 답 2

9 $x-a=0$에서 $x=a$이므로

$$|x-a|=\begin{cases} x-a & (x\ge a) \\ -x+a & (x\le a)\end{cases}$$

이때 $-1\le a\le 2$이므로

$$\begin{aligned}&\int_{-1}^2|x-a|dx\\&=\int_{-1}^a(-x+a)dx+\int_a^2(x-a)dx\\&=\left[-\frac{1}{2}x^2+ax\right]_{-1}^a+\left[\frac{1}{2}x^2-ax\right]_a^2\\&=\left(-\frac{1}{2}a^2+a^2\right)-\left(-\frac{1}{2}-a\right)+(2-2a)-\left(\frac{1}{2}a^2-a^2\right)\\&=a^2-a+\frac{5}{2}=\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{4}\end{aligned}$$

즉 주어진 정적분은 $a=\frac{1}{2}$일 때 최솟값 $\frac{9}{4}$를 갖는다. 답 $\frac{1}{2}$

10 (1) $\int_{-2}^2(x^3-3x^2+x+2)dx$

$$\begin{aligned}&=\int_{-2}^2(x^3+x)dx+\int_{-2}^2(-3x^2+2)dx\\&=2\int_0^2(-3x^2+2)dx=2\Big[-x^3+2x\Big]_0^2\\&=2(-8+4)=-8\end{aligned}$$

(2) $\int_{-1}^4(x^5-4x^3+3x^2+1)dx+\int_4^1(x^5-4x^3+3x^2+1)dx$

$$\begin{aligned}&=\int_{-1}^1(x^5-4x^3+3x^2+1)dx\\&=\int_{-1}^1(x^5-4x^3)dx+\int_{-1}^1(3x^2+1)dx\\&=2\int_0^1(3x^2+1)dx=2\Big[x^3+x\Big]_0^1\\&=2(1+1)=4\end{aligned}$$

답 (1) -8 (2) 4

11 $f(-x)=f(x)$에서 $f(x)$는 우함수이고, $g(-x)=-g(x)$에서 $g(x)$는 기함수이므로

$$\begin{aligned}\int_{-3}^3\{f(x)+g(x)\}dx&=\int_{-3}^3f(x)dx+\int_{-3}^3g(x)dx\\&=2\int_0^3f(x)dx\\&=2\cdot2=4\end{aligned}$$

답 4

12 $$\begin{aligned}\int_{-a}^a(x^3+2x^2-5x)dx&=\int_{-a}^a(x^3-5x)dx+\int_{-a}^a2x^2dx\\&=2\int_0^a2x^2dx=2\left[\frac{2}{3}x^3\right]_0^a\\&=2\cdot\frac{2}{3}a^3=\frac{4}{3}a^3\end{aligned}$$

즉 $\frac{4}{3}a^3=\frac{1}{6}$이므로 $\quad a^3=\frac{1}{8}\quad \therefore a=\frac{1}{2}$

$\therefore 10a=10\cdot\frac{1}{2}=5$ 답 5

03 정적분으로 정의된 함수

확인

본책 144~145쪽

1 (1) $\frac{d}{dx}\int_1^x(3t^2-2)dt=3x^2-2$

(2) $\frac{d}{dx}\int_x^{x+2}(t^2+t-1)dt$

$$\begin{aligned}&=\{(x+2)^2+(x+2)-1\}-(x^2+x-1)\\&=4x+6\end{aligned}$$

답 (1) $3x^2-2$ (2) $4x+6$

2 (1) $f(t)=2t^2+1$이라 하고, $f(t)$의 한 부정적분을 $F(t)$라 하면

$$\begin{aligned}\lim_{x\to2}\frac{1}{x-2}\int_2^x(2t^2+1)dt&=\lim_{x\to2}\frac{\int_2^xf(t)dt}{x-2}\\&=\lim_{x\to2}\frac{F(x)-F(2)}{x-2}\\&=F'(2)=f(2)=9\end{aligned}$$

(2) $f(t)=3t-5$라 하고, $f(t)$의 한 부정적분을 $F(t)$라 하면

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\int_3^{x+3}(3t-5)dt&=\lim_{x\to0}\frac{\int_3^{x+3}f(t)dt}{x}\\&=\lim_{x\to0}\frac{F(x+3)-F(3)}{x}\\&=F'(3)=f(3)=4\end{aligned}$$

답 (1) 9 (2) 4

08 정적분

유제 본책 146~150쪽

1 $\int_0^2 f(t)dt=k$ (k는 상수) …… ㉠

로 놓으면 $f(x)=x^2-2x+k$

$f(t)=t^2-2t+k$를 ㉠의 좌변에 대입하면

$$\int_0^2 (t^2-2t+k)dt=\left[\frac{1}{3}t^3-t^2+kt\right]_0^2=\frac{8}{3}-4+2k$$
$$=2k-\frac{4}{3}$$

즉 $2k-\frac{4}{3}=k$이므로 $k=\frac{4}{3}$

따라서 $f(x)=x^2-2x+\frac{4}{3}$이므로

$$f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{9}-\frac{2}{3}+\frac{4}{3}=\frac{7}{9}$$

답 $\frac{7}{9}$

2 $\int_1^3 f'(t)dt=k$ (k는 상수) …… ㉠

로 놓으면 $f(x)=x^3-4x+k$

$\therefore f'(x)=3x^2-4$

$f'(t)=3t^2-4$를 ㉠의 좌변에 대입하면

$$\int_1^3 (3t^2-4)dt=\left[t^3-4t\right]_1^3$$
$$=(27-12)-(1-4)$$
$$=18$$

즉 $k=18$이므로 $f(x)=x^3-4x+18$

$\therefore f(2)=8-8+18=18$

답 18

3 $\int_0^1 tf(t)dt=k$ (k는 상수) …… ㉠

로 놓으면 $f(x)=4x^2+3x-2k$

$f(t)=4t^2+3t-2k$를 ㉠의 좌변에 대입하면

$$\int_0^1 t(4t^2+3t-2k)dt=\int_0^1 (4t^3+3t^2-2kt)dt$$
$$=\left[t^4+t^3-kt^2\right]_0^1=1+1-k$$
$$=2-k$$

즉 $2-k=k$이므로 $2k=2$ $\therefore k=1$

$\therefore f(x)=4x^2+3x-2$

답 $f(x)=4x^2+3x-2$

4 $\int_{-1}^x f(t)dt=2x^3-ax+1$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=6x^2-a$

$\int_{-1}^x f(t)dt=2x^3-ax+1$의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$0=-2+a+1$ $\therefore a=1$

따라서 $f(x)=6x^2-1$이므로

$f(1)=6-1=5$

답 5

5 $\int_a^x f(t)dt=x^2+3x-4$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=2x+3$

$\int_a^x f(t)dt=x^2+3x-4$의 양변에 $x=a$를 대입하면

$0=a^2+3a-4$, $(a+4)(a-1)=0$

$\therefore a=1$ ($\because a>0$)

$\therefore f(a)=f(1)=5$

답 5

6 $xf(x)=4x^3-x^2+\int_1^x f(t)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)+xf'(x)=12x^2-2x+f(x)$

$xf'(x)=12x^2-2x=x(12x-2)$

$\therefore f'(x)=12x-2$

$$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int(12x-2)dx$$
$$=6x^2-2x+C \quad \cdots\cdots ㉠$$

$xf(x)=4x^3-x^2+\int_1^x f(t)dt$의 양변에 $x=1$을 대입하면

$f(1)=3$

$x=1$을 ㉠에 대입하면

$f(1)=6-2+C=3$ $\therefore C=-1$

따라서 $f(x)=6x^2-2x-1$이므로

$f(2)=24-4-1=19$

답 19

7 $\int_1^x (x-t)f(t)dt=x^3-2x^2+x$에서

$$x\int_1^x f(t)dt-\int_1^x tf(t)dt=x^3-2x^2+x$$

양변을 x에 대하여 미분하면

$$\int_1^x f(t)dt+xf(x)-xf(x)=3x^2-4x+1$$
$$\therefore \int_1^x f(t)dt=3x^2-4x+1$$

양변을 다시 x에 대하여 미분하면

$f(x)=6x-4$ $\therefore f(2)=8$

답 8

8 $\int_{-1}^x (x-t)f(t)dt=x^3+ax^2+bx+2$의 양변에 $x=-1$을 대입하면 $0=-1+a-b+2$

$\therefore a-b=-1$ …… ㉠

$\int_{-1}^x (x-t)f(t)dt=x^3+ax^2+bx+2$에서

$$x\int_{-1}^x f(t)dt-\int_{-1}^x tf(t)dt=x^3+ax^2+bx+2$$

양변을 x에 대하여 미분하면

$$\int_{-1}^x f(t)dt+xf(x)-xf(x)=3x^2+2ax+b$$

$\therefore \int_{-1}^{x} f(t)dt=3x^2+2ax+b$

위의 식의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$0=3-2a+b \quad \therefore 2a-b=3 \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad a=4,\ b=5$

$\therefore a+b=9$ 답 9

9 $\int_{1}^{x}(x-t)f'(t)dt=x^3-3x+2$에서

$x\int_{1}^{x}f'(t)dt-\int_{1}^{x}tf'(t)dt=x^3-3x+2$

양변을 x에 대하여 미분하면

$\int_{1}^{x}f'(t)dt+xf'(x)-xf'(x)=3x^2-3$

$\int_{1}^{x}f'(t)dt=3x^2-3, \quad \Big[f(t)\Big]_{1}^{x}=3x^2-3$

$f(x)-f(1)=3x^2-3$

$\therefore f(x)=3x^2+f(1)-3$

이때 $f(1)=1$이므로 $\quad f(x)=3x^2-2$ 답 $f(x)=3x^2-2$

10 $f(x)=\int_{x}^{x+1}(t^3+t^2)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=\{(x+1)^3+(x+1)^2\}-(x^3+x^2)$

$=3x^2+5x+2=(x+1)(3x+2)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-1$ 또는 $x=-\frac{2}{3}$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	$-\frac{2}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 $f(x)$는 $x=-1$에서 극대이므로 구하는 극댓값은

$f(-1)=\int_{-1}^{0}(t^3+t^2)dt=\left[\frac{1}{4}t^4+\frac{1}{3}t^3\right]_{-1}^{0}=\frac{1}{12}$ 답 $\frac{1}{12}$

11 $f(x)=\int_{0}^{x}(t^2-4)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=x^2-4=(x+2)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=2\ (\because 1\le x\le 3)$

x	1	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	극소	↗	

이때

$f(1)=\int_{0}^{1}(t^2-4)dt=\left[\frac{1}{3}t^3-4t\right]_{0}^{1}=-\frac{11}{3}$,

$f(2)=\int_{0}^{2}(t^2-4)dt=\left[\frac{1}{3}t^3-4t\right]_{0}^{2}=-\frac{16}{3}$,

$f(3)=\int_{0}^{3}(t^2-4)dt=\left[\frac{1}{3}t^3-4t\right]_{0}^{3}=-3$

이므로 최댓값은 -3, 최솟값은 $-\frac{16}{3}$이다.

따라서 $M=-3,\ m=-\frac{16}{3}$이므로

$Mm=16$ 답 16

12 (1) $f(t)=(t^2+1)(t-1)$이라 하고, $f(t)$의 한 부정적분을 $F(t)$라 하면

$\lim_{x\to 2}\frac{1}{x-2}\int_{4}^{x^2}(t^2+1)(t-1)dt$

$=\lim_{x\to 2}\frac{1}{x-2}\int_{4}^{x^2}f(t)dt=\lim_{x\to 2}\frac{1}{x-2}\Big[F(t)\Big]_{4}^{x^2}$

$=\lim_{x\to 2}\frac{F(x^2)-F(4)}{x-2}$

$=\lim_{x\to 2}\frac{F(x^2)-F(4)}{x^2-4}\cdot(x+2)$

$=\lim_{x\to 2}\frac{F(x^2)-F(4)}{x^2-4}\cdot\lim_{x\to 2}(x+2)$

이때 $x^2=a$로 놓으면 $x\to 2$일 때 $a\to 4$이므로

(주어진 식)$=\lim_{a\to 4}\frac{F(a)-F(4)}{a-4}\cdot 4$

$=4F'(4)=4f(4)$

$=4\cdot 51=204$

(2) $f(t)=t^4+2t^2-1$이라 하고, $f(t)$의 한 부정적분을 $F(t)$라 하면

$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_{1-x}^{1+x}(t^4+2t^2-1)dt$

$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_{1-x}^{1+x}f(t)dt=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\Big[F(t)\Big]_{1-x}^{1+x}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{F(1+x)-F(1-x)}{x}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{F(1+x)-F(1)-\{F(1-x)-F(1)\}}{x}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{F(1+x)-F(1)}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{F(1-x)-F(1)}{-x}$

$=F'(1)+F'(1)=2F'(1)$

$=2f(1)=2\cdot 2=4$

답 (1) 204 (2) 4

13 $f(t)$의 한 부정적분을 $F(t)$라 하면

$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{1-2h}^{1+3h}f(t)dt$

$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\Big[F(t)\Big]_{1-2h}^{1+3h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{F(1+3h)-F(1-2h)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{F(1+3h)-F(1)-\{F(1-2h)-F(1)\}}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{F(1+3h)-F(1)}{3h}\cdot 3+\lim_{h\to 0}\frac{F(1-2h)-F(1)}{-2h}\cdot 2$

$=3F'(1)+2F'(1)=5F'(1)$

$=5f(1)=5\cdot 3=15$ 답 15

14 $f(t)$의 한 부정적분을 $F(t)$라 하면

$$\lim_{x\to-1}\frac{1}{x^2-1}\int_{-1}^{x}f(t)dt=\lim_{x\to-1}\frac{1}{x^2-1}\Big[F(t)\Big]_{-1}^{x}$$
$$=\lim_{x\to-1}\frac{F(x)-F(-1)}{x^2-1}$$
$$=\lim_{x\to-1}\frac{F(x)-F(-1)}{x+1}\cdot\frac{1}{x-1}$$
$$=-\frac{1}{2}F'(-1)$$
$$=-\frac{1}{2}f(-1)=\frac{a-3}{2}$$

즉 $\frac{a-3}{2}=-2$이므로

$a-3=-4$ $\therefore a=-1$ 답 -1

중단원 연습 문제

본책 151~154쪽

01 ④	02 ①	03 4600	04 6	05 ④
06 $\frac{11}{6}$	07 ③	08 ④	09 -18	10 ④
11 -11	12 ①	13 -4	14 ①	15 6
16 ③	17 $-\frac{47}{3}$	18 ⑤	19 -6	20 45
21 8	22 ①	23 ②	24 $\frac{5}{3}$	

01 전략 피적분함수를 간단히 하여 정적분의 값을 구한다.

풀이 $\int_0^1(1-x)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)dx$

$=\int_0^1(1-x^2)(x^2+1)(x^4+1)dx$

$=\int_0^1(1-x^4)(x^4+1)dx$

$=\int_0^1(1-x^8)dx=\Big[x-\frac{1}{9}x^9\Big]_0^1$

$=1-\frac{1}{9}=\frac{8}{9}$ 답 ④

02 전략 정적분의 성질을 이용하여 참, 거짓을 판별한다.

풀이 ㄱ. [반례] $f(x)=x$라 하면

$$\int_0^3 f(x)dx=\int_0^3 x\,dx=\Big[\frac{1}{2}x^2\Big]_0^3=\frac{9}{2},$$
$$3\int_0^1 f(x)dx=3\int_0^1 x\,dx=3\Big[\frac{1}{2}x^2\Big]_0^1=\frac{3}{2}$$
$$\therefore \int_0^3 f(x)\,dx\neq 3\int_0^1 f(x)dx$$

ㄷ. [반례] $f(x)=x$라 하면

$$\int_0^1\{f(x)\}^2dx=\int_0^1 x^2dx=\Big[\frac{1}{3}x^3\Big]_0^1=\frac{1}{3}$$
$$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 x\,dx=\Big[\frac{1}{2}x^2\Big]_0^1=\frac{1}{2}\text{이므로}$$
$$\Big\{\int_0^1 f(x)dx\Big\}^2=\Big(\frac{1}{2}\Big)^2=\frac{1}{4}$$
$$\therefore \int_0^1\{f(x)\}^2dx\neq\Big\{\int_0^1 f(x)dx\Big\}^2$$

이상에서 옳은 것은 ㄴ뿐이다. 답 ①

03 전략 $\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx=\int_a^b f(x)dx$임을 이용한다.

풀이 $\int_0^1 f(x)dx+\int_1^2 f(x)dx+\int_2^3 f(x)dx+\cdots+\int_9^{10} f(x)dx$

$=\int_0^{10} f(x)dx=\int_0^{10}(2x^3-8x)dx$

$=\Big[\frac{1}{2}x^4-4x^2\Big]_0^{10}$

$=5000-400=4600$ 답 4600

04 전략 $\int_b^a f(x)dx=-\int_a^b f(x)dx$임을 이용한다.

풀이 $f(x)=\int_1^2(t+x)^2dt-\int_2^1(2t^2-1)dt$

$=\int_1^2(t^2+2xt+x^2)dt+\int_1^2(2t^2-1)dt$

$=\int_1^2(3t^2+2xt+x^2-1)dt$

$=\Big[t^3+xt^2+(x^2-1)t\Big]_1^2$

$=(6+4x+2x^2)-(x+x^2)$

$=x^2+3x+6=\Big(x+\frac{3}{2}\Big)^2+\frac{15}{4}$ ⋯ ❶

따라서 $f(x)$는 $x=-\frac{3}{2}$일 때 최솟값 $\frac{15}{4}$를 가지므로

$a=-\frac{3}{2},\ b=\frac{15}{4}$ ⋯ ❷

$\therefore a+2b=-\frac{3}{2}+\frac{15}{2}=6$ ⋯ ❸

답 6

채점 기준	비율
❶ $f(x)$를 x에 대한 완전제곱식 꼴로 나타낼 수 있다.	60 %
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ $a+2b$의 값을 구할 수 있다.	10 %

05 전략 $-1\le x\le 0$일 때와 $0\le x\le 3$일 때로 나누어 피적분함수를 적분한다.

풀이 $\int_{-1}^3 f(x)dx=\int_{-1}^0 f(x)dx+\int_0^3 f(x)dx$

$=\int_{-1}^0(2x+3)dx+\int_0^3 3(x-1)^2dx$

$=\int_{-1}^0(2x+3)dx+\int_0^3(3x^2-6x+3)dx$

$=\Big[x^2+3x\Big]_{-1}^0+\Big[x^3-3x^2+3x\Big]_0^3$

$=-(-2)+9=11$ 답 ④

06 전략 절댓값 기호 안의 식의 값을 0으로 하는 x의 값을 경계로 구간을 나누어 적분한다.

풀이 $x(x-1)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$이므로

$$|x(x-1)|=\begin{cases} x(x-1) & (x\le 0 \text{ 또는 } x\ge 1) \\ -x(x-1) & (0\le x\le 1)\end{cases}$$

$$\therefore \int_{-1}^{2}|x(x-1)|dx$$
$$=\int_{-1}^{0}x(x-1)dx+\int_{0}^{1}\{-x(x-1)\}dx+\int_{1}^{2}x(x-1)dx$$
$$=\int_{-1}^{0}(x^2-x)dx+\int_{0}^{1}(-x^2+x)dx+\int_{1}^{2}(x^2-x)dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{0}+\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right]_{0}^{1}+\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2\right]_{1}^{2}$$
$$=-\left(-\frac{5}{6}\right)+\frac{1}{6}+\frac{2}{3}-\left(-\frac{1}{6}\right)$$
$$=\frac{11}{6}$$

답 $\frac{11}{6}$

07 전략 정적분의 성질을 이용하여 주어진 식을 간단히 한 후 우함수와 기함수의 정적분을 이용한다.

풀이 $\int_{-2}^{0}(4x^3+3x^2+4)dx+\int_{0}^{2}(4y^3+3y^2+4)dy$

$$=\int_{-2}^{0}(4x^3+3x^2+4)dx+\int_{0}^{2}(4x^3+3x^2+4)dx$$
$$=\int_{-2}^{2}(4x^3+3x^2+4)dx$$
$$=2\int_{0}^{2}(3x^2+4)dx=2\Big[x^3+4x\Big]_{0}^{2}$$
$$=2(8+8)=32$$

답 ③

08 전략 $g(x)$가 우함수이면 $\int_{-a}^{a}g(x)dx=2\int_{0}^{a}g(x)dx$, $g(x)$가 기함수이면 $\int_{-a}^{a}g(x)dx=0$임을 이용한다.

풀이 $\int_{-1}^{1}\{f(x)\}^2dx=\int_{-1}^{1}(x+1)^2dx=\int_{-1}^{1}(x^2+2x+1)dx$

$$=2\int_{0}^{1}(x^2+1)dx=2\left[\frac{1}{3}x^3+x\right]_{0}^{1}$$
$$=2\left(\frac{1}{3}+1\right)=\frac{8}{3}$$

$\int_{-1}^{1}f(x)dx=\int_{-1}^{1}(x+1)dx=2\int_{0}^{1}1\,dx=2\Big[x\Big]_{0}^{1}=2$

$\int_{-1}^{1}\{f(x)\}^2dx=k\left(\int_{-1}^{1}f(x)dx\right)^2$이므로

$\frac{8}{3}=k\cdot 2^2 \qquad \therefore k=\frac{2}{3}$

답 ④

09 전략 두 함수 $x^2f(x)$, $xf(x)$가 우함수인지 기함수인지 판단한다.

풀이 $f(-x)=-f(x)$에서 $f(x)$는 기함수이고

$(-x)^2f(-x)=x^2f(-x)=-x^2f(x)$,

$(-x)f(-x)=xf(x)$

이므로 $x^2f(x)$는 기함수, $xf(x)$는 우함수이다.

$$\therefore \int_{-2}^{2}(x^2-3x+4)f(x)dx$$
$$=\int_{-2}^{2}x^2f(x)dx-3\int_{-2}^{2}xf(x)dx+4\int_{-2}^{2}f(x)dx$$
$$=-3\cdot 2\int_{0}^{2}xf(x)dx$$
$$=-3\cdot 2\cdot 3=-18$$

답 -18

라이트 UP

우함수, 기함수의 곱

① (우함수)×(우함수)=(우함수)
② (우함수)×(기함수)=(기함수)
③ (기함수)×(기함수)=(우함수)

10 전략 $\int_{0}^{1}tf(t)dt=k$로 놓고 k의 값을 구한 후 $f(x)$를 구한다.

풀이 $\int_{0}^{1}tf(t)dt=k$ (k는 상수) ······ ㉠

로 놓으면 $\quad f(x)=2x^2-3x+k$

$f(t)=2t^2-3t+k$를 ㉠의 좌변에 대입하면

$$\int_{0}^{1}t(2t^2-3t+k)dt=\int_{0}^{1}(2t^3-3t^2+kt)dt$$
$$=\left[\frac{1}{2}t^4-t^3+\frac{k}{2}t^2\right]_{0}^{1}$$
$$=\frac{1}{2}-1+\frac{k}{2}=-\frac{1}{2}+\frac{k}{2}$$

즉 $-\frac{1}{2}+\frac{k}{2}=k$이므로 $\quad k=-1$

따라서 $f(x)=2x^2-3x-1$이므로

$$\int_{0}^{1}f(x)dx=\int_{0}^{1}(2x^2-3x-1)dx=\left[\frac{2}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2-x\right]_{0}^{1}$$
$$=\frac{2}{3}-\frac{3}{2}-1=-\frac{11}{6}$$

답 ④

11 전략 $\int_{0}^{1}g(t)dt=a$, $\int_{0}^{2}f(t)dt=b$로 놓고 a, b의 값을 구한 후 $f(x)$, $g(x)$를 구한다.

풀이 $\int_{0}^{1}g(t)dt=a$, $\int_{0}^{2}f(t)dt=b$ (a, b는 상수)로 놓으면

$f(x)=x+3+a$, $g(x)=2x-1+b$ ··· ❶

$g(t)=2t-1+b$를 $\int_{0}^{1}g(t)dt=a$의 좌변에 대입하면

$$\int_{0}^{1}(2t-1+b)dt=\Big[t^2-t+bt\Big]_{0}^{1}=b$$

$\therefore b=a$ ······ ㉠

$f(t)=t+3+a$를 $\int_{0}^{2}f(t)dt=b$의 좌변에 대입하면

$$\int_{0}^{2}(t+3+a)dt=\left[\frac{1}{2}t^2+3t+at\right]_{0}^{2}=8+2a$$

즉 $8+2a=b$이므로 $\quad 2a-b=-8$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad a=-8,\ b=-8$ ··· ❷

따라서 $f(x)=x-5$, $g(x)=2x-9$이므로

$f(1)+g(1)=-4-7=-11$ ⋯➌

답 -11

채점 기준	비율
❶ $f(x)$, $g(x)$를 각각 a, b를 포함한 식으로 나타낼 수 있다.	20 %
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	60 %
❸ $f(1)+g(1)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

12 전략 $\int_0^1(6x-t)f(t)dt$에서 x는 상수로 생각하여 식을 정리한다.

풀이 $f(x)=12x^2+\int_0^1(6x-t)f(t)dt$

$=12x^2+6x\int_0^1 f(t)dt-\int_0^1 tf(t)dt$

$\int_0^1 f(t)dt=a$, $\int_0^1 tf(t)dt=b$ (a, b는 상수)로 놓으면

$f(x)=12x^2+6ax-b$

$f(t)=12t^2+6at-b$를 $\int_0^1 f(t)dt=a$의 좌변에 대입하면

$\int_0^1(12t^2+6at-b)dt=\Big[4t^3+3at^2-bt\Big]_0^1=4+3a-b$

즉 $4+3a-b=a$이므로 $2a-b=-4$ ⋯⋯ ㉠

$f(t)=12t^2+6at-b$를 $\int_0^1 tf(t)dt=b$의 좌변에 대입하면

$\int_0^1 t(12t^2+6at-b)dt=\int_0^1(12t^3+6at^2-bt)dt$

$=\Big[3t^4+2at^3-\frac{b}{2}t^2\Big]_0^1$

$=3+2a-\frac{b}{2}$

즉 $3+2a-\frac{b}{2}=b$이므로 $4a-3b=-6$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-3$, $b=-2$

따라서 $f(x)=12x^2-18x+2$이므로

$f(1)=12-18+2=-4$

답 ①

13 전략 $\int_0^1 f(t)dt=k$로 놓고 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분한다.

풀이 $\int_0^1 f(t)dt=k$ (k는 상수)로 놓으면

$\int_0^x f(t)dt=x^3-5x^2-3kx$

위의 식의 양변에 $x=1$을 대입하면 $\int_0^1 f(t)dt=-4-3k$

이때 $\int_0^1 f(t)dt=k$이므로 $k=-4-3k$ $\therefore k=-1$

$\therefore \int_0^x f(t)dt=x^3-5x^2+3x$

양변을 x에 대하여 미분하면 $f(x)=3x^2-10x+3$

$\therefore f(1)=3-10+3=-4$

답 -4

14 전략 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분한다.

풀이 $\int_1^x f(t)dt=\{f(x)\}^2$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=2f(x)f'(x)$

$\therefore f(x)\{1-2f'(x)\}=0$

이때 함수 $f(x)$는 상수함수가 아닌 다항함수이므로

$1-2f'(x)=0$ $\therefore f'(x)=\frac{1}{2}$

$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int\frac{1}{2}dx=\frac{1}{2}x+C$

$\int_1^x f(t)dt=\{f(x)\}^2$의 양변에 $x=1$을 대입하면

$0=\{f(1)\}^2$ $\therefore f(1)=0$

즉 $\frac{1}{2}+C=0$이므로

$C=-\frac{1}{2}$

따라서 $f(x)=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$이므로

$\int_0^2 f(x)dx=\int_0^2\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\right)dx=\Big[\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x\Big]_0^2$

$=1-1=0$

답 ①

15 전략 주어진 등식의 좌변을 $x\int_0^x f'(t)dt-\int_0^x tf'(t)dt$로 변형한 후 양변을 x에 대하여 미분한다.

풀이 $\int_0^x(x-t)f'(t)dt=x^2$에서

$x\int_0^x f'(t)dt-\int_0^x tf'(t)dt=x^2$

양변을 x에 대하여 미분하면

$\int_0^x f'(t)dt+xf'(x)-xf'(x)=2x$ ⋯➊

$\int_0^x f'(t)dt=2x$, $\Big[f(t)\Big]_0^x=2x$, $f(x)-f(0)=2x$

$\therefore f(x)=2x+f(0)$

이때 함수 $y=f(x)$의 그래프의 y절편이 -12, 즉 $f(0)=-12$이므로 $f(x)=2x-12$ ⋯➋

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 x절편은 $2x-12=0$에서

$x=6$ ⋯➌

답 6

채점 기준	비율
❶ 등식의 양변을 x에 대하여 미분할 수 있다.	40 %
❷ 함수 $f(x)$를 구할 수 있다.	40 %
❸ x절편을 구할 수 있다.	20 %

16 전략 $g'(x)=0$을 만족시키는 x의 값을 구한다.

풀이 $g(x)=\int_x^{x+1}f(t)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$g'(x)=f(x+1)-f(x)$$
$$=\{(x+1)^2-5(x+1)+1\}-(x^2-5x+1)$$
$$=2x-4$$

$g'(x)=0$에서 $x=2$

따라서 $g(x)$는 $x=2$에서 극소이므로 구하는 극솟값은

x	$\cdots$	2	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	↘	극소	↗

$$g(2)=\int_2^3 (t^2-5t+1)dt$$
$$=\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{5}{2}t^2+t\right]_2^3$$
$$=\left(9-\frac{45}{2}+3\right)-\left(\frac{8}{3}-10+2\right)=-\frac{31}{6}$$

답 ③

17 전략 $f(0)=-\frac{22}{3}$임을 이용하여 k의 값을 구한다.

풀이 $f(0)=-\frac{22}{3}$이므로 주어진 등식의 우변에 $x=0$을 대입하면

$$\int_{-2}^0 (t^2+2t+k)dt=\left[\frac{1}{3}t^3+t^2+kt\right]_{-2}^0$$
$$=-\left(-\frac{8}{3}+4-2k\right)=2k-\frac{4}{3}$$

즉 $2k-\frac{4}{3}=-\frac{22}{3}$이므로 $k=-3$ ··· ❶

$f(x)=\int_{-2}^x (t^2+2t-3)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f'(x)=x^2+2x-3=(x+3)(x-1)$$ ··· ❷

$f'(x)=0$에서 $x=1$ ($\because$ $0\le x\le 2$)

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\frac{22}{3}$	↘	극소	↗	

이때

$$f(2)=\int_{-2}^2 (t^2+2t-3)dt=2\int_0^2 (t^2-3)dt$$
$$=2\left[\frac{1}{3}t^3-3t\right]_0^2=2\left(\frac{8}{3}-6\right)=-\frac{20}{3},$$
$$f(1)=\int_{-2}^1 (t^2+2t-3)dt=\left[\frac{1}{3}t^3+t^2-3t\right]_{-2}^1$$
$$=\left(\frac{1}{3}+1-3\right)-\left(-\frac{8}{3}+4+6\right)=-9$$

이므로 $f(x)$의 최댓값은 $-\frac{20}{3}$, 최솟값은 -9이다.

따라서 구하는 합은 $-\frac{20}{3}+(-9)=-\frac{47}{3}$ ··· ❸

답 $-\frac{47}{3}$

채점 기준	비율
❶ k의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ $f'(x)$를 구할 수 있다.	20 %
❸ $f(x)$의 최댓값과 최솟값의 합을 구할 수 있다.	40 %

18 전략 $f(x)=x^3+x^2+x+1$이라 하고 미분계수의 정의를 이용한다.

풀이 $f(x)=x^3+x^2+x+1$이라 하고, $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{1-2h}^1 (x^3+x^2+x+1)dx$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{1-2h}^1 f(x)dx=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\Big[F(x)\Big]_{1-2h}^1$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{F(1)-F(1-2h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{F(1-2h)-F(1)}{-2h}\cdot 2$$
$$=2F'(1)=2f(1)=2\cdot 4=8$$

답 ⑤

19 전략 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 그래프의 함수식은 $y-q=f(x-p)$이다.

풀이 $g(x)$의 그래프는 $f(x)=x^2$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동시킨 것이므로

$$g(x)=(x-a)^2+b$$

이때 $g(0)=0$이므로 $a^2+b=0$ $\therefore b=-a^2$ ······ ㉠

따라서 $g(x)=(x-a)^2-a^2=x^2-2ax$이므로

$$\int_a^{4a} g(x)dx-\int_0^{3a} f(x)dx$$
$$=\int_a^{4a} (x^2-2ax)dx-\int_0^{3a} x^2dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3-ax^2\right]_a^{4a}-\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^{3a}$$
$$=\frac{64}{3}a^3-16a^3-\left(\frac{1}{3}a^3-a^3\right)-9a^3=-3a^3$$

즉 $-3a^3=24$이므로 $a^3=-8$ $\therefore a=-2$

$a=-2$를 ㉠에 대입하면 $b=-4$

$\therefore a+b=-6$

답 -6

20 전략 구간 $[0, 2]$와 구간 $[2, 3]$에서 $f(x)$의 값의 부호를 조사한다.

풀이 조건 (가)에 의하여 닫힌구간 $[0, 2]$에서 $f(x)\le 0$이고, 조건 (나)에 의하여 닫힌구간 $[2, 3]$에서 $f(x)\ge 0$이므로

$$f(2)=0$$

이때 $f(0)=0$이므로 $f(x)=ax(x-2)$ $(a\ne 0)$라 하면

$$\int_0^2 f(x)dx=\int_0^2 ax(x-2)dx$$
$$=\int_0^2 (ax^2-2ax)dx$$
$$=\left[\frac{a}{3}x^3-ax^2\right]_0^2=-\frac{4}{3}a$$

이고, 조건 (가)에 의하여

$$-\left(-\frac{4}{3}a\right)=4 \quad \therefore a=3$$

따라서 $f(x)=3x(x-2)$이므로

$$f(5)=3\cdot 5\cdot 3=45$$

답 45

08 정적분

21 전략 $(f\circ g)(x)$를 구한 후 절댓값 기호 안의 식의 값을 0으로 하는 x의 값을 구한다.

풀이 $f(x)=|x-4|$, $g(x)=3x^2+1$에서

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(3x^2+1)$$
$$=|3x^2+1-4|=|3x^2-3|$$

$3x^2-3=0$, 즉 $3(x+1)(x-1)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$이므로

$$(f\circ g)(x)=\begin{cases}3x^2-3 & (x\le -1 \text{ 또는 } x\ge 1)\\ -3x^2+3 & (-1\le x\le 1)\end{cases} \quad \cdots ❶$$

$$\therefore \int_{-1}^{2}(f\circ g)(x)dx$$
$$=\int_{-1}^{1}(-3x^2+3)dx+\int_{1}^{2}(3x^2-3)dx$$
$$=2\int_{0}^{1}(-3x^2+3)dx+\int_{1}^{2}(3x^2-3)dx$$
$$=2\Big[-x^3+3x\Big]_0^1+\Big[x^3-3x\Big]_1^2$$
$$=2\cdot 2+2-(-2)=8 \quad \cdots ❷$$

답 8

채점 기준	비율
❶ $(f\circ g)(x)$를 구할 수 있다.	50 %
❷ $\int_{-1}^{2}(f\circ g)(x)dx$의 값을 구할 수 있다.	50 %

22 전략 두 함수 $h(x)$, $h'(x)$가 우함수인지 기함수인지 판단한다.

풀이 모든 실수 x에 대하여

$$h(-x)=f(-x)g(-x)=-f(x)g(x)=-h(x)$$

이므로 $h(x)$는 기함수이다. 즉 함수 $h(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이고, $h(0)=0$이다. 이때 $h(x)$는 다항함수이므로

$$h(x)=a_{2n-1}x^{2n-1}+a_{2n-3}x^{2n-3}+\cdots+a_1x$$

(n은 자연수, a_{2n-1}, a_{2n-3}, $\cdots$, a_1은 상수)

로 놓으면

$$h'(x)=(2n-1)a_{2n-1}x^{2n-2}+(2n-3)a_{2n-3}x^{2n-4}+\cdots+a_1$$

따라서 $xh'(x)$는 기함수, $h'(x)$는 우함수이므로

$$\int_{-3}^{3}(x+5)h'(x)dx$$
$$=\int_{-3}^{3}xh'(x)dx+5\int_{-3}^{3}h'(x)dx$$
$$=5\cdot 2\int_{0}^{3}h'(x)dx=10\Big[h(x)\Big]_0^3$$
$$=10\{h(3)-h(0)\}=10h(3) \quad (\because h(0)=0)$$

즉 $10h(3)=10$이므로 $h(3)=1$

답 ①

23 전략 $F(x)=\int_{0}^{x}f(t)dt$의 양변을 x에 대하여 미분한다.

풀이 $F(x)=\int_{0}^{x}f(t)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$F'(x)=f(x)=x^3-3x+a$$

최고차항의 계수가 양수인 사차함수 $F(x)$는 항상 극솟값을 갖는다. 따라서 $F(x)$가 오직 하나의 극값을 가지려면 극댓값을 갖지 않아야 하므로 삼차방정식 $f(x)=0$이 중근 또는 허근을 가져야 한다.

이때 $f(x)=0$이 중근 또는 허근을 가지려면 삼차함수 $f(x)$에 대하여

$$(\text{극댓값})\times(\text{극솟값})\ge 0$$

이어야 한다.

$f(x)=x^3-3x+a$에서

$$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$$

즉 $f(x)$는 $x=-1$, $x=1$에서 극값을 가지므로

$$f(-1)f(1)\ge 0, \qquad (2+a)(-2+a)\ge 0$$
$$\therefore a\le -2 \text{ 또는 } a\ge 2$$

따라서 양수 a의 최솟값은 2이다.

답 ②

24 전략 $tf(t)$의 한 부정적분을 $F(t)$로 놓고 $a_n=\lim\limits_{x\to 1}\frac{F(x)-F(1)}{x^2-1}$임을 이용하여 수열 $\{a_n\}$의 일반항을 구한다.

풀이 $tf(t)$의 한 부정적분을 $F(t)$라 하면

$$a_n=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x^2-1}\int_{1}^{x}tf(t)dt$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x^2-1}\Big[F(t)\Big]_1^x$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{F(x)-F(1)}{x^2-1}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{F(x)-F(1)}{x-1}\cdot\frac{1}{x+1}$$
$$=\frac{1}{2}F'(1)=\frac{1}{2}f(1)=\frac{1+n}{2} \quad \cdots ❶$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{10}\frac{1}{a_ka_{k+1}}$$
$$=\sum_{k=1}^{10}\frac{4}{(k+1)(k+2)}$$
$$=4\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)$$
$$=4\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{11}-\frac{1}{12}\right)\right\}$$
$$=4\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{12}\right)$$
$$=4\cdot\frac{5}{12}=\frac{5}{3} \quad \cdots ❷$$

답 $\frac{5}{3}$

채점 기준	비율
❶ a_n을 n에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	50 %
❷ $\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{a_ka_{k+1}}$의 값을 구할 수 있다.	50 %

Ⅲ. 다항함수의 적분법

09 정적분의 활용

01 곡선과 좌표축 사이의 넓이

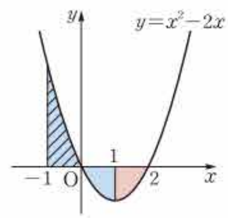
확인

본책 157쪽

1 곡선 $y=x^2-2x$와 x축의 교점의 x좌표는 $x^2-2x=0$에서

$x(x-2)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=2$



(1) $\int_{-1}^{0}(x^2-2x)dx=\left[\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_{-1}^{0}$

$=-\left(-\frac{4}{3}\right)=\frac{4}{3}$

(2) $\int_{1}^{2}(-x^2+2x)dx=\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_{1}^{2}=\frac{4}{3}-\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$

(3) $\int_{-1}^{1}|x^2-2x|dx=\int_{-1}^{0}(x^2-2x)dx+\int_{0}^{1}(-x^2+2x)dx$

$=\left[\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_{-1}^{0}+\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_{0}^{1}$

$=\frac{4}{3}+\frac{2}{3}=2$

답 (1) $\frac{4}{3}$ (2) $\frac{2}{3}$ (3) 2

유제

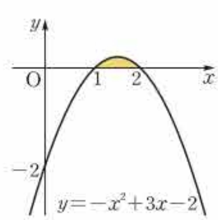
본책 159쪽

1 (1) 곡선 $y=-x^2+3x-2$와 x축의 교점의 x좌표는 $-x^2+3x-2=0$에서

$x^2-3x+2=0$

$(x-1)(x-2)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=2$



따라서 구하는 넓이는

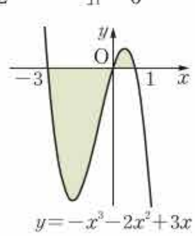
$\int_{1}^{2}(-x^2+3x-2)dx=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2-2x\right]_{1}^{2}=\frac{1}{6}$

(2) 곡선 $y=-x^3-2x^2+3x$와 x축의 교점의 x좌표는 $-x^3-2x^2+3x=0$에서

$x^3+2x^2-3x=0$

$x(x+3)(x-1)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$



따라서 구하는 넓이는

$\int_{-3}^{1}|-x^3-2x^2+3x|dx$

$=\int_{-3}^{0}(x^3+2x^2-3x)dx+\int_{0}^{1}(-x^3-2x^2+3x)dx$

$=\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2\right]_{-3}^{0}+\left[-\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2\right]_{0}^{1}$

$=\frac{45}{4}+\frac{7}{12}=\frac{71}{6}$

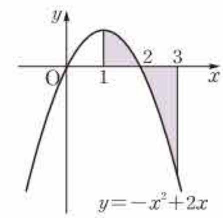
답 (1) $\frac{1}{6}$ (2) $\frac{71}{6}$

2 곡선 $y=-x^2+2x$와 x축의 교점의 x좌표는 $-x^2+2x=0$에서

$x^2-2x=0$

$x(x-2)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=2$



따라서 구하는 넓이는

$\int_{1}^{3}|-x^2+2x|dx$

$=\int_{1}^{2}(-x^2+2x)dx+\int_{2}^{3}(x^2-2x)dx$

$=\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_{1}^{2}+\left[\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_{2}^{3}$

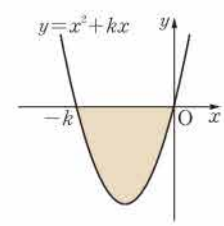
$=\frac{2}{3}+\frac{4}{3}=2$

답 2

3 곡선 $y=x^2+kx$와 x축의 교점의 x좌표는 $x^2+kx=0$에서

$x(x+k)=0$

$\therefore x=-k$ 또는 $x=0$



k는 양수이므로 주어진 곡선과 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$\int_{-k}^{0}|x^2+kx|dx=\int_{-k}^{0}(-x^2-kx)dx$

$=\left[-\frac{1}{3}x^3-\frac{k}{2}x^2\right]_{-k}^{0}=\frac{k^3}{6}$

즉 $\frac{k^3}{6}=\frac{32}{3}$이므로 $k^3=64$ $\therefore k=4$

답 4

02 두 곡선 사이의 넓이

유제

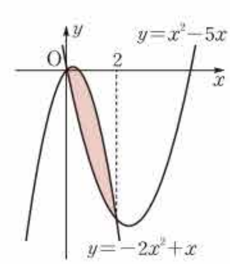
본책 164~168쪽

1 (1) 두 곡선 $y=x^2-5x$, $y=-2x^2+x$의 교점의 x좌표는 $x^2-5x=-2x^2+x$에서

$3x^2-6x=0$, $x^2-2x=0$

$x(x-2)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=2$



따라서 구하는 넓이는

$\int_{0}^{2}\{(-2x^2+x)-(x^2-5x)\}dx$

$=\int_{0}^{2}(-3x^2+6x)dx$

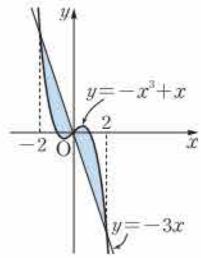
$=\left[-x^3+3x^2\right]_{0}^{2}=4$

(2) 곡선 $y=-x^3+x$와 직선 $y=-3x$의 교점의 x좌표는 $-x^3+x=-3x$에서

$x^3-4x=0$

$x(x+2)(x-2)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$



따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-2}^{0}\{-3x-(-x^3+x)\}dx+\int_{0}^{2}\{(-x^3+x)-(-3x)\}dx$$

$$=\int_{-2}^{0}(x^3-4x)dx+\int_{0}^{2}(-x^3+4x)dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4-2x^2\right]_{-2}^{0}+\left[-\frac{1}{4}x^4+2x^2\right]_{0}^{2}$$

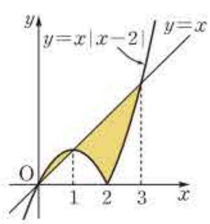
$$=4+4=8$$

답 (1) 4 (2) 8

2 $x-2=0$에서 $x=2$이므로

$$y=x|x-2|=\begin{cases} x^2-2x & (x\geq 2) \\ -x^2+2x & (x\leq 2)\end{cases}$$

$y=x|x-2|$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표는



(i) $x\geq 2$일 때,

$x^2-2x=x$에서

$x^2-3x=0$

$x(x-3)=0$

$\therefore x=3$ ($\because x\geq 2$)

(ii) $x\leq 2$일 때,

$-x^2+2x=x$에서

$x^2-x=0,\quad x(x-1)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=1$

(i), (ii)에서 구하는 넓이는

$$\int_{0}^{1}\{(-x^2+2x)-x\}dx+\int_{1}^{2}\{x-(-x^2+2x)\}dx$$

$$+\int_{2}^{3}\{x-(x^2-2x)\}dx$$

$$=\int_{0}^{1}(-x^2+x)dx+\int_{1}^{2}(x^2-x)dx+\int_{2}^{3}(-x^2+3x)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right]_{0}^{1}+\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2\right]_{1}^{2}+\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2\right]_{2}^{3}$$

$$=\frac{1}{6}+\frac{5}{6}+\frac{7}{6}=\frac{13}{6}$$

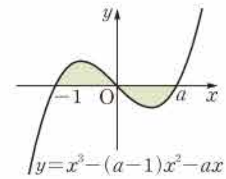
답 $\frac{13}{6}$

3 곡선 $y=x^3-(a-1)x^2-ax$와 x축의 교점의 x좌표는 $x^3-(a-1)x^2-ax=0$에서

$x(x+1)(x-a)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=a$

오른쪽 그림에서 색칠한 두 부분의 넓이가 서로 같으므로



$$\int_{-1}^{a}\{x^3-(a-1)x^2-ax\}dx=0$$

$$\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{a-1}{3}x^3-\frac{a}{2}x^2\right]_{-1}^{a}=0$$

$$-\frac{1}{12}a^4-\frac{1}{6}a^3+\frac{1}{6}a+\frac{1}{12}=0$$

$$a^4+2a^3-2a-1=0,\qquad (a+1)^3(a-1)=0$$

$\therefore a=1$ ($\because a>0$)

답 1

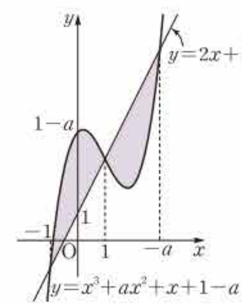
4 곡선 $y=x^3+ax^2+x+1-a$와 직선 $y=2x+1$의 교점의 x좌표는 $x^3+ax^2+x+1-a=2x+1$에서

$x^3+ax^2-x-a=0$

$(x+1)(x-1)(x+a)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=1$ 또는 $x=-a$

오른쪽 그림에서 색칠한 두 부분의 넓이가 서로 같으므로



$$\int_{-1}^{-a}\{(x^3+ax^2+x+1-a)$$
$$-(2x+1)\}dx=0$$

$$\int_{-1}^{-a}(x^3+ax^2-x-a)dx=0$$

$$\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{a}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-ax\right]_{-1}^{-a}=0$$

$$-\frac{1}{12}a^4+\frac{1}{2}a^2-\frac{2}{3}a+\frac{1}{4}=0$$

$$a^4-6a^2+8a-3=0$$

$$(a+3)(a-1)^3=0$$

$\therefore a=-3$ ($\because a<-1$)

답 -3

5 색칠한 두 부분의 넓이가 서로 같으므로

$$\int_{0}^{3}\{-x^2(x-3)-ax(x-3)\}dx=0$$

$$\int_{0}^{3}\{-x^3+(3-a)x^2+3ax\}dx=0$$

$$\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{3-a}{3}x^3+\frac{3}{2}ax^2\right]_{0}^{3}=0$$

$$\frac{9}{2}a+\frac{27}{4}=0\qquad \therefore a=-\frac{3}{2}$$

답 $-\frac{3}{2}$

6 $y=-x^3+2x$에서 $\quad y'=-3x^2+2$

곡선 위의 점 $(-1,\ -1)$에서의 접선의 기울기는

$-3\cdot(-1)^2+2=-1$

이므로 접선의 방정식은

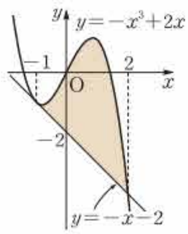
$y+1=-(x+1)\qquad \therefore y=-x-2$

곡선 $y=-x^3+2x$와 직선 $y=-x-2$의 교점의 x좌표는 $-x^3+2x=-x-2$에서

$x^3-3x-2=0$

$(x+1)^2(x-2)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=2$



따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-1}^{2}\{(-x^3+2x)-(-x-2)\}dx$$
$$=\int_{-1}^{2}(-x^3+3x+2)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{3}{2}x^2+2x\right]_{-1}^{2}=\frac{27}{4}$$

답 $\frac{27}{4}$

7 $y=-x^2+5x-4$에서 $\quad y'=-2x+5$

접점의 좌표를 $(a, -a^2+5a-4)$ $(a\geq 0)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $-2a+5$이므로 접선의 방정식은

$y-(-a^2+5a-4)=(-2a+5)(x-a)$

$\therefore y=(-2a+5)x+a^2-4$ ...... ㉠

직선 ㉠이 원점을 지나므로 $\quad 0=a^2-4$

$(a+2)(a-2)=0 \quad \therefore a=2$ ($\because a\geq 0$)

$a=2$를 ㉠에 대입하면 접선의 방정식은

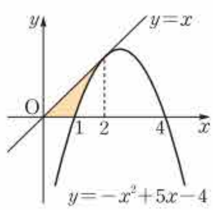
$y=x$

한편 곡선 $y=-x^2+5x-4$와 x축의 교점의 x좌표는 $-x^2+5x-4=0$에서

$x^2-5x+4=0$

$(x-1)(x-4)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=4$



따라서 구하는 넓이는

$$\int_{0}^{2}x\,dx-\int_{1}^{2}(-x^2+5x-4)dx$$
$$=\left[\frac{1}{2}x^2\right]_{0}^{2}-\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{5}{2}x^2-4x\right]_{1}^{2}$$
$$=2-\frac{7}{6}=\frac{5}{6}$$

답 $\frac{5}{6}$

8 $y=x^2+2x$에서 $\quad y'=2x+2$

접점의 좌표를 (a, a^2+2a)라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $2a+2$이므로 접선의 방정식은

$y-(a^2+2a)=(2a+2)(x-a)$

$\therefore y=(2a+2)x-a^2$ ...... ㉠

직선 ㉠이 점 $(-2, -4)$를 지나므로

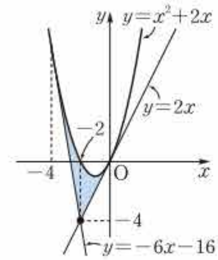
$-4=-2(2a+2)-a^2, \quad a^2+4a=0$

$a(a+4)=0 \quad \therefore a=-4$ 또는 $a=0$

이를 ㉠에 대입하면 접선의 방정식은

$y=-6x-16$, $y=2x$

따라서 구하는 넓이는



$$\int_{-4}^{-2}\{(x^2+2x)-(-6x-16)\}dx$$
$$+\int_{-2}^{0}\{(x^2+2x)-2x\}dx$$
$$=\int_{-4}^{-2}(x^2+8x+16)dx+\int_{-2}^{0}x^2\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3+4x^2+16x\right]_{-4}^{-2}+\left[\frac{1}{3}x^3\right]_{-2}^{0}$$
$$=\frac{8}{3}+\frac{8}{3}=\frac{16}{3}$$

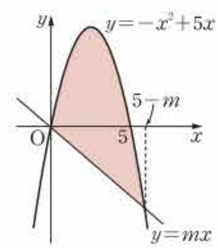
답 $\frac{16}{3}$

9 곡선 $y=-x^2+5x$와 직선 $y=mx$의 교점의 x좌표는 $-x^2+5x=mx$에서

$x^2+(m-5)x=0, \quad x(x+m-5)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=5-m$

따라서 오른쪽 그림의 색칠한 부분의 넓이는



$$\int_{0}^{5-m}\{(-x^2+5x)-mx\}dx$$
$$=\int_{0}^{5-m}\{-x^2+(5-m)x\}dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{5-m}{2}x^2\right]_{0}^{5-m}$$
$$=\frac{1}{6}(5-m)^3$$

한편 곡선 $y=-x^2+5x$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_{0}^{5}(-x^2+5x)dx=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{5}{2}x^2\right]_{0}^{5}=\frac{125}{6}$$

이므로 $\quad \frac{1}{6}(5-m)^3=2\cdot\frac{125}{6}$

$\therefore (5-m)^3=250$

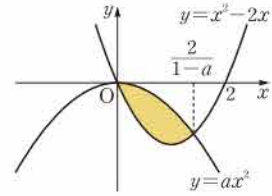
답 250

10 두 곡선 $y=x^2-2x$, $y=ax^2$의 교점의 x좌표는 $x^2-2x=ax^2$에서

$(1-a)x^2-2x=0, \quad x\{(1-a)x-2\}=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=\frac{2}{1-a}$

따라서 오른쪽 그림의 색칠한 부분의 넓이는



$$\int_{0}^{\frac{2}{1-a}}\{ax^2-(x^2-2x)\}dx$$
$$=\int_{0}^{\frac{2}{1-a}}\{(a-1)x^2+2x\}dx$$
$$=\left[\frac{a-1}{3}x^3+x^2\right]_{0}^{\frac{2}{1-a}}$$
$$=\frac{4}{3(1-a)^2}$$

한편 곡선 $y=x^2-2x$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_0^2(-x^2+2x)dx=\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_0^2=\frac{4}{3}$$

이므로 $\quad \dfrac{4}{3(1-a)^2}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{4}{3}$

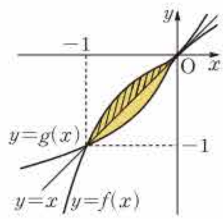
$(1-a)^2=2 \qquad \therefore a=1-\sqrt{2}\ (\because a<0)$ 답 $1-\sqrt{2}$

11 $f(x)=x^3+x^2+x$에서

$$f'(x)=3x^2+2x+1=3\left(x+\frac{1}{3}\right)^2+\frac{2}{3}>0$$

이므로 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가한다.

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 교점의 x좌표는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표와 같다.



$x^3+x^2+x=x$에서 $\quad x^2(x+1)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=0$

이때 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배이므로 구하는 넓이는

$$2\int_{-1}^0\{(x^3+x^2+x)-x\}dx$$

$$=2\int_{-1}^0(x^3+x^2)dx$$

$$=2\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^0=2\cdot\frac{1}{12}=\frac{1}{6}$$ 답 $\frac{1}{6}$

12 $f(x)=\dfrac{x^3+x}{2}$에서 $f'(x)=\dfrac{3}{2}x^2+\dfrac{1}{2}>0$이므로 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가한다.

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 교점의 x좌표는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표와 같다.

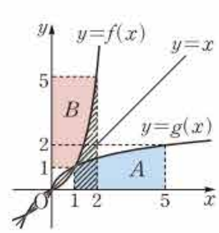
$\dfrac{x^3+x}{2}=x$에서 $\quad x^3-x=0, \quad x(x+1)(x-1)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

이때 오른쪽 그림에서

$(A$의 넓이$)=(B$의 넓이$)$

이므로



$$\int_1^5 g(x)dx$$

$=(B$의 넓이$)$

$$=2\cdot5-1\cdot1-\int_1^2\frac{x^3+x}{2}dx$$

$$=9-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2\right]_1^2$$

$$=9-\frac{21}{8}=\frac{51}{8}$$ 답 $\frac{51}{8}$

03 속도와 거리

확인 본책 170쪽

1 (1) $t=0$에서의 점 P의 위치가 0이므로 $t=1$에서의 점 P의 위치는

$$0+\int_0^1(-t+2)dt=\left[-\frac{1}{2}t^2+2t\right]_0^1=\frac{3}{2}$$

(2) $\displaystyle\int_1^3(-t+2)dt=\left[-\frac{1}{2}t^2+2t\right]_1^3=0$

(3) $1\le t\le2$에서 $v(t)\ge0$, $2\le t\le3$에서 $v(t)\le0$이므로 $t=1$에서 $t=3$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_1^3|-t+2|dt=\int_1^2(-t+2)dt+\int_2^3(t-2)dt$$

$$=\left[-\frac{1}{2}t^2+2t\right]_1^2+\left[\frac{1}{2}t^2-2t\right]_2^3$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$

답 (1) $\frac{3}{2}$ (2) 0 (3) 1

유제 본책 171~173쪽

1 (1) 점 P의 운동 방향이 바뀔 때 $v(t)=0$이므로

$6t-t^2=0, \quad t(6-t)=0 \quad \therefore t=6\ (\because t>0)$

따라서 $t=6$에서의 점 P의 위치는

$$0+\int_0^6(6t-t^2)dt=\left[3t^2-\frac{1}{3}t^3\right]_0^6=36$$

(2) 점 P가 원점으로 되돌아오는 데 걸리는 시간을 a라 하면 $t=0$에서 $t=a$까지 점 P의 위치의 변화량이 0이므로

$$\int_0^a(6t-t^2)dt=0, \quad \left[3t^2-\frac{1}{3}t^3\right]_0^a=0$$

$$3a^2-\frac{1}{3}a^3=0, \quad \frac{1}{3}a^2(9-a)=0 \quad \therefore a=9\ (\because a>0)$$

따라서 점 P가 원점으로 되돌아오는 데 걸리는 시간은 9이다.

(3) $0\le t\le6$에서 $v(t)\ge0$, $6\le t\le9$에서 $v(t)\le0$이므로 $t=0$에서 $t=9$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^9|6t-t^2|dt=\int_0^6(6t-t^2)dt+\int_6^9(-6t+t^2)dt$$

$$=\left[3t^2-\frac{1}{3}t^3\right]_0^6+\left[-3t^2+\frac{1}{3}t^3\right]_6^9$$

$$=36+36=72$$

답 (1) 36 (2) 9 (3) 72

2 열차가 정지할 때 $v(t)=0$이므로 $\quad 28-4t=0 \quad \therefore t=7$

따라서 $t=0$에서 $t=7$까지 열차가 달린 거리는

$$\int_0^7(28-4t)dt=\left[28t-2t^2\right]_0^7=98\,(\mathrm{m})$$ 답 98 m

3 (1) $t=2$에서의 물체의 지면으로부터의 높이는

$$35+\int_0^2(30-10t)dt=35+\left[30t-5t^2\right]_0^2$$
$$=35+40=75\ (\mathrm{m})$$

(2) 물체가 최고 지점에 도달할 때 $v(t)=0$이므로

$30-10t=0 \qquad \therefore t=3$

따라서 $t=3$에서의 물체의 지면으로부터의 높이는

$$35+\int_0^3(30-10t)dt=35+\left[30t-5t^2\right]_0^3$$
$$=35+45=80\ (\mathrm{m})$$

(3) $0\le t\le 3$에서 $v(t)\ge 0$, $3\le t\le 5$에서 $v(t)\le 0$이므로 5초 동안 물체가 움직인 거리는

$$\int_0^5|30-10t|dt=\int_0^3(30-10t)dt+\int_3^5(-30+10t)dt$$
$$=\left[30t-5t^2\right]_0^3+\left[-30t+5t^2\right]_3^5$$
$$=45+20=65\ (\mathrm{m})$$

답 (1) 75 m (2) 80 m (3) 65 m

4 물체가 지면에 떨어지는 데 걸리는 시간을 a초라 하면 $t=a$에서의 이 물체의 위치는 0이므로

$$45+\int_0^a(40-10t)dt=0$$
$$45+\left[40t-5t^2\right]_0^a=0, \qquad 45+40a-5a^2=0$$
$$a^2-8a-9=0, \qquad (a+1)(a-9)=0$$
$$\therefore a=9\ (\because a>0)$$

$0\le t\le 4$에서 $v(t)\ge 0$, $4\le t\le 9$에서 $v(t)\le 0$이므로 $t=0$에서 $t=9$까지 이 물체가 움직인 거리는

$$\int_0^9|40-10t|dt=\int_0^4(40-10t)dt+\int_4^9(-40+10t)dt$$
$$=\left[40t-5t^2\right]_0^4+\left[-40t+5t^2\right]_4^9$$
$$=80+125=205\ (\mathrm{m})$$

답 205 m

다른 풀이 최고 지점에 도달할 때 $v(t)=0$이므로

$40-10t=0 \qquad \therefore t=4$

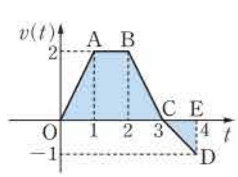
$t=0$에서 $t=4$까지 물체가 움직인 거리는

$$\int_0^4(40-10t)dt=\left[40t-5t^2\right]_0^4=80\ (\mathrm{m})$$

따라서 물체가 지면에 떨어질 때까지 움직인 거리는

$80+80+45=205\ (\mathrm{m})$

5 (1) $0+\int_0^4|v(t)|dt$



$$=\int_0^3 v(t)dt+\int_3^4\{-v(t)\}dt$$
$$=\square\mathrm{AOCB}+\triangle\mathrm{CDE}$$
$$=\frac{1}{2}\cdot(1+3)\cdot 2+\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1=\frac{9}{2}$$

(2) $t=3$에서 처음으로 운동 방향을 바꾸므로

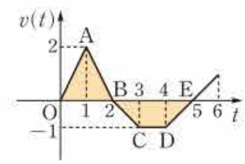
$$\int_0^3 v(t)dt=\square\mathrm{AOCB}=\frac{1}{2}\cdot(1+3)\cdot 2=4$$

답 (1) $\frac{9}{2}$ (2) 4

6 $t=a$일 때 원점을 다시 지난다고 하면

$$\int_0^a v(t)dt=0$$

오른쪽 그림에서



$$\int_0^5 v(t)dt$$
$$=\triangle\mathrm{AOB}-\square\mathrm{BCDE}$$
$$=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2-\frac{1}{2}\cdot(3+1)\cdot 1=0$$

이므로 점 P는 $t=5$일 때 다시 원점을 지난다.

답 5

중단원 연습 문제

본책 174~176쪽

01 $10-A+B$	02 6	03 ⑤	04 ③	
05 ③	06 $-\frac{4}{3}$	07 ④	08 ③	09 ③
10 6	11 8	12 ②	13 $\frac{7}{2}$	14 45 m
15 ⑤	16 ④	17 216	18 32	19 ②

01 전략 $-2\le x\le -1$일 때 $f(x)\ge 0$, $-1\le x\le 3$일 때 $f(x)\le 0$임을 이용한다.

풀이 $\int_{-2}^3\{4x-f(x)\}dx$

$$=\int_{-2}^3 4x\,dx-\int_{-2}^3 f(x)dx$$
$$=\left[2x^2\right]_{-2}^3-\left\{\int_{-2}^{-1}f(x)dx+\int_{-1}^3 f(x)dx\right\}$$
$$=10-\{A+(-B)\}=10-A+B$$

답 $10-A+B$

02 전략 절댓값 기호 안의 식의 값을 0으로 하는 x의 값을 경계로 구간을 나눈다.

풀이 $6x^2+6x=0$에서 $\qquad x^2+x=0, \qquad x(x+1)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=0$

$\therefore y=|6x^2+6x|$

$$=\begin{cases} 6x^2+6x & (x\le -1 \text{ 또는 } x\ge 0) \\ -6x^2-6x & (-1\le x\le 0) \end{cases}$$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-1}^0(-6x^2-6x)dx+\int_0^1(6x^2+6x)dx$$
$$=\left[-2x^3-3x^2\right]_{-1}^0+\left[2x^3+3x^2\right]_0^1=1+5=6$$

답 6

03 전략 $\int f'(x)dx=f(x)$임을 이용하여 함수 $y=f(x)$를 구한다.

풀이 조건 (가)에 의하여

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int(3x^2-4x-4)dx$$
$$=x^3-2x^2-4x+C$$

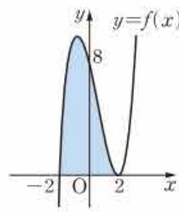
조건 (나)에 의하여 $f(2)=0$이므로

$$-8+C=0 \qquad \therefore C=8$$

따라서 $f(x)=x^3-2x^2-4x+8$이므로 곡선 $y=f(x)$와 x축의 교점의 x좌표는 $x^3-2x^2-4x+8=0$에서

$$(x+2)(x-2)^2=0 \qquad \therefore x=-2 \text{ 또는 } x=2$$

따라서 구하는 넓이는



$$\int_{-2}^{2}(x^3-2x^2-4x+8)dx$$
$$=2\int_0^2(-2x^2+8)dx$$
$$=2\left[-\frac{2}{3}x^3+8x\right]_0^2=2\cdot\frac{32}{3}=\frac{64}{3}$$

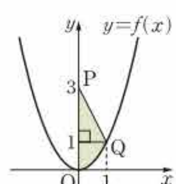
답 ⑤

04 전략 두 점 P, Q의 좌표를 구한 후 구하는 넓이를 두 도형으로 나누어 생각한다.

풀이 $n=1$일 때, $\quad f(x)=x^2$

또 두 점 P, Q의 좌표는 각각 $\quad (0,\ 3),\ (1,\ 1)$

오른쪽 그림에서 구하는 넓이는 빗변이 선분 PQ이고 직각을 낀 두 변의 길이가 각각 2, 1인 직각삼각형의 넓이와 곡선 $y=x^2$과 y축 및 직선 $y=1$로 둘러싸인 부분의 넓이의 합이므로



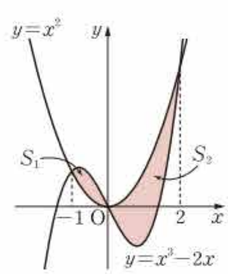
$$\frac{1}{2}\cdot2\cdot1+\int_0^1(1-x^2)dx$$
$$=1+\left[x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^1=1+\frac{2}{3}=\frac{5}{3}$$

답 ③

05 전략 두 곡선의 교점의 x좌표를 구한 후 두 곡선의 위치 관계를 파악하여 S_1과 S_2를 구한다.

풀이 두 곡선 $y=x^3-2x$, $y=x^2$의 교점의 x좌표는 $x^3-2x=x^2$에서

$$x^3-x^2-2x=0$$
$$x(x+1)(x-2)=0$$
$$\therefore x=-1 \text{ 또는 } x=0$$
$$\text{또는 } x=2$$



이때 $S_1<S_2$이므로

$$S_1=\int_{-1}^{0}\{(x^3-2x)-x^2\}dx=\int_{-1}^{0}(x^3-x^2-2x)dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_{-1}^{0}=\frac{5}{12}$$

$$S_2=\int_0^2\{x^2-(x^3-2x)\}dx=\int_0^2(-x^3+x^2+2x)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_0^2=\frac{8}{3}$$
$$\therefore \frac{S_2}{S_1}=\frac{8}{3}\cdot\frac{12}{5}=\frac{32}{5}$$

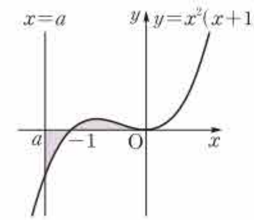
답 ③

06 전략 $\int_a^0 x^2(x+1)dx=0$임을 이용한다.

풀이 곡선 $y=x^2(x+1)$과 x축의 교점의 x좌표는

$x^2(x+1)=0$에서 $\quad x=-1$ 또는 $x=0$ ··· ❶

오른쪽 그림에서 색칠한 두 부분의 넓이가 서로 같으므로



$$\int_a^0 x^2(x+1)dx=0 \qquad \cdots ❷$$
$$\int_a^0(x^3+x^2)dx=0$$
$$\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3\right]_a^0=0$$
$$-\frac{1}{4}a^4-\frac{1}{3}a^3=0, \qquad 3a^4+4a^3=0, \qquad a^3(3a+4)=0$$
$$\therefore a=-\frac{4}{3}\ (\because a<-1) \qquad \cdots ❸$$

답 $-\frac{4}{3}$

채점 기준	비율
❶ 주어진 곡선과 x축의 교점의 x좌표를 구할 수 있다.	30 %
❷ $\int_a^0 x^2(x+1)dx=0$임을 알 수 있다.	30 %
❸ a의 값을 구할 수 있다.	40 %

07 전략 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a,\ f(a))$에서의 접선의 방정식은 $y-f(a)=f'(a)(x-a)$임을 이용한다.

풀이 $y=2x^3-x$에서 $\quad y'=6x^2-1$

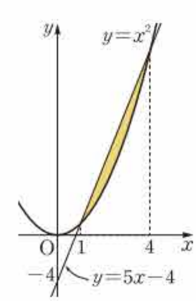
점 $(1,\ 1)$에서의 접선의 기울기는 $6-1=5$이므로 접선의 방정식은

$$y-1=5(x-1) \qquad \therefore y=5x-4$$

곡선 $y=x^2$과 직선 $y=5x-4$의 교점의 x좌표는 $x^2=5x-4$에서

$$x^2-5x+4=0$$
$$(x-1)(x-4)=0$$
$$\therefore x=1 \text{ 또는 } x=4$$

따라서 구하는 도형의 넓이는



$$\int_1^4\{(5x-4)-x^2\}dx$$
$$=\int_1^4(-x^2+5x-4)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{5}{2}x^2-4x\right]_1^4=\frac{9}{2}$$

답 ④

08 전략 곡선과 직선의 교점의 x좌표를 구한 후 위치 관계를 파악한다.

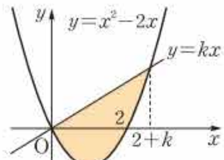
풀이 곡선 $y=x^2-2x$와 직선 $y=kx$의 교점의 x좌표는

$x^2-2x=kx$에서

$$x^2-(2+k)x=0, \qquad x(x-2-k)=0$$

$$\therefore\ x=0 \text{ 또는 } x=2+k$$

따라서 오른쪽 그림의 색칠한 부분의 넓이는



$$\int_0^{2+k}\{kx-(x^2-2x)\}dx$$

$$=\int_0^{2+k}\{-x^2+(2+k)x\}dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{2+k}{2}x^2\right]_0^{2+k}$$

$$=\frac{1}{6}(2+k)^3$$

한편 곡선 $y=x^2-2x$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_0^2(-x^2+2x)dx=\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_0^2=\frac{4}{3}$$

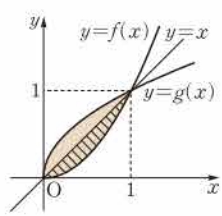
이므로 $\quad \frac{1}{6}(2+k)^3=2\cdot\frac{4}{3}$

$$\therefore\ (2+k)^3=16$$

답 ③

09 전략 함수와 그 역함수의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭임을 이용한다.

풀이 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 교점의 x좌표는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표와 같다.



$x^3=x$에서

$$x^3-x=0, \qquad x(x+1)(x-1)=0$$

$$\therefore\ x=0 \text{ 또는 } x=1\ (\because\ x\ge 0)$$

이때 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배이므로 구하는 넓이는

$$2\int_0^1(x-x^3)dx=2\left[\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{4}x^4\right]_0^1=2\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

답 ③

10 전략 연속함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(x+k)=f(x)$이면 $\int_a^b f(x)dx=\int_{a+k}^{b+k}f(x)dx$임을 이용한다.

풀이 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(x+2)=f(x)$이므로

$$\int_{-1}^1 f(x)dx=\int_1^3 f(x)dx=\int_3^5 f(x)dx=2$$

$$\therefore\ \int_{-1}^5 f(x)dx=\int_{-1}^1 f(x)dx+\int_1^3 f(x)dx+\int_3^5 f(x)dx$$

$$=3\int_1^3 f(x)dx$$

$$=3\cdot 2=6$$

답 6

11 전략 출발점으로 되돌아오면 위치의 변화량이 0임을 이용한다.

풀이 점 P가 원점으로 되돌아오는 데 걸리는 시간을 a라 하면 $t=0$에서 $t=a$까지 점 P의 위치의 변화량이 0이므로

$$\int_0^a(4-2t)dt=0, \qquad \left[4t-t^2\right]_0^a=0$$

$$4a-a^2=0, \qquad a(4-a)=0$$

$$\therefore\ a=4\ (\because\ a>0) \qquad \cdots ❶$$

따라서 $t=0$에서 $t=4$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^4|4-2t|dt=\int_0^2(4-2t)dt+\int_2^4(-4+2t)dt$$

$$=\left[4t-t^2\right]_0^2+\left[-4t+t^2\right]_2^4$$

$$=4+4=8 \qquad \cdots ❷$$

답 8

채점 기준	비율
❶ 점 P가 원점으로 되돌아오는 데 걸리는 시간을 구할 수 있다.	50 %
❷ 점 P가 원점으로 되돌아올 때까지 움직인 거리를 구할 수 있다.	50 %

12 전략 물이 멈출 때 속도가 0임을 이용한다.

풀이 물이 멈출 때 $v(t)=0$이므로

$$4t-t^2=0, \qquad t(4-t)=0 \qquad \therefore\ t=4\ (\because\ t>0)$$

따라서 $t=0$에서 $t=4$까지 흘러나온 물의 양은

$$\pi\cdot 1^2\cdot\int_0^4(4t-t^2)dt=\pi\left[2t^2-\frac{1}{3}t^3\right]_0^4=\frac{32}{3}\pi$$

답 ②

13 전략 구간을 나누어 속도를 적분한다.

풀이 시각 $t=3$에서의 점 P의 위치는

$$0+\int_0^3 v(t)dt=\int_0^1(-t^2+t)dt+\int_1^3(-t^2+5t-4)dt$$

$$=\left[-\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{2}t^2\right]_0^1+\left[-\frac{1}{3}t^3+\frac{5}{2}t^2-4t\right]_1^3$$

$$=\frac{1}{6}+\frac{10}{3}=\frac{7}{2}$$

답 $\frac{7}{2}$

14 전략 물체가 최고 지점에 도달할 때 속도가 0임을 이용한다.

풀이 물체가 최고 지점에 도달할 때 $v(t)=0$이므로

$$-10t+50=0 \qquad \therefore\ t=5$$

따라서 물체는 위로 쏘아 올린 지 5초 후에 최고 지점에 도달하므로 구하는 거리는

$$\int_5^8|-10t+50|dt=\int_5^8(10t-50)dt$$

$$=\left[5t^2-50t\right]_5^8=45\ (\mathrm{m})$$

답 45 m

15 전략 속도 $v(t)$의 그래프가 주어질 때 움직인 거리는 $v(t)$의 그래프와 t축 사이의 넓이와 같다.

풀이 $\int_0^6 |v(t)|dt=\int_0^4 v(t)dt+\int_4^6 \{-v(t)\}dt$

$=\frac{1}{2}\cdot1\cdot1+\frac{1}{2}\cdot(1+2)\cdot2+\frac{1}{2}\cdot1\cdot2+\frac{1}{2}\cdot2\cdot1$

$=\frac{11}{2}$

답 ⑤

16 전략 세 수 a, b, c가 이 순서대로 등차수열을 이루면 $2b=a+c$임을 이용한다.

풀이 S_1, S_2, S_3이 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2S_2=S_1+S_3$

이때 $S_1+S_2+S_3=\int_{-1}^2 f(x)dx$이므로

$3S_2=\int_{-1}^2 f(x)dx$

$\therefore S_2=\frac{1}{3}\int_{-1}^2 f(x)dx$

$=\frac{1}{3}\int_{-1}^2 (-x^2+x+2)dx$

$=\frac{1}{3}\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+2x\right]_{-1}^2$

$=\frac{1}{3}\cdot\frac{9}{2}=\frac{3}{2}$

답 ④

17 전략 곡선과 직선의 교점의 x좌표를 구한 후 a_n을 정적분으로 나타낸다.

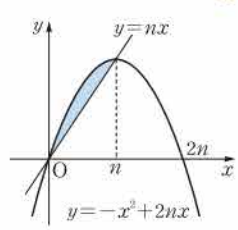
풀이 곡선 $y=-x^2+2nx$와 직선 $y=nx$의 교점의 x좌표는

$-x^2+2nx=nx$에서

$x^2-nx=0, \quad x(x-n)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=n$ ···➊

따라서 오른쪽 그림의 색칠한 부분의 넓이는



$a_n=\int_0^n\{(-x^2+2nx)-nx\}dx$

$=\int_0^n(-x^2+nx)dx$

$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{n}{2}x^2\right]_0^n$

$=\frac{1}{6}n^3$ ···➋

$\therefore \sum_{n=1}^{8} a_n=\sum_{n=1}^{8}\frac{1}{6}n^3=\frac{1}{6}\sum_{n=1}^{8}n^3$

$=\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{8\cdot9}{2}\right)^2$

$=216$ ···➌

답 216

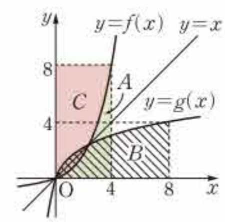
채점 기준	비율
➊ 곡선과 직선의 교점의 x좌표를 구할 수 있다.	20%
➋ a_n을 n에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	50%
➌ $\sum_{n=1}^{8} a_n$의 값을 구할 수 있다.	30%

18 전략 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭임을 이용한다.

풀이 함수 $f(x)$의 역함수가 $g(x)$이고

$f(0)=0$, $f(4)=8$이므로

$g(0)=0$, $g(8)=4$



두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림에서

$(B$의 넓이$)=(C$의 넓이$)$ ···➊

$\therefore \int_0^4 f(x)dx+\int_0^8 g(x)dx=(A$의 넓이$)+(B$의 넓이$)$

$=(A$의 넓이$)+(C$의 넓이$)$

$=4\cdot8=32$ ···➋

답 32

채점 기준	비율
➊ $(B$의 넓이$)=(C$의 넓이$)$임을 알 수 있다.	50%
➋ $\int_0^4 f(x)dx+\int_0^8 g(x)dx$의 값을 구할 수 있다.	50%

19 전략 정적분을 이용하여 두 점 사이의 거리의 최댓값을 구한다.

풀이 x초 후의 두 점 P, Q 사이의 거리는

$\left|\int_0^x v_P(t)dt-\int_0^x v_Q(t)dt\right|=\left|\int_0^x\{v_P(t)-v_Q(t)\}dt\right|$

$f(x)=\int_0^x\{v_P(t)-v_Q(t)\}dt$라 하면

$f(x)=\int_0^x\{3t^2-(t^3+2t)\}dt=\int_0^x(-t^3+3t^2-2t)dt$

$=\left[-\frac{1}{4}t^4+t^3-t^2\right]_0^x$

$=-\frac{1}{4}x^4+x^3-x^2$

$f'(x)=-x^3+3x^2-2x=-x(x-1)(x-2)$이므로 $f'(x)=0$에서 $\quad x=0$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$

x	0	···	1	···	2
$f'(x)$		−	0	+	
$f(x)$	0	↘	극소	↗	0

이때 $f(1)=-\frac{1}{4}$이므로 $|f(x)|$의 최댓값은 $\frac{1}{4}$이다.

따라서 두 점 P, Q 사이의 거리의 최댓값은 $\frac{1}{4}$이다.

답 ②