

서문

정답 및 풀이

I

함수의 극한과 연속

01 함수의 극한	2
02 함수의 연속	20

II

다항함수의 미분법

03 미분계수와 도함수	35
04 도함수의 활용 (1)	54
05 도함수의 활용 (2)	74
06 도함수의 활용 (3)	95

III

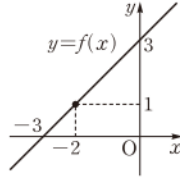
다항함수의 적분법

07 부정적분	112
08 정적분	125
09 정적분의 활용	143

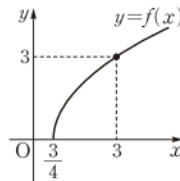
→ 정답을 확인하려 할 때에는 「빠른 정답 찾기」를 이용하면 편리합니다.

01 함수의 극한

0001 $f(x)=x+3$ 이라 하면 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
 x 의 값이 -2 가 아니면서 -2 에 한없이 가까워질 때, $f(x)$ 의 값은 1 에 한없이 가까워지므로
 $\lim_{x \rightarrow -2} (x+3) = 1$ ▶ 1



0002 $f(x)=\sqrt{4x-3}$ 이라 하면 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
 x 의 값이 $3/4$ 가 아니면서 $3/4$ 에 한없이 가까워질 때, $f(x)$ 의 값은 0 에 한없이 가까워지므로
 $\lim_{x \rightarrow 3/4} \sqrt{4x-3} = 0$ ▶ 3



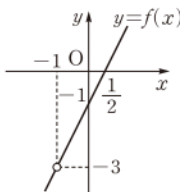
0003 $f(x)=\frac{2x^2+x-1}{x+1}$ 이라 하면
 $x \neq -1$ 일 때,
 $f(x) = \frac{(x+1)(2x-1)}{x+1} = 2x-1$

이므로 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

x 의 값이 -1 이 아니면서 -1 에 한없이 가까워질 때, $f(x)$ 의 값은 -3 에 한없이 가까워지므로

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2+x-1}{x+1} = -3$$

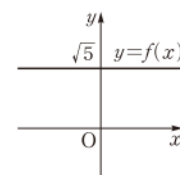
▶ -3



0004 $f(x)=\sqrt{5}$ 라 하면 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
 이때 상수함수는 모든 x 의 값에 대하여 함수값이 $\sqrt{5}$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{5} = \sqrt{5}$$

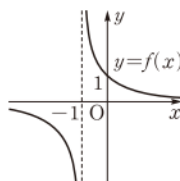
▶ $\sqrt{5}$



0005 $f(x)=\frac{1}{x+1}$ 이라 하면 $y=f(x)$ 의 그래프에서

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x+1} = 0$$

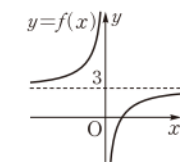
▶ 0



0006 $f(x)=3-\frac{1}{x}$ 이라 하면 $y=f(x)$ 의 그래프에서

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(3 - \frac{1}{x}\right) = 3$$

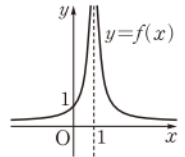
▶ 3



0007 $f(x)=\frac{1}{|x-1|}$ 이라 하면 $y=f(x)$ 의 그래프에서

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{|x-1|} = \infty$$

▶ ∞



$y=\frac{1}{|x-1|}$ 의 그래프 그리기

(i) $y=\frac{1}{|x|}$ 의 그래프를 그린다.

① $y=\frac{1}{x}$ 의 그래프를 그려 $x > 0$ 인 부분만 남긴다.

② ①의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동한다.

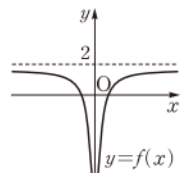
(ii) (i)의 그래프를 x 축의 방향으로 1만큼 평행이동한다.

▶ SEN 특강

0008 $f(x)=-\frac{1}{|x|}+2$ 라 하면 $y=f(x)$ 의 그래프에서

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{|x|} + 2\right) = -\infty$$

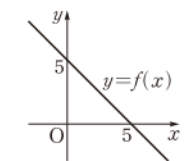
▶ $-\infty$



0009 $f(x)=-x+5$ 라 하면 $y=f(x)$ 의 그래프에서

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (-x+5) = -\infty$$

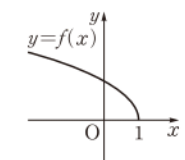
▶ $-\infty$



0010 $f(x)=\sqrt{2-2x}$ 라 하면 $y=f(x)$ 의 그래프에서

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{2-2x} = \infty$$

▶ ∞

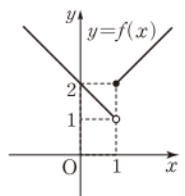


0011 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로

(1) $\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = 2$

(2) $\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = 1$

▶ (1) 2 (2) 1



0012 (3) $\lim_{x \rightarrow 2+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2-} f(x)$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ 의 값은 존재하지 않는다.

(6) $\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = 1$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$

▶ (1) 0 (2) 2 (3) 존재하지 않는다.

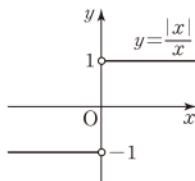
(4) 1 (5) 1 (6) 1



0013 $y = \frac{|x|}{x}$ 의 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{|x|}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{|x|}{x} = -1$$

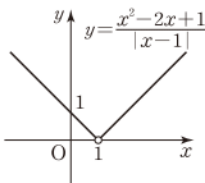


따라서 $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{|x|}{x} \neq \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{|x|}{x}$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$ 의 값은 존재하지 않는다. ▶ 존재하지 않는다.

0014 $x \neq 1$ 일 때,

$$\frac{x^2 - 2x + 1}{|x - 1|} = \frac{(x - 1)^2}{|x - 1|} = |x - 1|$$

따라서 $y = \frac{x^2 - 2x + 1}{|x - 1|}$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$$\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{x^2 - 2x + 1}{|x - 1|} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} \frac{x^2 - 2x + 1}{|x - 1|} = 0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{|x - 1|} = 0$$

▶ 0

0015 $\lim_{x \rightarrow 1} (2x + 5) = 2 \cdot 1 + 5 = 7$

▶ 7

0016 $\lim_{x \rightarrow 3} (x - 1)(2x^2 - 3x - 1) = (3 - 1) \cdot (2 \cdot 3^2 - 3 \cdot 3 - 1)$
 $= 2 \cdot 8 = 16$

▶ 16

0017 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x - 1}{x + 1} = \frac{2 \cdot 2 - 1}{2 + 1} = \frac{3}{3} = 1$

▶ 1

0018 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} = \frac{\sqrt{2} - 0}{1} = \sqrt{2}$

▶ $\sqrt{2}$

0019 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x^2 + 2)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + 2) = 2$

▶ 2

0020 $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 - x - 3}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x + 1)(2x - 3)}{x + 1}$
 $= \lim_{x \rightarrow -1} (2x - 3) = -5$

▶ -5

0021 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x^2 + x + 2)}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x^2 + x + 2)}{(x + 1)(x - 1)}$
 $= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x + 2}{x + 1}$
 $= 2$

▶ 2

0022 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x^2 + 2x + 4)}{x - 2}$
 $= \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 2x + 4) = 12$

▶ 12

0023 $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{x - 9} = \lim_{x \rightarrow 9} \frac{(\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 3)}{(x - 9)(\sqrt{x} + 3)}$
 $= \lim_{x \rightarrow 9} \frac{x - 9}{(x - 9)(\sqrt{x} + 3)}$
 $= \lim_{x \rightarrow 9} \frac{1}{\sqrt{x} + 3} = \frac{1}{6}$

▶ $\frac{1}{6}$

0024 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x - 6}{\sqrt{x + 1} - 2} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2(x - 3)(\sqrt{x + 1} + 2)}{(\sqrt{x + 1} - 2)(\sqrt{x + 1} + 2)}$
 $= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2(x - 3)(\sqrt{x + 1} + 2)}{x - 3}$
 $= \lim_{x \rightarrow 3} 2(\sqrt{x + 1} + 2) = 8$

▶ 8

0025 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{3x^3 + x - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}}{3 + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}} = 0$

▶ 0

0026 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x - 1}{3x + 2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4 - \frac{1}{x}}{3 + \frac{2}{x}} = \frac{4}{3}$

▶ $\frac{4}{3}$

0027 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 3}{4x + 3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + \frac{3}{x}}{4 + \frac{3}{x}} = \infty$

▶ ∞

0028 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x + 1)(2x - 1)}{3x^2 + x - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + x - 1}{3x^2 + x - 1}$
 $= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}{3 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}$
 $= \frac{2}{3}$

▶ $\frac{2}{3}$

0029 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 3} + 4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{3}{x^2}} + \frac{4}{x}} = 2$

▶ 2

0030 $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + 3x^2 + 2x - 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left(1 + \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^3} \right)$
 $= -\infty$

▶ $-\infty$

0031 $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 + 1} + x}$
 $= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = 0$

▶ 0

0032 $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2-3x}-\sqrt{x^2+3x})$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2-3x-x^2-3x}{\sqrt{x^2-3x}+\sqrt{x^2+3x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-6x}{\sqrt{x^2-3x}+\sqrt{x^2+3x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-6}{\sqrt{1-\frac{3}{x}}+\sqrt{1+\frac{3}{x}}} = -3 \end{aligned}$$

답 -3

0033 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{x+\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \cdot \frac{-x}{\sqrt{2}(x+\sqrt{2})}$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{\sqrt{2}(x+\sqrt{2})} \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

답 $-\frac{1}{2}$

0034 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-2} \left(2x - \frac{5x+2}{x+1} \right)$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-2} \cdot \frac{2x^2-3x-2}{x+1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-2} \cdot \frac{(2x+1)(x-2)}{x+1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x+1}{x+1} = \frac{5}{3} \end{aligned}$$

답 $\frac{5}{3}$

0035 $x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉 $\lim_{x \rightarrow 1} (ax+b) = 0$ 이므로 $a+b=0$

$$\therefore b = -a \quad \dots\dots ㉠$$

㉠을 주어진 등식의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{ax-a}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{a(x-1)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} a = a \end{aligned}$$

이므로 $a=2$

$a=2$ 를 ㉠에 대입하면 $b=-2$ 답 $a=2, b=-2$

0036 $x \rightarrow -1$ 일 때 (분자) $\rightarrow 0$ 이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모) $\rightarrow 0$ 이다.

즉 $\lim_{x \rightarrow -1} (2x^2+ax+b) = 0$ 이므로 $2-a+b=0$

$$\therefore b = a-2 \quad \dots\dots ㉡$$

㉡을 주어진 등식의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{2x^2+ax+a-2} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{(x+1)(2x+a-2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{2x+a-2} \\ &= \frac{1}{a-4} \end{aligned}$$

이므로 $\frac{1}{a-4} = -1 \quad \therefore a=3$

$a=3$ 을 ㉡에 대입하면 $b=1$ 답 $a=3, b=1$

0037 $x^2+2x-4 \leq f(x) \leq 2x^2-3$ 이고

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^2+2x-4) = -1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (2x^2-3) = -1$$

이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -1$$

답 -1

유형 01 함수의 극한값의 존재

본책 12쪽

우극한과 좌극한을 각각 구하여 비교한다.

{ 두 값이 같으면 \Rightarrow 극한값이 존재한다.

{ 두 값이 다르거나 수렴하지 않으면 \Rightarrow 극한값이 존재하지 않는다.

0038 $\neg, \lim_{x \rightarrow 3} (x-3) = 0$

$\neg, \lim_{x \rightarrow -2+} |x+2| = \lim_{x \rightarrow -2+} (x+2) = 0$

$\lim_{x \rightarrow -2-} |x+2| = \lim_{x \rightarrow -2-} \{-(x+2)\} = 0$

$\therefore \lim_{x \rightarrow -2} |x+2| = 0$

$\kappa, \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{|x-1|}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{x-1}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{x-1}{(x+1)(x-1)}$

$$= \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}$$

$\lim_{x \rightarrow 1-} \frac{|x-1|}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{-(x-1)}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{-(x-1)}{(x+1)(x-1)}$

$$= \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{-1}{x+1} = -\frac{1}{2}$$

이므로 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x-1|}{x^2-1}$ 의 값은 존재하지 않는다.

$\rho, \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2-25}{x-5} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(x+5)(x-5)}{x-5} = \lim_{x \rightarrow 5} (x+5) = 10$

이상에서 극한값이 존재하는 것은 \neg, \neg, ρ 이다.

답 ⑤

0039 ① $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = -\infty$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 의 값은 존재하지 않는다.

② $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0-} f(x)$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 의 값은 존재하지 않는다.

③ $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \infty$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 의 값은 존재하지 않는다.

④ $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 의 값이 존재한다.

⑤ 정수 a 에 대하여 $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a-} f(x)$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 의 값은 존재하지 않는다.

답 ④

참고 ③ $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \infty$ 에서 ∞ 는 일정한 값이 아닌 한없이 커지는 상태를 나타내므로 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 의 값은 존재하지 않는다.

0040 $\neg, \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = -2$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 의 값은 존재하지 않는다.



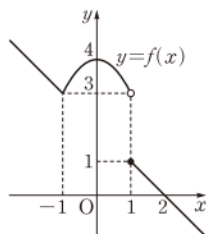
ㄴ. $\lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = 1, \lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = 1$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1$
 ㄷ. $-1 < a < 1$ 인 모든 실수 a 에 대하여 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 의 값이 항상 존재한다.
 이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ⑤

0041 $\lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2+} (kx - 5) = 2k - 5$ → ①
 $\lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2-} (x - k)^2 = (2 - k)^2$ → ②
 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ 의 값이 존재하려면 $\lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2-} f(x)$ 이어야 하므로
 $2k - 5 = (2 - k)^2$ → ③
 $2k - 5 = k^2 - 4k + 4, \quad k^2 - 6k + 9 = 0$
 $(k - 3)^2 = 0 \quad \therefore k = 3$ → ④
답 3

채점 기준	비율
① $\lim_{x \rightarrow 2+} f(x)$ 의 값을 k 에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	20 %
② $\lim_{x \rightarrow 2-} f(x)$ 의 값을 k 에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	20 %
③ k 에 대한 방정식을 세울 수 있다.	40 %
④ k 의 값을 구할 수 있다.	20 %

0042 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} (2 - x) = 1$
 $\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} (4 - x^2) = 3$
 이므로 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 의 값은 존재하지 않는다.
 $\therefore a = 1$ 답 1



유형 02 함수의 극한값 구하기

본책 13쪽

- ① 함수 $f(x)$ 가 다항함수이면
 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$
- ② 절댓값 기호를 포함한 함수
 \Rightarrow 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 x 의 값을 기준으로 범위를 나누어 함수의 식을 구한다.

0043 (i) $x > 2$ 일 때, $f(x) = \frac{x-2}{x-2} = 1$
 (ii) $x < 2$ 일 때, $f(x) = \frac{-(x-2)}{x-2} = -1$ → ①
 (i), (ii)에서 $\lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = 1, \lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = -1$ 이므로
 $a = 1, b = -1$
 $\therefore a - b = 2$ 답 2

0044 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1} f(x) + \lim_{x \rightarrow 2+} f(x)$
 $= 1 + 0 + (-1) = 0$ 답 ③

0045 $\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} (-x + 2) = 2$
 $\lim_{x \rightarrow 3+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3+} 1 = 1$
 $\therefore \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 3+} f(x) = 2 + 1 = 3$ 답 3

0046 $\lim_{x \rightarrow -1+} \frac{x^2 - 3x - 4}{|x + 1|} = \lim_{x \rightarrow -1+} \frac{(x+1)(x-4)}{x+1}$
 $= \lim_{x \rightarrow -1+} (x - 4) = -5$
 $\therefore a = -5$ → ①
 $\lim_{x \rightarrow 3-} \frac{x^2 - x - 6}{|x - 3|} = \lim_{x \rightarrow 3-} \frac{(x+2)(x-3)}{-(x-3)}$
 $= \lim_{x \rightarrow 3-} (-x - 2) = -5$
 $\therefore b = -5$ → ②
 $\therefore ab = 25$ → ③
답 25

채점 기준	비율
① a 의 값을 구할 수 있다.	40 %
② b 의 값을 구할 수 있다.	40 %
③ ab 의 값을 구할 수 있다.	20 %

유형 03 $[x]$ 꼴을 포함한 함수의 극한

본책 13쪽

- $[x]$ 가 x 보다 크지 않은 최대의 정수일 때, 정수 n 에 대하여
 ① $n \leq x < n+1$ 이면 $[x] = n \Rightarrow \lim_{x \rightarrow n+} [x] = n$
 ② $n-1 \leq x < n$ 이면 $[x] = n-1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow n-} [x] = n-1$

0047 $\lim_{x \rightarrow 3+} [x] = 3, \lim_{x \rightarrow 3-} [x] = 2$ 이므로
 $\lim_{x \rightarrow 3+} \frac{[x]^2 + x}{[x]} + \lim_{x \rightarrow 3-} \frac{[x]^2 - x}{[x]} = \frac{3^2 + 3}{3} + \frac{2^2 - 3}{2}$
 $= 4 + \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$ 답 $\frac{9}{2}$

0048 ① $\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{[x-2]}{x-2} = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}$
 ② $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x}{[x-1]} = \frac{0}{-1} = 0$
 ③ $x \rightarrow -1+$ 일 때 $x^2 - 1$ 은 0보다 작은 값을 가지면서 0에 한없이 가까워지므로
 $\lim_{x \rightarrow -1+} [x^2 - 1] = -1$
 $\therefore \lim_{x \rightarrow -1+} \frac{[x]^2 - 1}{[x^2 - 1]} = \frac{(-1)^2 - 1}{-1} = 0$
 ④ $\lim_{x \rightarrow 1-} \frac{[x-2]}{[x+1]} = \frac{-2}{1} = -2$
 ⑤ $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{2x+1}{x+1} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[2 - \frac{1}{x+1} \right] = 1$ 답 ①

0049 $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} (a[x]^3 - 2b[x]^2 + 3)$
 $= a \cdot 0 - 2b \cdot 0 + 3 = 3$

$\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} (a[x]^3 - 2b[x]^2 + 3)$
 $= a \cdot (-1)^3 - 2b \cdot (-1)^2 + 3$
 $= -a - 2b + 3$

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 의 값이 존재하려면 $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} f(x)$ 이어야 하므로

$3 = -a - 2b + 3 \quad \therefore a = -2b$

$\therefore \frac{2b}{a} = \frac{2b}{-2b} = -1$

답 ②

0050 $\lim_{x \rightarrow k+} \frac{[2x]}{[x]^2 + x} = \frac{2k}{k^2 + k} = \frac{2}{k+1} \quad (\because k \neq 0)$

$\lim_{x \rightarrow k-} \frac{[2x]}{[x]^2 + x} = \frac{2k-1}{(k-1)^2 + k} = \frac{2k-1}{k^2 - k + 1}$

이때 $\lim_{x \rightarrow k} \frac{[2x]}{[x]^2 + x}$ 의 값이 존재하므로

$\frac{2}{k+1} = \frac{2k-1}{k^2 - k + 1}, \quad 2k^2 - 2k + 2 = 2k^2 + k - 1$

$3k = 3 \quad \therefore k = 1$

따라서 $a = \frac{2}{k+1} = \frac{2}{1+1} = 1$ 이므로

$k + a = 2$

답 2

유형 04 합성함수의 극한

본책 14쪽

$\lim_{x \rightarrow a+} g(f(x))$ 의 값은 $f(x) = t$ 로 놓고 다음을 이용한다.

① $x \rightarrow a+$ 일 때 $t \rightarrow b+$ 이면 $\lim_{x \rightarrow a+} g(f(x)) = \lim_{t \rightarrow b+} g(t)$

② $x \rightarrow a+$ 일 때 $t \rightarrow b-$ 이면 $\lim_{x \rightarrow a+} g(f(x)) = \lim_{t \rightarrow b-} g(t)$

③ $x \rightarrow a$ 일 때 $t = b$ 이면 $\lim_{x \rightarrow a+} g(f(x)) = g(b)$

0051 $f(x) = t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 0+$ 일 때 $t \rightarrow 0+$ 이므로

$\lim_{x \rightarrow 0+} g(f(x)) = \lim_{t \rightarrow 0+} g(t) = \lim_{t \rightarrow 0+} (t-2)^2 = 4$

또 $x \rightarrow 1+$ 일 때 $t \rightarrow -1+$ 이므로

$\lim_{x \rightarrow 1+} g(f(x)) = \lim_{t \rightarrow -1+} g(t) = \lim_{t \rightarrow -1+} (t-2)^2 = 9$

$\therefore \lim_{x \rightarrow 0+} g(f(x)) + \lim_{x \rightarrow 1+} g(f(x)) = 4 + 9 = 13$

답 ②

0052 $\neg, \lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} (x-2) = -2, \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = -1$

즉 $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0-} f(x)$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 의 값은 존재하지 않는다.

$\therefore f(x) = t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 0-$ 일 때 $t = -1$ 이므로

$\lim_{x \rightarrow 0-} f(f(x)) = f(-1) = -1$

다. $x \rightarrow 2+$ 일 때 $t \rightarrow 0+$ 이므로

$\lim_{x \rightarrow 2+} f(f(x)) = \lim_{t \rightarrow 0+} f(t) = \lim_{t \rightarrow 0+} (t-2) = -2$

이상에서 옳은 것은 $\neg, \text{다}$ 이다.

답 ⑤

0053 $g(x) = t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 2+$ 일 때 $t \rightarrow 1-$ 이므로

$\lim_{x \rightarrow 2+} f(g(x)) = \lim_{t \rightarrow 1-} f(t) = 1$

또 $x \rightarrow 2-$ 일 때 $t \rightarrow 2-$ 이므로

$\lim_{x \rightarrow 2-} f(g(x)) = \lim_{t \rightarrow 2-} f(t) = 1$

$\therefore \lim_{x \rightarrow 2} f(g(x)) = 1$

→ ①

$f(x) = s$ 로 놓으면 $x \rightarrow 1+$ 일 때 $s \rightarrow 0+$ 이므로

$\lim_{x \rightarrow 1+} g(f(x)) = \lim_{s \rightarrow 0+} g(s) = 1$

→ ②

$\therefore \lim_{x \rightarrow 2} f(g(x)) + \lim_{x \rightarrow 1+} g(f(x)) = 1 + 1 = 2$

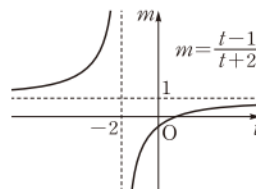
→ ③

답 2

채점 기준	비율
① $\lim_{x \rightarrow 2} f(g(x))$ 의 값을 구할 수 있다.	40 %
② $\lim_{x \rightarrow 1+} g(f(x))$ 의 값을 구할 수 있다.	40 %
③ $\lim_{x \rightarrow 2} f(g(x)) + \lim_{x \rightarrow 1+} g(f(x))$ 의 값을 구할 수 있다.	20 %

0054 $\frac{t-1}{t+2} = m$ 으로 놓으면

$\frac{t-1}{t+2} = \frac{t+2-3}{t+2}$
 $= 1 - \frac{3}{t+2}$



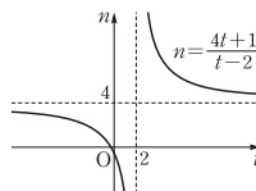
이므로 $m = \frac{t-1}{t+2}$ 의 그래프는 위의 그림과 같고, $t \rightarrow \infty$ 일 때

$m \rightarrow 1/2$ 이므로

$\lim_{t \rightarrow \infty} f\left(\frac{t-1}{t+2}\right) = \lim_{m \rightarrow 1/2} f(m) = 2$

$\frac{4t+1}{t-2} = n$ 으로 놓으면

$\frac{4t+1}{t-2} = \frac{4(t-2)+9}{t-2}$
 $= 4 + \frac{9}{t-2}$



이므로 $n = \frac{4t+1}{t-2}$ 의 그래프는 위의 그림과 같고, $t \rightarrow \infty$ 일 때

$n \rightarrow 4$ 이므로

$\lim_{t \rightarrow \infty} f\left(\frac{4t+1}{t-2}\right) = \lim_{n \rightarrow 4} f(n) = 1$

$\therefore 2 \lim_{t \rightarrow \infty} f\left(\frac{t-1}{t+2}\right) - \lim_{t \rightarrow \infty} f\left(\frac{4t+1}{t-2}\right) = 2 \cdot 2 - 1 = 3$

답 3

유형 05 함수의 극한에 대한 성질

본책 14쪽

두 함수 $f(x), g(x)$ 에 대하여 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha, \lim_{x \rightarrow a} \{f(x) - g(x)\} = \beta$ (α, β 는 실수)일 때

→ $f(x) - g(x) = h(x)$ 라 하면 두 함수 $f(x), h(x)$ 는 수렴하므로 극한 값을 구하려는 함수식을 $f(x)$ 와 $h(x)$ 로 나타낸 후 함수의 극한에 대한 성질을 이용한다.



0055 $f(x) - g(x) = h(x)$ 라 하면 $g(x) = f(x) - h(x)$ 이고
 $\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = 2$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) + g(x)}{2f(x) - 3g(x)} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) + \{f(x) - h(x)\}}{2f(x) - 3\{f(x) - h(x)\}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2f(x) - h(x)}{-f(x) + 3h(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{h(x)}{f(x)}}{-1 + 3 \cdot \frac{h(x)}{f(x)}} \\ &= -2 \left(\because \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{h(x)}{f(x)} = 0 \right) \end{aligned}$$

답 ②

다른 풀이 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \{f(x) - g(x)\} = 2$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - g(x)}{f(x)} &= 0 \\ \therefore \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ 1 - \frac{g(x)}{f(x)} \right\} &= 0 \text{이므로} \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{f(x)} &= 1 \\ \therefore \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) + g(x)}{2f(x) - 3g(x)} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{g(x)}{f(x)}}{2 - 3 \cdot \frac{g(x)}{f(x)}} \\ &= \frac{1+1}{2-3 \cdot 1} = -2 \end{aligned}$$

0056 $\lim_{x \rightarrow -2} (x^2 - x - 6)f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} (x+2)(x-3)f(x)$
 $= \lim_{x \rightarrow -2} (x-3)\{(x+2)f(x)\}$
 $= -5 \cdot \frac{1}{3}$
 $= -\frac{5}{3}$

답 $-\frac{5}{3}$

0057 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} \{f(x) - 2x^2\} = 0$ 에서

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \frac{f(x)}{x^2} - 2 \right\} = 0, \therefore \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^2} &= 2 \\ \therefore \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5f(x) + x}{2f(x) - 3x + 1} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5 \cdot \frac{f(x)}{x^2} + \frac{1}{x}}{2 \cdot \frac{f(x)}{x^2} - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}} \\ &= \frac{5 \cdot 2}{2 \cdot 2} = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

답 ⑤

0058 $f(x) - 2g(x) = h(x)$ 라 하면 $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = -9$ 이고

$$g(x) = \frac{f(x) - h(x)}{2}$$

→ ①

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{x \rightarrow a} g(x) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - h(x)}{2} \\ &= \frac{1}{2} \{ \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} h(x) \} \\ &= \frac{1}{2} \{ 3 - (-9) \} = 6 \end{aligned}$$

→ ②

답 6

채점 기준	비율
① $g(x)$ 를 $f(x), h(x)$ 로 나타낼 수 있다.	40 %
② $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ 의 값을 구할 수 있다.	60 %

0059 $x-1=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 1$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x-1)}{x-1} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t)}{t} = 1 \\ \therefore \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x-1)}{x^3-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x-1)}{x-1} \cdot \frac{1}{x^2+x+1} \\ &= 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

답 $\frac{1}{3}$

0060 $\frac{1}{x} = t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 0+$ 일 때 $t \rightarrow \infty$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{xf\left(\frac{1}{x}\right) - 1}{2-x} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\frac{f(t)}{t} - 1}{2 - \frac{1}{t}} \\ \text{이때 } \frac{\frac{f(t)}{t} - 1}{2 - \frac{1}{t}} &= h(t) \text{라 하면} \\ \frac{f(t)}{t} &= \left(2 - \frac{1}{t}\right)h(t) + 1 \end{aligned}$$

이고 $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = 4$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(t)}{t} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ \left(2 - \frac{1}{t}\right)h(t) + 1 \right\} = 2 \cdot 4 + 1 = 9 \\ \therefore \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} &= 9 \end{aligned}$$

답 9

유형 06

함수의 극한에 대한 성질; 함답형

본책 15쪽

$x \rightarrow a$ 일 때의 극한값이 존재하지 않는 함수의 예를 들 때
 $\Rightarrow x=a$ 에서의 우극한과 좌극한이 다른 함수를 찾아본다.

0061 $[x]$ 를 x 보다 크지 않은 최대의 정수라 하자.

ㄱ. [반례] $f(x) = 0, g(x) = [x]$ 이면

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 0$$

이지만 $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$ 의 값은 존재하지 않는다.

ㄴ. [반례] $f(x) = 0, g(x) = [x^2 + 1]$ 이면

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 0$$

이지만 $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$ 의 값은 존재하지 않는다.

ㄷ. $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \alpha, \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \beta$ (α, β 는 실수)라 하고
 $\frac{f(x)}{g(x)} = h(x)$ 라 하면 $f(x) = g(x)h(x)$ 이고 $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = \beta$ 이
 므로

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x)h(x) = \alpha\beta$$

이상에서 옳은 것은 ㄷ뿐이다.

답 ②

0062 ㄱ. [반례] $f(x) = \begin{cases} 2 & (x \geq a) \\ 1 & (x < a) \end{cases}, g(x) = \begin{cases} 1 & (x \geq a) \\ 2 & (x < a) \end{cases}$ 이면

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 와 $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ 의 값은 모두 존재하지 않지만
 $f(x) + g(x) = 3$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow a} \{f(x) + g(x)\} = 3$ 이다.

ㄴ. $\lim_{x \rightarrow a} \{f(x) + g(x)\} = \alpha, \lim_{x \rightarrow a} \{f(x) - g(x)\} = \beta$ (α, β 는 실수)

라 하고 $f(x) + g(x) = h(x), f(x) - g(x) = k(x)$ 라 하면

$$\lim_{x \rightarrow a} h(x) = \alpha, \lim_{x \rightarrow a} k(x) = \beta$$

이때 $f(x) = \frac{h(x) + k(x)}{2}$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{h(x) + k(x)}{2} = \frac{\alpha + \beta}{2}$$

ㄷ. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha, \lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = \beta$ (α, β 는 실수)라 하고

$f(x)g(x) = h(x)$ 라 하면 $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = \beta$ 이다.

$f(x) \neq 0$ 일 때, $g(x) = \frac{h(x)}{f(x)}$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq 0$ 이면

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{h(x)}{f(x)} = \frac{\beta}{\alpha}$$

ㄹ. [반례] $f(x) = \begin{cases} -x+6 & (x > 2) \\ x+2 & (x \leq 2) \end{cases}, g(x) = \begin{cases} 4 & (x \neq 2) \\ 6 & (x = 2) \end{cases}$ 이면 모든

양수 x 에 대하여 $f(x) < g(x)$ 이지만

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 4$$

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ②

유형 07 $\frac{0}{0}$ 꼴의 극한: 유리식

본책 16쪽

분자, 분모가 모두 다항식이면

→ 분자, 분모를 각각 인수분해하여 공통인수를 약분한다.

$$\begin{aligned} 0063 \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + x + 2}{x^2 - 1} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x^2 - x + 2)}{(x+1)(x-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x + 2}{x - 1} \\ &= -2 \end{aligned}$$

답 -2

$$0064 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + 2kx}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + 2k) = 2k$$

즉 $2k = 8$ 이므로 $k = 4$

답 ④

$$\begin{aligned} 0065 \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4(x^4 - 1)}{(x^2 - 1)f(x)} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4(x^2 + 1)(x^2 - 1)}{(x^2 - 1)f(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4(x^2 + 1)}{f(x)} \\ &= \frac{8}{f(1)} \end{aligned}$$

즉 $\frac{8}{f(1)} = 1$ 이므로 $f(1) = 8$

답 8

$$\begin{aligned} 0066 \quad \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\{f(x)\}^2 - f(x)}{x^2 f(x) - 4f(x)} &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x)\{f(x) - 1\}}{(x^2 - 4)f(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x) - 1}{(x + 2)(x - 2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x) - 1}{x + 2} \cdot \frac{1}{x - 2} \\ &= 4 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = -1 \end{aligned}$$

답 ②

0067 $-1 < x < 1$ 일 때, $x^2 - 1 < 0$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1+} \frac{x^2 + x}{|x^2 - 1|} &= \lim_{x \rightarrow -1+} \frac{x^2 + x}{1 - x^2} = \lim_{x \rightarrow -1+} \frac{x(1 + x)}{(1 + x)(1 - x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1+} \frac{x}{1 - x} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\therefore a = -\frac{1}{2}$$

→ ①

또 $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x + |x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{2x}{x} = 2$ 이므로

$$b = 2$$

→ ②

$$\therefore a + b = \frac{3}{2}$$

→ ③

답 $\frac{3}{2}$

채점 기준	비율
① a의 값을 구할 수 있다.	40 %
② b의 값을 구할 수 있다.	40 %
③ a+b의 값을 구할 수 있다.	20 %

유형 08 $\frac{0}{0}$ 꼴의 극한: 무리식

본책 16쪽

분자, 분모 중 무리식이 있으면

→ 근호를 포함한 쪽을 유리화하고 공통인수를 약분한다.

$$\begin{aligned} 0068 \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{\sqrt{x^2-5}-2} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(\sqrt{x^2-5}+2)}{(\sqrt{x^2-5}-2)(\sqrt{x^2-5}+2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(\sqrt{x^2-5}+2)}{x^2-9} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(\sqrt{x^2-5}+2)}{(x+3)(x-3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2-5}+2}{x+3} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

답 $\frac{2}{3}$



$$\begin{aligned} 0069 \quad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)f(x)}{\sqrt{x}-2} &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)f(x)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)f(x)(\sqrt{x}+2)}{x-4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} f(x)(\sqrt{x}+2) \\ &= 3 \cdot (2+2) = 12 \end{aligned}$$

답 ⑤

$$\begin{aligned} 0070 \quad \lim_{x \rightarrow 8} \frac{x^2-64}{\sqrt[3]{x}-2} &= \lim_{x \rightarrow 8} \frac{(x+8)(x-8)(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)}{(\sqrt[3]{x}-2)(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 8} \frac{(x+8)(x-8)(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)}{x-8} \\ &= \lim_{x \rightarrow 8} (x+8)(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4) \\ &= 16 \cdot (4+2 \cdot 2+4) = 192 \end{aligned}$$

∴ a=192

→ ①

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+8}-3}{x^2-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x+8}-3)(\sqrt{x+8}+3)}{(x+1)(x-1)(\sqrt{x+8}+3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(x+1)(x-1)(\sqrt{x+8}+3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x+1)(\sqrt{x+8}+3)} = \frac{1}{2 \cdot 6} = \frac{1}{12} \end{aligned}$$

∴ b=1/12

→ ②

∴ ab=16

→ ③

답 16

채점 기준	비율
① a의 값을 구할 수 있다.	40 %
② b의 값을 구할 수 있다.	40 %
③ ab의 값을 구할 수 있다.	20 %

$$\begin{aligned} 0071 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+x}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1-x})(\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-x})(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+x})}{(\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+x})(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+x})(\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-x^2-1+x)(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+x})}{(1+x^2-1-x)(\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-x}} \right) \\ &= -\frac{1+1}{1+1} = -1 \end{aligned}$$

답 -1

유형 09

∞ 꼴의 극한

본책 17쪽

(i) 분모의 최고차항으로 분자, 분모를 각각 나눈다.

(ii) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{c}{x^n} = 0$ (n 은 자연수, c 는 상수)임을 이용한다.

0072 $x=-t$ 로 놓으면 $x \rightarrow -\infty$ 일 때 $t \rightarrow \infty$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}+2x}{\sqrt{4x^2+x+1}-x} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{t^2+1}-2t}{\sqrt{4t^2-t+1}+t} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}-2}{\sqrt{4-\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}}+1} \\ &= \frac{1-2}{2+1} = -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

답 ③

$$\begin{aligned} 0073 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x}{\sqrt{9x^2-x}+\sqrt{4x^2-1}} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{\sqrt{9-\frac{1}{x}}+\sqrt{4-\frac{1}{x^2}}} \\ &= \frac{3}{3+2} = \frac{3}{5} \end{aligned}$$

답 3/5

0074 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x-1}{x^2+3} = 0$ 이므로 $a=0$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^2+5x}{2x^2-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6+\frac{5}{x}}{2-\frac{1}{x^2}} = \frac{6}{2} = 3 \text{이므로 } b=3$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{9x^2+5}-3}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{9+\frac{5}{x^2}}-\frac{3}{x}}{1} = 3 \text{이므로 } c=3$$

- ① $a < b$ ② $a \neq c$ ③ $b = c$
 ④ $a-b = -3$ 이므로 $a-b \neq c$
 ⑤ $a+c = 3$ 이므로 $a+c = b$

답 ⑤

$$\begin{aligned} 0075 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2+\{f(x)\}^2}{3x^2-f(x)} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2+\left\{\frac{f(x)}{x}\right\}^2}{3-\frac{f(x)}{x} \cdot \frac{1}{x}} \\ &= \frac{2+2^2}{3-2 \cdot 0} = 2 \end{aligned}$$

답 ③

0076 $x=-t$ 로 놓으면 $x \rightarrow -\infty$ 일 때 $t \rightarrow \infty$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(-t)}{-t} = a \\ \therefore \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(-t)}{t} &= -a \quad \dots\dots ㉠ \quad \rightarrow ① \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3f(x)}{\sqrt{f(x)+x^2}+f(x)} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{3f(-t)}{\sqrt{f(-t)+t^2}+f(-t)} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{3 \cdot \frac{f(-t)}{t}}{\sqrt{\frac{f(-t)}{t} \cdot \frac{1}{t}+1}+\frac{f(-t)}{t}} \\ &= \frac{-3a}{1-a} \quad (\because ㉠) \quad \rightarrow ② \end{aligned}$$

$$\text{따라서 } \frac{-3a}{1-a} = 4 \text{이므로 } -3a = 4-4a$$

$$\therefore a=4$$

→ ③

답 4

채점 기준

비율

① $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(-t)}{t} = -a$ 임을 알 수 있다.	30 %
② $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3f(x)}{\sqrt{f(x)+x^2}+f(x)}$ 를 a 에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	50 %
③ a 의 값을 구할 수 있다.	20 %

유형 10 $\infty - \infty$ 꼴의 극한

본책 18쪽

- ① 다항식은 최고차항으로 묶는다.
 ② 무리식은 근호를 포함한 쪽을 유리화하여 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴로 변형한다.

0077 $x = -t$ 로 놓으면 $x \rightarrow -\infty$ 일 때 $t \rightarrow \infty$ 이므로
 (주어진 식) $= \lim_{t \rightarrow \infty} (\sqrt{1-2t+t^2}-t)$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{1-2t+t^2}-t)(\sqrt{1-2t+t^2}+t)}{\sqrt{1-2t+t^2}+t} \\
 &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1-2t}{\sqrt{1-2t+t^2}+t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{t}-2}{\sqrt{\frac{1}{t^2}-\frac{2}{t}+1}+1} \\
 &= \frac{0-2}{1+1} = -1 \quad \text{답 ②}
 \end{aligned}$$

0078 (주어진 식)

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+\sqrt{x^2-2x+4}}{(x-\sqrt{x^2-2x+4})(x+\sqrt{x^2-2x+4})} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+\sqrt{x^2-2x+4}}{2x-4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+\sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}}}{2-\frac{4}{x}} \\
 &= \frac{1+1}{2-0} = 1 \quad \text{답 1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 0079 \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1-\sqrt{x-1}}{x-2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(1-\sqrt{x-1})(1+\sqrt{x-1})}{(x-2)(1+\sqrt{x-1})} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-(x-2)}{(x-2)(1+\sqrt{x-1})} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2} \left(-\frac{1}{1+\sqrt{x-1}} \right) = -\frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

$$\therefore p = -\frac{1}{2} \quad \rightarrow \text{①}$$

$$\begin{aligned}
 &\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2-3x+1}-\sqrt{x^2+3x+1}) \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2-3x+1}-\sqrt{x^2+3x+1})(\sqrt{x^2-3x+1}+\sqrt{x^2+3x+1})}{\sqrt{x^2-3x+1}+\sqrt{x^2+3x+1}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-6x}{\sqrt{x^2-3x+1}+\sqrt{x^2+3x+1}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-6}{\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}} \\
 &= \frac{-6}{1+1} = -3
 \end{aligned}$$

$$\therefore q = -3 \quad \rightarrow \text{②}$$

$$\therefore 2p-q = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - (-3) = 2 \quad \rightarrow \text{③}$$

답 2

채점 기준

비율

① p 의 값을 구할 수 있다.	40 %
② q 의 값을 구할 수 있다.	40 %
③ $2p-q$ 의 값을 구할 수 있다.	20 %

0080 $x = [x] + \alpha$ ($0 \leq \alpha < 1$)라 하면 $[x] = x - \alpha$ 이므로

$$\begin{aligned}
 \text{(주어진 식)} &= \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+x-\alpha}-x) \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2+x-\alpha}-x)(\sqrt{x^2+x-\alpha}+x)}{\sqrt{x^2+x-\alpha}+x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-\alpha}{\sqrt{x^2+x-\alpha}+x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1-\frac{\alpha}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{\alpha}{x^2}}+1} \\
 &= \frac{1-0}{1+1} = \frac{1}{2} \quad \text{답 ⑤}
 \end{aligned}$$

다른 풀이 • (주어진 식) $= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2+[x]}-x)(\sqrt{x^2+[x]}+x)}{\sqrt{x^2+[x]}+x}$

$$\begin{aligned}
 &\left. \begin{array}{l} x > 0 \text{ 일 때, } \frac{x-1}{x} < \frac{[x]}{x} \leq \frac{x}{x} = 1 \text{ 이고} \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-1}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x} = 1 \text{ 이므로} \end{array} \right\} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{[x]}{x} = 1 \\
 &\therefore \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{[x]}{\sqrt{x^2+[x]}+x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{[x]}{x}}{\sqrt{1+\frac{[x]}{x^2}}+1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

유형 11 $\infty \times 0$ 꼴의 극한

본책 18쪽

$\infty \times c$, $\frac{c}{\infty}$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ (c 는 0이 아닌 상수) 꼴로 변형하여 계산한다.

$$\begin{aligned}
 0081 \quad \text{(주어진 식)} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{x+1} \cdot \frac{2x^2+x-1}{2(x-1)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{x+1} \cdot \frac{(x+1)(2x-1)}{2(x-1)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x-1}{2(x-1)} = \frac{3}{4} \quad \text{답 ③}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 0082 \quad \text{(주어진 식)} &= \lim_{x \rightarrow 4} (\sqrt{x}-2) \cdot \frac{x-6}{x-4} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 4} (\sqrt{x}-2) \cdot \frac{x-6}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-6}{\sqrt{x}+2} = -\frac{1}{2} \quad \text{답 } -\frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

0083 $\frac{1}{n} = x$ 로 놓으면 $n \rightarrow \infty$ 일 때 $x \rightarrow 0$ 이고

$$f(x) = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$$



$$\begin{aligned} \therefore (\text{주어진 식}) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \{f(3x+1) - f(1)\}^2 \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\{(3x+2)^2 - 2^2\}^2}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\{3x(3x+4)\}^2}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{9x^2(3x+4)^2}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} 9(9x^2 + 24x + 16) \\ &= 9 \cdot 16 = 144 \end{aligned}$$

답 144

0084 $x=3k+\alpha$ (k 는 정수, $0 \leq \alpha < 3$)라 하면

$$\left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{3k+\alpha}{3} \right\rfloor = \left\lfloor k + \frac{\alpha}{3} \right\rfloor = k \quad (\because 0 \leq \frac{\alpha}{3} < 1)$$

$x \rightarrow \infty$ 일 때 $k \rightarrow \infty$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6}{x} \left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{6}{3k+\alpha} \cdot k \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{6}{3 + \frac{\alpha}{k}} = 2 \end{aligned}$$

답 ④

유형 12 미정계수의 결정 (1)

본책 19쪽

미정계수가 포함된 분수 꼴의 함수에서 $x \rightarrow a$ 일 때

① (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하면 \Rightarrow (분자) $\rightarrow 0$

② (분자) $\rightarrow 0$ 이고 0이 아닌 극한값이 존재하면 \Rightarrow (분모) $\rightarrow 0$

0085 $x \rightarrow -1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉 } \lim_{x \rightarrow -1} (x^2 + ax + b) = 0 \text{ 이므로 } 1 - a + b = 0$$

$$\therefore b = a - 1 \quad \dots\dots ①$$

①을 주어진 등식의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + ax + a - 1}{x + 1} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x+a-1)}{x+1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} (x+a-1) = a-2 \end{aligned}$$

$a-2=3$ 에서 $a=5$ 이므로 이것을 ①에 대입하면 $b=4$

$$\therefore a+b=9 \quad \text{답 ③}$$

0086 $x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉 } \lim_{x \rightarrow 1} (x^3 + ax^2 + bx) = 0 \text{ 이므로 } 1 + a + b = 0$$

$$\therefore b = -a - 1 \quad \dots\dots ① \quad \rightarrow ①$$

①을 주어진 등식의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + ax^2 - (a+1)x}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x-1)(x+a+1)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} x(x+a+1) = 2+a \end{aligned}$$

$2+a=6$ 에서 $a=4$ 이므로 이것을 ①에 대입하면 $b=-5$ $\rightarrow ②$

따라서 $f(x) = x^3 + 4x^2 - 5x$ 이므로 $f(2) = 14$ $\rightarrow ③$

답 14

채점 기준

비율

① b 를 a 에 대한 식으로 나타낼 수 있다.

30 %

② a, b 의 값을 구할 수 있다.

40 %

③ $f(2)$ 의 값을 구할 수 있다.

30 %

0087 $x \rightarrow 4$ 일 때 (분자) $\rightarrow 0$ 이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉 } \lim_{x \rightarrow 4} (ax+b) = 0 \text{ 이므로 } 4a+b=0$$

$$\therefore b = -4a \quad \dots\dots ①$$

①을 주어진 등식의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{4\sqrt{9+x^2}-5x}{ax-4a} &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(4\sqrt{9+x^2}-5x)(4\sqrt{9+x^2}+5x)}{(ax-4a)(4\sqrt{9+x^2}+5x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{-9(x+4)(x-4)}{a(x-4)(4\sqrt{9+x^2}+5x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{-9(x+4)}{a(4\sqrt{9+x^2}+5x)} = -\frac{9}{5a} \end{aligned}$$

$-\frac{9}{5a} = -2$ 에서 $a = \frac{9}{10}$ 이므로 이것을 ①에 대입하면

$$b = -\frac{18}{5}$$

$$\therefore a+b = -\frac{27}{10} \quad \text{답 ②}$$

$$\text{0088 (주어진 식)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-2} \cdot \frac{-x-a+b}{b(x+a)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-x-a+b}{b(x-2)(x+a)} \quad \dots\dots ①$$

$x \rightarrow 2$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉 } \lim_{x \rightarrow 2} (-x-a+b) = 0 \text{ 이므로 } -2-a+b=0$$

$$\therefore b = a+2 \quad \dots\dots ②$$

②을 ①에 대입하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-(x-2)}{(a+2)(x-2)(x+a)} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-1}{(a+2)(x+a)} \\ &= -\frac{1}{(a+2)^2} \end{aligned}$$

$-\frac{1}{(a+2)^2} = -\frac{1}{9}$ 에서 $a=1$ ($\because a$ 는 자연수)

$a=1$ 을 ②에 대입하면 $b=3$

$$\therefore ab=3 \quad \text{답 3}$$

$$\text{0089 } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^2+bx+c}{x^2-x-2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}}{1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}} = a \text{ 이므로}$$

$$a=2$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2+bx+c}{x^2-x-2} = \frac{1}{2} \quad \dots\dots ①$$

에서 $x \rightarrow -1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉 } \lim_{x \rightarrow -1} (2x^2+bx+c) = 0 \text{ 이므로 } 2-b+c=0$$

$$\therefore c=b-2 \quad \dots\dots ㉔$$

㉔을 ㉑의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2+bx+b-2}{x^2-x-2} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(2x+b-2)}{(x+1)(x-2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x+b-2}{x-2} = \frac{b-4}{-3} \end{aligned}$$

$$\frac{b-4}{-3} = \frac{1}{2} \text{에서 } b = \frac{5}{2} \text{이므로 이것을 ㉔에 대입하면 } c = \frac{1}{2}$$

$$\therefore a+b+c=5 \quad \text{답 ㉕}$$

유형 13 미정계수의 결정 (2)

본책 19쪽

미정계수가 포함된 $\infty - \infty$ 꼴의 함수에서 $x \rightarrow \infty$ 일 때 극한값이 존재하면

$\Rightarrow \frac{\infty}{\infty}$ 꼴로 변형하여 분자와 분모의 최고차항의 차수와 계수를 비교한다.

0090 $x = -t$ 로 놓으면 $x \rightarrow -\infty$ 일 때 $t \rightarrow \infty$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{ax^2-bx+x}) &= \lim_{t \rightarrow \infty} (\sqrt{at^2+bt-t}) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{at^2+bt-t})(\sqrt{at^2+bt+t})}{\sqrt{at^2+bt+t}} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(a-1)t^2+bt}{\sqrt{at^2+bt+t}} \quad \dots\dots ㉑ \end{aligned}$$

㉑의 극한값이 존재하려면 $a-1=0 \quad \therefore a=1$

$a=1$ 을 ㉑에 대입하면

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{bt}{\sqrt{t^2+bt+t}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{b}{\sqrt{1+\frac{b}{t}+1}} = \frac{b}{2}$$

$$\text{따라서 } \frac{b}{2}=1 \text{이므로 } b=2 \quad \therefore ab=2 \quad \text{답 2}$$

0091 $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+2ax+1} - \sqrt{x^2-2ax+1})$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+2ax+1 - (x^2-2ax+1)}{\sqrt{x^2+2ax+1} + \sqrt{x^2-2ax+1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4ax}{\sqrt{x^2+2ax+1} + \sqrt{x^2-2ax+1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4a}{\sqrt{1+\frac{2a}{x}+\frac{1}{x^2}} + \sqrt{1-\frac{2a}{x}+\frac{1}{x^2}}} \\ &= \frac{4a}{2} = 2a \end{aligned}$$

$$\text{따라서 } 2a=6 \text{이므로 } a=3 \quad \text{답 ㉔}$$

0092 $a \leq 0$ 이면 $\lim_{x \rightarrow \infty} \{\sqrt{4x^2+2x+1} - (ax+b)\} = \infty$ 이므로

$a > 0$ 이어야 한다.

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{x \rightarrow \infty} \{\sqrt{4x^2+2x+1} - (ax+b)\} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(4x^2+2x+1) - (ax+b)^2}{\sqrt{4x^2+2x+1} + ax+b} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(4-a^2)x^2 + (2-2ab)x + 1-b^2}{\sqrt{4x^2+2x+1} + ax+b} \quad \dots\dots ㉑ \end{aligned}$$

㉑의 극한값이 존재하려면 $4-a^2=0$

$$\therefore a=2 \quad (\because a > 0)$$

$a=2$ 를 ㉑에 대입하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2-4b)x+1-b^2}{\sqrt{4x^2+2x+1}+2x+b} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2-4b+\frac{1-b^2}{x}}{\sqrt{4+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}+2+\frac{b}{x}} \\ &= \frac{2-4b}{4} \end{aligned}$$

$$\text{따라서 } \frac{2-4b}{4}=0 \text{이므로 } b=\frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{x \rightarrow \infty} x \left\{ \sqrt{4x^2+2x+1} - \left(2x + \frac{1}{2} \right) \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \left\{ (4x^2+2x+1) - \left(2x + \frac{1}{2} \right)^2 \right\}}{\sqrt{4x^2+2x+1} + 2x + \frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{4}x}{\sqrt{4x^2+2x+1} + 2x + \frac{1}{2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{4+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}} + 2 + \frac{1}{2x}} = \frac{\frac{3}{4}}{4} = \frac{3}{16} \end{aligned}$$

즉 $p=16, q=3$ 이므로

$$p+q=19$$

→ ㉓

→ ㉔

답 19

채점 기준

채점 기준	비율
① a 의 값을 구할 수 있다.	30 %
② b 의 값을 구할 수 있다.	30 %
③ p, q 의 값을 구할 수 있다.	30 %
④ $p+q$ 의 값을 구할 수 있다.	10 %

유형 14 다항식의 결정

본책 20쪽

두 다항식 $f(x), g(x)$ 에 대하여

① $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = a$ (a 는 0이 아닌 실수)이면

$\Rightarrow f(x)$ 와 $g(x)$ 의 차수가 같다.

② $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \beta$ (β 는 실수)일 때, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ 이면

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$

0093 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^2+1} = 2$ 에서 $f(x)$ 는 이차항의 계수가 2인 이차식임을 알 수 있다.

또 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x^2-1} = -1$ 에서 $x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$ 이므로 $f(1) = 0$

$f(x) = 2(x-1)(x+a)$ (a 는 상수)라 하면



$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x^2-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x-1)(x+a)}{(x+1)(x-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x+a)}{x+1} = 1+a\end{aligned}$$

따라서 $1+a=-1$ 이므로 $a=-2$

$f(x)=2(x-1)(x-2)$ 이므로

$$f(-1)=2 \cdot (-2) \cdot (-3)=12$$

답 12

0094 $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x)}{x-4}=9$ 에서 $x \rightarrow 4$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이

존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉 } \lim_{x \rightarrow 4} f(x)=0 \text{이므로 } f(4)=0 \quad \cdots ①$$

$f(x)=(x-4)(x+a)$ (a 는 상수)라 하면

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x)}{x-4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)(x+a)}{x-4} = \lim_{x \rightarrow 4} (x+a) = 4+a$$

따라서 $4+a=9$ 이므로 $a=5$

$f(x)=(x-4)(x+5)$ 이므로

$\cdots ②$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x+2)}{x-2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+2-4)(x+2+5)}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} (x+7) = 9\end{aligned}$$

$\cdots ③$

답 9

채점 기준	비율
① $f(4)=0$ 임을 알 수 있다.	40 %
② $f(x)$ 를 구할 수 있다.	40 %
③ $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x+2)}{x-2}$ 의 값을 구할 수 있다.	20 %

0095 조건 ㉞에서 $f(x)$ 는 삼차항의 계수가 1, 이차항의 계수가 3인 삼차식임을 알 수 있다.

또 조건 ㉜에서 $x \rightarrow 0$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉 } \lim_{x \rightarrow 0} f(x)=0 \text{이므로 } f(0)=0$$

$f(x)=x^3+3x^2+ax$ (a 는 상수)라 하면 조건 ㉜에서

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x^2+3x+a)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} (x^2+3x+a) = a\end{aligned}$$

$$\therefore a=4$$

따라서 $f(x)=x^3+3x^2+4x$ 이므로 구하는 나머지는

$$f(-1)=-1+3-4=-2$$

답 -2

나머지정리

다항식 $f(x)$ 를 일차식 $x-a$ 로 나누었을 때의 나머지를 R 라 하면
 $\Rightarrow R=f(a)$

0096 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)-4x^2}{2x-3}=a$ 에서 $f(x)$ 는 이차항의 계수가 4인 이차식임을 알 수 있다.

또 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1}=-2$ 에서 $x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이

존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉 } \lim_{x \rightarrow 1} f(x)=0 \text{이므로 } f(1)=0$$

$f(x)=4(x-1)(x+k)$ (k 는 상수)라 하면

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4(x-1)(x+k)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} 4(x+k) = 4(1+k)\end{aligned}$$

따라서 $4(1+k)=-2$ 이므로

$$1+k=-\frac{1}{2} \quad \therefore k=-\frac{3}{2}$$

$$f(x)=4(x-1)\left(x-\frac{3}{2}\right)=4x^2-10x+6 \text{이므로}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)-4x^2}{2x-3} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2-10x+6-4x^2}{2x-3} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-10x+6}{2x-3} \\ &= -5\end{aligned}$$

$$\therefore a=-5$$

답 ③

0097 주어진 조건에 의하여 $f(1)=0$, $f(2)=0$ 이므로

$$f(x)=(x-1)(x-2)Q(x) \quad (Q(x) \text{는 다항식}) \quad \cdots ①$$

라 하고, ①을 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1}=-1$ 의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-2)Q(x)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x-2)Q(x) = -Q(1)$$

$$\text{즉 } -Q(1)=-1 \text{이므로 } Q(1)=1 \quad \cdots ②$$

또 ①을 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2}=5$ 의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-1)(x-2)Q(x)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x-1)Q(x) = Q(2)$$

$$\therefore Q(2)=5 \quad \cdots ③$$

①에서 $Q(x)$ 의 차수가 낮아지면 $f(x)$ 의 차수도 낮아진다.

이때 ②, ③을 모두 만족시키는 다항식 $Q(x)$ 중 차수가 가장 낮은 것은 일차식이므로

$$Q(x)=ax+b \quad (a, b \text{는 상수}, a \neq 0)$$

라 하면 ②, ③에서

$$a+b=1, 2a+b=5$$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=4, b=-3$

따라서 $g(x)=(x-1)(x-2)(4x-3)$ 이므로

$$g(3)=2 \cdot 1 \cdot 9=18$$

답 ③

0098 $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{f(x)-x^2}{x+3}=4$ 에서 $x \rightarrow -3$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고

극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉 } \lim_{x \rightarrow -3} \{f(x)-x^2\}=0 \text{이므로 } f(-3)-9=0$$

$$\therefore f(-3)=9$$

$$g(x)=f(x)-f(-3)=f(x)-9 \text{이므로}$$

$$\begin{aligned}
& \lim_{x \rightarrow -3} \frac{f(x)g(x)}{x^2-9} \\
&= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{f(x)\{f(x)-9\}}{x^2-9} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{\{f(x)\}^2-9f(x)}{x^2-9} \\
&= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{\{f(x)\}^2-x^2f(x)+x^2f(x)-9f(x)}{x^2-9} \\
&= \lim_{x \rightarrow -3} \left[\frac{f(x)\{f(x)-x^2\}}{(x+3)(x-3)} + \frac{f(x)(x^2-9)}{x^2-9} \right] \\
&= \lim_{x \rightarrow -3} \left\{ \frac{f(x)}{x-3} \cdot \frac{f(x)-x^2}{x+3} + f(x) \right\} \\
&= \frac{f(-3)}{-6} \cdot 4 + f(-3) = -6 + 9 = 3
\end{aligned}$$

답 3

유형 15 함수의 극한의 대소 관계

본책 20쪽

세 함수 $f(x), g(x), h(x)$ 에 대하여 $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ 이고
 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = a$ (a 는 실수)이면
 $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} h(x) = a$

0099 $2x+3 < f(x) < 2x+7$ 의 각 변을 세제곱하면
 $(2x+3)^3 < \{f(x)\}^3 < (2x+7)^3$

$x^3+1 > 0$, 즉 $x > -1$ 일 때 각 변을 x^3+1 로 나누면

$$\frac{(2x+3)^3}{x^3+1} < \frac{\{f(x)\}^3}{x^3+1} < \frac{(2x+7)^3}{x^3+1}$$

이때 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x+3)^3}{x^3+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x+7)^3}{x^3+1} = 8$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\{f(x)\}^3}{x^3+1} = 8$$

답 ③

0100 모든 실수 x 에 대하여 $x^2+1 > 0$ 이므로 주어진 부등식의 각 변을 x^2+1 로 나누면

$$\frac{2x^2-1}{x^2+1} \leq f(x) \leq \frac{2x^2+5}{x^2+1}$$

이때 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2-1}{x^2+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2+5}{x^2+1} = 2$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 2$$

답 2

0101 $|f(x)-4x| < 1$ 에서 $-1 < f(x)-4x < 1$
 $\therefore 4x-1 < f(x) < 4x+1$

$4x-1 > 0$, 즉 $x > \frac{1}{4}$ 일 때 각 변을 제곱하면

$$(4x-1)^2 < \{f(x)\}^2 < (4x+1)^2$$

모든 실수 x 에 대하여 $2x^2-x+5 > 0$ 이므로 각 변을 $2x^2-x+5$ 로 나누면

$$\frac{(4x-1)^2}{2x^2-x+5} < \frac{\{f(x)\}^2}{2x^2-x+5} < \frac{(4x+1)^2}{2x^2-x+5}$$

이때 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(4x-1)^2}{2x^2-x+5} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(4x+1)^2}{2x^2-x+5} = 8$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\{f(x)\}^2}{2x^2-x+5} = 8$$

답 8

유형 16 함수의 극한의 활용

본책 21쪽

- (i) 구하는 선분의 길이 또는 점의 좌표를 식으로 나타낸다.
(ii) 함수의 극한의 성질을 이용하여 극한값을 구한다.

0102 $P(x, \sqrt{2x-2}), Q(x, 2)$ 이고 $x > 3$ 이므로

$$\overline{AQ} = x-3, \overline{PQ} = \sqrt{2x-2}-2$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 3+} \frac{\overline{AQ}}{\overline{PQ}} = \lim_{x \rightarrow 3+} \frac{x-3}{\sqrt{2x-2}-2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3+} \frac{(x-3)(\sqrt{2x-2}+2)}{(\sqrt{2x-2}-2)(\sqrt{2x-2}+2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3+} \frac{(x-3)(\sqrt{2x-2}+2)}{2(x-3)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3+} \frac{\sqrt{2x-2}+2}{2} = 2$$

답 ④

0103 직선 OP의 기울기가 $\frac{2t^2}{t} = 2t$ 이므로 점 $P(t, 2t^2)$ 을 지나고

직선 OP와 수직인 직선의 방정식은

$$y-2t^2 = -\frac{1}{2t}(x-t)$$

→ ①

$x=0$ 을 위의 식에 대입하면 $y=2t^2+\frac{1}{2}$ 이므로

$$f(t) = 2t^2 + \frac{1}{2}$$

→ ②

$$\therefore \lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \left(2t^2 + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}$$

→ ③

답 $\frac{1}{2}$

채점 기준	비율
① 점 P를 지나고 직선 OP와 수직인 직선의 방정식을 구할 수 있다.	40 %
② $f(t)$ 를 구할 수 있다.	30 %
③ $\lim_{t \rightarrow 0} f(t)$ 의 값을 구할 수 있다.	30 %

0104 $\overline{AB} = \sqrt{a^2+4}$

$\triangle OAB$ 의 넓이에서

$$\frac{r}{2}(\sqrt{a^2+4}+a+2) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot 2$$

$$\therefore \frac{r}{a} = \frac{2}{\sqrt{a^2+4}+a+2}$$

$$\therefore \lim_{a \rightarrow 0+} \frac{r}{a} = \lim_{a \rightarrow 0+} \frac{2}{\sqrt{a^2+4}+a+2} = \frac{1}{2}$$

답 $\frac{1}{2}$

삼각형의 넓이

삼각형 ABC의 내접원의 반지름의 길이가 r 일 때,

$$\triangle ABC = \frac{r}{2}(\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA})$$

0105 점 C의 좌표를 $(0, y)$, 점 P의 좌표를 $(x, \frac{1}{2}x^2)$ 이라 하면

$\overline{CO} = \overline{CP}$, 즉 $\overline{CO}^2 = \overline{CP}^2$ 이므로



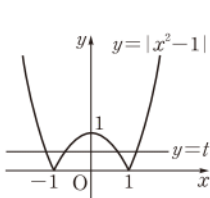
$$y^2 = x^2 + \left(\frac{1}{2}x^2 - y\right)^2, \quad y^2 = x^2 + \frac{1}{4}x^4 - x^2y + y^2$$

$$x^2y = \frac{1}{4}x^4 + x^2 \quad \therefore y = \frac{1}{4}x^2 + 1 \quad (\because x \neq 0)$$

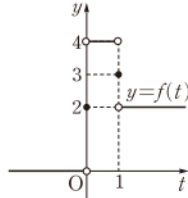
점 P가 원점 O에 한없이 가까워지면 $x \rightarrow 0$ 이므로 점 C가 한없이 가까워지는 점의 y 좌표는

$$\lim_{x \rightarrow 0} y = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{4}x^2 + 1\right) = 1 \quad \text{답 1}$$

0106 함수 $y = |x^2 - 1|$ 의 그래프와 직선 $y = t$ 는 [그림 1]과 같으므로 함수 $y = f(t)$ 의 그래프는 [그림 2]와 같다.



[그림 1]



[그림 2]

따라서 $\lim_{t \rightarrow 0+} f(t) = 4, \lim_{t \rightarrow 1+} f(t) = 2$ 이므로 $\alpha = 4, \beta = 2$

$$\therefore \frac{\alpha}{\beta} = 2 \quad \text{답 ②}$$

0107 전라 · $f(a)$ 에서 a 가 유리수인지 무리수인지 확인한다.

풀이 · ① $1 - \frac{1}{n}$ 은 유리수이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 = 1$$

② $1 + \frac{\sqrt{2}}{n}$ 는 무리수이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{n}\right)^3 = 1$$

③ $-1 + \frac{\sqrt{2}}{n}$ 는 무리수이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f\left(-1 + \frac{\sqrt{2}}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-1 + \frac{\sqrt{2}}{n}\right)^3 = -1$$

④ x 가 유리수이면 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} x^2 = 1$

x 가 무리수이면 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} x^3 = 1$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$$

⑤ x 가 유리수이면 $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} x^2 = 1$

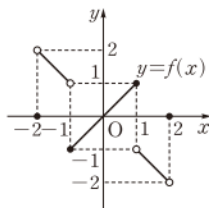
x 가 무리수이면 $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} x^3 = -1$

따라서 $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ 의 값은 존재하지 않는다. 답 ⑤

0108 전라 · $f(-x) = -f(x)$ 임을 이용하여 $-2 \leq x \leq 0$ 에서의 그래프를 그려 본다.

풀이 · 정의역에 속하는 모든 실수 x 에 대하여 $f(-x) = -f(x)$ 이므로 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

따라서 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$$\lim_{x \rightarrow -1+} f(x) + \lim_{x \rightarrow -2-} f(x) = -1 + (-2) = -3 \quad \text{답 ①}$$

다른 풀이 · $f(-x) = -f(x)$, 즉 $f(x) = -f(-x)$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow -1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1+} \{-f(-x)\}$$

$-x = t$ 로 놓으면 $x \rightarrow -1+$ 일 때 $t \rightarrow 1-$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow -1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1+} \{-f(-x)\}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 1-} \{-f(t)\} = -\lim_{t \rightarrow 1-} f(t) = -1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow -1+} f(x) + \lim_{x \rightarrow -2-} f(x) = -1 + (-2) = -3$$



함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여

① $f(-x) = f(x)$ 이면 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 y 축에 대하여 대칭이다.

② $f(-x) = -f(x)$ 이면 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

0109 전라 · x 가 정수인 경우와 정수가 아닌 경우로 나누어 $f(x)$ 를 구한다.

풀이 · \neg . (i) $x = n$ (n 은 정수)일 때,

$$f(x) = [x] + [-x] = n - n = 0$$

(ii) $x = n + \alpha$ (n 은 정수, $0 < \alpha < 1$)일 때,

$$-x = -n - \alpha = -n - 1 + (1 - \alpha)$$

$$\text{이므로 } f(x) = [x] + [-x] = n + (-n - 1) = -1$$

(i), (ii)에서 치역은 $\{-1, 0\}$ 이다.

\neg . (i) $a = n$ (n 은 정수)일 때,

$x \rightarrow a+$ 이면 $n < x < n+1, -n-1 < -x < -n$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow a+} ([x] + [-x]) = n + (-n - 1) = -1$$

$x \rightarrow a-$ 이면 $n-1 < x < n, -n < -x < -n+1$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow a-} ([x] + [-x]) = (n-1) + (-n) = -1$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -1$ 이다.

(ii) $a \neq n$ (n 은 정수)일 때,

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 의 값은 항상 존재하며 그 값은 -1 이다.

(i), (ii)에서 모든 실수 a 에 대하여 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 의 값이 존재한다.

\neg . [반례] $f(0) = 0$ 이지만 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -1$ 이다.

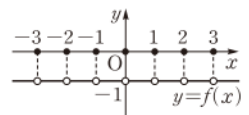
이상에서 옳은 것은 \neg, \neg 이다. 답 ③

다른 풀이 · \neg . \neg 에 의하여 함수

$y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림

과 같으므로 모든 실수 a 에 대하여

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 의 값이 존재한다.



0110 전라 · a 의 값의 범위를 나누어 $f(a)$ 의 값을 구한다.

풀이 · $x^2 - 3x + 2 = 0$ 에서 $(x-1)(x-2) = 0$

$$\therefore x = 1 \text{ 또는 } x = 2 \quad \therefore A = \{1, 2\}$$

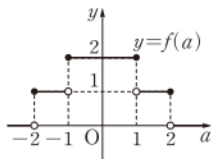
$(x-a)(x-a-3) \leq 0$ 에서 $a \leq x \leq a+3$

$$\therefore B = \{x | a \leq x \leq a+3\}$$

$f(a) = n(A \cap B)$ 이므로

- (i) $a < -2$ 일 때, $f(a) = 0$
(ii) $-2 \leq a < -1$ 일 때, $f(a) = 1$
(iii) $-1 \leq a \leq 1$ 일 때, $f(a) = 2$
(iv) $1 < a \leq 2$ 일 때, $f(a) = 1$
(v) $a > 2$ 일 때, $f(a) = 0$

이상에서 $y=f(a)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



∴ $\lim_{a \rightarrow 1+} f(a) = 1, \lim_{a \rightarrow 1-} f(a) = 2$ 이므로 $\lim_{a \rightarrow 1} f(a)$ 의 값은 존재하지 않는다.

∴ $\lim_{a \rightarrow 2+} f(a) = 0, f(2) = 1$ 이므로

$$\lim_{a \rightarrow 2+} f(a) < f(2)$$

∴ $a \rightarrow -2$ 일 때 $f(a) = 1$ 이므로

$$\lim_{a \rightarrow -2+} f(f(a)) = f(1) = 2$$

$a \rightarrow -2$ 일 때 $f(a) = 0$ 이므로

$$\lim_{a \rightarrow -2-} f(f(a)) = f(0) = 2$$

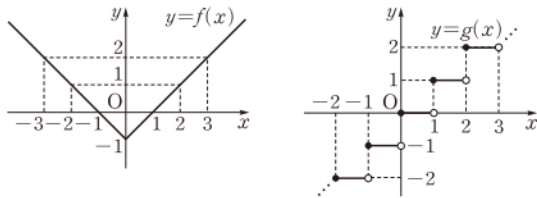
$$\therefore \lim_{a \rightarrow -2} f(f(a)) = 2$$

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

0111 전략 두 함수 $y=f(x), y=g(x)$ 의 그래프를 좌표평면 위에 나타낸 후 주어진 조건을 만족시키는 정수 k 의 값을 구한다.

풀이 두 함수 $y=f(x), y=g(x)$ 의 그래프는 각각 다음 그림과 같다.



$\frac{1}{x} = t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 1$ 일 때 $t \rightarrow 1$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1-} g\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{t \rightarrow 1+} g(t) = 1$$

즉 $\lim_{x \rightarrow k+} g(f(x)) = 1$ 이어야 하므로 $x \rightarrow k$ 일 때

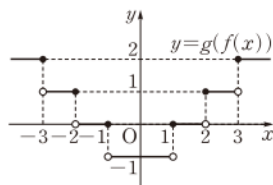
$$f(x) \rightarrow 1+ \text{ 또는 } f(x) \rightarrow 2-$$

$$\therefore k = -3 \text{ 또는 } k = 2$$

따라서 구하는 모든 정수 k 의 값의 합은 $-3 + 2 = -1$

답 -1

참고 함수 $y=g(f(x))$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



0112 전략 조건 ㉞의 식을 변형하여 먼저 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ 의 값을 구한다.

풀이 $x \neq 0, g(x) \neq -2$ 일 때, 조건 ㉞의 식의 양변을 $x\{g(x)+2\}$

로 나누면 $\frac{f(x)}{x} = \frac{g(x)-2}{g(x)+2}$ 이므로 조건 ㉞에 의하여

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)-2}{g(x)+2} = \frac{1-2}{1+2} = -\frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+f(x)g(x)}{x^2-f(x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+\frac{f(x)}{x} \cdot g(x)}{x-\frac{f(x)}{x}} \\ &= \frac{1-\frac{1}{3} \cdot 1}{0+\frac{1}{3}} = 2 \end{aligned}$$

답 2

0113 전략 인수정리와 근의 공식을 이용하여 삼차방정식의 근을 구한다.

풀이 $f(x) = x^3 - (3a+1)x^2 + 2(a-1)x + a+2$ 라 하면

$f(1) = 0$ 이므로 $f(x) = (x-1)(x^2 - 3ax - a - 2)$

이때 방정식 $x^2 - 3ax - a - 2 = 0$ 에서 근의 공식에 의하여

$$x = \frac{3a \pm \sqrt{9a^2 + 4a + 8}}{2}$$

따라서 주어진 삼차방정식의 세 근 중 가장 작은 근은

$$\frac{3a - \sqrt{9a^2 + 4a + 8}}{2} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow \infty} \alpha &= \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{3a - \sqrt{9a^2 + 4a + 8}}{2} \\ &= \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{9a^2 - (9a^2 + 4a + 8)}{2(3a + \sqrt{9a^2 + 4a + 8})} \\ &= \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{-2a - 4}{3a + \sqrt{9a^2 + 4a + 8}} \\ &= \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{-2 - \frac{4}{a}}{3 + \sqrt{9 + \frac{4}{a} + \frac{8}{a^2}}} = -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

답 ②

인수정리

다항식 $f(x)$ 가 일차식 $x-a$ 로 나누어떨어지기 위한 필요충분 조건은 $f(a) = 0$ 이다.

⇒ 다항식 $f(x)$ 가 x 에 대한 일차식 $x-a$ 로 나누어떨어진다.

$$\iff f(x) \text{는 } x-a \text{를 인수로 갖는다.}$$

$$\iff f(a) = 0$$

0114 전략 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ 임을 이용하여 함수 $f(x)$ 의 식을 추론한다.

풀이 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq 0$ 이면

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - (x-a)}{f(x) + (x-a)} = 1 \neq \frac{3}{5}$$

이므로 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \quad \therefore f(a) = 0$

따라서 $f(x) = (x-a)(x-b)$ (b 는 상수)라 하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - (x-a)}{f(x) + (x-a)} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-a)(x-b) - (x-a)}{(x-a)(x-b) + (x-a)} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-a)(x-b-1)}{(x-a)(x-b+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{x-b-1}{x-b+1} = \frac{a-b-1}{a-b+1} \end{aligned}$$



$$\approx \frac{a-b-1}{a-b+1} = \frac{3}{5} \text{이므로} \quad 5a-5b-5=3a-3b+3$$

$$2a-2b=8 \quad \therefore a-b=4$$

이때 a, b 는 방정식 $f(x)=0$ 의 두 근이므로

$$|a-\beta|=4$$

답 ④

0115 전략 $\lim_{x \rightarrow a} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| = \infty$ 일 때, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha$ (α 는 0이 아닌 실수)이면 $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ 이다.

풀이 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \frac{1}{3}$ 이므로 $a=3$

$$\lim_{x \rightarrow -1} |f(x)| = \infty, \lim_{x \rightarrow 5} |f(x)| = \infty \text{이고, } \lim_{x \rightarrow -1} (x^2-3x+2) = 6,$$

$$\lim_{x \rightarrow 5} (x^2-3x+2) = 12 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} (ax^2+bx+c) = 0, \lim_{x \rightarrow 5} (ax^2+bx+c) = 0$$

$$\therefore ax^2+bx+c = 3(x+1)(x-5) = 3x^2-12x-15$$

따라서 $b=-12, c=-15$ 이므로

$$a+b+c = -24$$

답 -24

0116 전략 $\lim_{x \rightarrow \infty} g\left(1-\frac{1}{1+x}\right), \lim_{x \rightarrow \infty} g\left(2-\frac{x}{1+x}\right)$ 의 값을 구한 후 함수의 극한의 대소 관계를 이용한다.

풀이 $g\left(1-\frac{1}{1+x}\right) < f(x) < g\left(2-\frac{x}{1+x}\right)$ 에서

$$\frac{x}{1+x} = 1 - \frac{1}{1+x} \text{이므로}$$

$$g\left(1-\frac{1}{1+x}\right) < f(x) < g\left(1+\frac{1}{1+x}\right)$$

$$1 - \frac{1}{1+x} = t \text{로 놓으면 } x \rightarrow \infty \text{일 때 } t \rightarrow 1- \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g\left(1-\frac{1}{1+x}\right) = \lim_{t \rightarrow 1-} g(t) = 1$$

$$1 + \frac{1}{1+x} = s \text{로 놓으면 } x \rightarrow \infty \text{일 때 } s \rightarrow 1+ \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g\left(1+\frac{1}{1+x}\right) = \lim_{s \rightarrow 1+} g(s) = 1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow \infty} g\left(1-\frac{1}{1+x}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} g\left(1+\frac{1}{1+x}\right) = 1 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$$

답 1

0117 전략 원이 직선에 접하므로 원의 중심과 직선 사이의 거리가 원의 반지름의 길이와 같다.

풀이 원의 반지름의 길이를 r 라 하면 원이 직선 $y=x$, 즉 $x-y=0$ 에 접하므로

$$r = \frac{\left| a - \left(a - \frac{1}{a} \right) \right|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2a}} \quad (\because a > 0) \quad \left[\text{점 A와 직선 } y=x \text{ 사이의 거리} \right]$$

이때 원 위의 한 점에서 원점 O까지의 거리의 최솟값은 OA의 길이에서 반지름의 길이를 뺀 것과 같다.

$$OA = \sqrt{a^2 + \left(a - \frac{1}{a} \right)^2} = \sqrt{2a^2 - 2 + \frac{1}{a^2}} \text{이므로}$$

$$d = OA - r = \sqrt{2a^2 - 2 + \frac{1}{a^2}} - \frac{1}{\sqrt{2a}}$$

$$\therefore \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{d}{a} = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2a^2 - 2 + \frac{1}{a^2}} - \frac{1}{\sqrt{2a}}}{a}$$

$$= \lim_{a \rightarrow \infty} \left(\sqrt{2 - \frac{2}{a^2} + \frac{1}{a^4}} - \frac{1}{\sqrt{2a^3}} \right) = \sqrt{2}$$

답 ②

0118 전략 두 직선 PQ, AB의 방정식을 각각 구한 후 $\overline{AP} = \overline{BQ}$ 임을 이용하여 두 직선의 교점의 좌표를 한 문자에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 직선 AB의 방정식은 $y = -2x + 2$ ㉠

직선 PQ의 방정식은 $y = -\frac{q}{p}x + q$ ㉡

$\overline{AP} = p-1, \overline{BQ} = 2-q$ 이므로 $\overline{AP} = \overline{BQ}$ 에서

$$p-1 = 2-q \quad \therefore q = 3-p \quad \text{..... ㉢}$$

㉢을 ㉡에 대입하면 $y = \frac{p-3}{p}x + 3-p$ 이므로 두 직선 PQ와 AB

의 교점의 x 좌표는 $-2x+2 = \frac{p-3}{p}x+3-p$ 에서

$$\frac{3p-3}{p}x = p-1 \quad \therefore x = \frac{p(p-1)}{3(p-1)} = \frac{p}{3}$$

이것을 ㉠에 대입하면 $y = -\frac{2}{3}p+2$

두 점 P, Q가 각각 점 A, B에 한없이 가까워질 때 $p \rightarrow 1+$ 이므로

$$\lim_{p \rightarrow 1+} x = \lim_{p \rightarrow 1+} \frac{p}{3} = \frac{1}{3}, \quad \lim_{p \rightarrow 1+} y = \lim_{p \rightarrow 1+} \left(-\frac{2}{3}p+2 \right) = \frac{4}{3}$$

따라서 구하는 점의 좌표는 $\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3} \right)$

답 ③

0119 전략 $\overline{BQ} = y$ 라 하고 x 와 y 사이의 관계식을 구하여 $S(x)$ 를 x 에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 점 Q에서 \overline{AD} 에 내린 수선의 발을 H라 하고 $\overline{BQ} = y$ 라 하면 $\overline{PH} = y-x$, $\overline{PQ} = \overline{BQ} = y$ 이므로 직각삼각형 PQH에서

$$y^2 = (y-x)^2 + 1^2$$

$$y^2 = y^2 - 2xy + x^2 + 1 \quad \therefore y = \frac{x^2+1}{2x} \quad \text{..... ㉠}$$

$\triangle RPA$ 와 $\triangle PQH$ 에서

$$\angle A = \angle H = 90^\circ, \angle APR = \angle HQP$$

이므로 $\triangle RPA \sim \triangle PQH$ (AA 닮음)

이때 $\overline{AP} : \overline{HQ} = \overline{PR} : \overline{QP}$ 에서

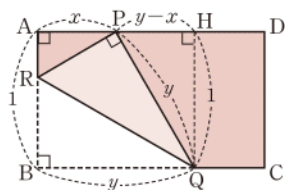
$$x : 1 = \overline{PR} : y \quad \therefore \overline{PR} = xy$$

따라서 $S(x) = \frac{1}{2} \cdot \overline{PR} \cdot \overline{PQ} = \frac{1}{2} \cdot xy \cdot y = \frac{1}{2}xy^2$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0+} xS(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{2}x^2y^2 = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{2}x^2 \left(\frac{x^2+1}{2x} \right)^2 \quad (\because \text{㉠})$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x^4+2x^2+1}{8} = \frac{1}{8}$$

답 ⑤



0120 전략 점 P, Q, R의 좌표를 구한 후 $\triangle PAR$, $\triangle RAQ$ 의 넓이의 비는 \overline{PR} , \overline{RQ} 의 길이의 비와 같음을 이용한다.

풀이 $P(t, at(t-1))$, $Q(t, -b(t+1)(t-1))$, $R(t, \frac{1}{2}t - \frac{1}{2})$ 이므로

$$\overline{PR} = at(t-1) - \frac{1}{2}(t-1) = (t-1)\left(at - \frac{1}{2}\right)$$

$$\overline{RQ} = \frac{1}{2}(t-1) + b(t+1)(t-1) = (t-1)\left(bt + b + \frac{1}{2}\right)$$

$$\therefore \lim_{t \rightarrow 1+} \frac{S(t)}{T(t)} = \lim_{t \rightarrow 1+} \frac{\overline{PR}}{\overline{RQ}} = \lim_{t \rightarrow 1+} \frac{(t-1)\left(at - \frac{1}{2}\right)}{(t-1)\left(bt + b + \frac{1}{2}\right)}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 1+} \frac{at - \frac{1}{2}}{bt + b + \frac{1}{2}} = \frac{a - \frac{1}{2}}{2b + \frac{1}{2}}$$

$$\text{즉 } k = \frac{a - \frac{1}{2}}{2b + \frac{1}{2}} \text{이므로 } 1 < k < 2 \text{에서 } 1 < \frac{a - \frac{1}{2}}{2b + \frac{1}{2}} < 2$$

$$2b + \frac{1}{2} < a - \frac{1}{2} < 4b + 1$$

$$\therefore 2b + 1 < a < 4b + \frac{3}{2}$$

(i) $b=1$ 일 때, $3 < a < \frac{11}{2}$ 이므로 $a=4, 5$

(ii) $b=2$ 일 때, $5 < a < \frac{19}{2}$ 이므로 $a=6, 7, 8, 9$

(iii) $b=3$ 일 때, $7 < a < \frac{27}{2}$ 이므로 $a=8, 9$

(iv) $b \geq 4$ 일 때, 조건을 만족시키는 한 자리 자연수 a 는 존재하지 않는다.

이상에서 한 자리 자연수 a, b 의 순서쌍 (a, b) 는

$(4, 1), (5, 1), (6, 2), (7, 2), (8, 2), (9, 2), (8, 3), (9, 3)$

의 8개이다. 답 8

0121 전략 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프를 그린 후 점 $P(-3, 0)$ 을 지나는 직선을 그려 a 의 값의 범위에 따른 $h(a)$ 의 값을 찾는다.

풀이 $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2 & (-1 \leq x \leq 1) \\ x^2 & (x < -1 \text{ 또는 } x > 1) \end{cases}$ 이고 $g(x) = -f(x)$

이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 x 축에 대하여 대칭이다. → ①

점 $P(-3, 0)$ 을 지나고 기울기가 a 인 직선을 l 이라 하면 직선 l 의 방정식은

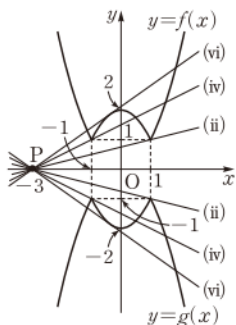
$$y = a(x+3)$$

직선 l 이 점 $(1, 1)$ 을 지날 때 기울기 a 는

$$a = \frac{1-0}{1-(-3)} = \frac{1}{4}$$

직선 l 이 점 $(-1, 1)$ 을 지날 때 기울기 a 는

$$a = \frac{1-0}{-1-(-3)} = \frac{1}{2}$$



따라서 직선 l 이 곡선 $y=-x^2+2$ 와 접할 때 a 의 값을 m 이라 하면 a 의 값의 범위에 따른 $h(a)$ 의 값은 다음과 같다.

(i) $|a| < \frac{1}{4}$ 일 때, $h(a) = 0$

(ii) $|a| = \frac{1}{4}$ 일 때, $h(a) = 1$

(iii) $\frac{1}{4} < |a| < \frac{1}{2}$ 일 때, $h(a) = 2$

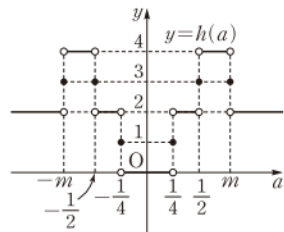
(iv) $|a| = \frac{1}{2}$ 일 때, $h(a) = 3$

(v) $\frac{1}{2} < |a| < m$ 일 때, $h(a) = 4$

(vi) $|a| = m$ 일 때, $h(a) = 3$

(vii) $|a| > m$ 일 때, $h(a) = 2$

이상에서 함수 $y=h(a)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. → ②



$\lim_{a \rightarrow k+} h(a) + \lim_{a \rightarrow k-} h(a) = 6$ 을 만족시키는 k 의 값은 $\pm m, \pm \frac{1}{2}$ 이므로 그 개수는 4이다. → ③

채점 기준	비율
① 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프를 그릴 수 있다.	20 %
② a 의 값의 범위에 따라 $h(a)$ 의 값을 구하고 함수 $y=h(a)$ 의 그래프를 그릴 수 있다.	50 %
③ $\lim_{a \rightarrow k+} h(a) + \lim_{a \rightarrow k-} h(a) = 6$ 을 만족시키는 k 의 개수를 구할 수 있다.	30 %

0122 전략 모든 실수 x 에 대하여 $f(x-5)=f(x)-10$ 이 성립함을 이용하여 주어진 그래프 이외의 부분을 더 그려 본다.

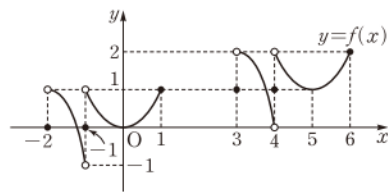
풀이 $x+2=s$, $-\frac{1}{x}=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 1-$ 일 때 $s \rightarrow 3-$ 이고, $t \rightarrow -1-$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1-} f(x+2)f\left(-\frac{1}{x}\right) = \lim_{s \rightarrow 3-} f(s) \lim_{t \rightarrow -1-} f(t) = 2 \quad \cdots \textcircled{1}$$

또 $x-1=u$, $x^2=v$ 로 놓으면 $x \rightarrow 2+$ 일 때 $u \rightarrow 1+$ 이고, $v \rightarrow 4+$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 2+} f(x-1)f(x^2) = \lim_{u \rightarrow 1+} f(u) \lim_{v \rightarrow 4+} f(v) = -2 \quad \cdots \textcircled{2}$$

한편 모든 실수 x 에 대하여 $f(x-5)=f(x)-1$ 이 성립하므로 $-2 \leq x \leq 6$ 일 때, 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



위의 그래프에서 $\lim_{t \rightarrow -1-} f(t) = -1$ 이므로 $\textcircled{1}$ 에서

$$\lim_{s \rightarrow 3-} f(s) = -2 \quad \therefore \lim_{x \rightarrow 3-} f(x) = -2 \quad \cdots \textcircled{2}$$

또 $\lim_{v \rightarrow 4+} f(v) = 2$ 이므로 $\textcircled{2}$ 에서

$$\lim_{u \rightarrow 1+} f(u) = -1 \quad \therefore \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = -1 \quad \cdots \textcircled{3}$$



$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 3-} f(x) = -1 - 2 = -3 \quad \cdots 4$$

답 -3

채점 기준	비율
① $-2 \leq x \leq 6$ 일 때, 함수 $y=f(x)$ 의 그래프를 그릴 수 있다.	30 %
② $\lim_{x \rightarrow 3-} f(x)$ 의 값을 구할 수 있다.	30 %
③ $\lim_{x \rightarrow 1+} f(x)$ 의 값을 구할 수 있다.	30 %
④ $\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 3-} f(x)$ 의 값을 구할 수 있다.	10 %

0123 전략 x 의 값의 범위에 따라 함수 $f(x)$ 의 식을 구한다.

풀이 (i) $0 < x < 2$ 일 때, $\max(x, 2) = 2$ 이므로

$$f(x) = 2 - \frac{2x-1}{x} = \frac{1}{x}$$

(ii) $x=2$ 일 때, $f(2) = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$

(iii) $x > 2$ 일 때, $\max(x, 2) = x$ 이므로

$$f(x) = x - \frac{2x-1}{x} = \frac{x^2-2x+1}{x} \quad \cdots 1$$

이상에서

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2-} \frac{x-2}{f(x)-f(2)} &= \lim_{x \rightarrow 2-} \frac{x-2}{\frac{1}{x}-\frac{1}{2}} = \lim_{x \rightarrow 2-} \frac{2x(x-2)}{2-x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2-} (-2x) = -4 = a \quad \cdots 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} &= \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{\frac{x^2-2x+1}{x}-\frac{1}{2}}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{2x^2-5x+2}{2x(x-2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{(x-2)(2x-1)}{2x(x-2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{2x-1}{2x} = \frac{3}{4} = b \quad \cdots 3 \end{aligned}$$

$$\therefore ab = -3 \quad \cdots 4$$

답 -3

채점 기준	비율
① x 의 값의 범위에 따라 함수 $f(x)$ 의 식을 구할 수 있다.	30 %
② a 의 값을 구할 수 있다.	30 %
③ b 의 값을 구할 수 있다.	30 %
④ ab 의 값을 구할 수 있다.	10 %

0124 전략 원이 x 축에 접하면 (반지름의 길이) = | (중심의 y 좌표) | 이다.

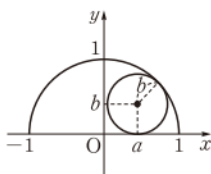
풀이 중심이 원점이고 반지름의 길이가 1인 반원의 방정식은

$$x^2 + y^2 = 1 \quad (y \geq 0)$$

이 반원에 내접하고 x 축에 접하는 원의 중심의 좌표가 (a, b) 이므로 이 원의 반지름의 길이는 b 이다.

$$\therefore \sqrt{a^2 + b^2} = 1 - b \quad \cdots 1$$

위의 식의 양변을 제곱하면



$$a^2 + b^2 = (1-b)^2, \quad a^2 + b^2 = 1 - 2b + b^2$$

$$\therefore b = \frac{1}{2}(1-a^2) \quad \cdots 2$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{a \rightarrow -1+} \frac{b}{a+1} &= \lim_{a \rightarrow -1+} \frac{1-a^2}{2(a+1)} \\ &= \lim_{a \rightarrow -1+} \frac{-(a+1)(a-1)}{2(a+1)} \\ &= \lim_{a \rightarrow -1+} \frac{-(a-1)}{2} = 1 \quad \cdots 3 \end{aligned}$$

답 1

채점 기준	비율
① 주어진 조건을 a, b 에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30 %
② b 를 a 에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	20 %
③ $\lim_{a \rightarrow -1+} \frac{b}{a+1}$ 의 값을 구할 수 있다.	50 %

0125 전략 원의 접선은 접점을 지나는 원의 반지름과 수직임을 이용한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 직선 QR와 호 AB가 접하는 점을 M이라 하면

$\angle QOM = \frac{1}{2} \cdot 60^\circ = 30^\circ$ 이므로 직각삼각

형 QOM에서

$$\overline{MQ} = \overline{OM} \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

직각삼각형 A'OP에서

$$\overline{OP} = \overline{A'O} \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}(x+1)$$

$$\therefore \overline{PM} = \overline{OP} - \overline{OM} = \frac{\sqrt{3}}{2}(x+1) - 1 = \frac{\sqrt{3}x + \sqrt{3} - 2}{2} \quad \cdots 1$$

따라서

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2} \cdot 2 \overline{MQ} \cdot \overline{PM} \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}x + \sqrt{3} - 2}{2} \\ &= \frac{x}{2} + \frac{3-2\sqrt{3}}{6} \quad \cdots 2 \end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x+1} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x}{2} + \frac{3-2\sqrt{3}}{6}}{x+1} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2} + \frac{3-2\sqrt{3}}{6x}}{1 + \frac{1}{x}} = \frac{1}{2} \quad \cdots 3 \end{aligned}$$

답 $\frac{1}{2}$

채점 기준	비율
① $\overline{MQ}, \overline{PM}$ 의 길이를 구할 수 있다.	50 %
② $f(x)$ 를 구할 수 있다.	30 %
③ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x+1}$ 의 값을 구할 수 있다.	20 %

02 함수의 연속

0126 (1) $f(3)$ 이 정의되어 있지 않으므로 불연속이다.

(2) $\lim_{x \rightarrow 3+} f(x) = 4, \lim_{x \rightarrow 3-} f(x) = 3$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 3+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 3-} f(x)$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ 의 값이 존재하지 않으므로 불연속이다.

(3) $f(3) = 4$ 이고, $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 3$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) \neq f(3)$$

따라서 $f(x)$ 는 $x=3$ 에서 불연속이다.

☞ (1) \supset (2) \supset (3) \supset

0127 $f(1) = 1, \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$

따라서 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 연속이다. ☞ 연속

0128 $f(1) = 0, \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$

따라서 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 연속이다. ☞ 연속

0129 $f(1)$ 이 정의되지 않으므로 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 불연속이다.

☞ 불연속

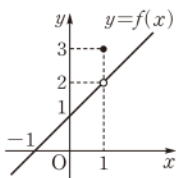
0130 $f(1) = 3,$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2$$

이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \neq f(1)$$

따라서 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 불연속이다.



☞ 불연속

0131 ☞ $[-1, 2]$

0132 ☞ $(-3, 2)$

0133 ☞ $[1, 5)$

0134 ☞ $(-5, -1]$

0135 ☞ $[0, \infty)$

0136 ☞ $(-\infty, 4)$

0137 주어진 함수의 정의역은 실수 전체의 집합이므로

$(-\infty, \infty)$ ☞ $(-\infty, \infty)$

0138 주어진 함수의 정의역은 $9 - x^2 \geq 0$, 즉 $-3 \leq x \leq 3$ 인 x 의 값들의 집합이므로 $[-3, 3]$ ☞ $[-3, 3]$

0139 함수 $f(x) = x^2 - 4$ 는 모든 실수, 즉 구간 $(-\infty, \infty)$ 에서 연속이다. ☞ $(-\infty, \infty)$

0140 함수 $f(x) = \sqrt{5-x}$ 는 $5-x \geq 0$ 일 때, 즉 구간 $(-\infty, 5]$ 에서 연속이다. ☞ $(-\infty, 5]$

0141 함수 $f(x) = 3$ 은 모든 실수, 즉 구간 $(-\infty, \infty)$ 에서 연속이다. ☞ $(-\infty, \infty)$

0142 함수 $f(x) = \frac{x-1}{2x+1}$ 은 $x \neq -\frac{1}{2}$ 일 때, 즉 구간

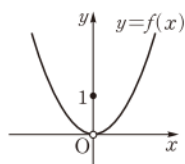
$(-\infty, -\frac{1}{2}), (-\frac{1}{2}, \infty)$ 에서 연속이다.

☞ $(-\infty, -\frac{1}{2}), (-\frac{1}{2}, \infty)$

0143 $f(0) = 1, \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$ 이므로

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \neq f(0)$

따라서 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 불연속이고 그 이외의 x 의 값에서는 연속이다. ☞ 풀이 참조



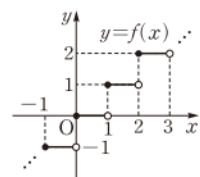
0144 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 정수 n 에 대하여

$$\lim_{x \rightarrow n+} f(x) = n, \lim_{x \rightarrow n-} f(x) = n-1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow n+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow n-} f(x)$$

따라서 정수 n 에 대하여 $\lim_{x \rightarrow n} f(x)$ 의 값이 존재하지 않으므로 $f(x)$ 는 $x=n$ (n 은 정수)에서 불연속이고 그 이외의 x 의 값에서는 연속이다.

☞ 풀이 참조



0145 ㄹ. 함수 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 는 $g(x) = 0$ 일 때 불연속이므로 실수 전체의 집합에서 항상 연속이라고 할 수 없다.

이상에서 항상 연속인 함수는 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

☞ ㄱ, ㄴ, ㄷ

0146 (1) $f(x) - g(x) = 2x - (x^2 + 2x - 8) = -x^2 + 8$

따라서 $f(x) - g(x)$ 는 다항함수이므로 연속인 구간은 $(-\infty, \infty)$

(2) $f(x)g(x) = 2x(x^2 + 2x - 8) = 2x^3 + 4x^2 - 16x$

따라서 $f(x)g(x)$ 는 다항함수이므로 연속인 구간은 $(-\infty, \infty)$

$$(3) \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{x^2 + 2x - 8}{2x}$$

따라서 $\frac{g(x)}{f(x)}$ 는 $2x \neq 0$, 즉 $x \neq 0$ 인 모든 실수에서 연속이므로 연속인 구간은 $(-\infty, 0), (0, \infty)$

$$(4) \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{2x}{x^2 + 2x - 8} = \frac{2x}{(x+4)(x-2)}$$

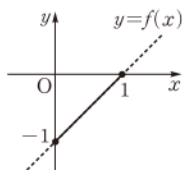
따라서 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 는 $(x+4)(x-2) \neq 0$, 즉 $x \neq -4$ 이고 $x \neq 2$ 인 모든 실수에서 연속이므로 연속인 구간은 $(-\infty, -4), (-4, 2), (2, \infty)$

☞ 풀이 참조



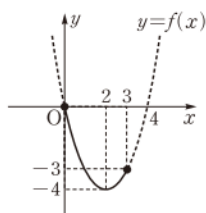
- 0147** (1) 최솟값: 0, 최댓값: 없다.
(2) 최댓값: 1, 최솟값: -1

0148 함수 $f(x)=x-1$ 은 구간 $[0, 1]$ 에서 연속이고 구간 $[0, 1]$ 에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
따라서 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 최댓값 0, $x=0$ 에서 최솟값 -1을 갖는다.



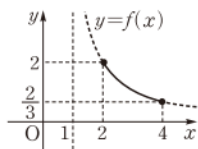
☐ 최댓값: 0, 최솟값: -1

0149 함수 $f(x)=x^2-4x$ 는 구간 $[0, 3]$ 에서 연속이고 구간 $[0, 3]$ 에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
따라서 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 최댓값 0, $x=2$ 에서 최솟값 -4를 갖는다.



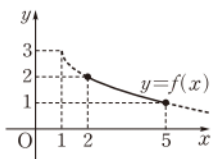
☐ 최댓값: 0, 최솟값: -4

0150 함수 $f(x)=\frac{2}{x-1}$ 는 구간 $[2, 4]$ 에서 연속이고 구간 $[2, 4]$ 에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
따라서 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 최댓값 2, $x=4$ 에서 최솟값 $\frac{2}{3}$ 를 갖는다.



☐ 최댓값: 2, 최솟값: $\frac{2}{3}$

0151 함수 $f(x)=3-\sqrt{x-1}$ 은 구간 $[2, 5]$ 에서 연속이고 구간 $[2, 5]$ 에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
따라서 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 최댓값 2, $x=5$ 에서 최솟값 1을 갖는다.



☐ 최댓값: 2, 최솟값: 1

0152 함수 $f(x)=x^2$ 은 구간 $(-\infty, \infty)$ 에서 **연속**이므로 닫힌 구간 $[1, 2]$ 에서도 연속이다.
또 $f(1)=1, f(2)=4$ 에서 $f(1) \neq f(2)$ 이고, $1 < \sqrt{3} < 4$ 이므로 **사잇값의 정리**에 의하여 $f(c)=\sqrt{3}$ 을 만족시키는 c 가 열린구간 $(1, 2)$ 에 적어도 하나 존재한다.

☐ (가) 연속 (나) 사잇값의 정리

0153 (1) $f(1)=-1, f(3)=19$ 이므로 $f(1) < 10 < f(3)$
(2) $f(x)$ 는 닫힌구간 $[1, 3]$ 에서 연속이고 (1)에서 $f(1) \neq f(3)$ 이므로 사잇값의 정리에 의하여 $f(c)=10$ 인 c 가 열린구간 $(1, 3)$ 에 적어도 하나 존재한다.

☐ 풀이 참조

유형 01 함수의 연속

본책 30쪽

함수 $f(x)$ 가 $x=a$ 에서 연속인지 알아보려면

- (i) 함수값 $f(a)$ 가 존재하는지
- (ii) $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 의 값이 존재하는지
 $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a+} f(x)$ 와 $\lim_{x \rightarrow a-} f(x)$ 의 값이 같은지
- (iii) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ 인지
 를 모두 확인한다.

$$\begin{aligned} \text{0154 } \neg. \lim_{x \rightarrow -2} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2-4}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(x-2)}{x+2} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} (x-2) = -4 \\ \therefore \lim_{x \rightarrow -2} f(x) &\neq f(-2) \end{aligned}$$

따라서 $f(x)$ 는 $x=-2$ 에서 불연속이다.

ㄴ. $g(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속이라면 $x=1$ 에서 연속이어야 한다.

이때 $g(1)=-1$ 이고,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1+} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 1+} (\sqrt{x-1}-1) = -1, \\ \lim_{x \rightarrow 1-} g(x) &= -1 \end{aligned}$$

이므로 $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = -1$

즉 $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = g(1)$ 이므로 $g(x)$ 는 $x=1$ 에서 연속이다.

따라서 $g(x)$ 는 모든 실수 x 에서 연속이다.

$$\text{ㄷ. } \lim_{x \rightarrow 1+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{x(x-1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1+} x = 1$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1-} h(x) &= \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{x(x-1)}{-(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1-} (-x) = -1 \\ \therefore \lim_{x \rightarrow 1+} h(x) &\neq \lim_{x \rightarrow 1-} h(x) \end{aligned}$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 1} h(x)$ 의 값이 존재하지 않으므로 $h(x)$ 는 $x=1$ 에서 불연속이다.

이상에서 모든 실수 x 에서 연속인 함수는 ㄴ뿐이다.

☐ ②

여러 가지 함수의 연속성

- ① 다항함수 \Rightarrow 구간 $(-\infty, \infty)$ 에서 연속
- ② 유리함수 $y = \frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow g(x) \neq 0$ 인 x 에서 연속
- ③ 무리함수 $y = \sqrt{f(x)} \Rightarrow f(x) \geq 0$ 인 x 에서 연속
- ④ 함수 $y = [x]$ (단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수)
 $\Rightarrow x \neq n$ (n 은 정수)에서 연속

0155 ① $f(-1)$ 이 정의되지 않으므로 $f(x)$ 는 $x=-1$ 에서 불연속이다.

$$\begin{aligned} \text{② } \lim_{x \rightarrow -1+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1+} [x]^2 = (-1)^2 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow -1-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1-} [x]^2 = (-2)^2 = 4 \\ \therefore \lim_{x \rightarrow -1+} f(x) &\neq \lim_{x \rightarrow -1-} f(x) \end{aligned}$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ 의 값이 존재하지 않으므로 $f(x)$ 는 $x=-1$ 에서 불연속이다.

③ $f(-1) = -1$ 이고,

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} (x+1)^2 = 0$$

이므로 $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) \neq f(-1)$

따라서 $f(x)$ 는 $x = -1$ 에서 불연속이다.

$$\textcircled{4} \lim_{x \rightarrow -1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1+} \frac{3|x+1|}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1+} \frac{3(x+1)}{x+1} = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow -1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1-} \frac{3|x+1|}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1-} \frac{-3(x+1)}{x+1} = -3$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow -1+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow -1-} f(x)$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ 의 값이 존재하지 않으므로 $f(x)$ 는 $x = -1$ 에서 불연속이다.

⑤ $f(-1) = -2$ 이고,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2-1}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x-1)}{x+1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} (x-1) = -2 \end{aligned}$$

$$\text{이므로 } \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = f(-1)$$

따라서 $f(x)$ 는 $x = -1$ 에서 연속이다. 답 ⑤

0156 $f(a) = a$ 이고,

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+} x = a$$

$$\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a-} (x^2-2) = a^2-2 \quad \cdots \textcircled{1}$$

함수 $f(x)$ 가 $x=a$ 에서 연속하려면 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 의 값이 존재하고

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ 이어야 하므로

$$a = a^2 - 2, \quad a^2 - a - 2 = 0$$

$$(a+1)(a-2) = 0 \quad \therefore a = -1 \text{ 또는 } a = 2 \quad \cdots \textcircled{2}$$

따라서 모든 a 의 값의 합은

$$-1 + 2 = 1 \quad \cdots \textcircled{3}$$

답 1

채점 기준	비율
① $f(a)$, $\lim_{x \rightarrow a+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow a-} f(x)$ 의 값을 a 에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30 %
② a 의 값을 구할 수 있다.	50 %
③ 모든 a 의 값의 합을 구할 수 있다.	20 %

$$\textbf{0157} \quad f(x) = \frac{1}{x-4} = \frac{1}{\frac{x^2-4}{x}} = \frac{x}{x^2-4}$$

따라서 $x=0$, $x^2-4=0$ 인 x 의 값에서 함수 $f(x)$ 가 정의되지 않으므로 불연속이 되는 x 의 값은 $-2, 0, 2$ 의 3개이다. 답 ③

0158 $\neg, \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = -1, \lim_{x \rightarrow 1+} f(-x) = 1$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1+} \{f(x) + f(-x)\} = 0$$

$$\neg, \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = 1, \lim_{x \rightarrow 1-} f(-x) = -1 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} \{f(x) + f(-x)\} = 0$$

이때 $f(1) + f(-1) = 0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1} \{f(x) + f(-x)\} = f(1) + f(-1)$$

따라서 $f(x) + f(-x)$ 는 $x=1$ 에서 연속이다.

$$\therefore f(-x) = \begin{cases} -1 & (x \leq -1) \\ -x & (-1 < x < 1) \\ 1 & (x \geq 1) \end{cases} \text{이므로}$$

$$f(x) + f(-x) = 0$$

따라서 $f(x) + f(-x)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

이상에서 \neg, \neg, \neg 모두 옳다. 답 ⑤

0159 $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x^2-1)$ 이므로

$$(f \circ g)(x) = \begin{cases} \frac{2x^2-1}{|2x^2-1|} & (2x^2-1 \neq 0) \\ 0 & (2x^2-1 = 0) \end{cases}$$

$$\therefore (f \circ g)(x) = \begin{cases} 1 & (2x^2-1 > 0) \\ 0 & (2x^2-1 = 0) \\ -1 & (2x^2-1 < 0) \end{cases} \quad \cdots \textcircled{1}$$

즉 $(f \circ g)(x)$ 는 $2x^2-1=0$ 인 x 의 값에서 불연속이므로

$$2x^2=1, \quad x^2=\frac{1}{2} \quad \therefore x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \cdots \textcircled{2}$$

따라서 구하는 모든 x 의 값의 곱은 $-\frac{1}{2}$ 이다. 답 ③

$$\text{답 } -\frac{1}{2}$$

채점 기준	비율
① $(f \circ g)(x)$ 를 구할 수 있다.	40 %
② $(f \circ g)(x)$ 가 불연속이 되는 모든 x 의 값을 구할 수 있다.	40 %
③ 모든 x 의 값의 곱을 구할 수 있다.	20 %

$$\textcircled{\text{참고}} (f \circ g)(x) = \begin{cases} 1 & (x < -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ 또는 } x > \frac{\sqrt{2}}{2}) \\ 0 & (x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}) \\ -1 & (-\frac{\sqrt{2}}{2} < x < \frac{\sqrt{2}}{2}) \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2}+} (f \circ g)(x) = -1, \quad \lim_{x \rightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2}-} (f \circ g)(x) = 1 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2}+} (f \circ g)(x) \neq \lim_{x \rightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2}-} (f \circ g)(x)$$

즉 $\lim_{x \rightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2}} (f \circ g)(x)$ 의 값이 존재하지 않으므로 $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ 에서 불연속이다.

$$\text{또 } \lim_{x \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}+} (f \circ g)(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}-} (f \circ g)(x) = -1 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}+} (f \circ g)(x) \neq \lim_{x \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}-} (f \circ g)(x)$$

즉 $\lim_{x \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}} (f \circ g)(x)$ 의 값이 존재하지 않으므로 $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 에서 불연속이다.

유형 02 함수의 그래프와 연속

본책 31쪽

함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 $x=a$ 인 점에서 끊어져 있으면

$\Rightarrow f(x)$ 는 $x=a$ 에서 불연속이다.



0160 (i) $\lim_{x \rightarrow -1+} f(x) = 1, \lim_{x \rightarrow -1-} f(x) = 2$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow -1+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow -1-} f(x)$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ 의 값이 존재하지 않으므로 $f(x)$ 는 $x = -1$ 에서 불연속이다.

(ii) $f(1) = 0, \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \neq f(1)$

따라서 $f(x)$ 는 $x = 1$ 에서 불연속이다.

(i), (ii)에서 $a = 1, b = 2$ 이므로 $ab = 2$

답 2

0161 주어진 함수의 그래프에서 $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = 2$ 이지

만 $f(0)$ 이 정의되어 있지 않으므로 $f(x)$ 는 $x = 0$ 에서 불연속이다.

$\therefore a = 0$ → ①

이때 $f(a+3) = f(3) = 1$ 이므로 $b = 1$ → ②

$\therefore a + b = 1$ → ③

답 1

채점 기준	비율
① a의 값을 구할 수 있다.	40 %
② b의 값을 구할 수 있다.	40 %
③ a+b의 값을 구할 수 있다.	20 %

0162 $\neg, \lim_{x \rightarrow 1+} f(x)g(x) = 0 \cdot 2 = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} f(x)g(x) = 0 \cdot (-2) = 0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} f(x)g(x) = 0$$

$\neg, \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0, f(1) = 3$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \neq f(1)$$

따라서 $f(x)$ 는 $x = 1$ 에서 불연속이다.

\neg 에서 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)g(x) = 0$ 이고, $f(1)g(1) = 3 \cdot 2 = 6$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x)g(x) \neq f(1)g(1)$$

따라서 $f(x)g(x)$ 는 $x = 1$ 에서 불연속이다.

이상에서 옳은 것은 ㄷ뿐이다.

답 ③

0163 $\neg, \lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = -1, \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = 1$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0-} f(x)$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 의 값이 존재하지 않는다.

$\neg, x-1=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 1$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이고, $x \rightarrow 1$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x-1) = \lim_{t \rightarrow 0+} f(t) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} f(x-1) = \lim_{t \rightarrow 0-} f(t) = 1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1+} f(x-1) \neq \lim_{x \rightarrow 1-} f(x-1)$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x-1)$ 의 값이 존재하지 않으므로 $f(x-1)$ 은

$x = 1$ 에서 불연속이다.

$\neg, x+1=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 0$ 일 때 $t \rightarrow 1$ 이고, $x \rightarrow 0$ 일 때 $t \rightarrow 1$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x)f(x+1) = \lim_{x \rightarrow 0+} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow 0+} f(x+1)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0+} f(x) \cdot \lim_{t \rightarrow 1+} f(t)$$

$$= -1 \cdot 0 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} f(x)f(x+1) = \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow 0-} f(x+1)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) \cdot \lim_{t \rightarrow 1-} f(t)$$

$$= 1 \cdot 0 = 0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} f(x)f(x+1) = 0$$

이때 $f(0)f(0+1) = f(0)f(1) = 0 \cdot 0 = 0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)f(x+1) = f(0)f(0+1)$$

따라서 $f(x)f(x+1)$ 은 $x = 0$ 에서 연속이다.

이상에서 옳은 것은 ㄷ뿐이다.

답 ③



유형 03 함수의 그래프와 연속, 합성함수

본책 32쪽

실수 전체의 집합에서 정의된 두 함수 $f(x), g(x)$ 에 대하여 합성함수 $f(g(x))$ 가 $x=a$ 에서 연속이려면

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(g(x)) = \lim_{x \rightarrow a-} f(g(x)) = f(g(a))$$

0164 $\neg, \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = 1, \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = -1$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1-} f(x)$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 의 값이 존재하지 않는다.

$\neg, f(x) = t$ 로 놓으면 $x \rightarrow -1$ 일 때 $t \rightarrow -1$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(f(x)) = \lim_{t \rightarrow -1+} f(t) = -1$$

\neg 에서 $\lim_{x \rightarrow -1} f(f(x)) = -1$ 이고, $f(f(-1)) = f(0) = 1$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(f(x)) \neq f(f(-1))$$

따라서 $f(f(x))$ 는 $x = -1$ 에서 불연속이다.

이상에서 \neg, \neg, \neg 모두 옳다.

답 ⑤

0165 구간 $[-2, 2]$ 에서 함수 $f(x)$ 가 $x = 0$ 에서 불연속이므로 $x = 0$ 에서 함수 $g(f(x))$ 의 연속성을 조사해 보자.

$f(x) = t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 0$ 일 때 $t \rightarrow 1$ 이고, $x \rightarrow 0$ 일 때 $t \rightarrow -1$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0+} g(f(x)) = \lim_{t \rightarrow 1-} g(t), \lim_{x \rightarrow 0-} g(f(x)) = \lim_{t \rightarrow -1+} g(t)$$

$g(f(0)) = g(0)$ 이다.

$\neg, \lim_{x \rightarrow -1+} g(x) = \lim_{x \rightarrow -1-} g(x) = 0, g(0) = 0$ 이므로 $g(f(x))$ 는

$x = 0$ 에서 연속이다.

$\neg, \lim_{x \rightarrow -1+} g(x) = \lim_{x \rightarrow -1-} g(x) = 0, g(0) = 0$ 이므로 $g(f(x))$ 는

$x = 0$ 에서 연속이다.

$\neg, \lim_{x \rightarrow -1+} g(x) = 1, \lim_{x \rightarrow -1-} g(x) = -1$ 에서

$$\lim_{x \rightarrow -1+} g(x) \neq \lim_{x \rightarrow -1-} g(x)$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 0} g(f(x))$ 의 값이 존재하지 않으므로 $g(f(x))$ 는 $x=0$ 에서 불연속이다.
 이상에서 $g(f(x))$ 가 구간 $[-2, 2]$ 에서 연속인 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

0166 ㄱ. $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x)g(x) = 1 \cdot 0 = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} f(x)g(x) = -1 \cdot 0 = 0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} f(x)g(x) = 0$$

이때 $f(0)g(0) = 0 \cdot 0 = 0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)g(x) = f(0)g(0)$$

따라서 $f(x)g(x)$ 는 $x=0$ 에서 연속이다.

ㄴ. $\lim_{x \rightarrow 0} f(g(x)) = f(0) = 0$ 이고 $f(g(0)) = f(0) = 0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(g(x)) = f(g(0))$$

따라서 $f(g(x))$ 는 $x=0$ 에서 연속이다.

ㄷ. $f(x)=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 0+$ 일 때 $t \rightarrow 1-$ 이고, $x \rightarrow 0-$ 일 때 $t \rightarrow -1+$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0+} g(f(x)) = \lim_{t \rightarrow 1-} g(t) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} g(f(x)) = \lim_{t \rightarrow -1+} g(t) = 0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} g(f(x)) = 0$$

이때 $g(f(0)) = g(0) = 0$ 이므로

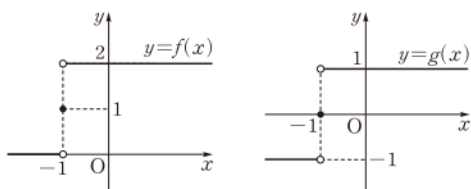
$$\lim_{x \rightarrow 0} g(f(x)) = g(f(0))$$

따라서 $g(f(x))$ 는 $x=0$ 에서 연속이다.

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 $x=0$ 에서 연속이다.

답 ⑤

0167 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



ㄱ. $x > -1$ 일 때, $f(f(x)) = f(2) = 2$
 $x = -1$ 일 때, $f(f(x)) = f(1) = 2$
 $x < -1$ 일 때, $f(f(x)) = f(0) = 2$

모든 실수 x 에 대하여 $f(f(x)) = 2$

따라서 $f(f(x))$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

ㄴ. $\lim_{x \rightarrow -1+} f(g(x)) = f(1) = 2$, $\lim_{x \rightarrow -1-} f(g(x)) = f(-1) = 1$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow -1+} f(g(x)) \neq \lim_{x \rightarrow -1-} f(g(x))$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow -1} f(g(x))$ 의 값이 존재하지 않는다.

ㄷ. $\lim_{x \rightarrow -1+} g(f(x)) = g(2) = 1$, $\lim_{x \rightarrow -1-} g(f(x)) = g(0) = 1$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow -1} g(f(x)) = 1$$

이때 $g(f(-1)) = g(1) = 1$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow -1} g(f(x)) = g(f(-1))$$

따라서 $g(f(x))$ 는 $x=-1$ 에서 연속이다.
 이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ④

유형 04 함수가 연속일 조건 (1)

본책 33쪽

$x \neq a$ 에서 연속인 함수 $g(x)$ 에 대하여 함수

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & (x \neq a) \\ k & (x = a) \end{cases} \quad (k \text{는 상수})$$

가 모든 실수 x 에 대하여 연속이면 $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = k$

0168 함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여 연속이라면 $x=1$ 에서 연속이어야 하므로

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$$

이때

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 - 2x^2 - x + 1}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(2x^2 - 1)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} (2x^2 - 1) = 1 \end{aligned}$$

이므로 $k=1$

답 ①

0169 $f(0) = -2$ 이므로 $-b = -2 \quad \therefore b = 2$

이때 함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이라면 $x=2$ 에서 연속이어야 하므로

$$\lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = f(2)$$

$$4 + a = 4 - b \quad \therefore a = -2$$

또 $x = -2$ 에서 연속이어야 하므로

$$\lim_{x \rightarrow -2+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2-} f(x) = f(-2)$$

$$4 - b = -6 - c \quad \therefore c = -8$$

$$\therefore abc = -2 \cdot 2 \cdot (-8) = 32$$

답 32

채점 기준	비율
① b 의 값을 구할 수 있다.	20 %
② a 의 값을 구할 수 있다.	35 %
③ c 의 값을 구할 수 있다.	35 %
④ abc 의 값을 구할 수 있다.	10 %

0170 함수 $f(x)g(x)$ 가 $x=1$ 에서 연속이라면

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x)g(x) = f(1)g(1)$ 이어야 한다.

이때 $f(1)g(1) = (1+3)(1+k) = 4+4k$ 이고,

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} (-x+2)(x+k) = 1+k,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} (x+3)(x+k) = 4+4k$$

이므로 $1+k = 4+4k, \quad 3k = -3$

$$\therefore k = -1$$

답 -1



채점 기준	비율
① $f(1)g(1)$ 의 값을 k 에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30 %
② $\lim_{x \rightarrow 1+} f(x)g(x)$ 의 값을 k 에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30 %
③ $\lim_{x \rightarrow 1-} f(x)g(x)$ 의 값을 k 에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30 %
④ k 의 값을 구할 수 있다.	10 %

0171 함수 $g(x)$ 가 $x=0$ 에서 연속이라면 $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = g(0)$ 이어야 한다.

$$\begin{aligned} \text{이때 } g(0) &= f(0) \{2f(0) + k\} = a(2a + k) \text{이고,} \\ \lim_{x \rightarrow 0+} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 0+} f(x) \{2f(x) + k\} = b(2b + k), \\ \lim_{x \rightarrow 0-} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) \{2f(x) + k\} = a(2a + k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{이므로 } b(2b + k) &= a(2a + k) \\ 2a^2 - 2b^2 + ak - bk &= 0, \quad k(a - b) + 2(a + b)(a - b) = 0 \\ (a - b)\{k + 2(a + b)\} &= 0 \\ a \neq b \text{이므로 } k &= -2(a + b) = -2 \cdot (-10) = 20 \end{aligned}$$

답 20

0172 함수 $\{g(x)\}^2$ 이 $x=0$ 에서 연속이라면 $\lim_{x \rightarrow 0} \{g(x)\}^2 = \{g(0)\}^2$ 이어야 한다.

이때 $\{g(0)\}^2 = \{f(1)\}^2 = k^2$ 이고, $x+1=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 0+$ 일 때 $t \rightarrow 1+$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0+} \{g(x)\}^2 &= \lim_{x \rightarrow 0+} \{f(x+1)\}^2 = \lim_{t \rightarrow 1+} \{f(t)\}^2 \\ &= \lim_{t \rightarrow 1+} (t^2 - t + k)^2 \\ &= (1^2 - 1 + k)^2 = k^2 \end{aligned}$$

또 $x-1=s$ 로 놓으면 $x \rightarrow 0-$ 일 때 $s \rightarrow -1-$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0-} \{g(x)\}^2 &= \lim_{x \rightarrow 0-} \{f(x-1)\}^2 = \lim_{s \rightarrow -1-} \{f(s)\}^2 \\ &= \lim_{s \rightarrow -1-} (s^2 - s + k)^2 \\ &= \{(-1)^2 - (-1) + k\}^2 \\ &= (2 + k)^2 \end{aligned}$$

따라서 $k^2 = (2 + k)^2$ 이므로

$$4k + 4 = 0 \quad \therefore k = -1$$

답 -1

다른 풀이 $f(x+1) = (x+1)^2 - (x+1) + k = x^2 + x + k$,

$$f(x-1) = (x-1)^2 - (x-1) + k = x^2 - 3x + 2 + k$$

$$\text{이므로 } g(x) = \begin{cases} x^2 + x + k & (x \geq 0) \\ x^2 - 3x + 2 + k & (x < 0) \end{cases}$$

이때 $\{g(0)\}^2 = k^2$ 이고,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0+} \{g(x)\}^2 &= \lim_{x \rightarrow 0+} (x^2 + x + k)^2 = k^2, \\ \lim_{x \rightarrow 0-} \{g(x)\}^2 &= \lim_{x \rightarrow 0-} (x^2 - 3x + 2 + k)^2 = (2 + k)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{이므로 } k^2 &= (2 + k)^2, \quad 4k + 4 = 0 \\ \therefore k &= -1 \end{aligned}$$

0173 함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이라면 $x=3$ 에서 연속이어야 하므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3-} f(x) = f(3) \\ 0 &= -9 + 3a + b \quad \therefore 3a + b = 9 \end{aligned} \quad \dots\dots ①$$

$$\text{이때 } f(x) = f(x+4) \text{이므로 } f(0) = f(4)$$

$$\therefore b = 3 \cdot (4 - 3) = 3$$

$$b = 3 \text{을 } ① \text{에 대입하면 } a = 2$$

$$\text{따라서 } f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x + 3 & (0 \leq x < 3) \\ 3(x - 3) & (3 \leq x \leq 4) \end{cases} \text{이므로}$$

$$f(10) = f(6) = f(2) = -4 + 4 + 3 = 3$$

답 ④

유형 05 함수가 연속일 조건 (2)

본책 34쪽

(i) 함수 $f(x)$ 가 $x=a$ 에서 연속이면 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

(ii) 분수 꼴의 함수에서 $x \rightarrow a$ 일 때

① (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하면 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

② (분자) $\rightarrow 0$ 이고 0이 아닌 극한값이 존재하면 (분모) $\rightarrow 0$ 이다.

0174 함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여 연속이라면 $x=1$ 에서 연속이어야 하므로 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - ax - 2}{x - 1} = b \quad \dots\dots ①$$

$x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉 } \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - ax - 2) = 0 \text{이므로}$$

$$1 - a - 2 = 0 \quad \therefore a = -1$$

$a = -1$ 을 ①에 대입하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+2)(x-1)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} (x+2) = 3 = b \end{aligned}$$

$$\therefore a^2 + b^2 = (-1)^2 + 3^2 = 10$$

답 ③

0175 함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여 연속이라면 $x=-1$ 에서 연속이어야 하므로 $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = f(-1)$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x^2 + a} + b}{x + 1} = -1 \quad \dots\dots ① \quad \dots\dots ②$$

$x \rightarrow -1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉 } \lim_{x \rightarrow -1} (\sqrt{x^2 + a} + b) = 0 \text{이므로}$$

$$\sqrt{1 + a} + b = 0 \quad \therefore b = -\sqrt{1 + a} \quad \dots\dots ③ \quad \dots\dots ④$$

①을 ①의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned} &\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x^2 + a} - \sqrt{1 + a}}{x + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(\sqrt{x^2 + a} - \sqrt{1 + a})(\sqrt{x^2 + a} + \sqrt{1 + a})}{(x + 1)(\sqrt{x^2 + a} + \sqrt{1 + a})} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x + 1)(x - 1)}{(x + 1)(\sqrt{x^2 + a} + \sqrt{1 + a})} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 + a} + \sqrt{1 + a}} \\ &= \frac{-2}{2\sqrt{1 + a}} = -\frac{1}{\sqrt{1 + a}} \end{aligned}$$

$$\text{즉 } -\frac{1}{\sqrt{1+a}} = -1 \text{이므로 } 1+a=1$$

$$\therefore a=0$$

$$a=0 \text{을 ㉠에 대입하면 } b=-1$$

$$\therefore a+b=-1$$

→ ③

→ ④

답 -1

채점 기준	비율
① $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x^2+a+b}}{x+1} = -1$ 임을 알 수 있다.	30 %
② b 를 a 에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	20 %
③ a, b 의 값을 구할 수 있다.	40 %
④ $a+b$ 의 값을 구할 수 있다.	10 %

0176 함수 $f(x)$ 가 구간 $(-\infty, \infty)$ 에서 연속이라면 $x=0$ 에서 연속이어야 하므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$$

$$f(0)=b \text{라 하면 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+9}+a}{x^2} = b \quad \dots\dots ㉠$$

$x \rightarrow 0$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉 } \lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{x^2+9}+a) = 0 \text{이므로}$$

$$3+a=0 \quad \therefore a=-3$$

$a=-3$ 을 ㉠에 대입하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+9}-3}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x^2+9}-3)(\sqrt{x^2+9}+3)}{x^2(\sqrt{x^2+9}+3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2(\sqrt{x^2+9}+3)} \end{aligned}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x^2+9}+3} = \frac{1}{6} = b$$

$$\therefore f(0) = \frac{1}{6}$$

답 ①

0177 $g(x)$ 가 다항함수이므로 함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속이라면 $x=1$ 에서 연속이어야 한다.

ㄱ. 함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 연속이어야 하므로

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = a$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x)}{x-1} = a$$

$x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 0$$

$$\begin{aligned} \text{ㄴ. } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)g(x)}{x^2-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)g(x)}{(x+1)(x-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x+1} \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x)}{x-1} \\ &= \frac{a}{2} \cdot a = \frac{a^2}{2} \end{aligned}$$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

유형 06 $[x]$ 꼴을 포함한 함수의 연속

본책 34쪽

(1) 정수 n 에 대하여 $x \rightarrow a$ 일 때

$$\textcircled{1} f(x) \rightarrow n+0 \text{이면 } \lim_{x \rightarrow a} [f(x)] = n$$

$$\textcircled{2} f(x) \rightarrow n-0 \text{이면 } \lim_{x \rightarrow a} [f(x)] = n-1$$

(2) 함수 $g(x)=[f(x)]$ 의 연속 또는 불연속을 판단하려면

$\Rightarrow f(x)=n$ (n 은 정수)을 만족시키는 x 의 값에서 연속성을 조사한다.
(단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

0178 함수 $g(x)$ 가 $x=2$ 에서 연속이라면 $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = g(2)$ 이어야 한다. 이때

$$\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2} [f(x)] = \lim_{x \rightarrow 2} [2(x-2)^2+4]$$

이고 $x \rightarrow 2$ 일 때 $2(x-2)^2+4 \rightarrow 4+0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 2} [2(x-2)^2+4] = 4$$

$$\therefore k = g(2) = \lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 4$$

답 ⑤

0179 함수 $f(x)$ 가 $x=-2$ 에서 연속이라면 $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = f(-2)$ 이어야 한다.

이때 $f(-2) = 4 + (-2a+3) \cdot (-2) = 4a-2$ 이고,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -2+} \{[x]^2 + (ax+3)[x]\} \\ &= (-2)^2 + (-2a+3) \cdot (-2) \\ &= 4a-2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -2-} \{[x]^2 + (ax+3)[x]\} \\ &= (-3)^2 + (-2a+3) \cdot (-3) \\ &= 6a \end{aligned}$$

$$\text{이므로 } 4a-2=6a \quad \therefore a=-1$$

답 -1

0180 (i) $0 \leq x^2 \leq 1$ 일 때,

$$3 \leq \sqrt{10-x^2} \leq \sqrt{10} \text{이므로 } f(x)=3$$

(ii) $1 < x^2 \leq 6$ 일 때,

$$2 \leq \sqrt{10-x^2} < 3 \text{이므로 } f(x)=2$$

(iii) $6 < x^2 \leq 9$ 일 때,

$$1 \leq \sqrt{10-x^2} < 2 \text{이므로 } f(x)=1$$

(iv) $9 < x^2 \leq 10$ 일 때,

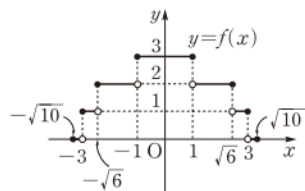
$$0 \leq \sqrt{10-x^2} < 1 \text{이므로 } f(x)=0$$

이상에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래

프는 오른쪽 그림과 같으므로 불

연속이 되는 x 의 값은 6개이다.

답 ④



0181 $f(1)$ 의 값이 정의되어 있지 않으므로 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 불연속이고 그 외의 구간에서는 연속이다.

$$\therefore A = \{x | -5 < x < 1\} \cup \{x | 1 < x < 5\}$$

→ ①

또 정수 n 에 대하여 $\lim_{x \rightarrow n} g(x)$ 가 존재하지 않으므로 함수 $g(x)$ 는

$x=n$ (n 은 정수)에서 불연속이고 그 외의 구간에서는 연속이다.



$$\therefore B = \{x | -5 < x < -4\} \cup \{x | -4 < x < -3\} \\ \cup \dots \cup \{x | 4 < x < 5\}$$

따라서 $A-B = \{-4, -3, -2, -1, 0, 2, 3, 4\}$ 이므로
 $n(A-B) = 8$

→ ②

→ ③

답 8

채점 기준

비율

① 집합 A를 구할 수 있다.	30 %
② 집합 B를 구할 수 있다.	40 %
③ $n(A-B)$ 의 값을 구할 수 있다.	30 %

유형 07 $(x-a)f(x)$ 꼴의 함수의 연속

본책 35쪽

연속함수 $g(x)$ 에 대하여 함수 $f(x)$ 가 $(x-a)f(x)=g(x)$ 를 만족시킬 때, $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속이면

$$\Rightarrow f(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{x-a}$$

0182 $x \neq -2$ 일 때, $f(x) = \frac{ax^3 - bx}{x+2}$

함수 $f(x)$ 가 $x = -2$ 에서 연속이므로

$$f(-2) = \lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{ax^3 - bx}{x+2}$$

이어야 한다.

$x \rightarrow -2$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉 $\lim_{x \rightarrow -2} (ax^3 - bx) = 0$ 이므로

$$-8a + 2b = 0 \quad \therefore b = 4a \quad \dots\dots ①$$

이때 $f(1) = 5$ 이므로 $(x+2)f(x) = ax^3 - bx$ 에서

$$3f(1) = a - b \quad \therefore a - b = 15 \quad \dots\dots ②$$

①, ②를 연립하여 풀면 $a = -5, b = -20$

따라서 $x \neq -2$ 일 때, $f(x) = \frac{-5x^3 + 20x}{x+2}$ 이므로

$$\begin{aligned} f(-2) &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{-5x^3 + 20x}{x+2} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{-5x(x+2)(x-2)}{x+2} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} \{-5x(x-2)\} \\ &= -5 \cdot (-2) \cdot (-4) = -40 \end{aligned}$$

답 ①

0183 $x \neq -1$ 일 때, $f(x) = \frac{x^5 + 1}{x+1}$

함수 $f(x)$ 가 $x = -1$ 에서 연속이므로

$$\begin{aligned} f(-1) &= \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^5 + 1}{x+1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)}{x+1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} (x^4 - x^3 + x^2 - x + 1) = 5 \end{aligned}$$

답 ⑤

0184 $x \neq 2$ 일 때, $f(x) = \frac{a\sqrt{x-1} + b}{x-2}$

함수 $f(x)$ 가 $x = 2$ 에서 연속이므로 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 2} \frac{a\sqrt{x-1} + b}{x-2} = 1 \quad \dots\dots ① \quad \rightarrow ①$$

$x \rightarrow 2$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉 $\lim_{x \rightarrow 2} (a\sqrt{x-1} + b) = 0$ 이므로

$$a + b = 0 \quad \therefore b = -a \quad \dots\dots ② \quad \rightarrow ②$$

①을 ②의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{a\sqrt{x-1} - a}{x-2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{a(\sqrt{x-1} - 1)}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{a(\sqrt{x-1} - 1)(\sqrt{x-1} + 1)}{(x-2)(\sqrt{x-1} + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{a(x-2)}{(x-2)(\sqrt{x-1} + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{a}{\sqrt{x-1} + 1} = \frac{a}{2} \end{aligned}$$

따라서 $\frac{a}{2} = 1$ 이므로 $a = 2$

$a = 2$ 를 ②에 대입하면 $b = -2$

$$\therefore a^2 + b^2 = 2^2 + (-2)^2 = 8 \quad \rightarrow ③$$

→ ④

답 8

채점 기준

비율

① $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{a\sqrt{x-1} + b}{x-2} = 1$ 임을 알 수 있다.	30 %
② b 를 a 에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	20 %
③ a, b 의 값을 구할 수 있다.	40 %
④ $a^2 + b^2$ 의 값을 구할 수 있다.	10 %

0185 $x \neq 0$ 일 때, $f(x) = \frac{x^2 - 2x + k}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}$

함수 $f(x)$ 가 $x = 0$ 에서 연속이므로

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 2x + k}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}$$

이어야 한다.

$x \rightarrow 0$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉 $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 - 2x + k) = 0$ 이므로 $k = 0$

$$\begin{aligned} \therefore f(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 2x}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 - 2x)(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})}{(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x})(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x-2)(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})}{2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x-2)(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})}{2} \\ &= \frac{-2(1+1)}{2} = -2 \end{aligned}$$

$$\therefore k + f(0) = -2$$

답 ①

유형 08 연속함수의 성질

본책 36쪽

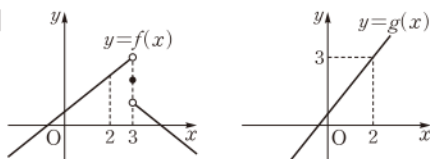
- ① 두 함수 $f(x), g(x)$ 가 $x=a$ 에서 연속이면
 $\Rightarrow f(x)g(x), f(x) \pm g(x)$ 도 $x=a$ 에서 연속이다.
 ② $y=f(x)$ 가 $x=a$ 에서 연속이고 $y=g(x)$ 가 $x=f(a)$ 에서 연속이면
 $y=g(f(x))$ 는 $x=a$ 에서 연속이다.

0186 \neg . $f(x)+g(x)=h(x)$ 라 하면 $g(x)=h(x)-f(x)$
 이때 $f(x)$ 와 $h(x)$ 가 연속함수이므로 $g(x)$ 도 연속함수이다.
 \neg . [반례] $f(x)=0, g(x)=\begin{cases} 1 & (x \geq 0) \\ -1 & (x < 0) \end{cases}$ 이면 $f(x)$ 와 $f(x)g(x)$
 는 연속함수이지만 $g(x)$ 는 $x=0$ 에서 불연속이다.
 \neg . 임의의 실수 a 에 대하여 $\lim_{x \rightarrow a} g(x)=b$ 라 하면 $g(x)$ 가 연속함수
 이므로 $b=g(a)$
 또 $f(x)$ 가 연속함수이므로
 $\lim_{x \rightarrow a} f(g(x))=f(g(a))=f(b)$
 따라서 $f(g(x))$ 도 연속함수이다.
 이상에서 옳은 것은 \neg, \neg 이다. 답 ④

0187 ① $f(x)+g(x)=\frac{1}{x}+x^2+2$
 이 함수는 $x=0$ 에서 정의되지 않으므로 $x=0$ 에서 불연속이다.
 ② $f(x)g(x)=\frac{1}{x}(x^2+2)=x+\frac{2}{x}$
 이 함수는 $x=0$ 에서 정의되지 않으므로 $x=0$ 에서 불연속이다.
 ③ $g(f(x))=g(\frac{1}{x})=\frac{1}{x^2}+2$
 이 함수는 $x=0$ 에서 정의되지 않으므로 $x=0$ 에서 불연속이다.
 ④ $f(g(x))=f(x^2+2)=\frac{1}{x^2+2}$ 이므로 $f(g(x))$ 는 모든 실수 x
 에서 연속이다.
 ⑤ $\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{1}{x(x^2+2)}$
 이 함수는 $x=0$ 에서 정의되지 않으므로 $x=0$ 에서 불연속이다.
답 ④

0188 $f(x), g(x)$ 가 $x=a$ 에서 연속이므로
 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)=f(a), \lim_{x \rightarrow a} g(x)=g(a)$
 \neg . $\lim_{x \rightarrow a} \{f(x)-4g(x)\}=\lim_{x \rightarrow a} f(x)-4 \lim_{x \rightarrow a} g(x)=f(a)-4g(a)$
 이므로 $f(x)-4g(x)$ 는 $x=a$ 에서 연속이다.
 \neg . $\lim_{x \rightarrow a} \{g(x)\}^2=\lim_{x \rightarrow a} g(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)=\{g(a)\}^2$
 이므로 $\{g(x)\}^2$ 은 $x=a$ 에서 연속이다.
 \neg . $f(a)=0$ 이면 $\frac{g(x)}{f(x)}$ 는 $x=a$ 에서 정의되지 않으므로 $\frac{g(x)}{f(x)}$ 는
 $x=a$ 에서 불연속이다.

\neg . [반례]



앞의 그림에서 $f(x), g(x)$ 는 $x=2$ 에서 모두 연속이지만
 $f(g(x))$ 는 $x=2$ 에서 불연속이다.
 이상에서 $x=a$ 에서 항상 연속인 함수는 \neg, \neg 의 2개이다. 답 2
참고 \neg . 함수 $f(g(x))$ 가 $x=a$ 에서 연속하려면 $\lim_{x \rightarrow a} f(g(x))=f(g(a))$ 가 성
 립해야 하므로 $f(x)$ 가 $x=g(a)$ 에서 연속이어야 한다.

0189 $x < 2$ 일 때, $f(x)=x^2-4x+6=(x-2)^2+2 > 0$
 $x \geq 2$ 일 때, $f(x)=3 > 0$
 즉 실수 전체의 집합에서 $f(x) > 0$ 이다.
 한편
 $\lim_{x \rightarrow 2+} f(x)=\lim_{x \rightarrow 2+} 3=3,$
 $\lim_{x \rightarrow 2-} f(x)=\lim_{x \rightarrow 2-} (x^2-4x+6)=2$
 에서 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ 의 값이 존재하지 않으므로 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 불연
 속이다.
 $g(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $\frac{g(x)}{f(x)}$ 가 실수 전체의 집
 합에서 연속하려면 $x=2$ 에서 연속이어야 한다. → ①
 이때 $\frac{g(2)}{f(2)}=\frac{2a+1}{3}$ 이고,

$\lim_{x \rightarrow 2+} \frac{g(x)}{f(x)}=\lim_{x \rightarrow 2+} \frac{ax+1}{3}=\frac{2a+1}{3},$
 $\lim_{x \rightarrow 2-} \frac{g(x)}{f(x)}=\lim_{x \rightarrow 2-} \frac{ax+1}{x^2-4x+6}=\frac{2a+1}{2}$
 이므로 $\frac{2a+1}{3}=\frac{2a+1}{2}$
 $4a+2=6a+3, \quad 2a=-1$
 $\therefore a=-\frac{1}{2}$ → ②
답 $-\frac{1}{2}$

채점 기준	비율
① 함수 $\frac{g(x)}{f(x)}$ 가 실수 전체의 집합에서 연속일 조건을 알 수 있다.	50 %
② a 의 값을 구할 수 있다.	50 %

유형 09 최대·최소 정리

본책 36쪽

함수 $f(x)$ 가 구간 $[a, b]$ 에서 연속이 아닌 경우
 \Rightarrow 함수 $y=f(x)$ 의 그래프를 그려 최댓값, 최솟값의 존재를 확인한다.

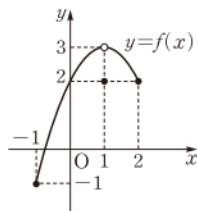
0190 ① $f(x)$ 가 불연속이 되는 x 의 값은 3, 5의 2개이다.
 ② $\lim_{x \rightarrow 5+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 5-} f(x)$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$ 의 값은 존재하지 않는다.
 ③ $\lim_{x \rightarrow 3+} f(x)=\lim_{x \rightarrow 3-} f(x)=4$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)=4$
 ④ $f(x)$ 가 구간 $[1, 2]$ 에서 연속이므로 최대·최소 정리에 의하여
 최솟값을 갖는다. 답 ⑤

0191 $x \neq 1$ 일 때,
 $f(x)=-x^2+2x+2=-(x-1)^2+3$



함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 구간 $[-1, 2]$ 에서 오른쪽 그림과 같으므로 $x=1$ 에서 불연속이다.

따라서 함수 $f(x)$ 는 구간 $[-1, 2]$ 에서 $x=-1$ 일 때 최솟값 -1 을 갖고, 최댓값은 없다.



㉑ 최솟값: -1 , 최댓값: 없다.

0192 \neg . $f(x)+g(x)=x-3+\frac{1}{x+2}$ 은 $x \neq -2$ 인 모든 실수에서 연속이다.

따라서 $f(x)+g(x)$ 는 구간 $[0, 4]$ 에서 연속이므로 최대·최소 정리에 의하여 최댓값, 최솟값을 모두 갖는다.

\neg . $f(g(x))=f\left(\frac{1}{x+2}\right)=\frac{1}{x+2}-3$ 은 $x \neq -2$ 인 모든 실수에서 연속이다.

따라서 $f(g(x))$ 는 구간 $[0, 4]$ 에서 연속이므로 최대·최소 정리에 의하여 최댓값, 최솟값을 모두 갖는다.

\cap . $g(f(x))=g(x-3)=\frac{1}{x-1}$ 은 $x=1$ 에서 불연속이다.

또 $\lim_{x \rightarrow 1+} g(f(x)) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow 1-} g(f(x)) = -\infty$ 이므로 $g(f(x))$

는 구간 $[0, 4]$ 에서 최댓값, 최솟값을 모두 갖지 않는다.

이상에서 구간 $[0, 4]$ 에서 최댓값, 최솟값을 모두 갖는 함수는 \neg , \cap 이다. ㉑ ②

0193 최대·최소 정리의 역은 ‘함수 $f(x)$ 가 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 최댓값과 최솟값을 가지면 $f(x)$ 는 이 구간에서 연속이다.’이므로 최댓값과 최솟값을 갖지만 연속이 아닌 함수를 찾으려 한다.

①, ②, ③ 구간 $[1, 3]$ 에서 최댓값과 최솟값을 갖고 연속이다.

④ 구간 $[1, 3]$ 에서 최댓값과 최솟값을 갖지만 연속이 아니다.

⑤ 구간 $[1, 3]$ 에서 최댓값과 최솟값을 갖지 않고 연속도 아니다.

따라서 최대·최소 정리의 역이 성립하지 않음을 보이는 예로 적절한 것은 ④이다. ㉑ ④

유형 10, 11 사잇값의 정리

본책 37쪽

함수 $f(x)$ 가 구간 $[a, b]$ 에서 연속이고 $f(a)f(b) < 0$ 일 때

⇒ $f(c)=0$ 인 c 가 구간 (a, b) 에 적어도 하나 존재한다.

⇒ 방정식 $f(x)=0$ 은 구간 (a, b) 에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

0194 $f(x)=2x^3-x^2-x-3$ 이라 하면 $f(x)$ 는 모든 실수 x 에 대하여 연속이고

$$f(-1)=-5<0, f(0)=-3<0, f(1)=-3<0,$$

$$f(2)=7>0, f(3)=39>0, f(4)=105>0$$

따라서 $f(1)f(2) < 0$ 이므로 사잇값의 정리에 의하여 주어진 방정식의 실근이 존재하는 구간은 $(1, 2)$ 이다. ㉑ ③

0195 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$ 이 구간 $(-2, 3)$ 에서 중근이 아닌 오직 하나의 실근을 가지려면 $f(-2)f(3) < 0$ 이어야 하므로

→ ①

$$(a-2)(a+4) < 0 \quad \therefore -4 < a < 2$$

따라서 정수 a 는 $-3, -2, -1, 0, 1$ 의 5개이다.

→ ②

→ ③

㉑ 5

채점 기준	비율
① 방정식 $f(x)=0$ 이 중근이 아닌 오직 하나의 실근을 가질 조건을 알 수 있다.	60 %
② a 의 값의 범위를 구할 수 있다.	20 %
③ 정수 a 의 개수를 구할 수 있다.	20 %

0196 $f(x)=-x^4+6x^3+5x^2-1$, $g(x)=x^3+2x+4$ 라 하고 $h(x)=f(x)-g(x)$ 라 하면 $h(x)=-x^4+5x^3+5x^2-2x-5$ 함수 $h(x)$ 는 구간 $[0, 1]$ 에서 연속이고

$$h(0)=-5<0, h(1)=2>0$$

이므로 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $h(x)=0$ 은 구간 $(0, 1)$ 에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

따라서 $f(c)-g(c)=0$, 즉 $f(c)=g(c)$ 인 c 가 구간 $(0, 1)$ 에 적어도 하나 존재하므로 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 는 $0 < x < 1$ 에서 적어도 하나의 교점을 갖는다. ㉑ 풀이 참조

두 곡선의 교점

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 교점의 x 좌표는 방정식 $f(x)=g(x)$, 즉 $f(x)-g(x)=0$ 의 실근과 같다.



0197 \neg . $f(x)=|2x-1|-2$ 라 하면 $f(x)$ 는 구간 $[1, 2]$ 에서 연속이고

$$f(1)=-1<0, f(2)=1>0$$

이므로 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$ 은 구간 $(1, 2)$ 에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

\neg . $f(x)=\sqrt{4x-1}-2$ 라 하면 $f(x)$ 는 구간 $[1, 2]$ 에서 연속이고

$$f(1)=\sqrt{3}-2<0, f(2)=\sqrt{7}-2>0$$

이므로 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$ 은 구간 $(1, 2)$ 에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

\cap . $f(x)=\frac{4}{3x-1}-1$ 이라 하면 $f(x)$ 는 구간 $[1, 2]$ 에서 연속이고

$$f(1)=1>0, f(2)=-\frac{1}{5}<0$$

이므로 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$ 은 구간 $(1, 2)$ 에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

이상에서 \neg , \neg , \cap 모두 구간 $(1, 2)$ 에서 적어도 하나의 실근을 갖는다. ㉑ \neg , \neg , \cap

0198 $f(-2)=-1<0$, $f(-1)=1>0$ 이므로 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$ 은 구간 $(-2, -1)$ 에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

또 $f(0)=2>0$, $f(1)=-1<0$, $f(2)=2>0$ 이므로 방정식 $f(x)=0$ 은 구간 $(0, 1)$, $(1, 2)$ 에서 각각 적어도 하나의 실근을 갖는다.

따라서 방정식 $f(x)=0$ 은 적어도 3개의 실근을 갖는다.

$$\therefore n=3$$

㉑ ②

0199 $f(1)f(2)<0$, $f(3)f(4)<0$ 이므로 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$ 은 구간 (1, 2), (3, 4)에서 각각 적어도 하나의 실근을 갖는다. → ①

이때 모든 실수 x 에 대하여 $f(x)=f(-x)$ 이므로

$$f(-1)f(-2)<0, f(-3)f(-4)<0$$

즉 방정식 $f(x)=0$ 은 구간 (-2, -1), (-4, -3)에서 각각 적어도 하나의 실근을 갖는다. → ②

따라서 방정식 $f(x)=0$ 은 적어도 4개의 실근을 갖는다. → ③

답 4개

채점 기준	비율
① 방정식 $f(x)=0$ 이 구간 (1, 2), (3, 4)에서 각각 적어도 하나의 실근을 가짐을 알 수 있다.	40 %
② 방정식 $f(x)=0$ 이 구간 (-2, -1), (-4, -3)에서 각각 적어도 하나의 실근을 가짐을 알 수 있다.	40 %
③ 방정식 $f(x)=0$ 이 적어도 몇 개의 실근을 갖는지 구할 수 있다.	20 %

0200 조건 ㉞, ㉟에서 $f(-1)=0$, $f(3)=0$ 이므로

$$f(x)=(x+1)(x-3)Q(x) \quad (Q(x) \text{는 다항함수}) \cdots \cdots \textcircled{㉞}$$

라 할 수 있다.

①을 ㉞의 식의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x-3)Q(x)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} (x-3)Q(x) \\ = -4Q(-1)$$

$$\text{즉 } -4Q(-1) = \frac{1}{2} \text{이므로 } Q(-1) = -\frac{1}{8} \quad \cdots \cdots \textcircled{㉟}$$

①을 ㉟의 식의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x+1)(x-3)Q(x)}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} (x+1)Q(x) \\ = 4Q(3)$$

$$\text{즉 } 4Q(3) = \frac{1}{2} \text{이므로 } Q(3) = \frac{1}{8} \quad \cdots \cdots \textcircled{㉞}$$

이때 $Q(x)$ 는 다항함수이므로 모든 실수 x 에서 연속이고, ㉞, ㉟에서 $Q(-1)Q(3)<0$ 이므로 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $Q(x)=0$ 은 구간 (-1, 3)에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

따라서 방정식 $f(x)=0$ 은 구간 (-1, 3)에서 적어도 하나의 실근을 갖는다. 답 ①

0201 $f(x)=(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)$ 라 하면 함수 $f(x)$ 는 연속함수이고 $a<b<c$ 이므로

$$f(a)=(a-b)(a-c)>0,$$

$$f(b)=(b-c)(b-a)<0,$$

$$f(c)=(c-a)(c-b)>0$$

따라서 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$ 은 구간 (a, b), (b, c)에서 각각 적어도 하나의 실근을 갖는다.

즉 주어진 이차방정식은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

답 풀이 참조

0202 $g(x)=f(x)-x^2$ 이라 하면 함수 $g(x)$ 는 연속함수이고

$$g(1)=f(1)-1=2-1=1>0,$$

$$g(2)=f(2)-4=3-4=-1<0,$$

$$g(3)=f(3)-9=10-9=1>0,$$

$$g(4)=f(4)-16=20-16=4>0$$

이므로 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $g(x)=0$ 은 구간 (1, 2), (2, 3)에서 각각 적어도 하나의 실근을 갖는다.

따라서 두 함수 $y=f(x)$ 와 $y=x^2$ 의 그래프는 구간 (1, 4)에서 적어도 2개의 교점을 갖는다. 답 2개

유형 12 사잇값의 정리의 실생활에의 활용

본책 38쪽

열차가 두 지점 A, B를 지날 때의 속력이 각각 시속 a km, b km ($a<b$) 일 때, $a<c<b$ 인 실수 c 에 대하여 열차가 지날 때의 속력이 시속 c km인 지점이 두 지점 A, B 사이에 적어도 한 곳 존재한다.

0203 버스가 A정류장을 출발한 지 x 시간 후의 버스의 속력을 $f(x)$ km/h라 하고 A정류장을 출발한 지 각각 b 시간, c 시간 후에 B정류장, C정류장에 도착하였다고 하면

$$f(0)=0, f(b)=0, f(c)=0$$

이때 $0<a<b$, $b<\beta<c$ 이고 $f(a)=60$, $f(\beta)=60$ 인 a, β 가 존재하므로 $f(k)=20$ 인 k 가 구간 (0, a), (a, b), (b, β), (β, c)에 각각 적어도 하나씩 존재한다.

따라서 버스의 속력이 20 km/h인 순간은 적어도 4번 존재한다.

$$\therefore n=4 \quad \text{답 ④}$$

0204 기차의 속력은 연속이므로 사잇값의 정리에 의하여

- ① 구간 AB에서 시속 110 km인 지점은 적어도 한 곳 존재한다.
- ② 구간 AB에서 시속 130 km인 지점은 존재하지 않을 수도 있다.
- ③ 구간 BC에서 시속 90 km인 지점은 적어도 한 곳 존재한다.
- ④ 구간 BC에서 시속 110 km인 지점은 적어도 한 곳 존재한다.
- ⑤ 구간 AC에서 시속 110 km인 지점은 구간 AB에서 적어도 한 곳, 구간 BC에서 적어도 한 곳으로 적어도 두 곳 존재한다.

답 ⑤

0205 전략 함수 $f(x)$ 가 $x=0$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = f(0) \text{임을 이용한다.}$$

풀이 $f(x)$ 가 $x=0$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = f(0)$$

$$x<0 \text{일 때, } g(x) = -f(x) + x^2 + 4$$

$$x>0 \text{일 때, } g(x) = f(x) - x^2 - 2x - 8$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} \{-f(x) + x^2 + 4\}$$

$$= -f(0) + 4,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} \{f(x) - x^2 - 2x - 8\}$$

$$= f(0) - 8$$

이때 $\lim_{x \rightarrow 0-} g(x) - \lim_{x \rightarrow 0+} g(x) = 6$ 이므로

$$\{-f(0) + 4\} - \{f(0) - 8\} = 6, \quad -2f(0) = -6$$

$$\therefore f(0) = 3$$

답 ⑤



0206 전략 $x=3$ 과 $f(x)$ 가 불연속이 되는 x 의 값에서 $g(x)$ 의 연속성을 조사한다.

풀이 \neg . $f(x)=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 3+$ 일 때 $t \rightarrow 1-$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 3+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 3+} f(f(x)) = \lim_{t \rightarrow 1-} f(t) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 3-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 3-} \{f(x)\}^2 = 1^2 = 1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 3+} g(x) \neq \lim_{x \rightarrow 3-} g(x)$$

따라서 $g(x)$ 는 $x=3$ 에서 불연속이므로 구간 $[0, 5]$ 에서 연속이 아니다.

\neg . 함수 $f(x)$ 가 $x=4$ 에서 불연속이므로 함수 $g(x)$ 가 $x=3, x=4$ 에서 연속이면 $g(x)$ 는 구간 $[0, 5]$ 에서 연속이다.

$f(x)=s$ 로 놓으면

(i) $x \rightarrow 3+$ 일 때 $s \rightarrow 2-$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 3+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 3+} f(f(x)) = \lim_{s \rightarrow 2-} f(s) = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 3-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 3-} \{f(x)\}^2 = 2^2 = 4$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 3} g(x) = 4$$

$$\text{이때 } g(3) = \{f(3)\}^2 = 2^2 = 4 \text{이므로 } \lim_{x \rightarrow 3} g(x) = g(3)$$

따라서 $g(x)$ 는 $x=3$ 에서 연속이다.

(ii) $x \rightarrow 4+$ 일 때 $s \rightarrow 1+$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 4+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 4+} f(f(x)) = \lim_{s \rightarrow 1+} f(s) = 3$$

$x \rightarrow 4-$ 일 때 $s \rightarrow 0+$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 4-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 4-} f(f(x)) = \lim_{s \rightarrow 0+} f(s) = 3$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 4} g(x) = 3$$

$$\text{이때 } g(4) = f(f(4)) = f(0) = 3 \text{이므로 } \lim_{x \rightarrow 4} g(x) = g(4)$$

따라서 $g(x)$ 는 $x=4$ 에서 연속이다.

(i), (ii)에서 $g(x)$ 는 구간 $[0, 5]$ 에서 연속이다.

\neg . 함수 $f(x)$ 가 $x=4$ 에서 불연속이므로 함수 $g(x)$ 가 $x=3, x=4$ 에서 연속이면 $g(x)$ 는 구간 $[0, 5]$ 에서 연속이다.

$f(x)=u$ 로 놓으면

(i) $x \rightarrow 3+$ 일 때 $u \rightarrow 2-$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 3+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 3+} f(f(x)) = \lim_{u \rightarrow 2-} f(u) = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 3-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 3-} \{f(x)\}^2 = 2^2 = 4$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 3} g(x) = 4$$

$$\text{이때 } g(3) = \{f(3)\}^2 = 2^2 = 4 \text{이므로 } \lim_{x \rightarrow 3} g(x) = g(3)$$

따라서 $g(x)$ 는 $x=3$ 에서 연속이다.

(ii) $x \rightarrow 4+$ 일 때 $u \rightarrow 1+$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 4+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 4+} f(f(x)) = \lim_{u \rightarrow 1+} f(u) = 3$$

$x \rightarrow 4-$ 일 때 $u \rightarrow 0+$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 4-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 4-} f(f(x)) = \lim_{u \rightarrow 0+} f(u) = 2$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 4+} g(x) \neq \lim_{x \rightarrow 4-} g(x)$$

따라서 $g(x)$ 는 $x=4$ 에서 불연속이다.

(i), (ii)에서 $g(x)$ 는 구간 $[0, 5]$ 에서 연속이 아니다.

이상에서 구하는 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 \neg 뿐이다.

답 ②

0207 전략 a 의 값의 범위를 나누어 주어진 연립부등식의 정수인 해의 개수를 조사하여 $f(a)$ 를 구한다.

풀이 $x^2+x-6 < 0$ 에서 $(x+3)(x-2) < 0$

$$\therefore -3 < x < 2$$

$$x^2 - (a-1)x - a \leq 0 \text{에서}$$

$$(x+1)(x-a) \leq 0$$

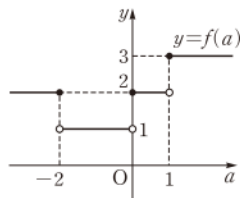
$$(i) a \leq -2 \text{일 때, } f(a) = 2$$

$$(ii) -2 < a < 0 \text{일 때, } f(a) = 1$$

$$(iii) 0 \leq a < 1 \text{일 때, } f(a) = 2$$

$$(iv) a \geq 1 \text{일 때, } f(a) = 3$$

이상에서 함수 $y=f(a)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



$$\neg. \lim_{a \rightarrow 0+} f(a) = 2, \lim_{a \rightarrow 0-} f(a) = 1$$

따라서 $\lim_{a \rightarrow 0} f(a)$ 의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(a)$ 는 $a=0$ 에서 불연속이다.

\neg . $y=f(a)$ 의 그래프가 직선 $a=m$ 에 대하여 대칭이 되도록 하는 실수 m 은 존재하지 않는다.

\neg . 함수 $f(a)$ 는 $a=-2, a=0, a=1$ 에서 불연속이고

$$\lim_{a \rightarrow -2+} f(a) \neq f(-2), \lim_{a \rightarrow 0+} f(a) = f(0),$$

$$\lim_{a \rightarrow 1+} f(a) = f(1)$$

이므로 집합 $\{k \mid \lim_{a \rightarrow k+} f(a) \neq f(k)\}$ 의 원소의 개수는 1이다.

이상에서 옳은 것은 \neg 뿐이다.

답 ①

0208 전략 주어진 그래프를 이용하여 $g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x)$ 의 값을 찾는다.

풀이 $f(0)=0$ 이므로

$$f^2(0) = f(f(0)) = f(0) = 0$$

$$f^3(0) = f^2(f(0)) = f^2(0) = 0$$

\vdots

$$f^n(0) = 0$$

$$\therefore g(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(0) = 0$$

$f(2)=2, f(4)=4$ 이므로 같은 방법으로 하면

$$g(2)=2, g(4)=4$$

$x=a$ ($0 < a < 2$)일 때, 오른쪽 그림에서

$$g(a) = 0$$

$x=b$ ($2 < b < 4$)일 때, 오른쪽 그림에서

$$g(b) = 4$$

$$\therefore g(x) = \begin{cases} 0 & (0 \leq x < 2) \\ 2 & (x=2) \\ 4 & (2 < x \leq 4) \end{cases}$$

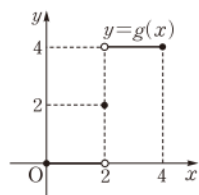
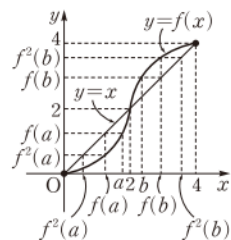
따라서 함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

$$\neg. g(1) = 0$$

$$\neg. g(3) = 4$$

\neg . $g(x)$ 는 $x=2$ 에서 불연속이다.

이상에서 옳은 것은 \neg, \neg 이다.



답 ⑤

0209 전략 x^2 이 자연수인 경우와 자연수가 아닌 경우로 나누어 본다.

풀이 k^2 이 자연수이므로

$$f(k) = -2k + a$$

$$\lim_{x \rightarrow k} f(x) = \lim_{x \rightarrow k} (x^2 + 2x - 1) = k^2 + 2k - 1$$

함수 $f(x)$ 가 $x=k$ 에서 연속이므로

$$-2k + a = k^2 + 2k - 1 \quad \therefore k^2 + 4k - a - 1 = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

이때 이차방정식 $\textcircled{1}$ 이 오직 하나의 실근을 가져야 하므로 $\textcircled{1}$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = 4 + a + 1 = 0 \quad \therefore a = -5$$

$a = -5$ 를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 $k^2 + 4k + 4 = 0$

$$(k+2)^2 = 0 \quad \therefore k = -2$$

$$\therefore f(a+k) = f(-7) = -2 \cdot (-7) - 5 = 9 \quad \text{답 9}$$

참고 함수 $f(x)$ 가 제곱하여 자연수가 되는 x 의 값 중 오직 $x=k$ 에서만 연속이므로 함수 $y=x^2+2x-1$ 의 그래프와 직선 $y=-2x+a$ 는 한 점에서 만나고 그 교점의 x 좌표가 k 이다.

0210 전략 함수 $f(x)$ 가 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ 를 만족시키면 함수 $f(x)$ 는 $x=a$ 에서 연속이다.

풀이 함수 $f(x)$ 가 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ 를 만족시키면 함수 $f(x)$ 는 $x=a$ 에서 연속이므로 집합 A 의 원소는 함수 $f(x)$ 가 연속이 되도록 하는 정수 a 이다.

이때 $f(a) = a^3 + 3a^2 - 16a$ 이고,

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+} ([x]^3 + 3[x]^2 - 16[x])$$

$$= a^3 + 3a^2 - 16a,$$

$$\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a-} ([x]^3 + 3[x]^2 - 16[x])$$

$$= (a-1)^3 + 3(a-1)^2 - 16(a-1)$$

이므로

$$a^3 + 3a^2 - 16a = (a-1)^3 + 3(a-1)^2 - 16(a-1)$$

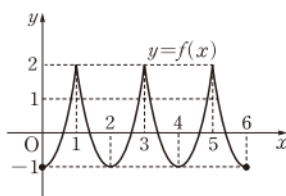
$$a^2 + a - 6 = 0, \quad (a+3)(a-2) = 0$$

$$\therefore a = -3 \text{ 또는 } a = 2$$

따라서 $A = \{-3, 2\}$ 이므로 구하는 원소의 합은 -1 이다. **답 ②**

0211 전략 주어진 조건을 만족시키는 함수 $y=f(x)$ 의 그래프를 좌표평면 위에 나타낸다.

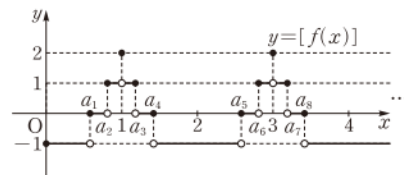
풀이 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 조건 (나)에 의하여 직선 $x=1$ 에 대하여 대칭이고, 조건 (다)에 의하여 y 축에 대하여 대칭이므로 $0 \leq x \leq 6$ 에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



이때 $y=[f(x)]$ 는 $f(x)=0, 1, 2$ 를 만족시키는 x 에서 불연속이고 $f(x)=0, f(x)=1$ 을 만족시키는 x 의 값은 각각 6개, $f(x)=2$ 를 만족시키는 x 의 값은 3개이므로 구하는 x 의 값의 개수는 15이다.

답 15

참고 $y=f(x)$ 의 그래프가 두 직선 $y=0, y=1$ 과 만나는 점의 x 좌표를 작은 것부터 차례대로 a_1, a_2, a_3, \dots 이라 하면 $y=[f(x)]$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 함수 $y=[f(x)]$ 는 $f(x)=0, 1, 2$ 를 만족시키는 x 에서 불연속이다.

0212 전략 함수 $g(x)$ 는 모든 실수 x 에서 연속이므로 $f(x)$ 가 불연속인 점에서 함수 $f(x)g(x)$ 가 연속이 되도록 a, b 의 값을 정한다.

풀이 (i) $1 \leq x < 4$ 일 때, $-1 \leq \sqrt{x}-2 < 0$ 이므로

$$[\sqrt{x}-2] = -1$$

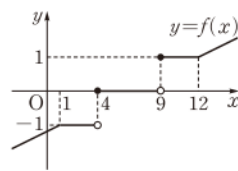
(ii) $4 \leq x < 9$ 일 때, $0 \leq \sqrt{x}-2 < 1$ 이므로

$$[\sqrt{x}-2] = 0$$

(iii) $9 \leq x < 12$ 일 때, $1 \leq \sqrt{x}-2 < 2$ 이므로

$$[\sqrt{x}-2] = 1$$

이상에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



이때 함수 $g(x)$ 는 모든 실수 x 에서 연속이고, 함수 $f(x)$ 는 $x=4, x=9$ 에서 불연속이므로 함수 $f(x)g(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속이라면 $x=4, x=9$ 에서 연속이어야 한다.

$$\lim_{x \rightarrow 4+} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow 4-} f(x)g(x) = f(4)g(4) \text{에서}$$

$$0 \cdot g(4) = -1 \cdot g(4) = 0 \cdot g(4) \quad \therefore g(4) = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 9+} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow 9-} f(x)g(x) = f(9)g(9) \text{에서}$$

$$1 \cdot g(9) = 0 \cdot g(9) = 1 \cdot g(9) \quad \therefore g(9) = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에서 이차방정식 $g(x)=0$, 즉 $x^2+ax+b=0$ 의 두 근이 4, 9이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$-a = 4+9, \quad b = 4 \cdot 9$$

$$\therefore a = -13, \quad b = 36$$

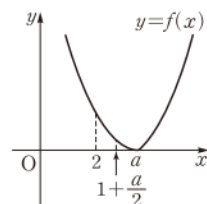
$$\therefore a+b = 23$$

답 ③

0213 전략 $a > 2, 0 < a < 2$ 일 때의 $f(x)$ 를 각각 구하여 조건을 만족시키는 a 의 값의 범위를 구한다.

풀이 (i) $a > 2$ 일 때,

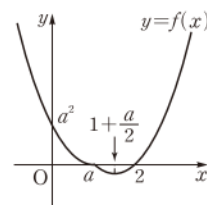
함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



즉 $0 < x < 1 + \frac{a}{2}$ 인 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) > 0$ 이므로 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

(ii) $0 < a < 2$ 일 때,

함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



함수 $f(x)$ 는 구간 $[0, 1 + \frac{a}{2}]$ 에서 연속

이고 $f(0) = a^2 > 0, f(1 + \frac{a}{2}) < 0$ 이므로

사잇값의 정리에 의하여 $f(c)=0$ 인 c 가

0 과 $1 + \frac{a}{2}$ 사이에 적어도 하나 존재한다.



따라서 조건 ㉞를 만족시킨다.

(i), (ii)에서 $0 < a < 2$

따라서 $f(2)=0, f(a)=0$ 이므로 세 점 $(2, 0), (a, 0),$

$(1+\frac{a}{2}, f(1+\frac{a}{2}))$ 를 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이는

$$\frac{1}{2} \cdot (2-a) \cdot \left\{ -f\left(1+\frac{a}{2}\right) \right\} = -\frac{1}{2}(2-a) \cdot \frac{a-2}{2} \cdot \frac{2-a}{2} \\ = \frac{1}{8}(2-a)^3$$

$$\text{즉 } \frac{1}{8}(2-a)^3 = \frac{1}{8} \text{이므로 } (2-a)^3 = 1$$

$$2-a=1 \quad \therefore a=1$$

$$\therefore f(3a)=f(3)=(3-2) \cdot (3-1)=2$$

답 ①

0214 전략 함수 $f(x)$ 가 구간 $[-3, 3]$ 에서 연속이므로 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 연속이다.

풀이 \therefore 함수 $f(x)$ 가 $x=0$ 에서 연속이어야 하므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) \quad \therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)-2}{2x} = -1$$

$x \rightarrow 0$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉 } \lim_{x \rightarrow 0} \{g(x)-2\} = 0 \text{이므로 } g(0)=2$$

ㄴ. 함수 $f(x)$ 는 구간 $[-3, 3]$ 에서 연속이므로 최대·최소 정리에 의하여 최댓값과 최솟값을 갖는다.

ㄷ. [반례] $g(x) = -2x+2$ 일 때, $g(-2) > 0, g(2) < 0$ 이지만 $f(x) = -1$ 이므로 방정식 $f(x)=0$ 은 구간 $(-2, 2)$ 에서 실근을 갖지 않는다.

이상에서 옳은 것은 ㄴ뿐이다.

답 ②

0215 전략 r 의 값의 범위를 나누어 방정식 $|x-2|+|y|=4$ 의 그래프와 원의 교점의 개수를 구한다.

풀이 방정식 $|x-2|+|y|=4$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 마름모 모양이다.

이 마름모의 네 꼭짓점을 각각 A, B, C, D

라 하면 원점 O와 직선 AB, 즉

$x-y+2=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \sqrt{2}$$

원점 O와 직선 AD, 즉 $x+y-6=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|-6|}{\sqrt{1^2+1^2}} = 3\sqrt{2}$$

이고

$$\overline{OB}=2, \overline{OC}=\sqrt{2^2+(-4)^2}=2\sqrt{5}, \overline{OD}=6$$

→ ①

이므로 r 의 값의 범위에 따른 원과 마름모의 교점의 개수 $f(r)$ 는 다음과 같다.

$$0 < r < \sqrt{2} \text{일 때, } f(r)=0$$

$$r=\sqrt{2} \text{일 때, } f(r)=2$$

$$\sqrt{2} < r < 2 \text{일 때, } f(r)=4$$

$$r=2 \text{일 때, } f(r)=3$$

$$2 < r < 3\sqrt{2} \text{일 때, } f(r)=2$$

$$r=3\sqrt{2} \text{일 때, } f(r)=4$$

$$3\sqrt{2} < r < 2\sqrt{5} \text{일 때, } f(r)=6$$

$$r=2\sqrt{5} \text{일 때, } f(r)=4$$

$$2\sqrt{5} < r < 6 \text{일 때, } f(r)=2$$

$$r=6 \text{일 때, } f(r)=1$$

$$r > 6 \text{일 때, } f(r)=0$$

→ ②

따라서 구간 $(0, 10)$ 에서 $f(r)$ 는 $r=\sqrt{2}, 2, 3\sqrt{2}, 2\sqrt{5}, 6$ 에서 불연속이므로

$$a_3=3\sqrt{2}, n=5$$

→ ③

$$\therefore a_3^2+n^2=(3\sqrt{2})^2+5^2=43$$

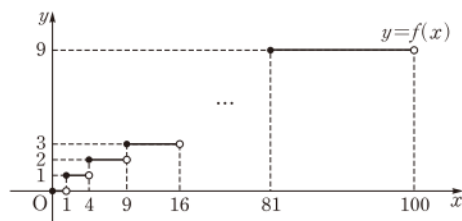
→ ④

답 43

채점 기준	비율
① 원점 O와 직선 AB, AD 사이의 거리와 $\overline{OB}, \overline{OC}, \overline{OD}$ 의 길이를 각각 구할 수 있다.	20 %
② r 의 값의 범위에 따른 $f(r)$ 의 값을 구할 수 있다.	40 %
③ a_3, n 의 값을 구할 수 있다.	30 %
④ $a_3^2+n^2$ 의 값을 구할 수 있다.	10 %

0216 전략 함수 $f(x)$ 가 불연속이 되는 x 의 값을 기준으로 경우를 나누어 구한다.

풀이 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



$f(x)=k$ 라 하면 $0 \leq x < 100$ 에서 $0 \leq k < 10$ 이므로 함수 $f(k)$ 는 $k=1, k=4, k=9$ 에서 불연속이다.

→ ①

(i) $f(x)=1$ 을 만족시키는 x 의 값의 범위는

$$1 \leq x < 4$$

$x=1$ 일 때,

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(f(x)) = f(1) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} f(f(x)) = f(0) = 0$$

즉 $\lim_{x \rightarrow 1} f(f(x))$ 의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(f(x))$ 는

$x=1$ 에서 불연속이다.

이때 $1 < a < 4$ 인 a 에 대하여

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(f(x)) = \lim_{x \rightarrow a-} f(f(x)) = f(1) = 1$$

이므로 함수 $f(f(x))$ 는 $1 < x < 4$ 에서 연속이다.

따라서 $1 \leq x < 4$ 에서 함수 $f(f(x))$ 가 불연속이 되는 x 의 값은 1이다.

(ii) $f(x)=4$ 를 만족시키는 x 의 값의 범위는

$$16 \leq x < 25$$

(i)과 같은 방법으로 하면 $16 \leq x < 25$ 에서 함수 $f(f(x))$ 가 불연속이 되는 x 의 값은 16이다.

(iii) $f(x)=9$ 를 만족시키는 x 의 값의 범위는

$$81 \leq x < 100$$

(i)과 같은 방법으로 하면 $81 \leq x < 100$ 에서 함수 $f(f(x))$ 가 불연속이 되는 x 의 값은 81이다.

이상에서 $0 \leq x < 100$ 에서 함수 $f(f(x))$ 가 불연속이 되는 x 의 값은 1, 16, 81이므로

$$a=1, 16, 81 \quad \rightarrow ②$$

$$\text{따라서 모든 } a \text{의 값의 합은 } 1+16+81=98 \quad \rightarrow ③$$

답 98

채점 기준	비율
① $f(x)=k$ 라 하고 함수 $f(k)$ 가 불연속이 되는 k 의 값을 구할 수 있다.	30%
② a 의 값을 구할 수 있다.	60%
③ 모든 a 의 값의 합을 구할 수 있다.	10%

참고 $0 \leq x < 1$ 일 때, $f(x)=0$ 이므로 $f(f(x))=0$

$1 \leq x < 4$ 일 때, $f(x)=10$ 이므로 $f(f(x))=1$

$4 \leq x < 9$ 일 때, $f(x)=20$ 이므로 $f(f(x))=1$

$9 \leq x < 16$ 일 때, $f(x)=30$ 이므로 $f(f(x))=1$

$16 \leq x < 25$ 일 때, $f(x)=40$ 이므로 $f(f(x))=2$

$25 \leq x < 36$ 일 때, $f(x)=50$ 이므로 $f(f(x))=2$

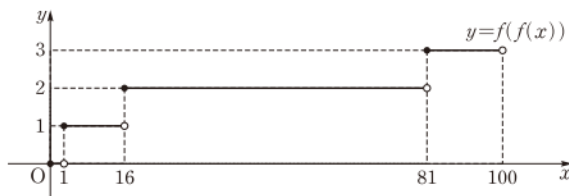
$36 \leq x < 49$ 일 때, $f(x)=60$ 이므로 $f(f(x))=2$

$49 \leq x < 64$ 일 때, $f(x)=70$ 이므로 $f(f(x))=2$

$64 \leq x < 81$ 일 때, $f(x)=80$ 이므로 $f(f(x))=2$

$81 \leq x < 100$ 일 때, $f(x)=90$ 이므로 $f(f(x))=3$

따라서 함수 $y=f(f(x))$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



0217 전략 함수 $g(x)$ 의 차수와 최고차항의 계수를 구하고, 함수 $f(x)g(x)$ 가 $x=-1$, $x=1$ 에서 연속임을 이용한다.

풀이 조건 (가)에 의하여 $g(x)$ 는 최고차항의 계수가 2인 이차함수이다. $\rightarrow ①$

다항함수 $g(x)$ 는 모든 실수 x 에서 연속이고, 조건 (나)에 의하여 $f(x)g(x)$ 가 $x=-1$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow -1+} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow -1-} f(x)g(x) = f(-1)g(-1)$$

이어야 한다. 이때

$$\lim_{x \rightarrow -1+} f(x)g(x) = -1 \cdot g(-1) = -g(-1),$$

$$\lim_{x \rightarrow -1-} f(x)g(x) = 1 \cdot g(-1) = g(-1)$$

$$\text{이므로 } -g(-1) = g(-1)$$

$$\therefore g(-1) = 0 \quad \dots\dots ⑦ \quad \rightarrow ②$$

또 $f(x)g(x)$ 가 $x=1$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} f(x)g(x) = f(1)g(1)$$

이어야 한다. 이때

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x)g(x) = 0 \cdot g(1) = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} f(x)g(x) = -1 \cdot g(1) = -g(1)$$

$$\text{이므로 } 0 = -g(1) \quad \therefore g(1) = 0 \quad \dots\dots ⑧ \quad \rightarrow ③$$

⑦, ⑧에서 $g(x) = 2(x+1)(x-1)$ 이므로

$$g(4) = 2 \cdot 5 \cdot 3 = 30 \quad \left\{ \begin{array}{l} g(-1)=0, g(1)=0 \text{이므로 } g(x) \text{는} \\ x+1, x-1 \text{을 인수로 갖는다.} \end{array} \right. \quad \rightarrow ④$$

답 30

채점 기준	비율
① $g(x)$ 의 차수와 최고차항의 계수를 구할 수 있다.	20%
② $g(-1)$ 의 값을 구할 수 있다.	30%
③ $g(1)$ 의 값을 구할 수 있다.	30%
④ $g(4)$ 의 값을 구할 수 있다.	20%

0218 전략 함수 $g(x)$ 는 모든 실수 x 에서 연속이므로 $f(x)$ 가 불연속인 점에서 함수 $f(x)g(x)$ 가 연속이 되도록 a , b 의 값을 정한다.

$$\begin{aligned} \text{풀이} \rightarrow y &= \left| \frac{6x}{x-1} \right| - 4 \\ &= \left| \frac{6}{x-1} + 6 \right| - 4 \end{aligned}$$

의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. $\rightarrow ①$

(i) $t < -4$ 일 때, $f(t)=0$

(ii) $t = -4$ 일 때, $f(t)=1$

(iii) $-4 < t < 2$ 일 때, $f(t)=2$

(iv) $t = 2$ 일 때, $f(t)=1$

(v) $t > 2$ 일 때, $f(t)=2$

이상에서 함수 $y=f(t)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. $\rightarrow ②$

이때 함수 $g(x)$ 는 모든 실수 x 에서 연속이고, 함수 $f(x)$ 는 $x=-4$, $x=2$ 에서 불연속이므로 함수 $f(x)g(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속이려면 $x=-4$, $x=2$ 에서 연속이어야 한다.

$$\lim_{x \rightarrow -4+} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow -4-} f(x)g(x) = f(-4)g(-4) \text{에서}$$

$$2 \cdot g(-4) = 0 \cdot g(-4) = 1 \cdot g(-4)$$

$$\therefore g(-4) = 0$$

$$\therefore |-4-a|+b=0 \quad \dots\dots ⑨$$

$$\lim_{x \rightarrow 2+} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow 2-} f(x)g(x) = f(2)g(2) \text{에서}$$

$$2 \cdot g(2) = 2 \cdot g(2) = 1 \cdot g(2)$$

$$\therefore g(2) = 0$$

$$\therefore |2-a|+b=0 \quad \dots\dots ⑩$$

$$\text{⑨, ⑩에서 } |-4-a|+b = |2-a|+b$$

$$\therefore |a+4| = |a-2|$$

이때 $a+4=a-2$ 를 만족시키는 a 는 존재하지 않으므로

$$a+4 = -(a-2), \quad 2a = -2$$

$$\therefore a = -1$$

$$a = -1 \text{을 ⑩에 대입하면 } b = -3$$

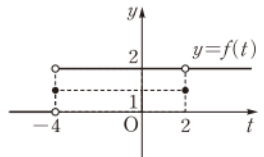
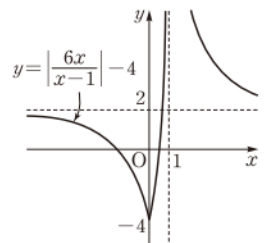
따라서 $g(x) = |x+1| - 3$ 이므로

$$g(ab) = g(3) = 1$$

$\rightarrow ③$

$\rightarrow ④$

답 1





채점 기준

비율

① $y = \left \frac{6x}{x-1} \right - 4$ 의 그래프를 그릴 수 있다.	20 %
② $y = f(t)$ 의 그래프를 그릴 수 있다.	30 %
③ $g(x)$ 를 구할 수 있다.	40 %
④ $g(ab)$ 의 값을 구할 수 있다.	10 %

0219 **전략** $x \rightarrow a$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하면 (분자) $\rightarrow 0$ 임을 이용하여 함수 $f(x)$ 를 구한다.

풀이 $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{f(x)}{x-5} = 10, \lim_{x \rightarrow 10} \frac{f(x)}{x-10} = 5$ 에서 $x \rightarrow 5, x \rightarrow 10$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 각각 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.
즉 $\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow 10} f(x) = 0$ 이므로

$$f(5) = 0, f(10) = 0 \quad \rightarrow ①$$

$f(x) = (x-5)(x-10)g(x)$ ($g(x)$ 는 다항함수)라 하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 5} \frac{f(x)}{x-5} &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(x-5)(x-10)g(x)}{x-5} \\ &= \lim_{x \rightarrow 5} (x-10)g(x) = -5g(5) \end{aligned}$$

$$\text{즉 } -5g(5) = 10 \text{이므로 } g(5) = -2$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 10} \frac{f(x)}{x-10} &= \lim_{x \rightarrow 10} \frac{(x-5)(x-10)g(x)}{x-10} \\ &= \lim_{x \rightarrow 10} (x-5)g(x) = 5g(10) \end{aligned}$$

$$\text{즉 } 5g(10) = 5 \text{이므로 } g(10) = 1 \quad \rightarrow ②$$

이때 $g(x)$ 는 연속함수이고 $g(5)g(10) < 0$ 이므로 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $g(x) = 0$ 은 구간 $(5, 10)$ 에서 적어도 하나의 실근을 갖는다. $\rightarrow ③$

따라서 방정식 $f(x) = 0$, 즉 $(x-5)(x-10)g(x) = 0$ 은 구간 $[5, 10]$ 에서 적어도 세 개의 실근을 갖는다.

$$\therefore m = 3 \quad \rightarrow ④$$

답 3

채점 기준

비율

① $f(5) = 0, f(10) = 0$ 임을 알 수 있다.	20 %
② $g(5), g(10)$ 의 값을 구할 수 있다.	30 %
③ 방정식 $g(x) = 0$ 이 구간 $(5, 10)$ 에서 적어도 하나의 실근을 가짐을 알 수 있다.	30 %
④ m 의 값을 구할 수 있다.	20 %

II. 다항함수의 미분법

03 미분계수와 도함수

$$0220 \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(1) - f(-1)}{1 - (-1)} = \frac{1 - 3}{2} = -1 \quad \text{답 } -1$$

$$0221 \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(1) - f(-1)}{1 - (-1)} = \frac{-1 - (-1)}{2} = 0 \quad \text{답 } 0$$

$$0222 \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(1) - f(-1)}{1 - (-1)} = \frac{2 - (-4)}{2} = 3 \quad \text{답 } 3$$

$$0223 \quad (1) \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{6 - 0}{2} = 3$$

$$(2) \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(-1) - f(-2)}{-1 - (-2)} = \frac{2 - 6}{1} = -4 \quad \text{답 } (1) 3 \quad (2) -4$$

$$\begin{aligned} 0224 \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(2+\Delta x) - f(2)}{(2+\Delta x) - 2} = \frac{\{3(2+\Delta x) + 1\} - 7}{\Delta x} \\ &= \frac{3\Delta x}{\Delta x} = 3 \quad \text{답 } 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0225 \quad f'(1) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\{(1+\Delta x) + 2\} - 3}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1 \quad \text{답 } 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0226 \quad f'(1) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\{-(1+\Delta x)^2 + 2(1+\Delta x)\} - 1}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-(\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (-\Delta x) = 0 \quad \text{답 } 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0227 \quad f'(1) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\{-3(1+\Delta x)^3 + 6(1+\Delta x) + 1\} - 4}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-3\Delta x - 9(\Delta x)^2 - 3(\Delta x)^3}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \{-3 - 9\Delta x - 3(\Delta x)^2\} = -3 \quad \text{답 } -3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0228 \quad f'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x^2 + 2) - (a^2 + 2)}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x+a)(x-a)}{x-a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} (x+a) = 2a \end{aligned}$$

$$2a = 4 \text{에서 } a = 2 \quad \text{답 } 2$$

$$\begin{aligned}
 0229 \quad f'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \\
 &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x^3 + x + 1) - (a^3 + a + 1)}{x - a} \\
 &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x - a)(x^2 + ax + a^2 + 1)}{x - a} \\
 &= \lim_{x \rightarrow a} (x^2 + ax + a^2 + 1) = 3a^2 + 1
 \end{aligned}$$

$3a^2 + 1 = 4$ 에서 $a = 1$ ($\because a > 0$)

답 1

0230 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(-1, 4)$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(-1)$ 과 같으므로

$$\begin{aligned}
 f'(-1) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(-1 + \Delta x) - f(-1)}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\{3(-1 + \Delta x)^2 + 1\} - 4}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-6\Delta x + 3(\Delta x)^2}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (-6 + 3\Delta x) = -6
 \end{aligned}$$

답 -6

0231 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(2, 12)$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(2)$ 와 같으므로

$$\begin{aligned}
 f'(2) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(2 + \Delta x) - f(2)}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\{(2 + \Delta x)^3 + 4\} - 12}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{12\Delta x + 6(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \{12 + 6\Delta x + (\Delta x)^2\} = 12
 \end{aligned}$$

답 12

0232 (가) 연속 (나) 미분가능

0233 (i) $f(1) = 1$ 이고,

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} x^2 = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} (-x^2 + 2) = 1$$

$$\text{이므로 } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 연속이다.

$$(ii) \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1+} (x + 1) = 2,$$

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{(-x^2 + 2) - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{-(x^2 - 1)}{x - 1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1-} \{-(x + 1)\} = -2
 \end{aligned}$$

이므로 $f'(1)$ 의 값이 존재하지 않는다.

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 미분가능하지 않다.

답 연속이고 미분가능하지 않다.

$$0234 \quad f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{4 - 4}{\Delta x} = 0$$

$$\text{답 } f'(x) = 0$$

$$0235 \quad f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\{(x + \Delta x) + 3\} - (x + 3)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$$

$$\text{답 } f'(x) = 1$$

$$0236 \quad f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\{(x + \Delta x)^2 - 4\} - (x^2 - 4)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + \Delta x) = 2x$$

$$\text{답 } f'(x) = 2x$$

$$0237 \quad y' = (-x^8)' = -8x^7$$

$$\text{답 } y' = -8x^7$$

$$0238 \quad y' = (6)' = 0$$

$$\text{답 } y' = 0$$

$$0239 \quad y' = (3x^6)' = 18x^5$$

$$\text{답 } y' = 18x^5$$

$$0240 \quad y' = (-5x + 2)' = (-5x)' + (2)' = -5$$

$$\text{답 } y' = -5$$

$$0241 \quad y' = (-x^2 + 2x - 4)' = (-x^2)' + (2x)' - (4)'$$

$$= -2x + 2$$

$$\text{답 } y' = -2x + 2$$

$$0242 \quad y' = \left(\frac{1}{2}x^2 - x + 3\right)' = \left(\frac{1}{2}x^2\right)' - (x)' + (3)'$$

$$= x - 1$$

$$\text{답 } y' = x - 1$$

0243 (1) 함수 $f(x) + g(x)$ 의 $x=0$ 에서의 미분계수는

$$f'(0) + g'(0) = -2 + 6 = 4$$

(2) 함수 $f(x) - 2g(x)$ 의 $x=0$ 에서의 미분계수는

$$f'(0) - 2g'(0) = -2 - 2 \cdot 6 = -14 \quad \text{답 (1) 4 (2) -14}$$

$$0244 \quad y' = (x - 3)'(2x - 1) + (x - 3)(2x - 1)'$$

$$= (2x - 1) + 2(x - 3) = 4x - 7$$

$$\text{답 } y' = 4x - 7$$

$$0245 \quad y' = (-5x)'(x^2 + 1) - 5x(x^2 + 1)'$$

$$= -5(x^2 + 1) - 5x \cdot 2x$$

$$= -15x^2 - 5$$

$$\text{답 } y' = -15x^2 - 5$$

$$0246 \quad y' = (x^2 - 4x + 5)'(3x + 7) + (x^2 - 4x + 5)(3x + 7)'$$

$$= (2x - 4)(3x + 7) + 3(x^2 - 4x + 5)$$

$$= 9x^2 - 10x - 13$$

$$\text{답 } y' = 9x^2 - 10x - 13$$



$$\begin{aligned} 0247 \quad y' &= (x)'(x+1)(x+2) + x(x+1)'(x+2) \\ &\quad + x(x+1)(x+2)' \\ &= (x+1)(x+2) + x(x+2) + x(x+1) \\ &= 3x^2 + 6x + 2 \quad \text{답 } y' = 3x^2 + 6x + 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0248 \quad y' &= (x-5)'(2x+1)(-x+7) \\ &\quad + (x-5)(2x+1)'(-x+7) \\ &\quad + (x-5)(2x+1)(-x+7)' \\ &= (2x+1)(-x+7) + 2(x-5)(-x+7) \\ &\quad - (x-5)(2x+1) \\ &= -6x^2 + 46x - 58 \quad \text{답 } y' = -6x^2 + 46x - 58 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0249 \quad y' &= \{(3x-2)^4\}' = 4(3x-2)^{4-1}(3x-2)' \\ &= 12(3x-2)^3 \quad \text{답 } y' = 12(3x-2)^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0250 \quad y' &= \{(2x^2-x+5)^3\}' \\ &= 3(2x^2-x+5)^{3-1}(2x^2-x+5)' \\ &= 3(2x^2-x+5)^2(4x-1) \\ &\quad \text{답 } y' = 3(2x^2-x+5)^2(4x-1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0251 \quad y' &= \{(x+2)^2\}'(3x^2-1) + (x+2)^2(3x^2-1)' \\ &= 2(x+2)(x+2)'(3x^2-1) + (x+2)^2 \cdot 6x \\ &= 2(x+2)(3x^2-1) + 6x(x+2)^2 \\ &= 2(x+2)(6x^2+6x-1) \\ &\quad \text{답 } y' = 2(x+2)(6x^2+6x-1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0252 \quad y' &= \{(x-5)^2\}'(x^2+1)^3 + (x-5)^2\{(x^2+1)^3\}' \\ &= 2(x-5)(x-5)'(x^2+1)^3 \\ &\quad + (x-5)^2 \cdot 3(x^2+1)^2(x^2+1)' \\ &= 2(x-5)(x^2+1)^3 + 6x(x-5)^2(x^2+1)^2 \\ &= 2(x-5)(x^2+1)^2(4x^2-15x+1) \\ &\quad \text{답 } y' = 2(x-5)(x^2+1)^2(4x^2-15x+1) \end{aligned}$$

유형 01 평균변화율

본책 48쪽

함수 $y=f(x)$ 에서 x 의 값이 a 에서 b 까지 변할 때의 평균변화율

$$\Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

$$\begin{aligned} 0253 \quad x \text{의 값이 } 1 \text{에서 } a \text{까지 변할 때의 함수 } f(x) \text{의 평균변화율은} \\ \frac{f(a)-f(1)}{a-1} &= \frac{(a^3-2a+1)-0}{a-1} \\ &= \frac{(a-1)(a^2+a-1)}{a-1} = a^2+a-1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{따라서 } a^2+a-1=11 \text{이므로} \quad a^2+a-12=0 \\ (a+4)(a-3)=0 \quad \therefore a=3 (\because a>1) \end{aligned}$$

답 3

$$\begin{aligned} 0254 \quad x \text{의 값이 } 2 \text{에서 } 4 \text{까지 변할 때의 함수 } f(x) \text{의 평균변화율은} \\ \frac{f(4)-f(2)}{4-2} &= \frac{(16+4a+1)-(4+2a+1)}{2} \\ &= \frac{2a+12}{2} = a+6 \end{aligned}$$

$$\text{따라서 } a+6=3 \text{이므로} \quad a=-3$$

답 ③

$$\begin{aligned} 0255 \quad x \text{의 값이 } -2 \text{에서 } 4 \text{까지 변할 때의 함수 } f(x) \text{의 평균변화율은} \\ \frac{f(4)-f(-2)}{4-(-2)} &= \frac{32-(-4)}{6} = 6 \end{aligned}$$

또 x 의 값이 0에서 a 까지 변할 때의 함수 $f(x)$ 의 평균변화율은

$$\frac{f(a)-f(0)}{a-0} = \frac{a^2+4a}{a} = a+4$$

$$\text{따라서 } a+4=6 \text{이므로} \quad a=2$$

답 ②

채점 기준	비율
① x 의 값이 -2 에서 4 까지 변할 때의 평균변화율을 구할 수 있다.	40 %
② x 의 값이 0에서 a 까지 변할 때의 평균변화율을 a 에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40 %
③ a 의 값을 구할 수 있다.	20 %

유형 02 평균변화율의 기하적 의미

본책 48쪽

함수 $y=f(x)$ 에서 x 의 값이 a 에서 b 까지 변할 때의 평균변화율은 그래프 위의 두 점 $A(a, f(a))$, $B(b, f(b))$ 를 지나는 직선 AB의 기울기와 같다.

0256 직선 AB의 기울기는 x 의 값이 2에서 4까지 변할 때의 함수 $f(x)$ 의 평균변화율과 같으므로

$$\frac{f(4)-f(2)}{4-2} = 2$$

한편 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 직선 $x=2$ 에 대하여 대칭이므로

$$f(0)=f(4)$$

따라서 x 의 값이 0에서 2까지 변할 때의 함수 $f(x)$ 의 평균변화율은

$$\frac{f(2)-f(0)}{2-0} = \frac{f(2)-f(4)}{2} = -\frac{f(4)-f(2)}{4-2} = -2$$

답 -2

0257 x 의 값이 1에서 5까지 변할 때의 함수 $f(x)$ 의 평균변화율은 두 점 $A(1, f(1))$, $B(5, f(5))$ 를 지나는 직선 AB의 기울기와 같다.

따라서 직선 AB의 기울기는 -4 이다.

답 -4

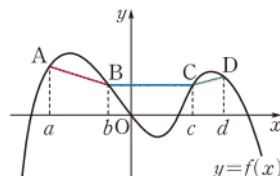
0258 오른쪽 그림의 함수

$y=f(x)$ 의 그래프에서 α , β , γ 의 값은 각각 직선 AB, 직선 BC, 직선 CD의 기울기와 같으므로

$$\alpha < 0, \beta = 0, \gamma > 0$$

$$\therefore \alpha < \beta < \gamma$$

답 ①



0259 x 의 값이 c 에서 d 까지 변할 때의 함수 $g(x)$ 의 평균변화율은

$$\frac{g(d)-g(c)}{d-c} = \frac{f^{-1}(d)-f^{-1}(c)}{d-c}$$

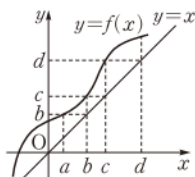
오른쪽 그림에서 $f(c)=d$ 이므로

$$f^{-1}(d)=c$$

또 $f(b)=c$ 이므로 $f^{-1}(c)=b$

따라서 구하는 평균변화율은

$$\frac{f^{-1}(d)-f^{-1}(c)}{d-c} = \frac{c-b}{d-c}$$



답 ④

유형 03 평균변화율과 미분계수

본책 49쪽

① 함수 $f(x)$ 에서 x 의 값이 a 에서 b 까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

② 함수 $f(x)$ 의 $x=a$ 에서의 미분계수는

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

0260 x 의 값이 1에서 3까지 변할 때의 함수 $f(x)$ 의 평균변화율은

$$\frac{f(3)-f(1)}{3-1} = \frac{3-(-1)}{2} = 2$$

또 함수 $f(x)$ 의 $x=c$ 에서의 미분계수는

$$\begin{aligned} f'(c) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{(c+h)^2-2(c+h)\}-(c^2-2c)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2ch+h^2-2h}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (2c+h-2) = 2c-2 \end{aligned}$$

따라서 $2c-2=2$ 이므로 $c=2$

답 2

0261 x 의 값이 a 에서 b 까지 변할 때의 함수 $f(x)$ 의 평균변화율은

$$\begin{aligned} \frac{f(b)-f(a)}{b-a} &= \frac{(b^2+2b+3)-(a^2+2a+3)}{b-a} \\ &= \frac{(b^2-a^2)+2(b-a)}{b-a} \\ &= \frac{(b-a)(b+a+2)}{b-a} \\ &= b+a+2 \end{aligned}$$

→ ①

또 함수 $f(x)$ 의 $x=-1$ 에서의 순간변화율은

$$\begin{aligned} f'(-1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1+h)-f(-1)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{(-1+h)^2+2(-1+h)+3\}-2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h = 0 \end{aligned}$$

→ ②

따라서 $b+a+2=0$ 이므로 $a+b=-2$

→ ③

답 -2

채점 기준

비율

① x 의 값이 a 에서 b 까지 변할 때의 평균변화율을 구할 수 있다.	40 %
② $x=-1$ 에서의 순간변화율을 구할 수 있다.	40 %
③ $a+b$ 의 값을 구할 수 있다.	20 %

0262 $\frac{f(t)-f(0)}{t}=t^2, f(0)=1$ 이므로 $f(t)=t^3+1$

즉 $f(x)=x^3+1$ 이므로

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{(1+h)^3+1\}-2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3h+3h^2+h^3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (3+3h+h^2) = 3 \end{aligned}$$

답 ③

유형 04 미분계수를 이용한 극한값의 계산

본책 49쪽

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

함수 $f(x)$ 의 $x=a$ 에서의 미분계수는

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

→ 주어진 식을 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+\square)-f(a)}{\square}$ 꼴을 포함한 식으로 변형한다.

0263 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-2h)-f(1+3h)}{h}$

$$\begin{aligned} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{f(1-2h)-f(1)\} - \{f(1+3h)-f(1)\}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-2h)-f(1)}{-2h} \cdot (-2) - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+3h)-f(1)}{3h} \cdot 3 \\ &= -2f'(1) - 3f'(1) = -5f'(1) \\ &= -5 \cdot (-2) = 10 \end{aligned}$$

답 ⑤

0264 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+5h)-f(a)}{4h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+5h)-f(a)}{5h} \cdot \frac{5}{4}$

$$= \frac{5}{4} f'(a)$$

답 ④

0265 $f(6)=2, f'(6)=1$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2-f(6-h)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(6)-f(6-h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(6-h)-f(6)}{-h} \\ &= f'(6) = 1 \end{aligned}$$

답 1

0266 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left\{ \frac{1}{f(a+h)} - \frac{1}{f(a)} \right\}$

$$\begin{aligned} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \cdot \frac{f(a)-f(a+h)}{f(a+h)f(a)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ -\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \right\} \cdot \frac{1}{f(a+h)f(a)} \\ &= -\frac{f'(a)}{\{f(a)\}^2} \end{aligned}$$

답 ①



0267 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+4h) - f(a+h^2)}{h}$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{f(a+4h) - f(a)\} - \{f(a+h^2) - f(a)\}}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+4h) - f(a)}{4h} \cdot 4 - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h^2) - f(a)}{h^2} \cdot h$$

$$= 4f'(a) - 0 \cdot f'(a) = 4f'(a)$$

$$= 4 \cdot 3 = 12 \quad \text{답 12}$$

유형 05

미분계수를 이용한 극한값의 계산

$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$

본책 50쪽

함수 $f(x)$ 의 $x=a$ 에서의 미분계수는

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

⇒ 주어진 식을 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(\triangle) - f(\bigcirc)}{\triangle - \bigcirc}$ 꼴을 포함한 식으로 변형한다.

0268 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2f(x) - xf(2)}{x - 2}$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2f(x) - 2f(2) + 2f(2) - xf(2)}{x - 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2\{f(x) - f(2)\} - f(2)(x - 2)}{x - 2}$$

$$= 2 \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} - f(2)$$

$$= 2f'(2) - f(2) = 2 \cdot 5 - 2 = 8 \quad \text{답 ③}$$

0269 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x^2) - f(a^2)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x^2) - f(a^2)}{x^2 - a^2} \cdot (x + a)$

$$= 2af'(a^2) \quad \text{답 ④}$$

0270 $f(3)=0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)}{x^2 - 2x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{(x-3)(x+1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} \cdot \frac{1}{x + 1}$$

$$= \frac{1}{4} f'(3) = \frac{1}{4} \cdot 8 = 2 \quad \text{답 2}$$

0271 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{f(x)} - \sqrt{f(1)}}{\sqrt{x} - 1}$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\{\sqrt{f(x)} - \sqrt{f(1)}\} \{\sqrt{f(x)} + \sqrt{f(1)}\}}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)} \cdot \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{f(x)} + \sqrt{f(1)}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \cdot \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{f(x)} + \sqrt{f(1)}}$$

$$= f'(1) \cdot \frac{2}{2\sqrt{f(1)}}$$

$$= 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \quad \text{답 } \frac{3}{2}$$

0272 $y=f(x)$ 의 그래프가 y 축에 대하여 대칭이므로 $f(x)=f(-x)$

$$\therefore f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-a-h) - f(-a)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-a-h) - f(-a)}{-h} \cdot (-1)$$

$$= -f'(-a)$$

즉 $f'(2)=2$ 에서 $-f'(-2)=2$ 이므로 $f'(-2)=-2$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x^2) - f(4)}{f(x) - f(2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x^2) - f(4)}{f(x) - f(-2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x^2) - f(4)}{x^2 - 4} \cdot \frac{x - (-2)}{f(x) - f(-2)} \cdot (x - 2)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x^2) - f(4)}{x^2 - 4} \cdot \frac{1}{f(x) - f(-2)} \cdot (x - 2)$$

$$= f'(4) \cdot \frac{1}{f'(-2)} \cdot (-4)$$

$$= -6 \cdot \frac{1}{-2} \cdot (-4) = -12 \quad \text{답 -12}$$

유형 06

관계식이 주어질 때 미분계수 구하기

본책 50쪽

- (i) 주어진 식의 x, y 에 적당한 수를 대입하여 $f(0)$ 의 값을 구한다.
 (ii) $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ 에서 $f(a+h)$ 에 주어진 관계식을 대입하여 $f'(a)$ 의 값을 구한다.

0273 $x=0, y=0$ 을 주어진 식에 대입하면

$$f(0) = f(0) + f(0) \quad \therefore f(0) = 0$$

$$\therefore f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1) + f(h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = f'(0) = 2 \quad \text{답 ②}$$

0274 $x=0, y=0$ 을 주어진 식에 대입하면 $f(0)=f(0)+f(0)+0 \quad \therefore f(0)=0$

이때

$$f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1) + f(h) + h - f(1)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} + 1 = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} + 1$$

$$= f'(0) + 1$$

이므로 $f'(0) + 1 = 2 \quad \therefore f'(0) = 1$

$$\begin{aligned}
 \therefore f'(2) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2) + f(h) + 2h - f(2)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} + 2 \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} + 2 \\
 &= f'(0) + 2 = 1 + 2 = 3
 \end{aligned}$$

답 3

0275 $x=0, y=0$ 을 주어진 식에 대입하면

$$f(0) = f(0) + f(0) - 1 \quad \therefore f(0) = 1$$

이때

$$\begin{aligned}
 f'(2) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2) + f(h) + 4h - 1 - f(2)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - 1}{h} + 4 = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} + 4 \\
 &= f'(0) + 4
 \end{aligned}$$

$$\text{이므로 } f'(0) + 4 = 7 \quad \therefore f'(0) = 3$$

자연수 k 에 대하여

$$\begin{aligned}
 f'(k) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(k+h) - f(k)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(k) + f(h) + 2kh - 1 - f(k)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - 1}{h} + 2k = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} + 2k \\
 &= f'(0) + 2k = 2k + 3
 \end{aligned}$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{10} f'(k) = \sum_{k=1}^{10} (2k + 3) = 2 \cdot \frac{10 \cdot 11}{2} + 30 = 140 \quad \text{답 140}$$

자연수의 거듭제곱의 합

$$\textcircled{1} \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\textcircled{2} \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\textcircled{3} \sum_{k=1}^n k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$$

0276 $x=0, y=0$ 을 주어진 식에 대입하면

$$f(0) = 3f(0)f(0) \quad \therefore f(0) = \frac{1}{3} \quad (\because f(0) > 0) \quad \rightarrow \textcircled{1}$$

$$\begin{aligned}
 f'(2019) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2019+h) - f(2019)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3f(2019)f(h) - f(2019)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3f(2019) \left\{ f(h) - \frac{1}{3} \right\}}{h} \\
 &= 3f(2019) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} \\
 &= 3f(2019)f'(0)
 \end{aligned}$$

$\rightarrow \textcircled{2}$

이므로

$$\frac{f'(2019)}{f(2019)} = \frac{3f(2019)f'(0)}{f(2019)} = 3f'(0) = 3 \cdot 2 = 6 \quad \rightarrow \textcircled{3}$$

답 6

채점 기준	비율
① $f(0)$ 의 값을 구할 수 있다.	20 %
② $f'(2019)$ 를 $f(2019)$ 에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	50 %
③ $\frac{f'(2019)}{f(2019)}$ 의 값을 구할 수 있다.	30 %

유형 07 미분계수의 기하적 의미

본책 51쪽

- 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$ 에서의 접선의 기울기는 함수 $f(x)$ 의 $x=a$ 에서의 미분계수 $f'(a)$ 와 같다.
- 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$ 에서의 접선이 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 θ ($0^\circ \leq \theta < 90^\circ$)라 하면 $\tan \theta = f'(a)$ 이다.

0277 곡선 $y=f(x)$ 위의 $x=1$ 인 점에서의 접선의 기울기는 $f'(1)$ 과 같고, 이 접선은 두 점 $(0, 6), (1, 5)$ 를 지나므로

$$f'(1) = \frac{5-6}{1-0} = -1$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+3h) - f(1)}{2h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+3h) - f(1)}{3h} \cdot \frac{3}{2} \\
 &= \frac{3}{2} f'(1) = \frac{3}{2} \cdot (-1) \\
 &= -\frac{3}{2}
 \end{aligned}$$

답 ②

0278 $f'(d) < f'(c) < f'(a) < f'(b)$

0279 $f(1)=4, f'(1)=3$ 이므로

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 f(1) - f(x)}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-f(x) + f(1) - f(1) + x^2 f(1)}{x-1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-\{f(x) - f(1)\} + (x^2 - 1)f(1)}{x-1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ -\frac{f(x) - f(1)}{x-1} + (x+1)f(1) \right\} \\
 &= -f'(1) + 2f(1) \\
 &= -3 + 2 \cdot 4 = 5
 \end{aligned}$$

답 5

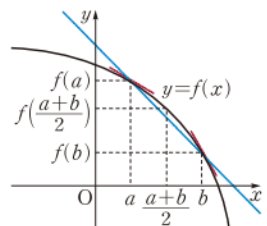
0280 $\therefore x=a$ 인 점에서의 접선의 기울기는 $x=b$ 인 점에서의 접선의 기울기보다 크므로

$$f'(a) > f'(b)$$

$\therefore a \leq x \leq b$ 에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 위로 볼록하므로

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) > \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

$\therefore x=a$ 인 점에서의 접선의 기울기는 두 점 $(a, f(a)), (b, f(b))$ 를 지나는 직선의 기울기보다 크므로





$$f'(a) > \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

$a < b$ 일 때

① 곡선 $y=f(x)$ 가 위로 볼록하면

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) > \frac{f(a)+f(b)}{2}, f'(a) > \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

② 곡선 $y=f(x)$ 가 아래로 볼록하면

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) < \frac{f(a)+f(b)}{2}, f'(a) < \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

0281 오른쪽 그림과 같이 $A(a, f(a))$, $B(b, f(b))$ 라 하자.

ㄱ. 직선 AB의 기울기는 1보다 작으므로

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} < 1$$

이때 $b-a > 0$ 이므로 $f(b)-f(a) < b-a$

ㄴ. $\frac{f(a)}{a}$ 는 원점과 점 A를 지나는 직선의 기울기이고, $\frac{f(b)}{b}$ 는 원

점과 점 B를 지나는 직선의 기울기이므로

$$\frac{f(a)}{a} > \frac{f(b)}{b}$$

ㄷ. $f'(a)$ 는 점 A에서의 접선의 기울기이고, $f'(b)$ 는 점 B에서의 접선의 기울기이므로 $f'(a) > f'(b)$

ㄹ. $0 < a < b$ 에 대하여 $\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$ 이고, x 의 값이 클수록 곡선

$y=f(x)$ 의 접선의 기울기는 작아진다.

$$\therefore f'(\sqrt{ab}) > f'\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄹ이다.

답 ㄴ, ㄹ

산술평균과 기하평균의 관계

$a > 0, b > 0$ 일 때,

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \quad (\text{단, 등호는 } a=b \text{일 때 성립})$$

유형 08 미분가능성과 연속성

본책 52쪽

함수 $f(x)$ 가 실수 a 에 대하여

① $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \Rightarrow x=a$ 에서 연속

② $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ 가 존재 $\Rightarrow x=a$ 에서 미분가능

0282 ① $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 3$ 이므로 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 연속이다.

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3-3}{h} = 0$$

이므로 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 미분가능하다.

② $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0$ 이므로 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 연속이다.

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h|^3-0}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2|h|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h|h| = 0 \end{aligned}$$

이므로 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 미분가능하다.

③ $f(0)$ 이 정의되어 있지 않으므로 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 불연속이고 미분가능하지 않다.

④ $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0$ 이므로 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 연속이다.

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{h+|h|-0}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{h+h}{h} = 2, \\ \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{h+|h|-0}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{h-h}{h} = 0 \end{aligned}$$

이므로 $f'(0)$ 의 값이 존재하지 않는다.

따라서 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 미분가능하지 않다.

⑤ $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 1$ 이므로 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 연속이다.

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{(h+1)^2-1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{h^2+2h}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0+} (h+2) = 2, \\ \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{(2h+1)-1}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{2h}{h} = 2 \end{aligned}$$

이므로 $f'(0) = 2$

따라서 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 미분가능하다.

답 ④

0283 함수 $f(x)$ 는 $x=0, x=2$ 에서 불연속이므로 $m=2$

또 $x=-1, x=0, x=2$ 에서 미분가능하지 않으므로 $n=3$

$$\therefore m+n=5$$

답 5

함수 $y=f(x)$ 의 그래프에서

① 불연속인 점 \Rightarrow 연속되지 않고 끊어져 있는 점

② 미분가능하지 않은 점 \Rightarrow 불연속인 점, 뾰족한 점

0284 ㄱ. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = 0$ 이므로 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 연속이다.

$$f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h-0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = 1$$

이므로 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 미분가능하다.

ㄴ. $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = g(1) = 0$ 이므로 $g(x)$ 는 $x=1$ 에서 연속이다.

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{g(1+h)-g(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{|h|-0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{h}{h} = 1,$$

$$\lim_{h \rightarrow 0-} \frac{g(1+h)-g(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{|h|-0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{-h}{h} = -1$$

이므로 $g'(1)$ 의 값이 존재하지 않는다.

따라서 $g(x)$ 는 $x=1$ 에서 미분가능하지 않다.

ㄷ. $\lim_{x \rightarrow 1} k(x) = k(1) = 0$ 이므로 $k(x)$ 는 $x=1$ 에서 연속이다.

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{k(1+h) - k(1)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{|h^2 + 2h| - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{h^2 + 2h}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0+} (h + 2) = 2, \\ \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{k(1+h) - k(1)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{|h^2 + 2h| - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{-h^2 - 2h}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0-} (-h - 2) = -2\end{aligned}$$

이므로 $k'(1)$ 의 값이 존재하지 않는다.

따라서 $k(x)$ 는 $x=1$ 에서 미분가능하지 않다.

이상에서 $x=1$ 에서 연속이지만 미분가능하지 않은 함수는 ㄴ, ㄷ이다. [답] ⑤

0285 ①, ⑤ $x=a$ 에서 미분가능하지 않다.

②, ③ $x=a$ 에서 불연속이므로 미분가능하지 않다. [답] ④

참고 ① $x < a$ 일 때, 함수 $y=f(x)$ 의 그래프 위의 점에서의 접선의 기울기는 0

또는 음수이므로 $\lim_{h \rightarrow 0-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \leq 0$

$x > a$ 일 때, 직선 $y=f(x)$ 위의 임의의 점에서의 미분계수는 양수이므로

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} > 0$$

따라서 $f'(a)$ 의 값이 존재하지 않으므로 $f(x)$ 는 $x=a$ 에서 미분가능하지 않다.

0286 ① $\lim_{x \rightarrow 3+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3-} f(x)$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ 의 값이 존재한다.

② $x=0$ 에서의 접선의 기울기는 양수이므로 $f'(0) > 0$ 이다.

③ 함수 $f(x)$ 는 $x=3, x=4$ 에서 불연속이므로 불연속인 점은 2개이다.

④ 함수 $f(x)$ 는 $x=2, x=3, x=4$ 에서 미분가능하지 않으므로 미분가능하지 않은 점은 3개이다.

⑤ $f'(x)=0$ 인 점은 구간 $(0, 2)$ 에서 2개 존재하고, 구간 $(2, 3)$ 에서 1개 존재하므로 모두 3개이다. [답] ⑤

유형 09 구간에 따라 다르게 정의된 함수의 미분가능성 본책 53쪽

두 다항함수 $g(x), h(x)$ 에 대하여 함수 $f(x) = \begin{cases} g(x) & (x \geq a) \\ h(x) & (x < a) \end{cases}$ 가 $x=a$

에서 미분가능하면

⇒ ① 함수 $f(x)$ 가 $x=a$ 에서 연속이다. 즉

$$\lim_{x \rightarrow a-} h(x) = g(a)$$

② $x=a$ 에서 함수 $f(x)$ 의 미분계수가 존재한다. 즉

$$\lim_{x \rightarrow a+} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a-} \frac{h(x) - h(a)}{x - a}$$

0287 함수 $f(x)$ 가 $x=2$ 에서 미분가능하므로 $x=2$ 에서 연속이다.

즉 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$ 에서

$$2a + b = 4 \quad \dots\dots ⑦$$

또 $f'(2)$ 가 존재하므로

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{(2+h)^2 - 4}{h} = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{4h + h^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0+} (4 + h) = 4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0-} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{a(2+h) + b - (2a + b)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{ah}{h} = a\end{aligned}$$

에서 $a=4$

$a=4$ 를 ⑦에 대입하면 $b=-4$

$$\therefore a + b = 0$$

[답] 0

다른 풀이 $g(x) = x^2, h(x) = ax + b$ 라 하면

$$g'(x) = 2x, h'(x) = a$$

함수 $f(x)$ 가 $x=2$ 에서 연속이므로 $g(2) = h(2)$

$$\therefore 4 = 2a + b \quad \dots\dots ⑦$$

함수 $f(x)$ 가 $x=2$ 에서 미분가능하므로 $g'(2) = h'(2)$

$$\therefore 4 = a$$

$a=4$ 를 ⑦에 대입하면 $b=-4$

$$\therefore a + b = 0$$

두 다항함수 $g(x), h(x)$ 에 대하여

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & (x \geq a) \\ h(x) & (x < a) \end{cases}$$

가 $x=a$ 에서 미분가능하면

① 함수 $f(x)$ 는 $x=a$ 에서 연속 $\Rightarrow g(a) = h(a)$

② $x=a$ 에서 함수 $f(x)$ 의 미분계수가 존재 $\Rightarrow g'(a) = h'(a)$

0288 함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 미분가능하므로 $x=1$ 에서 연속이다.

즉 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$ 에서

$$\frac{1}{2} + 1 + b = -1 + a \quad \therefore a - b = \frac{5}{2} \quad \dots\dots ⑦ \quad \rightarrow ①$$

또 $f'(1)$ 이 존재하므로

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{(-x^2 + ax) - (-1 + a)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{-x^2 + ax + 1 - a}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{-(x-1)(x+1-a)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1+} (-x-1+a) \\ &= a - 2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{\left(\frac{1}{2}x^2 + x + b\right) - \left(\frac{1}{2} + 1 + b\right)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{\frac{1}{2}x^2 + x - \frac{3}{2}}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{\frac{1}{2}(x+3)(x-1)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{1}{2}(x+3) = 2\end{aligned}$$



에서 $a-2=2 \quad \therefore a=4$

$a=4$ 를 ㉠에 대입하면 $b=\frac{3}{2}$

$\therefore ab=6$

→ ②

→ ③

답 6

채점 기준

비율

① a, b 사이의 관계식을 구할 수 있다.

30 %

② a, b 의 값을 구할 수 있다.

50 %

③ ab 의 값을 구할 수 있다.

20 %

0289 $f'(-1)$ 이 존재하므로

$$\lim_{x \rightarrow -1+} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \lim_{x \rightarrow -1+} \frac{|x+1|(x+a) - 0}{x+1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1+} \frac{(x+1)(x+a)}{x+1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1+} (x+a) = -1+a$$

$$\lim_{x \rightarrow -1-} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \lim_{x \rightarrow -1-} \frac{|x+1|(x+a) - 0}{x+1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1-} \frac{-(x+1)(x+a)}{x+1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1-} \{-(x+a)\} = 1-a$$

에서 $-1+a=1-a \quad \therefore a=1$

따라서 $f'(-1) = -1+1=0$ 이므로

$$a+f'(-1)=1$$

답 ④

0290 함수 $f(x) = \begin{cases} x^2+ax+b & (1 \leq x < 2) \\ 0 & (0 \leq x < 1) \end{cases}$ 이 $x=1$ 에서 미분가능하므로 $x=1$ 에서 연속이다.

즉 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$ 에서

$$1+a+b=0 \quad \therefore a+b=-1$$

..... ㉠

또 $f'(1)$ 이 존재하므로

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{(1+h)^2 + a(1+h) + b - (1+a+b)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{h^2 + (a+2)h}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0+} (h+a+2) = a+2$$

$$\lim_{h \rightarrow 0-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{0-0}{h} = 0$$

에서 $a+2=0 \quad \therefore a=-2$

$a=-2$ 를 ㉠에 대입하면 $b=1$

$$\therefore a^2+b^2 = (-2)^2+1^2=5$$

답 5

유형 10 도함수의 정의를 이용하여 도함수 구하기

본책 53쪽

미분가능한 함수 $f(x)$ 에 대하여

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{h \rightarrow x} \frac{f(h) - f(x)}{h-x}$$

0291 $xf(x)=g(x)$ 라 하면 $y=g(x)$ 에서

$$y' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)f(x+h) - xf(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)\{f(x+h) - f(x)\} + (x+h)f(x) - xf(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)\{f(x+h) - f(x)\} + \boxed{hf(x)}}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} (x+h) \cdot \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + f(x)$$

$$= xf'(x) + \boxed{f(x)}$$

답 (㉠) $hf(x)$ (㉡) $f(x)$

$$0292 f'(x) = \lim_{t \rightarrow x} \frac{f(t) - f(x)}{t-x} = \lim_{t \rightarrow x} \frac{(t^n+t) - (x^n+x)}{t-x}$$

$$= \lim_{t \rightarrow x} \frac{(t^n - x^n) + (t-x)}{t-x}$$

$$= \lim_{t \rightarrow x} \frac{(\boxed{t-x})(t^{n-1} + xt^{n-2} + x^2t^{n-3} + \dots + x^{n-1} + 1)}{t-x}$$

$$= \lim_{t \rightarrow x} (t^{n-1} + xt^{n-2} + x^2t^{n-3} + \dots + x^{n-1} + 1)$$

$$= \boxed{nx^{n-1} + 1}$$

답 ①

유형 11 관계식이 주어질 때 도함수 구하기

본책 54쪽

(i) 주어진 식의 x, y 에 적당한 수를 대입하여 $f(0)$ 의 값을 구한다.

(ii) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = f'(0)$ 임을 이용하여 $f'(x)$ 를 구한다.

0293 $x=0, y=0$ 을 주어진 식에 대입하면

$$f(0) = f(0) + f(0) - 0 \quad \therefore f(0) = 0$$

$$\therefore f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x) + f(h) - 3xh - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - 3xh}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} - 3x$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} - 3x$$

$$= f'(0) - 3x = -3x - 2$$

답 ②

0294 $x=0, y=0$ 을 주어진 식에 대입하면

$$f(0) = f(0) + f(0) - 1 \quad \therefore f(0) = 1$$

→ ①

$$\therefore f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x) + f(h) + xh - 1 - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) + xh - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - 1}{h} + x$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} + x = f'(0) + x$$

→ ②

이때 $f'(0)$ 은 상수이므로 $f'(x)$ 는 일차함수이다.
따라서 $f(x)$ 는 이차함수이므로 $f(x)$ 의 차수는 2이다.

→ ③
답 2

채점 기준	비율
① $f(0)$ 의 값을 구할 수 있다.	30 %
② $f'(x)$ 를 구할 수 있다.	40 %
③ $f(x)$ 의 차수를 구할 수 있다.	30 %

0295 \neg . $x=0, y=0$ 을 주어진 식에 대입하면

$$f(0)=f(0)+f(0)+0 \quad \therefore f(0)=0$$

$y=-x$ 를 주어진 식에 대입하면

$$f(x-x)=f(x)+f(-x)-2x^2$$

$$\therefore f(x)+f(-x)=2x^2+f(0) \\ =2x^2$$

$$\begin{aligned} \therefore f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x)+f(h)+2xh-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)+2xh}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} + 2x \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} + 2x = f'(0) + 2x = 2x + 4 \end{aligned}$$

\therefore 함수 $f(x)$ 가 미분가능하므로 모든 실수 a 에서 연속이다.

$$\therefore f(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

이상에서 \neg, \cup, \cap 모두 옳다.

답 ⑤

유형 12 미분법의 공식

본책 54쪽

① $y=x^n$ (n 은 자연수) $\Rightarrow y'=nx^{n-1}$

② $y=c$ (c 는 상수) $\Rightarrow y'=0$

③ 두 함수 $f(x), g(x)$ 가 미분가능할 때

$$y=af(x) \pm bg(x) \quad (a, b \text{는 상수})$$

$$\Rightarrow y'=af'(x) \pm bg'(x) \quad (\text{복호동순})$$

0296 $f'(x)=10x^9+9x^8+8x^7+\cdots+2x+1$

$$\therefore f'(1)=10+9+8+\cdots+2+1=\frac{10 \cdot 11}{2}=55$$

답 ③

0297 $f'(x)=x^3-x^2+ax+2$

$$f'(2)=2a+6=4 \text{이므로} \quad a=-1$$

답 -1

0298 $f(1)=0$ 에서 $a+b+c=0$

..... ㉠

$$f'(x)=2ax+b \text{이므로}$$

$$f'(-1)=-7 \text{에서} \quad -2a+b=-7$$

..... ㉡

$$f'(2)=5 \text{에서} \quad 4a+b=5$$

..... ㉢

㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=2, b=-3, c=1$

$$\therefore abc=-6$$

답 ②

유형 13 곱의 미분법: $y=f(x)g(x)$ 꼴

본책 54쪽

세 함수 $f(x), g(x), h(x)$ 가 미분가능할 때

① $y=f(x)g(x)$

$$\Rightarrow y'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

② $y=f(x)g(x)h(x)$

$$\Rightarrow y'=f'(x)g(x)h(x)+f(x)g'(x)h(x)+f(x)g(x)h'(x)$$

0299 $f'(x)=(x^2+x+1)'(x^3+x^2+x+1)$
 $+ (x^2+x+1)(x^3+x^2+x+1)'$
 $= (2x+1)(x^3+x^2+x+1)$
 $+ (x^2+x+1)(3x^2+2x+1)$

$$\therefore f'(1)=3 \cdot 4 + 3 \cdot 6 = 30$$

답 30

0300 $f'(x)=(2x^2+1)'(3x-1)(-2x+a)$
 $+ (2x^2+1)(3x-1)'(-2x+a)$
 $+ (2x^2+1)(3x-1)(-2x+a)'$
 $= 4x(3x-1)(-2x+a)$
 $+ (2x^2+1) \cdot 3 \cdot (-2x+a)$
 $+ (2x^2+1)(3x-1) \cdot (-2)$

$$f'(1)=-46+17a=39 \text{이므로}$$

$$17a=85 \quad \therefore a=5$$

답 ④

0301 $g'(x)=(x^2+2x)'f(x)+(x^2+2x)f'(x)$
 $= (2x+2)f(x)+(x^2+2x)f'(x)$

$$\therefore g'(1)=4f(1)+3f'(1)$$

$$= 4 \cdot (-4) + 3 \cdot 3$$

$$= -7$$

답 -7

0302 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-3}{x-2} = 2$ 에서 $x \rightarrow 2$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한 값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉 } \lim_{x \rightarrow 2} \{f(x)-3\} = 0 \text{이므로} \quad f(2)=3$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-3}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = f'(2)=2$$

또 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x)-1}{x-2} = 4$ 에서 $x \rightarrow 2$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한 값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉 } \lim_{x \rightarrow 2} \{g(x)-1\} = 0 \text{이므로} \quad g(2)=1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x)-1}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x)-g(2)}{x-2} = g'(2)=4$$

$$h'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x) \text{이므로}$$

$$h'(2)=f'(2)g(2)+f(2)g'(2)$$

$$= 2 \cdot 1 + 3 \cdot 4 = 14$$

답 ②

유형 14 곱의 미분법: $y=\{f(x)\}^n$ 꼴

본책 55쪽

$$y=\{f(x)\}^n \quad (n \text{은 자연수}) \Rightarrow y'=n\{f(x)\}^{n-1}f'(x)$$



0303 $f'(x) = 5(x^2+1)^4(x^2+1)' = 10x(x^2+1)^4$
 $\therefore f'(1) = 10 \cdot 1 \cdot 2^4 = 160$ 답 ⑤

0304 $f(x) = (4x-3)^2(x^2+2)$ 라 하면
 $f'(x) = \{(4x-3)^2\}'(x^2+2) + (4x-3)^2(x^2+2)'$
 $= 8(4x-3)(x^2+2) + 2x(4x-3)^2$
 따라서 곡선 $y=f(x)$ 위의 $x=0$ 인 점에서의 접선의 기울기는
 $f'(0) = 8 \cdot (-3) \cdot 2 + 2 \cdot 0 \cdot (-3)^2 = -48$ 답 -48

0305 $f'(x) = 3(2x-a)^2(2x-a)' = 6(2x-a)^2$
 $f'(-1) = 6(-2-a)^2 = 24$ 이므로
 $a^2 + 4a = 0, \quad a(a+4) = 0$
 $\therefore a = -4$ ($\because a \neq 0$) → ①
 따라서 $f'(x) = 6(2x+4)^2$ 이므로
 $f'(1) = 6 \cdot 6^2 = 216$ → ②
 $\therefore a + f'(1) = 212$ → ③

답 212

채점 기준	비율
① a의 값을 구할 수 있다.	50 %
② f'(1)의 값을 구할 수 있다.	30 %
③ a+f'(1)의 값을 구할 수 있다.	20 %

유형 15 미분계수를 이용한 극한값의 계산 본책 55쪽

- (i) 미분계수의 정의를 이용하여 주어진 식을 $f'(a)$ 가 포함된 식으로 변형한다.
 (ii) 도함수 $f'(x)$ 를 구한다.
 (iii) $f'(a)$ 의 값을 구하여 (i)의 식에 대입한다.

0306 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3-h)}{h}$
 $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3) - \{f(3-h) - f(3)\}}{h}$
 $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3-h) - f(3)}{-h}$
 $= f'(3) + f'(3) = 2f'(3)$
 $f'(x) = 3x^2 + 2x - 5$ 이므로 $f'(3) = 28$
 따라서 구하는 값은 $2f'(3) = 2 \cdot 28 = 56$ 답 ⑤

0307 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\{f(x)\}^2 - \{f(2)\}^2}{x-2}$
 $= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\{f(x) - f(2)\} \{f(x) + f(2)\}}{x-2}$
 $= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} \cdot \{f(x) + f(2)\}$
 $= f'(2) \cdot 2f(2)$
 $f(x) = x^3 - 4x^2$ 에서 $f(2) = -8$
 또 $f'(x) = 3x^2 - 8x$ 이므로 $f'(2) = -4$
 따라서 구하는 값은
 $f'(2) \cdot 2f(2) = -4 \cdot 2 \cdot (-8) = 64$ 답 64

0308 $\frac{1}{n} = h$ 로 놓으면 $n \rightarrow \infty$ 일 때 $h \rightarrow 0$ 이므로

$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left\{ f\left(-1 + \frac{1}{n}\right) - f\left(-1 - \frac{1}{n}\right) \right\}$
 $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1+h) - f(-1-h)}{h}$
 $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1+h) - f(-1) - \{f(-1-h) - f(-1)\}}{h}$
 $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1-h) - f(-1)}{-h}$
 $= f'(-1) + f'(-1) = 2f'(-1)$
 $f'(x) = (x^2+3x)'(-x^2+x+2) + (x^2+3x)(-x^2+x+2)'$
 $= (2x+3)(-x^2+x+2) + (x^2+3x)(-2x+1)$
 이므로
 $f'(-1) = 1 \cdot 0 + (-2) \cdot 3 = -6$
 따라서 구하는 값은
 $2f'(-1) = 2 \cdot (-6) = -12$ 답 -12

유형 16 미분계수를 이용한 미정계수의 결정 본책 56쪽

다항함수 $f(x)$ 에 대하여 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - b}{x - a} = c$ (c 는 실수)이면
 $\Rightarrow f(a) = b, f'(a) = c$

0309 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 4$ 에서 $x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.
 즉 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$ 이므로 $f(1) = 0$
 $\therefore \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = f'(1) = 4$
 $f(x) = x^3 + ax + b$ 에서 $f'(x) = 3x^2 + a$
 $f(1) = 0$ 에서 $1 + a + b = 0$ ①
 $f'(1) = 4$ 에서 $3 + a = 4 \quad \therefore a = 1$
 $a = 1$ 을 ①에 대입하면 $b = -2$
 $\therefore ab = -2$ 답 ④

0310 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = f'(1) = 4$ → ①
 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-2-h) - f(-2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-2-h) - f(-2)}{-h} \cdot (-1)$
 $= -f'(-2) = -1$
 $\therefore f'(-2) = 1$ → ②
 이때 $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$ 이므로
 $f'(1) = 4$ 에서 $3 + 2a + b = 4 \quad \therefore 2a + b = 1$ ③
 $f'(-2) = 1$ 에서 $12 - 4a + b = 1 \quad \therefore 4a - b = 11$... ④
 ③, ④을 연립하여 풀면
 $a = 2, b = -3$ → ③
 따라서 $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 1$ 이므로
 $f(1) = 1$ → ④
답 1

채점 기준	비율
① $f'(1)=4$ 임을 알 수 있다.	20 %
② $f'(-2)=1$ 임을 알 수 있다.	30 %
③ a, b 의 값을 구할 수 있다.	30 %
④ $f(1)$ 의 값을 구할 수 있다.	20 %

0311 조건 (가)에서 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^3+bx^2+cx+d}{x^2+2x+3} = 3$ 이므로

$$a=0, b=3$$

또 조건 (나)에서 $x \rightarrow 2$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉 } \lim_{x \rightarrow 2} \{f(x)-22\} = 0 \text{이므로 } f(2)=22$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-22}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = f'(2)=16$$

$$\text{이때 } f(x)=3x^2+cx+d \text{이므로 } f'(x)=6x+c$$

$$f(2)=22 \text{에서 } 12+2c+d=22 \quad \therefore 2c+d=10 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$f'(2)=16 \text{에서 } 12+c=16 \quad \therefore c=4$$

$$c=4 \text{를 } \textcircled{1} \text{에 대입하면 } d=2$$

$$\therefore a+b+c+d=9$$

답 ③

유형 17 치환을 이용한 극한값의 계산

본책 56쪽

(i) 주어진 식의 일부를 $f(x)$ 라 한다.

(ii) 미분계수의 정의를 이용할 수 있도록 식을 변형한다.

0312 $f(x)=x^n-2x$ 라 하면 $f(1)=-1$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n-2x+1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = f'(1)$$

$$f'(x)=nx^{n-1}-2 \text{이므로 } f'(1)=n-2$$

$$\text{따라서 } n-2=15 \text{이므로 } n=17$$

답 ④

0313 $f(x)=x^{10}+3x$ 라 하면 $f(-1)=-2$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^{10}+3x+2}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} = f'(-1)$$

$$f'(x)=10x^9+3 \text{이므로 } f'(-1)=-7$$

답 -7

0314 $f(x)=x^{10}-x^9+x^8-x^7+x^6$ 이라 하면 $f(1)=1$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{10}-x^9+x^8-x^7+x^6-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = f'(1)$$

$$f'(x)=10x^9-9x^8+8x^7-7x^6+6x^5 \text{이므로}$$

$$f'(1)=10-9+8-7+6=8$$

답 8

0315 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^n-x^3-9x-27}{x-3} = a$ 에서 $x \rightarrow 3$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉 } \lim_{x \rightarrow 3} (x^n-x^3-9x-27)=0 \text{이므로}$$

$$3^n-3^3-9 \cdot 3-27=0, \quad 3^n=81 \quad \therefore n=4$$

$$f(x)=x^4-x^3-9x-27 \text{라 하면 } f(3)=27 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^4-x^3-9x-27}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)-f(3)}{x-3} = f'(3)$$

$$f'(x)=4x^3-3x^2-9 \text{이므로}$$

$$f'(3)=72 \quad \therefore a=72$$

$$\therefore n+a=76$$

답 ②

유형 18 접선의 기울기를 이용한 미정계수의 결정

본책 57쪽

함수 $y=f(x)$ 의 그래프 위의 점 (a, b) 에서의 접선의 기울기가 m 이면

$$\Rightarrow f(a)=b, f'(a)=m$$

0316 $f(1)=4$ 에서 $1+a+2=4 \quad \therefore a=1$

$$\text{따라서 } f(x)=x^2+x+2 \text{이므로 } f'(x)=2x+1$$

$$\text{이때 } f'(1)=m \text{이므로 } m=2 \cdot 1+1=3$$

$$\therefore a+m=4$$

답 ④

0317 $f(x)=ax^2+bx+10$ 이라 하면 곡선 $y=f(x)$ 가 점 $(2, 0)$ 을 지나므로

$$4a+2b+10=0 \quad \therefore 2a+b=-5 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$f'(x)=2ax+b$ 이고 점 $(2, 0)$ 에서의 접선의 기울기가 1이므로

$$f'(2)=1 \quad \therefore 4a+b=1 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{을 연립하여 풀면 } a=3, b=-11$$

$$\therefore a-b=14$$

답 14

0318 $f(x)=(x-k)^3$ 에서 $f'(x)=3(x-k)^2$

$y=f(x)g(x)$ 에서 $y'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$ 이고 $x=2$ 인 점에서의 접선의 기울기가 2이므로

$$f'(2)g(2)+f(2)g'(2)=2$$

$$3(2-k)^2 \cdot 1 + (2-k)^3 \cdot 1 = 2, \quad k^3-9k^2+24k-18=0$$

$$(k-3)(k^2-6k+6)=0 \quad \therefore k=3 \text{ 또는 } k=3 \pm \sqrt{3}$$

따라서 모든 실수 k 의 값의 곱은

$$3(3-\sqrt{3})(3+\sqrt{3})=18$$

답 18

0319 조건 (가)에서 $x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉 } \lim_{x \rightarrow 1} f(x)=0 \text{이므로 } f(1)=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = f'(1)=3 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$f(x)=-x^3+ax^2+bx+c \text{에서 } f'(x)=-3x^2+2ax+b$$

$$f(1)=0 \text{에서 } -1+a+b+c=0$$

$$\therefore a+b+c=1 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$$f'(1)=3 \text{에서 } -3+2a+b=3$$

$$\therefore 2a+b=6 \quad \cdots \cdots \textcircled{4}$$



또 조건 ㉔에서 $f'(x)$ 는 $x=3$ 에서 최댓값을 가지므로

$$f'(x) = -3\left(x - \frac{a}{3}\right)^2 + \frac{a^2}{3} + b \text{에서}$$

$$\frac{a}{3} = 3 \quad \therefore a = 9 \quad \dots\dots \textcircled{㉔}$$

㉑, ㉒, ㉔을 연립하여 풀면 $a=9, b=-12, c=4 \quad \dots\dots \textcircled{3}$

따라서 $f(x) = -x^3 + 9x^2 - 12x + 4$ 이므로

$$f(3) = -27 + 81 - 36 + 4 = 22 \quad \dots\dots \textcircled{4}$$

답 22

채점 기준	비율
① $f(1)=0$ 임을 알 수 있다.	20%
② $f'(1)=3$ 임을 알 수 있다.	20%
③ a, b, c 의 값을 구할 수 있다.	40%
④ $f(3)$ 의 값을 구할 수 있다.	20%

유형 19 미분의 항등식의 활용

본책 57쪽

주어진 조건을 이용하여 $f(x), f'(x)$ 를 구하여 주어진 항등식에 대입한 후 항등식의 성질을 이용한다.

$$\textcircled{1} ax^2 + bx + c = 0 \text{이 } x \text{에 대한 항등식} \iff a=0, b=0, c=0$$

$$\textcircled{2} ax^2 + bx + c = d'x^2 + b'x + c' \text{이 } x \text{에 대한 항등식}$$

$$\iff a=d', b=b', c=c'$$

0320 $f(x)$ 가 이차함수이므로 $f(x) = ax^2 + bx + c$ (a, b, c 는 상수, $a \neq 0$)라 하면

$$f'(x) = 2ax + b$$

$f(x)$ 와 $f'(x)$ 를 주어진 등식에 대입하면

$$(x+1)(2ax+b) - 2(ax^2+bx+c) + 2 = 0$$

$$\therefore (2a-b)x + (b-2c+2) = 0$$

위의 등식이 모든 실수 x 에 대하여 성립하므로

$$2a-b=0, b-2c+2=0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또 $f(0)=3$ 이므로 $c=3$

$c=3$ 을 ㉑에 대입하여 풀면 $a=2, b=4$

따라서 $f'(x) = 4x + 4$ 이므로 $f'(1) = 8$ 답 ④

0321 $f(x) = 2x^2 + 3xf'(1)$ 에서 $f'(1)$ 은 상수이므로 $f'(1) = a$ (a 는 상수)라 하면

$$f(x) = 2x^2 + 3ax$$

$$\therefore f'(x) = 4x + 3a$$

$f'(1) = 4 + 3a$ 이므로 $f(x)$ 와 $f'(1)$ 을 주어진 식에 대입하면

$$2x^2 + 3ax = 2x^2 + 3x(4 + 3a)$$

위의 등식이 모든 실수 x 에 대하여 성립하므로

$$3a = 3(4 + 3a), \quad a = 4 + 3a$$

$$2a = -4 \quad \therefore a = -2$$

따라서 $f'(x) = 4x - 6$ 이므로 $f'(2) = 2$ 답 ④

다른 풀이 $f(x) = 2x^2 + 3xf'(1)$ 에서 $f'(x) = 4x + 3f'(1)$

$x=1$ 을 위의 식의 양변에 대입하면 $f'(1) = 4 + 3f'(1)$

$$2f'(1) = -4 \quad \therefore f'(1) = -2$$

따라서 $f'(x) = 4x - 6$ 이므로 $f'(2) = 2$

0322 $f(x)$ 가 이차함수이므로 $f(x) = ax^2 + bx + c$ (a, b, c 는 상수, $a \neq 0$)라 하면

$$f'(x) = 2ax + b$$

$$f(f'(x)) = a(2ax+b)^2 + b(2ax+b) + c$$

$$= 4a^3x^2 + 4a^2bx + ab^2 + 2abx + b^2 + c$$

$$= 4a^3x^2 + (4a^2b + 2ab)x + ab^2 + b^2 + c$$

$$f'(f(x)) = 2a(ax^2+bx+c) + b$$

$$= 2a^2x^2 + 2abx + 2ac + b$$

이때 $f(f'(x)) = f'(f(x))$, 즉 $f(f'(x)) - f'(f(x)) = 0$ 이므로

$$(4a^3 - 2a^2)x^2 + 4a^2bx + ab^2 + b^2 - 2ac - b + c = 0$$

위의 등식이 모든 실수 x 에 대하여 성립하므로

$$4a^3 - 2a^2 = 0, 4a^2b = 0, ab^2 + b^2 - 2ac - b + c = 0$$

$$\therefore a = \frac{1}{2}, b = 0 \quad (\because a \neq 0)$$

이때 $f(2) = 4a + 2b + c = 2 + c = 3$ 이므로 $c = 1$

따라서 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 1$ 이므로

$$f(4) = \frac{1}{2} \cdot 4^2 + 1 = 9 \quad \text{답 9}$$

0323 (1) $f(x)$ 가 상수함수이면 $f'(x) = 0$ 이므로 주어진 등식에서 좌변은 0이고 우변은 이차식이 되어 모순이다.

$f(x)$ 를 n (n 은 자연수)차 함수라 하면 $f'(x)$ 는 $(n-1)$ 차 함수이다.

이때 주어진 등식에서 $n=1$ 이면 좌변은 상수이고 우변은 이차식이 되어 모순이다.

$$\therefore n \geq 2$$

따라서 좌변의 차수는 $(n-1) + (n-1)$, 우변의 차수는 n 이므로

$$2n-2 = n \quad \therefore n = 2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

(2) $f(x) = ax^2 + bx + c$ (a, b, c 는 정수, $a \neq 0$)라 하면

$$f'(x) = 2ax + b$$

$$f'(x)\{f'(x)+2\} = 8f(x) + 12x^2 + 11 \text{에서}$$

$$(2ax+b)(2ax+b+2) = 8(ax^2+bx+c) + 12x^2 + 11$$

$$\therefore 4a^2x^2 + 4(ab+a)x + b^2 + 2b$$

$$= 4(2a+3)x^2 + 8bx + 8c + 11$$

위의 등식이 모든 실수 x 에 대하여 성립하므로

$$4a^2 = 4(2a+3), 4(ab+a) = 8b, b^2 + 2b = 8c + 11$$

$$4a^2 = 4(2a+3) \text{에서} \quad a^2 - 2a - 3 = 0$$

$$(a+1)(a-3) = 0 \quad \therefore a = -1 \text{ 또는 } a = 3$$

(i) $a = -1$ 일 때, $4(ab+a) = 8b$ 에서

$$4(-b-1) = 8b \quad \therefore b = -\frac{1}{3}$$

이것은 b 가 정수라는 조건에 모순이다.

(ii) $a = 3$ 일 때, $4(ab+a) = 8b$ 에서

$$4(3b+3) = 8b \quad \therefore b = -3$$

$b = -3$ 을 $b^2 + 2b = 8c + 11$ 에 대입하면

$$3 = 8c + 11 \quad \therefore c = -1$$

(i), (ii)에서 $a = 3, b = -3, c = -1$

$$\therefore f(x) = 3x^2 - 3x - 1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

답 (1) 2 (2) $f(x) = 3x^2 - 3x - 1$

채점 기준	비율
① $f(x)$ 의 차수를 구할 수 있다.	30 %
② $f(x)$ 를 구할 수 있다.	70 %

유형 20 다항식의 나눗셈에서 미분법의 활용
; 나누어떨어지는 경우

본책 58쪽

다항식 $f(x)$ 가 $(x-a)^2$ 으로 나누어떨어질 조건
 $\Rightarrow f(a)=0, f'(a)=0$

0324 $f(x)=x^3-3x+k$ 라 하면 $f(x)$ 가 $(x-a)^2$ 으로 나누어떨어지므로 $f(a)=0, f'(a)=0$

$$f(a)=0 \text{에서 } a^3-3a+k=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$f'(x)=3x^2-3 \text{이므로 } f'(a)=0 \text{에서}$$

$$3a^2-3=0, \quad a^2=1$$

$$\therefore a=1 (\because a>0)$$

$$a=1 \text{을 } \textcircled{1} \text{에 대입하면 } 1-3+k=0 \quad \therefore k=2$$

$$\therefore a+k=3 \quad \text{답 } \textcircled{1}$$

참고 다항식 $f(x)$ 를 $(x-a)^2$ 으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 라 하면 $f(x)$ 가 $(x-a)^2$ 으로 나누어떨어지므로

$$f(x)=(x-a)^2Q(x) \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

위의 식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x)=2(x-a)Q(x)+(x-a)^2Q'(x) \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에서 } f(a)=0, f'(a)=0$$

0325 $f(x)=x^{10}+2ax+3b$ 라 하면 $f(x)$ 가 $(x-1)^2$ 으로 나누어떨어지므로 $f(1)=0, f'(1)=0$

$$f(1)=0 \text{에서 } 1+2a+3b=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$f'(x)=10x^9+2a \text{이므로 } f'(1)=0 \text{에서}$$

$$10+2a=0 \quad \therefore a=-5 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$a=-5 \text{를 } \textcircled{1} \text{에 대입하면 } b=3 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$$\therefore a+b=-2 \quad \cdots \cdots \textcircled{4}$$

답 -2

채점 기준	비율
① $f(1)=0, f'(1)=0$ 임을 알 수 있다.	30 %
② a 의 값을 구할 수 있다.	30 %
③ b 의 값을 구할 수 있다.	30 %
④ $a+b$ 의 값을 구할 수 있다.	10 %

유형 21 다항식의 나눗셈에서 미분법의 활용
; 나누어떨어지지 않는 경우

본책 58쪽

(i) 다항식 $f(x)$ 를 다항식 $g(x)$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)$ 라 한다. $\Rightarrow f(x)=g(x)Q(x)+R(x)$

(ii) (i)의 식의 양변을 x 에 대하여 미분한다.

$$\Rightarrow f'(x)=g'(x)Q(x)+g(x)Q'(x)+R'(x)$$

0326 다항식 $x^{20}+1$ 을 $(x-1)^2$ 으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)=ax+b$ (a, b 는 상수)라 하면

$$x^{20}+1=(x-1)^2Q(x)+ax+b \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$x=1$ 을 $\textcircled{1}$ 의 양변에 대입하면

$$2=a+b \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$20x^{19}=2(x-1)Q(x)+(x-1)^2Q'(x)+a$$

$x=1$ 을 위의 식의 양변에 대입하면 $a=20$

$a=20$ 을 $\textcircled{2}$ 에 대입하면 $b=-18$

따라서 $R(x)=20x-18$ 이므로

$$R(2)=22 \quad \text{답 } 22$$

0327 다항식 x^4+ax^2+b 를 $(x+1)^2$ 으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 라 하면

$$x^4+ax^2+b=(x+1)^2Q(x)+2x+3 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$x=-1$ 을 $\textcircled{1}$ 의 양변에 대입하면

$$1+a+b=1 \quad \therefore a+b=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$4x^3+2ax=2(x+1)Q(x)+(x+1)^2Q'(x)+2$$

$x=-1$ 을 위의 식의 양변에 대입하면

$$-4-2a=2 \quad \therefore a=-3$$

$a=-3$ 을 $\textcircled{2}$ 에 대입하면 $b=3$

$$\therefore ab=-9 \quad \text{답 } \textcircled{2}$$

0328 $f(x)$ 를 $(x-2)^2$ 으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)=ax+b$ (a, b 는 상수)라 하면

$$f(x)=(x-2)^2Q(x)+ax+b \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

점 (2, 4)가 함수 $y=f(x)$ 의 그래프 위의 점이므로

$$f(2)=4 \quad \therefore 2a+b=4 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x)=2(x-2)Q(x)+(x-2)^2Q'(x)+a$$

점 (2, 4)에서의 접선의 기울기가 3이므로 $f'(2)=3$

$$\therefore a=3$$

$a=3$ 을 $\textcircled{2}$ 에 대입하면 $b=-2$

따라서 $R(x)=3x-2$ 이므로

$$R(3)=7 \quad \text{답 } 7$$

0329 **전략** 함수 $f(x)$ 에 대하여 x 의 값이 a 에서 b 까지 변할 때의 평균변화율은 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ 임을 이용한다.

$$\begin{aligned} \text{풀이} \cdot m &= \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{(b^2-2b+1)-(a^2-2a+1)}{b-a} \\ &= \frac{b^2-a^2-2b+2a}{b-a} = \frac{(b-a)(b+a-2)}{b-a} \\ &= a+b-2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x^2-2x+1)-(a^2-2a+1)}{x-a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2-a^2-2x+2a}{x-a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-a)(x+a-2)}{x-a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} (x+a-2) = 2a-2 \end{aligned}$$



같은 방법으로 하면

$$f'(b) = 2b - 2$$

ㄱ. $a = -2, b = 4$ 이면

$$m = -2 + 4 - 2 = 0$$

ㄴ. $a + b > 2$ 이면

$$m = a + b - 2 > 0$$

ㄷ. $f'(a) = 2a - 2, f'(b) = 2b - 2$ 이므로 $a + b = 2$ 이면

$$\begin{aligned} f'(a) + f'(b) &= 2(a+b) - 4 \\ &= 2 \cdot 2 - 4 = 0 \end{aligned}$$

ㄹ. $f'(c) = 2c - 2$ 이므로 $a + b = 2c$ 이면

$$f'(c) = 2c - 2 = a + b - 2 = m$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다.

답 ㄱ, ㄷ, ㄹ

참고 ㄹ. 이차함수 $f(x)$ 에 대하여 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'\left(\frac{a+b}{2}\right)$ 가 항상 성립한다.

0330 전략 $\frac{1}{n} = h$ 로 놓고 미분계수의 정의를 이용한다.

풀이 조건 ㉠에서

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(0) - f(x)}{x(x+2)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} \cdot \left(-\frac{1}{x+2}\right) \\ &= -\frac{1}{2} f'(0) = -3 \end{aligned}$$

$$\therefore f'(0) = 6$$

또 조건 ㉡의 식에 x 대신 $1+x$ 를 대입하면

$$f(1 + (1+x)) = f(1 - (1+x))$$

$$\therefore f(2+x) = f(-x) \quad \dots\dots ㉢$$

따라서 $\frac{1}{n} = h$ 로 놓으면 $n \rightarrow \infty$ 일 때 $h \rightarrow 0$ 이므로

$$\begin{aligned} &\lim_{n \rightarrow \infty} n \left\{ f\left(\frac{2}{n}\right) - f\left(\frac{2n+1}{n}\right) \right\} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2h) - f(2+h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+2h) - f(0) - \{f(0-h) - f(0)\}}{h} \quad (\because ㉢) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+2h) - f(0)}{2h} \cdot 2 + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0-h) - f(0)}{-h} \\ &= 2f'(0) + f'(0) \\ &= 3f'(0) \\ &= 3 \cdot 6 = 18 \end{aligned}$$

답 18

0331 전략 $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ 임을 이용한다.

풀이 $\overline{AH} = f(a) - f(1), \overline{BH} = a - 1$ 이므로 $\triangle ABH$ 의 넓이에서

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \{f(a) - f(1)\} (a-1) &= a^3 - a^2 - a + 1 \\ &= a^2(a-1) - (a-1) \\ &= (a^2-1)(a-1) \\ &= (a+1)(a-1)^2 \end{aligned}$$

이때 $a > 1$ 이므로

$$f(a) - f(1) = 2(a+1)(a-1)$$

$$\begin{aligned} \therefore f'(1) &= \lim_{a \rightarrow 1} \frac{f(a) - f(1)}{a-1} \\ &= \lim_{a \rightarrow 1} \frac{2(a+1)(a-1)}{a-1} \\ &= \lim_{a \rightarrow 1} 2(a+1) = 4 \end{aligned}$$

답 4

0332 전략 $x=0$ 에서의 미분계수가 존재하는지 확인한다.

풀이 ㄱ. $g(x) = xf(x)$ 라 하면

$$\begin{aligned} g'(0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(0+h) - g(0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{hf(h) - 0}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} f(h) = f(0) \quad (\because f(x) \text{는 } x=0 \text{에서 연속}) \end{aligned}$$

따라서 $y = xf(x)$ 는 $x=0$ 에서의 미분계수가 존재하므로 $x=0$ 에서 미분가능하다.

ㄴ. [반례] $f(x) = \begin{cases} x & (x \geq 0) \\ -x & (x < 0) \end{cases}$ 이면 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 연속

이지만 미분가능하지 않다.

$$\begin{aligned} &\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{(h^2+1)f(h) - (0+1)f(0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{(h^2+1)h}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0+} (h^2+1) \\ &= 1 \\ &\lim_{h \rightarrow 0-} \frac{(h^2+1)f(h) - (0+1)f(0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{(h^2+1)(-h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0-} (-h^2-1) \\ &= -1 \end{aligned}$$

따라서 $y = (x^2+1)f(x)$ 는 $x=0$ 에서의 미분계수가 존재하지 않으므로 $x=0$ 에서 미분가능하지 않다.

ㄷ. $g(x) = \frac{1}{1-x^3f(x)}$ 이라 하면

$$\begin{aligned} g'(0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(0+h) - g(0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1-h^3f(h)} - 1}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^3f(h)}{h\{1-h^3f(h)\}} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2f(h)}{1-h^3f(h)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

따라서 $y = \frac{1}{1-x^3f(x)}$ 은 $x=0$ 에서의 미분계수가 존재하므로 $x=0$ 에서 미분가능하다.

이상에서 $x=0$ 에서 미분가능한 함수는 ㄱ, ㄷ이다.

답 ㉠ ㉣

0333 전략 함수 $f(x)$ 의 $x=a$ 에서의 미분계수는

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} \text{ 임을 이용한다.}$$

풀이 $g(x) = \begin{cases} x-2 & (x \geq 2) \\ -(x-2) & (x < 2) \end{cases}$

$\therefore f(x) + g(x) = \begin{cases} 2x-6 & (x \geq 2) \\ 2 & (x < 2) \end{cases}$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 2+} \{f(x) + g(x)\} = \lim_{x \rightarrow 2+} (2x-6) = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2-} \{f(x) + g(x)\} = \lim_{x \rightarrow 2-} 2 = 2$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 2} \{f(x) + g(x)\}$ 의 값이 존재하지 않으므로

$f(x) + g(x)$ 는 $x=2$ 에서 불연속이다.

$\therefore f(x)g(x) = \begin{cases} (x-2)(x-4) & (x \geq 2) \\ -x(x-2) & (x < 2) \end{cases}$

$\lim_{x \rightarrow 2} f(x)g(x) = f(2)g(2) = 0$ 이므로 $f(x)g(x)$ 는 $x=2$ 에서 연속이다. 이때

$$\lim_{x \rightarrow 2+} \frac{f(x)g(x) - f(2)g(2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{(x-2)(x-4)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2+} (x-4) = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2-} \frac{f(x)g(x) - f(2)g(2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2-} \frac{-x(x-2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2-} (-x) = -2$$

따라서 $f(x)g(x)$ 는 $x=2$ 에서의 미분계수가 존재하므로 $x=2$ 에서 미분가능하다.

\therefore \therefore 에서 $f(x)g(x) = \begin{cases} (x-2)(x-4) & (x \geq 2) \\ -x(x-2) & (x < 2) \end{cases}$ 이므로

$$|f(x)g(x)| = \begin{cases} (x-2)(x-4) & (x \geq 4) \\ -(x-2)(x-4) & (2 \leq x < 4) \\ -x(x-2) & (0 \leq x < 2) \\ x(x-2) & (x < 0) \end{cases}$$

$\lim_{x \rightarrow 4} |f(x)g(x)| = |f(4)g(4)| = 0$ 이므로 $|f(x)g(x)|$ 는 $x=4$ 에서 연속이다. 이때

$$\lim_{x \rightarrow 4+} \frac{|f(x)g(x)| - |f(4)g(4)|}{x-4}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4+} \frac{(x-2)(x-4)}{x-4}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4+} (x-2) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 4-} \frac{|f(x)g(x)| - |f(4)g(4)|}{x-4}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4-} \frac{-(x-2)(x-4)}{x-4}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4-} (-x+2) = -2$$

따라서 $|f(x)g(x)|$ 는 $x=4$ 에서의 미분계수가 존재하지 않으므로 $x=4$ 에서 미분가능하지 않다.

이상에서 옳은 것은 \therefore , \therefore 이다.

답 ③

0334 전략 함수 $g(t)$ 를 구한 후 $g(t)$ 가 $x=t$ ($t \neq 1, t \neq 3$)에서 연속임을 이용한다.

풀이 $g(t) = f'(t) = \begin{cases} 3t^2+2t-4 & (t < 1) \\ -2t+a & (1 < t < 3) \\ b & (t > 3) \end{cases}$ 이고 $g(t)$ 는 $t \neq 1, t \neq 3$ 인 t 에서 연속이므로 1, 3이 아닌 실수 c 에 대하여

$$\lim_{t \rightarrow c+} g(t) = \lim_{t \rightarrow c-} g(t)$$

즉 $1 + \lim_{t \rightarrow c-} g(t) = \lim_{t \rightarrow c+} g(t)$ 를 만족시키는 실수 c 의 값은 1 또는 3이어야 한다.

(i) $c=1$ 일 때,

$$\lim_{t \rightarrow 1+} g(t) = \lim_{t \rightarrow 1+} (-2t+a) = -2+a,$$

$$\lim_{t \rightarrow 1-} g(t) = \lim_{t \rightarrow 1-} (3t^2+2t-4) = 1 \text{ 이므로}$$

$$1+1 = -2+a \quad \therefore a=4$$

이때 $-1 \leq b \leq 3$ 에서

$$-4 \leq ab \leq 12$$

따라서 ab 의 최댓값은 12, 최솟값은 -4이다.

(ii) $c=3$ 일 때,

$$\lim_{t \rightarrow 3+} g(t) = \lim_{t \rightarrow 3+} b = b, \quad \lim_{t \rightarrow 3-} g(t) = \lim_{t \rightarrow 3-} (-2t+a) = -6+a$$

이므로

$$1 + (-6+a) = b \quad \therefore a = b+5$$

$$\therefore ab = (b+5)b = b^2+5b$$

이때 $-1 \leq b \leq 3$ 이므로 ab 는 $b=-1$ 일 때 최솟값 -4, $b=3$ 일 때 최댓값 24를 갖는다.

(i), (ii)에서 ab 의 최솟값은 -4이고, 최댓값은 24이므로 구하는 합은 $24 + (-4) = 20$

답 20

0335 전략 점 Q가 $\square ABCD$ 의 네 변 AB, BC, CD, DA 위에 있을 때, 함수 $f(x)$ 를 각각 구하여 $y=f'(x)$ 의 그래프의 개형을 찾는다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 점 P에서 두 변 AB, BC까지의 거리를 각각 a, b 라 하면 점 P에서 두 변 CD, DA까지의 거리는 각각

$1-a, 1-b$ 이므로

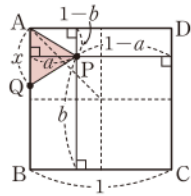
$$a < 1-a, 1-b < b, 1-a < b, 1-b < a$$

$$\therefore 1-b < a < 1-a < b \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

한편 함수 $f(x)$ 를 구하면

$$f(x) = \begin{cases} \frac{a}{2}x & (0 \leq x < 1) \\ \frac{a}{2} + \frac{b}{2}(x-1) & (1 \leq x < 2) \\ \frac{a}{2} + \frac{b}{2} + \frac{1-a}{2}(x-2) & (2 \leq x < 3) \\ \frac{a}{2} + \frac{b}{2} + \frac{1-a}{2} + \frac{1-b}{2}(x-3) & (3 \leq x \leq 4) \end{cases}$$

$$\therefore f'(x) = \begin{cases} \frac{a}{2} & (0 < x < 1) \\ \frac{b}{2} & (1 < x < 2) \\ \frac{1-a}{2} & (2 < x < 3) \\ \frac{1-b}{2} & (3 < x < 4) \end{cases}$$





이때 ㉠에서 $\frac{1-b}{2} < \frac{a}{2} < \frac{1-a}{2} < \frac{b}{2}$ 이므로 도함수 $y=f'(x)$ 의 그래프의 개형이 될 수 있는 것은 ㉡이다. 답 ②

0336 전략 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = a$ (a 는 실수)일 때, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ 이면 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ 임을 이용한다.

풀이 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{(x-2)\{f'(x)\}^2} = \frac{1}{4}$ ㉠

에서 $x \rightarrow 2$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0$ 이므로 $f(2) = 0$

이때 삼차함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 1이고 $f(1) = 0$, $f(2) = 0$ 이므로

$f(x) = (x-1)(x-2)(x-a)$ (a 는 상수) ㉡

라 하면

$f'(x) = (x-2)(x-a) + (x-1)(x-a) + (x-1)(x-2)$
 $= 3x^2 - (2a+6)x + 3a+2$ ㉢

㉡, ㉢을 ㉠에 대입하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-1)(x-2)(x-a)}{(x-2)\{3x^2 - (2a+6)x + 3a+2\}^2} \\ = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-1)(x-a)}{\{3x^2 - (2a+6)x + 3a+2\}^2} \\ = \frac{2-a}{(2-a)^2} \\ = \frac{1}{2-a} \end{aligned}$$

즉 $\frac{1}{2-a} = \frac{1}{4}$ 이므로

$2-a=4 \quad \therefore a=-2$

따라서 $f(x) = (x-1)(x-2)(x+2)$ 이므로

$f(3) = 2 \cdot 1 \cdot 5 = 10$ 답 ④

0337 전략 $f(x)$ 의 차수를 먼저 구한다.

풀이 $(x^2-1)f'(x) = 2xf(x) + kx^2 + 5$ ㉠

(i) $f(x)$ 가 상수함수일 때,

㉠에서 좌변은 0, 우변은 이차식이 되어 모순이다.

(ii) $f(x)$ 가 일차함수일 때,

조건 ㉡에서 $f(0) = -3$ 이므로 $f(x) = ax - 3$ (a 는 상수, $a \neq 0$)이라 하면

$f'(x) = a$

조건 ㉢에서 $f'(1) + f'(-1) = -10$ 이므로

$a+a=-10 \quad \therefore a=-5$

따라서 $f(x) = -5x - 3$, $f'(x) = -5$ 이므로 ㉠에 대입하면

(좌변) $= -5x^2 + 5$

(우변) $= 2x(-5x-3) + kx^2 + 5 = (k-10)x^2 - 6x + 5$

이므로 모순이다.

(iii) $f(x)$ 가 n ($n \geq 2$)차 함수일 때,

$f(x)$ 의 최고차항을 ax^n (a 는 상수, $a \neq 0$)이라 하자.

$f'(x)$ 는 최고차항이 anx^{n-1} 인 $(n-1)$ 차 함수이므로 ㉠의 양변의 최고차항의 계수를 비교하면

$an=2a \quad \therefore n=2 \quad (\because a \neq 0)$

조건 ㉡에서 $f(0) = -3$ 이므로 $f(x) = ax^2 + bx - 3$ (a, b 는 상수, $a \neq 0$)이라 하면

$f'(x) = 2ax + b$

조건 ㉢에서 $f'(1) + f'(-1) = -10$ 이므로

$(2a+b) + (-2a+b) = -10$

$2b = -10 \quad \therefore b = -5$

$f(x) = ax^2 - 5x - 3$, $f'(x) = 2ax - 5$ 를 ㉠에 대입하면

$(x^2-1)(2ax-5) = 2x(ax^2-5x-3) + kx^2 + 5$

$\therefore 2ax^3 - 5x^2 - 2ax + 5 = 2ax^3 + (k-10)x^2 - 6x + 5$

즉 $-5 = k-10$, $-2a = -6$ 이므로 $a=3, k=5$

따라서 $f(x) = 3x^2 - 5x - 3$ 이므로

$f(k) = f(5) = 75 - 25 - 3 = 47$ 답 ④

0338 전략 $f(x) = (x-3)(x-4)Q(x)$ 임을 이용한다.

풀이 $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - f(4)}{\sqrt{x} - 2} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - f(4)}{\sqrt{x} - 2} \cdot \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} + 2}$
 $= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4} \cdot (\sqrt{x} + 2)$
 $= 4f'(4)$

즉 $4f'(4) = 12$ 이므로 $f'(4) = 3$

$f(x) = (x-3)(x-4)Q(x)$ 이므로 양변을 x 에 대하여 미분하면

$f'(x) = (x-4)Q(x) + (x-3)Q'(x) + (x-3)(x-4)Q''(x)$

위의 식의 양변에 $x=4$ 를 대입하면 $f'(4) = Q(4)$ 이므로

$Q(4) = 3$ 답 ③

다른 풀이 $f(x) = (x-3)(x-4)Q(x)$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - f(4)}{\sqrt{x} - 2} &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-3)(x-4)Q(x)}{\sqrt{x} - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-3)(x-4)Q(x)}{x-4} \cdot (\sqrt{x} + 2) \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} (x-3)Q(x) \cdot (\sqrt{x} + 2) \\ &= 4Q(4) \end{aligned}$$

즉 $4Q(4) = 12$ 이므로 $Q(4) = 3$

0339 전략 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = a$ (a 는 실수)일 때, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ 이면 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ 임을 이용한다.

풀이 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) + 4}{x - 1} = a$ 에서 $x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉 $\lim_{x \rightarrow 1} \{f(x) + 4\} = 0$ 에서

$f(1) + 4 = 0 \quad \therefore f(1) = -4$ → ①

따라서 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) + 4}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1)$ 이므로

$f'(1) = a$ → ②

$$\begin{aligned}
 \therefore \lim_{h \rightarrow 0} \frac{40 + \sum_{k=1}^{10} f(1+kh)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sum_{k=1}^{10} \{f(1+kh) + 4\}}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \sum_{k=1}^{10} \frac{f(1+kh) - f(1)}{kh} \cdot k \\
 &= \sum_{k=1}^{10} \left\{ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+kh) - f(1)}{kh} \right\} \cdot k \\
 &= \sum_{k=1}^{10} f'(1) \cdot k \\
 &= f'(1) \sum_{k=1}^{10} k \\
 &= a \cdot \frac{10 \cdot 11}{2} = 55a \quad \cdots ③
 \end{aligned}$$

따라서 $55a = 110$ 이므로 $a = 2$ $\cdots ④$

답 2

채점 기준	비율
① $f(1) = -4$ 임을 알 수 있다.	30 %
② $f'(1) = a$ 임을 알 수 있다.	20 %
③ $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{40 + \sum_{k=1}^{10} f(1+kh)}{h}$ 를 a 에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40 %
④ a 의 값을 구할 수 있다.	10 %

0340 전라 함수 $g(x)$ 는 $x=2$ 에서 미분가능하므로 $x=2$ 에서 연속이어야 함을 이용한다.

풀이 함수 $g(x)$ 가 $x=2$ 에서 미분가능하므로 $x=2$ 에서 연속이다. 즉 $\lim_{x \rightarrow 2+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2-} g(x) = g(2)$ 이므로

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 2+} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{(x^2 - 2x)(6 - 2x)}{x - 2} = 0 \\
 \lim_{x \rightarrow 2-} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 2-} (ax + b)(x + a) = (2a + b)(2 + a)
 \end{aligned}$$

에서 $(2a + b)(2 + a) = 0$

$$\therefore b = -2a \text{ 또는 } a = -2 \quad \cdots ①$$

(i) $b = -2a$ 일 때,

함수 $g(x)$ 가 $x=2$ 에서 미분가능하므로

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{g(x) - g(2)}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{(x^2 - 2x)(6 - 2x)}{x - 2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2+} x(6 - 2x) = 4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 2-} \frac{g(x) - g(2)}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2-} \frac{(ax - 2a)(x + a)}{x - 2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2-} a(x + a) \\
 &= a(2 + a)
 \end{aligned}$$

에서 $a(2 + a) = 4, \quad a^2 + 2a - 4 = 0$

$$\therefore a = -1 \pm \sqrt{5}$$

그런데 a 는 정수이므로 모순이다.

(ii) $a = -2$ 일 때,

함수 $g(x)$ 가 $x=2$ 에서 미분가능하므로

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{g(x) - g(2)}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{(x^2 - 2x)(6 - 2x)}{x - 2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2+} x(6 - 2x) = 4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 2-} \frac{g(x) - g(2)}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2-} \frac{(-2x + b)(x - 2)}{x - 2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2-} (-2x + b) = -4 + b
 \end{aligned}$$

에서 $-4 + b = 4 \quad \therefore b = 8 \quad \cdots ②$

(i), (ii)에서 $a = -2, b = 8$ 이므로

$$a + b = 6 \quad \cdots ③$$

답 6

채점 기준	비율
① $g(x)$ 가 연속이기 위한 조건을 이용할 수 있다.	30 %
② $g(x)$ 가 미분가능하기 위한 조건을 이용할 수 있다.	50 %
③ $a + b$ 의 값을 구할 수 있다.	20 %

0341 전라 구간에 따라 다르게 정의된 함수가 모든 실수 x 에서 미분가능하려면 각 구간의 경계점에서 연속이고 미분계수가 존재해야 한다.

$$\text{풀이} \quad |f(x)| = |x^2 - 4x + 3| = \begin{cases} x^2 - 4x + 3 & (x \leq 1 \text{ 또는 } x \geq 3) \\ -x^2 + 4x - 3 & (1 < x < 3) \end{cases}$$

이므로

$$g(x) = \begin{cases} (ax^2 + bx + 6)(x^2 - 4x + 3) & (x \leq 1 \text{ 또는 } x \geq 3) \\ (ax^2 + bx + 6)(-x^2 + 4x - 3) & (1 < x < 3) \end{cases}$$

따라서 함수 $g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하려면 $x=1, x=3$ 에서 미분가능해야 한다. $\cdots ①$

$$g'(x) = \begin{cases} (2ax + b)(x^2 - 4x + 3) + (ax^2 + bx + 6)(2x - 4) & (x < 1 \text{ 또는 } x > 3) \\ (2ax + b)(-x^2 + 4x - 3) + (ax^2 + bx + 6)(-2x + 4) & (1 < x < 3) \end{cases}$$

이고, $g(x)$ 의 $x=1$ 에서의 미분계수가 존재해야 하므로

$$\lim_{x \rightarrow 1+} g'(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} g'(x) \text{에서}$$

$$2(a + b + 6) = -2(a + b + 6)$$

$$\therefore a + b = -6 \quad \cdots ②$$

또 $g(x)$ 의 $x=3$ 에서의 미분계수가 존재해야 하므로

$$\lim_{x \rightarrow 3+} g'(x) = \lim_{x \rightarrow 3-} g'(x) \text{에서}$$

$$2(9a + 3b + 6) = -2(9a + 3b + 6)$$

$$\therefore 3a + b = -2 \quad \cdots ③$$

②, ③을 연립하여 풀면 $a = 2, b = -8$ $\cdots ④$

$$\begin{aligned}
 \therefore g'(-1) &= (-2a + b) \cdot 8 + (a - b + 6) \cdot (-6) \\
 &= -12 \cdot 8 + 16 \cdot (-6) = -192 \quad \cdots ④
 \end{aligned}$$

답 -192

채점 기준	비율
① $g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 조건을 알 수 있다.	20 %
② a, b 에 대한 연립방정식을 세울 수 있다.	40 %
③ a, b 의 값을 구할 수 있다.	20 %
④ $g'(-1)$ 의 값을 구할 수 있다.	20 %

0342 전라 $y = f(x)g(x)$ 이면 $y' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ 임을 이용한다.



풀이 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ (a, b, c 는 상수),

$g(x) = x^2 + mx + n$ (m, n 은 상수)이라 하면

$$g'(x) = 2x + m$$

조건 ㉞에 의하여

$$f(0) = c = -1, g(1) = 1 + m + n = 2,$$

$$g'(1) = 2 + m = 1$$

이므로 $c = -1, m = -1, n = 2$

→ ①

조건 ㉝에서

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - xg(x)}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + ax^2 + bx - 1 - x(x^2 - x + 2)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(a+1)x^2 + (b-2)x - 1}{x-1} = 4 \end{aligned}$$

이때 $x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉 $\lim_{x \rightarrow 1} \{(a+1)x^2 + (b-2)x - 1\} = 0$ 이므로

$$(a+1) + (b-2) - 1 = 0 \quad \therefore b = 2 - a \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

따라서

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(a+1)x^2 - ax - 1}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\{(a+1)x + 1\}(x-1)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \{(a+1)x + 1\} \\ &= a + 2 = 4 \end{aligned}$$

이므로 $a = 2$

$a = 2$ 를 ㉞에 대입하면 $b = 0$

→ ②

즉 $f(x) = x^3 + 2x^2 - 1$ 이므로 $f'(x) = 3x^2 + 4x$

$$\therefore f(1) = 2, f'(1) = 7$$

→ ③

$y = f(x)g(x)$ 에서 $y' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ 이므로 함수

$f(x)g(x)$ 의 $x=1$ 에서의 미분계수는

$$f'(1)g(1) + f(1)g'(1) = 7 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 16$$

→ ④

답 16

채점 기준	비율
① 조건 ㉞을 이용하여 c, m, n 의 값을 구할 수 있다.	20 %
② 조건 ㉝를 이용하여 a, b 의 값을 구할 수 있다.	30 %
③ $f(1), f'(1)$ 의 값을 구할 수 있다.	30 %
④ 함수 $f(x)g(x)$ 의 $x=1$ 에서의 미분계수를 구할 수 있다.	20 %

0343 전략 $f(x) = (x-a)(x-b)(x-c)$ 라 하고 $f(4) = 2, f'(4) = 3$ 임을 이용한다.

풀이 $f(x) = (x-a)(x-b)(x-c)$ 라 하면 $f(4) = 2$ 이므로

$$(4-a)(4-b)(4-c) = 2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1} \quad \rightarrow ①$$

$f'(x) = (x-b)(x-c) + (x-a)(x-c) + (x-a)(x-b)$ 이므로

$$f'(4) = (4-b)(4-c) + (4-a)(4-c) + (4-a)(4-b)$$

$$= \frac{2}{4-a} + \frac{2}{4-b} + \frac{2}{4-c} \quad (\because \textcircled{1}) \quad \rightarrow ②$$

이때 $f'(4) = 3$ 이므로 $\frac{2}{4-a} + \frac{2}{4-b} + \frac{2}{4-c} = 3$

$$\therefore \frac{1}{a-4} + \frac{1}{b-4} + \frac{1}{c-4} = -\frac{3}{2} \quad \rightarrow ③$$

답 $-\frac{3}{2}$

채점 기준

비율

① a, b, c 사이의 관계식을 구할 수 있다.	30 %
② $f'(4)$ 를 a, b, c 에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	50 %
③ $\frac{1}{a-4} + \frac{1}{b-4} + \frac{1}{c-4}$ 의 값을 구할 수 있다.	20 %

0344 전략 $f(x)$ 를 n 차 다항식으로 나타낸 후 주어진 조건을 만족시키는 $f(x)$ 를 구한다.

풀이 조건 ㉝에서 $f'(0) = -2$ 이므로 $f(x)$ 는 상수함수가 아니다. $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ ($a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n$ 은 상수, n 은 자연수, $a_n \neq 0$)이라 하면

$$f'(x) = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \cdots + a_1 \quad \rightarrow ①$$

조건 ㉞에서 $\{f'(x)\}^2 = f(x)$ 는 x 에 대한 항등식이므로 최고차항을 비교하면 $n^2 a_n^2 x^{2n-2} = a_n x^n$ 에서

$$n^2 a_n^2 = a_n, 2n-2 = n$$

$$\therefore n = 2, a_n = \frac{1}{4} \quad (\because a_n \neq 0) \quad \rightarrow ②$$

따라서 $f(x) = \frac{1}{4} x^2 + a_1 x + a_0$ 이므로 $f'(x) = \frac{1}{2} x + a_1$

조건 ㉝에서 $f'(0) = -2$ 이므로 $a_1 = -2$

$x=0$ 을 $\{f'(x)\}^2 = f(x)$ 에 대입하면 $\{f'(0)\}^2 = f(0)$ 이므로

$$a_0 = 4$$

즉 $f(x) = \frac{1}{4} x^2 - 2x + 4$ 이므로 → ③

$$f(4) = \frac{1}{4} \cdot 4^2 - 2 \cdot 4 + 4 = 0 \quad \rightarrow ④$$

답 0

채점 기준	비율
① $f(x)$ 를 n 차 다항식으로 나타내고 $f'(x)$ 를 구할 수 있다.	20 %
② n, a_n 의 값을 구할 수 있다.	30 %
③ $f(x)$ 를 구할 수 있다.	40 %
④ $f(4)$ 의 값을 구할 수 있다.	10 %

04 도함수의 활용 (1)

0345 $f(x)=2x^2-6x+7$ 이라 하면 $f'(x)=4x-6$

따라서 점 (1, 3)에서의 접선의 기울기는

$f'(1)=4-6=-2$ ☞ -2

0346 $f(x)=x^3-5x^2-1$ 이라 하면 $f'(x)=3x^2-10x$

따라서 점 (2, -13)에서의 접선의 기울기는

$f'(2)=3\cdot 2^2-10\cdot 2=-8$ ☞ -8

0347 $f(x)=x^2-3x$ 라 하면 $f'(x)=2x-3$

점 (2, -2)에서의 접선의 기울기는

$f'(2)=2\cdot 2-3=1$

따라서 구하는 접선의 방정식은 $y-(-2)=1\cdot (x-2)$

$\therefore y=x-4$ ☞ $y=x-4$

0348 $f(x)=-x^2+3x-5$ 라 하면 $f'(x)=-2x+3$

점 (-1, -9)에서의 접선의 기울기는

$f'(-1)=-2\cdot (-1)+3=5$

따라서 구하는 접선의 방정식은 $y-(-9)=5(x+1)$

$\therefore y=5x-4$ ☞ $y=5x-4$

0349 $f(x)=3x^2+2x-1$ 이라 하면 $f'(x)=6x+2$

점 (1, 4)에서의 접선의 기울기는

$f'(1)=6+2=8$

따라서 구하는 접선의 방정식은 $y-4=8(x-1)$

$\therefore y=8x-4$ ☞ $y=8x-4$

0350 $f(x)=-x^3-2x^2+1$ 이라 하면 $f'(x)=-3x^2-4x$

점 (-2, 1)에서의 접선의 기울기는

$f'(-2)=-3\cdot (-2)^2-4\cdot (-2)=-4$

따라서 구하는 접선의 방정식은 $y-1=-4(x+2)$

$\therefore y=-4x-7$ ☞ $y=-4x-7$

0351 $f(x)=-x^3+1$ 이라 하면 $f'(x)=-3x^2$

점 (1, 0)에서의 접선의 기울기는

$f'(1)=-3$

따라서 점 (1, 0)에서의 접선에 수직인 직선의 기울기는 $\frac{1}{3}$ 이므로

구하는 직선의 방정식은

$y-0=\frac{1}{3}(x-1) \quad \therefore y=\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}$ ☞ $y=\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}$

0352 $f(x)=x^3-2x^2+3x-4$ 라 하면 $f'(x)=3x^2-4x+3$

점 (1, -2)에서의 접선의 기울기는

$f'(1)=3-4+3=2$

따라서 점 (1, -2)에서의 접선에 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{2}$ 이

므로 구하는 직선의 방정식은

$y-(-2)=-\frac{1}{2}(x-1) \quad \therefore y=-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$

☞ $y=-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$

0353 $f(x)=-x^3+x+2$ 라 하면 $f'(x)=-3x^2+1$

접점의 좌표를 $(t, -t^3+t+2)$ 라 하면 접선의 기울기가 -2 이므로

$f'(t)=-3t^2+1=-2, \quad t^2=1$

$\therefore t=-1$ 또는 $t=1$

따라서 접점의 좌표는 $(-1, 2), (1, 2)$ 이므로 구하는 접선의 방정식은

$y-2=-2(x+1), y-2=-2(x-1)$

$\therefore y=-2x, y=-2x+4$ ☞ $y=-2x, y=-2x+4$

0354 $f(x)=x^2-4x+3$ 이라 하면 $f'(x)=2x-4$

접점의 좌표를 (t, t^2-4t+3) 이라 하면 직선 $y=-\frac{1}{2}x-7$ 과 수직

인 직선의 기울기는 2이므로

$f'(t)=2t-4=2 \quad \therefore t=3$

따라서 구하는 접선은 점 (3, 0)을 지나고 기울기가 2인 직선이므로

$y-0=2(x-3)$

$\therefore y=2x-6$ ☞ $y=2x-6$

0355 $f(x)=x^3+1$ 이라 하면 $f'(x)=3x^2$

접점의 좌표를 (t, t^3+1) 이라 하면 직선 $y=3x+5$ 에 평행한 직선의 기울기는 3이므로

$f'(t)=3t^2=3, \quad t^2=1$

$\therefore t=-1$ 또는 $t=1$

따라서 접점의 좌표는 $(-1, 0), (1, 2)$ 이므로 구하는 접선의 방정식은

$y-0=3(x+1), y-2=3(x-1)$

$\therefore y=3x+3, y=3x-1$ ☞ $y=3x+3, y=3x-1$

0356 $f(x)=x^2+2x-1$ 이라 하면 $f'(x)=2x+2$

접점의 좌표를 (t, t^2+2t-1) 이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=2t+2$ 이므로 접선의 방정식은

$y-(t^2+2t-1)=(2t+2)(x-t) \quad \dots\dots \textcircled{7}$

이 직선이 점 $(-1, -3)$ 을 지나므로

$-3-(t^2+2t-1)=(2t+2)(-1-t)$

$t^2+2t=0, \quad t(t+2)=0$

$\therefore t=0$ 또는 $t=-2$

이것을 ⑦에 대입하면

$t=0$ 일 때, $y+1=2x \quad \therefore y=2x-1$

$t=-2$ 일 때, $y+1=-2(x+2) \quad \therefore y=-2x-5$

☞ $y=2x-1, y=-2x-5$

0357 $f(x)=x^3+2$ 라 하면 $f'(x)=3x^2$

접점의 좌표를 (t, t^3+2) 라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는



$$f'(t)=3t^2 \text{이므로 접선의 방정식은}$$

$$y-(t^3+2)=3t^2(x-t) \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

이 직선이 점 (0, 0)을 지나므로

$$-(t^3+2)=3t^2 \cdot (-t), \quad 2t^3=2$$

$$t^3=1 \quad \therefore t=1$$

이것을 ①에 대입하면

$$y-3=3(x-1) \quad \therefore y=3x \quad \text{답 } y=3x$$

0358 (1) $f(x)=ax^3-4x$, $g(x)=-2x^2+bx$ 라 하면

$$f'(x)=3ax^2-4, \quad g'(x)=-4x+b$$

두 곡선이 $x=-1$ 인 점에서 공통인 접선을 가지므로

$$f(-1)=g(-1), \quad f'(-1)=g'(-1)$$

$$f(-1)=g(-1) \text{에서} \quad -a+4=-2-b$$

$$\therefore a-b=6 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$f'(-1)=g'(-1) \text{에서} \quad 3a-4=4+b$$

$$\therefore 3a-b=8 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①, ②를 연립하여 풀면 $a=1, b=-5$

(2) 두 곡선 $y=x^3-4x$, $y=-2x^2-5x$ 의 접점의 좌표가 $(-1, 3)$ 이고 접선의 기울기가 $f'(-1)=g'(-1)=-1$ 이므로 구하는 접선의 방정식은

$$y-3=-(x+1) \quad \therefore y=-x+2$$

답 (1) $a=1, b=-5$ (2) $y=-x+2$

0359 (1) $f(x)=x^3-x$, $g(x)=x^2-1$ 이라 하면

$$f'(x)=3x^2-1, \quad g'(x)=2x$$

두 곡선의 접점의 x 좌표를 t 라 하면 $f(t)=g(t)$, $f'(t)=g'(t)$ 이어야 한다.

$$f(t)=g(t) \text{에서}$$

$$t^3-t=t^2-1, \quad (t+1)(t-1)^2=0$$

$$\therefore t=-1 \text{ 또는 } t=1 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$f'(t)=g'(t) \text{에서}$$

$$3t^2-1=2t, \quad (3t+1)(t-1)=0$$

$$\therefore t=-\frac{1}{3} \text{ 또는 } t=1 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①, ②에서 $t=1$ 이므로 접점의 x 좌표는 1이다.

(2) 접점의 좌표는 (1, 0)이고 접선의 기울기는 $f'(1)=g'(1)=2$ 이므로 구하는 접선의 방정식은

$$y-0=2(x-1) \quad \therefore y=2x-2$$

답 (1) 1 (2) $y=2x-2$

0360 함수 $f(x)=x^2-3x+4$ 는 닫힌구간 $[0, 3]$ 에서 연속이고 열린구간 $(0, 3)$ 에서 미분가능하며 $f(0)=f(3)=4$ 이다.

따라서 롤의 정리에 의하여 $f'(c)=0$ 인 c 가 구간 $(0, 3)$ 에 적어도 하나 존재한다.

$$f'(x)=2x-3 \text{이므로} \quad f'(c)=2c-3=0$$

$$\therefore c=\frac{3}{2} \quad \text{답 } \frac{3}{2}$$

0361 함수 $f(x)=-x^2+5x$ 는 닫힌구간 $[1, 4]$ 에서 연속이고 열린구간 $(1, 4)$ 에서 미분가능하며 $f(1)=f(4)=4$ 이다.

따라서 롤의 정리에 의하여 $f'(c)=0$ 인 c 가 구간 $(1, 4)$ 에 적어도 하나 존재한다.

$$f'(x)=-2x+5 \text{이므로} \quad f'(c)=-2c+5=0$$

$$\therefore c=\frac{5}{2} \quad \text{답 } \frac{5}{2}$$

0362 함수 $f(x)=(x+2)(x-6)=x^2-4x-12$ 는 닫힌구간 $[-2, 6]$ 에서 연속이고 열린구간 $(-2, 6)$ 에서 미분가능하며 $f(-2)=f(6)=0$ 이다.

따라서 롤의 정리에 의하여 $f'(c)=0$ 인 c 가 구간 $(-2, 6)$ 에 적어도 하나 존재한다.

$$f'(x)=2x-4 \text{이므로} \quad f'(c)=2c-4=0$$

$$\therefore c=2 \quad \text{답 } 2$$

0363 함수 $f(x)=x^3-x^2-5x-3$ 는 닫힌구간 $[-1, 3]$ 에서 연속이고 열린구간 $(-1, 3)$ 에서 미분가능하며 $f(-1)=f(3)=0$ 이다.

따라서 롤의 정리에 의하여 $f'(c)=0$ 인 c 가 구간 $(-1, 3)$ 에 적어도 하나 존재한다.

$$f'(x)=3x^2-2x-5 \text{이므로} \quad f'(c)=3c^2-2c-5=0$$

$$(c+1)(3c-5)=0$$

$$\therefore c=\frac{5}{3} \quad (\because -1 < c < 3) \quad \text{답 } \frac{5}{3}$$

0364 함수 $f(x)=x^4-2x^2+1$ 은 닫힌구간 $[-1, 1]$ 에서 연속이고 열린구간 $(-1, 1)$ 에서 미분가능하며 $f(-1)=f(1)=0$ 이다.

따라서 롤의 정리에 의하여 $f'(c)=0$ 인 c 가 구간 $(-1, 1)$ 에 적어도 하나 존재한다.

$$f'(x)=4x^3-4x \text{이므로} \quad f'(c)=4c^3-4c=0$$

$$4c(c+1)(c-1)=0$$

$$\therefore c=0 \quad (\because -1 < c < 1) \quad \text{답 } 0$$

0365 함수 $f(x)=-x^2+x$ 는 닫힌구간 $[-3, 2]$ 에서 연속이고 열린구간 $(-3, 2)$ 에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$$\frac{f(2)-f(-3)}{2-(-3)}=f'(c) \text{인 } c \text{가 구간 } (-3, 2) \text{에 적어도 하나 존재한다.}$$

$$f'(x)=-2x+1 \text{이므로} \quad \frac{-2-(-12)}{2-(-3)}=-2c+1$$

$$\therefore c=-\frac{1}{2} \quad \text{답 } -\frac{1}{2}$$

0366 함수 $f(x)=(2x+1)(x-1)=2x^2-x-1$ 은 닫힌구간 $[-1, 1]$ 에서 연속이고 열린구간 $(-1, 1)$ 에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$$\frac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)}=f'(c) \text{인 } c \text{가 구간 } (-1, 1) \text{에 적어도 하나 존재한다.}$$

$$f'(x)=4x-1 \text{이므로} \quad \frac{0-2}{1-(-1)}=4c-1$$

$$\therefore c=0 \quad \text{답 } 0$$

0367 함수 $f(x)=x^3$ 은 닫힌구간 $[-3, 0]$ 에서 연속이고 열린구간 $(-3, 0)$ 에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$\frac{f(0)-f(-3)}{0-(-3)}=f'(c)$ 인 c 가 구간 $(-3, 0)$ 에 적어도 하나 존재한다.

$$f'(x)=3x^2 \text{이므로} \quad \frac{0-(-27)}{0-(-3)}=3c^2$$

$$c^2=3 \quad \therefore c=-\sqrt{3} \quad (\because -3 < c < 0) \quad \text{답 } -\sqrt{3}$$

0368 함수 $f(x)=x^3-2x+1$ 은 닫힌구간 $[-1, 2]$ 에서 연속이고 열린구간 $(-1, 2)$ 에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$\frac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)}=f'(c)$ 인 c 가 구간 $(-1, 2)$ 에 적어도 하나 존재한다.

$$f'(x)=3x^2-2 \text{이므로} \quad \frac{5-2}{2-(-1)}=3c^2-2$$

$$c^2=1 \quad \therefore c=1 \quad (\because -1 < c < 2) \quad \text{답 } 1$$

0369 함수 $f(x)=x^3-3x^2+2x$ 는 닫힌구간 $[0, 3]$ 에서 연속이고 열린구간 $(0, 3)$ 에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$\frac{f(3)-f(0)}{3-0}=f'(c)$ 인 c 가 구간 $(0, 3)$ 에 적어도 하나 존재한다.

$$f'(x)=3x^2-6x+2 \text{이므로} \quad \frac{6-0}{3-0}=3c^2-6c+2$$

$$3c^2-6c=0, \quad 3c(c-2)=0$$

$$\therefore c=2 \quad (\because 0 < c < 3) \quad \text{답 } 2$$

0370 답 (가) (a, x) (나) $f(x)=f(a)$

0371 답 (가) $f'(x)-g'(x)$ (나) 상수

유형 01 접선의 기울기

본책 66쪽

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$ 에서의 접선의 기울기
 $\Rightarrow f'(a)$

0372 $f(x)=x^3-ax^2+bx-1$ 이라 하면

$$f'(x)=3x^2-2ax+b$$

점 $(1, 2)$ 가 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로 $f(1)=2$
 즉 $1-a+b-1=2$ 에서 $-a+b=2$ ㉠

또 점 $(1, 2)$ 에서의 접선의 기울기가 2이므로 $f'(1)=2$
 즉 $3-2a+b=2$ 에서 $-2a+b=-1$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3, b=5$

$$\therefore a+b=8 \quad \text{답 } ③$$

0373 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2, 7)$ 에서의 접선의 기울기가 4이므로

$$f'(2)=4 \quad \text{--- ①}$$

$$\therefore \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h)-f(2-h)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h)-f(2)-\{f(2-h)-f(2)\}}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2-h)-f(2)}{-h}$$

$$= 2f'(2)=2 \cdot 4$$

$$= 8$$

--- ②

답 8

채점 기준

비율

① $f'(2)$ 의 값을 구할 수 있다.	40 %
② 주어진 식의 값을 구할 수 있다.	60 %

0374 $f(x)=-x^3+2ax^2+bx+c$ 라 하면

$$f'(x)=-3x^2+4ax+b$$

점 $(-1, -7)$ 이 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로 $f(-1)=-7$
 즉 $1+2a-b+c=-7$ 에서

$$2a-b+c=-8 \quad \text{..... ㉠}$$

점 $(-1, -7)$ 에서의 접선의 기울기가 13이므로 $f'(-1)=13$
 즉 $-3-4a+b=13$ 에서

$$4a-b=-16 \quad \text{..... ㉡}$$

또 x 좌표가 -2 인 점에서의 접선의 기울기가 16이므로

$$f'(-2)=16$$

즉 $-12-8a+b=16$ 에서

$$8a-b=-28 \quad \text{..... ㉢}$$

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=-3, b=4$

이것을 ㉠에 대입하면 $c=2$

$$\therefore a-2b+c=-9 \quad \text{답 } -9$$

0375 $f(x)=3x^3+ax^2+bx+c$ 라 하면

$$f'(x)=9x^2+2ax+b$$

두 점 $(-2, -5), (2, 7)$ 이 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$$f(-2)=-5, f(2)=7$$

즉 $-24+4a-2b+c=-5$ 에서 $4a-2b+c=19$ ㉠

$24+4a+2b+c=7$ 에서 $4a+2b+c=-17$ ㉡

㉠-㉡을 하면 $4b=-36 \quad \therefore b=-9$

또 두 점 $(-2, -5), (2, 7)$ 에서의 접선이 서로 평행하므로

$$f'(-2)=f'(2)$$

즉 $36-4a+b=36+4a+b$ 에서 $a=0$

$a=0, b=-9$ 를 ㉠에 대입하면 $c=1$

$$\therefore a-bc=0-(-9) \cdot 1=9 \quad \text{답 } 9$$

유형 02 접선의 기울기의 최댓값 또는 최솟값

본책 66쪽

곡선 $y=f(x)$ 에 접하는 접선의 기울기의 최댓값 또는 최솟값은 $f'(x)$ 의 최대·최소를 이용하여 구한다.

0376 $f(x)=-x^3+9x^2-12x-14$ 라 하면

$$f'(x)=-3x^2+18x-12=-3(x-3)^2+15$$



이므로 $f'(x)$ 는 $x=3$ 에서 최댓값 15를 갖는다.

$$\therefore a=3, k=15$$

점 (a, b) 가 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$$b=f(3)=-27+81-36-14=4$$

$$\therefore a+b+k=22$$

답 ③

0377 $f(x)=x^3-6x^2+x+1$ 이라 하면

$$f'(x)=3x^2-12x+1=3(x-2)^2-11$$

이므로 $f'(x)$ 는 $x=2$ 에서 최솟값 -11 을 갖는다.

따라서 구하는 기울기 m 의 최솟값은 -11 이다.

답 ①

0378 $f(x)=-\frac{1}{6}x^3+\frac{3}{2}x^2+kx-1$ 이라 하면

$$f'(x)=-\frac{1}{2}x^2+3x+k=-\frac{1}{2}(x-3)^2+\frac{9}{2}+k$$

이므로 $f'(x)$ 는 $x=3$ 에서 최댓값 $\frac{9}{2}+k$ 를 갖는다.

$$\text{즉 } \frac{9}{2}+k=6 \text{ 이므로 } k=\frac{3}{2}$$

답 ②

유형 03

접선의 방정식

; 접점의 좌표가 주어진 경우

본책 67쪽

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 (a, b) 가 주어졌을 때

(i) 접선의 기울기 $f'(a)$ 를 구한다.

(ii) $f'(a)$ 를 $y-b=f'(a)(x-a)$ 에 대입하여 접선의 방정식을 구한다.

0379 $f(x)=-2x^3+ax-3$ 이라 하면 $f'(x)=-6x^2+a$

점 $(1, -1)$ 이 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로 $f(1)=-1$

$$\text{즉 } -2+a-3=-1 \text{에서 } a=4$$

또 점 $(1, -1)$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=-2$ 이므로 접선의 방정식은

$$y-(-1)=-2(x-1) \quad \therefore y=-2x+1$$

$$\text{따라서 } b=-2, c=1 \text{ 이므로 } \frac{a+b}{c}=\frac{4-2}{1}=2$$

답 2

0380 $f(x)=(x+1)(x^2-2)$ 라 하면

$$f'(x)=(x^2-2)+(x+1) \cdot 2x=3x^2+2x-2$$

$f(-1)=0$ 이고 점 $(-1, 0)$ 에서의 접선의 기울기는

$f'(-1)=-1$ 이므로 접선의 방정식은

$$y-0=-(x+1) \quad \therefore y=-x-1$$

이 직선이 점 $(2, a)$ 를 지나므로

$$a=-2-1=-3$$

답 -3

0381 $f(x)=x^3-2x^2+5$ 라 하면 $f'(x)=3x^2-4x$

점 $(1, 4)$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=-1$ 이므로 직선 l 의 방정식은 $y-4=-(x-1)$

$$\therefore x+y-5=0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

점 $(2, 5)$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(2)=4$ 이므로 직선 m 의 방정식은 $y-5=4(x-2)$

$$\therefore 4x-y-3=0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①, ②을 연립하여 풀면

$$x=\frac{8}{5}, y=\frac{17}{5}$$

따라서 구하는 교점의 좌표는 $(\frac{8}{5}, \frac{17}{5})$ 이다.

→ ③

$$\text{답 } (\frac{8}{5}, \frac{17}{5})$$

채점 기준

비율

① 직선 l 의 방정식을 구할 수 있다.

40 %

② 직선 m 의 방정식을 구할 수 있다.

40 %

③ 두 직선 l, m 의 교점의 좌표를 구할 수 있다.

20 %

0382 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)+1}{x-1}=4$ 에서 $x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값

이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉 } \lim_{x \rightarrow 1} \{f(x)+1\}=0 \text{ 이므로 } f(1)=-1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)+1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = f'(1)=4$$

즉 점 $(1, -1)$ 에서의 접선의 기울기가 4이므로 접선의 방정식은

$$y-(-1)=4(x-1) \quad \therefore y=4x-5$$

따라서 $a=4, b=-5$ 이므로

$$ab=-20$$

답 ①

0383 $f(x)=x^3+2x$ 라 하면 $f'(x)=3x^2+2$

$$\therefore f'(t)=3t^2+2$$

따라서 점 (t, t^3+2t) 에서의 접선의 방정식은

$$y-(t^3+2t)=(3t^2+2)(x-t)$$

$$\therefore y=(3t^2+2)x-2t^3$$

즉 $g(t)=-2t^3$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{g(t+1)-g(t)}{t^2} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-2(t+1)^3+2t^3}{t^2} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-6t^2-6t-2}{t^2} \\ &=-6 \end{aligned}$$

답 ②

0384 주어진 그래프에서 $f(1)=2, f'(1)=0$

$$g(x)=-xf(x) \text{에서 } g(1)=-f(1)=-2$$

$g'(x)=-f(x)-xf'(x)$ 에서 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(1, -2)$ 에서의 접선의 기울기는

$$g'(1)=-f(1)-f'(1)=-2$$

이므로 접선의 방정식은

$$y-(-2)=-2(x-1) \quad \therefore y=-2x$$

$$\text{답 } y=-2x$$

유형 04

접선과 수직인 직선의 방정식

본책 67쪽

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$ 를 지나고 이 점에서의 접선과 수직인 직선의 방정식

$$\Rightarrow y-f(a)=-\frac{1}{f'(a)}(x-a) \quad (\text{단, } f'(a) \neq 0)$$

0385 $f(x)=x^3, g(x)=2ax^2-bx$ 라 하면

$$f'(x)=3x^2, g'(x)=4ax-b$$

곡선 $y=g(x)$ 가 점 $(1, 1)$ 을 지나므로 $g(1)=1$ 에서

$$2a-b=1 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

또 점 $(1, 1)$ 에서의 두 접선이 서로 수직이므로 $f'(1)g'(1)=-1$ 에서

$$3(4a-b)=-1 \quad \therefore 4a-b=-\frac{1}{3} \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡} \text{을 연립하여 풀면} \quad a=-\frac{2}{3}, b=-\frac{7}{3}$$

$$\therefore a+b=-3$$

답 ①

0386 $f(x)=-x^3-2x^2+3$ 이라 하면

$$f'(x)=-3x^2-4x$$

점 $(-1, 2)$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(-1)=1$ 이므로 이 점에서의 접선과 수직인 직선의 기울기는 -1 이다.

따라서 직선의 방정식은

$$y-2=-(x+1) \quad \therefore x+y-1=0$$

위의 식이 $ax+by+2=0$ 과 일치해야 하므로

$$\frac{a}{1}=\frac{b}{1}=\frac{2}{-1} \quad \therefore a=-2, b=-2$$

$$\therefore ab=4$$

답 ⑤

두 직선 $ax+by+c=0, a'x+b'y+c'=0$
($abc \neq 0, a'b'c' \neq 0$)이

$$\textcircled{1} \text{ 일치한다. } \Leftrightarrow \frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$$

$$\textcircled{2} \text{ 평행하다. } \Leftrightarrow \frac{a}{a'}=\frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$$

$$\textcircled{3} \text{ 수직이다. } \Leftrightarrow aa'+bb'=0$$

0387 $y=x^3-ax^2+2ax+2$ 에서

$$x^3-y+2-ax(x-2)=0$$

위의 등식이 a 에 대한 항등식이므로

$$x^3-y+2=0, x(x-2)=0$$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$$x=0, y=2 \text{ 또는 } x=2, y=10$$

즉 곡선 $y=x^3-ax^2+2ax+2$ 는 a 의 값에 관계없이 항상 두 점 $(0, 2), (2, 10)$ 을 지난다. $\cdots \cdots \textcircled{1}$

이때 $y'=3x^2-2ax+2a$ 이고 두 점 $(0, 2), (2, 10)$ 에서의 접선이 서로 수직이므로

$$2a(12-2a)=-1 \quad \therefore 4a^2-24a-1=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 구하는 모든 실수 a 의 값의 곱은 $-\frac{1}{4}$ 이다. $\cdots \cdots \textcircled{3}$

$$\text{답 } -\frac{1}{4}$$

채점 기준

비율

① 곡선이 항상 지나는 두 점의 좌표를 구할 수 있다.

40 %

② a 에 대한 이차방정식을 세울 수 있다.

40 %

③ 모든 실수 a 의 값의 곱을 구할 수 있다.

20 %

참고 이차방정식 $4a^2-24a-1=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=(-12)^2+4=148>0$$

이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.

항등식의 성질

① $ax^2+bx+c=0$ 이 x 에 대한 항등식

$$\Leftrightarrow a=0, b=0, c=0$$

② $ax^2+bx+c=a'x^2+b'x+c'$ 이 x 에 대한 항등식

$$\Leftrightarrow a=a', b=b', c=c'$$

0388 $g(x)=x^2$ 이라 하면 $g'(x)=2x$

점 $P(t, t^2)$ 에서의 접선의 기울기는 $g'(t)=2t$ 이므로 이 점에서의 접선과 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{2t}$ 이다.

따라서 점 P 에서의 접선과 수직인 직선의 방정식은

$$y-t^2=-\frac{1}{2t}(x-t) \quad \therefore y=-\frac{1}{2t}x+\frac{1}{2}+t^2$$

$$x=0 \text{ 일 때 } y=\frac{1}{2}+t^2 \text{ 이므로 } f(t)=\frac{1}{2}+t^2$$

$$\therefore \lim_{t \rightarrow 0} f(t)=\lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2}+t^2\right)=\frac{1}{2}$$

답 ①

유형 05 접선이 곡선과 다시 만나는 점

본책 68쪽

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$ 에서의 접선 $y=g(x)$ 가 이 곡선과 다시 만나는 점의 x 좌표

→ 방정식 $f(x)=g(x)$ 의 $x \neq a$ 인 실근

0389 $f(x)=-x^3+6x^2-9x-12$ 라 하면

$$f'(x)=-3x^2+12x-9$$

점 $(0, -12)$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(0)=-9$ 이므로 접선의 방정식은

$$y-(-12)=-9(x-0) \quad \therefore y=-9x-12$$

직선 $y=-9x-12$ 가 주어진 곡선과 만나는 점의 x 좌표는

$$-x^3+6x^2-9x-12=-9x-12 \text{ 에서}$$

$$x^2(x-6)=0 \quad \therefore x=0 \text{ 또는 } x=6$$

따라서 다시 만나는 점의 좌표가 $(6, -66)$ 이므로

$$a=6, b=-66$$

$$\therefore \frac{b}{a}=-11$$

답 -11

0390 $f(x)=x^3-3x^2+4$ 라 하면 $f'(x)=3x^2-6x$

점 $(2, 0)$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(2)=0$ 이므로 접선의 방정식은

$$y=0$$

직선 $y=0$ 이 주어진 곡선과 만나는 점의 x 좌표는 $x^3-3x^2+4=0$ 에서

$$(x+1)(x-2)^2=0$$

$$\therefore x=-1 \text{ 또는 } x=2$$

따라서 점 P 의 좌표는 $(-1, 0)$ 이고 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(-1)=9$ 이므로 접선의 방정식은

$$y-0=9(x+1) \quad \therefore y=9x+9$$

$$\text{답 } y=9x+9$$



0391 $f(x)=x^3-2x+1$ 이라 하면 $f'(x)=3x^2-2$
 점 P(1, 0)에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=1$ 이므로 접선의 방정식은
 $y-0=1 \cdot (x-1) \quad \therefore y=x-1$
 $\therefore Q(0, -1)$
 또 직선 $y=x-1$ 이 주어진 곡선과 만나는 점의 x 좌표는
 $x^3-2x+1=x-1$ 에서 $x^3-3x+2=0$
 $(x+2)(x-1)^2=0 \quad \therefore x=-2$ 또는 $x=1$
 따라서 점 R의 좌표는 $(-2, -3)$ 이므로
 $PQ=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$
 $QR=\sqrt{(-2)^2+(-3+1)^2}=2\sqrt{2}$
 $\therefore PQ:QR=\sqrt{2}:2\sqrt{2}=1:2$ **답 ①**

0392 $f'(x)=(x-1)(kx+1)+x(kx+1)+kx(x-1)$
 점 A(1, 0)에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=k+1$ 이므로 직선 l 에
 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{k+1}$ 이다.
 따라서 점 A를 지나고 직선 l 에 수직인 직선의 방정식은
 $y=-\frac{1}{k+1}(x-1) \quad (k \neq -1)$
 이고 이 직선이 곡선 $y=f(x)$ 와 한 점에서 만나려면 방정식
 $x(x-1)(kx+1)=-\frac{1}{k+1}(x-1)$ 점 A에서만 만난다.
 이 한 실근과 두 허근을 가져야 한다.
 즉 $(x-1)\left(kx^2+x+\frac{1}{k+1}\right)=0$ 에서 이차방정식
 $kx^2+x+\frac{1}{k+1}=0$
 은 서로 다른 두 허근을 가져야 한다.
 이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면
 $D=1-4k \cdot \frac{1}{k+1} < 0, \quad \frac{-3k+1}{k+1} < 0$ $\frac{B}{A} < 0$ 이면 $AB < 0$
 $(k+1)(3k-1) > 0 \quad \therefore k < -1$ 또는 $k > \frac{1}{3}$ **답 ④**

유형 06 접선의 방정식: 기울기가 주어진 경우

본책 69쪽

- 곡선 $y=f(x)$ 에 접하는 접선의 기울기 m 이 주어졌을 때
 (i) 접점의 좌표를 $(t, f(t))$ 라 한다.
 (ii) $f'(t)=m$ 임을 이용하여 t 의 값을 구한다.
 (iii) $y-f(t)=m(x-t)$ 를 이용하여 접선의 방정식을 구한다.

0393 $f(x)=x^3-6x^2+10x-1$ 이라 하면
 $f'(x)=3x^2-12x+10$
 접점의 좌표를 $(t, t^3-6t^2+10t-1)$ 이라 하면 직선 $y=-2x-1$ 에
 평행한 직선의 기울기는 -2 이므로
 $f'(t)=3t^2-12t+10=-2$
 $t^2-4t+4=0, \quad (t-2)^2=0$
 $\therefore t=2$
 즉 접점의 좌표는 $(2, 3)$ 이므로 접선의 방정식은
 $y-3=-2(x-2) \quad \therefore y=-2x+7$
 따라서 구하는 y 절편은 7이다. **답 7**

0394 $f(x)=3x^2-4x+1$ 이라 하면
 $f'(x)=6x-4$
 점점의 좌표를 $(t, 3t^2-4t+1)$ 이라 하면 직선 $y=2x+5$ 에 평행한
 접선의 기울기는 2이므로
 $f'(t)=6t-4=2 \quad \therefore t=1$ 직선을 평행이동하여도
기울기는 변하지 않는다.
 즉 점점의 좌표는 $(1, 0)$ 이므로
 $m=1, n=0$
 $\therefore m+n=1$ **답 ③**

0395 $f(x)=x^3-4x+3$ 이라 하면
 $f'(x)=3x^2-4$
 점점의 좌표를 (t, t^3-4t+3) 이라 하면 접선의 기울기가 8이므로
 $f'(t)=3t^2-4=8, \quad t^2=4$
 $\therefore t=-2$ 또는 $t=2$ **→ ①**
 즉 점점의 좌표는 $(-2, 3), (2, 3)$ 이므로 접선의 방정식은
 $y-3=8(x+2), y-3=8(x-2)$
 $\therefore y=8x+19, y=8x-13$ **→ ②**
 이때 $a > b$ 이므로 $a=19, b=-13$ **→ ③**
 $\therefore a-b=32$ **→ ④**
답 32

채점 기준	비율
① 점점의 x 좌표를 구할 수 있다.	40 %
② 접선의 방정식을 구할 수 있다.	40 %
③ a, b 의 값을 구할 수 있다.	10 %
④ $a-b$ 의 값을 구할 수 있다.	10 %

0396 $f(x)=2x^3-17x$ 라 하면
 $f'(x)=6x^2-17$
 점점의 좌표를 $(t, 2t^3-17t) \quad (t > 0)$ 라 하면 접선의 기울기는
 $\tan 45^\circ=1$ 이므로
 $f'(t)=6t^2-17=1, \quad t^2=3$
 $\therefore t=\sqrt{3} \quad (\because t > 0)$
 즉 점점의 좌표는 $(\sqrt{3}, -11\sqrt{3})$ 이므로 접선의 방정식은
 $y-(-11\sqrt{3})=1 \cdot (x-\sqrt{3})$
 $\therefore y=x-12\sqrt{3}$
 따라서 $a=1, b=-12\sqrt{3}$ 이므로
 $ab=-12\sqrt{3}$ **답 ①**

직선의 기울기

직선이 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 $\theta \quad (0^\circ \leq \theta < 90^\circ)$
 라 하면
 $\Rightarrow (\text{직선의 기울기}) = \tan \theta$

0397 $f(x)=-x^2+3x+5$ 라 하면
 $f'(x)=-2x+3$
 점 $(1, 7)$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=1$ 이므로 직선 l 과 수직인
 직선을 m 이라 하면 직선 m 의 기울기는 -1 이다.

곡선 $y=f(x)$ 와 직선 m 의 접점의 좌표를 $(t, -t^2+3t+5)$ 라 하면 $f'(t)=-1$ 에서

$$-2t+3=-1 \quad \therefore t=2$$

따라서 접점의 좌표는 $(2, 7)$ 이므로 구하는 직선 m 의 방정식은

$$y-7=-(x-2) \quad \therefore x+y-9=0 \quad \text{답 ③}$$

유형 07 곡선과 직선이 접할 때 미정계수 구하기

본책 70쪽

곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=mx+n$ 이 접할 때

(i) 접점의 좌표를 $(t, f(t))$ 라 하고 접선의 방정식을 세운다.

(ii) (i)에서 구한 접선의 방정식과 직선 $y=mx+n$ 이 일치함을 이용하여 t 의 값을 구한다.

(iii) t 의 값을 $y=f(x)$ 에 대입하여 미정계수를 구한다.

0398 $f(x)=x^3+2x^2+ax$ 라 하면 $f'(x)=3x^2+4x+a$
접점의 좌표를 (t, t^3+2t^2+at) 라 하면 접선의 기울기는

$$f'(t)=3t^2+4t+a$$

이므로 접선의 방정식은

$$y-(t^3+2t^2+at)=(3t^2+4t+a)(x-t)$$

$$\therefore y=(3t^2+4t+a)x-2t^3-2t^2$$

이 직선이 직선 $y=3x+8$ 과 일치해야 하므로

$$3t^2+4t+a=3 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$-2t^3-2t^2=8 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①에서 $t^3+t^2+4=0, (t+2)(t^2-t+2)=0$

$$\therefore t=-2 (\because t^2-t+2>0)$$

$t=-2$ 를 ①에 대입하면 $t^2-t+2=(t-\frac{1}{2})^2+\frac{7}{4}>0$

$$12-8+a=3 \quad \therefore a=-1 \quad \text{답 ②}$$

0399 곡선 $y=x^2-3x+a$ 와 직선 $y=-x+3$ 의 접점의 x 좌표가 t 이므로 $x=t$ 일 때 접선의 기울기는 -1 이다.

$f(x)=x^2-3x+a$ 라 하면 $f'(x)=2x-3$ 이므로

$$f'(t)=2t-3=-1 \quad \therefore t=1$$

따라서 접점의 좌표가 $(1, 2)$ 이므로 $x=1, y=2$ 를 $y=x^2-3x+a$ 에 대입하면 $2=1-3+a \quad \therefore a=4$

$$\therefore a+t=5 \quad \text{답 5}$$

0400 $f(x)=x^2$ 이라 하면 $f'(x)=2x$

점 $(2, 4)$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(2)=4$ 이므로 접선의 방정식은

$$y-4=4(x-2) \quad \therefore y=4x-4 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

한편 $g(x)=x^3+ax+12$ 라 하면 $g'(x)=3x^2+a$

곡선 $y=g(x)$ 의 접점의 좌표를 $(t, t^3+at+12)$ 라 하면 접선의 기울기는

$$g'(t)=3t^2+a$$

이므로 접선의 방정식은

$$y-(t^3+at+12)=(3t^2+a)(x-t)$$

$$\therefore y=(3t^2+a)x-2t^3+12$$

이 직선이 ①과 일치해야 하므로

$$3t^2+a=4 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$-2t^3+12=-4 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{2} \text{에서 } t^3=8 \quad \therefore t=2$$

$t=2$ 를 ③에 대입하면

$$12+a=4 \quad \therefore a=-8 \quad \text{답 ①}$$

0401 $f(x)=x^3+ax^2+ax+3$ 이라 하면

$$f'(x)=3x^2+2ax+a$$

접점의 좌표를 (t, t^3+at^2+at+3) 이라 하면 접선의 기울기는

$$f'(t)=3t^2+2at+a$$

이므로 접선의 방정식은

$$y-(t^3+at^2+at+3)=(3t^2+2at+a)(x-t)$$

$$\therefore y=(3t^2+2at+a)x-2t^3-at^2+3$$

이 직선이 직선 $y=x+3$ 과 일치해야 하므로

$$3t^2+2at+a=1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$-2t^3-at^2+3=3 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \text{에서 } t^2(2t+a)=0 \quad \therefore t=0 \text{ 또는 } t=-\frac{a}{2}$$

(i) $t=0$ 을 ①에 대입하면 $a=1$

(ii) $t=-\frac{a}{2}$ 를 ①에 대입하면

$$\frac{3}{4}a^2-a^2+a=1, \quad a^2-4a+4=0$$

$$(a-2)^2=0 \quad \therefore a=2$$

(i), (ii)에서 모든 a 의 값의 합은

$$1+2=3 \quad \text{답 3}$$

유형 08 기울기가 주어진 접선의 방정식의 활용

본책 70쪽

곡선 $y=f(x)$ 에 접하는 접선의 기울기 m 이 주어졌을 때

→ 접점의 좌표를 $(t, f(t))$ 라 하고 $f'(t)=m$ 임을 이용하여 t 의 값을 구한 후 접점의 좌표를 구한다.

0402 $f(x)=x^3-3x^2-6x+1$ 이라 하면

$$f'(x)=3x^2-6x-6$$

접점의 좌표를 (t, t^3-3t^2-6t+1) 이라 하면 접선의 기울기가 3이므로

$$f'(t)=3t^2-6t-6=3, \quad t^2-2t-3=0$$

$$(t+1)(t-3)=0 \quad \therefore t=-1 \text{ 또는 } t=3$$

즉 접점의 좌표는 $(-1, 3), (3, -17)$ 이므로 접선의 방정식은

$$y-3=3(x+1), \quad y-(-17)=3(x-3)$$

$$\therefore 3x-y+6=0, \quad 3x-y-26=0$$

위의 두 직선 사이의 거리는 직선 $3x-y+6=0$ 위의 점 $(0, 6)$ 과

직선 $3x-y-26=0$ 사이의 거리와 같으므로 구하는 거리는

$$\frac{|0-6-26|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\frac{16\sqrt{10}}{5} \quad \text{답 ③}$$



점과 직선 사이의 거리

점 (x_1, y_1) 과 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리 d 는

$$d=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$



0403 $f(x)=x^3-10x+5$ 라 하면 $f'(x)=3x^2-10$
 접점의 좌표를 $(t, t^3-10t+5)$ 라 하면 접선의 기울기가 2이므로
 $f'(t)=3t^2-10=2, \quad t^2=4$
 $\therefore t=-2$ 또는 $t=2$ ①
 즉 접점의 좌표는 $(-2, 17), (2, -7)$ 이다. ②
 따라서 선분 AB의 중점의 좌표는
 $\left(\frac{-2+2}{2}, \frac{17-7}{2}\right)$, 즉 $(0, 5)$ ③
 정답 (0, 5)

채점 기준	비율
① 접점의 x 좌표를 구할 수 있다.	50 %
② 두 점 A, B의 좌표를 구할 수 있다.	20 %
③ 선분 AB의 중점의 좌표를 구할 수 있다.	30 %

0404 $f(x)=x^3-3x^2+5x$ 라 하면
 $f'(x)=3x^2-6x+5$
 접점의 좌표를 (t, t^3-3t^2+5t) 라 하면 접선의 기울기가 8이므로
 $f'(t)=3t^2-6t+5=8 \quad \therefore t^2-2t-1=0$ ①
 두 접점의 x 좌표가 a, b 이므로 이차방정식 ①의 두 근은 a, b 이다.
 따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
 $a+b=2, ab=-1$
 $(a-b)^2=(a+b)^2-4ab=2^2-4 \cdot (-1)=8$ 이므로
 $|a-b|=2\sqrt{2}$ 정답 $2\sqrt{2}$

유형 09 곡선 위의 점과 직선 사이의 거리의 최솟값 본책 71쪽

- (i) 곡선의 접선 중 주어진 직선과 평행한 접선의 접점의 좌표를 구한다.
 (ii) 이 접점과 직선 사이의 거리가 구하는 거리의 최솟값이다.

0405 $f(x)=x^2$ 이라 하면 $f'(x)=2x$
 곡선 $y=f(x)$ 의 접선 중에서 직선 $y=2x-6$ 과 평행한 접선의 접점의 좌표를 (t, t^2) 이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기가 2이어야 하므로
 $f'(t)=2t=2 \quad \therefore t=1$
 따라서 접점의 좌표는 $(1, 1)$ 이고, 점 $(1, 1)$ 과 직선 $y=2x-6$, 즉 $2x-y-6=0$ 사이의 거리가 구하는 최솟값이므로
 $\frac{|2-1-6|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\sqrt{5}$ 정답 ③

0406 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{11}{3} (x>0)$ 이라 하면 $f'(x)=x^2$
 곡선 $y=f(x) (x>0)$ 의 접선 중에서 직선 $x-y-10=0$, 즉 $y=x-10$ 과 평행한 접선의 접점이 점 P이다.
 따라서 점 P(a, b)에서의 접선의 기울기가 1이므로
 $f'(a)=a^2=1$
 이때 $x>0$ 이므로 $a>0 \quad \therefore a=1$
 즉 점 P의 좌표는 $(1, 4)$ 이므로 $a=1, b=4$
 $\therefore a+b=5$ 정답 ④

0407 $f(x)=x^2+3x+4$ 라 하면 $f'(x)=2x+3$
 곡선 $y=f(x)$ 의 접선 중에서 직선 $y=x$ 과 평행한 접선의 접점의 좌표를 (t, t^2+3t+4) 라 하면 이 점에서의 접선의 기울기가 1이어야 하므로
 $f'(t)=2t+3=1 \quad \therefore t=-1$ ①
 따라서 점 P의 좌표가 $(-1, 2)$ 일 때 $\triangle ABP$ 의 넓이가 최소이다.
 점 P($-1, 2$)와 직선 $y=x$, 즉 $x-y=0$ 사이의 거리는
 $\frac{|-1-2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{3}{\sqrt{2}}$ ②
 $AB=\sqrt{(3-1)^2+(3-1)^2}=2\sqrt{2}$ 이므로 $\triangle ABP$ 의 넓이의 최솟값은
 $\frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot \frac{3}{\sqrt{2}}=3$ ③
 정답 3

채점 기준	비율
① 기울기가 1인 접선의 접점의 x 좌표를 구할 수 있다.	40 %
② 점 P와 직선 $y=x$ 사이의 거리를 구할 수 있다.	40 %
③ $\triangle ABP$ 의 넓이의 최솟값을 구할 수 있다.	20 %

유형 10 접선의 방정식; 곡선 밖의 한 점이 주어진 경우 본책 71쪽

- 곡선 $y=f(x)$ 밖의 한 점 (a, b) 가 주어졌을 때
 (i) 접점의 좌표를 $(t, f(t))$ 라 한다.
 (ii) $y-f(t)=f'(t)(x-t)$ 에 점 (a, b) 의 좌표를 대입하여 t 의 값을 구한다.
 (iii) $y-f(t)=f'(t)(x-t)$ 를 이용하여 접선의 방정식을 구한다.

0408 $f(x)=x^3+2x$ 라 하면 $f'(x)=3x^2+2$
 접점의 좌표를 (t, t^3+2t) 라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는
 $f'(t)=3t^2+2$ 이므로 접선의 방정식은
 $y-(t^3+2t)=(3t^2+2)(x-t)$
 $\therefore y=(3t^2+2)x-2t^3$ ①
 이 직선이 점 $(0, 2)$ 를 지나므로
 $2=-2t^3, \quad t^3=-1 \quad \therefore t=-1$
 $t=-1$ 을 ①에 대입하면 $y=5x+2$
 $5x+2=0$ 에서 $x=-\frac{2}{5}$
 따라서 구하는 접선의 x 절편은 $-\frac{2}{5}$ 이다. 정답 ④

0409 $f(x)=x^2-3$ 이라 하면 $f'(x)=2x$
 접점의 좌표를 (t, t^2-3) 이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는
 $f'(t)=2t$ 이므로 접선의 방정식은
 $y-(t^2-3)=2t(x-t) \quad \therefore y=2tx-t^2-3$
 이 직선이 점 $(0, -4)$ 를 지나므로
 $-4=-t^2-3, \quad t^2=1$
 $\therefore t=-1$ 또는 $t=1$
 따라서 두 접선의 기울기의 곱은
 $f'(-1)f'(1)=-2 \cdot 2=-4$ 정답 ④

0410 $f(x)=x^2+x$ 라 하면 $f'(x)=2x+1$
 접점의 좌표를 (t, t^2+t) 라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는
 $f'(t)=2t+1$ 이므로 접선의 방정식은

$$y-(t^2+t)=(2t+1)(x-t) \\ \therefore y=(2t+1)x-t^2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

이 직선이 점 $(1, 1)$ 을 지나므로

$$1=2t+1-t^2, \quad t(t-2)=0$$

$$\therefore t=0 \text{ 또는 } t=2$$

$t=0, t=2$ 를 $\textcircled{1}$ 에 각각 대입하면

$$y=x, y=5x-4$$

이상에서 접선의 방정식은 \square, \square 이다.

답 ⑤

0411 $f(x)=x^3+2$ 라 하면 $f'(x)=3x^2$
 접점의 좌표를 (t, t^3+2) 라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는
 $f'(t)=3t^2$ 이므로 접선의 방정식은

$$y-(t^3+2)=3t^2(x-t) \\ \therefore y=3t^2x-2t^3+2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

이 직선이 원점을 지나므로

$$0=-2t^3+2, \quad t^3=1 \quad \therefore t=1$$

$t=1$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 $y=3x$

따라서 직선 $y=3x$ 위의 점의 좌표는 $\textcircled{3}$ 이다.

답 ③

0412 $f(x)=x^3-5x^2+8x-4$ 라 하면

$$f'(x)=3x^2-10x+8$$

접점의 좌표를 (t, t^3-5t^2+8t-4) 라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는
 $f'(t)=3t^2-10t+8$ 이므로 접선의 방정식은

$$y-(t^3-5t^2+8t-4)=(3t^2-10t+8)(x-t) \\ \therefore y=(3t^2-10t+8)x-2t^3+5t^2-4$$

이 직선이 점 $(3, 0)$ 을 지나므로

$$0=-2t^3+14t^2-30t+20$$

$$\therefore t^3-7t^2+15t-10=0$$

위의 삼차방정식이 서로 다른 세 실근을 갖고, 이 세 실근이 세 접점의 x 좌표이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 구하는 x 좌표의 합은 7

답 ④

삼차방정식의 근과 계수의 관계

삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ 의 세 근을 α, β, γ 라 하면

$$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a}, \quad \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a}, \quad \alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}$$

0413 $f(x)=x^2-2x$ 라 하면 $f'(x)=2x-2$

접점의 좌표를 (t, t^2-2t) 라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는
 $f'(t)=2t-2$ 이므로 접선의 방정식은

$$y-(t^2-2t)=(2t-2)(x-t) \\ \therefore y=(2t-2)x-t^2$$

이 직선이 점 $(1, -2)$ 를 지나므로

$$-2=2t-2-t^2, \quad t^2-2t=0$$

$$t(t-2)=0 \quad \therefore t=0 \text{ 또는 } t=2$$

한편 점 (t, t^2-2t) 에서의 접선에 수직인 직선의 기울기는

$$-\frac{1}{2t-2} \text{이므로 직선의 방정식은}$$

$$y-(t^2-2t)=-\frac{1}{2t-2}(x-t)$$

위의 식에 $t=0, t=2$ 를 각각 대입하면

$$y=\frac{1}{2}x, y=-\frac{1}{2}x+1$$

따라서 두 직선의 y 절편은 0, 1이므로

$$a+b=1$$

답 1

유형 11

곡선 밖의 한 점에서 곡선에 그은
 접선의 방정식의 활용

본책 72쪽

곡선 $y=f(x)$ 밖의 한 점 (a, b) 가 주어졌을 때

→ 접점의 좌표를 $(t, f(t))$ 라 하고 세운 접선의 방정식에 점 (a, b) 의 좌표를 대입하여 t 의 값을 구한 후 접점의 좌표를 구한다.

0414 $f(x)=-x^2+x$ 라 하면 $f'(x)=-2x+1$

접점의 좌표를 $(t, -t^2+t)$ 라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$f'(t)=-2t+1$ 이므로 접선의 방정식은

$$y-(-t^2+t)=(-2t+1)(x-t) \\ \therefore y=(-2t+1)x+t^2$$

이 직선이 점 $(2, -1)$ 을 지나므로

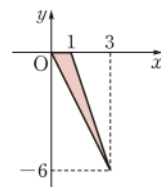
$$-1=-4t+2+t^2, \quad t^2-4t+3=0 \\ (t-1)(t-3)=0 \quad \therefore t=1 \text{ 또는 } t=3$$

따라서 접점의 좌표는 $(1, 0), (3, -6)$ 이므로

오른쪽 그림에서 구하는 삼각형의 넓이는

$$\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 6 = 3$$

답 ②



0415 $f(x)=x^4+3$ 이라 하면 $f'(x)=4x^3$

접점의 좌표를 (t, t^4+3) 이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$f'(t)=4t^3$ 이므로 접선의 방정식은

$$y-(t^4+3)=4t^3(x-t) \quad \therefore y=4t^3x-3t^4+3 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

이 직선이 원점을 지나므로 $0=-3t^4+3$

$$t^4-1=0, \quad (t+1)(t-1)(t^2+1)=0$$

$$\therefore t=-1 \text{ 또는 } t=1 (\because t^2+1>0) \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

따라서 접점 P, Q의 좌표는 $(-1, 4), (1, 4)$ 이므로

$$PQ=2 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

답 2

채점 기준

채점 기준	비율
① 접점의 좌표를 $(t, f(t))$ 라 하고 접선의 방정식을 세울 수 있다.	30 %
② t 의 값을 구할 수 있다.	40 %
③ 선분 PQ의 길이를 구할 수 있다.	30 %

0416 $f(x)=x^2+5x-2$ 라 하면 $f'(x)=2x+5$

접점의 좌표를 (t, t^2+5t-2) 라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$f'(t)=2t+5$ 이므로 접선의 방정식은



$$y - (t^2 + 5t - 2) = (2t + 5)(x - t)$$

$$\therefore y = (2t + 5)x - t^2 - 2$$

이 직선이 점 A(a, 3)을 지나므로

$$3 = (2t + 5)a - t^2 - 2$$

$$\therefore t^2 - 2at - 5a + 5 = 0$$

위의 이차방정식의 두 실근을 t_1, t_2 라 하면 t_1, t_2 는 각각 두 점 B, C의 x 좌표이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$t_1 + t_2 = 2a$$

따라서 삼각형 ABC의 무게중심의 x 좌표는

$$\frac{a + t_1 + t_2}{3} = \frac{a + 2a}{3} = 2$$

$$\therefore a = 2$$

답 2

0417 $f(x) = x^3 + 6x^2 + 4$ 라 하면 $f'(x) = 3x^2 + 12x$

접점의 좌표를 $(t, t^3 + 6t^2 + 4)$ 라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t) = 3t^2 + 12t$ 이므로 접선의 방정식은

$$y - (t^3 + 6t^2 + 4) = (3t^2 + 12t)(x - t)$$

$$\therefore y = (3t^2 + 12t)x - 2t^3 - 6t^2 + 4$$

이 직선이 점 (a, 4)를 지나므로

$$4 = (3t^2 + 12t)a - 2t^3 - 6t^2 + 4$$

$$t\{2t^2 + (6 - 3a)t - 12a\} = 0$$

$$\therefore t = 0 \text{ 또는 } 2t^2 + (6 - 3a)t - 12a = 0$$

이때 접선이 오직 한 개 존재하려면 이차방정식

$$2t^2 + (6 - 3a)t - 12a = 0$$

..... ㉠

이 $t = 0$ 을 중근으로 갖거나 실근을 갖지 않아야 한다.

(i) ㉠이 $t = 0$ 을 중근으로 갖는 경우

$$6 - 3a = 0, -12a = 0$$

그런데 이를 만족시키는 a 의 값은 존재하지 않는다.

(ii) ㉠이 실근을 갖지 않는 경우

㉠의 판별식을 D 라 하면

$$D = (6 - 3a)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-12a) < 0$$

$$3a^2 + 20a + 12 < 0, \quad (3a + 2)(a + 6) < 0$$

$$\therefore -6 < a < -\frac{2}{3}$$

(i), (ii)에서 $-6 < a < -\frac{2}{3}$ 이므로 $m = -6, n = -\frac{2}{3}$

$$\therefore mn = 4$$

답 4

유형 12 공통인 접선

본책 73쪽

두 곡선 $y = f(x), y = g(x)$ 가 $x = t$ 인 점에서 공통인 접선을 가지면

① $x = t$ 인 점에서 두 곡선이 만난다. $\Rightarrow f(t) = g(t)$

② $x = t$ 인 점에서의 두 곡선의 접선의 기울기가 같다. $\Rightarrow f'(t) = g'(t)$

0418 $f(x) = x^3, g(x) = 3x^2 - 4$ 라 하면

$$f'(x) = 3x^2, g'(x) = 6x$$

두 곡선이 $x = t$ 인 점에서 공통인 접선을 갖는다고 하면

$$f(t) = g(t) \text{에서 } t^3 = 3t^2 - 4$$

$$(t + 1)(t - 2)^2 = 0 \quad \therefore t = -1 \text{ 또는 } t = 2$$

$$f'(t) = g'(t) \text{에서 } 3t^2 = 6t$$

$$3t(t - 2) = 0 \quad \therefore t = 0 \text{ 또는 } t = 2$$

따라서 $t = 2$ 일 때, 즉 점 (2, 8)에서 공통인 접선을 갖고 접선의 기울기는 $f'(2) = g'(2) = 12$ 이므로 공통인 접선의 방정식은

$$y - 8 = 12(x - 2) \quad \therefore y = 12x - 16$$

답 ④

0419 $f(x) = x^3 + ax, g(x) = 2x^2 + 4$ 라 하면

$$f'(x) = 3x^2 + a, g'(x) = 4x$$

두 곡선이 $x = t$ 인 점에서 접한다고 하면

$$f(t) = g(t) \text{에서 } t^3 + at = 2t^2 + 4$$

..... ㉠

$$f'(t) = g'(t) \text{에서 } 3t^2 + a = 4t$$

$$\therefore a = 4t - 3t^2$$

..... ㉡

㉠을 ㉡에 대입하여 정리하면

$$t^3 - t^2 + 2 = 0, \quad (t + 1)(t^2 - 2t + 2) = 0$$

$$\therefore t = -1 \quad (\because t^2 - 2t + 2 > 0)$$

$$t = -1 \text{을 ㉡에 대입하면 } a = -7$$

답 ①

0420 $f(x) = x^3 + ax, g(x) = bx^3 + 3x^2 + c$ 라 하면

$$f'(x) = 3x^2 + a, g'(x) = 3bx^2 + 6x$$

두 곡선 $y = f(x), y = g(x)$ 가 점 (1, -2)를 지나므로

$$f(1) = -2 \text{에서 } 1 + a = -2 \quad \therefore a = -3$$

$$g(1) = -2 \text{에서 } b + 3 + c = -2$$

$$\therefore b + c = -5$$

..... ㉠

..... ①

점 (1, -2)에서의 두 곡선의 접선의 기울기가 같으므로

$$f'(1) = g'(1) \text{에서 } 3 + a = 3b + 6$$

$$3b = -6 \quad \therefore b = -2$$

..... ②

$$b = -2 \text{를 ㉠에 대입하면 } c = -3$$

..... ③

$$\therefore a + b - c = -2$$

..... ④

답 -2

채점 기준	비율
① a 의 값과 ㉠을 구할 수 있다.	30 %
② b 의 값을 구할 수 있다.	30 %
③ c 의 값을 구할 수 있다.	30 %
④ $a + b - c$ 의 값을 구할 수 있다.	10 %

유형 13 두 곡선의 교점에서의 접선

본책 73쪽

두 곡선 $y = f(x), y = g(x)$ 에 대하여

(i) 두 곡선의 교점의 x 좌표를 t 라 하면 $\Rightarrow f(t) = g(t)$

(ii) 두 곡선의 교점에서의 접선의 방정식은 각각

$$\Rightarrow y - f(t) = f'(t)(x - t), y - g(t) = g'(t)(x - t)$$

0421 $f(x) = x^2 + 4, g(x) = -3x^2 + ax$ 라 하면

$$f'(x) = 2x, g'(x) = -6x + a$$

두 곡선의 교점의 x 좌표를 t 라 하면 $f(t) = g(t)$ 에서

$$t^2 + 4 = -3t^2 + at \quad \therefore at = 4t^2 + 4$$

..... ㉠

두 접선이 서로 수직이므로 $f'(t)g'(t) = -1$ 에서

$$2t(-6t + a) = -1 \quad \therefore 12t^2 - 2at = 1$$

..... ㉡

⑦을 ⑥에 대입하면 $12t^2 - 2(4t^2 + 4) = 1$

$4t^2 = 9 \quad \therefore t = -\frac{3}{2} \text{ 또는 } t = \frac{3}{2}$

(i) $t = -\frac{3}{2}$ 을 ⑦에 대입하면

$-\frac{3}{2}a = 13 \quad \therefore a = -\frac{26}{3}$

(ii) $t = \frac{3}{2}$ 을 ⑦에 대입하면

$\frac{3}{2}a = 13 \quad \therefore a = \frac{26}{3}$

그런데 $a > 0$ 이므로 $a = \frac{26}{3}$

답 $\frac{26}{3}$

0422 $f(x) = x^3$, $g(x) = ax^2 + bx$ 라 하면

$f'(x) = 3x^2$, $g'(x) = 2ax + b$

두 곡선이 점 (1, 1)에서 만나므로 $g(1) = 1$ 에서

$a + b = 1$ ①

점 (1, 1)에서의 두 접선이 서로 수직이므로 $f'(1)g'(1) = -1$ 에서

$3(2a + b) = -1$ ②

①, ②를 연립하여 풀면 $a = -\frac{4}{3}$, $b = \frac{7}{3}$

$\therefore b - a = \frac{11}{3}$ ③

0423 $f(x) = -x^2 + 2$, $g(x) = ax^2 + 3x$ 라 하면

$f'(x) = -2x$, $g'(x) = 2ax + 3$

두 곡선의 교점의 x 좌표를 t 라 하면 $f(t) = g(t)$ 에서

$-t^2 + 2 = at^2 + 3t$ ①

또 $m_1 = f'(t) = -2t$, $m_2 = g'(t) = 2at + 3$ 이므로 $m_1 - m_2 = 1$ 에서

$-2t - 2at - 3 = 1 \quad \therefore at = -t - 2$ ②

②를 ①에 대입하여 정리하면 $t = 2$

$t = 2$ 를 ②에 대입하면 $a = -2$ ③

0424 두 곡선 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 가 점 (1, k)에서 만나므로

$f(1) = k$, $g(1) = k$

또 점 (1, k)에서의 두 접선이 서로 수직이므로

$f'(1)g'(1) = -1$ ①

$y' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ 이고 점 (1, k^2)에서의 접선의 기울기는 0이므로

$f'(1)g(1) + f(1)g'(1) = 0$, $k\{f'(1) + g'(1)\} = 0$

$\therefore f'(1) + g'(1) = 0$ ($\because k \neq 0$)

즉 $g'(1) = -f'(1)$ 이므로 이것을 ①에 대입하면

$\{f'(1)\}^2 = 1 \quad \therefore f'(1) = -1 \text{ 또는 } f'(1) = 1$

그런데 $f'(1) < g'(1)$ 이므로 $f'(1) = -1$, $g'(1) = 1$

$\therefore f'(1) - g'(1) = -2$ ②

답 ④

유형 14 접선과 좌표축으로 둘러싸인 도형의 넓이

본책 74쪽

- (i) 접선의 방정식을 구한다.
(ii) 접선의 x 절편과 y 절편을 찾아 도형의 넓이를 구한다.

0425 $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x - 1$ 이라 하면

$f'(x) = 6x^2 - 6x + 4$

점 P(1, 2)에서의 접선의 기울기는 $f'(1) = 4$ 이므로 접선 l 의 방정식은

$y - 2 = 4(x - 1) \quad \therefore y = 4x - 2$

한편 직선 l 에 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{4}$ 이므로 점 P(1, 2)를 지

나고 기울기가 $-\frac{1}{4}$ 인 직선 m 의 방정식은

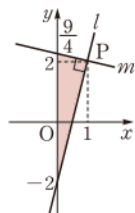
$y - 2 = -\frac{1}{4}(x - 1)$

$\therefore y = -\frac{1}{4}x + \frac{9}{4}$

따라서 오른쪽 그림에서 두 직선 l , m 과 y 축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$\frac{1}{2} \cdot \left\{ \frac{9}{4} - (-2) \right\} \cdot 1 = \frac{17}{8}$

답 ②



0426 $f(x) = x^2 - 4x + 5$ 라 하면

$f'(x) = 2x - 4$

접점의 좌표를 (t , $t^2 - 4t + 5$)라 하면 접선의 기울기가 2이므로

$f'(t) = 2t - 4 = 2 \quad \therefore t = 3$

따라서 접점의 좌표는 (3, 2)이므로 접선의 방정식은

$y - 2 = 2(x - 3) \quad \therefore y = 2x - 4$

이 접선의 x 절편은 2, y 절편은 -4이므로 구하는 도형의 넓이는

$\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 = 4$

답 ②

0427 점 (1, k)는 곡선 $y = x^2 + a$ 위의 점이므로

$k = 1 + a$ ①

$f(x) = x^2 + a$ 라 하면 $f'(x) = 2x$

점 (1, k)에서의 접선의 기울기는 $f'(1) = 2$ 이므로 접선의 방정식은

$y - k = 2(x - 1)$

$\therefore y = 2x + k - 2$ ②

따라서 접선의 x 절편과 y 절편은 각각 $\frac{2-k}{2}$, $k-2$ 이다.

이때 $k > 2$ 이고 접선과 x 축 및 y 축으로 둘러싸인 도형의 넓이가 $\frac{1}{4}$ 이므로

$\frac{1}{2} \cdot \frac{k-2}{2} \cdot (k-2) = \frac{1}{4}, \quad (k-2)^2 = 1$

$\therefore k = 3$ ($\because k > 2$) ③

$k = 3$ 을 ①에 대입하면 $a = 2$ ④

$\therefore a + k = 5$ ⑤

답 5

채점 기준	비율
① 점 (1, k)에서의 접선의 방정식을 구할 수 있다.	40 %
② k 의 값을 구할 수 있다.	30 %
③ a 의 값을 구할 수 있다.	20 %
④ $a + k$ 의 값을 구할 수 있다.	10 %



0428 $x^2+x-6=0$ 에서 $(x+3)(x-2)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=2$

따라서 A(2, 0), B(0, -6)이므로 직선 AB의 기울기는

$$\frac{-6-0}{0-2}=3$$

$f(x)=x^2+x-6$ 이라 하면 $f'(x)=2x+1$

접점의 좌표를 (t, t^2+t-6) 이라 하면 직선 AB의 기울기가 3이므로

$$f'(t)=2t+1=3 \quad \therefore t=1$$

즉 접점의 좌표가 (1, -4)이므로 접선의 방정식은

$$y-(-4)=3(x-1) \quad \therefore y=3x-7$$

따라서 C($\frac{7}{3}$, 0), D(0, -7)이므로 $\triangle OCD$ 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{7}{3} \cdot 7 = \frac{49}{6}$$

답 $\frac{49}{6}$

0429 $f(x)=x^2$ 이라 하면 $f'(x)=2x$

접점의 좌표를 (t, t^2) 이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$$f'(t)=2t \text{이므로 접선의 방정식은}$$

$$y-t^2=2t(x-t) \quad \therefore y=2tx-t^2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

직선 $\textcircled{1}$ 이 점 A(2, 3)을 지나므로

$$3=4t-t^2, \quad t^2-4t+3=0$$

$$(t-1)(t-3)=0 \quad \therefore t=1 \text{ 또는 } t=3$$

$t=1, t=3$ 을 $\textcircled{1}$ 에 각각 대입하면

$$y=2x-1, y=6x-9$$

두 접선의 x축과의 교점의 좌표는 각각

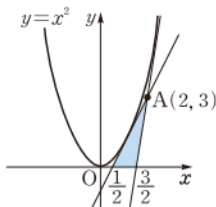
$$\left(\frac{1}{2}, 0\right), \left(\frac{3}{2}, 0\right) \text{이므로 } \triangle ABC \text{의 넓이는}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\right) \cdot 3 = \frac{3}{2}$$

따라서 $a=3, b=2$ 이므로

$$a^2+b^2=3^2+2^2=13$$

답 ②



0430 $f(x)=x^2-2x+2, g(x)=-x^2+6$ 이라 하면

$$f'(x)=2x-2, g'(x)=-2x$$

두 곡선이 제1사분면 위에서 만나는 점의 x좌표를 $t(t>0)$ 라 하면

$$f(t)=g(t) \text{에서}$$

$$t^2-2t+2=-t^2+6, \quad t^2-t-2=0$$

$$(t+1)(t-2)=0 \quad \therefore t=2 (\because t>0)$$

$$\therefore P(2, 2)$$

점 P(2, 2)에서 두 곡선에 그은 접선 l, m의 기울기는 각각

$$f'(2)=2, g'(2)=-4$$

이므로 직선 l의 방정식은

$$y-2=2(x-2) \quad \therefore y=2x-2$$

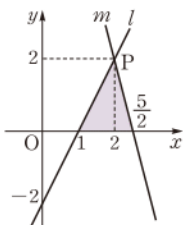
직선 m의 방정식은

$$y-2=-4(x-2) \quad \therefore y=-4x+10$$

따라서 오른쪽 그림에서 두 직선 l, m과 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{5}{2}-1\right) \cdot 2 = \frac{3}{2}$$

답 $\frac{3}{2}$



유형 15 곡선과 원의 접선

본책 75쪽

곡선 $y=f(x)$ 와 원 C가 접할 때

① (원 C의 반지름의 길이)=(원 C의 중심과 접점 사이의 거리)

② 원 C의 중심과 접점을 지나는 직선은 접점에서의 접선과 수직이다.

0431 $f(x)=\frac{1}{2}x^2$ 이라 하면 $f'(x)=x$

오른쪽 그림과 같이 접점을 $P(t, \frac{1}{2}t^2)$ 이라 하면 점 P에서의 접선의 기울기는

$$f'(t)=t \text{이고, 직선 CP의 기울기는}$$

$$\frac{\frac{1}{2}t^2-3}{t-0}=\frac{t^2-6}{2t}$$

이때 점 P에서의 접선과 직선 CP는 서로 수직이므로

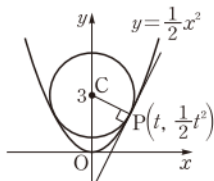
$$t \cdot \frac{t^2-6}{2t} = -1, \quad t^2=4$$

$$\therefore t=-2 \text{ 또는 } t=2$$

따라서 두 접점의 좌표는 (-2, 2), (2, 2)이므로 원 C의 반지름의 길이는

$$CP=\sqrt{2^2+(2-3)^2}=\sqrt{5}$$

답 ④



0432 $f(x)=-x^2+2$ 라 하면 $f'(x)=-2x$

오른쪽 그림과 같이 접점을 $P(t, -t^2+2)$ 라 하면 점 P에서의 접선의 기울기는

$$f'(t)=-2t \text{이고, 직선 CP의 기울기는}$$

$$\frac{-t^2-1}{t-5}$$

이때 점 P에서의 접선과 직선 CP는 서로 수직

이므로

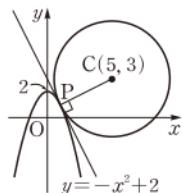
$$-2t \cdot \frac{-t^2-1}{t-5} = -1$$

$$2t^3+3t-5=0, \quad (t-1)(2t^2+2t+5)=0$$

$$\therefore t=1 (\because 2t^2+2t+5>0)$$

따라서 구하는 접점의 좌표는 (1, 1)이다.

답 ④



0433 $f(x)=x^3+1$ 이라 하면 $f'(x)=3x^2$

점 (1, 2)에서의 접선의 기울기가 $f'(1)=3$ 이므로 이 접선과 수직

인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{3}$ 이다.

따라서 점 (1, 2)를 지나고 기울기가 $-\frac{1}{3}$ 인 직선의 방정식은

$$y-2=-\frac{1}{3}(x-1)$$

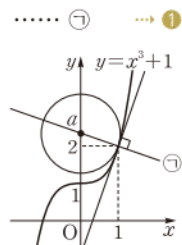
$$\therefore y=-\frac{1}{3}x+\frac{7}{3}$$

y축 위에 있는 원의 중심의 좌표를 (0, a)라 하면 직선 $\textcircled{1}$ 이 점 (0, a)를 지나야 하므로

$$a=\frac{7}{3}$$

이때 원의 반지름의 길이는 두 점 (1, 2),

$(0, \frac{7}{3})$ 사이의 거리와 같으므로



$$\sqrt{(1-0)^2 + \left(2-\frac{7}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{10}}{3}$$

따라서 구하는 원의 넓이는

$$\pi \cdot \left(\frac{\sqrt{10}}{3}\right)^2 = \frac{10}{9}\pi$$

→ ③

→ ④

답 $\frac{10}{9}\pi$

채점 기준

비율

- | | |
|--|------|
| ① 점 (1, 2)를 지나고 이 점에서의 접선과 수직인 직선의 방정식을 구할 수 있다. | 30 % |
| ② a의 값을 구할 수 있다. | 30 % |
| ③ 원의 반지름의 길이를 구할 수 있다. | 20 % |
| ④ 원의 넓이를 구할 수 있다. | 20 % |

유형 16 물의 정리

본책 75쪽

함수 $f(x)$ 가 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속이고 열린구간 (a, b) 에서 미분가능할 때, $f(a)=f(b)$ 이면
 $\Rightarrow f'(c)=0$ 인 c 가 a 와 b 사이에 적어도 하나 존재한다.

0434 함수 $f(x)=(x+1)^2(x-2)=x^3-3x-2$ 는 닫힌구간 $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$ 에서 연속이고 열린구간 $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ 에서 미분가능하며 $f(-\sqrt{3})=f(\sqrt{3})=-2$ 이다.

따라서 물의 정리에 의하여 $f'(c)=0$ 인 c 가 구간 $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ 에 적어도 하나 존재한다.

$$f'(x)=3x^2-3 \text{ 이므로}$$

$$f'(c)=3c^2-3=0, \quad 3(c+1)(c-1)=0$$

$$\therefore c=-1 \text{ 또는 } c=1$$

따라서 모든 상수 c 의 값의 합은

$$-1+1=0$$

답 ③

0435 함수 $f(x)=kx-x^2$ 는 닫힌구간 $[1, 3]$ 에서 연속이고 열린구간 $(1, 3)$ 에서 미분가능하다.

이때 물의 정리를 만족시키려면 $f(1)=f(3)$ 이어야 하므로

$$k-1=3k-9 \quad \therefore k=4$$

한편 $f'(c)=0$ 인 c 가 구간 $(1, 3)$ 에 적어도 하나 존재한다.

$$f'(x)=4-2x \text{ 이므로}$$

$$f'(c)=4-2c=0 \quad \therefore c=2$$

답 ③

0436 함수 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2-3x+5$ 는 닫힌구간 $[-a, a]$ 에서 연속이고 열린구간 $(-a, a)$ 에서 미분가능하다.

이때 물의 정리를 만족시키려면 $f(-a)=f(a)$ 이어야 하므로

$$-\frac{1}{3}a^3+a^2+3a+5=\frac{1}{3}a^3+a^2-3a+5$$

$$a^3-9a=0, \quad a(a+3)(a-3)=0$$

$$\therefore a=3 (\because a \text{는 자연수})$$

한편 $f'(c)=0$ 인 c 가 구간 $(-3, 3)$ 에 적어도 하나 존재한다.

$$f'(x)=x^2+2x-3 \text{ 이므로}$$

$$f'(c)=c^2+2c-3=0, \quad (c+3)(c-1)=0$$

$$\therefore c=1 (\because -3 < c < 3)$$

$$\text{답 } a=3, c=1$$

0437 함수 $f(x)=(x-a)(x-b)=x^2-(a+b)x+ab$ 는 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속이고 열린구간 (a, b) 에서 미분가능하며 $f(a)=f(b)=0$ 이다.

따라서 물의 정리에 의하여 $f'(c)=0$ 인 c 가 구간 (a, b) 에 적어도 하나 존재한다.

$$f'(x)=2x-(a+b) \text{ 이므로}$$

$$f'(c)=2c-(a+b)=0 \quad \therefore c=\frac{a+b}{2}$$

답 ③

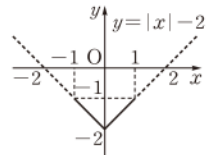
0438 $f(1)-f(-1)=2f'(c)$ 에서

$$\frac{f(1)-f(-1)}{2}=f'(c)$$

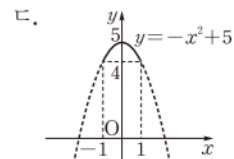
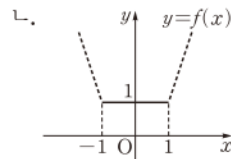
이때 보기의 세 함수는 모두 $f(1)=f(-1)$ 을 만족시키므로

$f'(c)=0$ 을 만족시키는 c 가 구간 $(-1, 1)$ 에 존재하는지 알아보아야 한다.

ㄱ. 함수 $y=|x|-2$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $f'(c)=0$ 을 만족시키는 c 가 구간 $(-1, 1)$ 에 존재하지 않는다.



ㄴ, ㄷ. 함수 $f(x)$ 는 닫힌구간 $[-1, 1]$ 에서 연속이고 열린구간 $(-1, 1)$ 에서 미분가능하며 $f(-1)=f(1)$ 이므로 물의 정리에 의하여 $f'(c)=0$ 을 만족시키는 c 가 구간 $(-1, 1)$ 에 적어도 하나 존재한다.



이상에서 주어진 조건을 만족시키는 함수는 ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

유형 17 평균값 정리: 정의를 이용하는 경우

본책 76쪽

함수 $f(x)$ 가 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속이고 열린구간 (a, b) 에서 미분가능하면

$$\Rightarrow \frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c) \text{인 } c \text{가 } a \text{와 } b \text{ 사이에 적어도 하나 존재한다.}$$

0439 함수 $f(x)=x^3-2x$ 는 닫힌구간 $[-2, 2]$ 에서 연속이고 열린구간 $(-2, 2)$ 에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$$\frac{f(2)-f(-2)}{2-(-2)}=f'(c)$$

인 c 가 구간 $(-2, 2)$ 에 적어도 하나 존재한다.

$$f'(x)=3x^2-2 \text{ 이므로 } \frac{4-(-4)}{2-(-2)}=3c^2-2$$

$$3c^2=4 \quad \therefore c=-\frac{2}{\sqrt{3}} \text{ 또는 } c=\frac{2}{\sqrt{3}} (\because -2 < c < 2)$$

따라서 모든 상수 c 의 값의 곱은 $-\frac{4}{3}$ 이다.

답 $-\frac{4}{3}$



0440 함수 $g(x)=f'(x)=6x^2-2x+1$ 은 닫힌구간 $[0, 2]$ 에서 연속이고 열린구간 $(0, 2)$ 에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$$\frac{g(2)-g(0)}{2-0}=g'(c)$$

인 c 가 구간 $(0, 2)$ 에 적어도 하나 존재한다.

$$g'(x)=12x-2\text{이므로 } \frac{21-1}{2-0}=12c-2$$

$$\therefore c=1$$

답 ②

0441 함수 $f(x)=-x^2+5x+1$ 에 대하여 닫힌구간 $[1, k]$ 에서 평균값 정리를 만족시키는 상수가 4이므로

$$\frac{f(k)-f(1)}{k-1}=f'(4)$$

$$f'(x)=-2x+5\text{이므로 } \frac{-k^2+5k+1-5}{k-1}=-3 \quad \rightarrow ①$$

$$k^2-8k+7=0, \quad (k-1)(k-7)=0$$

$$\therefore k=7 (\because k>4)$$

→ ②

답 7

채점 기준	비율
① $\frac{f(k)-f(1)}{k-1}=f'(4)$ 임을 이용하여 k 에 대한 방정식을 세울 수 있다.	70 %
② k 의 값을 구할 수 있다.	30 %

0442 함수 $f(x)$ 가 닫힌구간 $[x-4, x+4]$ 에서 연속이고 열린구간 $(x-4, x+4)$ 에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$$\frac{f(x+4)-f(x-4)}{(x+4)-(x-4)}=f'(c)$$

인 c 가 구간 $(x-4, x+4)$ 에 적어도 하나 존재한다.

이때 $x \rightarrow \infty$ 이면 $c \rightarrow \infty$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \{f(x+4)-f(x-4)\} &= 8 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x+4)-f(x-4)}{(x+4)-(x-4)} \\ &= 8 \lim_{c \rightarrow \infty} f'(c) \\ &= 8 \cdot 3 = 24 \end{aligned}$$

답 24

유형 18 평균값 정리; 그래프를 이용하는 경우

본책 77쪽

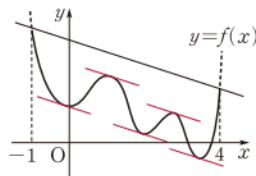
평균값 정리는 곡선 $y=f(x)$ 위의 두 점 $(a, f(a)), (b, f(b))$ 를 잇는 직선과 평행한 접선을 갖는 점이 열린구간 (a, b) 에 적어도 하나 존재함을 의미한다.

0443 닫힌구간 $[-1, 4]$ 에서 평균값 정리를 만족시키는 상수 c 는 두 점 $(-1, f(-1)), (4, f(4))$ 를 잇는 직선의 기울기와 같은 미분계수를 갖는 점의 x 좌표이다.

이때 오른쪽 그림과 같이 두 점

$(-1, f(-1)), (4, f(4))$ 를 잇는 직선과 평행한 접선을 5개 그을 수 있으므로 구하는 상수 c 의 개수는 5이다.

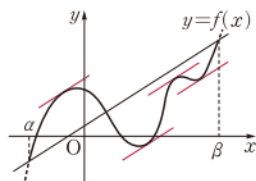
답 ⑤



0444 $\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$ 는 곡선 $y=f(x)$ 위의 두 점 $(\alpha, f(\alpha)), (\beta, f(\beta))$ 를 잇는 직선의 기울기이고, $f'(c)$ 는 곡선 $y=f(x)$ 위의 $x=c$ 인 점에서의 접선의 기울기이다.

이때 오른쪽 그림과 같이 두 점 $(\alpha, f(\alpha)), (\beta, f(\beta))$ 를 잇는 직선과 평행한 접선을 4개 그을 수 있으므로 주어진 조건을 만족시키는 상수 c 의 개수는 4이다.

답 4



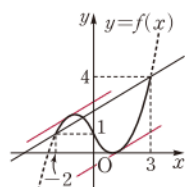
0445 닫힌구간 $[-2, 3]$ 에서 평균값 정리를 만족시키는 상수 c 는 두 점 $(-2, 1), (3, 4)$ 를 잇는 직선의 기울기와 같은 미분계수를 갖는 점의 x 좌표이다.

$$f(x)=\begin{cases} (x-1)^2 & (x \geq 0) \\ -(x+1)^2+2 & (x < 0) \end{cases} \text{이므로}$$

$y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 이때 두 점 $(-2, 1), (3, 4)$ 를 잇는 직선과 평행한 접선을 2개 그을 수 있다.

따라서 상수 c 의 개수는 2이다.

답 2

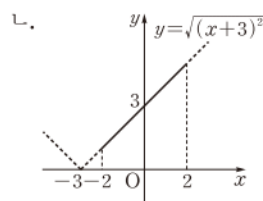
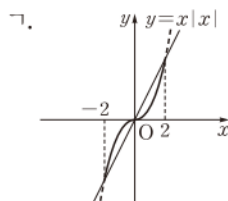


0446 $\frac{f(2)-f(-2)}{4}=f'(c)$ 에서

$$\frac{f(2)-f(-2)}{2-(-2)}=f'(c)$$

..... ①

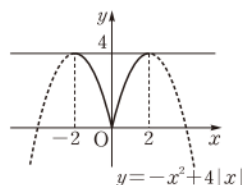
ㄱ, ㄴ. 함수 $f(x)$ 는 닫힌구간 $[-2, 2]$ 에서 연속이고 열린구간 $(-2, 2)$ 에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여 ①을 만족시키는 c 가 구간 $(-2, 2)$ 에 적어도 하나 존재한다.



ㄷ. 함수 $y=-x^2+4|x|$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 ①을 만족시키는 c 가 구간 $(-2, 2)$ 에 존재하지 않는다.

이상에서 주어진 조건을 만족시키는 함수는 ㄱ, ㄴ이다.

답 ④



유형 19 평균값 정리의 변형

본책 77쪽

(i) 함수 $f(x)$ 의 도함수 $f'(x)$ 를 구한다.

(ii) $f(x)$ 와 $f'(x)$ 를 주어진 등식에 대입하여 h 에 대한 식으로 정리한 후 극한값을 구한다.

$$\begin{aligned} \text{0447 } f(x)=x^3 \text{에서 } f'(x) &= 3x^2 \\ f(a+h) &= f(a) + hf'(a+\theta h) \text{에서} \\ (a+h)^3 &= a^3 + h\{3(a+\theta h)^2\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3ah^2 + h^3 &= 6a\theta h^2 + 3\theta^2 h^3 \\
 3h\theta^2 + 6a\theta - 3a - h &= 0 \quad (\because h > 0) \quad \left[\begin{array}{l} \theta \text{에 대한 이차방정식으로 생각하고} \\ \text{근의 공식을 이용하여 } \theta \text{를 구한다.} \end{array} \right. \\
 \therefore \theta &= \frac{-3a + \sqrt{9a^2 + 9ah + 3h^2}}{3h} \quad (\because \theta > 0) \\
 \therefore \lim_{h \rightarrow 0} \theta &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{9a^2 + 9ah + 3h^2} - 3a}{3h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{9a^2 + 9ah + 3h^2 - 9a^2}{3h(\sqrt{9a^2 + 9ah + 3h^2} + 3a)} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3a + h}{\sqrt{9a^2 + 9ah + 3h^2} + 3a} \\
 &= \frac{3a}{3a + 3a} = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

답 ④

0448 $f(x) = x^2 + ax + b$ 에서

$$f'(x) = 2x + a$$

$f(x+h) = f(x) + hf'(x+\theta h)$ 에서

$$(x+h)^2 + a(x+h) + b = x^2 + ax + b + h\{2(x+\theta h) + a\}$$

$$h^2 = 2\theta h^2 \quad \therefore \theta = \frac{1}{2} \quad (\because h > 0) \quad \text{답 } \frac{1}{2}$$

0449 **전략** 주어진 식을 변형하여 미분계수의 정의를 이용한다.

풀이 함수 $y = f(x)$ 의 그래프 위의 점 $P(2, 1)$ 에서의 접선의 방정식이 $y = 3x - 5$ 이므로

$$f'(2) = 3$$

$h = \frac{1}{3n}$ 로 놓으면 $n \rightarrow \infty$ 일 때 $h \rightarrow 0$ 이므로

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2} \left\{ f\left(2 + \frac{1}{3n}\right) - f(2) \right\} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{6h} \\
 &= \frac{1}{6} f'(2) \\
 &= \frac{1}{6} \cdot 3 = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

답 $\frac{1}{2}$

0450 **전략** $f(0) = 0$ 이면 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = f'(0)$ 임을 이용한다.

풀이 조건 ①에서

$$f'_i(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f_i(x) + 2kx}{f_i(x) + kx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{f_i(x)}{x} + 2k}{\frac{f_i(x)}{x} + k}$$

이때

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f_i(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f_i(x) - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f_i(x) - f_i(0)}{x - 0} = f'_i(0)$$

이므로

$$f'_i(0) = \frac{f'_i(0) + 2k}{f'_i(0) + k}$$

$f'_i(0) = a$ (a 는 실수)라 하면

$$a = \frac{a + 2k}{a + k}, \quad a(a + k) = a + 2k$$

$$\therefore a^2 + (k-1)a - 2k = 0 \quad \dots\dots ①$$

한편 조건 ②에서 곡선 $y = f_1(x), y = f_2(x)$ 의 원점에서의 접선이 서로 직교하므로

$$f'_1(0)f'_2(0) = -1$$

$f'_1(0), f'_2(0)$ 은 a 에 대한 이차방정식 ①의 두 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$-2k = -1 \quad \therefore k = \frac{1}{2} \quad \text{답 } ①$$

0451 **전략** 조건 ①에서 $x \rightarrow 2$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하면 (분자) $\rightarrow 0$ 임을 이용한다.

풀이 조건 ①에서 $x \rightarrow 2$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉 $\lim_{x \rightarrow 2} \{f(x) - g(x)\} = 0$ 이므로

$$f(2) = g(2) \quad \dots\dots ①$$

이때

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - g(x)}{x - 2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\{f(x) - f(2)\} - \{g(x) - g(2)\}}{x - 2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} - \lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x) - g(2)}{x - 2} \\
 &= f'(2) - g'(2)
 \end{aligned}$$

이므로

$$f'(2) - g'(2) = 2 \quad \therefore f'(2) = g'(2) + 2 \quad \dots\dots ②$$

$x = 2$ 를 $g(x) = x^3 f(x) - 7$ 에 대입하면

$$g(2) = 8f(2) - 7, \quad g(2) = 8g(2) - 7 \quad (\because ①)$$

$$\therefore g(2) = 1$$

$g(x) = x^3 f(x) - 7$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$g'(x) = 3x^2 f(x) + x^3 f'(x)$$

$x = 2$ 를 위의 식에 대입하면

$$g'(2) = 12f(2) + 8f'(2)$$

$$g'(2) = 12 \cdot 1 + 8\{g'(2) + 2\} \quad (\because ②)$$

$$7g'(2) = -28 \quad \therefore g'(2) = -4$$

따라서 점 $(2, g(2))$, 즉 $(2, 1)$ 에서의 접선의 방정식은

$$y - 1 = -4(x - 2), \quad \text{즉 } y = -4x + 9$$

이므로 $a = -4, b = 9$

$$\therefore a^2 + b^2 = (-4)^2 + 9^2 = 97 \quad \text{답 } 97$$

0452 **전략** 곡선 위의 점 (a_n, a_n^2) 에서의 접선의 방정식을 구하여 a_{n+1} 과 a_n 사이의 관계식을 구한다.

풀이 $f(x) = x^2$ 이라 하면 $f'(x) = 2x$

점 $(2, 4)$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(2) = 4$ 이므로 접선의 방정식은

$$y - 4 = 4(x - 2) \quad \therefore y = 4x - 4$$

이 접선과 x 축의 교점의 좌표는 $(1, 0)$ 이므로 $a_1 = 1$

또 곡선 위의 점 (a_n, a_n^2) 에서의 접선의 기울기는 $2a_n$ 이므로 접선의 방정식은

$$y - a_n^2 = 2a_n(x - a_n) \quad \therefore y = 2a_n x - a_n^2$$

이 접선과 x 축의 교점의 좌표는 $(\frac{1}{2}a_n, 0)$ 이므로



$$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n$$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 1, 공비가 $\frac{1}{2}$ 인 등비수열이므로

$$a_n = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\therefore a_6 = \left(\frac{1}{2}\right)^5$$

답 ③

등비수열의 귀납적 정의

수열 $\{a_n\}$ 에서

① $a_{n+1} \div a_n = r$ 또는 $a_{n+1} = ra_n \Rightarrow$ 공비가 r 인 등비수열

② $a_{n+1} \div a_n = a_{n+2} \div a_{n+1}$ 또는 $a_{n+1}^2 = a_n a_{n+2}$

$\Rightarrow a_{n+1}$ 은 a_n 과 a_{n+2} 의 등비중항



0453 전략 $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ (a, b, c, d 는 상수)라 하고 조건 (나), (다)를 이용하여 b, d 를 a 에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 조건 (가)에서 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 1이므로 $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ (a, b, c, d 는 상수)라 하면

$$f'(x) = 4x^3 + 3ax^2 + 2bx + c$$

조건 (다)에서 $f'(0) = 0$ 이므로 $c = 0$

조건 (나)에서 $f(2) = 2, f'(2) = 0$ 이므로

$$f(2) = 16 + 8a + 4b + d = 2 \text{에서}$$

$$8a + 4b + d = -14 \quad \dots\dots ㉠$$

$$f'(2) = 32 + 12a + 4b = 0 \text{에서}$$

$$b = -3a - 8 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$8a + 4(-3a - 8) + d = -14$$

$$\therefore d = 4a + 18 \quad \dots\dots ㉢$$

㉡, ㉢을 $f(x)$ 에 대입하면

$$\begin{aligned} f(x) &= x^4 + ax^3 + (-3a - 8)x^2 + 4a + 18 \\ &= a(x^3 - 3x^2 + 4) + x^4 - 8x^2 + 18 \end{aligned}$$

이때 $y = f(x)$ 의 그래프가 a 의 값에 관계없이 항상 지나는 점의 x 좌표는 $x^3 - 3x^2 + 4 = 0$ 을 만족시키는 실수 x 의 값과 같으므로

$$x^3 - 3x^2 + 4 = 0 \text{에서} \quad (x+1)(x-2)^2 = 0$$

$$\therefore x = -1 \text{ 또는 } x = 2$$

$x = -1$ 일 때 y 좌표는 11이고, $x = 2$ 일 때 y 좌표는 2이므로 y 좌표의 합은

$$11 + 2 = 13 \quad \text{답 13}$$

0454 전략 원의 넓이를 이등분하는 직선은 원의 중심을 지남을 이용한다.

풀이 $f(x) = x^3 - 3x$ 에서 $f'(x) = 3x^2 - 3$

점 O에서의 접선의 기울기는 $f'(0) = -3$ 이므로 점 O에서의 접선과 수직이고 점 O를 지나는 직선의 방정식은 $y = \frac{1}{3}x$ 이다.

이때 조건 (나)에 의하여 직선 $y = \frac{1}{3}x$ 가 원 C의 넓이를 이등분하므로

직선 $y = \frac{1}{3}x$ 는 원 C의 중심을 지난다.

원 C의 중심의 좌표를 $(a, \frac{1}{3}a)$ ($a > 0$)라 하면 조건 (다)에 의하여

$$f(a) = \frac{1}{3}a \text{이므로}$$

$$a^3 - 3a = \frac{1}{3}a, \quad a^3 - \frac{10}{3}a = 0$$

$$a\left(a + \frac{\sqrt{30}}{3}\right)\left(a - \frac{\sqrt{30}}{3}\right) = 0$$

$$\therefore a = \frac{\sqrt{30}}{3} \quad (\because a > 0)$$

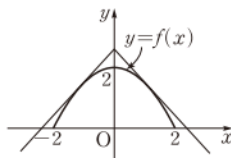
즉 원 C의 중심의 좌표는 $(\frac{\sqrt{30}}{3}, \frac{\sqrt{30}}{9})$ 이므로 반지름의 길이는

$$\sqrt{\left(\frac{\sqrt{30}}{3}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{30}}{9}\right)^2} = \sqrt{\frac{100}{27}}$$

따라서 원 C의 넓이는 $\pi \cdot \left(\sqrt{\frac{100}{27}}\right)^2 = \frac{100}{27}\pi$ 답 $\frac{100}{27}\pi$

0455 전략 주어진 구조물의 단면을 좌표평면 위에 나타내어 이차함수의 그래프의 식을 구한다.

풀이 주어진 구조물의 단면을 오른쪽 그림과 같이 좌표평면 위에 나타내고 이차함수의 그래프의 식을 $y = f(x)$ 라 하면



$$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2$$

$$\therefore f'(x) = -x$$

$y = f(x)$ 의 그래프와 제 1 사분면에서 접하는 접선의 접점의 좌표를

$(t, -\frac{1}{2}t^2 + 2)$ ($0 < t < 2$)라 하면 접선의 기울기는 $f'(t) = -t$ 이므로

로 접선의 방정식은

$$y - \left(-\frac{1}{2}t^2 + 2\right) = -t(x - t)$$

$$\therefore y = -tx + \frac{1}{2}t^2 + 2$$

이 접선의 x 절편은 $\frac{1}{2}t + \frac{2}{t}$ 이고 조명에 의하여 생기는 그림자와 구조물의 밑면의 넓이의 합이 $\frac{25}{4}\pi \text{ m}^2$ 이므로

$$\left(\frac{1}{2}t + \frac{2}{t}\right)^2 \pi = \frac{25}{4}\pi, \quad \frac{1}{2}t + \frac{2}{t} = \frac{5}{2} \quad (\because 0 < t < 2)$$

$$t^2 - 5t + 4 = 0, \quad (t-1)(t-4) = 0$$

$$\therefore t = 1 \quad (\because 0 < t < 2)$$

따라서 접선의 y 절편은

$$\frac{1}{2}t^2 + 2 = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}$$

이므로 구하는 높이는 $\frac{5}{2} \text{ m}$ 이다. 답 ④

0456 전략 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$ 에서의 접선의 방정식은 $y = f'(a)(x - a) + f(a)$ 이다.

풀이 $f'(a) = 2a, f'(\beta) = 2\beta$ 이므로 두 점 $(a, a^2 + \frac{1}{4})$,

$(\beta, \beta^2 + \frac{1}{4})$ 에서의 접선의 방정식은 각각

$$y - \left(a^2 + \frac{1}{4}\right) = 2a(x-a), \text{ 즉 } y = \boxed{2a}x - a^2 + \frac{1}{4} \quad \cdots \textcircled{7}$$

$$y - \left(b^2 + \frac{1}{4}\right) = 2b(x-b), \text{ 즉 } y = \boxed{2b}x - b^2 + \frac{1}{4} \quad \cdots \textcircled{8}$$

두 접선이 서로 수직이므로

$$2a \cdot 2b = -1 \quad \therefore \alpha\beta = \boxed{-\frac{1}{4}}$$

⑦, ⑧에서 두 접선의 교점의 x 좌표는

$$2ax - a^2 + \frac{1}{4} = 2bx - b^2 + \frac{1}{4}$$

$$2(a-b)x = a^2 - b^2, \quad 2(a-b)x = (a+b)(a-b)$$

그런데 $a \neq b$ 이므로 $x = \frac{a+b}{2}$

$x = \frac{a+b}{2}$ 를 ⑦에 대입하여 정리하면

$$y = \alpha\beta + \frac{1}{4} = 0$$

따라서 두 접선의 교점의 좌표는 $\left(\frac{a+b}{2}, 0\right)$ 이므로 교점은 항상 x 축 위에 있다.

$$\therefore \textcircled{7} \text{ } 2a \quad \textcircled{8} \text{ } 2b \quad \textcircled{9} \text{ } -\frac{1}{4} \quad \textcircled{10} \text{ } 2a \quad \textcircled{11} \text{ } 2b \quad \textcircled{12} \text{ } -\frac{1}{4}$$

0457 전략 곡선 $y=f(x)$ 위의 점에서의 접선 $y=g(x)$ 가 이 곡선과 다시 만나는 점의 x 좌표는 방정식 $f(x)=g(x)$ 의 실근임을 이용한다.

풀이 $f(x)=x^4-4x^3$ 이라 하면

$$f'(x)=4x^3-12x^2$$

점 A의 좌표를 (a, a^4-4a^3) 이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(a)=4a^3-12a^2$ 이므로 접선의 방정식은

$$y - (a^4 - 4a^3) = (4a^3 - 12a^2)(x - a)$$

$$\therefore y = (4a^3 - 12a^2)x - 3a^4 + 8a^3$$

이 직선이 곡선 $y=f(x)$ 와 만나는 점의 x 좌표는 방정식

$$x^4 - 4x^3 = (4a^3 - 12a^2)x - 3a^4 + 8a^3 \text{의 실근과 같다.}$$

$$\text{즉 } x^4 - 4x^3 - (4a^3 - 12a^2)x + 3a^4 - 8a^3 = 0 \text{에서}$$

$$(x-a)^2 \{x^2 + (2a-4)x + 3a^2 - 8a\} = 0$$

x 에 대한 이차방정식 $x^2 + (2a-4)x + 3a^2 - 8a = 0$ 의 두 실근을 b, c 라 하면 b, c 는 두 점 B, C의 x 좌표이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$b+c = -2a+4, \quad bc = 3a^2-8a \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

그런데 점 A가 선분 BC의 중점이므로 $\frac{b+c}{2} = a$ 에서

$$2a = -2a+4 \quad \therefore a=1$$

$$a=1 \text{을 } \textcircled{1} \text{에 각각 대입하면 } b+c=2, \quad bc=-5$$

이때 곡선 $y=f(x)$ 위의 두 점 B, C에서의 접선의 기울기는 각각

$$m_1 = f'(b) = 4b^3 - 12b^2, \quad m_2 = f'(c) = 4c^3 - 12c^2$$

이므로

$$\begin{aligned} m_1 + m_2 &= (4b^3 - 12b^2) + (4c^3 - 12c^2) \\ &= 4(b^3 + c^3) - 12(b^2 + c^2) \\ &= 4\{(b+c)^3 - 3bc(b+c)\} - 12\{(b+c)^2 - 2bc\} \\ &= 4\{2^3 - 3 \cdot (-5) \cdot 2\} - 12\{2^2 - 2 \cdot (-5)\} \\ &= -16 \end{aligned}$$

답 -16

0458 전략 $f'(x)$ 는 이차함수이므로 $f'(x)=k(x-p)^2+q$ 꼴로 변형하여 $f'(x)$ 의 최솟값을 구한다.

$$\begin{aligned} \text{풀이} \quad f'(x) &= 3x^2 - 12ax + 12a^2 + \sqrt{3} \\ &= 3(x-2a)^2 + \sqrt{3} \end{aligned}$$

ㄱ. 함수 $f'(x)$ 는 $x=2a$ 일 때 최소이다.

$$\therefore f'(a) > f'(2a)$$

ㄴ. 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \geq \sqrt{3}$ 이므로 접선의 기울기의 최솟값은 $\sqrt{3}$ 이다.

ㄷ. $f'(x)=m$ 에서

$$3x^2 - 12ax + 12a^2 + \sqrt{3} - m = 0$$

위의 x 에 대한 이차방정식의 두 실근을 α, β 라 하면 α, β 는 두 점의 x 좌표이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 4a$$

따라서 두 접점을 잇는 선분의 중점의 x 좌표는

$$\frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{4a}{2} = 2a$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ②

0459 전략 $f(x)=x^3-6x^2+2x+10$ 이라 하면 $f'(x)=m_1$ 을 만족시키는 실수가 a, b 임을 이용한다.

풀이 $f(x)=x^3-6x^2+2x+1$ 이라 하면

$$f'(x)=3x^2-12x+2$$

$f'(x)=m_1$, 즉 $3x^2-12x+2-m_1=0$ 의 두 실근이 a, b 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$a+b=4, \quad ab=\frac{2-m_1}{3} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

선분 AB의 중점의 좌표는 $\left(\frac{a+b}{2}, \frac{f(a)+f(b)}{2}\right)$ 이고

$$\begin{aligned} f(a)+f(b) &= a^3 - 6a^2 + 2a + 1 + b^3 - 6b^2 + 2b + 1 \\ &= (a^3 + b^3) - 6(a^2 + b^2) + 2(a+b) + 2 \\ &= (a+b)^3 - 3ab(a+b) - 6\{(a+b)^2 - 2ab\} \\ &\quad + 2(a+b) + 2 \\ &= 4^3 - 3 \cdot \frac{2-m_1}{3} \cdot 4 - 6\left(4^2 - 2 \cdot \frac{2-m_1}{3}\right) + 2 \cdot 4 + 2 \\ &= -22 \end{aligned}$$

이므로 중점의 좌표는 $(2, -11)$

이때 점 $(2, -11)$ 은 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$$m_2 = f'(2) = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{8 - 24 + 2 + 1}{2} = -10$$

따라서 $m_1+m_2=1$ 에서 $m_1=11$ 이므로 이것을 ①에 대입하면

$$ab = -3$$

$$\therefore a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab = 4^2 - 2 \cdot (-3) = 22 \quad \text{답 ②}$$

0460 전략 두 함수 $y=f(x), y=g(x)$ 의 그래프가 $x=p, x=q$ 인 점에서 만나면 방정식 $f(x)=g(x)$ 의 실근은 $x=p$ 또는 $x=q$ 임을 이용한다.

풀이 조건 ㄱ에서 삼차방정식 $f(x)=3x+2$ 의 두 실근이 $x=2$ (중근), $x=a$ 이고 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 1이므로

$$f(x) - (3x+2) = (x-2)^2(x-a)$$



$$\begin{aligned} \text{즉 } f(x) &= (x-2)^2(x-a) + 3x + 2 \text{ 이므로} \\ f'(x) &= 2(x-2)(x-a) + (x-2)^2 + 3 \\ \text{조건 ④에서 } f'(a) &= 12 \text{ 이므로} \\ (a-2)^2 + 3 &= 12 \\ a^2 - 4a - 5 &= 0, \quad (a+1)(a-5) = 0 \\ \therefore a &= 5 \quad (\because a > 2) \end{aligned}$$

따라서 점 B의 좌표는 (5, 17)이고

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-2)^2(x-5) + 3x + 2 \\ &= x^3 - 9x^2 + 27x - 18 \end{aligned}$$

$$\text{이므로 } f'(x) = 3x^2 - 18x + 27$$

직선 $y = 3x + 2$ 에 평행한 직선의 기울기는 3이므로 $f'(x) = 3$ 에서

$$\begin{aligned} 3x^2 - 18x + 27 &= 3, \quad x^2 - 6x + 8 = 0 \\ (x-2)(x-4) &= 0 \quad \therefore x = 2 \text{ 또는 } x = 4 \end{aligned}$$

즉 점 C의 좌표는 (4, 10)이므로 점 C와 직선 $y = 3x + 2$, 즉

$3x - y + 2 = 0$ 사이의 거리는

$$\frac{|12 - 10 + 2|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = \frac{4}{\sqrt{10}}$$

또 $AB = \sqrt{(5-2)^2 + (17-8)^2} = 3\sqrt{10}$ 이므로 $\triangle ABC$ 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{10} \cdot \frac{4}{\sqrt{10}} = 6 \quad \text{답 ①}$$

0461 전략 $\square BPCQ$ 의 넓이는 $\triangle BPC$ 와 $\triangle CQB$ 의 넓이의 합이므로 두 점 P, Q와 직선 BC 사이의 거리가 각각 최대일 때 최대이다.

풀이 $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 2x$ 라 하면

$$f'(x) = -3x^2 + 6x - 2$$

점 A(1, 0)에서의 접선의 기울기는 $f'(1) = 1$ 이므로 점 A에서의 접선과 수직이고 점 A를 지나는 직선의 방정식은

$$y - 0 = -(x - 1) \quad \therefore y = -x + 1$$

$\square BPCQ$ 의 넓이는 $\triangle BPC$ 와 $\triangle CQB$ 의 넓이가 각각 최대일 때 최대이고, $\triangle BPC$ 와 $\triangle CQB$ 의 넓이는 두 점 P, Q에서의 접선이 직선 $y = -x + 1$ 과 평행할 때 최대이다.

두 점 P, Q의 x좌표를 각각 α , β 라 하면

$$f'(\alpha) = -1, f'(\beta) = -1$$

이므로 α , β 는 이차방정식 $-3x^2 + 6x - 2 = -1$, 즉 $3x^2 - 6x + 1 = 0$ 의 실근이다.

$$\therefore 3\alpha^2 - 6\alpha + 1 = 0, 3\beta^2 - 6\beta + 1 = 0 \quad \dots\dots ①$$

또 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 2, \alpha\beta = \frac{1}{3}$$

$$\text{①에서 } \alpha^2 = 2\alpha - \frac{1}{3}, \alpha^3 = 2\alpha^2 - \frac{1}{3}\alpha \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= -\alpha^3 + 3\alpha^2 - 2\alpha \\ &= -\left(2\alpha^2 - \frac{1}{3}\alpha\right) + 3\alpha^2 - 2\alpha = \alpha^2 - \frac{5}{3}\alpha \\ &= \left(2\alpha - \frac{1}{3}\right) - \frac{5}{3}\alpha = \frac{1}{3}\alpha - \frac{1}{3} \end{aligned}$$

같은 방법으로 하면 $f(\beta) = \frac{1}{3}\beta - \frac{1}{3}$ 이므로

$$P\left(\alpha, \frac{1}{3}\alpha - \frac{1}{3}\right), Q\left(\beta, \frac{1}{3}\beta - \frac{1}{3}\right)$$

$$\begin{aligned} \therefore PQ &= \sqrt{(a-\beta)^2 + \{f(\alpha) - f(\beta)\}^2} \\ &= \sqrt{(a-\beta)^2 + \left\{\frac{1}{3}(a-\beta)\right\}^2} = \sqrt{\frac{10}{9}(a-\beta)^2} \\ &= \sqrt{\frac{10}{9}\{(a+\beta)^2 - 4\alpha\beta\}} = \sqrt{\frac{10}{9}\left(2^2 - 4 \cdot \frac{1}{3}\right)} \\ &= \sqrt{\frac{80}{27}} = \frac{4\sqrt{15}}{9} \quad \text{답 } \frac{4\sqrt{15}}{9} \end{aligned}$$

0462 전략 직선 $y = ax$ 가 곡선 $y = f(x)$ 에 접할 때의 접선의 방정식을 구한다.

$$\text{풀이} \quad f(x) = x^3 - 2x + 2 \text{에서 } f'(x) = 3x^2 - 2$$

곡선 $y = f(x)$ 와 직선 $y = ax$ 가 제 1 사분면에서 접할 때의 접점의 좌표를 $(t, t^3 - 2t + 2)$ 라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$$f'(t) = 3t^2 - 2 \text{ 이므로 접선의 방정식은}$$

$$\begin{aligned} y - (t^3 - 2t + 2) &= (3t^2 - 2)(x - t) \\ \therefore y &= (3t^2 - 2)x - 2t^3 + 2 \quad \dots\dots ① \end{aligned}$$

이 직선이 원점을 지나므로

$$-2t^3 + 2 = 0 \quad \text{— 직선 } y = ax \text{는 항상 원점을 지난다.}$$

$$t^3 = 1 \quad \therefore t = 1$$

$$t = 1 \text{을 ①에 대입하면 } y = x$$

따라서 a 의 값에 따른 곡선 $y = f(x)$ 와 직선 $y = ax$ 의 교점의 개수는 다음과 같다.

$$(i) a > 1 \text{ 일 때, } 3$$

$$(ii) a = 1 \text{ 일 때, } 2$$

$$(iii) a < 1 \text{ 일 때, } 1$$

이상에서 \neg , \wedge , \supset 모두 옳다.

답 ⑤

0463 전략 기울기가 $f'(a)$ 인 직선에 수직인 직선의 기울기는

$$-\frac{1}{f'(a)} \text{ 이다. (단, } f'(a) \neq 0 \text{)}$$

풀이 $f(x) = x^3 + 1$ 이라 하면

$$f'(x) = 3x^2$$

점 A($t, t^3 + 1$)에서의 접선의 기울기는 $f'(t) = 3t^2$ 이므로 접선의 방정식은

$$\begin{aligned} y - (t^3 + 1) &= 3t^2(x - t) \\ \therefore y &= 3t^2x - 2t^3 + 1 \end{aligned}$$

이 직선에 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{3t^2}$ 이므로 점 A를 지나고 점 A에서의 접선에 수직인 직선의 방정식은

$$\begin{aligned} y - (t^3 + 1) &= -\frac{1}{3t^2}(x - t) \\ \therefore y &= -\frac{1}{3t^2}x + \frac{1}{3t} + t^3 + 1 \end{aligned}$$

따라서 B($0, -2t^3 + 1$), C($0, \frac{1}{3t} + t^3 + 1$)이므로

$$\begin{aligned} S(t) &= \frac{1}{2} \cdot |t| \cdot \left| \left(\frac{1}{3t} + t^3 + 1 \right) - (-2t^3 + 1) \right| \\ &= \frac{1}{6} + \frac{3}{2}t^4 \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{t \rightarrow 0} S(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{1}{6} + \frac{3}{2}t^4 \right) = \frac{1}{6}$$

답 ⑤

0464 전략 함수 $f(x)$ 에 대하여 $f'(a)=0$ 이면 곡선 $y=f(x)$ 위의 $x=a$ 인 점에서의 접선은 x 축과 평행하다.

풀이 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+ax^2-(b^2-4)x+2$ 라 하면

$$f'(x)=x^2+2ax-b^2+4$$

곡선 $y=f(x)$ 위의 모든 점에서의 접선이 x 축과 평행하지 않으려면 $f'(x)=0$ 을 만족시키는 실수 x 가 존재하지 않아야 하므로 이차방정식 $x^2+2ax-b^2+4=0$ 이 실근을 갖지 않아야 한다. $\rightarrow ①$

즉 이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=a^2-(-b^2+4)<0$$

$$\therefore a^2+b^2<4 \quad \rightarrow ②$$

따라서 정수 a, b 의 순서쌍 (a, b) 는

$$(-1, -1), (-1, 0), (-1, 1), (0, -1), (0, 0), (0, 1), (1, -1), (1, 0), (1, 1)$$

의 9개이다. $\rightarrow ③$

답 9

채점 기준	비율
① 이차방정식 $f'(x)=0$ 이 실근을 갖지 않아야 함을 알 수 있다.	50 %
② a, b 에 대한 부등식을 세울 수 있다.	30 %
③ 정수 a, b 의 순서쌍 (a, b) 의 개수를 구할 수 있다.	20 %

0465 전략 기울기가 m, n 인 두 직선이 서로 수직이면 $mn=-1$ 이다.

풀이 $f(x)=\frac{1}{3}x^2$ 이라 하면 $f'(x)=\frac{2}{3}x$

접점의 좌표를 $(t, \frac{1}{3}t^2)$ 이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$f'(t)=\frac{2}{3}t$ 이므로 접선의 방정식은

$$y-\frac{1}{3}t^2=\frac{2}{3}t(x-t) \quad \therefore y=\frac{2}{3}tx-\frac{1}{3}t^2 \quad \rightarrow ①$$

점 P의 좌표를 $(a, a-1)$ 이라 하면 점 P가 직선 $y=\frac{2}{3}tx-\frac{1}{3}t^2$ 위의 점이므로

$$a-1=\frac{2}{3}ta-\frac{1}{3}t^2 \quad \therefore t^2-2at+3(a-1)=0 \quad \dots\dots ⑦ \quad \rightarrow ②$$

이 이차방정식의 두 실근을 α, β 라 하면 α, β 는 두 접점의 x 좌표이므로 접선의 기울기는 각각 $\frac{2}{3}\alpha, \frac{2}{3}\beta$ 이다.

이때 두 접선이 서로 수직이므로

$$\frac{2}{3}\alpha \cdot \frac{2}{3}\beta = -1 \quad \therefore \alpha\beta = -\frac{9}{4} \quad \rightarrow ③$$

⑦에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha\beta=3(a-1)$ 이므로

$$-\frac{9}{4}=3(a-1) \quad \therefore a=\frac{1}{4}$$

따라서 점 P의 좌표는 $(\frac{1}{4}, -\frac{3}{4})$ 이다. $\rightarrow ④$

답 $(\frac{1}{4}, -\frac{3}{4})$

채점 기준	비율
① 점 P에서 곡선에 그은 접선의 방정식을 구할 수 있다.	30 %
② t 에 대한 이차방정식을 세울 수 있다.	20 %
③ $\alpha\beta$ 의 값을 구할 수 있다.	30 %
④ 점 P의 좌표를 구할 수 있다.	20 %

0466 전략 두 곡선 $y=f(x), y=g(x)$ 의 접점의 x 좌표를 t 라 하고 $f(t)=g(t)$ 임을 이용하여 t 의 값을 구한다.

풀이 $f(x)=x^2+1, g(x)=-x^2+4x-1$ 이라 하면

$$f'(x)=2x, g'(x)=-2x+4$$

두 곡선의 접점의 x 좌표를 t 라 하면 $f(t)=g(t)$ 에서

$$t^2+1=-t^2+4t-1, \quad t^2-2t+1=0$$

$$(t-1)^2=0 \quad \therefore t=1 \quad \rightarrow ①$$

따라서 두 곡선 $y=f(x)$ 와 $y=g(x)$ 의 접점에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=g'(1)=2$ 이므로 두 직선 m, n 의 기울기는 모두 $-\frac{1}{2}$ 이다.

점 A의 x 좌표를 a 라 하면 $f'(a)=-\frac{1}{2}$ 이므로

$$2a=-\frac{1}{2} \quad \therefore a=-\frac{1}{4}$$

$$\therefore A(-\frac{1}{4}, \frac{17}{16}) \quad \rightarrow ②$$

점 B의 x 좌표를 b 라 하면 $g'(b)=-\frac{1}{2}$ 이므로

$$-2b+4=-\frac{1}{2} \quad \therefore b=\frac{9}{4}$$

$$\therefore B(\frac{9}{4}, \frac{47}{16}) \quad \rightarrow ③$$

따라서 선분 AB의 중점의 좌표는

$$(\frac{-\frac{1}{4}+\frac{9}{4}}{2}, \frac{\frac{17}{16}+\frac{47}{16}}{2}), \text{ 즉 } (1, 2) \quad \rightarrow ④$$

답 (1, 2)

채점 기준	비율
① 두 곡선의 접점의 x 좌표를 구할 수 있다.	20 %
② 점 A의 좌표를 구할 수 있다.	30 %
③ 점 B의 좌표를 구할 수 있다.	30 %
④ 선분 AB의 중점의 좌표를 구할 수 있다.	20 %

0467 전략 먼저 곡선 위의 $x=t$ 인 점에서의 접선의 방정식을 구하여 $g(t)$ 를 구한다.

풀이 $f(x)=x^3+ax^2-4x$ 라 하면

$$f'(x)=3x^2+2ax-4$$

점 (t, t^3+at^2-4t) 에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=3t^2+2at-4$ 이므로 접선의 방정식은

$$y-(t^3+at^2-4t)=(3t^2+2at-4)(x-t)$$

$$\therefore y=(3t^2+2at-4)x-2t^3-at^2$$

$x=0$ 일 때 $y=-2t^3-at^2$ 이므로

$$g(t)=-2t^3-at^2$$



$$\therefore |g(t)| = |-2t^3 - at^2| = t^2|2t + a| \quad \dots ①$$

이때 함수 $|g(t)|$ 는 $t = -1$ 에서 미분가능하지 않으므로

$$-\frac{a}{2} = -1 \quad \therefore a = 2 \quad \dots ②$$

$$\text{즉 } g(x) = -2x^3 - 2x^2 \text{이므로 } g'(x) = -6x^2 - 4x$$

따라서 곡선 $y = g(x)$ 위의 점 $(-1, g(-1))$, 즉 $(-1, 0)$ 에서의 접선의 기울기가 $g'(-1) = -2$ 이므로 접선의 방정식은

$$y - 0 = -2(x + 1) \quad \therefore y = -2x - 2 \quad \dots ③$$

이 직선의 x 절편은 -1 , y 절편은 -2 이므로 구하는 도형의 넓이는

$$\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 = 1 \quad \dots ④$$

답 1

채점 기준	비율
① $ g(t) $ 를 구할 수 있다.	40 %
② a 의 값을 구할 수 있다.	20 %
③ 곡선 $y = g(x)$ 위의 점 $(-1, g(-1))$ 에서의 접선의 방정식을 구할 수 있다.	20 %
④ 접선과 x 축 및 y 축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.	20 %

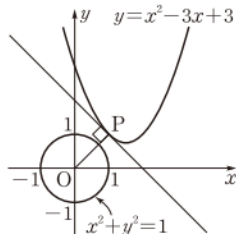
참고 $a = 0$ 이면 $|g(t)| = \begin{cases} 2t^3 & (t \geq 0) \\ -2t^3 & (t < 0) \end{cases}$ 에서 함수 $|g(t)|$ 는 $t = -1$ 에서 미분 가능하므로

$$a \neq 0$$

따라서 함수 $|g(t)|$ 가 미분가능하지 않은 점은 $2t + a = 0$, 즉 $t = -\frac{a}{2}$ 일 때이다.

0468 전략 곡선 위의 점 P와 원점 O가 중심인 원 사이의 거리가 최소가 될 때는 점 P에서의 접선과 직선 OP가 서로 수직이 될 때이다.

풀이 곡선 $y = x^2 - 3x + 3$ 위의 임의의 점을 $P(t, t^2 - 3t + 3)$ 이라 하면 원 $x^2 + y^2 = 1$ 의 중심이 원점 O이므로 곡선 위의 점과 원 위의 점 사이의 거리는 점 P에서의 접선과 직선 OP가 서로 수직일 때 최소이다. ... ①



$$f(x) = x^2 - 3x + 3 \text{이라 하면}$$

$$f'(x) = 2x - 3$$

점 P에서의 접선의 기울기는 $f'(t) = 2t - 3$ 이고, 직선 OP의 기울기는 $\frac{t^2 - 3t + 3}{t}$ 이므로

$$(2t - 3) \cdot \frac{t^2 - 3t + 3}{t} = -1$$

$$2t^3 - 9t^2 + 16t - 9 = 0, \quad (t - 1)(2t^2 - 7t + 9) = 0$$

$$\therefore t = 1 \quad (\because 2t^2 - 7t + 9 > 0) \quad \dots ②$$

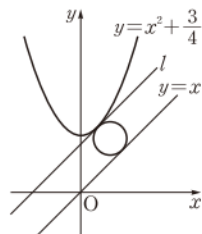
따라서 점 P의 좌표는 $(1, 1)$ 이고 $\overline{OP} = \sqrt{2}$ 이므로 구하는 거리의 최솟값은 $\sqrt{2} - 1$ 이다. ... ③

답 $\sqrt{2} - 1$

채점 기준	비율
① 곡선 위의 점과 원 위의 점 사이의 거리가 최소일 때를 알 수 있다.	40 %
② t 의 값을 구할 수 있다.	40 %
③ 거리의 최솟값을 구할 수 있다.	20 %

0469 전략 직선 $y = x$ 과 곡선 $y = x^2 + \frac{3}{4}$ 에 동시에 접하면서 반지름의 길이가 최소인 원은 곡선 $y = x^2 + \frac{3}{4}$ 의 접선 중 기울기가 1인 접선과 직선 $y = x$ 에 동시에 접하는 원이다.

풀이 직선 $y = x$ 에 평행하고 곡선 $y = x^2 + \frac{3}{4}$ 에 접하는 직선을 l 이라 하면 직선 $y = x$ 과 곡선 $y = x^2 + \frac{3}{4}$ 에 동시에 접하면서 반지름의 길이가 최소인 원은 오른쪽 그림과 같이 직선 l 과 직선 $y = x$ 에 동시에 접하는 원이다. ... ①



$$f(x) = x^2 + \frac{3}{4} \text{이라 하면 } f'(x) = 2x$$

곡선 $y = f(x)$ 과 직선 l 의 접점의 좌표를 $(t, t^2 + \frac{3}{4})$ 이라 하면 직선 l 의 기울기가 1이므로

$$f'(t) = 2t = 1 \quad \therefore t = \frac{1}{2}$$

따라서 접점의 좌표는 $(\frac{1}{2}, 1)$ 이고, 점 $(\frac{1}{2}, 1)$ 과 직선 $y = x$, 즉 $x - y = 0$ 사이의 거리는

$$\frac{|\frac{1}{2} - 1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

이므로 원의 반지름의 길이 r 의 최솟값은

$$r = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{8} \quad \dots ②$$

한편 점 $(\frac{1}{2}, 1)$ 을 지나고 직선 l 에 수직인 직선의 방정식은

$$y - 1 = -(x - \frac{1}{2}) \quad \therefore y = -x + \frac{3}{2}$$

두 직선 $y = -x + \frac{3}{2}$, $y = x$ 의 교점의 x 좌표는 $-x + \frac{3}{2} = x$ 에서 $x = \frac{3}{4}$ 이므로 교점의 좌표는 $(\frac{3}{4}, \frac{3}{4})$ 이다.

따라서 직선 l 과 직선 $y = x$ 에 동시에 접하는 원은 두 점 $(\frac{1}{2}, 1)$, $(\frac{3}{4}, \frac{3}{4})$ 을 지름의 양 끝 점으로 하는 원이므로 이 원의 중심의 좌

$$\text{표는 } \left(\frac{\frac{1}{2} + \frac{3}{4}}{2}, \frac{1 + \frac{3}{4}}{2} \right), \text{ 즉 } \left(\frac{5}{8}, \frac{7}{8} \right)$$

$$\therefore a = \frac{5}{8}, b = \frac{7}{8} \quad \dots ③$$

$$\therefore (a + b)r = \left(\frac{5}{8} + \frac{7}{8} \right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{8} = \frac{3\sqrt{2}}{16} \quad \dots ④$$

답 $\frac{3\sqrt{2}}{16}$

채점 기준	비율
① 반지름의 길이가 최소인 원이 직선 l 과 직선 $y = x$ 에 동시에 접하는 원임을 알 수 있다.	30 %
② r 의 최솟값을 구할 수 있다.	30 %
③ a, b 의 값을 구할 수 있다.	30 %
④ $(a + b)r$ 의 값을 구할 수 있다.	10 %

05 도함수의 활용 (2)

0470 $\text{㉠} < \text{㉡}$ 증가

0471 $0 \leq x_1 < x_2$ 인 임의의 두 실수 x_1, x_2 에 대하여
 $f(x_1) - f(x_2) = -x_1^2 - (-x_2^2) = -(x_1^2 - x_2^2)$
 $= -(x_1 + x_2)(x_1 - x_2) > 0$
 $\therefore f(x_1) > f(x_2)$

따라서 함수 $f(x)$ 는 구간 $[0, \infty)$ 에서 감소한다.

㉠ 감소

0472 $1 \leq x_1 < x_2$ 인 임의의 두 실수 x_1, x_2 에 대하여
 $f(x_1) - f(x_2) = (x_1^2 - 2x_1) - (x_2^2 - 2x_2)$
 $= x_1^2 - x_2^2 - 2(x_1 - x_2)$
 $= (x_1 - x_2)(x_1 + x_2 - 2) < 0$
 $\therefore f(x_1) < f(x_2)$

$x_1 \geq 1, x_2 > 1$ 이므로 $x_1 + x_2 - 2 > 0$

따라서 함수 $f(x)$ 는 구간 $[1, \infty)$ 에서 증가한다.

㉡ 증가

0473 $x_1 < x_2$ 인 임의의 두 실수 x_1, x_2 에 대하여
 $f(x_1) - f(x_2) = -x_1^3 - (-x_2^3) = -(x_1^3 - x_2^3)$
 $= -(x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2)$
 이때 $x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 = \left(x_1 + \frac{x_2}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}x_2^2 > 0$ 이므로
 $f(x_1) - f(x_2) > 0 \therefore f(x_1) > f(x_2)$

따라서 함수 $f(x)$ 는 구간 $(-\infty, \infty)$ 에서 감소한다.

㉠ 감소

0474 $f(x) = x^2 - 4x + 2$ 에서 $f'(x) = 2x - 4$
 $f'(x) = 0$ 에서 $x = 2$

따라서 함수 $f(x)$ 는 구간 $(-\infty, 2]$ 에서 감소하고, 구간 $[2, \infty)$ 에서 증가한다.

㉠ 풀이 참조

x	...	2	...
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	\searrow		\nearrow

0475 $f(x) = x^3 - x^2 + 1$ 에서
 $f'(x) = 3x^2 - 2x = x(3x - 2)$

$f'(x) = 0$ 에서 $x = 0$ 또는 $x = \frac{2}{3}$

x	...	0	...	$\frac{2}{3}$...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	\nearrow		\searrow		\nearrow

따라서 함수 $f(x)$ 는 구간 $(-\infty, 0], [\frac{2}{3}, \infty)$ 에서 증가하고, 구간 $[0, \frac{2}{3}]$ 에서 감소한다.

㉠ 풀이 참조

0476 $f(x) = -x^3 + x^2 - x$ 에서

$$f'(x) = -3x^2 + 2x - 1 = -3\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{2}{3} < 0$$

모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) < 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 구간 $(-\infty, \infty)$ 에서 감소한다.

㉠ 풀이 참조

0477 $f(x) = x^4 - 2x^2 + 5$ 에서

$$f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x+1)(x-1)$$

$f'(x) = 0$ 에서 $x = -1$ 또는 $x = 0$ 또는 $x = 1$

x	...	-1	...	0	...	1	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	\searrow		\nearrow		\searrow		\nearrow

따라서 함수 $f(x)$ 는 구간 $(-\infty, -1], [0, 1]$ 에서 감소하고, 구간 $[-1, 0], [1, \infty)$ 에서 증가한다.

㉠ 풀이 참조

0478 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 의 좌우에서 증가하다가 감소하므로
 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 극대이며 극댓값은 $f(0) = 2$

또 $x=2$ 의 좌우에서 감소하다가 증가하므로 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 극소이며 극솟값은 $f(2) = 8 - 12 + 2 = -2$

㉠ 극댓값: 2, 극솟값: -2

0479 (1) $x=a, x=d$ 의 좌우에서 함수 $f(x)$ 가 증가하다가 감소하므로 $f(x)$ 는 $x=a, x=d$ 에서 극댓값을 갖는다.

(2) $x=b, x=e$ 의 좌우에서 함수 $f(x)$ 가 감소하다가 증가하므로 $f(x)$ 는 $x=b, x=e$ 에서 극솟값을 갖는다.

㉠ (1) a, d (2) b, e

0480 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 극값 8을 가지므로

$$f(1) = 8, f'(1) = 0$$

$$\therefore f(1) + f'(1) = 8$$

㉠ 8

0481 $f(x) = x^2 + ax + 3, g(x) = -2x^2 + bx + 4$ 에서

$$f'(x) = 2x + a, g'(x) = -4x + b$$

두 함수 $f(x), g(x)$ 가 모두 $x=2$ 에서 극값을 가지므로

$$f'(2) = 0, g'(2) = 0$$

$$4 + a = 0, -8 + b = 0$$

$$\therefore a = -4, b = 8$$

㉠ $a = -4, b = 8$

0482 $f(x) = x^3 - 3x$ 에서

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1)$$

$f'(x) = 0$ 에서 $x = -1$ 또는 $x = 1$

따라서 $f(x)$ 의 극댓값은

$$f(-1) = 2, \text{ 극솟값은}$$

$$f(1) = -2 \text{이다.}$$

x	...	-1	...	1	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	\nearrow	2	\searrow	-2	\nearrow

㉠ 극댓값: 2, 극솟값: -2



0483 $f(x) = -2x^3 + 6x + 1$ 에서

$$f'(x) = -6x^2 + 6 = -6(x+1)(x-1)$$

$f'(x) = 0$ 에서 $x = -1$ 또는 $x = 1$

따라서 $f(x)$ 의 극댓값은

$f(1) = 5$, 극솟값은

$f(-1) = -3$ 이다.

x	...	-1	...	1	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	\	-3	/	5	\

극댓값: 5, 극솟값: -3

0484 $f(x) = x^3 + 3x^2 - 24$ 에서

$$f'(x) = 3x^2 + 6x = 3x(x+2)$$

$f'(x) = 0$ 에서 $x = -2$ 또는 $x = 0$

따라서 $f(x)$ 의 극댓값은

$f(-2) = -20$, 극솟값은

$f(0) = -24$ 이다.

x	...	-2	...	0	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	/	-20	\	-24	/

극댓값: -20, 극솟값: -24

0485 $f(x) = -2x^3 + 3x^2 + 12x + 3$ 에서

$$f'(x) = -6x^2 + 6x + 12 = -6(x+1)(x-2)$$

$f'(x) = 0$ 에서 $x = -1$ 또는 $x = 2$

따라서 $f(x)$ 의 극댓값은

$f(2) = 23$, 극솟값은

$f(-1) = -4$ 이다.

x	...	-1	...	2	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	\	-4	/	23	\

극댓값: 23, 극솟값: -4

0486 $f(x) = x^4 - 2x^2$ 에서

$$f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x+1)(x-1)$$

$f'(x) = 0$ 에서 $x = -1$ 또는 $x = 0$ 또는 $x = 1$

x	...	-1	...	0	...	1	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	\	-1	/	0	\	-1	/

따라서 $f(x)$ 의 극댓값은 $f(0) = 0$, 극솟값은 $f(-1) = f(1) = -1$ 이다.

극댓값: 0, 극솟값: -1

0487 $f(x) = -x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 2$ 에서

$$f'(x) = -4x^3 + 12x^2 - 8x = -4x(x-1)(x-2)$$

$f'(x) = 0$ 에서 $x = 0$ 또는 $x = 1$ 또는 $x = 2$

x	...	0	...	1	...	2	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+	0	-
$f(x)$	/	2	\	1	/	2	\

따라서 $f(x)$ 의 극댓값은 $f(0) = f(2) = 2$, 극솟값은 $f(1) = 1$ 이다.

극댓값: 2, 극솟값: 1

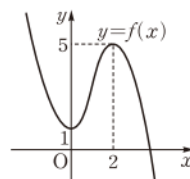
0488 $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 1$ 에서

$$f'(x) = -3x^2 + 6x = -3x(x-2)$$

$f'(x) = 0$ 에서 $x = 0$ 또는 $x = 2$

x	...	0	...	2	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	\	1	/	5	\

따라서 함수 $y = f(x)$ 의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다.



풀이 참조

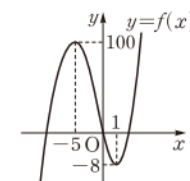
0489 $f(x) = x^3 + 6x^2 - 15x$ 에서

$$f'(x) = 3x^2 + 12x - 15 = 3(x+5)(x-1)$$

$f'(x) = 0$ 에서 $x = -5$ 또는 $x = 1$

x	...	-5	...	1	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	/	100	\	-8	/

따라서 함수 $y = f(x)$ 의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다.



풀이 참조

0490 $f(x) = \frac{1}{3}(x-1)^3(x+1)$ 에서

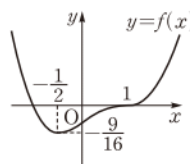
$$f'(x) = (x-1)^2(x+1) + \frac{1}{3}(x-1)^3$$

$$= \frac{2}{3}(x-1)^2(2x+1)$$

$f'(x) = 0$ 에서 $x = -\frac{1}{2}$ 또는 $x = 1$

x	...	$-\frac{1}{2}$...	1	...
$f'(x)$	-	0	+	0	+
$f(x)$	\	$-\frac{9}{16}$	/	0	/

따라서 함수 $y = f(x)$ 의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다.



풀이 참조

0491 $f(x) = x^2 - 2x + 3$ 에서

$$f'(x) = 2x - 2$$

$f'(x) = 0$ 에서 $x = 1$

따라서 함수 $f(x)$ 는

$x = 3$ 일 때 최댓값 6,

$x = 1$ 일 때 최솟값 2를 갖는다.

x	0	...	1	...	3
$f'(x)$	-	0	+		
$f(x)$	3	\	2	/	6

최댓값: 6, 최솟값: 2

0492 $f(x) = -x^3 + 3x^2$ 에서

$$f'(x) = -3x^2 + 6x = -3x(x-2)$$

$f'(x) = 0$ 에서 $x = 0$ ($\because -1 \leq x \leq 1$)

따라서 함수 $f(x)$ 는

$x = -1$ 일 때 최댓값 4,
 $x = 0$ 일 때 최솟값 0을 갖
는다.

x	-1	...	0	...	1
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	4	\	0	/	2

☐ 최댓값: 4, 최솟값: 0

0493 $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 6$ 에서

$$f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 6(x-1)(x-2)$$

$f'(x) = 0$ 에서 $x = 1$ 또는 $x = 2$

따라서 함수 $f(x)$ 는

$x = 3$ 일 때 최댓값 3,
 $x = 2$ 일 때 최솟값 -2를
갖는다.

x	1	...	2	...	3
$f'(x)$	0	-	0	+	
$f(x)$	-1	\	-2	/	3

☐ 최댓값: 3, 최솟값: -2

0494 $f(x) = x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x - 3$ 에서

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 - 4x + 12 = 4(x+1)(x-1)(x-3)$$

$f'(x) = 0$ 에서 $x = -1$ 또는 $x = 1$ 또는 $x = 3$

x	-2	...	-1	...	1	...	3	...	4
$f'(x)$		-	0	+	0	-	0	+	
$f(x)$	13	\	-12	/	4	\	-12	/	13

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = -2$ 또는 $x = 4$ 일 때 최댓값 13, $x = -1$
또는 $x = 3$ 일 때 최솟값 -12를 갖는다.

☐ 최댓값: 13, 최솟값: -12

0495 $f(x) = -3x^4 + 8x^3 - 6x^2 - 1$ 에서

$$f'(x) = -12x^3 + 24x^2 - 12x = -12x(x-1)^2$$

$f'(x) = 0$ 에서 $x = 0$ 또는 $x = 1$

따라서 함수 $f(x)$ 는

$x = 0$ 일 때 최댓값 -1,
 $x = 2$ 일 때 최솟값 -9를
갖는다.

x	0	...	1	...	2
$f'(x)$	0	-	0	-	
$f(x)$	-1	\	-2	\	-9

☐ 최댓값: -1, 최솟값: -9

0496 $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x$ 에서

$$f'(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2 = (x+2)(x+1)(x-1)$$

$f'(x) = 0$ 에서 $x = -2$ 또는 $x = -1$ ($\because -2 \leq x \leq 0$)

따라서 함수 $f(x)$ 는

$x = -1$ 일 때 최댓값 $\frac{13}{12}$,
 $x = 0$ 일 때 최솟값 0을 갖
는다.

x	-2	...	-1	...	0
$f'(x)$	0	+	0	-	
$f(x)$	$\frac{2}{3}$	/	$\frac{13}{12}$	\	0

☐ 최댓값: $\frac{13}{12}$, 최솟값: 0

0497 (1) 잘라 내고 남은 부분을 접어서 만든 상자의 밑면은 가로
의 길이가 $16-2x$, 세로의 길이가 $10-2x$ 인 직사각형이므로

$$16-2x > 0, 10-2x > 0 \quad \therefore x < 5$$

그런데 $x > 0$ 이므로 $0 < x < 5$

(2) 상자의 부피를 $V(x)$ 라 하면

$$V(x) = x(16-2x)(10-2x)$$

$$= 4x^3 - 52x^2 + 160x$$

$$\therefore V'(x) = 12x^2 - 104x + 160 = 4(x-2)(3x-20)$$

$V'(x) = 0$ 에서 $x = 2$ ($\because 0 < x < 5$)

따라서 $V(x)$ 는 $x = 2$

일 때 최대이므로 상
자의 부피가 최대일
때, x 의 값은 2이다.

x	0	...	2	...	5
$V'(x)$		+	0	-	
$V(x)$		/	144	\	

$$(3) V(2) = 2 \cdot 12 \cdot 6 = 144$$

☐ (1) $0 < x < 5$ (2) 2 (3) 144

유형 01 함수의 증가와 감소

본책 86쪽

어떤 구간에서 미분가능한 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 알아보려면
 $f'(x)$ 의 부호를 조사한다.

① $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ 는 이 구간에서 증가한다.

② $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ 는 이 구간에서 감소한다.

0498 $f(x) = -x^3 - 3x^2 + 24x - 2$ 에서

$$f'(x) = -3x^2 - 6x + 24 = -3(x+4)(x-2)$$

이때 $f'(x) \geq 0$ 인 구간에서 함수 $f(x)$ 는 증가하므로

$$-3(x+4)(x-2) \geq 0, \quad (x+4)(x-2) \leq 0$$

$$\therefore -4 \leq x \leq 2$$

따라서 $a = -4, \beta = 2$ 이므로 $a + \beta = -2$

☐ ①

0499 $f(x) = x^3 - 3x + 2$ 에서

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1)$$

이때 $f'(x) \leq 0$ 인 구간에서 함수 $f(x)$ 는 감소하므로

$$3(x+1)(x-1) \leq 0 \quad \therefore -1 \leq x \leq 1$$

따라서 양수 a 의 최댓값은 1이다.

☐ 1

0500 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + ax^2 + bx + 2$ 에서

$$f'(x) = x^2 + 2ax + b$$

주어진 조건에 의하여 이차방정식 $f'(x) = 0$ 의 두 근은 1, 3이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$1+3 = -2a, \quad 1 \cdot 3 = b \quad \therefore a = -2, \quad b = 3$$

$$\therefore a - b = -5$$

☐ -5

0501 $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + ax + 7$ 에서

$$f'(x) = 6x^2 - 12x + a$$

함수 $f(x)$ 가 감소하는 x 의 값의 범위가 $-1 \leq x \leq b$ 이므로 이차방
정식 $f'(x) = 0$ 의 두 근은 -1, b 이다. \rightarrow ①

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$-1 + b = 2, \quad -1 \cdot b = \frac{a}{6} \quad \therefore a = -18, \quad b = 3 \quad \rightarrow$$

$$\therefore a + b = -15 \quad \rightarrow$$

☐ -15



채점 기준	비율
① 이차방정식 $f'(x)=0$ 의 두 근을 구할 수 있다.	40 %
② a, b 의 값을 구할 수 있다.	40 %
③ $a+b$ 의 값을 구할 수 있다.	20 %

유형 02 실수 전체의 집합에서 삼차함수가 증가 또는 감소하기 위한 조건

본책 86쪽

삼차함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서

- ① 증가하면 \Rightarrow 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \geq 0$
 ② 감소하면 \Rightarrow 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \leq 0$

0502 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + ax^2 + (3a+4)x - 1$ 에서

$$f'(x) = x^2 + 2ax + 3a + 4$$

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 증가하려면 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \geq 0$ 이어야 하므로 이차방정식 $f'(x)=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = a^2 - 3a - 4 \leq 0, \quad (a+1)(a-4) \leq 0$$

$$\therefore -1 \leq a \leq 4$$

따라서 정수 a 는 $-1, 0, 1, 2, 3, 4$ 의 6개이다. **답 ④**

이차부등식이 항상 성립할 조건

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ 의 판별식을 D 라 할 때

① 모든 실수 x 에 대하여 이차부등식 $ax^2+bx+c \geq 0$ 이 성립하려면

$$a > 0, D \leq 0$$

② 모든 실수 x 에 대하여 이차부등식 $ax^2+bx+c \leq 0$ 이 성립하려면

$$a < 0, D \leq 0$$

0503 $f(x) = -x^3 + 4x^2 + ax - 1$ 에서

$$f'(x) = -3x^2 + 8x + a$$

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 감소하려면 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \leq 0$ 이어야 하므로 이차방정식 $f'(x)=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = 16 + 3a \leq 0 \quad \therefore a \leq -\frac{16}{3}$$

따라서 정수 a 의 최댓값은 -6 이다. **답 ①**

0504 $f(x) = ax^3 + x^2 - x$ 에서 $f'(x) = 3ax^2 + 2x - 1$

함수 $f(x)$ 가 구간 $(-\infty, \infty)$ 에서 감소하려면 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \leq 0$ 이어야 하므로

$$a < 0 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

이차방정식 $f'(x)=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = 1 + 3a \leq 0 \quad \therefore a \leq -\frac{1}{3} \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}$ 에서 $a \leq -\frac{1}{3}$ **답 ①**

0505 $x_1 < x_2$ 인 임의의 두 실수 x_1, x_2 에 대하여 $f(x_1) > f(x_2)$ 가 성립하려면 함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 감소해야 한다.

$$f(x) = -x^3 + 2ax^2 - ax \text{에서} \quad f'(x) = -3x^2 + 4ax - a$$

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 감소하려면 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \leq 0$ 이어야 하므로 이차방정식 $f'(x)=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = 4a^2 - 3a \leq 0, \quad a(4a-3) \leq 0 \quad \therefore 0 \leq a \leq \frac{3}{4}$$

따라서 정수 a 는 0의 1개이다. **답 ②**

0506 함수 $f(x)$ 의 역함수가 존재하려면 $f(x)$ 가 일대일대응이어야 하므로 실수 전체의 집합에서 $f(x)$ 는 증가하거나 감소해야 한다. 그런데 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 양수이므로 $f(x)$ 는 증가해야 한다. **답 ①**

$$f(x) = x^3 + x^2 + kx - 4 \text{에서} \quad f'(x) = 3x^2 + 2x + k$$

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 증가하려면 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \geq 0$ 이어야 하므로 이차방정식 $f'(x)=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = 1 - 3k \leq 0 \quad \therefore k \geq \frac{1}{3} \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

따라서 정수 k 의 최솟값은 1이다. **답 ③**

채점 기준	비율
① 함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 증가해야 함을 알 수 있다.	40 %
② k 의 값의 범위를 구할 수 있다.	50 %
③ 정수 k 의 최솟값을 구할 수 있다.	10 %

0507 $x_1 \neq x_2$ 이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$ 를 만족시키는 함수는 일대일함수이고 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 양수이므로 함수 $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 증가해야 한다.

$$f(x) = x^3 - 3(a+1)x^2 - 4ax + 2 \text{에서}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6(a+1)x - 4a$$

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 증가하려면 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \geq 0$ 이어야 하므로 이차방정식 $f'(x)=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = 9(a+1)^2 + 12a \leq 0, \quad 3a^2 + 10a + 3 \leq 0$$

$$(a+3)(3a+1) \leq 0 \quad \therefore -3 \leq a \leq -\frac{1}{3}$$

따라서 정수 a 는 $-3, -2, -1$ 이므로 구하는 합은 -6 이다. **답 ②**

유형 03 주어진 구간에서 삼차함수가 증가 또는 감소하기 위한 조건

본책 87쪽

삼차함수 $f(x)$ 가 증가 또는 감소하기 위한 조건은 다음과 같은 순서로 구한다.

(i) $f'(x)$ 를 구한다.

(ii) $y=f'(x)$ 의 그래프를 그려 주어진 구간에서 $f'(x) \geq 0$ 또는

$f'(x) \leq 0$ 일 조건을 찾는다.

$\Rightarrow f(x)$ 가 $\left\{ \begin{array}{l} \text{증가하려면} \Rightarrow f'(x) \geq 0 \\ \text{감소하려면} \Rightarrow f'(x) \leq 0 \end{array} \right.$

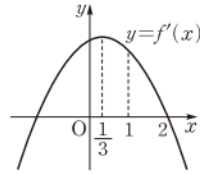
0508 $f(x) = -x^3 + x^2 + ax - 4$ 에서

$$f'(x) = -3x^2 + 2x + a = -3\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + a + \frac{1}{3}$$

함수 $f(x)$ 가 $1 < x < 2$ 에서 증가하려면
 $1 < x < 2$ 에서 $f'(x) \geq 0$ 이어야 하므로 오른쪽 그림에서

$$f'(2) = -8 + a \geq 0 \quad \therefore a \geq 8$$

따라서 실수 a 의 최솟값은 8이다.



답 ④

0509 $f(x) = x^3 + 6x^2 + (2a+1)x$ 에서

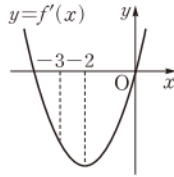
$$f'(x) = 3x^2 + 12x + 2a + 1 = 3(x+2)^2 + 2a - 11$$

함수 $f(x)$ 가 구간 $(-3, 0)$ 에서 감소하려면
 $-3 < x < 0$ 에서 $f'(x) \leq 0$ 이어야 하므로 오른쪽 그림에서

$$f'(0) = 2a + 1 \leq 0$$

$$\therefore a \leq -\frac{1}{2}$$

따라서 정수 a 의 최댓값은 -1이다.



답 ③

0510 $f(x) = x^3 + ax^2 - 9x + 1$ 에서

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax - 9$$

함수 $f(x)$ 가 구간 $(-1, 2)$ 에서 감소하려면 $-1 < x < 2$ 에서
 $f'(x) \leq 0$ 이어야 한다.

$$f'(-1) = 3 - 2a - 9 \leq 0 \text{에서} \quad a \geq -3$$

$$f'(2) = 12 + 4a - 9 \leq 0 \text{에서} \quad a \leq -\frac{3}{4}$$

따라서 a 의 값의 범위는 $-3 \leq a \leq -\frac{3}{4}$ 이므로

$$M = -\frac{3}{4}, m = -3 \quad \therefore Mm = \frac{9}{4}$$

답 ④

0511 $f(x) = x^3 + ax^2 + 1$ 에서

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax$$

함수 $f(x)$ 가 구간 $(1, 2)$ 에서 감소하고, 구간 $(3, \infty)$ 에서 증가하
 려면 $1 < x < 2$ 에서 $f'(x) \leq 0$, $x > 3$ 에서 $f'(x) \geq 0$ 이어야 한다.

$$f'(1) = 3 + 2a \leq 0 \text{에서} \quad a \leq -\frac{3}{2}$$

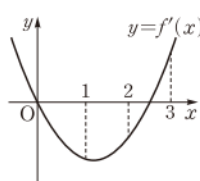
$$f'(2) = 12 + 4a \leq 0 \text{에서} \quad a \leq -3$$

$$f'(3) = 27 + 6a \geq 0 \text{에서} \quad a \geq -\frac{9}{2}$$

따라서 a 의 값의 범위는

$$-\frac{9}{2} \leq a \leq -3$$

이므로 정수 a 는 -4, -3의 2개이다.



답 2

답 2

답 2

채점 기준

비율

① x 의 값의 범위에 따른 $f'(x)$ 의 부호를 알 수 있다.

30 %

② a 의 값의 범위를 구할 수 있다.

50 %

③ 정수 a 의 개수를 구할 수 있다.

20 %

다른 풀이 \bullet $f'(x) = 3x^2 + 2ax = x(3x + 2a)$ 이므로 앞의 그래프에서

$$2 \leq -\frac{2}{3}a \leq 3 \quad \therefore -\frac{9}{2} \leq a \leq -3$$

유형 04 함수의 그래프와 증가·감소

본책 88쪽

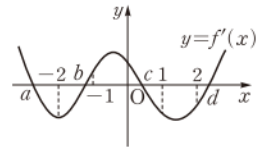
$y = f'(x)$ 의 그래프에서

① x 축의 위쪽 부분 $\Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow$ 이 구간에서 $f(x)$ 가 증가한다.

② x 축의 아래쪽 부분 $\Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow$ 이 구간에서 $f(x)$ 가 감소한다.

0512 오른쪽 그림과 같이 함수

$y = f'(x)$ 의 그래프가 x 축과 만나는
 점의 x 좌표를 작은 순서대로 a, b, c, d
 라 하면



① 구간 $(-\infty, a)$ 에서 $f'(x) > 0$ 이므

로 $f(x)$ 는 증가한다.

② 구간 $(-2, b)$ 에서 $f'(x) < 0$ 이므로 $f(x)$ 는 감소한다.

③ 구간 $(-1, 0)$ 에서 $f'(x) > 0$ 이므로 $f(x)$ 는 증가한다.

④ 구간 $(c, 1)$ 에서 $f'(x) < 0$ 이므로 $f(x)$ 는 감소한다.

⑤ 구간 $(1, 2)$ 에서 $f'(x) < 0$ 이므로 $f(x)$ 는 감소한다.

답 ⑤

0513 $y = f'(x)$ 의 그래프가 x 축과 만나는 점의 x 좌표가 -1, 2
 이므로 $f'(x) = 0$ 에서 $x = -1$ 또는 $x = 2$

x	\cdots	-1	\cdots	2	\cdots
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	\nearrow		\searrow		\nearrow

따라서 함수 $f(x)$ 는 구간 $(-\infty, -1]$, $[2, \infty)$ 에서 증가하고, 구
 간 $[-1, 2]$ 에서 감소한다.

답 풀이 참조

0514 $y = \{f(x)\}^2$ 에서 $y' = 2f(x)f'(x)$

① 구간 (a, b) 에서 $f(x) > 0$, $f'(x) > 0$ 이므로
 $2f(x)f'(x) > 0$

따라서 구간 (a, b) 에서 함수 $\{f(x)\}^2$ 은 증가한다.

② 구간 (c, d) 에서 $f(x) < 0$, $f'(x) < 0$ 이므로
 $2f(x)f'(x) > 0$

따라서 구간 (c, d) 에서 함수 $\{f(x)\}^2$ 은 증가한다.

③ 구간 (d, e) 에서 $f(x) < 0$, $f'(x) > 0$ 이므로
 $2f(x)f'(x) < 0$

따라서 구간 (d, e) 에서 함수 $\{f(x)\}^2$ 은 감소한다.

④ 구간 (e, f) 에서 $f(x) > 0$, $f'(x) > 0$ 이므로
 $2f(x)f'(x) > 0$

따라서 구간 (e, f) 에서 함수 $\{f(x)\}^2$ 은 증가한다.

⑤ 구간 (g, ∞) 에서 $f(x) < 0$, $f'(x) < 0$ 이므로
 $2f(x)f'(x) > 0$

따라서 구간 (g, ∞) 에서 함수 $\{f(x)\}^2$ 은 증가한다.

답 ③



유형 05 함수의 극대·극소

본책 88쪽

미분가능한 함수 $f(x)$ 에 대하여

(i) $f'(x)$ 를 구한다.

(ii) $f'(x)=0$ 을 만족시키는 x 의 값 a 를 구한다.

(iii) $x=a$ 의 좌우에서 $f'(x)$ 의 부호를 조사하여 증감표를 만든다.

$\Rightarrow f'(x)$ 의 부호가 $\left[\begin{array}{l} \text{양} \rightarrow \text{음} \Rightarrow f(x) \text{는 } x=a \text{에서 극대} \\ \text{음} \rightarrow \text{양} \Rightarrow f(x) \text{는 } x=a \text{에서 극소} \end{array} \right.$

0515 $f(x)=x^3-6x^2+9x+1$ 에서

$$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$$

$f'(x)=0$ 에서 $x=1$ 또는 $x=3$

따라서 함수 $f(x)$ 는

$x=1$ 일 때 극댓값 5,

$x=3$ 일 때 극솟값 1을 가

지므로 극댓값과 극솟값

의 차는

$$5-1=4$$

답 4

x	...	1	...	3	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	5	↘	1	↗

0516 $f(x)=-x^4+6x^2+8x-10$ 에서

$$f'(x)=-4x^3+12x+8=-4(x+1)^2(x-2)$$

$f'(x)=0$ 에서 $x=-1$ 또는 $x=2$

따라서 함수 $f(x)$ 는

$x=2$ 일 때 극댓값 14를

갖고, $x=-1$ 의 좌우에

서 $f'(x)$ 의 부호가 바뀌

지 않으므로 $x=-1$ 에서는 극값을 갖지 않는다.

따라서 $a=1, b=0$ 이므로 $a+2b=1$

답 ①

x	...	-1	...	2	...
$f'(x)$	+	0	+	0	-
$f(x)$	↗		↗	14	↘

0517 $f(x)=3x^4-4x^3-12x^2+3$ 에서

$$f'(x)=12x^3-12x^2-24x=12x(x+1)(x-2)$$

$f'(x)=0$ 에서 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$

x	...	-1	...	0	...	2	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	↘	-2	↗	3	↘	-29	↗

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=-1$ 일 때 극솟값 -2, $x=0$ 일 때 극댓값

3, $x=2$ 일 때 극솟값 -29를 가지므로 구하는 극값의 합은

$$-2+3+(-29)=-28$$

답 ②

0518 $f(x)=-\frac{4}{81}x^4+\frac{8}{9}x^2$ 에서

$$f'(x)=-\frac{16}{81}x^3+\frac{16}{9}x=-\frac{16}{81}x(x+3)(x-3)$$

$f'(x)=0$ 에서 $x=-3$ 또는 $x=0$ 또는 $x=3$

x	...	-3	...	0	...	3	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+	0	-
$f(x)$	↗	4	↘	0	↗	4	↘

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=-3$ 또는 $x=3$ 일 때

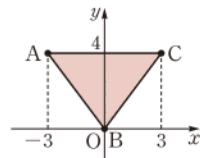
극댓값 4, $x=0$ 일 때 극솟값 0을 갖는다.

$A(-3, 4), B(0, 0), C(3, 4)$ 라 하면

$\triangle ABC$ 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \cdot \{3-(-3)\} \cdot 4=12$$

답 12



0519 $f(x+y)=f(x)+f(y)-xy(x+y)$ 의 양변에 $x=0, y=0$ 을 대입하면

$$f(0)=f(0)+f(0) \quad \therefore f(0)=0$$

이때 $f'(0)=4$ 이므로

$$f'(0)=\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h}=4$$

$$\therefore f'(x)=\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x)+f(h)-xh(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(h)}{h} - x^2 - xh \right\}$$

$$=4-x^2$$

$f'(x)=0$ 에서 $x=-2$ 또는 $x=2$

따라서 함수 $f(x)$ 는

$x=-2$ 에서 극소, $x=2$

에서 극대이므로

$$a=-2, b=2$$

$$\therefore a^2+b^2=(-2)^2+2^2=8$$

답 8

x	...	-2	...	2	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

유형 06 함수의 극대·극소를 이용한 미정계수의 결정

본책 89쪽

미분가능한 함수 $f(x)$ 가

① $x=a$ 에서 극값을 갖는다. $\Rightarrow f'(a)=0$

② $x=a$ 에서 극값 β 를 갖는다. $\Rightarrow f(a)=\beta, f'(a)=0$

0520 $f(x)=-x^3+ax+b$ 에서

$$f'(x)=-3x^2+a$$

함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 극댓값 6을 가지므로

$$f(1)=6, f'(1)=0$$

$$-1+a+b=6, -3+a=0$$

$$\therefore a=3, b=4$$

즉 $f(x)=-x^3+3x+4$ 이므로

$$f'(x)=-3x^2+3=-3(x+1)(x-1)$$

$f'(x)=0$ 에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

따라서 함수 $f(x)$ 는

$x=-1$ 에서 극솟값 2를

갖는다.

답 ④

x	...	-1	...	1	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	↘	2	↗	6	↘

0521 $f(x)=x^3-6x^2+ax+b$ 에서

$$f'(x)=3x^2-12x+a$$

함수 $f(x)$ 가 $x=3$ 에서 극솟값 2를 가지므로

$$f(3)=2, f'(3)=0$$

$$27-54+3a+b=2, 27-36+a=0$$

$$\therefore a=9, b=2$$

$$\therefore a+b=11$$

답 11

0522 $f(x)=-x^3-\frac{3}{2}ax^2+6a^2x$ 에서

$$f'(x)=-3x^2-3ax+6a^2=-3(x+2a)(x-a)$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=-2a \text{ 또는 } x=a$$

→ ①

x	...	$-2a$...	a	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	\	$-10a^3$	/	$\frac{7}{2}a^3$	\

$a>0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=-2a$ 에서 극솟값 $-10a^3$ 을 갖고,
 $x=a$ 에서 극댓값 $\frac{7}{2}a^3$ 을 갖는다.

→ ②

이때 극댓값과 극솟값의 차가 $\frac{1}{2}$ 이므로

$$\frac{7}{2}a^3 - (-10a^3) = \frac{1}{2}, \quad a^3 = \frac{1}{27} \quad \therefore a = \frac{1}{3}$$

→ ③

답 $\frac{1}{3}$

채점 기준

비율

① $f'(x)$ 를 구할 수 있다.	20%
② 극댓값과 극솟값을 a 에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	50%
③ a 의 값을 구할 수 있다.	30%

0523 $f(x)=-x^3+ax^2+bx$ 에서

$$f'(x)=-3x^2+2ax+b$$

함수 $f(x)$ 가 $x=-1$ 에서 극값을 가지므로

$$f'(-1)=0 \quad \therefore -3-2a+b=0 \quad \dots\dots ㉠$$

또 $x=2$ 인 점에서의 접선의 기울기가 -15 이므로

$$f'(2)=-15 \quad \therefore -12+4a+b=-15 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a=-1, b=1$$

$$\therefore a+b=0$$

답 ②

0524 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c 는 상수)라 하면

$$f'(x)=3x^2+2ax+b$$

이때 조건 ㉠에 의하여 $a=0$

또 조건 ㉡에 의하여 $f(2)=0, f'(2)=0$ 이므로

$$8+2b+c=0, 12+b=0$$

$$\therefore b=-12, c=16$$

즉 $f(x)=x^3-12x+16$ 이므로

$$f'(x)=3x^2-12=3(x+2)(x-2)$$

$f'(x)=0$ 에서 $x=-2$ 또는 $x=2$

따라서 함수 $f(x)$ 는

$x=-2$ 에서 극댓값 32를
 갖는다.

답 32

x	...	-2	...	2	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	/	32	\	0	/

0525 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ 에서

$$f'(x)=3x^2+2ax+b$$

함수 $f(x)$ 가 $x=3$ 에서 극값을 가지므로

$$f'(3)=0 \quad \therefore 27+6a+b=0 \quad \dots\dots ㉠$$

한편 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = -12$ 에서 $x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값

이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} f(x)=0 \text{이므로 } f(1)=0$$

$$\therefore 1+a+b+c=0 \quad \dots\dots ㉡$$

$$\text{또 } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = f'(1) \text{이므로}$$

$$f'(1)=-12 \quad \therefore 3+2a+b=-12 \quad \dots\dots ㉢$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a=-3, b=-9$$

이것을 ㉢에 대입하면 $c=11$

따라서 $f(x)=x^3-3x^2-9x+11$ 이므로

$$f(-1)=-1-3+9+11=16$$

답 ②

유형 07 함수의 극대·극소의 활용

본책 90쪽

함수의 도함수와 증감표를 이용하여 극댓값 또는 극솟값을 구하고, 주어진 조건과 이를 이용하여 문제를 해결한다.

0526 $f(x)=x^3-3x+1$ 에서

$$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$$

$f'(x)=0$ 에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

따라서 함수 $f(x)$ 는

$x=-1$ 일 때 극댓값 3,

$x=1$ 일 때 극솟값 -1 을

가지므로

$$A(-1, 3), B(1, -1)$$

따라서 선분 AB를 1:2로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{1 \cdot 1 + 2 \cdot (-1)}{1+2}, \frac{1 \cdot (-1) + 2 \cdot 3}{1+2} \right), \text{ 즉 } \left(-\frac{1}{3}, \frac{5}{3} \right)$$

답 ⑤

선분의 내분점

좌표평면 위의 두 점 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ 를 잇는 선분 AB를 $m:n$ ($m>0, n>0$)으로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{mx_2 + nx_1}{m+n}, \frac{my_2 + ny_1}{m+n} \right)$$

0527 함수 $f(x)$ 가 $x=a$ 에서 극값 b 를 가지므로

$$f(a)=b, f'(a)=0$$

$g(x)=x^2f(x)$ 에서

$$g'(x)=2xf(x)+x^2f'(x)$$

$$\therefore g'(a)=2af(a)+a^2f'(a)=2ab$$

답 ③



0528 $f(x)=x^3+(a+1)x^2-2x$ 에서

$f'(x)=3x^2+2(a+1)x-2$

함수 $f(x)$ 가 $x=a$ 에서 극대이고 $x=\beta$ 에서 극소라 하면 a, β 는 이차방정식 $3x^2+2(a+1)x-2=0$ 의 두 근이다.

이때 극대가 되는 점과 극소가 되는 점이 원점에 대하여 대칭이므로

$a=-\beta$, 즉 $a+\beta=0$

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$a+\beta=-\frac{2(a+1)}{3}=0 \quad \therefore a=-1$

답 ②

0529 $f(x)=-\frac{2}{3}x^3+ax^2-a$ 에서

$f'(x)=-2x^2+2ax=-2x(x-a)$

$f'(x)=0$ 에서 $x=0$ 또는 $x=a$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=0, x=a$ 에서 극댓값 또는 극솟값을 갖는다.

이때 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 x 축에 접하므로

$f(0)=0$ 또는 $f(a)=0$

그런데 $f(0)=-a \neq 0$ 이므로 $f(a)=0$

$\frac{1}{3}a^3-a=0, \quad a(a+\sqrt{3})(a-\sqrt{3})=0$

$\therefore a=-\sqrt{3}$ 또는 $a=\sqrt{3} (\because a \neq 0)$

답 $-\sqrt{3}, \sqrt{3}$

0530 함수 $f(x)$ 는 $x=-1$ 에서 극댓값 5를 가지므로

$f(-1)=5, f'(-1)=0$

이때 $g(x)=(3x+1)f(x)$ 에서

$g'(x)=3f(x)+(3x+1)f'(x)$

$g(-1)=-2f(-1)=-10$ 이므로 곡선 $y=g(x)$ 위의 점

$(-1, -10)$ 에서의 접선의 기울기는

$g'(-1)=3f(-1)-2f'(-1)=15$

따라서 접선의 방정식은

$y-(-10)=15(x+1) \quad \therefore y=15x+5$

이 직선의 x 절편이 $-\frac{1}{3}$, y 절편이 5이므로 구하는 넓이는

$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 5 = \frac{5}{6}$

답 ④

0531 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2-8x+\frac{1}{3}$ 에서

$f'(x)=x^2+2x-8=(x+4)(x-2)$

$f'(x)=0$ 에서 $x=-4$ 또는 $x=2$

x	...	-4	...	2	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	/	27	\	-9	/

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 극솟값 -9를 가지므로

$a=2, b=-9$

→ ①

한편 점 $(-1, f(-1))$, 즉 점 $(-1, 9)$ 에서의 접선 l 의 기울기는

$f'(-1)=3 \cdot (-3)=-9$

이므로 접선 l 의 방정식은

$y-9=-9(x+1) \quad \therefore 9x+y=0$

→ ②

따라서 점 $(2, -9)$ 에서 직선 $9x+y=0$ 까지의 거리 d 는

$d=\frac{|9 \cdot 2+1 \cdot (-9)|}{\sqrt{9^2+1^2}}=\frac{9}{\sqrt{82}}$

$\therefore 82d^2=82 \cdot \frac{81}{82}=81$

→ ③

답 81

채점 기준	비율
① a, b 의 값을 구할 수 있다.	50 %
② 접선 l 의 방정식을 구할 수 있다.	30 %
③ $82d^2$ 의 값을 구할 수 있다.	20 %

유형 08

함수의 극대·극소를 이용한
삼차함수의 계수의 부호 결정

본책 91쪽

삼차함수 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 에 대하여

① $x \rightarrow \infty$ 일 때 $f(x) \rightarrow \infty$ 이면 $\Rightarrow a > 0$

$x \rightarrow \infty$ 일 때 $f(x) \rightarrow -\infty$ 이면 $\Rightarrow a < 0$

② $y=f(x)$ 의 그래프가 y 축과 양의 부분에서 만나면 $\Rightarrow d > 0$

$y=f(x)$ 의 그래프가 y 축과 음의 부분에서 만나면 $\Rightarrow d < 0$

③ 함수 $f(x)$ 가 $x=a, x=\beta$ 에서 극값을 가지면

\Rightarrow 방정식 $f'(x)=0$ 의 두 실근이 a, β 이다.

0532 함수 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 의 그래프에서 $x \rightarrow \infty$ 일 때 $f(x) \rightarrow \infty$ 이므로 $a > 0$

또 그래프가 y 축과 음의 부분에서 만나므로 $d < 0$

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$ 에서 방정식 $f'(x)=0$ 의 두 실근은 a, β 이고, a, β 는 서로 다른 두 양수이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$a+\beta=-\frac{2b}{3a} > 0, \quad a\beta=\frac{c}{3a} > 0$

$a > 0$ 이므로 $b < 0, c > 0$

$\therefore ab < 0, ac > 0, ad < 0, bc < 0, bd > 0$

답 ⑤

0533 함수 $f(x)=ax^3+bx^2+cx-2$ 의 그래프에서 $x \rightarrow \infty$ 일 때 $f(x) \rightarrow -\infty$ 이므로 $a < 0$

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$ 에서 방정식 $f'(x)=0$ 의 두 실근은 a, β 이고, $a < 0, \beta > 0, |\beta| > |a|$ 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$a+\beta=-\frac{2b}{3a} > 0, \quad a\beta=\frac{c}{3a} < 0$

$a < 0$ 이므로 $b > 0, c > 0$

$\therefore ab < 0, abc < 0, a-c < 0$

또 $bc > 0$ 이므로 $bc-a > 0$

답 ⑤

0534 $y=f(x)$ 의 그래프가 y 축과 양의 부분에서 만나므로 $c > 0$

$f'(x)=-3x^2+2ax+b$ 이고 $f(x)$ 가 $x=a, x=\beta$ 에서 극값을 갖는다고 하면 방정식 $f'(x)=0$ 의 두 실근은 a, β 이고 a, β 는 서로 다른 두 음수이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$a+\beta=\frac{2a}{3} < 0, \quad a\beta=-\frac{b}{3} > 0$

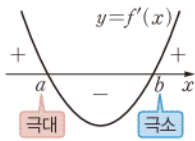
$$\therefore a < 0, b < 0$$

$$\therefore \frac{|a|}{a} + \frac{|b|}{b} + \frac{|c|}{c} = \frac{-a}{a} + \frac{-b}{b} + \frac{c}{c} = -1 - 1 + 1 = -1$$

답 -1

유형 09 도함수의 그래프를 이용한 함수의 극대·극소 본책 91쪽

함수 $f(x)$ 의 도함수 $y=f'(x)$ 의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, x 축과 만나는 점의 좌우에서 $f'(x)$ 의 부호가



- ① 양 \rightarrow 음 $\Rightarrow f(x)$ 는 $x=a$ 에서 극대
② 음 \rightarrow 양 $\Rightarrow f(x)$ 는 $x=b$ 에서 극소

0535 $y=f'(x)$ 의 그래프가 x 축과 만나는 점의 x 좌표가 $-1, 2$ 이므로 $f'(x)=0$ 에서 $x=-1$ 또는 $x=2$

x	\cdots	-1	\cdots	2	\cdots
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	\nearrow	극대	\searrow	극소	\nearrow

$$f(x)=2x^3+ax^2+bx+c \text{에서} \quad f'(x)=6x^2+2ax+b$$

$$f'(-1)=0, f'(2)=0 \text{이므로}$$

$$6-2a+b=0, 24+4a+b=0$$

$$\text{위의 두 식을 연립하여 풀면} \quad a=-3, b=-12$$

즉 $f(x)=2x^3-3x^2-12x+c$ 이고, 함수 $f(x)$ 의 극댓값이 10이므로

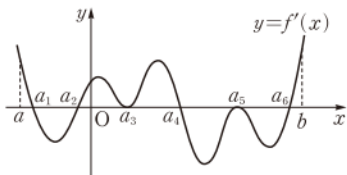
$$f(-1)=-2-3+12+c=10 \quad \therefore c=3$$

따라서 $f(x)=2x^3-3x^2-12x+3$ 이므로 구하는 극솟값은

$$f(2)=16-12-24+3=-17$$

답 -17

0536 다음 그림과 같이 함수 $y=f'(x)$ 의 그래프가 x 축과 만나는 점의 x 좌표를 작은 순서대로 $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ 이라 하자.



(i) $x=a_1, x=a_4$ 의 좌우에서 $f'(x)$ 의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 함수 $f(x)$ 는 $x=a_1, x=a_4$ 에서 극댓값을 갖는다.

$$\therefore m=2 \quad \cdots \textcircled{1}$$

(ii) $x=a_2, x=a_6$ 의 좌우에서 $f'(x)$ 의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 함수 $f(x)$ 는 $x=a_2, x=a_6$ 에서 극솟값을 갖는다.

$$\therefore n=2 \quad \cdots \textcircled{2}$$

(i), (ii)에서 $m-n=0 \quad \cdots \textcircled{3}$

답 0

채점 기준	비율
① m 의 값을 구할 수 있다.	40%
② n 의 값을 구할 수 있다.	40%
③ $m-n$ 의 값을 구할 수 있다.	20%

참고 $x=a_3, x=a_5$ 의 좌우에서는 $f'(x)$ 의 부호가 바뀌지 않으므로 극값을 갖지 않는다.

0537 $h'(x)=f'(x)-g'(x)$ 이므로 $h'(x)=0$ 에서 $x=b$ 또는 $x=d$ 또는 $x=e$

x	\cdots	b	\cdots	d	\cdots	e	\cdots
$h'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$h(x)$	\nearrow	극대	\searrow	극소	\nearrow	극대	\searrow

따라서 함수 $h(x)$ 는 $x=d$ 에서 극소이다.

답 ④

0538 $\nearrow, \searrow, x=0$ 의 좌우에서 $f'(x)$ 의 부호가 음에서 양으로 바뀌고, $x=4$ 의 좌우에서 $f'(x)$ 의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 극솟값을 갖고, $x=4$ 에서 극댓값을 갖는다. 따라서 극솟값은 $f(0)=1$, 극댓값은 $f(4)$ 이다.

$\therefore 0 < x < 4$ 에서 $f'(x) > 0$ 이므로 $f(x)$ 는 구간 $[0, 4]$ 에서 증가한다.

$$\therefore f(0) < f(2) < f(4)$$

이상에서 옳은 것은 \neg, \sqsupset 이다.

답 ⑤

0539 $y=f'(x)$ 의 그래프가 x 축과 만나는 점의 x 좌표가 $0, 2$ 이므로 $f'(x)=0$ 에서 $x=0$ 또는 $x=2$

x	\cdots	0	\cdots	2	\cdots
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	\searrow	극소	\nearrow	극대	\searrow

$$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d \text{에서}$$

$$f'(x)=3ax^2+2bx+c$$

$$f'(0)=0, f'(2)=0 \text{이므로}$$

$$c=0, 12a+4b+c=0$$

$\cdots \textcircled{1} \quad \cdots \textcircled{1}$

$f(x)$ 의 극솟값이 -2 , 극댓값이 2 이므로

$$f(0)=-2, f(2)=2$$

$$\therefore d=-2, 8a+4b=4$$

$\cdots \textcircled{2} \quad \cdots \textcircled{2}$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면 $a=-1, b=3$

$\cdots \textcircled{3}$

따라서 $f(x)=-x^3+3x^2-2$ 이므로

$$f(-1)=1+3-2=2$$

$\cdots \textcircled{4}$

답 2

채점 기준	비율
① $f'(0)=0, f'(2)=0$ 임을 이용할 수 있다.	30%
② $f(0)=-2, f(2)=2$ 임을 이용할 수 있다.	30%
③ a, b 의 값을 구할 수 있다.	20%
④ $f(-1)$ 의 값을 구할 수 있다.	20%

유형 10 도함수의 그래프의 해석 (1) 본책 92쪽

함수 $f(x)$ 의 도함수 $y=f'(x)$ 의 그래프에서

① x 축의 위쪽 부분, 즉 $f'(x) > 0$ 인 구간에서 $f(x)$ 는 증가한다.

② x 축의 아래쪽 부분, 즉 $f'(x) < 0$ 인 구간에서 $f(x)$ 는 감소한다.

③ $f'(a)=0$ 이고 $x=a$ 의 좌우에서 $f'(x)$ 의 부호가 바뀌면 $f(x)$ 는 $x=a$ 에서 극값을 갖는다.



0540 $y=f'(x)$ 의 그래프가 x 축과 만나는 점의 x 좌표가 $-1, 2, 4$ 이므로 $f'(x)=0$ 에서 $x=-1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=4$

x	...	-1	...	2	...	4	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	\	극소	/	극대	\	극소	/

- ㄱ. 구간 $(-2, -1)$ 에서 $f'(x)<0$ 이므로 $f(x)$ 는 감소한다.
 ㄴ. 구간 $(1, 2)$ 에서 $f'(x)>0$ 이므로 $f(x)$ 는 증가한다.
 ㄷ. 구간 $(4, 5)$ 에서 $f'(x)>0$ 이므로 $f(x)$ 는 증가한다.
 ㄹ. $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 극대이다.
 ㅁ. $f'(3) \neq 0$ 이므로 $f(x)$ 는 $x=3$ 에서 극값을 갖지 않는다.
 이상에서 옳은 것은 ㄷ, ㄹ이다.

답 ③

0541 $y=f'(x)$ 의 그래프가 x 축과 만나는 점의 x 좌표가 $-2, 2, 4$ 이므로 $f'(x)=0$ 에서 $x=-2$ 또는 $x=2$ 또는 $x=4$

x	...	-2	...	2	...	4	...
$f'(x)$	-	0	+	0	+	0	-
$f(x)$	\	극소	/		/	극대	\

- ㄱ. $f(x)$ 는 $x=4$ 에서 극댓값을 갖는다.
 ㄴ. $f'(2)=0$ 이므로 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 미분가능하다.
 ㄷ. 구간 $(0, 2)$ 에서 $f'(x)>0$ 이므로 $f(x)$ 는 증가한다.
 ㄹ. $f(x)$ 는 $x=-2$ 에서 극솟값을 갖고 $f(-2)=0$ 이므로 $y=f(x)$ 의 그래프는 $x=-2$ 에서 x 축에 접한다.
 이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다.

답 ④

0542 $y=f'(x)$ 의 그래프가 x 축과 만나는 점의 x 좌표가 $0, 7, 9$ 이므로 $f'(x)=0$ 에서 $x=0$ 또는 $x=7$ 또는 $x=9$

x	...	0	...	7	...	9	...
$f'(x)$	+	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	/		/	극대	\	극소	/

- ① $-1 < x < 8$ 에서 $f(x)$ 는 $x=7$ 에서 극값을 가지므로 극값은 1개이다.
 ② $f'(8) \neq 0$ 이므로 $f(x)$ 는 $x=8$ 에서 극값을 갖지 않는다.
 ③ $2 < x < 4$ 에서 $f'(x)=k$ ($k>0$)이므로 $f(x)$ 는 일차함수이다.
 ④ $f'(0)=0$ 이므로 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 미분가능하다.
 ⑤ $0 < x < 7$ 일 때, $f'(x)>0$ 이므로 $f(x)$ 는 증가한다.

답 ⑤

유형 11 도함수의 그래프의 해석 (2)

본책 93쪽

주어진 도함수 $y=f'(x)$ 의 그래프를 이용하여 함수 $f(x)$ 의 증감표를 만든 후, 함수 $f(x)$ 가 증가 또는 감소하는 구간, 극값을 갖는 x 의 값 등을 찾아 $y=f(x)$ 의 그래프의 개형을 유추한다.

0543 $y=f'(x)$ 의 그래프가 x 축과 만나는 점의 x 좌표가 $-1, 3$ 이므로 $f'(x)=0$ 에서 $x=-1$ 또는 $x=3$

x	...	-1	...	3	...
$f'(x)$	-	0	-	0	+
$f(x)$	\		\	극소	/

즉 함수 $f(x)$ 는 $x=3$ 에서 극소이고, $x=-1$ 의 좌우에서 $f'(x)$ 의 부호가 바뀌지 않으므로 $f(x)$ 는 $x=-1$ 에서 극값을 갖지 않는다. 따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 개형이 될 수 있는 것은 ②이다.

답 ②

0544 $y=f'(x)$ 의 그래프가 x 축과 만나는 점의 x 좌표가 $-1, 1, 3$ 이므로 $f'(x)=0$ 에서 $x=-1$ 또는 $x=1$ 또는 $x=3$

x	...	-1	...	1	...	3	...
$f'(x)$	-	0	+	0	+	0	-
$f(x)$	\	극소	/		/	극대	\

즉 함수 $f(x)$ 는 $x=-1$ 에서 극소, $x=3$ 에서 극대이다. 또 $x=1$ 의 좌우에서 $f'(x)$ 의 부호가 바뀌지 않으므로 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 극값을 갖지 않는다. 따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 개형이 될 수 있는 것은 ④이다.

답 ④

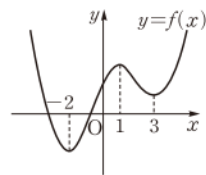
0545 $y=f'(x)$ 의 그래프가 x 축과 만나는 점의 x 좌표가 $-2, 1, 3$ 이므로 $f'(x)=0$ 에서 $x=-2$ 또는 $x=1$ 또는 $x=3$

x	...	-2	...	1	...	3	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	\	극소	/	극대	\	극소	/

이때

$$f(-2) < 0 < f(3) < f(1)$$

이므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다.



- ㄱ. $f(x)$ 는 구간 $(1, 3)$ 에서 감소하고 $f(1)>0, f(3)>0$ 이므로 $f(2)>0$ 이다.
 ㄴ. $f(x)$ 는 $x=-2$ 에서 극소이다.
 ㄷ. $y=f(x)$ 의 그래프는 x 축과 서로 다른 두 점에서 만난다.
 이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ②

유형 12~13 삼차함수가 극값을 갖거나 갖지 않을 조건 본책 94쪽

삼차함수 $f(x)$ 에 대하여

- ① $f(x)$ 가 극댓값, 극솟값을 모두 갖는다.
 ⇒ 이차방정식 $f'(x)=0$ 이 서로 다른 두 실근을 갖는다.
 ② $f(x)$ 가 극값을 갖지 않는다.
 ⇒ 이차방정식 $f'(x)=0$ 이 중근 또는 허근을 갖는다.

0546 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}ax^2 + ax$ 에서

$f'(x) = x^2 - ax + a$

삼차함수 $f(x)$ 가 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 이차방정식 $f'(x) = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

이차방정식 $f'(x) = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$D = a^2 - 4a > 0, \quad a(a-4) > 0$

$\therefore a < 0$ 또는 $a > 4$

따라서 자연수 a 의 최솟값은 5이다.

답 5

0547 $f(x) = x^3 - ax^2 - ax + 2$ 에서

$f'(x) = 3x^2 - 2ax - a$

삼차함수 $f(x)$ 가 극값을 가지려면 이차방정식 $f'(x) = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

→ ①

이차방정식 $f'(x) = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$\frac{D}{4} = a^2 + 3a > 0, \quad a(a+3) > 0$

$\therefore a < -3$ 또는 $a > 0$

→ ②

따라서 $a = -3, \beta = 0$ 이므로

$a - \beta = -3$

→ ③

답 -3

채점 기준	비율
① 방정식 $f'(x) = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 가져야 함을 알 수 있다.	40 %
② a 의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
③ $a - \beta$ 의 값을 구할 수 있다.	20 %

참고 삼차함수 $f(x)$ 가 극값을 갖는다.

\iff 삼차함수 $f(x)$ 가 극댓값과 극솟값을 모두 갖는다.

0548 $f(x) = ax^3 + 3x^2 + ax + 5$ 에서

$f'(x) = 3ax^2 + 6x + a$

삼차함수 $f(x)$ 가 극값을 가지려면 이차방정식 $f'(x) = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

이차방정식 $f'(x) = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$\frac{D}{4} = 9 - 3a^2 > 0, \quad a^2 < 3$

$\therefore -\sqrt{3} < a < 0$ 또는 $0 < a < \sqrt{3} \quad (\because a \neq 0)$

따라서 정수 a 는 -1, 1의 2개이다.

답 ②

0549 $f(x) = -2x^3 + ax^2 + ax$ 에서

$f'(x) = -6x^2 + 2ax + a$

함수 $f(x)$ 가 극값을 갖지 않으려면 이차방정식 $f'(x) = 0$ 이 중근 또는 허근을 가져야 한다.

이차방정식 $f'(x) = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$\frac{D}{4} = a^2 + 6a \leq 0, \quad a(a+6) \leq 0$

$\therefore -6 \leq a \leq 0$

답 -6 ≤ a ≤ 0

0550 $f(x) = x^3 + x^2 + 2kx + 1$ 에서

$f'(x) = 3x^2 + 2x + 2k$

함수 $f(x)$ 가 극값을 갖지 않으려면 이차방정식 $f'(x) = 0$ 이 중근 또는 허근을 가져야 한다.

이차방정식 $f'(x) = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$\frac{D}{4} = 1 - 6k \leq 0 \quad \therefore k \geq \frac{1}{6}$

따라서 실수 k 의 최솟값은 $\frac{1}{6}$ 이다.

답 $\frac{1}{6}$

0551 $f(x) = \frac{4}{3}x^3 + (a+3)x^2 - ax + 1$ 에서

$f'(x) = 4x^2 + 2(a+3)x - a$

함수 $f(x)$ 가 극값을 갖지 않으려면 이차방정식 $f'(x) = 0$ 이 중근 또는 허근을 가져야 한다.

이차방정식 $f'(x) = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$\frac{D}{4} = (a+3)^2 + 4a \leq 0, \quad a^2 + 10a + 9 \leq 0$

$(a+9)(a+1) \leq 0 \quad \therefore -9 \leq a \leq -1$

따라서 $a = -9, \beta = -1$ 이므로

$a^2 + \beta^2 = (-9)^2 + (-1)^2 = 82$

답 ⑤

유형 14 삼차함수가 주어진 구간에서 극값을 가질 조건 본책 94쪽

삼차함수 $f(x)$ 가 구간 (a, b) 에서 극댓값과 극솟값을 모두 갖는다.

→ 이차방정식 $f'(x) = 0$ 이 $a < x < b$ 에서 서로 다른 두 실근을 가지므로 다음 세 가지를 조사한다.

- ① 이차방정식 $f'(x) = 0$ 의 판별식 D 의 부호
- ② $f'(a), f'(b)$ 의 값의 부호
- ③ $y = f'(x)$ 의 그래프의 축의 위치

0552 $f(x) = x^3 + 3x^2 + ax$ 에서

$f'(x) = 3x^2 + 6x + a$

함수 $f(x)$ 가 구간 $(-2, 0)$ 에서 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 이차방정식 $f'(x) = 0$ 이 $-2 < x < 0$ 에서 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

(i) 이차방정식 $f'(x) = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$\frac{D}{4} = 9 - 3a > 0 \quad \therefore a < 3$

(ii) $f'(-2) = a > 0$

$f'(0) = a > 0$

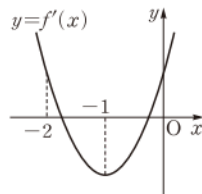
(iii) 이차함수 $y = f'(x)$ 의 그래프의 축의 방정식은

$x = -1$

이상에서 a 의 값의 범위는 $0 < a < 3$

따라서 정수 a 는 1, 2이므로 구하는 합은 3이다.

답 3



0553 $f(x) = x^3 + ax^2 - ax$ 에서

$f'(x) = 3x^2 + 2ax - a$

함수 $f(x)$ 가 $x > -1$ 에서 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 이차방정식 $f'(x) = 0$ 이 $x > -1$ 에서 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.



(i) 이차방정식 $f'(x)=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=a^2+3a>0, \quad a(a+3)>0$$

$$\therefore a<-3 \text{ 또는 } a>0$$

(ii) $f'(-1)=3-3a>0$ 에서 $a<1$

(iii) 이차함수 $y=f'(x)$ 의 그래프의 축의 방정식은 $x=-\frac{a}{3}$ 이므로

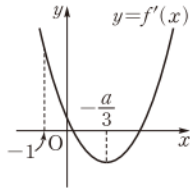
$$-\frac{a}{3}>-1 \quad \therefore a<3$$

이상에서 실수 a 의 값의 범위는

$$a<-3 \text{ 또는 } 0<a<1$$

따라서 a 의 값이 될 수 없는 것은 ③이다.

답 ③



0554 $f(x)=x^3+(a+1)x^2+ax+3$ 에서

$$f'(x)=3x^2+2(a+1)x+a$$

이차방정식 $f'(x)=0$ 의 두 실근을 α, β ($\alpha<\beta$)라 하면

$$-2<a<-1, \beta>-1$$

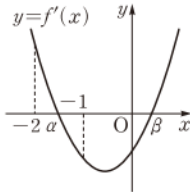
이어야 하므로 오른쪽 그림에서

$$f'(-2)=8-3a>0 \quad \therefore a<\frac{8}{3}$$

$$f'(-1)=1-a<0 \quad \therefore a>1$$

$$\therefore 1<a<\frac{8}{3}$$

답 ③



유형 15~16

사차함수가 극댓값 또는 극솟값을 갖거나 갖지 않을 조건

본책 95쪽

사차함수 $f(x)$ 에 대하여

(1) 최고차항의 계수가 양수일 때 \Rightarrow 항상 극솟값을 갖는다.

① $f(x)$ 가 극댓값을 갖는다.

\Rightarrow 삼차방정식 $f'(x)=0$ 이 서로 다른 세 실근을 갖는다.

② $f(x)$ 가 극댓값을 갖지 않는다.

\Rightarrow 삼차방정식 $f'(x)=0$ 이 한 실근과 두 허근을 갖거나 한 실근과 중근 또는 삼중근을 갖는다.

(2) 최고차항의 계수가 음수일 때 \Rightarrow 항상 극댓값을 갖는다.

① $f(x)$ 가 극솟값을 갖는다.

\Rightarrow 삼차방정식 $f'(x)=0$ 이 서로 다른 세 실근을 갖는다.

② $f(x)$ 가 극솟값을 갖지 않는다.

\Rightarrow 삼차방정식 $f'(x)=0$ 이 한 실근과 두 허근을 갖거나 한 실근과 중근 또는 삼중근을 갖는다.

0555 $f(x)=-x^4+4x^3+2ax^2$ 에서

$$f'(x)=-4x^3+12x^2+4ax=-4x(x^2-3x-a)$$

사차함수 $f(x)$ 가 극솟값을 가지려면 삼차방정식 $f'(x)=0$ 이 서로 다른 세 실근을 가져야 한다. 그런데 방정식 $f'(x)=0$ 의 한 실근이 $x=0$ 이므로 이차방정식 $x^2-3x-a=0$ 이 0이 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

이차방정식 $x^2-3x-a=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D=9+4a>0 \quad \therefore a>-\frac{9}{4}$$

이때 $x=0$ 이 방정식 $x^2-3x-a=0$ 의 근이 아니어야 하므로

$$a \neq 0$$

$$\therefore -\frac{9}{4}<a<0 \text{ 또는 } a>0$$

따라서 a 의 값이 될 수 있는 것은 ⑤이다.

답 ⑤

0556 $f(x)=x^4+2x^3+ax^2$ 에서

$$f'(x)=4x^3+6x^2+2ax=2x(2x^2+3x+a)$$

사차함수 $f(x)$ 가 극댓값을 가지려면 삼차방정식 $f'(x)=0$ 이 서로 다른 세 실근을 가져야 한다. 그런데 방정식 $f'(x)=0$ 의 한 실근이 $x=0$ 이므로 이차방정식 $2x^2+3x+a=0$ 이 0이 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

이차방정식 $2x^2+3x+a=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D=9-8a>0 \quad \therefore a<\frac{9}{8}$$

이때 $x=0$ 이 방정식 $2x^2+3x+a=0$ 의 근이 아니어야 하므로

$$a \neq 0$$

$$\therefore a<0 \text{ 또는 } 0<a<\frac{9}{8}$$

따라서 $a=0, \beta=0, \gamma=\frac{9}{8}$ 이므로

$$a+\beta+\gamma=\frac{9}{8}$$

→ ②

→ ③

답 $\frac{9}{8}$

채점 기준	비율
① 사차함수 $f(x)$ 가 극댓값을 가질 조건을 구할 수 있다.	40 %
② a 의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
③ $a+\beta+\gamma$ 의 값을 구할 수 있다.	20 %

0557 $f(x)=\frac{1}{2}x^4+(a-1)x^2-2ax$ 에서

$$f'(x)=2x^3+2(a-1)x-2a$$

$$=2(x-1)(x^2+x+a)$$

사차함수 $f(x)$ 가 극댓값을 갖지 않으려면 삼차방정식 $f'(x)=0$ 이 한 실근과 두 허근을 갖거나 한 실근과 중근 또는 삼중근을 가져야 한다.

(i) $f'(x)=0$ 이 한 실근과 두 허근을 갖는 경우

이차방정식 $x^2+x+a=0$ 이 허근을 가져야 하므로 판별식을 D 라 하면

$$D=1-4a<0 \quad \therefore a>\frac{1}{4}$$

(ii) $f'(x)=0$ 이 한 실근과 중근을 갖는 경우

이차방정식 $x^2+x+a=0$ 이 $x=1$ 을 근으로 갖거나 1이 아닌 실수를 중근으로 가져야 한다.

① 이차방정식 $x^2+x+a=0$ 이 $x=1$ 을 근으로 가질 때,

$$2+a=0 \quad \therefore a=-2$$

② 이차방정식 $x^2+x+a=0$ 이 1이 아닌 실수를 중근으로 가질 때, 판별식을 D 라 하면

$$D=1-4a=0 \quad \therefore a=\frac{1}{4}$$

(i), (ii)에서 실수 a 의 값의 범위는

$$a = -2 \text{ 또는 } a \geq \frac{1}{4}$$

따라서 a 의 최솟값은 -2 이다.

답 ①

참고 이차방정식 $x^2+x+a=0$ 이 $x=1$ 을 중근으로 가질 수 없으므로 삼차방정식 $f'(x)=0$ 은 삼중근을 가질 수 없다.

0558 $f(x) = -x^4 + \frac{4}{3}x^3 - 2(a-2)x^2 - 4ax$ 에서

$$\begin{aligned} f'(x) &= -4x^3 + 4x^2 - 4(a-2)x - 4a \\ &= -4(x+1)(x^2-2x+a) \end{aligned}$$

사차함수 $f(x)$ 가 극솟값을 갖지 않으려면 삼차방정식 $f'(x)=0$ 이 한 실근과 두 허근을 갖거나 한 실근과 중근 또는 삼중근을 가져야 한다.

(i) $f'(x)=0$ 이 한 실근과 두 허근을 갖는 경우

이차방정식 $x^2-2x+a=0$ 이 허근을 가져야 하므로 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = 1 - a < 0 \quad \therefore a > 1$$

(ii) $f'(x)=0$ 이 한 실근과 중근을 갖는 경우

이차방정식 $x^2-2x+a=0$ 이 $x=-1$ 을 근으로 갖거나 -1 이 아닌 실수를 중근으로 가져야 한다.

① 이차방정식 $x^2-2x+a=0$ 이 $x=-1$ 을 근으로 가질 때,
 $3+a=0 \quad \therefore a=-3$

② 이차방정식 $x^2-2x+a=0$ 이 -1 이 아닌 실수를 중근으로 가질 때, 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = 1 - a = 0 \quad \therefore a = 1$$

(i), (ii)에서 실수 a 의 값의 범위는

$$a = -3 \text{ 또는 } a \geq 1$$

답 $a = -3$ 또는 $a \geq 1$

0559 $f(x) = x^4 + 2ax^3 + 2x^2 + 1$ 에서

$$f'(x) = 4x^3 + 6ax^2 + 4x = 2x(2x^2 + 3ax + 2)$$

사차함수 $f(x)$ 가 극값을 하나만 가지려면 삼차방정식 $f'(x)=0$ 이 한 실근과 두 허근을 갖거나 한 실근과 중근 또는 삼중근을 가져야 한다.

(i) $f'(x)=0$ 이 한 실근과 두 허근을 갖는 경우

이차방정식 $2x^2+3ax+2=0$ 이 허근을 가져야 하므로 판별식을 D 라 하면

$$\begin{aligned} D &= 9a^2 - 16 < 0, \quad (3a+4)(3a-4) < 0 \\ \therefore -\frac{4}{3} &< a < \frac{4}{3} \end{aligned}$$

(ii) $f'(x)=0$ 이 한 실근과 중근을 갖는 경우

이차방정식 $2x^2+3ax+2=0$ 이 $x=0$ 을 근으로 가질 수 없으므로 0 이 아닌 실수를 중근으로 가져야 한다.

즉 판별식을 D 라 하면

$$D = 9a^2 - 16 = 0 \quad \therefore a = -\frac{4}{3} \text{ 또는 } a = \frac{4}{3}$$

(i), (ii)에서 실수 a 의 값의 범위는 $-\frac{4}{3} \leq a \leq \frac{4}{3}$

따라서 $M = \frac{4}{3}, m = -\frac{4}{3}$ 이므로 $Mm = -\frac{16}{9}$

답 $-\frac{16}{9}$

유형 17 함수의 최대·최소

본책 96쪽

구간 $[a, b]$ 에서 연속인 함수 $f(x)$ 에 대하여

(i) 구간 (a, b) 에서의 $f(x)$ 의 극값을 구한다.

(ii) $f(a), f(b)$ 의 값을 구한다.

(iii) (i), (ii)에서 구한 극값, $f(a), f(b)$ 의 값 중 가장 큰 값이 최댓값이고, 가장 작은 값이 최솟값이다.

0560 $f(x) = 3x^4 - 16x^3 + 18x^2 - 2$ 에서

$$f'(x) = 12x^3 - 48x^2 + 36x = 12x(x-1)(x-3)$$

$f'(x)=0$ 에서 $x=0$ 또는 $x=1$ 또는 $x=3$

x	-1	...	0	...	1	...	3	...	4
$f'(x)$		-	0	+	0	-	0	+	
$f(x)$	35	\	-2	/	3	\	-29	/	30

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=-1$ 일 때 최댓값 35, $x=3$ 일 때 최솟값 -29 를 가지므로 $M=35, m=-29$

$$\therefore M+m=6$$

답 ④

0561 $f'(x)=0$ 에서 $x=0$ ($\because -1 \leq x \leq 3$)

따라서 함수 $f(x)$ 는

$x=0$ 에서 최대이다.

답 0

x	-1	...	0	...	3
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$		/	극대	\	

0562 $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$ 에서

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x+1)(x-3)$$

$f'(x)=0$ 에서 $x=-1$ 또는 $x=3$

x	-2	...	-1	...	3	...	4
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	3	/	10	\	-22	/	-15

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=-1$ 일 때 최댓값 10, $x=3$ 일 때 최솟값 -22 를 가지므로 $M=10, m=-22$

$$\therefore Mm = -220$$

답 ①

0563 $g(x) = x^3 + 3x^2 - 4$ 라 하면

$$g'(x) = 3x^2 + 6x = 3x(x+2)$$

$g'(x)=0$ 에서 $x=0$ ($\because -1 \leq x \leq a$)

x	-1	...	0	...
$g'(x)$		-	0	+
$g(x)$	-2	\	-4	/

$a=0$ 일 때, 구간 $[-1, 0]$ 에서 함수 $g(x)$ 의

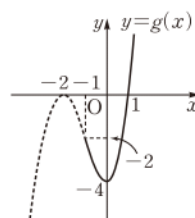
최댓값은 $g(-1)=-2$ 이므로

$$f(0) = -2$$

$a=1$ 일 때, 구간 $[-1, 1]$ 에서 함수 $g(x)$ 의

최댓값은 $g(1)=0$ 이므로

$$f(1) = 0$$





$a=2$ 일 때, 구간 $[-1, 2]$ 에서 함수 $g(x)$ 의 최댓값은 $g(2)=16$ 이므로 $f(2)=16$
 $\therefore f(0)+f(1)+f(2)=14$ 답 14

0564 $x^2-6x+8=t$ 로 놓으면
 $t=x^2-6x+8=(x-3)^2-1$
 $2 \leq x \leq 5$ 에서 t 의 값의 범위는 $-1 \leq t \leq 3$
 $g(t)=t^3-12t+1$ 이라 하면
 $g'(t)=3t^2-12=3(t+2)(t-2)$
 $g'(t)=0$ 에서 $t=2$ ($\because -1 \leq t \leq 3$)
 따라서 함수 $g(t)$ 는
 $t=-1$ 일 때 최댓값 12,
 $t=2$ 일 때 최솟값 -15
 를 가지므로 최댓값과 최
 소값의 합은 -3이다. 답 ②

0565 $g(x)=x^2-4x+3=(x-2)^2-1$ 이므로 $g(x)=t$ 로 놓으면
 $t \geq -1$ 이고 → ①
 $(f \circ g)(x)=f(g(x))=f(t)=t^3-3t+4$ → ②
 $\therefore f'(t)=3t^2-3=3(t+1)(t-1)$
 $f'(t)=0$ 에서 $t=-1$ 또는 $t=1$
 따라서 함수 $f(t)$ 는 $t=1$ 일 때
 최솟값 2를 갖는다. → ③
답 2

t	-1	...	2	...	3
$g'(t)$		-	0	+	
$g(t)$	12	\	-15	/	-8

t	-1	...	1	...
$f'(t)$	0	-	0	+
$f(t)$	6	\	2	/

채점 기준	비율
① $g(x)=t$ 로 놓고 t 의 값의 범위를 구할 수 있다.	20%
② $(f \circ g)(x)$ 를 t 에 대한 함수로 나타낼 수 있다.	20%
③ 최솟값을 구할 수 있다.	60%

유형 18 함수의 최대·최소를 이용한 미정계수의 결정 본책 96쪽

닫힌구간 $[a, b]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최댓값 또는 최솟값이 주어졌을 때
 $\Rightarrow f(a), f(b)$ 의 값, 열린구간 (a, b) 에서의 $f(x)$ 의 극값을 비교한다.

0566 $f(x)=-x^3+27x+k$ 에서
 $f'(x)=-3x^2+27=-3(x+3)(x-3)$
 $f'(x)=0$ 에서 $x=3$ ($\because 0 \leq x \leq 4$)

x	0	...	3	...	4
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	k	/	$k+54$	\	$k+44$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=3$ 일 때 최댓값 $k+54$, $x=0$ 일 때 최솟값 k 를 갖는다.
 이때 최댓값과 최솟값의 합이 50이므로
 $(k+54)+k=50 \quad \therefore k=-2$ 답 -2

0567 $f(x)=x^3+ax^2+b$ 에서
 $f'(x)=3x^2+2ax$
 $f'(1)=9$ 에서 $3+2a=9 \quad \therefore a=3$
 즉 $f'(x)=3x^2+6x=3x(x+2)$ 이므로 $f'(x)=0$ 에서
 $x=0$ ($\because 0 \leq x \leq 2$)
 따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 일 때 최
 대값 $b+20$ 을 가지므로
 $b+20=24 \quad \therefore b=4$
 $\therefore ab=12$ 답 ④

x	0	...	2
$f'(x)$	0	+	
$f(x)$	b	/	$b+20$

0568 $f(x)=2x^3-6x^2+k$ 에서
 $f'(x)=6x^2-12x=6x(x-2)$
 $f'(x)=0$ 에서 $x=0$ 또는 $x=2$

x	-2	...	0	...	2	...	3
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	$k-40$	/	k	\	$k-8$	/	k

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 또는 $x=3$ 일 때 최댓값 k , $x=-2$ 일 때
 최솟값 $k-40$ 을 갖는다. → ①
 이때 함수 $f(x)$ 의 최솟값이 -8이므로
 $k-40=-8 \quad \therefore k=32$ → ②
 따라서 함수 $f(x)$ 의 최댓값은 32이다. → ③
답 32

채점 기준	비율
① $f(x)$ 의 최댓값과 최솟값을 k 에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	60%
② k 의 값을 구할 수 있다.	20%
③ 최댓값을 구할 수 있다.	20%

0569 $f(x)=ax^3-3ax^2+b$ 에서
 $f'(x)=3ax^2-6ax=3ax(x-2)$
 $f'(x)=0$ 에서 $x=2$ ($\because 1 \leq x \leq 3$)

x	1	...	2	...	3
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	$-2a+b$	\	$-4a+b$	/	b

이때 a, b 가 양수이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=3$ 일 때 최댓값 b , $x=2$ 일
 때 최솟값 $-4a+b$ 를 갖는다.
 따라서 $b=10, -4a+b=2$ 이므로
 $a=2, b=10$
 $\therefore a+b=12$ 답 ④

0570 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ 에서
 $f'(x)=3x^2+2ax+b$
 조건 ㉞에서 함수 $f(x)$ 가 $x=-2, x=0$ 에서 극값을 가지므로
 $f'(-2)=0, f'(0)=0$
 $12-4a+b=0, b=0 \quad \therefore a=3, b=0$
 $\therefore f(x)=x^3+3x^2+c$

x	-3	...	-2	...	0	...	2
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	c	/	$c+4$	\	c	/	$c+20$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 일 때 최댓값 $c+20$, $x=-3$ 또는 $x=0$ 일 때 최솟값 c 를 갖는다.

이때 조건 ④에서 함수 $f(x)$ 의 최댓값이 19이므로

$$c+20=19 \quad \therefore c=-1$$

따라서 함수 $f(x)$ 의 최솟값은 -1 이다.

답 ③

유형 19~21 최대·최소의 활용

본책 97, 98쪽

다음을 이용하여 도형의 길이, 넓이, 부피를 한 문자에 대한 함수로 나타낸 후, 최댓값 또는 최솟값을 구한다.

- ① 두 점 사이의 거리, 평면도형의 넓이 구하는 공식
- ② 입체도형의 부피 구하는 공식
- ③ 피타고라스 정리

0571 점 P의 좌표를 (t, t^2) 이라 하면 점 P와 점 $(3, 0)$ 사이의 거리는

$$\sqrt{(t-3)^2+t^4}=\sqrt{t^4+t^2-6t+9}$$

$f(t)=t^4+t^2-6t+9$ 라 하면

$$f'(t)=4t^3+2t-6=2(t-1)(2t^2+2t+3)$$

$f'(t)=0$ 에서 $\sqrt{2t^2+2t+3}=2\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{2}>0$

$$t=1 \quad (\because 2t^2+2t+3>0)$$

따라서 $f(t)$ 는 $t=1$ 일 때 최솟값 5를 가지므로 구하는 거리의 최솟값은 $\sqrt{5}$ 이다.

답 ②

t	...	1	...
$f'(t)$	-	0	+
$f(t)$	\	5	/

0572 점 P의 좌표를 $(t, -t^2)$ 이라 하면

$$l=\sqrt{(t-6)^2+(-t^2+3)^2}=\sqrt{t^4-5t^2-12t+45}$$

$f(t)=t^4-5t^2-12t+45$ 라 하면

$$f'(t)=4t^3-10t-12=2(t-2)(2t^2+4t+3)$$

$f'(t)=0$ 에서 $\sqrt{2t^2+4t+3}=2\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+1>0$

$$t=2 \quad (\because 2t^2+4t+3>0)$$

따라서 $f(t)$ 는 $t=2$ 일 때 최솟이므로 구하는 점 P의 좌표는 $(2, -4)$ 이다.

답 (2, -4)

t	...	2	...
$f'(t)$	-	0	+
$f(t)$	\	17	/

0573 점 P의 좌표를 (t, t^2-2) 라 하면

$$\begin{aligned} \overline{AP}^2+\overline{BP}^2 &= t^2+(t^2+1)^2+(t-10)^2+(t^2+1)^2 \\ &= 2t^4+6t^2-20t+102 \end{aligned}$$

$f(t)=2t^4+6t^2-20t+102$ 라 하면

$$f'(t)=8t^3+12t-20=4(t-1)(2t^2+2t+5)$$

$f'(t)=0$ 에서 $\sqrt{2t^2+2t+5}=2\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{2}>0$

$$t=1 \quad (\because 2t^2+2t+5>0)$$

따라서 $f(t)$ 는 $t=1$ 일 때 최솟이므로

구하는 최솟값은

$$f(1)=90$$

답 90

t	...	1	...
$f'(t)$	-	0	+
$f(t)$	\	90	/

0574 오른쪽 그림과 같이 직사각형

ABCD의 꼭짓점 C의 좌표를 $(a, 0)$

$(0<a<2)$ 이라 하면

$$D(a, 4-a^2), A(-a, 4-a^2),$$

$$B(-a, 0)$$

직사각형 ABCD의 넓이를 $S(a)$ 라 하면

$$S(a)=2a(4-a^2)=-2a^3+8a$$

$$\therefore S'(a)=-6a^2+8=-2(3a^2-4)$$

$$S'(a)=0 \text{에서 } a^2=\frac{4}{3} \quad \therefore a=\frac{2\sqrt{3}}{3} \quad (\because 0<a<2)$$

a	0	...	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$...	2
$S'(a)$		+	0	-	
$S(a)$		/	$\frac{32\sqrt{3}}{9}$	\	

따라서 $S(a)$ 는 $a=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 일 때 최대이므로 직사각형의 넓이의 최댓값은

$$S\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{32\sqrt{3}}{9}$$

답 ④

0575 점 P의 좌표를 $(a, -a^2+3a)$ $(0<a<3)$ 라 하면 H(a, 0)이므로 $\triangle OPH$ 의 넓이를 $S(a)$ 라 하면

$$S(a)=\frac{1}{2}a(-a^2+3a)=-\frac{1}{2}a^3+\frac{3}{2}a^2$$

$$\therefore S'(a)=-\frac{3}{2}a^2+3a=-\frac{3}{2}a(a-2)$$

$$S'(a)=0 \text{에서 } a=2 \quad (\because 0<a<3)$$

a	0	...	2	...	3
$S'(a)$		+	0	-	
$S(a)$		/	2	\	

따라서 $S(a)$ 는 $a=2$ 일 때 최대이므로 $\triangle OPH$ 의 넓이의 최댓값은

$$S(2)=2$$

답 ②

0576 $6x-x^2=0$ 에서 $x(x-6)=0$ 이므로

$$x=0 \text{ 또는 } x=6$$

$$\therefore A(6, 0)$$

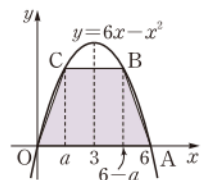
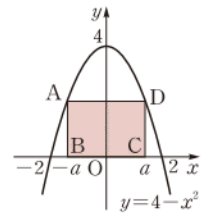
오른쪽 그림과 같이 점 C의 좌표를

$(a, 6a-a^2)$ $(0<a<3)$ 이라 하면

$$B(6-a, 6a-a^2)$$

사다리꼴 OABC의 넓이를 $S(a)$ 라 하면

$$S(a)=\frac{1}{2}\{6+(6-2a)\}(6a-a^2)=a^3-12a^2+36a \quad \cdots \textcircled{2}$$





$$\therefore S'(a) = 3a^2 - 24a + 36 = 3(a-2)(a-6)$$

$$S'(a) = 0 \text{에서 } a = 2 \quad (\because 0 < a < 3)$$

a	0	...	2	...	3
$S'(a)$		+	0	-	
$S(a)$		/	32	\	

따라서 $S(a)$ 는 $a=2$ 일 때 최대이므로 넓이가 최대인 사다리꼴의 높이는

$$6a - a^2 = 6 \cdot 2 - 2^2 = 8$$

→ ③

답 8

채점 기준	비율
① 점 A의 좌표를 구하고 두 점 B, C의 좌표를 a 에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30 %
② $S(a)$ 를 구할 수 있다.	20 %
③ 넓이가 최대인 사다리꼴의 높이를 구할 수 있다.	50 %

0577 오른쪽 그림과 같이 원기둥의 밑면의 반지름의 길이를 x , 높이를 y 라 하면

$$6 : 12 = x : (12 - y)$$

$$\therefore y = 12 - 2x \quad (0 < x < 6)$$

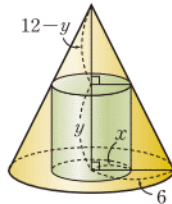
원기둥의 부피를 $V(x)$ 라 하면

$$V(x) = \pi x^2 y = \pi x^2 (12 - 2x)$$

$$= 2\pi (6x^2 - x^3)$$

$$\therefore V'(x) = 2\pi (12x - 3x^2) = -6\pi x(x - 4)$$

$$V'(x) = 0 \text{에서 } x = 4 \quad (\because 0 < x < 6)$$



x	0	...	4	...	6
$V'(x)$		+	0	-	
$V(x)$		/	64π	\	

따라서 $V(x)$ 는 $x=4$ 일 때 최대이므로 원기둥의 부피의 최댓값은

$$V(4) = 64\pi$$

답 ③

0578 상자의 높이가 x 이므로 오른쪽 그림과 같이 정육각형의 각 꼭짓점으로부터 거리가

$$x \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}x \text{인 부분까지 자르게 된다.}$$

$$\text{이때 } 0 < \frac{2}{\sqrt{3}}x < 4\sqrt{3} \text{이므로}$$

$$0 < x < 6$$

따라서 육각기둥의 밑면은 한 변의 길이가 $4\sqrt{3} - \frac{2}{\sqrt{3}}x$ 인 정육각형

이므로 그 넓이는

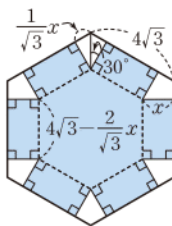
$$6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(4\sqrt{3} - \frac{2}{\sqrt{3}}x\right)^2 = 2\sqrt{3}(6-x)^2$$

상자의 부피를 $V(x)$ 라 하면

$$V(x) = 2\sqrt{3}(6-x)^2 \cdot x = 2\sqrt{3}(x^3 - 12x^2 + 36x)$$

$$\therefore V'(x) = 2\sqrt{3}(3x^2 - 24x + 36) = 6\sqrt{3}(x-2)(x-6)$$

$$V'(x) = 0 \text{에서 } x = 2 \quad (\because 0 < x < 6)$$



x	0	...	2	...	6
$V'(x)$		+	0	-	
$V(x)$		/	$64\sqrt{3}$	\	

따라서 $V(x)$ 는 $x=2$ 일 때 최대이다.

답 2

0579 전략 x 의 값의 범위를 $x \geq 3a$, $x \leq 3a$ 로 나누어 함수 $f(x)$ 를 구한다.

풀이 (i) $x \geq 3a$ 일 때,

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 36(x - 3a) + 10 \text{이므로}$$

$$f'(x) = 6x^2 + 6x + 36 = 6\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{69}{2} > 0$$

따라서 함수 $f(x)$ 는 증가한다.

(ii) $x \leq 3a$ 일 때,

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36(x - 3a) + 10 \text{이므로}$$

$$f'(x) = 6x^2 + 6x - 36 = 6(x+3)(x-2)$$

함수 $f(x)$ 가 $x \leq 3a$ 에서 증가하려면

$$3a \leq -3 \quad \therefore a \leq -1 \quad \leftarrow x \leq 3a \text{가 } x \leq -3 \text{ 또는 } x \geq 2 \text{에 포함되어야 한다.}$$

(i), (ii)에서 $a \leq -1$ 이므로 실수 a 의 최댓값은 -1 이다.

답 -1

0580 전략 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = a$ (a 는 실수)이고, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ 이면

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \text{이다.}$$

풀이 $f(x)$ 는 삼차함수이므로 모든 실수 x 에 대하여 미분가능하고 연속이다.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) + 3}{x - 1} = 0 \text{에서 } x \rightarrow 1 \text{일 때 (분모)} \rightarrow 0 \text{이고 극한값이 존재하므로 (분자)} \rightarrow 0 \text{이다.}$$

$$\text{즉 } \lim_{x \rightarrow 1} \{f(x) + 3\} = 0 \text{이므로 } f(1) = -3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) + 3}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1) \text{이므로}$$

$$f'(1) = 0$$

$$\text{또 } \lim_{x \rightarrow 5} \frac{f(x) - 4}{x - 5} = 0 \text{에서 } x \rightarrow 5 \text{일 때 (분모)} \rightarrow 0 \text{이고 극한값이 존재하므로 (분자)} \rightarrow 0 \text{이다.}$$

$$\text{즉 } \lim_{x \rightarrow 5} \{f(x) - 4\} = 0 \text{이므로 } f(5) = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{f(x) - 4}{x - 5} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{f(x) - f(5)}{x - 5} = f'(5) \text{이므로}$$

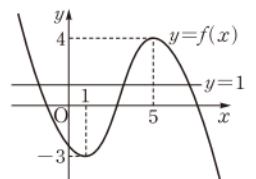
$$f'(5) = 0$$

$f'(1) = 0$, $f'(5) = 0$ 이고 $f(x)$ 는 삼차함수이므로 $f(x)$ 는 $x=1$, $x=5$ 에서 극값을 갖는다. 이때 $f(1) < f(5)$ 이므로 극솟값은 $f(1)$, 극댓값은 $f(5)$ 이다.

따라서 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

ㄱ. 오른쪽 그림에서 함수 $f(x)$ 는 $x=3$ 의 좌우에서 증가한다.

ㄴ. 함수 $f(x)$ 는 $x=5$ 에서 극댓값 4를 갖는다.



ㄷ. 앞의 그림과 같이 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=1$ 은 서로 다른 세 점에서 만난다.
 이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ④

0581 전략 점과 직선 사이의 거리를 구하는 공식을 이용하여 함수 $g(t)$ 를 구한다.

풀이 점 (t, t^3) 과 직선 $y=x+6$, 즉 $x-y+6=0$ 사이의 거리 $g(t)$ 는

$$g(t) = \frac{|t - t^3 + 6|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{|-t^3 + t + 6|}{\sqrt{2}}$$

이때 $h(t) = -t^3 + t + 6$ 이라 하면

$$h'(t) = -3t^2 + 1$$

$$h'(t) = 0 \text{에서 } t^2 = \frac{1}{3} \quad \therefore t = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$$

또 $h(t) = 0$ 에서 $-t^3 + t + 6 = 0$

$$t^3 - t - 6 = 0, \quad (t-2)(t^2 + 2t + 3) = 0$$

$$\therefore t = 2 \quad (\because t^2 + 2t + 3 > 0)$$

즉 함수 $y=h(t)$ 의 그래프는 $t=2$ 일 때 t 축과 한 점에서 만난다.

t	...	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$...	$\frac{\sqrt{3}}{3}$...	2	...
$h'(t)$	-	0	+	0	-	-	-
$h(t)$	\searrow	극소	\nearrow	극대	\searrow	0	\searrow

따라서 함수 $y=g(t)$ 의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다.

ㄱ. 오른쪽 그림에서 함수 $g(t)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

ㄴ. 함수 $g(t)$ 는 $t = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ 에서 0이 아닌 극솟값을 갖는다.

ㄷ. $t < 2$ 일 때 $g(t) = \frac{-t^3 + t + 6}{\sqrt{2}}$, $t > 2$ 일 때 $g(t) = \frac{t^3 - t - 6}{\sqrt{2}}$ 이므로

$$\lim_{t \rightarrow 2-} g'(t) = \lim_{t \rightarrow 2-} \frac{1}{\sqrt{2}}(-3t^2 + 1) = -\frac{11}{\sqrt{2}}$$

$$\lim_{t \rightarrow 2+} g'(t) = \lim_{t \rightarrow 2+} \frac{1}{\sqrt{2}}(3t^2 - 1) = \frac{11}{\sqrt{2}}$$

즉 $\lim_{t \rightarrow 2-} g'(t) \neq \lim_{t \rightarrow 2+} g'(t)$ 이므로 함수 $g(t)$ 는 $t=2$ 에서 미분가능하지 않다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ③

0582 전략 $y=f(x)$ 의 그래프가 지나는 점과 x 축에 접하는 점의 x 좌표를 이용하여 함수 $f(x)$ 의 식을 세운다.

풀이 $y=f(x)$ 의 그래프가 $x=k$ ($k < 0$)인 점에서 x 축에 접한다고 하면 그래프가 원점을 지나므로

$$f(x) = x(x-k)^2 \quad (k < 0)$$

이라 할 수 있다. 즉

$$f'(x) = (x-k)^2 + 2x(x-k) = (x-k)(3x-k)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x=k \text{ 또는 } x=\frac{k}{3}$$

x	...	k	...	$\frac{k}{3}$...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	\nearrow	극대	\searrow	극소	\nearrow

즉 함수 $f(x)$ 는 $x=\frac{k}{3}$ 에서 극솟값 -4 를 가지므로

$$f\left(\frac{k}{3}\right) = \frac{k}{3}\left(\frac{k}{3} - k\right)^2 = -4, \quad \frac{4}{27}k^3 = -4$$

$$k^3 = -27 \quad \therefore k = -3$$

따라서 $f(x) = x(x+3)^2 = x^3 + 6x^2 + 9x$ 이므로

$$a=6, b=9$$

$$\therefore a+b=15$$

답 15

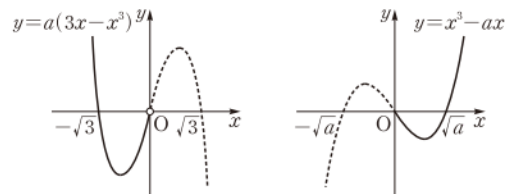
0583 전략 a 의 값의 범위를 나누어 생각한다.

풀이 (i) $a > 0$ 인 경우

$$f(x) = \begin{cases} a(3x-x^3) & (x < 0) \\ x^3-ax & (x \geq 0) \end{cases} \text{에서}$$

$$f(x) = \begin{cases} -ax(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3}) & (x < 0) \\ x(x+\sqrt{a})(x-\sqrt{a}) & (x \geq 0) \end{cases}$$

이므로 두 삼차함수 $y=a(3x-x^3)$, $y=x^3-ax$ 의 그래프의 개형은 각각 다음 그림과 같다.



따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 극댓값 0을 갖는다.

즉 함수 $f(x)$ 는 극댓값 5를 갖지 않는다.

(ii) $a=0$ 인 경우

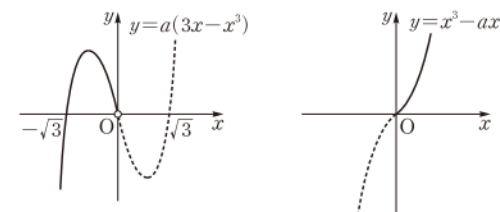
$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ x^3 & (x \geq 0) \end{cases} \text{이므로 함수 } f(x) \text{는}$$

극댓값 5를 갖지 않는다.

(iii) $a < 0$ 인 경우

$$f(x) = \begin{cases} a(3x-x^3) & (x < 0) \\ x^3-ax & (x \geq 0) \end{cases} \text{에서 두 삼차함수 } y=a(3x-x^3),$$

$y=x^3-ax$ 의 그래프의 개형은 각각 다음 그림과 같다.





따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽
그림과 같으므로 함수 $f(x)$ 는 $x<0$ 에서
극댓값을 갖는다.

$$f(x)=a(3x-x^3) \quad (x<0) \text{에서}$$

$$f'(x)=a(3-3x^2)$$

$$=-3a(x+1)(x-1)$$

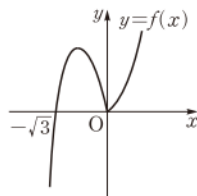
$f'(x)=0$ 에서 $x=-1$ ($\because x<0$)
즉 함수 $f(x)$ 는 $x=-1$ 에서 극댓값 5를 가지므로

$$f(-1)=-2a=5 \quad \therefore a=-\frac{5}{2}$$

이상에서 $a=-\frac{5}{2}$ 이므로

$$f(x)=\begin{cases} -\frac{5}{2}(3x-x^3) & (x<0) \\ x^3+\frac{5}{2}x & (x\geq 0) \end{cases}$$

$$\therefore f(2)=2^3+\frac{5}{2}\cdot 2=13$$



답 ⑤

0584 전략 조건 ㉑를 이용하여 $f(x)$ 의 식을 먼저 구한다.

풀이 $f(x)=-x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c 는 상수)라 하면

$$f'(x)=-3x^2+2ax+b$$

조건 ㉑에 의하여 $f'(-1)=0, f'(3)=0$ 이므로 이차방정식
 $f'(x)=0$ 의 두 근이 $-1, 3$ 이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$-1+3=\frac{2a}{3}, -1\cdot 3=-\frac{b}{3} \quad \therefore a=3, b=9$$

$$\therefore f(x)=-x^3+3x^2+9x+c, f'(x)=-3x^2+6x+9$$

한편 $h(x)=f(x)-g(x)$ 라 하면 $h(x)$ 는 최고차항의 계수가 -1
인 삼차함수이다. 또 조건 ㉒에 의하여 $x<k$ 이면 $h(x)>0, x>k$
이면 $h(x)<0$ 이고, $h(k)=0, h'(k)=0$ 이므로

$$h(x)=-(x-k)^3=-x^3+3kx^2-3k^2x+k^3$$

함수 $h(x)$ 의 x^2 의 계수는 함수 $f(x)$ 의 x^2 의 계수인 3과 같으므로

$$3k=3 \quad \therefore k=1$$

$f(1)=11+c, f'(1)=12$ 이므로 $y=f(x)$ 의 그래프 위의 점
(1, $11+c$)에서의 접선의 방정식은

$$y-(11+c)=12(x-1) \quad \therefore y=12x-1+c$$

$$\therefore g(x)=12x-1+c$$

이때 조건 ㉓에서 $f(2)+g(2)=33$ 이므로

$$(22+c)+(23+c)=33 \quad \therefore c=-6$$

$$\therefore f(x)=-x^3+3x^2+9x-6$$

따라서 함수 $f(x)$ 는

$x=-1$ 에서 극솟값
 $-11, x=3$ 에서 극댓값
21을 가지므로 극댓값과
극솟값의 합은

$$21+(-11)=10$$

x	...	-1	...	3	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	\	-11	/	21	\

답 ⑤

0585 전략 삼차함수 $f(x)$ 가 $x=a$ 에서 극솟값 0을 가지면

$f(x)=(x-a)^2(ax+b)$ (a, b 는 상수, $a\neq 0$)임을 이용한다.

풀이 조건 ㉑에 의하여 $f(x)=(x-n)^2(x+a)$ (a 는 상수)라 하면

$$f'(x)=2(x-n)(x+a)+(x-n)^2$$

$$=(x-n)(3x+2a-n)$$

$$\therefore (x+n)f'(x)=(x+n)(x-n)(3x+2a-n)$$

이때 조건 ㉒에 의하여 $(x+n)f'(x)=3(x+n)^2(x+b)$ (b 는 상
수)로 나타낼 수 있으므로

$$3x+2a-n=3(x+n)$$

$$2a-n=3n \quad \therefore a=2n$$

따라서 $f(x)=(x-n)^2(x+2n), f'(x)=3(x+n)(x-n)$ 이므로
함수 $f(x)$ 는 $x=-n$ 에서 극대이고, 극댓값은

$$a_n=f(-n)=4n^3$$

$$\therefore \sum_{n=1}^m a_n = \sum_{n=1}^m 4n^3 = 4 \cdot \left\{ \frac{m(m+1)}{2} \right\}^2 = \{m(m+1)\}^2$$

$$\sum_{n=1}^m a_n \leq 10000 \text{에서} \quad \{m(m+1)\}^2 \leq 10000$$

$$\therefore 0 < m(m+1) \leq 100 \quad (\because m \text{은 자연수})$$

이때 $9\cdot 10=90, 10\cdot 11=110$ 이므로 자연수 m 의 최댓값은 9이다.

답 9

0586 전략 $y=f'(x)$ 의 그래프를 이용하여 $y=f(x)$ 의 그래프의 개
형을 그려 본다.

풀이 $y=f'(x)$ 의 그래프가 x 축과 만나는 점의 x 좌표가 α, β, γ 이
므로 $f'(x)=0$ 에서 $x=\alpha$ 또는 $x=\beta$ 또는 $x=\gamma$

x	...	α	...	β	...	γ	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	\	극소	/	극대	\	극소	/

ㄱ. $f(x)$ 는 $x=\alpha$ 에서 극소이다.

ㄴ. $f(\beta-x)=f(\beta+x)$ 이라면 $y=f(x)$ 의 그래프가 직선 $x=\beta$ 에
대하여 대칭이어야 한다.

이때 $f(\alpha)<f(\gamma)<0<f(\beta)$ 에서

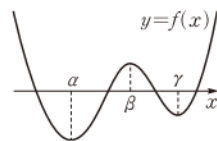
$y=f(x)$ 의 그래프의 개형은 오른쪽 그
림과 같다. 즉 $y=f(x)$ 의 그래프는 직
선 $x=\beta$ 에 대하여 대칭이 아니므로

$$f(\beta-x)\neq f(\beta+x)$$

ㄷ. 위의 그림에서 $y=f(x)$ 의 그래프는 x 축과 서로 다른 네 점에서
만난다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

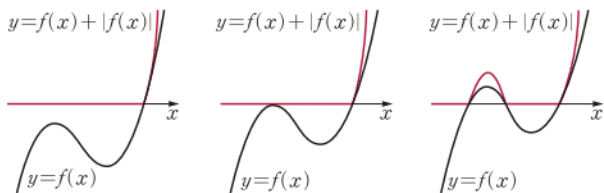


0587 전략 $y=f(x)$ 의 그래프에 따른 $y=f(x)+|f(x)|$ 의 그래프
를 그려 본다.

풀이 $f(x)+|f(x)|=\begin{cases} 2f(x) & (f(x)\geq 0) \\ 0 & (f(x)< 0) \end{cases}$ 에서 함수 $f(x)$ 가 극

값을 갖지 않으면 조건 ㉑, ㉒를 동시에 만족시킬 수 없으므로 함수
 $f(x)$ 는 극댓값과 극솟값을 갖는다.

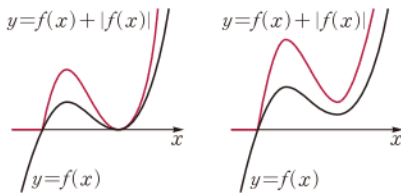
함수 $f(x)$ 는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이므로 $y=f(x)$ 의
그래프와 그에 따른 함수 $y=f(x)+|f(x)|$ 의 그래프는 다음 그림
과 같이 5가지 경우가 있다.



[그림 1]

[그림 2]

[그림 3]



[그림 4]

[그림 5]

이때 조건 ⑦, ⑧를 모두 만족시키는 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 [그림 4]이므로

$$f(0)=0, f(3)=0$$

또 함수 $f(x)$ 는 $x=3$ 에서 극솟값 0을 가지므로

$$f(x)=x(x-3)^2=x^3-6x^2+9x$$

$$\therefore f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=1 \text{ 또는 } x=3$$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 극대이므로 극댓값은

$$f(1)=1-6+9=4$$

4

0588 전략 $\overline{BP}=x$ ($0 < x < 1$)라 하고 $\triangle PCQ$ 의 넓이를 x 에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 $\overline{BP}=x$ ($0 < x < 1$)라 하면

$$\overline{PC}=1-x$$

이때 $\triangle ABP \sim \triangle PCQ$ (AA 닮음)이므로

$$\overline{AB} : \overline{PC} = \overline{BP} : \overline{CQ}$$

$$1 : (1-x) = x : \overline{CQ} \quad \therefore \overline{CQ} = x - x^2$$

$\triangle PCQ$ 의 넓이를 $S(x)$ 라 하면

$$S(x) = \frac{1}{2}(1-x)(x-x^2) = \frac{1}{2}(x^3-2x^2+x)$$

$$\therefore S'(x) = \frac{1}{2}(3x^2-4x+1) = \frac{1}{2}(3x-1)(x-1)$$

$$S'(x)=0 \text{에서 } x=\frac{1}{3} \quad (\because 0 < x < 1)$$

x	0	...	$\frac{1}{3}$...	1
$S'(x)$		+	0	-	
$S(x)$			\nearrow	\searrow	

따라서 $S(x)$ 는 $x=\frac{1}{3}$ 일 때 최대이므로 $\triangle PCQ$ 의 넓이의 최댓값은

$$S\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{27}$$

2

0589 전략 정사각형 EFGH의 두 대각선의 교점의 좌표를 (t, t^2) ($0 < t < 1$)이라 하고 점 E의 좌표를 t 에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 정사각형 ABCD의 두 대각선의 교점의 좌표가 $(0, 1)$ 이므로

$$C\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

정사각형 EFGH의 두 대각선의 교점의 좌표를 (t, t^2) ($0 < t < 1$)이라 하면

$$E\left(t-\frac{1}{2}, t^2+\frac{1}{2}\right)$$

두 정사각형의 내부의 공통부분은 위의 그림에서 색칠한 직사각형이므로 그 넓이를 $S(t)$ 라 하면

$$S(t) = \left[\frac{1}{2} - \left(t - \frac{1}{2}\right)\right] \left[\left(t^2 + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\right] = -t^3 + t^2$$

$$\therefore S'(t) = -3t^2 + 2t = -t(3t-2)$$

$$S'(t)=0 \text{에서 } t=\frac{2}{3} \quad (\because 0 < t < 1)$$

t	0	...	$\frac{2}{3}$...	1
$S'(t)$		+	0	-	
$S(t)$			\nearrow	\searrow	

따라서 $S(t)$ 는 $t=\frac{2}{3}$ 일 때 최대이므로 구하는 넓이의 최댓값은

$$S\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{27}$$

1

참고 $t \leq -1$ 또는 $t \geq 1$ 일 때에는 두 정사각형 ABCD, EFGH의 내부의 공통 부분이 존재하지 않으므로

$$-1 < t < 1$$

이때 $-1 < t < 0$ 에서도 공통부분이 생기지만 곡선 $y=x^2$ 이 y 축에 대하여 대칭이므로 $0 < t < 1$ 에서의 $S(t)$ 의 최댓값이 $-1 < t < 0$ 에서의 $S(t)$ 의 최댓값과 같다. 따라서 $0 < t < 1$ 에서만 생각해도 된다.

0590 전략 삼차함수의 그래프와 x 축에 평행한 임의의 직선이 오직 한 점에서 만나려면 삼차함수는 실수 전체의 집합에서 증가하거나 감소해야 한다.

풀이 곡선 $y=x^3+3ax^2+3(10-3a)x$ 는 삼차함수의 그래프이고 직선 $y=t$ 는 x 축 또는 x 축에 평행한 직선이므로 임의의 실수 t 에 대하여 곡선과 직선이 오직 한 점에서 만나려면 삼차함수

$y=x^3+3ax^2+3(10-3a)x$ 가 실수 전체의 집합에서 증가해야 한다. → 1

$$f(x)=x^3+3ax^2+3(10-3a)x \text{라 하면}$$

$$f'(x)=3x^2+6ax+3(10-3a)$$

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 증가하려면 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \geq 0$ 이어야 한다. 즉 이차방정식 $f'(x)=0$ 이 중근 또는 허근을 가져야 하므로 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = 9a^2 - 9(10-3a) \leq 0$$

$$a^2+3a-10 \leq 0, \quad (a+5)(a-2) \leq 0$$

$$\therefore -5 \leq a \leq 2$$

→ 2

따라서 정수 a 는 $-5, -4, -3, \dots, 2$ 이므로 구하는 합은



$$-5 + (-4) + (-3) + \cdots + 2 = -12$$

→ ③

답 -12

채점 기준	비율
① 주어진 곡선과 직선이 오직 한 점에서 만날 조건을 구할 수 있다.	40 %
② a 의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
③ 정수 a 의 값의 합을 구할 수 있다.	20 %

0591 전략 이차함수가 $x=a$ 에서 극값을 가지면 그래프의 축의 방정식이 $x=a$ 임을 이용한다.

풀이 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c 는 상수)라 하면

$$f'(x)=3x^2+2ax+b$$

조건 (나)에서 함수 $f'(x)$ 는 $x=0$ 에서 극소이므로 이차함수 $y=f'(x)$ 의 그래프의 축의 방정식은 $x=0$ 이다.

$$\text{즉 } -\frac{a}{3}=0 \text{이므로 } a=0$$

→ ①

조건 (b)에 의하여 $f'(-1)=0$ 이므로

$$3+b=0 \quad \therefore b=-3$$

→ ②

따라서 $f(x)=x^3-3x+c$ 이므로

$$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$$

$f'(x)=0$ 에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 극소이므로 조건 (다)에 의하여

$$f(1)=-f(3)$$

$$-2+c=-(18+c) \quad \therefore c=-8$$

→ ③

$$\therefore f(x)=x^3-3x-8$$

따라서 함수 $f(x)$ 의 극댓값은 $f(-1)=-6$, 극솟값은 $f(1)=-10$ 이므로 극댓값과 극솟값의 곱은 60이다.

→ ④

답 60

채점 기준	비율
① a 의 값을 구할 수 있다.	30 %
② b 의 값을 구할 수 있다.	20 %
③ c 의 값을 구할 수 있다.	30 %
④ 극댓값과 극솟값의 곱을 구할 수 있다.	20 %

0592 전략 삼차함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 $x=a$ 에서 x 축과 접하면 $x=a$ 에서 극값을 갖고 그 극값은 0임을 이용한다.

풀이 조건 (b)에 의하여 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 극값을 갖고 그 극값은 0이므로 $f(1)=0, f'(1)=0$

조건 (나)에 의하여 $g(x)$ 는 $x=3$ 에서 극값을 갖고 그 극값은 0이므로 $g(3)=0, g'(3)=0$

→ ①

따라서 $f(x)=a(x-1)^2(x+p)$ (a, p 는 상수, $a \neq 0$),

$g(x)=b(x-3)^2(x+q)$ (b, q 는 상수, $b \neq 0$)라 하면

$$f'(x)=2a(x-1)(x+p)+a(x-1)^2$$

$$=a(x-1)(3x+2p-1)$$

$$g'(x)=2b(x-3)(x+q)+b(x-3)^2$$

$$=b(x-3)(3x+2q-3)$$

$$=3b(x-3)\left(x+\frac{2q-3}{3}\right)$$

조건 (다)에서 $g'(x)=-f'(-x)$ 이고

$$-f'(-x)=-a(-x-1)(-3x+2p-1)$$

$$=-a(x+1)(3x-2p+1)$$

$$=-3a(x+1)\left(x-\frac{2p-1}{3}\right)$$

$$\text{이므로 } b=-a, 3=\frac{2p-1}{3}, \frac{2q-3}{3}=1$$

$$\therefore p=5, q=3$$

→ ②

또 $f(0)=10$ 에서 $ap=10$

$$5a=10 \quad \therefore a=2$$

→ ③

따라서 $f(x)=2(x-1)^2(x+5)$, $g(x)=-2(x-3)^2(x+3)$ 이므로

$$f(2)+g(2)=14+(-10)=4$$

→ ④

답 4

채점 기준	비율
① $f(1)=0, f'(1)=0, g(3)=0, g'(3)=0$ 임을 알 수 있다.	30 %
② p, q 의 값을 구할 수 있다.	30 %
③ a 의 값을 구할 수 있다.	20 %
④ $f(2)+g(2)$ 의 값을 구할 수 있다.	20 %

0593 전략 x 와 a 의 값의 범위에 따라 함수 $y=g(x)$ 의 그래프를 그려 본다.

풀이 $x \geq 0$ 일 때, $g(x)=x^4-x^3+(2-a)x^3=x^4+(1-a)x^3$
 $x < 0$ 일 때, $g(x)=x^4+x^3$

$$\therefore g(x)=\begin{cases} x^4+(1-a)x^3 & (x \geq 0) \\ x^4+x^3 & (x < 0) \end{cases}$$

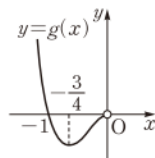
→ ①

(i) $x < 0$ 일 때,

$$g'(x)=4x^3+3x^2=x^2(4x+3)$$

$$g'(x)=0 \text{에서 } x=-\frac{3}{4} (\because x < 0)$$

x	\cdots	$-\frac{3}{4}$	\cdots	0
$g'(x)$	-	0	+	
$g(x)$	\searrow	극소	\nearrow	



따라서 함수 $g(x)$ 는 $x=-\frac{3}{4}$ 에서 극솟값을 갖는다.

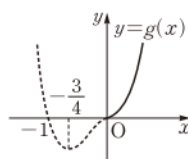
(ii) $x \geq 0$ 일 때,

$$g'(x)=4x^3+3(1-a)x^2=x^2\{4x+3(1-a)\}$$

$$g'(x)=0 \text{에서 } x=0 \text{ 또는 } x=\frac{3(a-1)}{4}$$

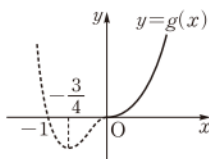
① $a-1 < 0$ 일 때,

$g'(x) \geq 0$ 이므로 함수 $g(x)$ 는 $x \geq 0$ 에서 증가한다.



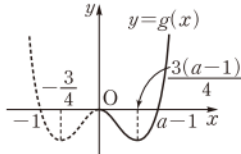
② $a-1 = 0$ 일 때,

$g'(x) \geq 0$ 이므로 함수 $g(x)$ 는 $x \geq 0$ 에서 증가한다.



iii) $a-1 > 0$ 일 때,

x	0	...	$\frac{3(a-1)}{4}$...
$g'(x)$	0	-	0	+
$g(x)$	0	\	극소	/



따라서 함수 $g(x)$ 는 $x=0$ 에서 극댓값, $x=\frac{3(a-1)}{4}$ 에서 극솟값을 갖는다.

(i), (ii)에서 함수 $g(x)$ 가 극댓값을 가지려면 $a-1 > 0$, 즉 $a > 1$ 이어야 하고 $a \neq 2$ 이므로 정수 a 의 최솟값은 3이다.

$$\therefore a_1 = 3 \quad \cdots ②$$

한편 $a=3$ 일 때 $g(x)$ 가 극솟값을 갖는 x 의 값은

$$x = -\frac{3}{4} \text{ 또는 } x = \frac{3(3-1)}{4} = \frac{3}{2}$$

이므로 모든 x 의 값의 합 m 은

$$m = -\frac{3}{4} + \frac{3}{2} = \frac{3}{4} \quad \cdots ③$$

$$\therefore a_1 + m = \frac{15}{4} \quad \cdots ④$$

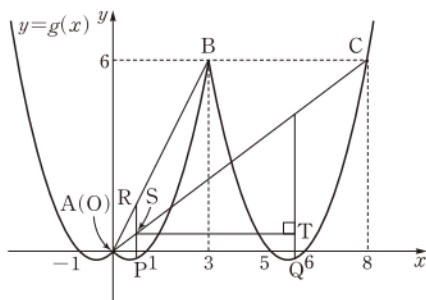
$$\text{답 } \frac{15}{4}$$

채점 기준	비율
① x 의 값의 범위에 따라 $g(x)$ 를 구할 수 있다.	20 %
② a_1 의 값을 구할 수 있다.	50 %
③ m 의 값을 구할 수 있다.	20 %
④ $a_1 + m$ 의 값을 구할 수 있다.	10 %

0594 전략 점 P의 x 좌표를 t ($0 < t < 3$)라 하고 각 점의 좌표를 구하여 두 삼각형 APR, AQT의 넓이의 합을 t 에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 $g(x) = \begin{cases} x(x+1) & (x < 0) \\ x(x-1) & (0 \leq x < 3) \\ (x-5)(x-6) & (x \geq 3) \end{cases}$ 이므로 함수 $y=g(x)$

의 그래프는 다음 그림과 같다.



$$g(3)=6 \text{ 이므로 } (x-5)(x-6)=6 \text{ 에서 } x^2-11x+24=0, \quad (x-3)(x-8)=0$$

$$\therefore x=3 \text{ 또는 } x=8$$

즉 $B(3, 6)$, $C(8, 6)$ 이고 $A(0, 0)$ 이므로 직선 AB의 방정식은 $y=2x$, 직선 AC의 방정식은 $y=\frac{3}{4}x$ 이다.

점 P의 x 좌표를 t ($0 < t < 3$)라 하면

$$P(t, t^2-t), R(t, 2t), S\left(t, \frac{3}{4}t\right)$$

또 두 점 P, Q에서의 접선이 평행하므로 점 Q는 점 P를 x 축의 방향으로 5만큼 평행이동한 것이다.

$$\therefore Q(t+5, t^2-t), T\left(t+5, \frac{3}{4}t\right) \quad \cdots ①$$

이때 두 삼각형 APR, AQT의 넓이의 합을 $S(t)$ 라 하면

$$S(t) = \frac{1}{2} \cdot \{2t - (t^2-t)\} \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \left\{\frac{3}{4}t - (t^2-t)\right\} \cdot (t+5)$$

$$= -t^3 - \frac{1}{8}t^2 + \frac{35}{8}t \quad \cdots ②$$

$$\therefore S'(t) = -3t^2 - \frac{1}{4}t + \frac{35}{8} = -\frac{1}{8}(4t+5)(6t-7)$$

$$S'(t)=0 \text{ 에서 } t = \frac{7}{6} \quad (\because 0 < t < 3)$$

t	0	...	$\frac{7}{6}$...	3
$S'(t)$		+	0	-	
$S(t)$		/	극대	\	

따라서 $S(t)$ 는 $t=\frac{7}{6}$ 일 때 최대이므로 구하는 점 P의 x 좌표는 $\frac{7}{6}$ 이다. $\cdots ③$

$$\text{답 } \frac{7}{6}$$

채점 기준	비율
① 점 P의 x 좌표를 t ($0 < t < 3$)라 하고 점 P, R, S, Q, T의 좌표를 t 로 나타낼 수 있다.	40 %
② $S(t)$ 를 구할 수 있다.	30 %
③ $S(t)$ 가 최대일 때의 점 P의 x 좌표를 구할 수 있다.	30 %



II. 다항함수의 미분법

06 도함수의 활용 (3)

0595 $f(x)=x^3-3x^2+3$ 이라 하면

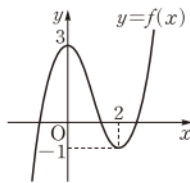
$$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$$

$f'(x)=0$ 에서 $x=0$ 또는 $x=2$

x	...	0	...	2	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	3	↘	-1	↗

따라서 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 방정식은 서로 다른 세 실근을 갖는다.

답 3



0596 $f(x)=x^3-3x-2$ 라 하면

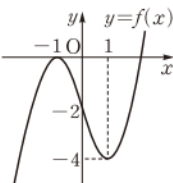
$$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$$

$f'(x)=0$ 에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

x	...	-1	...	1	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	0	↘	-4	↗

따라서 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 방정식은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

답 2



0597 $f(x)=2x^4-4x^2+1$ 이라 하면

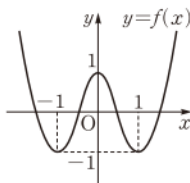
$$f'(x)=8x^3-8x=8x(x+1)(x-1)$$

$f'(x)=0$ 에서 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

x	...	-1	...	0	...	1	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	↘	-1	↗	1	↘	-1	↗

따라서 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 방정식은 서로 다른 네 실근을 갖는다.

답 4



0598 $x^4+2x^3=-2x^4+3x^2+1$ 에서

$$3x^4+2x^3-3x^2-1=0$$

$f(x)=3x^4+2x^3-3x^2-1$ 이라 하면

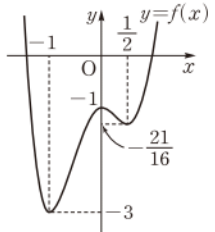
$$f'(x)=12x^3+6x^2-6x=6x(x+1)(2x-1)$$

$f'(x)=0$ 에서 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=\frac{1}{2}$

x	...	-1	...	0	...	$\frac{1}{2}$...
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	↘	-3	↗	-1	↘	$-\frac{21}{16}$	↗

따라서 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 방정식은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

답 2



0599 $f(x)=x^3-3x^2-9x+k$ 라 하면

$$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$$

$f'(x)=0$ 에서 $x=-1$ 또는 $x=3$

(1) 삼차방정식 $f(x)=0$ 이 서로 다른 세 실근을 가지려면

$$f(-1)f(3)<0\text{이어야 하므로}$$

$$(k+5)(k-27)<0 \quad \therefore -5<k<27$$

(2) 삼차방정식 $f(x)=0$ 이 한 실근과 중근을 가지려면

$$f(-1)f(3)=0\text{이어야 하므로}$$

$$(k+5)(k-27)=0 \quad \therefore k=-5\text{ 또는 }k=27$$

(3) 삼차방정식 $f(x)=0$ 이 한 실근과 두 허근을 가지려면

$$f(-1)f(3)>0\text{이어야 하므로}$$

$$(k+5)(k-27)>0 \quad \therefore k<-5\text{ 또는 }k>27$$

답 풀이 참조

0600 $f(x)=x^3-6x^2+9x+2$ 라 하면

$$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$$

$f'(x)=0$ 에서 $x=1$ 또는 $x=3$

x	0	...	1	...	3	...
$f'(x)$		+	0	-	0	+
$f(x)$	2	↗	6	↘	2	↗

$x \geq 0$ 일 때, 함수 $f(x)$ 의 최솟값은 $\boxed{2}$ 이므로

$$f(x) \geq 0$$

$$\therefore x^3-6x^2+9x+2>0$$

답 (가) 2 (나) >

0601 $f(x)=x^3-3x^2+4$ 라 하면

$$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$$

$f'(x)=0$ 에서 $x=0$ 또는 $x=2$

$x \geq 0$ 일 때, 함수 $f(x)$ 의 최솟값은 0이므로

$$f(x) \geq 0$$

따라서 $x \geq 0$ 일 때, 부등식 $x^3-3x^2+4 \geq 0$ 이 성립한다.

x	0	...	2	...
$f'(x)$	0	-	0	+
$f(x)$	4	↘	0	↗

답 풀이 참조

0602 $f(x)=x^4-4x+k$ 라 하면

$$f'(x)=4x^3-4=4(x-1)(x^2+x+1)$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=1 (\because x^2+x+1>0)$$

따라서 함수 $f(x)$ 의 최솟값은 $k-3$

이므로 모든 실수 x 에 대하여 부등식

$$f(x)>0 \text{이 성립하려면}$$

$$k-3>0 \quad \therefore k>3$$

x	...	1	...
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	\	$k-3$	/

☞ $k>3$

모든 실수에 대하여 부등식이 성립할 조건

① 모든 실수 x 에 대하여 부등식 $f(x)\geq 0$ 이 성립하려면

$$\Rightarrow (f(x) \text{의 최솟값}) \geq 0$$

② 모든 실수 x 에 대하여 부등식 $f(x)\leq 0$ 이 성립하려면

$$\Rightarrow (f(x) \text{의 최댓값}) \leq 0$$

0603 점 P의 속도를 v 라 하면 $v=\frac{dx}{dt}=6t-9$

따라서 $t=1$ 에서의 점 P의 속도는 $v=6-9=-3$ ☞ -3

0604 점 P의 가속도를 a 라 하면 $a=\frac{dv}{dt}=6$

따라서 $t=3$ 에서의 점 P의 가속도는 $a=6$ ☞ 6

0605 점 P가 운동 방향을 바꿀 때의 속도는 0이므로 $v=0$ 에서

$$6t-9=0 \quad \therefore t=\frac{3}{2} \quad \text{☞ } \frac{3}{2}$$

0606 $\frac{dl}{dt}=3t^2+2t$ 이므로 $t=2$ 일 때 고무줄의 길이의 변화율은

$$3\cdot 2^2+2\cdot 2=16 \quad \text{☞ 16}$$

0607 (1) 구의 겉넓이를 S 라 하면

$$S=4\pi \times (0.1t)^2=0.04\pi t^2$$

$$\therefore \frac{dS}{dt}=0.08\pi t$$

따라서 $t=10$ 일 때 구의 겉넓이의 변화율은

$$0.08\pi \times 10=0.8\pi$$

(2) 구의 부피를 V 라 하면

$$V=\frac{4}{3}\pi \times (0.1t)^3=\frac{0.004}{3}\pi t^3$$

$$\therefore \frac{dV}{dt}=0.004\pi t^2$$

따라서 $t=10$ 일 때 구의 부피의 변화율은

$$0.004\pi \times 10^2=0.4\pi$$

☞ (1) 0.8π (2) 0.4π

유형 01 방정식 $f(x)=k$ 의 실근의 개수

본책 104쪽

방정식 $f(x)=k$ 의 서로 다른 실근의 개수

\Rightarrow 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=k$ 의 교점의 개수와 같다.

0608 $3x^4-8x^3-6x^2+24x-k=0$ 에서

$$3x^4-8x^3-6x^2+24x=k \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

방정식 ①이 한 중근과 서로 다른 두 개의 실근을 가지려면 곡선

$y=3x^4-8x^3-6x^2+24x$ 와 직선 $y=k$ 가 한 점에서 접하고 접점이

아닌 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.

$$f(x)=3x^4-8x^3-6x^2+24x \text{라 하면}$$

$$f'(x)=12x^3-24x^2-12x+24$$

$$=12(x+1)(x-1)(x-2)$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=-1 \text{ 또는 } x=1 \text{ 또는 } x=2$$

x	...	-1	...	1	...	2	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	\	-19	/	13	\	8	/

따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽

그림과 같으므로 곡선 $y=f(x)$ 와 직선

$y=k$ 가 한 점에서 접하고 접점이 아닌 서로

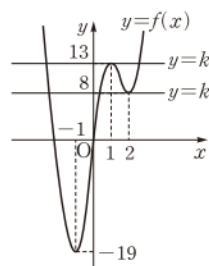
다른 두 점에서 만나려면

$$k=8 \text{ 또는 } k=13$$

즉 모든 실수 k 의 값의 합은

$$8+13=21$$

☞ ④



0609 $x^3-3x+1+k=0$ 에서

$$x^3-3x+1=-k \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

방정식 ①이 서로 다른 두 실근을 가지려면 곡선 $y=x^3-3x+1$ 과

직선 $y=-k$ 가 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.

$$f(x)=x^3-3x+1 \text{이라 하면}$$

$$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=-1 \text{ 또는 } x=1$$

x	...	-1	...	1	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	/	3	\	-1	/

따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽

그림과 같으므로 곡선 $y=f(x)$ 와 직

선 $y=-k$ 가 서로 다른 두 점에서 만나

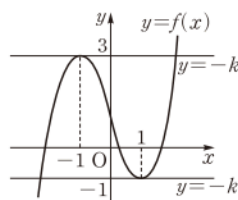
려면

$$-k=3 \text{ 또는 } -k=-1$$

$$\therefore k=-3 \text{ 또는 } k=1$$

그런데 $k>0$ 이므로 $k=1$

☞ 1



0610 $\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}x^2+2x+k=0$ 에서

$$\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}x^2+2x=-k \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

방정식 ①이 한 중근과 두 허근을 가지려면 곡선

$y=\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}x^2+2x$ 와 직선 $y=-k$ 가 한 점에서 만나고 그 점에서

접해야 한다.

$$f(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}x^2+2x \text{라 하면}$$



$$f'(x) = x^3 - 3x + 2 = (x+2)(x-1)^2$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=-2 \text{ 또는 } x=1$$

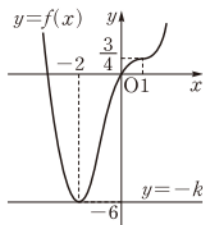
x	...	-2	...	1	...
$f'(x)$	-	0	+	0	+
$f(x)$	\	-6	/	$\frac{3}{4}$	/

따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=-k$ 가 한 점에서 만나고 그 점에서 접하려면

$$-k = -6$$

$$\therefore k = 6$$

답 ⑤



0611 $3x^4 - 8x^3 - 18x^2 - k = 0$ 에서

$$3x^4 - 8x^3 - 18x^2 = k$$

..... ㉠ → ①

방정식 ㉠이 서로 다른 두 실근을 가지려면 곡선 $y=3x^4 - 8x^3 - 18x^2$ 과 직선 $y=k$ 가 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.

$$f(x) = 3x^4 - 8x^3 - 18x^2 \text{이라 하면}$$

$$f'(x) = 12x^3 - 24x^2 - 36x = 12x(x+1)(x-3)$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=-1 \text{ 또는 } x=0 \text{ 또는 } x=3$$

→ ②

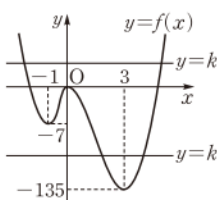
x	...	-1	...	0	...	3	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	\	-7	/	0	\	-135	/

따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=k$ 가 서로 다른 두 점에서 만나려면

$$k > 0 \text{ 또는 } -135 < k < -7 \rightarrow ③$$

즉 음의 정수 k 는 $-134, -133, -132, \dots, -8$ 의 127개이다.

→ ④



답 127

채점 기준	비율
① 주어진 방정식을 정리할 수 있다.	10 %
② $f'(x)=0$ 인 x 의 값을 구할 수 있다.	30 %
③ k 의 값의 범위를 구할 수 있다.	50 %
④ 음의 정수 k 의 개수를 구할 수 있다.	10 %

0612 $y=f'(x)$ 의 그래프가 x 축과 만나는 점의 x 좌표가 α, β, γ 이므로 $f'(x)=0$ 에서 $x=\alpha$ 또는 $x=\beta$ 또는 $x=\gamma$

x	...	α	...	β	...	γ	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	\	극소	/	극대	\	극소	/

따라서 방정식 $f(x)=0$ 이 서로 다른 네 실근을 가지려면

$$f(\alpha) < 0, f(\beta) > 0, f(\gamma) < 0$$

이어야 한다.

답 ③

0613 조건 ㉠에서 함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여

$f(-x) = -f(x)$ 를 만족시키므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

이때 조건 ㉡에 의하여 함수 $y=|f(x)|$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 하므로 함수 $f(x)$ 는 극댓값 2, 극솟값 -2를 가져야 한다.

$$f(x) = x^3 - ax \quad (a > 0) \text{라 하면}$$

$$f'(x) = 3x^2 - a$$

$$f'(x)=0 \text{에서}$$

$$x = -\frac{\sqrt{3a}}{3} \text{ 또는 } x = \frac{\sqrt{3a}}{3}$$

함수 $f(x)$ 는 $x = \frac{\sqrt{3a}}{3}$ 에서 극솟값 -2를 가지므로

$$f\left(\frac{\sqrt{3a}}{3}\right) = \left(\frac{\sqrt{3a}}{3}\right)^3 - a \cdot \frac{\sqrt{3a}}{3} = -2$$

$$\frac{2a\sqrt{3a}}{9} = 2, \quad a\sqrt{3a} = 9, \quad a^3 = 27$$

$$\therefore a = 3$$

따라서 $f(x) = x^3 - 3x$ 이므로

$$f(2) = 8 - 6 = 2$$

답 2



다항함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여

- ① $f(-x) = f(x)$ 를 만족시키면 $f(x)$ 는 짝수 차수의 항 또는 상수항으로만 이루어져 있다.
- ② $f(-x) = -f(x)$ 를 만족시키면 $f(x)$ 는 홀수 차수의 항으로만 이루어져 있다.

유형 02 방정식 $f(x)=k$ 의 실근의 부호

본책 104쪽

방정식 $f(x)=k$ 의 실근은 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=k$ 의 교점의 x 좌표와 같으므로 방정식 $f(x)=k$ 가

① 양근을 갖는다.

⇒ $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=k$ 의 교점의 x 좌표가 양수이다.

② 음근을 갖는다.

⇒ $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=k$ 의 교점의 x 좌표가 음수이다.

0614 $2x^3 + 3x^2 - 12x + p = 0$ 에서

$$2x^3 + 3x^2 - 12x = -p$$

..... ㉠

방정식 ㉠이 한 개의 양근과 서로 다른 두 개의 음근을 가지려면 곡선 $y=2x^3 + 3x^2 - 12x$ 와 직선 $y=-p$ 의 교점의 x 좌표가 한 개는 양수이고, 다른 두 개는 음수이어야 한다.

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x \text{라 하면}$$

$$f'(x) = 6x^2 + 6x - 12 = 6(x+2)(x-1)$$

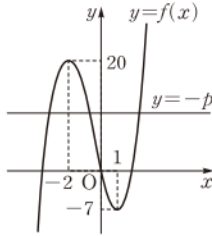
$$f'(x)=0 \text{에서 } x=-2 \text{ 또는 } x=1$$

x	...	-2	...	1	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	/	20	\	-7	/

따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=-p$ 의 교점의 x 좌표가 한 개는 양수이고, 다른 두 개는 음수이려면

$$0 < -p < 20 \\ \therefore -20 < p < 0$$

답 ①



0615 $2x^2+9x=x^3-x^2+a$ 에서

$$-x^3+3x^2+9x=a \quad \dots\dots ①$$

방정식 ①이 서로 다른 두 개의 양근과 한 개의 음근을 가지려면 곡선 $y=-x^3+3x^2+9x$ 와 직선 $y=a$ 의 교점의 x 좌표가 한 개는 음수이고, 다른 두 개는 양수이어야 한다.

$$f(x)=-x^3+3x^2+9x \text{라 하면}$$

$$f'(x)=-3x^2+6x+9$$

$$=-3(x+1)(x-3)$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=-1 \text{ 또는 } x=3$$

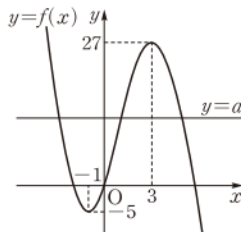
x	...	-1	...	3	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	\	-5	/	27	\

따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=a$ 의 교점의 x 좌표가 한 개는 음수이고, 다른 두 개는 양수이려면

$$0 < a < 27$$

즉 정수 a 는 1, 2, 3, ..., 26의 26개이다.

답 ④



0616 $x^3-12x^2+36x-k=0$ 에서

$$x^3-12x^2+36x=k \quad \dots\dots ① \quad \rightarrow ①$$

방정식 ①이 한 개의 양근과 두 개의 허근을 가지려면 곡선 $y=x^3-12x^2+36x$ 와 직선 $y=k$ 의 교점이 1개이고 그 교점의 x 좌표가 양수이어야 한다.

$$f(x)=x^3-12x^2+36x \text{라 하면}$$

$$f'(x)=3x^2-24x+36=3(x-2)(x-6)$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=2 \text{ 또는 } x=6 \quad \rightarrow ②$$

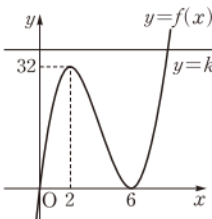
x	...	2	...	6	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	/	32	\	0	/

따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=k$ 의 교점이 1개이고 그 교점의 x 좌표가 양수이려면

$$k > 32 \quad \rightarrow ③$$

즉 정수 k 의 최솟값은 33이다.

답 33



채점 기준

비율

① 주어진 방정식을 정리할 수 있다.	10 %
② $f'(x)=0$ 인 x 의 값을 구할 수 있다.	30 %
③ k 의 값의 범위를 구할 수 있다.	50 %
④ 정수 k 의 최솟값을 구할 수 있다.	10 %

0617 $3x^3-4x+3-k=0$ 에서

$$3x^3-4x+3=k \quad \dots\dots ①$$

방정식 ①의 양근의 개수 $f(k)$ 는 곡선 $y=3x^3-4x+3$ 과 직선 $y=k$ 의 x 좌표가 양수인 교점의 개수와 같다.

$$g(x)=3x^3-4x+3 \text{이라 하면}$$

$$g'(x)=9x^2-4$$

$$=(3x+2)(3x-2)$$

$$g'(x)=0 \text{에서 } x=-\frac{2}{3} \text{ 또는 } x=\frac{2}{3}$$

x	...	$-\frac{2}{3}$...	$\frac{2}{3}$...
$g'(x)$	+	0	-	0	+
$g(x)$	/	$\frac{43}{9}$	\	$\frac{11}{9}$	/

따라서 함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

(i) $k=1$ 일 때, 곡선 $y=g(x)$ 와 직선 $y=k$ 는 x 좌표가 양수인 점에서 만나지 않으므로

$$f(1)=0$$

(ii) $k=2$ 일 때, 곡선 $y=g(x)$ 와 직선 $y=k$ 의 x 좌표가 양수인 교점이 2개이므로

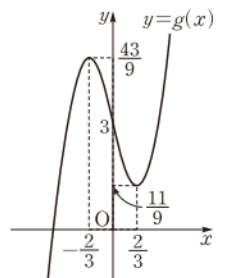
$$f(2)=2$$

(iii) $k \geq 3$ 일 때, 곡선 $y=g(x)$ 와 직선 $y=k$ 의 x 좌표가 양수인 교점이 1개이므로

$$f(3)=f(4)=\dots=f(10)=1$$

$$\text{이상에서 } f(1)+f(2)+\dots+f(10)=10$$

답 10



0618 $x^4-4x^3-x^2-12x+k$ 에서

$$x^4-4x^3-x^2-12x=k \quad \dots\dots ①$$

방정식 ①이 서로 다른 두 개의 양근과 서로 다른 두 개의 음근을 가지려면 곡선 $y=x^4-4x^3-x^2-12x$ 와 직선 $y=k$ 의 교점의 x 좌표가 두 개는 양수이고, 다른 두 개는 음수이어야 한다.

$$f(x)=x^4-4x^3-x^2-12x \text{라 하면}$$

$$f'(x)=4x^3-12x^2-4x+12$$

$$=4(x+1)(x-1)(x-3)$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=-1 \text{ 또는 } x=1 \text{ 또는 } x=3$$

x	...	-1	...	1	...	3	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	\	-9	/	7	\	-9	/



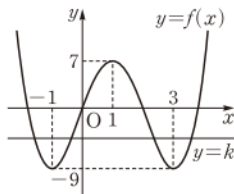
따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=k$ 의 교점의 x 좌표가 두 개는 양수이고, 다른 두 개는 음수이려면

$$-9 < k < 0$$

즉 $a=-9, b=0$ 이므로

$$b-a=9$$

답 ⑤



유형 03 삼차방정식의 근의 판별

본책 105쪽

삼차함수 $f(x)$ 가 극값을 가질 때, 삼차방정식 $f(x)=0$ 의 근은

- ① (극댓값) \times (극솟값) $< 0 \iff$ 서로 다른 세 실근
- ② (극댓값) \times (극솟값) $= 0 \iff$ 한 실근과 중근(서로 다른 두 실근)
- ③ (극댓값) \times (극솟값) $> 0 \iff$ 한 실근과 두 허근

0619 $f(x)=x^3-3x^2-24x+n$ 이라 하면

$$f'(x)=3x^2-6x-24=3(x+2)(x-4)$$

$f'(x)=0$ 에서 $x=-2$ 또는 $x=4$

삼차방정식 $f(x)=0$ 이 서로 다른 세 실근을 가지려면

$$f(-2)f(4) < 0 \text{ 이어야 하므로}$$

$$(n+28)(n-80) < 0 \quad \therefore -28 < n < 80$$

따라서 정수 n 의 최댓값은 79, 최솟값은 -27 이므로 구하는 합은

$$79 + (-27) = 52$$

답 ②

다른 풀이 $x^3-3x^2-24x+n=0$ 에서

$$x^3-3x^2-24x = -n \quad \dots\dots ①$$

방정식 ①이 서로 다른 세 실근을 가지려면 곡선 $y=x^3-3x^2-24x$ 와 직선 $y=-n$ 이 서로 다른 세 점에서 만나야 한다.

$f(x)=x^3-3x^2-24x$ 라 하면

$$f'(x)=3x^2-6x-24=3(x+2)(x-4)$$

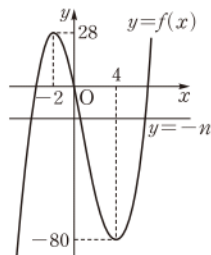
$f'(x)=0$ 에서 $x=-2$ 또는 $x=4$

x	\dots	-2	\dots	4	\dots
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	\nearrow	28	\searrow	-80	\nearrow

따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=-n$ 이 서로 다른 세 점에서 만나려면

$$-80 < -n < 28$$

$$\therefore -28 < n < 80$$



0620 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x+k$ 라 하면

$$f'(x)=x^2-4x+3=(x-1)(x-3)$$

$f'(x)=0$ 에서 $x=1$ 또는 $x=3$

삼차방정식 $f(x)=0$ 이 서로 다른 두 실근, 즉 한 실근과 중근을 가지려면 $f(1)f(3)=0$ 이어야 하므로

$$\left(\frac{4}{3}+k\right)k=0 \quad \therefore k=0 \quad (\because k \text{는 정수})$$

답 0

0621 $f(x)=2x^3-6x^2-18x-a+2$ 라 하면

$$f'(x)=6x^2-12x-18=6(x+1)(x-3)$$

$f'(x)=0$ 에서 $x=-1$ 또는 $x=3$

삼차방정식 $f(x)=0$ 이 한 실근과 두 허근을 가지려면

$$f(-1)f(3) > 0 \text{ 이어야 하므로}$$

$$(12-a)(-52-a) > 0, \quad (a-12)(a+52) > 0$$

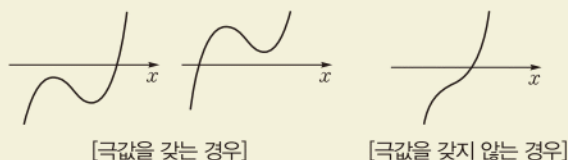
$$\therefore a < -52 \text{ 또는 } a > 12$$

따라서 a 의 값이 될 수 있는 것은 ⑤이다.

답 ⑤

삼차함수의 그래프의 개형

삼차함수 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ ($a>0$)에 대하여 삼차방정식 $f(x)=0$ 이 한 실근과 두 허근을 가질 때, 함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다.



0622 $f(x)=-4$, 즉 $x^3-3ax^2=-4$ 에서

$$x^3-3ax^2+4=0$$

$g(x)=x^3-3ax^2+4$ 라 하면

$$g'(x)=3x^2-6ax=3x(x-2a)$$

$g'(x)=0$ 에서 $x=0$ 또는 $x=2a$

삼차방정식 $g(x)=0$ 이 서로 다른 세 실근을 가지려면

$$g(0)g(2a) < 0 \text{ 이어야 하므로}$$

$$4(-4a^3+4) < 0$$

$$a^3-1 > 0, \quad (a-1)(a^2+a+1) > 0$$

$$\therefore a > 1 \quad (\because a^2+a+1 > 0)$$

답 $a > 1$

0623 함수 $f(x)=x^3+3x^2-9x-10$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 a 만큼 평행이동하면 함수 $y=g(x)$ 의 그래프와 일치하므로

$$g(x)=x^3+3x^2-9x-10+a$$

$$\therefore g'(x)=3x^2+6x-9=3(x+3)(x-1)$$

$g'(x)=0$ 에서 $x=-3$ 또는 $x=1$

삼차방정식 $g(x)=0$ 이 서로 다른 두 실근, 즉 한 실근과 중근을 가지려면 $g(-3)g(1)=0$ 이어야 하므로

$$(a+17)(a-15)=0 \quad \therefore a=-17 \text{ 또는 } a=15$$

따라서 모든 a 의 값의 합은 $-17+15=-2$

답 ②

0624 $f(x)=\frac{2}{3}x^3-2ax+2a$ 에서

$$f'(x)=2x^2-2a=2(x^2-a)$$

함수 $f(x)$ 가 극값을 가지려면 방정식 $f'(x)=0$ 이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 $a > 0$ ①

따라서 $f'(x)=0$ 에서 $x=-\sqrt{a}$ 또는 $x=\sqrt{a}$

삼차방정식 $f(x)=0$ 이 오직 한 개의 실근을 가지려면

$$f(-\sqrt{a})f(\sqrt{a}) > 0 \text{ 이어야 하므로}$$

$$\left(\frac{4}{3}a\sqrt{a}+2a\right)\left(-\frac{4}{3}a\sqrt{a}+2a\right)>0$$

$$\text{이때 } a>0 \text{이므로 } \left(\frac{4}{3}\sqrt{a}+2\right)\left(-\frac{4}{3}\sqrt{a}+2\right)>0$$

$$-\frac{16}{9}a+4>0 \quad \therefore a<\frac{9}{4} \quad \dots\dots \textcircled{L}$$

$$\textcircled{I}, \textcircled{L} \text{에서 } 0<a<\frac{9}{4} \quad \textcircled{B} \quad 0<a<\frac{9}{4}$$

유형 04 두 그래프의 교점의 개수

본책 106쪽

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프의 교점의 개수
 \Rightarrow 방정식 $f(x)=g(x)$ 의 서로 다른 실근의 개수와 같다.

0625 주어진 곡선과 직선이 서로 다른 세 점에서 만나려면 방정식 $x^3+6x^2=-9x+k$, 즉 $x^3+6x^2+9x-k=0$ 이 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.

$$f(x)=x^3+6x^2+9x-k \text{라 하면}$$

$$f'(x)=3x^2+12x+9=3(x+3)(x+1)$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=-3 \text{ 또는 } x=-1$$

삼차방정식 $f(x)=0$ 이 서로 다른 세 실근을 가지려면

$$f(-3)f(-1)<0 \text{이어야 하므로}$$

$$-k(-4-k)<0, \quad k(k+4)<0$$

$$\therefore -4<k<0 \quad \textcircled{B} \quad \textcircled{2}$$

0626 주어진 두 곡선이 서로 다른 두 점에서 만나려면 방정식 $-x^3+4x^2-4x=x^2-4x+k$, 즉 $x^3-3x^2+k=0$ 이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다. $\rightarrow \textcircled{1}$

$$f(x)=x^3-3x^2+k \text{라 하면}$$

$$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=0 \text{ 또는 } x=2 \quad \rightarrow \textcircled{2}$$

삼차방정식 $f(x)=0$ 이 서로 다른 두 실근을 가지려면

$$f(0)f(2)=0 \text{이어야 하므로}$$

$$k(k-4)=0 \quad \therefore k=4 (\because k>0) \quad \rightarrow \textcircled{3}$$

$\textcircled{B} \quad \textcircled{4}$

채점 기준

비율

① 방정식이 서로 다른 두 실근을 가져야 함을 알 수 있다.	20 %
② $f'(x)=0$ 인 x 의 값을 구할 수 있다.	30 %
③ k 의 값을 구할 수 있다.	50 %

0627 주어진 두 곡선이 오직 한 점에서 만나려면 방정식 $-x^3+2x^2=x^2-x+k$, 즉 $x^3-x^2-x+k=0$ 이 한 실근만을 가져야 한다.

$$f(x)=x^3-x^2-x+k \text{라 하면}$$

$$f'(x)=3x^2-2x-1=(3x+1)(x-1)$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=-\frac{1}{3} \text{ 또는 } x=1$$

삼차방정식 $f(x)=0$ 이 한 실근만을 가지려면 $f(-\frac{1}{3})f(1)>0$ 이어야 하므로

$$\left(k+\frac{5}{27}\right)(k-1)>0 \quad \therefore k<-\frac{5}{27} \text{ 또는 } k>1$$

따라서 자연수 k 의 최솟값은 2이다. $\textcircled{B} \quad \textcircled{2}$

0628 주어진 곡선과 직선이 한 점에서 만나고 다른 한 점에서는 접하려면 방정식 $x^3+7=3x+k$, 즉 $x^3-3x+7-k=0$ 이 한 실근과 중근을 가져야 한다.

$$f(x)=x^3-3x+7-k \text{라 하면}$$

$$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=-1 \text{ 또는 } x=1$$

삼차방정식 $f(x)=0$ 이 한 실근과 중근을 가지려면 $f(-1)f(1)=0$ 이어야 하므로

$$(9-k)(5-k)=0 \quad \therefore k=5 \text{ 또는 } k=9 \quad \textcircled{B} \quad \textcircled{5, 9}$$

유형 05 접선의 개수

본책 106쪽

곡선 밖의 한 점에서 곡선에 그을 수 있는 접선의 개수는 접점의 개수와 같다.

0629 $y=x^3-kx$ 에서 $y'=3x^2-k$

점 $(1, 1)$ 에서 곡선 $y=x^3-kx$ 에 그은 접선의 접점의 좌표를

$$(t, t^3-kt) \text{라 하면 접선의 방정식은}$$

$$y-(t^3-kt)=(3t^2-k)(x-t)$$

이 직선이 점 $(1, 1)$ 을 지나므로

$$1-(t^3-kt)=(3t^2-k)(1-t)$$

$$\therefore 2t^3-3t^2+1+k=0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

점 $(1, 1)$ 에서 주어진 곡선에 서로 다른 두 개의 접선을 그을 수 있으면 t 에 대한 삼차방정식 $\textcircled{1}$ 이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

$$f(t)=2t^3-3t^2+1+k \text{라 하면}$$

$$f'(t)=6t^2-6t=6t(t-1)$$

$$f'(t)=0 \text{에서 } t=0 \text{ 또는 } t=1$$

삼차방정식 $f(t)=0$ 이 서로 다른 두 실근을 가지려면 $f(0)f(1)=0$ 이어야 하므로

$$(k+1)k=0 \quad \therefore k=-1 (\because k \neq 0) \quad \textcircled{B} \quad \textcircled{2}$$

0630 $y=x^3+2$ 에서 $y'=3x^2$

점 $(1, a)$ 에서 곡선 $y=x^3+2$ 에 그은 접선의 접점의 좌표를

$$(t, t^3+2) \text{라 하면 접선의 방정식은}$$

$$y-(t^3+2)=3t^2(x-t)$$

이 직선이 점 $(1, a)$ 를 지나므로

$$a-(t^3+2)=3t^2(1-t)$$

$$\therefore 2t^3-3t^2-2+a=0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

점 $(1, a)$ 에서 주어진 곡선에 서로 다른 세 개의 접선을 그을 수 있으면 t 에 대한 삼차방정식 $\textcircled{1}$ 이 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.

$$f(t)=2t^3-3t^2-2+a \text{라 하면}$$

$$f'(t)=6t^2-6t=6t(t-1)$$

$$f'(t)=0 \text{에서 } t=0 \text{ 또는 } t=1$$

삼차방정식 $f(t)=0$ 이 서로 다른 세 실근을 가지려면 $f(0)f(1)<0$ 이어야 하므로

$$(a-2)(a-3)<0 \quad \therefore 2<a<3 \quad \textcircled{B} \quad 2<a<3$$



유형 06

주어진 구간에서 부등식이 항상 성립할 조건

본책 107쪽

· 증가·감소의 활용

- ① 구간 (a, b) 에서 감소하는 함수 $f(x)$ 에 대하여 부등식 $f(x) > k$ 가 항상 성립하려면 $\Rightarrow f(b) \geq k$
- ② 구간 (a, b) 에서 증가하는 함수 $f(x)$ 에 대하여 부등식 $f(x) < k$ 가 항상 성립하려면 $\Rightarrow f(a) \leq k$

0631 $f(x) = x^3 - 6x^2 + k$ 라 하면

$$f'(x) = 3x^2 - 12x = 3x(x-4)$$

$1 < x < 3$ 일 때 $f'(x) < 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 구간 $(1, 3)$ 에서 감소한다.

따라서 $1 < x < 3$ 에서 $f(x) > 0$ 이 항상 성립하려면 $f(3) \geq 0$ 이어야 하므로 $27 - 54 + k \geq 0 \quad \therefore k \geq 27$ 답 ⑤

0632 $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + k$ 라 하면

$$f'(x) = 6x^2 + 6x = 6x(x+1)$$

$x < -1$ 일 때 $f'(x) > 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 구간 $(-\infty, -1)$ 에서 증가한다.

따라서 $x < -1$ 에서 $f(x) < 0$ 이 항상 성립하려면 $f(-1) \leq 0$ 이어야 하므로 $-2 + 3 + k \leq 0 \quad \therefore k \leq -1$

즉 실수 k 의 최댓값은 -1 이다. 답 -1

0633 $x^3 + 3x^2 + k < x^2 + 4x$ 에서 $x^3 + 2x^2 - 4x + k < 0$

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x + k \text{라 하면}$$

$$f'(x) = 3x^2 + 4x - 4 = (x+2)(3x-2)$$

$2 < x < 4$ 일 때 $f'(x) > 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 구간 $(2, 4)$ 에서 증가한다.

따라서 $2 < x < 4$ 에서 $f(x) < 0$ 이 항상 성립하려면 $f(4) \leq 0$ 이어야 하므로 $64 + 32 - 16 + k \leq 0 \quad \therefore k \leq -80$

즉 실수 k 의 최댓값은 -80 이다. 답 ②

유형 07

주어진 구간에서 부등식이 항상 성립할 조건

본책 107쪽

· 최대·최소의 활용

- ① 어떤 구간에서 부등식 $f(x) \leq a$ 가 항상 성립하려면 그 구간에서 $\Rightarrow (f(x) \text{의 최댓값}) \leq a$
- ② 어떤 구간에서 부등식 $f(x) \geq a$ 가 항상 성립하려면 그 구간에서 $\Rightarrow (f(x) \text{의 최솟값}) \geq a$

0634 $f(x) = 4x^3 - 3x^2 - 6x$ 라 하면

$$f'(x) = 12x^2 - 6x - 6 = 6(2x+1)(x-1)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = -\frac{1}{2} \text{ 또는 } x = 1$$

x	-1	...	$-\frac{1}{2}$...	1	...
$f'(x)$		+	0	-	0	+
$f(x)$	-1	/	$\frac{7}{4}$	\	-5	/

따라서 함수 $f(x)$ 의 최솟값은 -5 이므로 $x \geq -1$ 에서 $f(x) \geq k$ 가 항상 성립하려면 $k \leq -5$

즉 실수 k 의 최댓값은 -5 이다. 답 ⑤

0635 $2x^3 + 2x^2 - 35x + k \leq -x^2 + x$ 에서

$$2x^3 + 3x^2 - 36x + k \leq 0$$

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x + k \text{라 하면}$$

$$f'(x) = 6x^2 + 6x - 36 = 6(x+3)(x-2)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = -3 (\because x < 0)$$

따라서 함수 $f(x)$ 의 최댓값은

$k + 81$ 이므로 $x < 0$ 에서

$f(x) \leq 0$ 이 항상 성립하려면

$$k + 81 \leq 0$$

$$\therefore k \leq -81$$

답 ①

x	...	-3	...	0
$f'(x)$	+	0	-	
$f(x)$	/	$k+81$	\	

0636 $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + k$ 라 하면

$$f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 6(x-1)(x-2)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = 1 \text{ 또는 } x = 2$$

→ ①

x	1	...	2	...	3
$f'(x)$	0	-	0	+	
$f(x)$	$k+5$	\	$k+4$	/	$k+9$

따라서 함수 $f(x)$ 의 최댓값은 $k+9$, 최솟값은 $k+4$ 이므로 $1 \leq x \leq 3$ 에서 $0 \leq f(x) \leq 10$ 이 항상 성립하려면 $k+4 \geq 0$, $k+9 \leq 10$ 이어야 한다.

$$\therefore -4 \leq k \leq 1$$

→ ②

즉 정수 k 는 $-4, -3, -2, -1, 0, 1$ 의 6개이다. → ③

답 6

채점 기준	비율
① $f'(x) = 0$ 인 x 의 값을 구할 수 있다.	40 %
② k 의 값의 범위를 구할 수 있다.	50 %
③ 정수 k 의 개수를 구할 수 있다.	10 %

0637 운송 회사가 손해를 보지 않으려면 (배달 요금) \geq (비용)이어야 하므로 $x > 0$ 에서 부등식 $2x^3 + 3x^2 + a \geq 180x + 4500$, 즉 $2x^3 + 3x^2 - 180x - 4500 + a \geq 0$ 이 항상 성립해야 한다.

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 180x - 4500 + a \text{라 하면}$$

$$f'(x) = 6x^2 + 6x - 180 = 6(x+6)(x-5)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = 5 (\because x > 0)$$

x	0	...	5	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$		\	$a-5075$	/

따라서 함수 $f(x)$ 의 최솟값은 $a-5075$ 이므로 $x > 0$ 에서 $f(x) \geq 0$ 이 항상 성립하려면

$$a - 5075 \geq 0 \quad \therefore a \geq 5075$$

즉 a 의 최솟값은 5075이다. 답 5075

유형 08

부등식이 항상 성립할 조건

본책 108쪽

모든 실수 x 에 대하여 부등식 $f(x) \geq 0$ 이 성립하려면
 $\Rightarrow (f(x) \text{의 최솟값}) \geq 0$

0638 (i) $k=0$ 일 때, $x^4+3 \geq 0$ 이므로 주어진 부등식은 항상 성립한다.

(ii) $k \neq 0$ 일 때, $f(x) = x^4 + 4k^3x + 3$ 이라 하면

$$f'(x) = 4x^3 + 4k^3 = 4(x+k)(x^2 - kx + k^2)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = -k (\because x^2 - kx + k^2 > 0)$$

따라서 함수 $f(x)$ 의 최솟값

은 $-3k^4 + 3$ 이므로 모든

실수 x 에 대하여 $f(x) \geq 0$

이 성립하려면

$$-3k^4 + 3 \geq 0, \quad k^4 - 1 \leq 0$$

$$(k+1)(k-1)(k^2+1) \leq 0$$

$$\therefore -1 \leq k < 0 \text{ 또는 } 0 < k \leq 1 (\because k \neq 0)$$

(i), (ii)에서 $-1 \leq k \leq 1$ 이므로 정수 k 는 $-1, 0, 1$ 의 3개이다. **답 3**

0639 $2x^4 - 4x^2 \geq k$ 에서 $2x^4 - 4x^2 - k \geq 0$

$f(x) = 2x^4 - 4x^2 - k$ 라 하면

$$f'(x) = 8x^3 - 8x = 8x(x+1)(x-1)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = -1 \text{ 또는 } x = 0 \text{ 또는 } x = 1$$

x	\dots	-1	\dots	0	\dots	1	\dots
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	\searrow	$-k-2$	\nearrow	$-k$	\searrow	$-k-2$	\nearrow

따라서 함수 $f(x)$ 의 최솟값은 $-k-2$ 이므로 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) \geq 0$ 이 성립하려면

$$-k-2 \geq 0 \quad \therefore k \leq -2$$

즉 실수 k 의 최댓값은 -2 이다.

답 ④

유형 09

부등식 $f(x) > g(x)$ 꼴

본책 108쪽

어떤 구간에서 부등식 $f(x) > g(x)$ 가 항상 성립하려면

$\Rightarrow h(x) = f(x) - g(x)$ 라 할 때, 그 구간에서
 $(h(x) \text{의 최솟값}) > 0$

0640 $y=f(x)$ 의 그래프가 $y=g(x)$ 의 그래프보다 항상 위쪽에 있으려면 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) > g(x)$ 가 성립해야 한다.

$h(x) = f(x) - g(x)$ 라 하면

$$h(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 - 9x - (2x^3 + 5x^2 - x - a)$$

$$= x^4 - 6x^2 - 8x + a$$

$$\therefore h'(x) = 4x^3 - 12x - 8 = 4(x+1)^2(x-2)$$

$$h'(x) = 0 \text{에서 } x = -1 \text{ 또는 } x = 2$$

x	\dots	-1	\dots	2	\dots
$h'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	\searrow	$a+3$	\searrow	$a-24$	\nearrow

따라서 함수 $h(x)$ 의 최솟값은 $a-24$ 이므로 모든 실수 x 에 대하여 $h(x) > 0$ 이 성립하려면

$$a-24 > 0 \quad \therefore a > 24$$

답 ⑤

0641 $h(x) = f(x) - g(x)$ 라 하면

$$h(x) = 4x^3 - 6x - (-3x^2 - a) = 4x^3 + 3x^2 - 6x + a$$

$$\therefore h'(x) = 12x^2 + 6x - 6 = 6(x+1)(2x-1)$$

$$h'(x) = 0 \text{에서 } x = -1 \text{ 또는 } x = \frac{1}{2}$$

x	-1	\dots	$\frac{1}{2}$	\dots	2
$h'(x)$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	$a+5$	\searrow	$a-\frac{7}{4}$	\nearrow	$a+32$

따라서 함수 $h(x)$ 의 최댓값은 $a+32$ 이므로 $-1 \leq x \leq 2$ 에서 $h(x) \leq 0$ 이 항상 성립하려면

$$a+32 \leq 0 \quad \therefore a \leq -32$$

즉 실수 a 의 최댓값은 -32 이다.

답 -32

0642 $x > 3$ 에서 곡선 $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2$ 이 직선 $y = -\frac{5}{4}x + k$ 보다 항상

위쪽에 있으려면 $x > 3$ 에서 부등식 $\frac{1}{3}x^3 - x^2 > -\frac{5}{4}x + k$, 즉

$\frac{1}{3}x^3 - x^2 + \frac{5}{4}x - k > 0$ 이 항상 성립해야 한다.

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + \frac{5}{4}x - k \text{라 하면}$$

$$f'(x) = x^2 - 2x + \frac{5}{4} = (x-1)^2 + \frac{1}{4} \geq \frac{1}{4}$$

$x > 3$ 일 때 $f'(x) > 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 구간 $(3, \infty)$ 에서 증가한다.

따라서 $x > 3$ 에서 $f(x) > 0$ 이 성립하려면 $f(3) \geq 0$ 이어야 하므로

$$-k + \frac{15}{4} \geq 0 \quad \therefore k \leq \frac{15}{4}$$

즉 정수 k 의 최댓값은 3이다.

답 ③

0643 $f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x$ 라 하면

$$f'(x) = 3x^2 + 12x + 9 = 3(x+3)(x+1)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = -3 \text{ 또는 } x = -1$$

→ ①

x	\dots	-3	\dots	-1	\dots	0
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	\nearrow	0	\searrow	-4	\nearrow	0

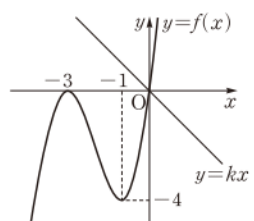
따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. **→ ②**

이때 $y=kx$ 의 그래프는 원점을 지나는 직선이므로 $x \leq 0$ 에서 $f(x) \leq kx$ 가 항상 성립하려면

$$k \leq 0$$

→ ③

답 $k \leq 0$





채점 기준	비율
① $f'(x)=0$ 인 x 의 값을 구할 수 있다.	20 %
② $y=f(x)$ 의 그래프를 그릴 수 있다.	30 %
③ k 의 값의 범위를 구할 수 있다.	50 %

참고 $f(x)=x^3+6x^2+(9-k)x$ 라 하면
 $f'(x)=3x^2+12x+9-k$
 이므로 $f'(x)=0$ 인 x 의 값을 구할 수 없다.

유형 10~12 속도와 가속도 본책 108, 109쪽

수직선 위를 움직이는 점 P의 시간 t 에서의 위치 x 가 $x=f(t)$ 일 때, 시간 t 에서의 점 P의 속도 v 와 가속도 a 는

$$v = \frac{dx}{dt} = f'(t), \quad a = \frac{dv}{dt}$$

이때 점 P의 속력은 $|v|$ 이다.

0644 점 P가 원점을 지날 때는 $x=0$ 일 때이므로
 $t^3-4t^2+4t=0, \quad t(t-2)^2=0$
 $\therefore t=0$ 또는 $t=2$

따라서 점 P가 출발 후 다시 원점을 지날 때는 $t=2$ 일 때이고, 점 P의 속도를 v 라 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = 3t^2 - 8t + 4$$

이므로 $t=2$ 일 때 점 P의 속도는
 $12-16+4=0$

답 0

0645 점 P의 속도를 v 라 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = 3t^2 + 2at - 2$$

$t=3$ 일 때 $v=13$ 이므로 $27+6a-2=13$
 $6a=-12 \quad \therefore a=-2$

답 ①

0646 두 점 P, Q의 속도를 각각 v_P, v_Q 라 하면

$$v_P = 2t^2, \quad v_Q = -3t + 5$$

이때 두 점 P, Q의 속도가 같아지려면 $v_P = v_Q$ 이므로

$$2t^2 = -3t + 5, \quad 2t^2 + 3t - 5 = 0$$

$$(2t+5)(t-1) = 0 \quad \therefore t = 1 \quad (\because t \geq 0)$$

$x_P(1)=1, x_Q(1)=4$ 이므로 구하는 두 점 P, Q 사이의 거리는
 $4-1=3$

답 3

채점 기준	비율
① 두 점 P, Q의 속도를 구할 수 있다.	40 %
② 속도가 같아지는 순간의 시간을 구할 수 있다.	30 %
③ 두 점 P, Q 사이의 거리를 구할 수 있다.	30 %

0647 $h(t)=f(t)-g(t)$ 라 하면

$$h'(t)=f'(t)-g'(t)=6t^2-18t+a$$

$t=1$ 에서 두 점 P, Q가 만나므로 $h(1)=0$

$$2-9+a+b=0 \quad \therefore a+b=7 \quad \dots\dots ①$$

또 $t=1$ 에서 두 점 P, Q의 속도가 같으므로 $h'(1)=0$

$$6-18+a=0 \quad \therefore a=12$$

$a=12$ 를 ①에 대입하면 $b=-5$

즉 $h(t)=2t^3-9t^2+12t-5$ 이므로

$$h'(t)=6t^2-18t+12=6(t-1)(t-2)$$

$h'(t)=0$ 에서 $t=1$ 또는 $t=2$

따라서 두 점 P, Q의 속도가 다시 같아지는 시각은 $t=2$ 이고,

$h(2)=-1$ 이므로 두 점 P, Q 사이의 거리는 1이다.

답 1

시각 t 에서의 두 점 P, Q 사이의 거리는 $|h(t)|$ 이다.

0648 점 P의 속도를 v 라 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = 6t^2 - 6t - 8$$

$$6t^2 - 6t - 8 = 4 \text{에서} \quad 6t^2 - 6t - 12 = 0$$

$$6(t+1)(t-2) = 0 \quad \therefore t = 2 \quad (\because t \geq 0)$$

점 P의 가속도를 a 라 하면

$$a = \frac{dv}{dt} = 12t - 6$$

이므로 $t=2$ 일 때 점 P의 가속도는

$$24-6=18$$

답 18

0649 점 P의 속도를 v 라 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = -4t^3 + 3kt^2 + 12t + 2$$

$t=1$ 에서 점 P의 속도가 19이므로

$$-4+3k+12+2=19$$

$$3k=9 \quad \therefore k=3$$

$$\therefore v = -4t^3 + 9t^2 + 12t + 2$$

이때 점 P의 가속도를 a 라 하면

$$a = \frac{dv}{dt} = -12t^2 + 18t + 12$$

따라서 $t=1$ 에서 점 P의 가속도는

$$-12+18+12=18$$

답 ④

0650 점 P의 속도를 v 라 하면

$$v = f'(t) = 3t^2 - 6t - 5 = 3(t-1)^2 - 8$$

즉 $0 \leq t \leq 3$ 에서 $-8 \leq f'(t) \leq 4$ 이므로

$$0 \leq |f'(t)| \leq 8$$

따라서 점 P의 속력의 최댓값은 8이다.

답 8

0651 점 P의 속도를 v 라 하면

$$v = f'(t) = -t^2 + 2t + 4 = -(t-1)^2 + 5$$

즉 $0 \leq t \leq 4$ 에서 $-4 \leq f'(t) \leq 5$ 이므로

$$0 \leq |f'(t)| \leq 5$$

따라서 점 P의 속력의 최댓값은 5이고 그때의 시각은 $t=1$ 이므로

$$M=5, a=1$$

$$\therefore M+a=6$$

답 ③

유형 13

속도·가속도와 운동 방향

본책 110쪽

- ① 수직선 위를 움직이는 점 P가 운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이다.
 ② 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q가 서로 반대 방향으로 움직이면
 \Rightarrow (두 점의 속도의 곱) < 0

0652 점 P의 속도를 v 라 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = 3t^2 - 12t + 9 = 3(t-1)(t-3)$$

운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이므로 $v=0$ 에서

$$t=1 \text{ 또는 } t=3$$

$t=1$ 일 때 점 P의 위치는 4이고, $t=3$ 일 때 점 P의 위치는 0이므로
 두 점 A, B 사이의 거리는 4이다. 답 4

0653 점 P의 속도를 v 라 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = 3t^2 - 24t + 36 = 3(t-2)(t-6)$$

운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이므로 $v=0$ 에서

$$t=2 \text{ 또는 } t=6$$

따라서 점 P는 $t=2, t=6$ 에서 운동 방향을 2번 바꾼다. 답 2번

0654 점 M의 시각 t 에서의 위치를 $m(t)$ 라 하면

$$m(t) = \frac{1}{2}\{f(t) + g(t)\} = t^2 - 4t + 3 \quad \cdots \textcircled{1}$$

점 M의 속도를 v 라 하면

$$v = m'(t) = 2t - 4 \quad \cdots \textcircled{2}$$

운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이므로 $v=0$ 에서

$$t=2$$

따라서 점 M은 $t=2$ 에서 운동 방향을 1번 바꾼다. 답 1번

채점 기준

비율

① 점 M의 위치를 구할 수 있다.	30 %
② 점 M의 속도를 구할 수 있다.	20 %
③ 점 M이 운동 방향을 몇 번 바꾸는지 구할 수 있다.	50 %

0655 점 P의 속도를 v 라 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = 3t^2 - 18t + 15 = 3(t-1)(t-5)$$

운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이므로 $v=0$ 에서

$$t=1 \text{ 또는 } t=5$$

즉 점 P는 $t=1$ 일 때 첫 번째로 운동 방향을 바꾸고, $t=5$ 일 때 두 번째로 운동 방향을 바꾼다.

이때 점 P의 가속도를 a 라 하면

$$a = \frac{dv}{dt} = 6t - 18$$

따라서 $t=5$ 일 때 점 P의 가속도는

$$30 - 18 = 12 \quad \text{답 ⑤}$$

0656 두 점 P, Q의 속도를 각각 v_P, v_Q 라 하면

$$v_P = 2t - 4, v_Q = 2t - 8$$

두 점 P, Q가 서로 반대 방향으로 움직이면 $v_P v_Q < 0$ 이므로

$$(2t-4)(2t-8) < 0, \quad (t-2)(t-4) < 0$$

$$\therefore 2 < t < 4 \quad \text{답 ②}$$

0657 점 P의 속도를 v 라 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = 6t^2 + 2mt + n$$

$t=1$ 일 때 점 P는 운동 방향을 바꾸므로

$$6 + 2m + n = 0 \quad \text{운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이다.} \quad \cdots \textcircled{1}$$

$t=1$ 일 때 점 P의 위치는 3이므로

$$2 + m + n + 3 = 3 \quad \therefore m + n = -2 \quad \cdots \textcircled{2}$$

①, ②를 연립하여 풀면 $m = -4, n = 2 \quad \cdots \textcircled{3}$

$$\therefore v = 6t^2 - 8t + 2 = 2(3t-1)(t-1)$$

즉 점 P가 $t=1$ 이외에 운동 방향을 바꾸는 시각은 $t=\frac{1}{3}$ 이다. $\cdots \textcircled{4}$

이때 점 P의 가속도를 a 라 하면

$$a = \frac{dv}{dt} = 12t - 8$$

따라서 $t=\frac{1}{3}$ 일 때 점 P의 가속도는

$$4 - 8 = -4 \quad \cdots \textcircled{5}$$

답 -4

채점 기준

비율

① m, n 의 값을 구할 수 있다.	40 %
② 점 P가 $t=1$ 이외에 운동 방향을 바꾸는 시각을 구할 수 있다.	30 %
③ 가속도를 구할 수 있다.	30 %

유형 14

정지하는 물체의 속도와 움직인 거리

본책 110쪽

움직이는 물체가 제동을 건 후 t 초 동안 움직인 거리를 x m라 할 때

$$\textcircled{1} \text{ 제동을 건 지 } t \text{초 후의 속도} \Rightarrow \frac{dx}{dt}$$

$$\textcircled{2} \text{ 물체가 정지할 때의 속도} \Rightarrow 0$$

0658 열차가 제동을 건 지 t 초 후의 속도를 v 라 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = 12 - 0.8t$$

열차가 정지할 때의 속도는 0이므로 $v=0$ 에서

$$12 - 0.8t = 0 \quad \therefore t = 15$$

따라서 15초 동안 열차가 움직인 거리는

$$12 \times 15 - 0.4 \times 15^2 = 90 \text{ (m)} \quad \text{답 90 m}$$

0659 자동차가 브레이크를 밟은 지 t 초 후의 속도를 v 라 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = 36 - 9t$$

자동차가 정지할 때의 속도는 0이므로 $v=0$ 에서

$$36 - 9t = 0 \quad \therefore t = 4$$

따라서 브레이크를 밟은 후 자동차가 정지할 때까지 걸린 시간은 4초이다. 답 ③



0660 기차가 제동을 건 지 t 초 후의 속도를 v 라 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = 27 - 0.9t$$

기차가 정지할 때의 속도는 0이므로 $v=0$ 에서

$$27 - 0.9t = 0 \quad \therefore t = 30$$

이때 30초 동안 기차가 움직인 거리는

$$27 \times 30 - 0.45 \times 30^2 = 405 \text{ (m)}$$

따라서 목적지로부터 전방 405 m의 지점에서 제동을 걸어야 하므로

$$a = 405$$

답 405

유형 15 위로 던진 물체의 위치와 속도

본책 111쪽

지면에서 지면과 수직하게 위로 던진 물체의 t 초 후의 높이를 h m라 할 때

① t 초 후의 물체의 속도 $\Rightarrow \frac{dh}{dt}$

② 최고 지점에 도달했을 때의 속도 $\Rightarrow 0$

0661 로켓의 t 초 후의 속도를 v 라 하면

$$v = \frac{dh}{dt} = 20 - 10t$$

최고 지점에 도달했을 때의 속도는 0이므로 $v=0$ 에서

$$20 - 10t = 0 \quad \therefore t = 2$$

따라서 2초 후 로켓의 지면으로부터의 높이는

$$20 \cdot 2 - 5 \cdot 2^2 = 20 \text{ (m)}$$

답 ②

0662 물체가 지면에 떨어질 때의 높이는 $h=0$ 에서

$$30 + 25t - 5t^2 = 0, \quad t^2 - 5t - 6 = 0$$

$$(t+1)(t-6) = 0 \quad \therefore t = 6 \quad (\because t \geq 0)$$

→ ①

물체의 t 초 후의 속도를 v 라 하면

$$v = \frac{dh}{dt} = 25 - 10t$$

→ ②

$t=6$ 일 때 물체의 속도는

$$25 - 60 = -35 \text{ (m/s)}$$

→ ③

따라서 물체가 지면에 떨어지는 순간의 속력은 35 m/s이다. → ④

답 35 m/s

채점 기준	비율
① 물체가 지면에 떨어질 때의 시각을 구할 수 있다.	40 %
② t 초 후의 속도를 구할 수 있다.	30 %
③ 물체가 지면에 떨어지는 순간의 속도를 구할 수 있다.	20 %
④ 물체가 지면에 떨어지는 순간의 속력을 구할 수 있다.	10 %

0663 물체의 t 초 후의 속도를 v 라 하면

$$v = \frac{dh}{dt} = a - 10t$$

최고 지점에 도달했을 때의 속도는 0이므로 $v=0$ 에서

$$a - 10t = 0 \quad \therefore t = \frac{a}{10}$$

즉 $t = \frac{a}{10}$ 일 때 물체의 지면으로부터의 높이가 최대가 되므로

$$a \cdot \frac{a}{10} - 5 \cdot \left(\frac{a}{10}\right)^2 \geq 80, \quad \frac{a^2}{20} \geq 80$$

$$a^2 \geq 1600 \quad \therefore a \geq 40 \quad (\because a > 0)$$

따라서 양수 a 의 최솟값은 40이다.

답 40

유형 16 속도의 그래프의 해석

본책 111쪽

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t 에서의 속도 $v(t)$ 의 그래프에서

① $v(t)$ 의 그래프가 t 축과 $t=a$ 에서 만나고 $t=a$ 의 좌우에서 $v(t)$ 의 부호가 바뀌면

→ 점 P는 $t=a$ 에서 운동 방향을 바꾼다.

② $v(t)$ 가 증가하는 구간

→ 점 P의 가속도는 양의 값이다.

③ $v(t)$ 가 감소하는 구간

→ 점 P의 가속도는 음의 값이다.

0664 ① 점 P의 시각 t 에서의 가속도는 $v'(t)$ 이고, $v'(a) < 0$ 이므로 $t=a$ 일 때 가속도는 음의 값이다.

④ $t=f$ 에서 $v(t) > 0$ 이므로 점 P는 움직이고 있다.

⑤ $t=d$ 와 $t=h$ 의 좌우에서 $v(t)$ 의 부호가 바뀌므로 점 P의 운동 방향이 바뀐다. 따라서 $0 < t < i$ 에서 점 P는 운동 방향을 2번 바꾼다.

답 ④

0665 ㄱ. $v(a) > 0, v(c) < 0$ 이므로 $t=a$ 일 때와 $t=c$ 일 때 점 P의 운동 방향은 서로 반대이다.

ㄴ. $t=c$ 의 좌우에서 $v(t)$ 의 부호가 바뀌지 않으므로 $t=c$ 일 때 점 P는 운동 방향을 바꾸지 않는다.

ㄷ. 점 P의 시각 t 에서의 가속도는 $v'(t)$ 이고, $v'(d) > 0$ 이므로 $t=d$ 일 때 점 P의 가속도는 양의 값이다.

ㄹ. $v'(t)=0$ 이면 가속도가 0이고, $v'(a)=0, v'(c)=0$ 이므로 점 P의 가속도가 0이 되는 순간이 두 번 있다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다.

답 ④

유형 17 위치의 그래프의 해석

본책 112쪽

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t 에서의 위치 $x(t)$ 의 그래프에서

① $x'(t) > 0$ 인 구간 \Rightarrow 점 P는 양의 방향으로 움직인다.

② $x'(t)=0$ 일 때 \Rightarrow 점 P는 정지하거나 운동 방향을 바꾼다.

③ $x'(t) < 0$ 인 구간 \Rightarrow 점 P는 음의 방향으로 움직인다.

0666 점 P의 시각 t 에서의 속도를 $v(t)$ 라 하자.

ㄱ. $0 < k < a$ 일 때, $v(k)=x'(k) > 0$ 이고 $v(a)=x'(a)=0$ 이므로 $v(k) > v(a)$

따라서 $0 < t < b$ 에서 점 P의 속도는 $t=a$ 일 때 최대가 아니다.

ㄴ. $a < t < c$ 에서 $v(t)=x'(t) < 0$ 이므로 $t=b$ 일 때 점 P는 운동 방향을 바꾸지 않는다.

ㄷ. $v(c)=x'(c)=0$ 이므로 $t=c$ 일 때 점 P의 속도는 0이다.

ㄹ. $0 < t < d$ 에서 $t=c$ 일 때 $|x(t)|$ 의 값이 가장 크므로 점 P가 원점에서 가장 멀리 떨어져 있다.

이상에서 옳은 것은 ㄷ, ㄹ이다.

답 ⑤

0667 주어진 그래프에서 점 P가 원점을 지나는 시각은 $t=c$ 또는 $t=e$ 이고, 이 중 처음으로 원점을 지나는 시각은 $t=c$ 이므로 구하는 속도는 $x'(c)$ 의 값과 같다. **답 ⑤**

0668 $x(t)$ 는 t 에 대한 삼차식이고, $x(t)$ 의 그래프가 t 축과 만나는 점의 t 좌표가 각각 0, 2, 5이므로

$$x(t) = kt(t-2)(t-5) = kt^3 - 7kt^2 + 10kt \quad (k > 0)$$

라 할 수 있다.

점 P의 시각 t 에서의 속도를 v , 가속도를 a 라 하면

$$v = x'(t) = 3kt^2 - 14kt + 10k$$

$$a = \frac{dv}{dt} = 6kt - 14k$$

따라서 가속도가 0이 되는 시각은 $a=0$ 에서

$$6kt - 14k = 0 \quad \therefore t = \frac{7}{3} \quad \text{답 } \frac{7}{3}$$

0669 ㄱ. 두 점 P, Q는 $t=1, t=8$ 일 때 모두 두 번 만난다.

ㄴ. $f(t)$ 의 그래프는 t 의 값이 커질수록 접선의 기울기가 점점 작아지므로 $f'(4) > f'(8)$ 이다. 따라서 점 P의 $t=4$ 일 때의 속력은 $t=8$ 일 때의 속력보다 빠르다.

ㄷ. $4 \leq t \leq 8$ 일 때,

$$\text{점 P가 움직인 거리} = f(8) - f(4)$$

$$\text{점 Q가 움직인 거리} = g(8) - g(4)$$

주어진 그래프에서

$$g(8) - g(4) > f(8) - f(4)$$

이므로 점 Q가 움직인 거리가 점 P가 움직인 거리보다 길다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. **답 ㄱ, ㄴ**

유형 18~20 시각에 대한 변화율

본책 112, 113쪽

어떤 물체의 시각 t 에서의 길이가 l , 넓이가 S , 부피가 V 일 때, 시각 t 에서의 변화율 구하기

(i) t 초 후의 길이, 넓이, 부피 등의 관계식을 세운다.

(ii) t 에 대하여 미분한다.

$$\textcircled{1} \text{ 길이의 변화율} \Rightarrow \frac{dl}{dt} \quad \textcircled{2} \text{ 넓이의 변화율} \Rightarrow \frac{dS}{dt}$$

$$\textcircled{3} \text{ 부피의 변화율} \Rightarrow \frac{dV}{dt}$$

(iii) (ii)에서 구한 식에 주어진 조건을 만족시키는 t 의 값을 대입한다.

0670 t 초 동안 사람이 움직인 거리를 x m, 사람의 그림자의 길이를 y m라 하면 오른쪽 그림에서 $\triangle ABC \sim \triangle DBE$ (AA 닮음)이므로

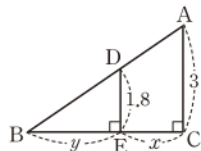
$$3 : 1.8 = (x+y) : y$$

$$3y = 1.8x + 1.8y, \quad 1.2y = 1.8x$$

$$\therefore y = \frac{3}{2}x$$

그런데 $x=2t$ 이므로 $y=3t \quad \therefore \frac{dy}{dt} = 3$

따라서 그림자의 길이의 변화율은 3 m/s이다. **답 ④**



0671 t 초 후의 두 점 P, Q의 좌표는 각각 $(2t, 0), (0, t)$ 이므로 두 점 P, Q를 지나는 직선의 방정식은

$$\frac{x}{2t} + \frac{y}{t} = 1 \quad \dots\dots \textcircled{1} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 직선 ①과 직선 $y=x$ 의 교점 R의 x 좌표는 $\frac{x}{2t} + \frac{x}{t} = 1$ 에서

$$\frac{3x}{2t} = 1 \quad \therefore x = \frac{2}{3}t \quad \therefore R\left(\frac{2}{3}t, \frac{2}{3}t\right) \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

\overline{OR} 의 길이를 l 이라 하면

$$l = \sqrt{\left(\frac{2}{3}t\right)^2 + \left(\frac{2}{3}t\right)^2} = \sqrt{\frac{8}{9}t^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}t$$

$$\therefore \frac{dl}{dt} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

따라서 \overline{OR} 의 길이의 변화율은 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ 이다. **답 ③**

$$\text{답 } \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

채점 기준	비율
① 두 점 P, Q를 지나는 직선의 방정식을 세울 수 있다.	30 %
② 점 R의 좌표를 구할 수 있다.	20 %
③ \overline{OR} 의 길이의 변화율을 구할 수 있다.	50 %

0672 t 초 후의 가장 바깥쪽 원의 반지름의 길이는 $10t$ cm이므로 원의 넓이를 S cm²라 하면

$$S = \pi \cdot (10t)^2 = 100\pi t^2$$

$$\therefore \frac{dS}{dt} = 200\pi t$$

따라서 $t=2$ 일 때 원의 넓이의 변화율은

$$200\pi \cdot 2 = 400\pi \text{ (cm}^2/\text{s)}$$

$$\therefore a = 400$$

답 400

0673 t 초 후의 정사각형의 한 변의 길이는 $(10+2t)$ cm이므로 정사각형의 넓이를 S cm²라 하면

$$S = (10+2t)^2 = 4t^2 + 40t + 100$$

$$\therefore \frac{dS}{dt} = 8t + 40$$

정사각형의 넓이가 400 cm²가 될 때, 한 변의 길이는 20 cm이므로

$$10+2t=20 \quad \therefore t=5$$

따라서 $t=5$ 일 때 정사각형의 넓이의 변화율은

$$8 \cdot 5 + 40 = 80 \text{ (cm}^2/\text{s)}$$

답 ④

0674 t 초 후의 $\overline{AP}, \overline{BP}$ 의 길이는 각각 $2t, 10-2t$ 이므로 두 정사각형의 넓이의 합을 S 라 하면

$$S = (2t)^2 + (10-2t)^2 = 8t^2 - 40t + 100 \quad (0 < t < 5)$$

$$\therefore \frac{dS}{dt} = 16t - 40$$

따라서 $t=3$ 일 때 두 정사각형의 넓이의 합의 변화율은

$$16 \cdot 3 - 40 = 8$$

답 8



채점 기준

비율

① 넓이의 합 S를 t에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40 %
② 넓이의 합의 변화율을 구할 수 있다.	30 %
③ t=3일 때 넓이의 합의 변화율을 구할 수 있다.	30 %

0675 t초 후의 고무풍선의 반지름의 길이는 $(2 + \frac{1}{2}t)$ cm이므로

고무풍선의 부피를 $V \text{ cm}^3$ 라 하면

$$V = \frac{4}{3}\pi \cdot \left(2 + \frac{1}{2}t\right)^3 = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{1}{8}t^3 + \frac{3}{2}t^2 + 6t + 8\right)$$

$$\therefore \frac{dV}{dt} = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{3}{8}t^2 + 3t + 6\right)$$

따라서 t=4일 때 고무풍선의 부피의 변화율은

$$\frac{4}{3}\pi \cdot \left(\frac{3}{8} \cdot 4^2 + 3 \cdot 4 + 6\right) = 32\pi \text{ (cm}^3/\text{s)} \quad \text{답 ④}$$

0676 t초 후의 원기둥의 밑면의 반지름의 길이를 r cm, 높이를 h cm라 하면

$$r = 3 + t, h = 6 - t$$

원기둥의 부피를 $V \text{ cm}^3$ 라 하면

$$V = \pi r^2 h = \pi(3+t)^2(6-t) \quad (0 \leq t < 6)$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{dV}{dt} &= 2\pi(3+t)(6-t) + \pi(3+t)^2 \cdot (-1) \\ &= 3\pi(3+t)(3-t) \end{aligned}$$

$$\frac{dV}{dt} = 0 \text{에서 } t = 3 \quad (\because 0 \leq t < 6)$$

따라서 구하는 부피는

$$\pi \cdot (3+3)^2 \cdot (6-3) = 108\pi \text{ (cm}^3) \quad \text{답 } 108\pi \text{ cm}^3$$

0677 그릇에 담긴 물의 깊이를 h cm, 수면의 반지름의 길이를 r cm라 하면

$$r : h = 6 : 10 \quad \therefore r = \frac{3}{5}h$$

이때 t초 동안 수면의 높이는 $\frac{20}{9}t$ cm만큼 상

승하므로 $h = \frac{20}{9}t$

물의 부피를 $V \text{ cm}^3$ 라 하면

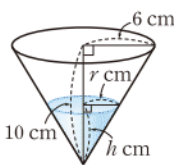
$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot \left(\frac{3}{5}h\right)^2 \cdot h = \frac{3}{25}\pi h^3$$

$$= \frac{3}{25}\pi \cdot \left(\frac{20}{9}t\right)^3 = \frac{320}{243}\pi t^3$$

$$\therefore \frac{dV}{dt} = \frac{320}{81}\pi t^2$$

h=5일 때 $5 = \frac{20}{9}t$ 에서 $t = \frac{9}{4}$ 이므로 물의 부피의 변화율은

$$\frac{320}{81}\pi \cdot \left(\frac{9}{4}\right)^2 = 20\pi \text{ (cm}^3/\text{s)} \quad \text{답 ②}$$



0678 전략 주어진 방정식을 $f(x) = k$ 꼴로 변형하고 함수 $y = f(x)$ 의 그래프를 그려 본다.

$$\text{풀이 } x^3 - 3x^2 - 9x + 3 + k = 0 \text{에서 } -x^3 + 3x^2 + 9x - 3 = k$$

$$f(x) = -x^3 + 3x^2 + 9x - 3 \text{이라 하면}$$

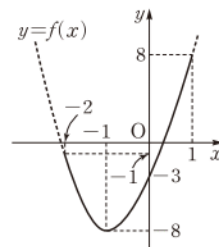
$$f'(x) = -3x^2 + 6x + 9 = -3(x+1)(x-3)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = -1 \quad (\because -2 \leq x \leq 1)$$

x	-2	...	-1	...	1
f'(x)		-	0	+	
f(x)	-1	\	-8	/	8

따라서 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 방정식 $f(x) = k$ 가 구간 $[-2, 1]$ 에서 적어도 한 개의 실근을 가지려면 $-8 \leq k \leq 8$

즉 정수 k는 -8, -7, -6, ..., 8의 17개 이다. 답 ④



0679 전략 a, b, c의 조건에 따라 $f'(x)$ 를 구한 후 증감표를 이용하여 함수 $y = f(x)$ 의 그래프의 개형을 그려 본다.

$$\text{풀이 } \neg, a = b = c \text{이면 } f'(x) = (x-a)^3$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = a$$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = a$ 에서 극

소이면서 최소이므로 최솟값은

$f(a)$ 이다.

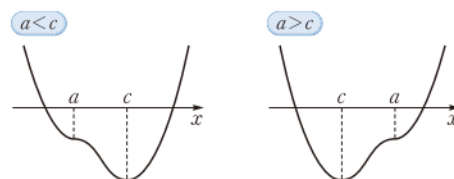
이때 $f(a) > 0$ 이면 방정식

$f(x) = 0$ 은 실근을 갖지 않는다.

$$\neg, a = b \neq c \text{이면 } f'(x) = (x-a)^2(x-c)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = a \text{ 또는 } x = c$$

함수 $f(x)$ 는 $x = c$ 에서 극소이고, $f(a) < 0$ 이므로 $y = f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다. $x=c$ 의 좌우에서 $f'(x)$ 의 부호가 음에서 양으로 바뀐다.

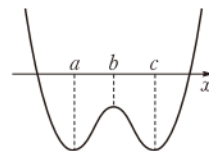


따라서 방정식 $f(x) = 0$ 은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

$$\neg, a < b < c \text{이면 } f'(x) = 0 \text{에서 } x = a \text{ 또는 } x = b \text{ 또는 } x = c$$

x	...	a	...	b	...	c	...
f'(x)	-	0	+	0	-	0	+
f(x)	\	극소	/	극대	\	극소	/

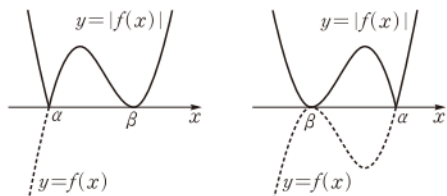
이때 $f(b) < 0$ 이면 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 방정식 $f(x) = 0$ 은 서로 다른 두 실근을 갖는다. 이상에서 옳은 것은 \neg, \neg 이다.



답 ⑤

0680 전략 함수 g의 치역을 이용하여 함수 $y = f(x)$ 의 그래프의 개형을 그려 본다.

풀이 조건 (가)에 의하여 함수 $y = |f(x)|$ 의 그래프의 개형은 다음과 같이 2가지 경우가 있다.



[그림 1]

[그림 2]

이때 조건 (나)에 의하여 방정식 $|f(x)|=4$ 의 서로 다른 실근의 개수가 3이므로 조건 (나)에서 함수 $|f(x)|$ 는 $x=0$ 에서 극댓값 4를 갖는다.

$f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)^2$ ($\alpha \neq \beta$)이라 하면

$$f'(x)=(x-\beta)^2+2(x-\alpha)(x-\beta) \\ = (x-\beta)(3x-2\alpha-\beta)$$

$f'(x)=0$ 에서 $x=\beta$ 또는 $x=\frac{2\alpha+\beta}{3}$ 이고

$$f(\beta)=0, f\left(\frac{2\alpha+\beta}{3}\right)=\frac{4}{27}(\beta-\alpha)^3$$

(i) [그림 1]에서 함수 $f(x)$ 는 $x=\frac{2\alpha+\beta}{3}$ 에서 극댓값 4를 가지므로

$$\frac{2\alpha+\beta}{3}=0, \frac{4}{27}(\beta-\alpha)^3=4$$

$$\therefore \beta=-2\alpha, \beta-\alpha=3$$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $\alpha=-1, \beta=2$

따라서 $f(x)=(x+1)(x-2)^2$ 이므로

$$f(-3)f(3)=-50 \cdot 4=-200$$

(ii) [그림 2]에서 함수 $f(x)$ 는 $x=\frac{2\alpha+\beta}{3}$ 에서 극솟값 -4를 가지

므로

$$\frac{2\alpha+\beta}{3}=0, \frac{4}{27}(\beta-\alpha)^3=-4$$

$$\therefore \beta=-2\alpha, \beta-\alpha=-3$$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $\alpha=1, \beta=-2$

따라서 $f(x)=(x-1)(x+2)^2$ 이므로

$$f(-3)f(3)=-4 \cdot 50=-200$$

(i), (ii)에서 $f(-3)f(3)=-200$ [답] -200

0681 [전략] 방정식 $h(x)=0$ 이 서로 다른 세 실근을 가져야 함을 이용한다.

[풀이] 주어진 그래프에서 $h'(a)=h'(\beta)=0$ 이고 $x=a, x=\beta$ 의 좌우에서 $h'(x)$ 의 부호가 바뀌므로 함수 $h(x)$ 는 $x=a$ 에서 극대, $x=\beta$ 에서 극소이다.

이때 두 함수 $y=f(x)$ 와 $y=g(x)$ 의 그래프가 서로 다른 세 점에서 만나려면 방정식 $h(x)=0$ 이 서로 다른 세 실근을 가져야 하므로

$$h(a)>0, h(\beta)<0 \quad \text{[답] ④}$$

0682 [전략] 함수 $y=f(x)$ 의 그래프를 그린 후 t 의 값의 범위에 따라 구간 $[0, t]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최댓값과 최솟값을 구한다.

[풀이] $f(x)=x^4-\frac{16}{3}x^3+6x^2+10$ 에서

$$f'(x)=4x^3-16x^2+12x=4x(x-1)(x-3)$$

$f'(x)=0$ 에서 $x=0$ 또는 $x=1$ 또는 $x=3$

x	0	...	1	...	3	...
$f'(x)$	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	10	↗	$\frac{35}{3}$	↘	1	↗

따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

이때 $f(x)=10$ 을 만족시키는 x 의 값을

$\alpha(1<\alpha<3), f(x)=\frac{35}{3}$ 를 만족시키는

x 의 값을 $\beta(\beta>3)$ 라 하자.

(i) $1 \leq t < \alpha$ 일 때, 구간 $[0, t]$ 에서 함수

$f(x)$ 의 최댓값은 $\frac{35}{3}$, 최솟값은 10이

므로

$$g(t)=\frac{35}{3}-10=\frac{5}{3}$$

(ii) $\alpha \leq t < 3$ 일 때, 구간 $[0, t]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최댓값은 $\frac{35}{3}$, 최솟값은 $f(t)$ 이므로

$$g(t)=\frac{35}{3}-f(t)=-t^4+\frac{16}{3}t^3-6t^2+\frac{5}{3}$$

(iii) $3 \leq t < \beta$ 일 때, 구간 $[0, t]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최댓값은 $\frac{35}{3}$, 최솟값은 1이므로

$$g(t)=\frac{35}{3}-1=\frac{32}{3}$$

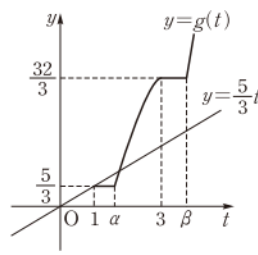
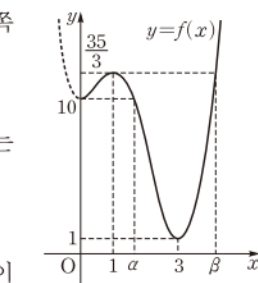
(iv) $t \geq \beta$ 일 때, 구간 $[0, t]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최댓값은 $f(t)$, 최솟값은 1이므로

$$g(t)=f(t)-1=t^4-\frac{16}{3}t^3+6t^2+9$$

이상에서 함수 $y=g(t)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

한편 $3g(t)-5t=0$ 에서 $g(t)=\frac{5}{3}t$ 이

므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 $y=g(t)$ 의 그래프와 직선 $y=\frac{5}{3}t$ 의 교점의 개수와 같다. 오른쪽



그림에서 그 교점은 2개이므로 구하는 서로 다른 실근의 개수는 2이다. [답] ②

0683 [전략] 먼저 점 $(a, 1)$ 을 지나는 직선 l_P 의 방정식을 구한다.

[풀이] $y=x^2$ 에서 $y'=2x$

곡선 $y=x^2$ 위의 점 $P(p, p^2)$ 에서의 접선의 기울기는 $2p$ 이므로 점

P 를 지나고 기울기가 $-\frac{1}{2p}$ 인 직선 l_P 의 방정식은

$$y-p^2=-\frac{1}{2p}(x-p)$$

$$\therefore y=-\frac{1}{2p}x+\frac{1}{2}+p^2$$

이 직선이 점 $(a, 1)$ 을 지나므로

$$1=-\frac{a}{2p}+\frac{1}{2}+p^2 \quad \therefore a=2p^3-p$$



$f(p) = 2p^3 - p$ 라 하면

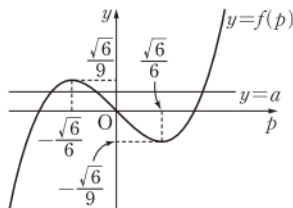
$$f'(p) = 6p^2 - 1 = 6\left(p + \frac{\sqrt{6}}{6}\right)\left(p - \frac{\sqrt{6}}{6}\right)$$

$$f'(p) = 0 \text{에서 } p = -\frac{\sqrt{6}}{6} \text{ 또는 } p = \frac{\sqrt{6}}{6}$$

p	...	$-\frac{\sqrt{6}}{6}$...	$\frac{\sqrt{6}}{6}$...
$f'(p)$	+	0	-	0	+
$f(p)$	\nearrow	$\frac{\sqrt{6}}{9}$	\searrow	$-\frac{\sqrt{6}}{9}$	\nearrow

따라서 함수 $y=f(p)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 서로 다른 직선 l_p 가 세 개 존재하기 위한 실수 a 의 값의 범위는

$$-\frac{\sqrt{6}}{9} < a < \frac{\sqrt{6}}{9}$$



$$\text{답 } -\frac{\sqrt{6}}{9} < a < \frac{\sqrt{6}}{9}$$

참고 $p=0$ 일 때, 직선 l_p 의 방정식은 $x=0$ 이고 이 직선은 점 $(0, 1)$ 을 지나므로 $a=0$, 즉 $a=2p^3-p$ 를 만족시킨다.

0684 전략 $g(x)=f(x)+f'(x)$ 라 하고 조건 ㄴ을 만족시키는 함수 $y=g(x)$ 의 그래프의 개형을 그려 본다.

풀이 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c 는 상수)라 하면

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

$$\text{조건 ㉞에서 } f(0)+f'(0)=0 \text{이므로 } c+b=0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$g(x)=f(x)+f'(x)$ 라 하면

$$g(x) = x^3 + (a+3)x^2 + (2a+b)x$$

$g(0)=0$ 이고, 조건 ㄴ에 의하여 $x \geq -2$ 에서 $g(x) \geq 0$ 이므로 함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

즉 함수 $g(x)$ 는 $x=0$ 에서 극소이므로

$$g'(x) = 3x^2 + 2(a+3)x + 2a+b \text{에서}$$

$$g'(0) = 2a+b=0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

따라서 $g(x)=x^3+(a+3)x^2=x^2(x+a+3)$ 이므로 $g(x)=0$ 에서 $x=0$ 또는 $x=-a-3$

$x \geq -2$ 에서 $g(x) \geq 0$ 이 성립하려면

$$-a-3 \leq -2 \quad \therefore a \geq -1 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

한편 ㉠, ㉡에서 $b=-2a, c=2a$ 이므로

$$f(x) = x^3 + ax^2 - 2ax + 2a$$

조건 ㉢에서 $f(2) \leq 6$ 이므로

$$f(2) = 8 + 4a - 4a + 2a \leq 6 \quad \therefore a \leq -1 \quad \dots\dots \textcircled{4}$$

㉢, ㉣에서 $a=-1$

따라서 $f(x)=x^3-x^2+2x-2$ 이므로

$$f(3) = 27 - 9 + 6 - 2 = 22$$

답 22

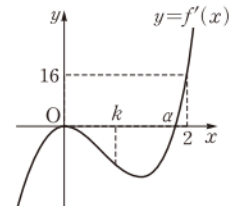
0685 전략 주어진 조건을 이용하여 삼차함수 $y=f'(x)$ 의 그래프의 개형을 그려 본다.

풀이 조건 ㉞, ㄴ에 의하여 삼차함수

$y=f'(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

ㄱ. 함수 $y=f'(x)$ 의 그래프는 x 축과 구간 $(0, 2)$ 에서 한 점에서 만나므로 방정식 $f'(x)=0$ 은 구간 $(0, 2)$ 에서 한 개의 실근을 갖는다.

ㄴ. 함수 $y=f'(x)$ 의 그래프가 x 축과 구간 $(0, 2)$ 에서 만나는 점의 x 좌표를 a 라 하면 $f'(x)=0$ 에서 $x=0$ 또는 $x=a$



x	...	0	...	a	...
$f'(x)$	-	0	-	0	+
$f(x)$	\searrow		\searrow	극소	\nearrow

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=a$ 에서 극대값을 갖고, 극대값은 갖지 않는다.

ㄷ. $f(0)=0$ 이면 $f(x)=x^3(x-a)$ ($a>0$)라 할 수 있다.

$$f(x) = x^4 - ax^3 \text{에서 } f'(x) = 4x^3 - 3ax^2 \text{이고 조건 ㉞에서}$$

$$f'(2) = 16 \text{이므로}$$

$$32 - 12a = 16 \quad \therefore a = \frac{4}{3}$$

$$\text{즉 } f(x) = x^4 - \frac{4}{3}x^3 \text{이므로 } f'(x) = 4x^3 - 4x^2 = 4x^2(x-1)$$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 최솟값 $-\frac{1}{3}$ 을 가지므로 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) \geq -\frac{1}{3}$ 이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

0686 전략 두 함수 $y=f(x), y=g(x)$ 의 그래프에서 x 좌표가 a 인 점에서의 접선이 서로 일치하면 $f(a)=g(a), f'(a)=g'(a)$ 임을 이용한다.

풀이 두 함수 $y=f(x), y=g(x)$ 의 그래프가 y 축에서 만나므로

$$f(0)=g(0)$$

또 x 좌표가 3인 점에서의 접선이 서로 일치하므로

$$f(3)=g(3), f'(3)=g'(3)$$

즉 $h(x)=f(x)-g(x)$ 라 하면 $h'(x)=f'(x)-g'(x)$ 이므로

$$h(0)=0, h(3)=0, h'(3)=0$$

이때 $h(x)$ 는 삼차항의 계수가 1인 삼차함수이므로

$$h(x) = x(x-3)^2 = x^3 - 6x^2 + 9x$$

$$\therefore h'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-1)(x-3)$$

$h'(x)=0$ 에서 $x=1$ 또는 $x=3$

x	...	1	...	3	...
$h'(x)$	+	0	-	0	+
$h(x)$	\nearrow	4	\searrow	0	\nearrow

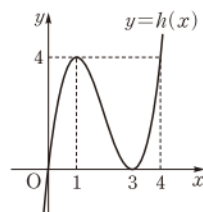
따라서 함수 $y=h(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

방정식 $h(x)=4$ 를 만족시키는 x 의 값은

$$x^3 - 6x^2 + 9x = 4$$

$$x^3 - 6x^2 + 9x - 4 = 0$$

$$(x-1)^2(x-4) = 0$$



$$\therefore x=1 \text{ 또는 } x=4$$

따라서 $x \geq 4$ 일 때, 부등식 $h(x) \geq 4$, 즉 $f(x) \geq g(x) + 4$ 가 항상 성립하므로 구하는 실수 a 의 최솟값은 4이다. **답 4**

0687 전략 접선의 방정식을 구하여 접점의 x 좌표를 t 에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 $y=x^2$ 에서 $y'=2x$

접점 Q의 좌표를 (a, a^2) 이라 하면 점 R의 좌표는 $(a, 0)$ 이고 점 Q에서의 접선의 방정식은

$$y-a^2=2a(x-a) \quad \therefore y=2ax-a^2$$

이 직선이 점 $P(3t^3+kt^2, 0)$ 을 지나므로

$$0=2a(3t^3+kt^2)-a^2, \quad a(a-6t^3-2kt^2)=0$$

$$\therefore a=6t^3+2kt^2 \quad (\because a \neq 0) \quad \left[a=0 \text{이면 접선은 직선 } y=0 \text{이다.} \right]$$

점 R가 시각 t 에서 x 축 위를 움직이는 속도를 v 라 하면

$$v=\frac{da}{dt}=18t^2+4kt$$

$$t=1 \text{ 일 때 } v=38 \text{ 이므로 } 18+4k=38$$

$$4k=20 \quad \therefore k=5$$

답 5

0688 전략 수직선 위를 움직이는 점 P가 운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0임을 이용한다.

풀이 $f(t)=at^3+bt^2+ct$ 에서

$$g(t)=f'(t)=3at^2+2bt+c$$

모든 실수 t 에 대하여 $3f(t)=tg(t)+2ct$ 가 성립하므로

$$3(at^3+bt^2+ct)=t(3at^2+2bt+c)+2ct$$

$$\therefore 3at^3+3bt^2+3ct=3at^3+2bt^2+3ct$$

항등식의 성질에 의하여 $3b=2b$ 이므로 $b=0$

$$\therefore g(t)=3at^2+c$$

한편 점 P가 시각 $t=1$ 에서 운동 방향을 바꾸므로 $g(1)=0$ 에서

$$3a+c=0 \quad \therefore c=-3a \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

또 점 P의 시각 t 에서의 가속도는 $g'(t)=6at$ 이므로 $g'(1)=12$ 에서

$$6a=12 \quad \therefore a=2$$

$$a=2 \text{ 를 } \textcircled{1} \text{ 에 대입하면 } c=-6$$

따라서 $g(t)=6t^2-6$ 이므로 점 P의 시각 $t=2$ 에서의 속도는

$$g(2)=24-6=18$$

답 4

0689 전략 태풍의 중심과 A지점 사이의 거리, 태풍의 중심이 이동한 거리를 이용하여 A지점이 태풍의 영향권에서 벗어나는 순간의 시각을 구한다.

풀이 t 시간 후 태풍의 영향권은 반지름의 길이가 $(60+5t)$ km인 원이고, 태풍의 중심이 움직인 거리는 $40t$ km이므로 A지점이 태풍의 영향권에서 벗어나는 순간의 시각은

$$\frac{40t-(60+5t)}{5}=500, \quad 35t=560$$

$$\therefore t=16 \quad \left[\text{태풍의 중심이 이동한 거리} - (\text{태풍의 영향권의 반지름의 길이}) \right]$$

이때 태풍의 영향권의 넓이를 $S(t)$ km^2 라 하면

$$S(t)=\pi(60+5t)^2=\pi(25t^2+600t+3600)$$

$$\therefore S'(t)=\pi(50t+600)$$

따라서 $t=16$ 일 때 태풍의 영향권의 넓이의 변화율은

$$\pi \cdot (50 \cdot 16 + 600) = 1400\pi \text{ (km}^2/\text{h)}$$

$$\therefore a=1400$$

답 1400

0690 전략 곡선 $y=h(x)$ 와 직선 $y=k$ 가 서로 다른 네 점에서 만나도록 하는 k 의 값의 범위를 구한다.

풀이 $f(x)=\frac{3}{4}x^4-x^3-3x^2+8$ 에서

$$f'(x)=3x^3-3x^2-6x=3x(x+1)(x-2)$$

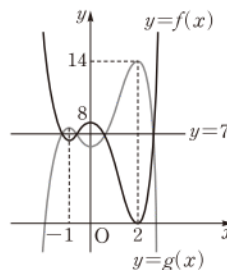
$$f'(x)=0 \text{ 에서 } x=-1 \text{ 또는 } x=0 \text{ 또는 } x=2$$

x	\cdots	-1	\cdots	0	\cdots	2	\cdots
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	\searrow	$\frac{27}{4}$	\nearrow	8	\searrow	0	\nearrow

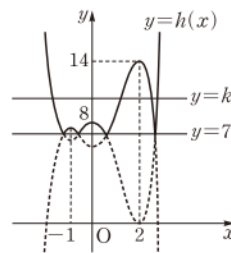
따라서 곡선 $y=f(x)$ 와 곡선 $y=f(x)$ 를 직선 $y=7$ 에 대하여 대칭 이동한 곡선 $y=g(x)$ 는 [그림 1]과 같다. **→ 1**

이때 $h(x)=\begin{cases} f(x) & (f(x) \geq 7) \\ g(x) & (f(x) < 7) \end{cases}$ 이므로 함수 $y=h(x)$ 의 그래프는

[그림 2]와 같다. **→ 2**



[그림 1]



[그림 2]

방정식 $h(x)=k$ 의 서로 다른 실근의 개수는 곡선 $y=h(x)$ 와 직선 $y=k$ 의 교점의 개수와 같으므로 방정식 $h(x)=k$ 가 서로 다른 4개의 실근을 갖도록 하는 실수 k 의 값의 범위는

$$k=7 \text{ 또는 } 8 < k < 14$$

→ 3

따라서 정수 k 는 7, 9, 10, 11, 12, 13의 6개이다. **→ 4**

답 6

채점 기준	비율
① 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 를 그릴 수 있다.	30 %
② 함수 $y=h(x)$ 의 그래프를 그릴 수 있다.	30 %
③ k 의 값의 범위를 구할 수 있다.	30 %
④ 정수 k 의 개수를 구할 수 있다.	10 %

0691 전략 사차함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 개형을 생각해 본다.

풀이 사차함수 $f(x)$ 가 극댓값을 가지려면 방정식 $f'(x)=0$ 이 서로 다른 세 실근을 가져야 한다. **→ 1**

$$f'(x)=4x^3-12x+2a \text{ 이므로 } g(x)=4x^3-12x+2a \text{ 라 하면}$$

$$g'(x)=12x^2-12=12(x+1)(x-1)$$

$$g'(x)=0 \text{ 에서 } x=-1 \text{ 또는 } x=1$$



삼차방정식 $g(x)=0$ 이 서로 다른 세 실근을 가지려면
 $g(-1)g(1)<0$ 이어야 하므로
 $(2a+8)(2a-8)<0, \quad (a+4)(a-4)<0$
 $\therefore -4<a<4$
 따라서 주어진 조건을 만족시키는 정수 a 의 최댓값은 3이다.
 답 3

채점 기준	비율
① 방정식 $f'(x)=0$ 이 서로 다른 세 실근을 가져야 함을 알 수 있다.	30 %
② 방정식 $g(x)=0$ 이 서로 다른 세 실근을 가질 조건을 알 수 있다.	30 %
③ a 의 값의 범위를 구할 수 있다.	30 %
④ 정수 a 의 최댓값을 구할 수 있다.	10 %

0692 전략 $(f(x)$ 의 최솟값) $\geq(g(x)$ 의 최댓값)이어야 한다.
풀이 임의의 두 실수 x_1, x_2 에 대하여 $f(x_1)\geq g(x_2)$ 가 성립하려면
 $(f(x)$ 의 최솟값) $\geq(g(x)$ 의 최댓값)이어야 한다.
 \therefore ①

$f(x)=x^4+x^2-6x$ 에서
 $f'(x)=4x^3+2x-6=2(x-1)(2x^2+2x+3)$
 $f'(x)=0$ 에서 $x=1$ ($\because 2x^2+2x+3>0$)
 즉 함수 $f(x)$ 의 최솟값은 -4 이다.
 \therefore ②

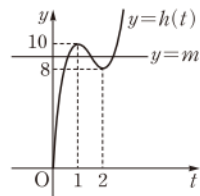
한편
 $g(x)=-2x^2-8x+a$
 $=-2(x+2)^2+8+a$
 이므로 함수 $g(x)$ 의 최댓값은 $8+a$ 이다.
 따라서 $-4\geq 8+a$ 이므로 $a\leq -12$
 즉 실수 a 의 최댓값은 -12 이다.
 답 -12

채점 기준	비율
① $(f(x)$ 의 최솟값) $\geq(g(x)$ 의 최댓값)이어야 함을 알 수 있다.	20 %
② $f(x)$ 의 최솟값을 구할 수 있다.	30 %
③ $g(x)$ 의 최댓값을 구할 수 있다.	20 %
④ 실수 a 의 최댓값을 구할 수 있다.	30 %

0693 전략 두 점 P, Q의 시각 t 에서의 속도를 각각 구한다.
풀이 두 점 P, Q의 속도를 각각 v_P, v_Q 라 하면
 $v_P=f'(t)=4t^3-18t^2+24t, v_Q=g'(t)=m$
 \therefore ①
 두 점 P, Q의 속도가 같아지는 순간이 세 번 있으려면 $v_P=v_Q$ 를 만족시키는 t 의 값이 3개 존재해야 하므로 방정식 $4t^3-18t^2+24t=m$ 이 음이 아닌 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.
 \therefore ②
 $h(t)=4t^3-18t^2+24t$ ($t\geq 0$)라 하면
 $h'(t)=12t^2-36t+24=12(t-1)(t-2)$
 $h'(t)=0$ 에서 $t=1$ 또는 $t=2$

t	0	...	1	...	2	...
$h'(t)$		+	0	-	0	+
$h(t)$	0	/	10	\	8	/

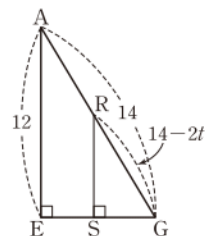
따라서 함수 $y=h(t)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
 \therefore ③
 곡선 $y=h(t)$ 와 직선 $y=m$ 이 서로 다른 세 점에서 만나려면
 $8<m<10$
 \therefore ④
 답 $8<m<10$



채점 기준	비율
① 두 점 P, Q의 속도를 구할 수 있다.	20 %
② 방정식 $v_P=v_Q$ 가 음이 아닌 서로 다른 세 실근을 가져야 함을 알 수 있다.	20 %
③ $y=h(t)$ 의 그래프를 그릴 수 있다.	30 %
④ m 의 값의 범위를 구할 수 있다.	30 %

0694 전략 t 초 후의 여러 선분의 길이를 구하여 두 사면체의 부피의 합을 t 에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 t 초 후 $\overline{FP}=\overline{HQ}=t, \overline{AR}=2t$ 이고
 $\overline{AG}=\sqrt{4^2+6^2+12^2}=14$ 이므로
 $\overline{PG}=6-t, \overline{GQ}=4-t, \overline{RG}=14-2t$ ($0<t<4$)
 오른쪽 그림과 같이 점 R에서 선분 EG에 내린 수선의 발을 S라 하면
 $\triangle AEG \sim \triangle RSG$ (AA 닮음)이므로
 $\overline{AE}:\overline{RS}=\overline{AG}:\overline{RG}$
 $12:\overline{RS}=14:(14-2t)$
 $14\overline{RS}=12(14-2t)$
 $\therefore \overline{RS}=12-\frac{12}{7}t$



이때 점 R에서 선분 AC에 내린 수선의 발을 T라 하면
 $\overline{RT}=12-\left(12-\frac{12}{7}t\right)=\frac{12}{7}t$
 \therefore ①

두 사면체 RBCD, RPGQ의 부피의 합을 V 라 하면
 $V=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 4\right)\cdot\frac{12}{7}t$
 $+\frac{1}{3}\cdot\left\{\frac{1}{2}\cdot(6-t)\cdot(4-t)\right\}\cdot\left(12-\frac{12}{7}t\right)$
 $=\frac{48}{7}t+\left(-\frac{2}{7}t^3+\frac{34}{7}t^2-\frac{188}{7}t+48\right)$
 $=-\frac{2}{7}t^3+\frac{34}{7}t^2-20t+48$
 $\therefore \frac{dV}{dt}=-\frac{6}{7}t^2+\frac{68}{7}t-20$
 \therefore ②
 \therefore ③

따라서 $t=3$ 일 때 두 사면체의 부피의 합의 변화율은
 $-\frac{54}{7}+\frac{204}{7}-20=\frac{10}{7}$
 \therefore ④
 답 $\frac{10}{7}$

채점 기준	비율
① 여러 선분의 길이를 t 에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40 %
② 부피의 합 V 를 t 에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	20 %
③ 부피의 합의 변화율을 구할 수 있다.	20 %
④ $t=3$ 일 때 부피의 합의 변화율을 구할 수 있다.	20 %

07 부정적분

0695 $(6x)' = 6$ 이므로 $\int 6 dx = 6x + C$ 답 $6x + C$

0696 $(x^3)' = 3x^2$ 이므로 $\int 3x^2 dx = x^3 + C$ 답 $x^3 + C$

0697 $(-x^2)' = -2x$ 이므로 $\int (-2x) dx = -x^2 + C$
답 $-x^2 + C$

0698 $(x^4)' = 4x^3$ 이므로 $\int 4x^3 dx = x^4 + C$ 답 $x^4 + C$

0699 $f(x) = (2x^2 + 5x + C)' = 4x + 5$ 답 $f(x) = 4x + 5$

미분법의 공식

- ① $y = x^n$ (n 은 자연수) $\Rightarrow y' = nx^{n-1}$
 ② $y = c$ (c 는 상수) $\Rightarrow y' = 0$

0700 $f(x) = \left(-\frac{2}{3}x^3 + 4x + C\right)'$
 $= -2x^2 + 4$ 답 $f(x) = -2x^2 + 4$

0701 $f(x) = (x^4 + 3x^3 + x + C)'$
 $= 4x^3 + 9x^2 + 1$ 답 $f(x) = 4x^3 + 9x^2 + 1$

0702 $xf(x) = (x^3 + x^2 + C)'$
 $= 3x^2 + 2x$
 $\therefore f(x) = 3x + 2$ 답 $f(x) = 3x + 2$

0703 $(x-1)f(x) = \left(\frac{1}{3}x^3 - x + C\right)'$
 $= x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$
 $\therefore f(x) = x + 1$ 답 $f(x) = x + 1$

0704 $\frac{d}{dx} \int f(x) dx = f(x)$ 이므로
 $\frac{d}{dx} \int x^3 dx = x^3$ 답 x^3

0705 $\int \left\{ \frac{d}{dx} f(x) \right\} dx = f(x) + C$ 이므로
 $\int \left(\frac{d}{dx} x^3 \right) dx = x^3 + C$ 답 $x^3 + C$

0706 $\int x^3 dx = \frac{1}{4}x^4 + C$ 답 $\frac{1}{4}x^4 + C$

0707 $\int x^5 dx = \frac{1}{6}x^6 + C$ 답 $\frac{1}{6}x^6 + C$

0708 $\int x^{10} dx = \frac{1}{11}x^{11} + C$ 답 $\frac{1}{11}x^{11} + C$

0709 $\int x^{100} dx = \frac{1}{101}x^{101} + C$ 답 $\frac{1}{101}x^{101} + C$

0710 $\int (3x+2) dx = \int 3x dx + \int 2 dx$
 $= 3 \int x dx + \int 2 dx$
 $= \frac{3}{2}x^2 + 2x + C$ 답 $\frac{3}{2}x^2 + 2x + C$

0711 $\int (2x^3 - x + 1) dx = \int 2x^3 dx - \int x dx + \int 1 dx$
 $= 2 \int x^3 dx - \int x dx + \int 1 dx$
 $= \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + x + C$
답 $\frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + x + C$

0712 $\int (x+1)^2 dx = \int (x^2 + 2x + 1) dx$
 $= \int x^2 dx + \int 2x dx + \int 1 dx$
 $= \int x^2 dx + 2 \int x dx + \int 1 dx$
 $= \frac{1}{3}x^3 + x^2 + x + C$
답 $\frac{1}{3}x^3 + x^2 + x + C$

0713 $\int (x+1)(x^2 - x + 1) dx = \int (x^3 + 1) dx$
 $= \int x^3 dx + \int 1 dx$
 $= \frac{1}{4}x^4 + x + C$
답 $\frac{1}{4}x^4 + x + C$

0714 $\int (2x+1)^2 dx - \int (2x-1)^2 dx$
 $= \int (4x^2 + 4x + 1) dx - \int (4x^2 - 4x + 1) dx$
 $= \int 8x dx = 8 \int x dx = 4x^2 + C$ 답 $4x^2 + C$



$$\begin{aligned}
 0715 \quad & \int (x+1)^3 dx + \int (x-1)^3 dx \\
 &= \int (x^3 + 3x^2 + 3x + 1) dx + \int (x^3 - 3x^2 + 3x - 1) dx \\
 &= \int (2x^3 + 6x) dx = \int 2x^3 dx + \int 6x dx \\
 &= 2 \int x^3 dx + 6 \int x dx \\
 &= \frac{1}{2} x^4 + 3x^2 + C \quad \text{답 } \frac{1}{2} x^4 + 3x^2 + C
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 0716 \quad & \int \frac{x^2}{x+1} dx - \int \frac{1}{x+1} dx \\
 &= \int \frac{x^2-1}{x+1} dx = \int (x-1) dx \\
 &= \int x dx - \int 1 dx \\
 &= \frac{1}{2} x^2 - x + C \quad \text{답 } \frac{1}{2} x^2 - x + C
 \end{aligned}$$

유형 01 부정적분의 정의

본책 120쪽

$F(x)$ 는 $f(x)$ 의 부정적분이다.

$$\iff \int f(x) dx = F(x) + C \quad (\text{단, } C \text{는 적분상수})$$

\iff 함수 $F(x)$ 의 도함수가 $f(x)$ 이다.

$$\iff F'(x) = f(x)$$

$$\begin{aligned}
 0717 \quad & \int (x-2)f(x) dx = 2x^3 - 24x + C \text{에서} \\
 & (x-2)f(x) = (2x^3 - 24x + C)' \\
 &= 6x^2 - 24 \\
 &= 6(x+2)(x-2)
 \end{aligned}$$

따라서 $f(x) = 6(x+2)$ 이므로

$$f(2) = 6 \cdot 4 = 24$$

답 24

$$\begin{aligned}
 0718 \quad & F(x) = 3x^2 + x - 1 \text{이라 하면} \\
 & f(x) = F'(x) = (3x^2 + x - 1)' = 6x + 1 \\
 & \therefore f(1) = 6 + 1 = 7
 \end{aligned}$$

답 ⑤

$$\begin{aligned}
 0719 \quad & F(x) - G(x) = k \quad (k \text{는 상수}) \text{라 하면} \\
 & k = F(0) - G(0) = -2 - 1 = -3
 \end{aligned}$$

→ ①

이므로

$$\begin{aligned}
 G(x) &= F(x) - k = x^3 - x^2 + 3x - 2 - (-3) \\
 &= x^3 - x^2 + 3x + 1
 \end{aligned}$$

→ ②

$$\therefore G(1) = 1 - 1 + 3 + 1 = 4$$

→ ③

답 4

채점 기준

비율

① k 의 값을 구할 수 있다.

40 %

② $G(x)$ 를 구할 수 있다.

40 %

③ $G(1)$ 의 값을 구할 수 있다.

20 %

$$\begin{aligned}
 0720 \quad & f(x) = F'(x) = (x^3 + ax^2 + bx)' = 3x^2 + 2ax + b \text{이므로} \\
 & f(0) = 3 \text{에서}
 \end{aligned}$$

$$b = 3$$

$$f'(x) = 6x + 2a \text{이므로 } f'(0) = 1 \text{에서}$$

$$2a = 1 \quad \therefore a = \frac{1}{2}$$

$$\therefore ab = \frac{3}{2}$$

답 $\frac{3}{2}$

$$0721 \quad \int F(x) dx = f(x)g(x) \text{에서}$$

$$F(x) = \{f(x)g(x)\}'$$

$$= f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$= 2x(2x^2 - 4x + 1) + (x^2 - 1)(4x - 4)$$

$$= 8x^3 - 12x^2 - 2x + 4$$

따라서 함수 $F(x)$ 의 일차항의 계수는 -2 이다.

답 ③

곱의 미분법

두 함수 $f(x), g(x)$ 가 미분가능할 때,

$$y = f(x)g(x) \Rightarrow y' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$



유형 02~03 부정적분과 미분의 관계

본책 120, 121쪽

$$\begin{aligned}
 ① \quad & \frac{d}{dx} \int f(x) dx = f(x) \quad \text{(그대로)} \\
 ② \quad & \int \left\{ \frac{d}{dx} f(x) \right\} dx = f(x) + C \quad \text{(그대로) + (적분상수)} \quad (\text{단, } C \text{는 적분상수})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 0722 \quad & F(x) = \frac{d}{dx} \int x f(x) dx = x f(x) = 5x^3 - 8x^2 \\
 & \therefore F(2) = 40 - 32 = 8
 \end{aligned}$$

답 ②

$$\begin{aligned}
 0723 \quad & \frac{d}{dx} \int (ax^2 + x + 3) dx = ax^2 + x + 3 \text{이므로} \\
 & ax^2 + x + 3 = x^2 + bx + c
 \end{aligned}$$

위의 등식이 모든 실수 x 에 대하여 성립하므로

$$a = 1, b = 1, c = 3$$

$$\therefore a + b + c = 5$$

답 ③

$$0724 \quad \frac{d}{dx} \int (4x^2 - 5x) dx = 4x^2 - 5x,$$

$$\frac{d}{dx} \int (3x^3 - 2) dx = 3x^3 - 2 \text{이므로 주어진 방정식은}$$

$$3x^3 + 4x^2 - 5x - 2 = 0$$

따라서 주어진 방정식의 모든 근의 합은 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$-\frac{4}{3}$$

답 ①



따라서 $f(x) = x^2 + 8x - 4$ 이므로
 $f(-2) = 4 - 16 - 4 = -16$

답 ①

$$\begin{aligned} 0732 \quad f(x) &= \int \frac{x^3}{x+1} dx + \int \frac{1}{x+1} dx \\ &= \int \frac{x^3+1}{x+1} dx \\ &= \int \frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x+1} dx \\ &= \int (x^2-x+1) dx \\ &= \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x + C \end{aligned}$$

$f(0) = 1$ 이므로 $C = 1$

따라서 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x + 1$ 이므로
 $f(6) = 72 - 18 + 6 + 1 = 61$

답 61

$$\begin{aligned} 0733 \quad f(x) &= \int \left(x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots + \frac{1}{10}x^{10} \right) dx \\ &= \frac{1}{1 \cdot 2}x^2 + \frac{1}{2 \cdot 3}x^3 + \frac{1}{3 \cdot 4}x^4 + \cdots + \frac{1}{10 \cdot 11}x^{11} + C \\ f(1) &= 1 \text{이므로} \\ \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{10 \cdot 11} + C \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{11}\right) + C \\ &= 1 - \frac{1}{11} + C \\ &= \frac{10}{11} + C = 1 \\ \therefore C &= \frac{1}{11} \end{aligned}$$

따라서

$$f(x) = \frac{1}{1 \cdot 2}x^2 + \frac{1}{2 \cdot 3}x^3 + \frac{1}{3 \cdot 4}x^4 + \cdots + \frac{1}{10 \cdot 11}x^{11} + \frac{1}{11}$$

이므로 $f(0) = \frac{1}{11}$

답 $\frac{1}{11}$

유형 06 도함수가 주어질 때 함수 구하기

본책 122쪽

함수 $f(x)$ 의 도함수 $f'(x)$ 가 주어지면 $f(x) = \int f'(x) dx$ 임을 이용하여
 $f(x)$ 를 적분상수를 포함한 식으로 나타낸다.

$$\begin{aligned} 0734 \quad f(x) &= \int f'(x) dx = \int (3x^2 + 6x - 2a) dx \\ &= x^3 + 3x^2 - 2ax + C \\ f(0) &= -2, f(-1) = 4 \text{이므로} \\ C &= -2, -1 + 3 + 2a + C = 4 \\ \therefore a &= 2, C = -2 \\ \text{따라서 } f(x) &= x^3 + 3x^2 - 4x - 2 \text{이므로} \\ f(2) &= 8 + 12 - 8 - 2 = 10 \end{aligned}$$

답 10

$$\begin{aligned} 0735 \quad f(x) &= \int f'(x) dx = \int \frac{x^8-1}{x^4+1} dx \\ &= \int \frac{(x^4+1)(x^4-1)}{x^4+1} dx = \int (x^4-1) dx \\ &= \frac{1}{5}x^5 - x + C \end{aligned}$$

$f(1) = \frac{6}{5}$ 이므로

$$\frac{1}{5} - 1 + C = \frac{6}{5} \quad \therefore C = 2$$

따라서 $f(x) = \frac{1}{5}x^5 - x + 2$ 이므로

$$f(-1) = -\frac{1}{5} + 1 + 2 = \frac{14}{5}$$

답 ④

$$0736 \quad f'(x) = 12x(x-1) = 12x^2 - 12x \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \int f'(x) dx = \int (12x^2 - 12x) dx \\ &= 4x^3 - 6x^2 + C_1 \end{aligned}$$

$f(0) = 1$ 이므로 $C_1 = 1$

$$\therefore f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 1$$

→ ①

$$\begin{aligned} \therefore F(x) &= \int f(x) dx = \int (4x^3 - 6x^2 + 1) dx \\ &= x^4 - 2x^3 + x + C_2 \end{aligned}$$

$F(1) = -1$ 이므로

$$1 - 2 + 1 + C_2 = -1 \quad \therefore C_2 = -1$$

$$\therefore F(x) = x^4 - 2x^3 + x - 1$$

→ ②

따라서 $F(x)$ 를 $x-2$ 로 나누었을 때의 나머지는

$$F(2) = 16 - 16 + 2 - 1 = 1$$

→ ③

답 1

채점 기준	비율
① $f(x)$ 를 구할 수 있다.	40 %
② $F(x)$ 를 구할 수 있다.	40 %
③ $F(x)$ 를 $x-2$ 로 나누었을 때의 나머지를 구할 수 있다.	20 %

나머지정리

다항식 $f(x)$ 를 일차식 $x-a$ 로 나누었을 때의 나머지를 R 라 하면
 $\Rightarrow R = f(a)$



0737 직선 $y = -\frac{1}{2}x + 3$ 과 수직인 직선의 기울기는 2이고 두 직선이 y 축 위의 한 점에서 만나면 두 직선의 y 절편이 같으므로 직선의 방정식은 $y = 2x + 3$
 즉 $f'(x) = 2x + 3$ 이므로

$$\begin{aligned} f(x) &= \int f'(x) dx = \int (2x + 3) dx \\ &= x^2 + 3x + C \end{aligned}$$

이때 $f(0) = f'(0) = 3$ 이므로 $C = 3$

따라서 $f(x) = x^2 + 3x + 3$ 이므로

$$f(3) = 9 + 9 + 3 = 21$$

답 ②

유형 07 부정적분과 미분의 관계의 활용
: $xf(x)$ 꼴을 포함하는 경우

본책 123쪽

$xf(x)$ 꼴을 포함하는 등식이 주어지면 등식의 양변을 x 에 대하여 미분한다.
이때 $\{xf(x)\}' = f(x) + xf'(x)$ 임을 이용한다.

0738 $F(x) = xf(x) - 6x^4 + 6x^3$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f(x) = f(x) + xf'(x) - 24x^3 + 18x^2$$

$$xf'(x) = 24x^3 - 18x^2$$

$$\therefore f'(x) = 24x^2 - 18x$$

$$\therefore f(x) = \int f'(x)dx = \int (24x^2 - 18x)dx$$

$$= 8x^3 - 9x^2 + C$$

$$f(1) = 0 \text{이므로}$$

$$8 - 9 + C = 0 \quad \therefore C = 1$$

$$\therefore f(x) = 8x^3 - 9x^2 + 1$$
 답 $f(x) = 8x^3 - 9x^2 + 1$

0739 $\int g(x)dx = x^3f(x) + C$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$g(x) = 3x^2f(x) + x^3f'(x)$$

$$\therefore g(1) = 3f(1) + f'(1) = 6 + 1 = 7$$
 답 ⑤

0740 $2 \int f(x)dx = f(x) + xf(x) - x - 1$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$2f(x) = f'(x) + f(x) + xf'(x) - 1$$

$$\therefore f(x) = (1+x)f'(x) - 1 \quad \dots\dots ㉠ \quad \rightarrow ①$$
 $f(x)$ 가 일차함수이므로 $f(x) = ax + b$ (a, b 는 상수, $a \neq 0$)라 하면

$$f'(x) = a$$
 $f(x) = ax + b, f'(x) = a$ 를 ㉠에 대입하면

$$ax + b = a(1+x) - 1$$

$$ax + b = ax + a - 1$$

$$\therefore b = a - 1 \quad \dots\dots ㉡$$
또 $f(1) = 3$ 이므로

$$a + b = 3 \quad \dots\dots ㉢$$
㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$$a = 2, b = 1 \quad \rightarrow ②$$
따라서 $f(x) = 2x + 1$ 이므로 $y = f(x)$ 의 그래프의 x 절편은

$$0 = 2x + 1 \quad \therefore x = -\frac{1}{2} \quad \rightarrow ③$$
답 $-\frac{1}{2}$

채점 기준	비율
① 주어진 등식의 양변을 미분할 수 있다.	30 %
② a, b 의 값을 구할 수 있다.	50 %
③ x 절편을 구할 수 있다.	20 %

0741 $f(x) + \int xf(x)dx = \frac{3}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{7}{2}x^2 - x$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x) + xf(x) = 3x^3 - x^2 + 7x - 1 \quad \dots\dots ㉠$$
 $f(x)$ 를 n 차 함수라 하면 $xf(x)$ 는 $(n+1)$ 차 함수이므로 ㉠에서

$$n+1=3 \quad \therefore n=2$$
즉 $f(x)$ 가 이차함수이므로 $f(x) = ax^2 + bx + c$ (a, b, c 는 상수, $a \neq 0$)라 하면

$$f'(x) = 2ax + b$$
 $f(x) = ax^2 + bx + c, f'(x) = 2ax + b$ 를 ㉠에 대입하면

$$2ax + b + x(ax^2 + bx + c) = 3x^3 - x^2 + 7x - 1$$

$$\therefore ax^3 + bx^2 + (2a+c)x + b = 3x^3 - x^2 + 7x - 1$$
위의 등식이 모든 실수 x 에 대하여 성립하므로

$$a=3, b=-1, 2a+c=7$$

$$\therefore a=3, b=-1, c=1$$
따라서 $f(x) = 3x^2 - x + 1$ 이므로

$$f(2) = 12 - 2 + 1 = 11$$
 답 ③

유형 08 부정적분과 함수의 연속성

본책 124쪽

함수 $f(x)$ 에 대하여 $f'(x)$ 가 $f'(x) = \begin{cases} g_1(x) & (x > a) \\ g_2(x) & (x < a) \end{cases}$ 이고, $f(x)$ 가 $x=a$ 에서 연속이면

$$① f(x) = \begin{cases} \int g_1(x)dx & (x > a) \\ \int g_2(x)dx & (x < a) \end{cases}$$

$$② f(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} \int g_1(x)dx = \lim_{x \rightarrow a^-} \int g_2(x)dx$$

0742 $f'(x) = \begin{cases} x-3 & (x > -1) \\ k & (x < -1) \end{cases}$ 이므로

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 - 3x + C_1 & (x > -1) \\ kx + C_2 & (x < -1) \end{cases}$$

$$f(0) = -3 \text{이므로} \quad C_1 = -3$$

$$\therefore f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x - 3 \quad (x > -1)$$

$$f(-2) = 6 \text{이므로} \quad -2k + C_2 = 6 \quad \dots\dots ㉠$$

$f(x)$ 는 $x = -1$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \left(\frac{1}{2}x^2 - 3x - 3 \right) = \lim_{x \rightarrow -1^-} (kx + C_2)$$

$$\therefore -k + C_2 = \frac{1}{2} \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$C_2 = -5, k = -\frac{11}{2}$$

답 ①



함수의 연속

함수 $f(x)$ 가 실수 a 에 대하여 다음 조건을 모두 만족시킬 때, $f(x)$ 는 $x=a$ 에서 연속이라 한다.

- (i) $x=a$ 에서 정의되어 있다.
- (ii) 극한값 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 가 존재한다.
- (iii) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$



0743 $f'(x) = \begin{cases} x & (x \geq 0) \\ 3x & (x < 0) \end{cases}$ 이므로

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 + C_1 & (x \geq 0) \\ \frac{3}{2}x^2 + C_2 & (x < 0) \end{cases}$$

$f(0) = -1$ 이므로 $C_1 = -1$

$f(x)$ 는 $x=0$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{3}{2}x^2 + C_2 \right) = f(0) \quad \therefore C_2 = -1$$

따라서 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 - 1 & (x \geq 0) \\ \frac{3}{2}x^2 - 1 & (x < 0) \end{cases}$ 이므로

$$f(-4)f(2) = 23 \cdot 1 = 23$$

답 ④

0744 $f'(x) = \begin{cases} -x+4 & (x \geq 2) \\ 2 & (x < 2) \end{cases}$ 이므로

→ ①

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x^2 + 4x + C_1 & (x \geq 2) \\ 2x + C_2 & (x < 2) \end{cases}$$

→ ②

$y=f(x)$ 의 그래프가 원점을 지나므로

$$f(0) = 0 \quad \therefore C_2 = 0$$

$f(x)$ 는 $x=2$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \left(-\frac{1}{2}x^2 + 4x + C_1 \right) = \lim_{x \rightarrow 2^-} 2x$$

$$6 + C_1 = 4 \quad \therefore C_1 = -2$$

→ ③

따라서 $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x^2 + 4x - 2 & (x \geq 2) \\ 2x & (x < 2) \end{cases}$ 이므로

$$f(3) = -\frac{9}{2} + 12 - 2 = \frac{11}{2}$$

→ ④

답 $\frac{11}{2}$

채점 기준

비율

① $f'(x)$ 를 구할 수 있다.	20 %
② $f'(x)$ 의 부정적분을 구할 수 있다.	20 %
③ C_1, C_2 의 값을 구할 수 있다.	40 %
④ $f(3)$ 의 값을 구할 수 있다.	20 %

유형 09

부정적분과 접선의 기울기

본책 124쪽

곡선 $y=f(x)$ 위의 임의의 점 $(x, f(x))$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(x)$ 이므로

$$\Rightarrow f(x) = \int f'(x) dx$$

0745 $f'(x) = x^2 - 1$ 이므로

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int (x^2 - 1) dx = \frac{1}{3}x^3 - x + C$$

곡선 $y=f(x)$ 가 점 $(0, 1)$ 을 지나므로

$$f(0) = C = 1$$

따라서 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x + 1$ 이므로

$$f(3) = 9 - 3 + 1 = 7$$

답 7

0746 곡선 $y=f(x)$ 위의 임의의 점 $(x, f(x))$ 에서의 접선의 기울기가 x^2 에 정비례하므로

$$f'(x) = ax^2 \quad (a \text{는 상수})$$

이라 하면

$$\begin{aligned} f(x) &= \int f'(x) dx = \int ax^2 dx \\ &= \frac{a}{3}x^3 + C \end{aligned}$$

곡선 $y=f(x)$ 가 두 점 $(-1, 0), (0, -1)$ 을 지나므로

$$f(-1) = -\frac{a}{3} + C = 0$$

..... ㉠

$$f(0) = C = -1$$

..... ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $a = -3$

따라서 $f(x) = -x^3 - 1$ 이므로

$$f(-2) = 8 - 1 = 7$$

답 ④

0747 $f'(x) = -6x + k$ 이므로

$$\begin{aligned} f(x) &= \int f'(x) dx = \int (-6x + k) dx \\ &= -3x^2 + kx + C \end{aligned}$$

곡선 $y=f(x)$ 가 점 $(0, -2)$ 를 지나므로

$$f(0) = C = -2$$

$$\therefore f(x) = -3x^2 + kx - 2$$

따라서 방정식 $-3x^2 + kx - 2 = 0$ 의 두 근의 합이 $\frac{2}{9}$ 이므로 이차방

정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$-\frac{k}{-3} = \frac{2}{9} \quad \therefore k = \frac{2}{3}$$

답 $\frac{2}{3}$

0748 $f'(x) = 2x - 6$ 이므로

→ ①

$$\begin{aligned} f(x) &= \int f'(x) dx = \int (2x - 6) dx \\ &= x^2 - 6x + C = (x - 3)^2 - 9 + C \end{aligned}$$

함수 $f(x)$ 의 최솟값이 -5 이므로

$$-9 + C = -5 \quad \therefore C = 4$$

$$\therefore f(x) = x^2 - 6x + 4$$

→ ②

따라서 구간 $[-1, 2]$ 에서 $f(x)$ 는 $x = -1$ 일 때 최댓값을 가지므로 구하는 최댓값은

$$f(-1) = 1 + 6 + 4 = 11$$

→ ③

답 11

채점 기준

비율

① $f'(x)$ 를 구할 수 있다.	20 %
② $f(x)$ 를 구할 수 있다.	50 %
③ $f(x)$ 의 최댓값을 구할 수 있다.	30 %

유형 10 부정적분과 미분계수를 이용한 극한값의 계산 본책 125쪽

함수 $f(x)$ 의 $x=a$ 에서의 미분계수는

$$\Rightarrow f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a}$$

$$\begin{aligned} 0749 \quad & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1-h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{f(1+h) - f(1)\} - \{f(1-h) - f(1)\}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-h) - f(1)}{-h} \\ &= f'(1) + f'(1) = 2f'(1) \end{aligned}$$

$f(x) = \int (x-2)(x^2+2x+4)dx$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x) = (x-2)(x^2+2x+4) = x^3 - 8$$

$$\therefore f'(1) = -7$$

따라서 구하는 값은

$$2f'(1) = 2 \cdot (-7) = -14$$

답 ①

$$\begin{aligned} 0750 \quad & \lim_{x \rightarrow 2} \frac{F(x) - F(2)}{3x - 6} = \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{F(x) - F(2)}{x - 2} \\ &= \frac{1}{3} F'(2) = \frac{1}{3} f(2) \\ &= \frac{1}{3} \cdot 21 = 7 \end{aligned}$$

답 7

$$\begin{aligned} 0751 \quad & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x-h) - f(x-3h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{f(x-h) - f(x)\} - \{f(x-3h) - f(x)\}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x-h) - f(x)}{-h} \cdot (-1) + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x-3h) - f(x)}{-3h} \cdot 3 \\ &= -f'(x) + 3f'(x) = 2f'(x) \end{aligned}$$

즉 $2f'(x) = 8x^3 - 4x + 6$ 이므로

$$f'(x) = 4x^3 - 2x + 3$$

$$\begin{aligned} \therefore f(x) &= \int f'(x)dx = \int (4x^3 - 2x + 3)dx \\ &= x^4 - x^2 + 3x + C \end{aligned}$$

$$f(1) = 2 \text{이므로}$$

$$1 - 1 + 3 + C = 2 \quad \therefore C = -1$$

따라서 $f(x) = x^4 - x^2 + 3x - 1$ 이므로

$$f(-1) = 1 - 1 - 3 - 1 = -4$$

답 ①

0752 조건 (가)에서 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{x-1} = 4$ 이므로 $f'(x)$ 는 일차항의 계수가 4인 일차함수이다. 즉

$$f'(x) = 4x + k \quad (k \text{는 상수})$$

라 할 수 있다.

조건 (나)에서 $x \rightarrow 2$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로

(분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0$ 이므로 $f(2) = 0$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} = f'(2) = 1$$

$f'(2) = 8 + k = 1$ 에서 $k = -7$

$$\therefore f'(x) = 4x - 7$$

$f(x) = \int f'(x)dx = \int (4x - 7)dx = 2x^2 - 7x + C$ 이므로

$$f(2) = 8 - 14 + C = 0 \quad \therefore C = 6$$

$$\therefore f(x) = 2x^2 - 7x + 6$$

따라서 방정식 $2x^2 - 7x + 6 = 0$ 의 모든 근의 곱은 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\frac{6}{2} = 3$$

답 ④

유형 11 부정적분과 도함수의 정의를 이용하여 함수 구하기 본책 125쪽

미분가능한 함수 $f(x)$ 의 도함수는

$$\Rightarrow f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

0753 $f(x+y) = f(x) + f(y) - xy$ 에 $x=0, y=0$ 을 대입하면

$$f(0) = f(0) + f(0) - 0 \quad \therefore f(0) = 0$$

$f'(1) = 3$ 이므로

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1) + f(h) - h - f(1)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} - 1 = 3 \end{aligned}$$

즉 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} = 4$ 이므로

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x) + f(h) - xh - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} - x = 4 - x \end{aligned}$$

$$\therefore f(x) = \int f'(x)dx = \int (4-x)dx$$

$$= -\frac{1}{2}x^2 + 4x + C$$

그런데 $f(0) = 0$ 이므로 $C = 0$

따라서 $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 4x$ 이므로

$$f(-2) = -2 - 8 = -10$$

답 -10

0754 $\Delta y = (ax+3)\Delta x - 3(\Delta x)^2$ 의 양변을 Δx 로 나누면

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = ax + 3 - 3\Delta x$$

이므로 $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = ax + 3$



$$\begin{aligned}\therefore f(x) &= \int f'(x)dx = \int (ax+3)dx \\ &= \frac{1}{2}ax^2 + 3x + C\end{aligned}$$

$$f(0)=0 \text{이므로 } C=0$$

$$f(1)=0 \text{이므로 } \frac{1}{2}a+3=0 \quad \therefore a=-6$$

$$\text{따라서 } f(x) = -3x^2 + 3x \text{이므로}$$

$$f(-1) = -3 - 3 = -6$$

답 ①

$$\begin{aligned}0755 \quad f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{mxh + 2h^2}{h} = mx\end{aligned}$$

→ ①

$$\therefore f(x) = \int f'(x)dx = \int mx dx = \frac{m}{2}x^2 + C$$

→ ②

$$f(1)=5 \text{이므로 } \frac{m}{2} + C = 5$$

..... ㉠

$$f(3)=21 \text{이므로 } \frac{9}{2}m + C = 21$$

..... ㉡

$$\text{㉠, ㉡을 연립하여 풀면 } m=4, C=3$$

→ ③

$$\text{따라서 } f(x) = 2x^2 + 3 \text{이므로}$$

$$f(2) = 8 + 3 = 11$$

→ ④

답 11

채점 기준

비율

① $f'(x)$ 를 구할 수 있다.

40%

② $f'(x)$ 의 부정적분을 구할 수 있다.

20%

③ m, C 의 값을 구할 수 있다.

20%

④ $f(2)$ 의 값을 구할 수 있다.

20%

유형 12 부정적분과 극대·극소

본책 126쪽

미분가능한 함수 $f(x)$ 에 대하여 $f'(a)=0$ 이고, $x=a$ 의 좌우에서

① $f'(x)$ 의 부호가 양에서 음으로 바뀌면

→ $f(x)$ 는 $x=a$ 에서 극대이고 극댓값 $f(a)$ 를 갖는다.

② $f'(x)$ 의 부호가 음에서 양으로 바뀌면

→ $f(x)$ 는 $x=a$ 에서 극소이고 극솟값 $f(a)$ 를 갖는다.

$$0756 \quad f'(x) = ax(x-2) \quad (a < 0) \text{라 하면}$$

$$f(x) = \int f'(x)dx = \int ax(x-2)dx$$

$$= \int (ax^2 - 2ax)dx = \frac{a}{3}x^3 - ax^2 + C$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=0 \text{ 또는 } x=2$$

x	...	0	...	2	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	\	극소	/	극대	\

따라서 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 극솟값을 갖고, $x=2$ 에서 극댓값을 가지므로

$$f(0)=4, f(2)=8$$

$$C=4, -\frac{4}{3}a+C=8 \quad \therefore a=-3, C=4$$

$$\therefore f(x) = -x^3 + 3x^2 + 4$$

$$\text{답 } f(x) = -x^3 + 3x^2 + 4$$

$$0757 \quad f(x) = \int (x^2 - 2x - 3)dx \text{의 양변을 } x \text{에 대하여 미분하면}$$

$$f'(x) = x^2 - 2x - 3 = (x+1)(x-3)$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=-1 \text{ 또는 } x=3$$

x	...	-1	...	3	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	/	극대	\	극소	/

$$\text{따라서 } f(x) \text{는 } x=-1 \text{에서 극댓값을 가지므로 } f(-1) = \frac{2}{3}$$

이때

$$f(x) = \int (x^2 - 2x - 3)dx = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + C$$

이므로

$$f(-1) = -\frac{1}{3} - 1 + 3 + C = \frac{2}{3} \quad \therefore C = -1$$

$$\text{즉 } f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x - 1 \text{이므로 극솟값은}$$

$$f(3) = 9 - 9 - 9 - 1 = -10$$

답 ①

$$0758 \quad \text{주어진 등식의 양변을 } x \text{에 대하여 미분하면}$$

$$1 - f(x) = -x^3 + 9x + 1 \quad \therefore f(x) = x^3 - 9x$$

$$f'(x) = 3x^2 - 9 = 3(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3}) \text{이므로 } f'(x)=0 \text{에서}$$

$$x = -\sqrt{3} \text{ 또는 } x = \sqrt{3}$$

x	...	$-\sqrt{3}$...	$\sqrt{3}$...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	/	극대	\	극소	/

따라서 $f(x)$ 는 $x = -\sqrt{3}$ 에서 극댓값을 갖고, $x = \sqrt{3}$ 에서 극솟값을 가지므로

$$\alpha = -\sqrt{3}, \beta = f(\sqrt{3}) = 3\sqrt{3} - 9\sqrt{3} = -6\sqrt{3}$$

$$\therefore \alpha + \beta = -7\sqrt{3}$$

답 ①

$$0759 \quad f'(x) = a(x+1)^2 - 1 \quad (a > 0) \text{이라 하면 } f'(0)=0 \text{이므로}$$

$$a - 1 = 0 \quad \therefore a = 1$$

$$\therefore f'(x) = x^2 + 2x = x(x+2)$$

→ ①

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=-2 \text{ 또는 } x=0$$

x	...	-2	...	0	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	/	극대	\	극소	/

따라서 $f(x)$ 는 $x=-2$ 에서 극댓값을 가지므로

$$f(-2) = 1$$

→ ②

이때

$$f(x) = \int f'(x)dx = \int (x^2 + 2x)dx$$

$$= \frac{1}{3}x^3 + x^2 + C$$

이므로

$$f(-2) = -\frac{8}{3} + 4 + C = 1 \quad \therefore C = -\frac{1}{3}$$

따라서 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - \frac{1}{3}$ 이므로

$$f(2) = \frac{8}{3} + 4 - \frac{1}{3} = \frac{19}{3}$$

→ ③

→ ④

답 $\frac{19}{3}$

채점 기준	비율
① $f'(x)$ 를 구할 수 있다.	30 %
② $f(-2)=1$ 임을 알 수 있다.	30 %
③ $f(x)$ 를 구할 수 있다.	30 %
④ $f(2)$ 의 값을 구할 수 있다.	10 %

0760 $f(x)$ 의 최고차항이 x^3 이므로 $f'(x)$ 의 최고차항은 $3x^2$ 이다.

이때 $f'(2)=f'(10)=0$ 이므로

$$f'(x) = 3(x-2)(x-10)$$

$f'(x)=0$ 에서 $x=2$ 또는 $x=10$

x	...	2	...	10	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	/	극대	\	극소	/

따라서 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 극댓값을 가지므로 $f(2)=56$

이때

$$\begin{aligned} f(x) &= \int f'(x) dx = \int 3(x-2)(x-10) dx \\ &= \int (3x^2 - 36x + 60) dx = x^3 - 18x^2 + 60x + C \end{aligned}$$

이므로

$$f(2) = 8 - 72 + 120 + C = 56 \quad \therefore C = 0$$

따라서 $f(x) = x^3 - 18x^2 + 60x$ 이므로 극솟값은

$$f(10) = 1000 - 1800 + 600 = -200$$

답 ④

다른 풀이 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ (a, b, c 는 상수)라 하면

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

$$\therefore f'(2) = 12 + 4a + b = 0, f'(10) = 300 + 20a + b = 0$$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a = -18, b = 60$

$$\therefore f(x) = x^3 - 18x^2 + 60x + c$$

$f(2)=56$ 에서 $c=0$

따라서 $f(x) = x^3 - 18x^2 + 60x$ 이므로 극솟값은

$$f(10) = -200$$

0761 **전략** $p(x) = \int q(x) dx$ 이면 $\frac{d}{dx} p(x) = q(x)$ 이다.

풀이 \neg . 주어진 식의 좌변을 정리하면

$$\int f'(x) dx + \int 2x dx = \int \{f'(x) + 2x\} dx$$

주어진 식의 우변을 x 에 대하여 미분하면

$$\frac{d}{dx} \{f(x) + x^2 + C\} = f'(x) + 2x$$

$$\therefore \int f'(x) dx + \int 2x dx = f(x) + x^2 + C$$

\neg . $\frac{d}{dx} [\{f(x)\}^2 + C] = 2f(x)f'(x)$ 이므로

$$\int f'(x)f(x) dx \neq \{f(x)\}^2 + C$$

\neg . 주어진 식의 좌변을 정리하면

$$\int f(x) dx + \int xf'(x) dx = \int \{f(x) + xf'(x)\} dx$$

주어진 식의 우변을 x 에 대하여 미분하면

$$\frac{d}{dx} \{xf(x) + C\} = f(x) + xf'(x)$$

$$\therefore \int f(x) dx + \int xf'(x) dx = xf(x) + C$$

이상에서 옳은 것은 \neg, \neg 이다.

답 ③

0762 **전략** $\frac{d}{dx} p(x) = q(x)$ 이면 $p(x) = \int q(x) dx$ 이다.

풀이 $\frac{d}{dx} \{f(x) + g(x)\} = 3$ 에서

$$\int \left[\frac{d}{dx} \{f(x) + g(x)\} \right] dx = \int 3 dx$$

$$\therefore f(x) + g(x) = 3x + C_1$$

$\frac{d}{dx} \{f(x)g(x)\} = 4x - 8$ 에서

$$\int \left[\frac{d}{dx} \{f(x)g(x)\} \right] dx = \int (4x - 8) dx$$

$$\therefore f(x)g(x) = 2x^2 - 8x + C_2$$

이때 $f(0) = -4, g(0) = -2$ 이므로

$$f(0) + g(0) = C_1 = -6, f(0)g(0) = C_2 = 8$$

$$\therefore f(x) + g(x) = 3x - 6 = 3(x - 2),$$

$$f(x)g(x) = 2x^2 - 8x + 8 = 2(x - 2)^2$$

$$\therefore h(x) = \int \frac{f(x)g(x)}{f(x) + g(x)} dx = \int \frac{2(x - 2)^2}{3(x - 2)} dx$$

$$= \int \frac{2(x - 2)}{3} dx = \frac{1}{3}x^2 - \frac{4}{3}x + C$$

$$h(1) = -1 \text{이므로 } \frac{1}{3} - \frac{4}{3} + C = -1 \quad \therefore C = 0$$

따라서 $h(x) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{4}{3}x$ 이므로

$$h(6) = 12 - 8 = 4$$

답 4

0763 **전략** $F_n(x)$ 를 x 에 대한 식으로 나타낸 후 $F_n(0)=0$ 임을 이용하여 $F_n(x)$ 를 구한다.

풀이 $F_n(x) = \sum_{k=1}^n \left\{ (k+1) \int x^k dx \right\} = \sum_{k=1}^n \{x^{k+1} + (k+1)C\}$

$$= \sum_{k=1}^n x^{k+1} + \sum_{k=1}^n (k+1)C$$

$$= x^2 + x^3 + x^4 + \cdots + x^{n+1} + \frac{n(n+3)}{2}C$$

$F_n(0)=0$ 에서 $C=0$ ($\because n>0$)

따라서 $F_n(x) = x^2 + x^3 + x^4 + \cdots + x^{n+1}$ 이므로

$$F_n(1) = \underbrace{1+1+1+\cdots+1}_{n\text{개}} = n$$

답 ④



0764 전략 주어진 조건을 이용하여 먼저 함수 $g(x)$ 의 차수를 정한다.

풀이 함수 $f(x)$ 가 이차함수이고 $f(x)g(x)$ 가 사차함수이므로 $g(x)$ 는 이차함수이다.

이때 $g(x) = \int \{x^2 + f(x)\} dx$ 이므로 $x^2 + f(x)$ 는 일차함수이다.

$f(x) = -x^2 + ax + b$ (a, b 는 상수, $a \neq 0$)라 하면

$$g(x) = \int (x^2 - x^2 + ax + b) dx = \int (ax + b) dx \\ = \frac{a}{2}x^2 + bx + C$$

이므로

$$f(x)g(x) = (-x^2 + ax + b) \left(\frac{a}{2}x^2 + bx + C \right) \\ = -\frac{a}{2}x^4 + \left(\frac{a^2}{2} - b \right)x^3 + \left(\frac{3}{2}ab - C \right)x^2 \\ + (aC + b^2)x + bC \\ \therefore -\frac{a}{2}x^4 + \left(\frac{a^2}{2} - b \right)x^3 + \left(\frac{3}{2}ab - C \right)x^2 + (aC + b^2)x + bC \\ = -2x^4 + 8x^3$$

위의 등식의 양변의 계수를 비교하면

$$-\frac{a}{2} = -2, \quad \frac{a^2}{2} - b = 8, \quad \frac{3}{2}ab - C = 0, \quad aC + b^2 = 0, \quad bC = 0$$

$$\therefore a = 4, b = 0, C = 0$$

따라서 $g(x) = 2x^2$ 이므로

$$g(1) = 2$$

답 ②

0765 전략 주어진 조건을 이용하여 $f'(x)$ 를 구한 후

$f(x) = \int f'(x) dx$ 임을 이용한다.

풀이 사차함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 3이므로 $f'(x)$ 의 최고차항의 계수는 12이다.

즉 $f'(x) = 12x^2(x-1)$ 이므로

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int 12x^2(x-1) dx \\ = \int (12x^3 - 12x^2) dx \\ = 3x^4 - 4x^3 + C$$

주어진 표에 의하여 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 극소이므로

$$a = 1$$

이때 극값이 2이므로 $f(1) = 2$ 에서

$$3 - 4 + C = 2 \quad \therefore C = 3$$

$$\therefore f(x) = 3x^4 - 4x^3 + 3$$

따라서 점 $(2a, f(2a))$, 즉 $(2, 19)$ 에서의 접선의 기울기는

$f'(2) = 48$ 이므로 구하는 접선의 방정식은

$$y - 19 = 48(x - 2) \quad \therefore y = 48x - 77$$

$$\text{답 } y = 48x - 77$$

0766 전략 $f_{i+1}(x) = \int (n+i)f_i(x) dx$ 에 $i=1, 2, 3, \dots$ 을 대입하여 $f_i(x)$ 를 구한다.

풀이 $f_{i+1}(x) = \int (n+i)f_i(x) dx$ ($i=1, 2, 3, \dots$)이므로

$$f_2(x) = \int (n+1)f_1(x) dx = \int x^{n+1} dx \\ = \frac{1}{n+2}x^{n+2} + C_1$$

$$f_2(0) = 0 \text{이므로 } C_1 = 0 \quad \therefore f_2(x) = \frac{1}{n+2}x^{n+2}$$

$$f_3(x) = \int (n+2)f_2(x) dx = \int x^{n+2} dx \\ = \frac{1}{n+3}x^{n+3} + C_2$$

$$f_3(0) = 0 \text{이므로 } C_2 = 0 \quad \therefore f_3(x) = \frac{1}{n+3}x^{n+3}$$

\vdots

따라서 $f_i(x) = \frac{1}{n+i}x^{n+i}$ 이므로

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{f_i(1)} = \sum_{i=1}^n (n+i) = \sum_{i=1}^n n + \sum_{i=1}^n i \\ = n^2 + \frac{n(n+1)}{2} \\ = \frac{3n^2 + n}{2} = 100$$

$$3n^2 + n = 200, \quad 3n^2 + n - 200 = 0$$

$$(3n+25)(n-8) = 0 \quad \therefore n = 8 \quad (\because n \text{은 자연수})$$

답 8

0767 전략 삼차방정식 $f(x) = 0$ 이 서로 다른 세 실근을 가지려면 삼차함수 $f(x)$ 에서 (극댓값) \times (극솟값) < 0 이어야 한다.

풀이 곡선 $y = x^2 - 3x + 1$ 과 직선 $y = x + 6$ 의 교점의 x 좌표는

$$x^2 - 3x + 1 = x + 6 \text{에서}$$

$$x^2 - 4x - 5 = 0, \quad (x+1)(x-5) = 0$$

$$\therefore x = -1 \text{ 또는 } x = 5$$

따라서 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 두 점 $(-1, 0)$, $(5, 0)$ 을 지나므로

$$f(x) = 3(x+1)(x-5) = 3x^2 - 12x - 15$$

조건 (가)에서

$$F(x) = \int f(x) dx = \int (3x^2 - 12x - 15) dx \\ = x^3 - 6x^2 - 15x + C$$

$F(0) = C$ 이므로 조건 (나)에 의하여 C 는 정수이다.

함수 $F(x)$ 는 $x = -1$, $x = 5$ 에서 극값을 가지므로 조건 (다)에서 방정식 $F(x) = 0$ 이 서로 다른 세 실근을 가지려면 $F(-1)F(5) < 0$ 이어야 한다. 즉

$$(C+8)(C-100) < 0 \quad \therefore -8 < C < 100$$

따라서 정수 C 는 $-7, -6, -5, \dots, 98, 99$ 의 107개이므로 구하는 함수 $F(x)$ 의 개수는 107이다.

답 ④



삼차방정식의 근의 판별

삼차함수 $f(x)$ 가 극값을 가질 때, 삼차방정식 $f(x) = 0$ 의 근은

① (극댓값) \times (극솟값) $< 0 \iff$ 서로 다른 세 실근

② (극댓값) \times (극솟값) $= 0 \iff$ 한 실근과 중근 (서로 다른 두 실근)

③ (극댓값) \times (극솟값) $> 0 \iff$ 한 실근과 두 허근

0768 전략 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t, f(t))$ 에서의 접선의 방정식은 $y-f(t)=f'(t)(x-t)$ 임을 이용한다.

풀이 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t, f(t))$ 에서의 접선의 방정식은

$$y-f(t)=f'(t)(x-t) \\ \therefore y=f'(t)x-tf'(t)+f(t)$$

따라서 $f'(t)=3t^2-2t+1$ 이므로

$$f(t)=\int(3t^2-2t+1)dt=t^3-t^2+t+C$$

또 $g(t)=-tf'(t)+f(t)$ 이므로

$$g(t)=-t(3t^2-2t+1)+t^3-t^2+t+C \\ =-2t^3+t^2+C$$

$$\therefore \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(t)+g(t)}{t^3} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-t^3+t+2C}{t^3} = -1$$

답 -1

0769 전략 $y'=\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ 임을 이용한다.

풀이 $\Delta y=(2x+1)\Delta x+k(\Delta x)^2$ 의 양변을 Δx 로 나누면

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=2x+1+k\Delta x$$

이므로 $y'=\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x+1+k\Delta x)=2x+1$

$$\therefore y=\int(2x+1)dx=x^2+x+C$$

$x=12$ 일 때 $y=0$ 이므로

$$0=144+12+C \quad \therefore C=-156$$

즉 $y=x^2+x-156$ 이므로 $x=22$ 일 때,

$$y=484+22-156=350$$

따라서 도서관의 온도를 22°C 로 유지시킬 때, 1시간당 연료 소모량은 350 mL 이다. **답 ④**

0770 전략 도함수의 정의를 이용하여 $f'(x)$ 를 구한다.

풀이 \neg , $f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy(x+y)+3$ 에 $x=0, y=0$ 을 대입하면

$$f(0)=f(0)+f(0)+3 \\ \therefore f(0)=-3<0$$

$$\neg, f'(x)=\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ =\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x)+f(h)+2xh(x+h)+3-f(x)}{h} \\ =\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)+3}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} 2x(x+h) \\ =\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} 2x(x+h) \\ =f'(0)+2x^2$$

따라서 $f'(x)$ 의 차수가 2이므로 $f(x)$ 의 차수는 3이다.

\neg , 함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 극값을 가지므로 \neg 에서

$$f'(1)=f'(0)+2=0 \quad \therefore f'(0)=-2$$

즉 $f'(x)=2x^2-2$ 이므로

$$f(x)=\int(2x^2-2)dx=\frac{2}{3}x^3-2x+C$$

\neg 에서 $f(0)=-3$ 이므로 $C=-3$

$$\therefore f(x)=\frac{2}{3}x^3-2x-3$$

$f'(x)=0$ 에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

따라서 $f(x)$ 는 $x=-1$ 에서 극댓값 $-\frac{5}{3}$, $x=1$ 에서 극솟값

$-\frac{13}{3}$ 을 가지므로 모든 극값의 합은

$$\left(-\frac{5}{3}\right)+\left(-\frac{13}{3}\right)=-6$$

이상에서 옳은 것은 \neg 뿐이다. **답 ②**

0771 전략 함수 $f(x)$ 가 $x=a$ 에서 연속이면

$$f(a)=\lim_{x \rightarrow a+} f(x)=\lim_{x \rightarrow a-} f(x)$$

풀이 $f'(x)=\begin{cases} 1 & (|x|>1) \\ -x^2 & (|x|<1) \end{cases}$ 이므로

$$f(x)=\begin{cases} x+C_1 & (x>1) \\ -\frac{1}{3}x^3+C_2 & (-1<x<1) \\ x+C_3 & (x<-1) \end{cases}$$

함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1+} (x+C_1)=\lim_{x \rightarrow 1-} \left(-\frac{1}{3}x^3+C_2\right)$$

$$1+C_1=-\frac{1}{3}+C_2 \quad \therefore C_1-C_2=-\frac{4}{3} \quad \dots\dots ①$$

또 함수 $f(x)$ 는 $x=-1$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow -1+} \left(-\frac{1}{3}x^3+C_2\right)=\lim_{x \rightarrow -1-} (x+C_3)$$

$$\frac{1}{3}+C_2=-1+C_3 \quad \therefore C_2-C_3=-\frac{4}{3} \quad \dots\dots ②$$

이때 함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 연속이고 $x=1$ 의 좌우에서 $f'(x)$ 의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 극소이다.

즉 $f(1)=0$ 이므로

$$1+C_1=0 \quad \therefore C_1=-1$$

$$C_1=-1 \text{을 } ① \text{에 대입하면 } C_2=\frac{1}{3}$$

$$C_2=\frac{1}{3} \text{을 } ② \text{에 대입하면 } C_3=\frac{5}{3}$$

$$\text{따라서 } f(x)=\begin{cases} x-1 & (x \geq 1) \\ -\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{3} & (-1 \leq x < 1) \\ x+\frac{5}{3} & (x < -1) \end{cases} \text{이므로}$$

$$f(2)-9f(-3)=1-9 \cdot \left(-\frac{4}{3}\right)=13$$

답 13

0772 전략 그래프가 원점에 대하여 대칭인 삼차함수가 $x=1$ 에서 극값을 가지면 $x=-1$ 에서도 극값을 갖고, 그래프는 원점을 지남을 이용한다.

풀이 삼차함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 극값을 갖고 $y=f(x)$ 의 그래프가 원점에 대하여 대칭이므로 $x=-1$ 에서도 극값을 갖는다.



따라서 $f'(x)=a(x+1)(x-1)=a(x^2-1)$ (a 는 상수, $a \neq 0$)이라 하면

$$\begin{aligned} f(x) &= \int f'(x)dx = a \int (x^2-1)dx \\ &= a\left(\frac{1}{3}x^3 - x\right) + C \end{aligned}$$

이때 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 원점에 대하여 대칭이고 $x=0$ 에서 연속이므로 원점을 지난다.

즉 $f(0)=0$ 에서 $C=0$

$$\therefore f(x) = a\left(\frac{1}{3}x^3 - x\right) = \frac{a}{3}x(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$$

따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 x 축과의 교점의 x 좌표 중에서 양수인 것은 $\sqrt{3}$ 이다. **답 ②**

0773 **전략** $F(x) = \int f(x)dx = k(x+p)^3$ 임을 이용하여 a, b 를 p 에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 $f(x) = 3x^2 + 2ax + b$ 의 부정적분 중 하나가 $F(x)$ 이므로

$$\begin{aligned} F(x) &= \int f(x)dx = \int (3x^2 + 2ax + b)dx \\ &= x^3 + ax^2 + bx + C \end{aligned}$$

이때 $F(x) = k(x+p)^3$ 이므로

$$k=1, p>0 \quad (\because a, b \text{는 양수})$$

즉 $x^3 + ax^2 + bx + C = x^3 + 3px^2 + 3p^2x + p^3$ 이므로

$$a=3p, b=3p^2 \quad \dots\dots ①$$

$x F(x) = x(x+p)^3$ 에서

$$\begin{aligned} \{x F(x)\}' &= (x+p)^3 + 3x(x+p)^2 \\ &= (x+p)^2(4x+p) \end{aligned}$$

$$\{x F(x)\}' = 0 \text{에서 } x = -p \text{ 또는 } x = -\frac{p}{4}$$

x	\dots	$-p$	\dots	$-\frac{p}{4}$	\dots
$\{x F(x)\}'$	$-$	0	$-$	0	$+$
$x F(x)$	\searrow		\searrow	극소	\nearrow

따라서 $x F(x)$ 는 $x = -\frac{p}{4}$ 에서 극솟값 -3 을 가지므로

$$\begin{aligned} -\frac{p}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}p\right)^3 &= -3, \quad p^4 = \frac{4^4}{3^2} \\ \therefore p &= \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3} \quad (\because p>0) \quad \dots\dots ② \end{aligned}$$

②을 ①에 대입하면 $a=4\sqrt{3}, b=16$ 이므로

$$ab = 64\sqrt{3} \quad \text{답 ⑤}$$

0774 **전략** $f(x)$ 가 $k(x-a)(x-b)$ (k, a, b 는 상수)로 나누어떨어지면 $f(a)=0, f(b)=0$ 이다.

풀이 $f(x) = \int f'(x)dx = \int g(x)dx$

$$\begin{aligned} &= \int \left(x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x + a\right)dx \\ &= \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + ax + C \end{aligned}$$

$f(0)=b$ 에서 $C=b$

$$\therefore f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + ax + b \quad \dots\dots ①$$

이때

$$h(x) = g'(x) = 3x^2 - 3x - 6 = 3(x+1)(x-2) \quad \dots\dots ②$$

이고 $f(x)$ 가 $h(x)$ 로 나누어떨어지므로

$$f(-1)=0, f(2)=0$$

$$-\frac{9}{4} - a + b = 0, -12 + 2a + b = 0$$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$$a = \frac{13}{4}, b = \frac{11}{2} \quad \dots\dots ③$$

$$\therefore 8a + 2b = 8 \cdot \frac{13}{4} + 2 \cdot \frac{11}{2} = 37 \quad \dots\dots ④$$

답 37

채점 기준	비율
① $f(x)$ 를 구할 수 있다.	30 %
② $h(x)$ 를 구할 수 있다.	20 %
③ a, b 의 값을 구할 수 있다.	30 %
④ $8a + 2b$ 의 값을 구할 수 있다.	20 %

0775 **전략** 조건 ④의 등식의 양변을 x 에 대하여 미분한 후 $f(x)$ 의 차수를 구한다.

풀이 조건 ④의 등식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f(x) + f(x)f'(x) = 27x^5 + 15x^3 + 2ax \quad \dots\dots ① \quad \dots\dots ①$$

$f(x)$ 의 차수를 n 이라 하면 좌변의 차수가 $n + (n-1) = 2n-1$ 이므로

$$2n-1=5 \quad \therefore n=3 \quad \dots\dots ②$$

즉 $f(x)$ 는 삼차함수이므로 조건 ⑦에 의하여

$$f(x) = px^3 + qx \quad (p, q \text{는 상수}, p>0)$$

라 하면

$$f'(x) = 3px^2 + q$$

①에서

$$\begin{aligned} &px^3 + qx + (px^3 + qx)(3px^2 + q) \\ &= px^3 + qx + (3p^2x^5 + 4pqx^3 + q^2x) \\ &= 3p^2x^5 + (4pq + p)x^3 + (q^2 + q)x \\ &= 27x^5 + 15x^3 + 2ax \end{aligned}$$

이 식은 x 에 대한 항등식이므로

$$3p^2=27, 4pq+p=15, q^2+q=2a$$

$$\therefore p=3, q=1, a=1 \quad (\because p>0)$$

따라서 $f(x) = 3x^3 + x$ 이므로

$$f(a) = f(1) = 3 + 1 = 4 \quad \dots\dots ③$$

답 4

채점 기준	비율
① 조건 ④의 등식의 양변을 x 에 대하여 미분할 수 있다.	20 %
② $f(x)$ 의 차수를 구할 수 있다.	20 %
③ $f(x)$ 를 구할 수 있다.	50 %
④ $f(a)$ 의 값을 구할 수 있다.	10 %

0776 전략 조건 ⑦에 의하여 $f(x)=ax^3+bx$ (a, b 는 상수, $a \neq 0$)라 하고 조건 ④의 식에 대입한다.

풀이 조건 ⑦에서 모든 실수 x 에 대하여 $f(-x)=-f(x)$ 이므로 $f(x)=ax^3+bx$ (a, b 는 상수, $a \neq 0$)라 하면

$$f'(x)=3ax^2+b$$

$$\therefore F(x)=\int\{f(x)+f'(x)\}dx$$

$$=\int(ax^3+3ax^2+bx+b)dx$$

$$=\frac{a}{4}x^4+ax^3+\frac{b}{2}x^2+bx+C$$

$$F(0)=0\text{에서 } C=0$$

$$\therefore F(x)=\frac{a}{4}x^4+ax^3+\frac{b}{2}x^2+bx$$

→ ①

$$F(1)=0\text{에서 } \frac{1}{4}a+a+\frac{b}{2}+b=0$$

$$\therefore b=-\frac{5}{6}a$$

→ ②

$$\text{따라서 } f(x)=ax^3-\frac{5}{6}ax\text{이므로}$$

$$\frac{f(2)}{f(1)}=\frac{\frac{19}{3}a}{\frac{1}{6}a}=38 \quad (\because a \neq 0)$$

→ ③

답 38

채점 기준	비율
① $F(x)$ 를 구할 수 있다.	50 %
② b 를 a 에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30 %
③ $\frac{f(2)}{f(1)}$ 의 값을 구할 수 있다.	20 %

0777 전략 $\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$ 임을 이용하여 조건 ⑦의 식을 변형한다.

풀이 $\{xf(x)\}'=f(x)+xf'(x)$ 이므로 조건 ⑦에서

$$\{f(x)+xf'(x)\}g(x)+xf(x)g'(x)$$

$$=\{xf(x)\}'g(x)+\{xf(x)\}g'(x)$$

$$=[\{xf(x)\}g(x)]'$$

$$=\{xf(x)g(x)\}'$$

$$\therefore xf(x)g(x)=\int(8x^3+9x^2-4x)dx$$

$$=2x^4+3x^3-2x^2+C_1$$

그런데 $f(x), g(x)$ 는 다항함수이므로

$$C_1=0$$

즉 $xf(x)g(x)=2x^4+3x^3-2x^2$ 이므로

$$f(x)g(x)=2x^3+3x^2-2x=x(x+2)(2x-1)$$

→ ①

한편 조건 ④에 의하여

$$f(x)+g(x)=\int(2x+4)dx=x^2+4x+C_2$$

→ ②

$$\therefore \begin{cases} f(x)=x(x+2) \\ g(x)=2x-1 \end{cases} \quad \text{또는} \quad \begin{cases} f(x)=2x-1 \\ g(x)=x(x+2) \end{cases}$$

→ ③

$$\therefore f(2)+g(2)=11$$

→ ④

답 11

채점 기준	비율
① $f(x)g(x)$ 를 구할 수 있다.	50 %
② $f(x)+g(x)$ 를 구할 수 있다.	20 %
③ $f(x), g(x)$ 를 구할 수 있다.	20 %
④ $f(2)+g(2)$ 의 값을 구할 수 있다.	10 %

0778 전략 $F_{n+1}(x)=\int F_n(x)dx$ 에 $n=1, 2, \dots$ 를 대입하여 $F_n(x)$ 를 구한다.

$$\text{풀이 } F_1(x)=\int(x-1)dx=\frac{1}{2}x^2-x+C_1$$

$$F_1(0)=1\text{이므로 } C_1=1$$

$$\therefore F_1(x)=\frac{1}{2}x^2-x+1$$

$$F_2(x)=\int\left(\frac{1}{2}x^2-x+1\right)dx=\frac{1}{2\cdot 3}x^3-\frac{1}{2}x^2+x+C_2$$

$$F_2(0)=-1\text{이므로 } C_2=-1$$

$$\therefore F_2(x)=\frac{1}{2\cdot 3}x^3-\frac{1}{2}x^2+x-1$$

$$F_3(x)=\int\left(\frac{1}{2\cdot 3}x^3-\frac{1}{2}x^2+x-1\right)dx$$

$$=\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}x^4-\frac{1}{2\cdot 3}x^3+\frac{1}{2}x^2-x+C_3$$

$$F_3(0)=1\text{이므로 } C_3=1$$

$$\therefore F_3(x)=\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}x^4-\frac{1}{2\cdot 3}x^3+\frac{1}{2}x^2-x+1$$

⋮

$$\therefore F_n(x)=\frac{1}{2\cdot 3\cdots(n+1)}x^{n+1}-\frac{1}{2\cdot 3\cdots n}x^n$$

$$+\cdots+\frac{(-1)^{n+1}}{2}x^2+(-1)^nx+(-1)^{n+1} \quad \rightarrow ①$$

따라서

$$G_1(x)=F_1(x)+F_2(x)=\frac{1}{2\cdot 3}x^3$$

$$G_2(x)=F_2(x)+F_3(x)=\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}x^4$$

⋮

$$G_n(x)=F_n(x)+F_{n+1}(x)=\frac{1}{2\cdot 3\cdots(n+2)}x^{n+2} \quad \rightarrow ②$$

$$\text{이므로 } G_n'(x)=\frac{1}{2\cdot 3\cdots(n+1)}x^{n+1} \quad \rightarrow ③$$

$$\therefore \frac{G_{100}'(1)}{G_{100}(1)}=\frac{\frac{1}{2\cdot 3\cdots 101}}{\frac{1}{2\cdot 3\cdots 102}}=102 \quad \rightarrow ④$$

답 102

채점 기준	비율
① $F_n(x)$ 를 구할 수 있다.	40 %
② $G_n(x)$ 를 구할 수 있다.	30 %
③ $G_n'(x)$ 를 구할 수 있다.	20 %
④ $\frac{G_{100}'(1)}{G_{100}(1)}$ 의 값을 구할 수 있다.	10 %



Ⅲ. 다항함수의 적분법

08 정적분

0779 $\int_0^1 3x^4 dx = \left[\frac{3}{5}x^5 \right]_0^1 = \frac{3}{5}$ 답 $\frac{3}{5}$

0780 $\int_0^4 (5x+4) dx = \left[\frac{5}{2}x^2 + 4x \right]_0^4 = 40 + 16 = 56$ 답 56

0781 $\int_{-2}^1 (3y^2-1) dy = \left[y^3 - y \right]_{-2}^1$
 $= (1-1) - (-8+2)$
 $= 6$ 답 6

0782 $\int_1^2 (2t^2+3t-1) dt = \left[\frac{2}{3}t^3 + \frac{3}{2}t^2 - t \right]_1^2$
 $= \left(\frac{16}{3} + 6 - 2 \right) - \left(\frac{2}{3} + \frac{3}{2} - 1 \right)$
 $= \frac{49}{6}$ 답 $\frac{49}{6}$

0783 $\int_{-1}^0 x(x-4) dx = \int_{-1}^0 (x^2-4x) dx$
 $= \left[\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 \right]_{-1}^0$
 $= 0 - \left(-\frac{1}{3} - 2 \right)$
 $= \frac{7}{3}$ 답 $\frac{7}{3}$

0784 $\int_0^2 (x+1)(x-1) dx = \int_0^2 (x^2-1) dx$
 $= \left[\frac{1}{3}x^3 - x \right]_0^2$
 $= \frac{8}{3} - 2 = \frac{2}{3}$ 답 $\frac{2}{3}$

0785 $\int_0^1 (x-1)(x^2+x+1) dx = \int_0^1 (x^3-1) dx$
 $= \left[\frac{1}{4}x^4 - x \right]_0^1$
 $= \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4}$ 답 $-\frac{3}{4}$

0786 $f(x)$ 의 한 부정적분을 $F(x)$ 라 하면
 $\int_a^a f(x) dx = \left[F(x) \right]_a^a = F(a) - F(a) = 0$ 답 풀이 참조

0787 $f(x)$ 의 한 부정적분을 $F(x)$ 라 하면
 $\int_a^b f(x) dx = \left[F(x) \right]_a^b = F(b) - F(a),$

$$\int_b^a f(x) dx = \left[F(x) \right]_b^a = F(a) - F(b)$$

$$= -\{F(b) - F(a)\}$$

이므로 $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$ 답 풀이 참조

0788 $\int_2^2 (x^2+2x+3) dx = 0$ 답 0

0789 $\int_0^{-1} (x^3-4x) dx = -\int_{-1}^0 (x^3-4x) dx$
 $= -\left[\frac{1}{4}x^4 - 2x^2 \right]_{-1}^0$
 $= -\left\{ 0 - \left(\frac{1}{4} - 2 \right) \right\}$
 $= -\frac{7}{4}$ 답 $-\frac{7}{4}$

0790 $\int_1^{-2} (6x^2+2x-5) dx$
 $= -\int_{-2}^1 (6x^2+2x-5) dx$
 $= -\left[2x^3 + x^2 - 5x \right]_{-2}^1$
 $= -\{(2+1-5) - (-16+4+10)\}$
 $= 0$ 답 0

0791 $\int_3^1 (4x^3-3x^2-2x) dx = -\int_1^3 (4x^3-3x^2-2x) dx$
 $= -\left[x^4 - x^3 - x^2 \right]_1^3$
 $= -\{(81-27-9) - (1-1-1)\}$
 $= -46$ 답 -46

0792 $\frac{d}{dx} \int_1^x (t^2-2t) dt = x^2-2x$ 답 x^2-2x

0793 $\frac{d}{dx} \int_2^x (-t^3+4t+2) dt = -x^3+4x+2$ 답 $-x^3+4x+2$

0794 $\frac{d}{dx} \int_0^x (2t^2+3t-1) dt = 2x^2+3x-1$ 답 $2x^2+3x-1$

0795 $\frac{d}{dx} \int_{-1}^x (t^3-5t^2+6) dt = x^3-5x^2+6$ 답 x^3-5x^2+6

0796 $\int_{-1}^3 (3x^2+x-2) dx - \int_{-1}^3 (x+3) dx$
 $= \int_{-1}^3 (3x^2+x-2-x-3) dx$
 $= \int_{-1}^3 (3x^2-5) dx$
 $= \left[x^3 - 5x \right]_{-1}^3$
 $= 12 - 4 = 8$ 답 8

$$\begin{aligned}
 0797 \quad & \int_0^1 (x+1)^2 dx + \int_1^0 (x-1)^2 dx \\
 &= \int_0^1 (x^2+2x+1) dx - \int_0^1 (x^2-2x+1) dx \\
 &= \int_0^1 (x^2+2x+1-x^2+2x-1) dx \\
 &= \int_0^1 4x dx = \left[2x^2 \right]_0^1 \\
 &= 2
 \end{aligned}$$

답 2

$$\begin{aligned}
 0798 \quad & \int_{-2}^1 (2x^2+6) dx - 2 \int_{-2}^1 (x^2-x+3) dx \\
 &= \int_{-2}^1 (2x^2+6) dx - \int_{-2}^1 (2x^2-2x+6) dx \\
 &= \int_{-2}^1 (2x^2+6-2x^2+2x-6) dx \\
 &= \int_{-2}^1 2x dx = \left[x^2 \right]_{-2}^1 \\
 &= 1-4=-3
 \end{aligned}$$

답 -3

$$\begin{aligned}
 0799 \quad & \int_0^3 x(x-2) dx + \int_0^3 (y^2+2y) dy \\
 &= \int_0^3 (x^2-2x) dx + \int_0^3 (x^2+2x) dx \\
 &= \int_0^3 (x^2-2x+x^2+2x) dx \\
 &= \int_0^3 2x^2 dx = \left[\frac{2}{3}x^3 \right]_0^3 \\
 &= 18
 \end{aligned}$$

답 18

$$\begin{aligned}
 0800 \quad & \int_{-1}^0 (3x+2) dx + \int_0^2 (3x+2) dx \\
 &= \int_{-1}^2 (3x+2) dx = \left[\frac{3}{2}x^2+2x \right]_{-1}^2 \\
 &= 10 - \left(-\frac{1}{2} \right) = \frac{21}{2}
 \end{aligned}$$

답 $\frac{21}{2}$

$$\begin{aligned}
 0801 \quad & \int_{-1}^0 (x^3-3x^2+2x) dx + \int_0^{-1} (x^3-3x^2+2x) dx \\
 &= \int_{-1}^{-1} (x^3-3x^2+2x) dx = 0
 \end{aligned}$$

답 0

다툼 풀이 \bullet $\int_{-1}^0 (x^3-3x^2+2x) dx + \int_0^{-1} (x^3-3x^2+2x) dx$

$$= \int_{-1}^0 (x^3-3x^2+2x) dx - \int_{-1}^0 (x^3-3x^2+2x) dx = 0$$

$$\begin{aligned}
 0802 \quad & \int_{-2}^{-1} (x^2-4x+5) dx + \int_{-1}^1 (y^2-4y+5) dy \\
 &= \int_{-2}^{-1} (x^2-4x+5) dx + \int_{-1}^1 (x^2-4x+5) dx \\
 &= \int_{-2}^1 (x^2-4x+5) dx = \left[\frac{1}{3}x^3-2x^2+5x \right]_{-2}^1 \\
 &= \frac{10}{3} - \left(-\frac{62}{3} \right) = 24
 \end{aligned}$$

답 24

$$\begin{aligned}
 0803 \quad & \int_{-1}^2 (5x^4-6x-1) dx - \int_3^2 (5x^4-6x-1) dx \\
 &= \int_{-1}^2 (5x^4-6x-1) dx + \int_2^3 (5x^4-6x-1) dx \\
 &= \int_{-1}^3 (5x^4-6x-1) dx \\
 &= \left[x^5-3x^2-x \right]_{-1}^3 \\
 &= 213 - (-3) = 216
 \end{aligned}$$

답 216

$$\begin{aligned}
 0804 \quad & |x-1| = \begin{cases} x-1 & (x \geq 1) \\ -x+1 & (x \leq 1) \end{cases} \text{이므로} \\
 & \int_0^2 |x-1| dx = \int_0^1 (-x+1) dx + \int_1^2 (x-1) dx \\
 &= \left[-\frac{1}{2}x^2+x \right]_0^1 + \left[\frac{1}{2}x^2-x \right]_1^2 \\
 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1
 \end{aligned}$$

답 1

$$\begin{aligned}
 0805 \quad & |x(x-2)| = \begin{cases} x^2-2x & (x \leq 0 \text{ 또는 } x \geq 2) \\ -x^2+2x & (0 \leq x \leq 2) \end{cases} \text{이므로} \\
 & \int_1^3 |x(x-2)| dx = \int_1^2 (-x^2+2x) dx + \int_2^3 (x^2-2x) dx \\
 &= \left[-\frac{1}{3}x^3+x^2 \right]_1^2 + \left[\frac{1}{3}x^3-x^2 \right]_2^3 \\
 &= \frac{2}{3} + \frac{4}{3} = 2
 \end{aligned}$$

답 2

$$\begin{aligned}
 0806 \quad & \int_{-2}^2 (5x^4+3x^3-7x-1) dx \\
 &= \int_{-2}^2 (5x^4-1) dx + \int_{-2}^2 (3x^3-7x) dx \\
 &= 2 \int_0^2 (5x^4-1) dx = 2 \left[x^5-x \right]_0^2 \\
 &= 2 \cdot 30 = 60
 \end{aligned}$$

답 60

$$\begin{aligned}
 0807 \quad & \int_{-3}^3 (-x^3+3x^2+4x-2) dx \\
 &= \int_{-3}^3 (3x^2-2) dx + \int_{-3}^3 (-x^3+4x) dx \\
 &= 2 \int_0^3 (3x^2-2) dx = 2 \left[x^3-2x \right]_0^3 \\
 &= 2 \cdot 21 = 42
 \end{aligned}$$

답 42

$$\begin{aligned}
 0808 \quad & \int_{-1}^1 (x+1)(3x+2) dx = \int_{-1}^1 (3x^2+5x+2) dx \\
 &= \int_{-1}^1 (3x^2+2) dx + \int_{-1}^1 5x dx \\
 &= 2 \int_0^1 (3x^2+2) dx \\
 &= 2 \left[x^3+2x \right]_0^1 \\
 &= 2 \cdot 3 = 6
 \end{aligned}$$

답 6



0809 주어진 식의 양변을 x 에 대하여 미분하면
 $f(x)=4x-3$ 답 $f(x)=4x-3$

0810 주어진 식의 양변을 x 에 대하여 미분하면
 $f(x)=3x^2+10x-4$ 답 $f(x)=3x^2+10x-4$

0811 $F'(x)=x^2+2x+3$ 이라 하면

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^h (x^2+2x+3)dx = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(h)-F(0)}{h}$$

$$= F'(0)=3$$
 답 3

0812 $F'(x)=(x+2)(x+3)$ 이라 하면

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} \int_1^x (x+2)(x+3)dx = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{F(x)-F(1)}{x-1}$$

$$= F'(1)=12$$
 답 12

유형 01~02 정적분의 정의

본책 134쪽

- ① 정적분 $\int_a^b f(x)dx$ 의 값을 구할 때
- (i) 적분상수를 생략한 $f(x)$ 의 부정적분 $F(x)$ 를 구한다.
 - (ii) $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$ 의 값을 구한다.
- ② $\int_a^a f(x)dx=0, \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

0813
$$\int_3^3 (x-1)(2x+3)dx - \int_{-1}^{-3} (x-1)(3x+1)dx$$

$$= 0 + \int_{-3}^{-1} (x-1)(3x+1)dx$$

$$= \int_{-3}^{-1} (3x^2-2x-1)dx = [x^3-x^2-x]_{-3}^{-1}$$

$$= -1 - (-33) = 32$$
 답 32

0814
$$\int_0^1 9(x^2-1)(x^2+1)(x^4+1)dx$$

$$= \int_0^1 9(x^4-1)(x^4+1)dx = \int_0^1 9(x^8-1)dx$$

$$= \int_0^1 (9x^8-9)dx = [x^9-9x]_0^1 = -8$$
 답 ③

0815
$$\int_0^1 (1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1})dx$$

$$= [x+x^2+x^3+\cdots+x^n]_0^1$$

$$= \underbrace{1+1+1+\cdots+1}_n = n$$

이므로 $n=100$ 답 ③

0816
$$\int_1^4 \{3f'(x)-2x\}dx = [3f(x)-x^2]_1^4$$

$$= \{3f(4)-16\} - \{3f(1)-1\}$$

$$= 3f(4)-24 \quad (\because f(1)=3) \quad \cdots \textcircled{1}$$

즉 $3f(4)-24=3$ 이므로 $f(4)=9$ $\cdots \textcircled{2}$

답 9

채점 기준	비율
① 주어진 정적분을 $f(4)$ 에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	60 %
② $f(4)$ 의 값을 구할 수 있다.	40 %

0817
$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 (2x^3-2kx)dx$$

$$= \left[\frac{1}{2}x^4 - kx^2 \right]_0^1 = \frac{1}{2} - k$$

이때 $f(1)=2-2k$ 이므로 $\frac{1}{2} - k = 2 - 2k$

$$\therefore k = \frac{3}{2}$$
 답 ⑤

0818
$$\int_0^2 \{f(x)\}^2 dx = \int_0^2 (2x-1)^2 dx$$

$$= \int_0^2 (4x^2-4x+1)dx$$

$$= \left[\frac{4}{3}x^3 - 2x^2 + x \right]_0^2 = \frac{14}{3},$$

$$\int_0^2 f(x)dx = \int_0^2 (2x-1)dx = [x^2-x]_0^2 = 2$$

이므로 주어진 등식에서

$$\frac{14}{3} = 4a \quad \therefore a = \frac{7}{6}$$
 답 $\frac{7}{6}$

0819
$$\int_{-2}^k (4x+6)dx = [2x^2+6x]_{-2}^k = (2k^2+6k) - (-4)$$

$$= 2k^2+6k+4 = 2\left(k+\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}$$

이므로 $\int_{-2}^k (4x+6)dx$ 는 $k = -\frac{3}{2}$ 일 때 최솟값 $-\frac{1}{2}$ 을 갖는다.

따라서 $m = -\frac{3}{2}, n = -\frac{1}{2}$ 이므로

$$m+n = -2$$
 답 -2

0820
$$\int_1^2 (3x^2-2kx+2)dx = [x^3-kx^2+2x]_1^2$$

$$= (12-4k) - (3-k)$$

$$= -3k+9$$

즉 $-3k+9 > 3$ 에서 $k < 2$

따라서 정수 k 의 최댓값은 1이다. 답 ①

0821 $f'(x)=3x^2-2x+5$ 이므로

$$f(x) = \int (3x^2-2x+5)dx = x^3 - x^2 + 5x + C$$

따라서

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)dx &= \int_0^1 (x^3 - x^2 + 5x + C)dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 + Cx \right]_0^1 \\ &= \frac{29}{12} + C\end{aligned}$$

이므로 $\frac{29}{12} + C = \frac{5}{12} \quad \therefore C = -2$
 $\therefore f(x) = x^3 - x^2 + 5x - 2$ $\boxed{\text{답}} f(x) = x^3 - x^2 + 5x - 2$

0822 조건 (가)에서

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x^2 - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \cdot \frac{1}{x + 1} \\ &= \frac{1}{2} f'(1) = -3\end{aligned}$$

$\therefore f'(1) = -6$

$f'(x) = 2ax + b$ 이므로

$2a + b = -6$ ㉠ \rightarrow ①

조건 (나)에서

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)dx &= \int_0^1 (ax^2 + bx)dx \\ &= \left[\frac{a}{3}x^3 + \frac{b}{2}x^2 \right]_0^1 \\ &= \frac{a}{3} + \frac{b}{2} = -\frac{7}{3}\end{aligned}$$

$\therefore 2a + 3b = -14$ ㉡ \rightarrow ②

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a = -1, b = -4$ ③

따라서 $f(x) = -x^2 - 4x$ 이므로

$f(-1) = -1 + 4 = 3$ ④

$\boxed{\text{답}} 3$

채점 기준

비율

① ㉠을 구할 수 있다.	30 %
② ㉡을 구할 수 있다.	30 %
③ a, b의 값을 구할 수 있다.	20 %
④ f(-1)의 값을 구할 수 있다.	20 %

유형 03 정적분의 계산; 적분 구간이 같은 경우

본책 135쪽

두 함수 $f(x), g(x)$ 가 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속일 때

$\Rightarrow \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx = \int_a^b \{f(x) \pm g(x)\}dx$ (복호동순)임을 이용하여 주어진 식을 하나의 정적분으로 나타낸다.

0823 $\int_0^2 (2x^2 + 1)dx + 2 \int_0^2 (x - x^2)dx$
 $= \int_0^2 (2x^2 + 1)dx + \int_0^2 (2x - 2x^2)dx$
 $= \int_0^2 (2x^2 + 1 + 2x - 2x^2)dx$
 $= \int_0^2 (2x + 1)dx = \left[x^2 + x \right]_0^2 = 6$

$\boxed{\text{답}} ⑤$

0824 $\int_0^1 \frac{x^3}{x+1} dx - \int_1^0 \frac{1}{t+1} dt$
 $= \int_0^1 \frac{x^3}{x+1} dx - \int_1^0 \frac{1}{x+1} dx$
 $= \int_0^1 \frac{x^3}{x+1} dx + \int_0^1 \frac{1}{x+1} dx$
 $= \int_0^1 \frac{x^3 + 1}{x+1} dx$
 $= \int_0^1 \frac{(x+1)(x^2 - x + 1)}{x+1} dx$
 $= \int_0^1 (x^2 - x + 1)dx$
 $= \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x \right]_0^1$
 $= \frac{5}{6}$

$\boxed{\text{답}} ④$

0825 $\int_2^1 f(x)dx = 3$ 에서 $\int_1^2 f(x)dx = -3$
 $\therefore \int_1^2 \{f(x) + 2\}^2 dx$
 $= \int_1^2 [\{f(x)\}^2 + 4f(x) + 4]dx$
 $= \int_1^2 \{f(x)\}^2 dx + 4 \int_1^2 f(x)dx + \int_1^2 4dx$
 $= 8 + 4 \cdot (-3) + [4x]_1^2$
 $= -4 + 4 = 0$

$\boxed{\text{답}} 0$

0826 $\int_1^3 (x+k)^2 dx + \int_3^1 (1-2x^2)dx$
 $= \int_1^3 (x^2 + 2kx + k^2)dx - \int_1^3 (1-2x^2)dx$
 $= \int_1^3 (x^2 + 2kx + k^2 - 1 + 2x^2)dx$
 $= \int_1^3 (3x^2 + 2kx + k^2 - 1)dx$
 $= \left[x^3 + kx^2 + (k^2 - 1)x \right]_1^3$
 $= (3k^2 + 9k + 24) - (k^2 + k)$
 $= 2k^2 + 8k + 24$
 $= 2(k+2)^2 + 16$

따라서 주어진 정적분의 최솟값은 16이다.

$\boxed{\text{답}} 16$

유형 04 정적분의 계산; 피적분함수가 같은 경우

본책 136쪽

함수 $f(x)$ 가 세 실수 a, b, c 를 포함하는 구간에서 연속일 때

$\Rightarrow \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$ 임을 이용하여 주어진 식을 하나의 정적분으로 나타낸다.



$$\begin{aligned}
 0827 \quad & \int_0^4 f(x)dx - \int_2^8 f(x)dx + \int_4^8 f(x)dx \\
 &= \int_0^4 f(x)dx + \int_4^8 f(x)dx - \int_2^8 f(x)dx \\
 &= \int_0^8 f(x)dx + \int_8^2 f(x)dx \\
 &= \int_0^2 f(x)dx \\
 &= \int_0^2 (2x^3 - 3x^2 + 1)dx \\
 &= \left[\frac{1}{2}x^4 - x^3 + x \right]_0^2 = 2
 \end{aligned}$$

답 ⑤

$$\begin{aligned}
 0828 \quad & \int_1^2 (x^3 + 2x - 1)dx + \int_2^3 (x^3 + 2x - 1)dx \\
 &= \int_1^3 (x^3 + 2x - 1)dx = \left[\frac{1}{4}x^4 + x^2 - x \right]_1^3 \\
 &= \frac{105}{4} - \frac{1}{4} = 26
 \end{aligned}$$

답 ④

$$\begin{aligned}
 0829 \quad & \int_0^3 f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_1^3 f(x)dx \\
 &= \left\{ \int_0^2 f(x)dx - \int_1^2 f(x)dx \right\} + \int_1^3 f(x)dx \\
 &= (A - C) + B \\
 &= A + B - C
 \end{aligned}$$

답 A+B-C

$$\begin{aligned}
 0830 \quad & \int_{-2}^2 f(x)dx = \int_{-2}^0 f(x)dx + \int_0^2 f(x)dx \\
 \text{이때 } & \int_{-2}^2 f(x)dx = \int_0^2 f(x)dx = \int_{-2}^0 f(x)dx \text{이므로} \\
 & \int_0^2 f(x)dx = \int_0^2 f(x)dx + \int_0^2 f(x)dx \\
 & \therefore \int_0^2 f(x)dx = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \text{즉 } \int_{-2}^2 f(x)dx = 0, \int_0^2 f(x)dx = 0, \int_{-2}^0 f(x)dx = 0 \text{이므로} \\
 & f(x) = x^2 + ax + b \quad (a, b \text{는 상수}) \text{라 하면}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int_0^2 f(x)dx &= \int_0^2 (x^2 + ax + b)dx \\
 &= \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{a}{2}x^2 + bx \right]_0^2 \\
 &= \frac{8}{3} + 2a + 2b = 0 \quad \dots\dots ㉠
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int_{-2}^0 f(x)dx &= \int_{-2}^0 (x^2 + ax + b)dx \\
 &= \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{a}{2}x^2 + bx \right]_{-2}^0 \\
 &= \frac{8}{3} - 2a + 2b = 0 \quad \dots\dots ㉡
 \end{aligned}$$

$$\text{㉠, ㉡을 연립하여 풀면} \quad a=0, b=-\frac{4}{3}$$

$$\text{따라서 } f(x) = x^2 - \frac{4}{3} \text{이므로} \quad f(1) = -\frac{1}{3}$$

답 ②

0831 조건 ㉠에서

$$\begin{aligned}
 \int_n^{n+3} f(x)dx &= \int_n^{n+1} xdx = \left[\frac{1}{2}x^2 \right]_n^{n+1} = \frac{2n+1}{2} \quad \dots\dots ① \\
 \therefore \int_0^9 f(x)dx &= \int_0^3 f(x)dx + \int_3^6 f(x)dx + \int_6^9 f(x)dx \\
 &= \frac{1}{2} + \frac{7}{2} + \frac{13}{2} = \frac{21}{2} \quad \dots\dots ②
 \end{aligned}$$

또 조건 ㉡에서 $\int_0^1 f(x)dx = 0$ 이므로

$$\begin{aligned}
 \int_0^{10} f(x)dx &= \int_0^1 f(x)dx + \int_1^4 f(x)dx + \int_4^7 f(x)dx \\
 &\quad + \int_7^{10} f(x)dx \\
 &= 0 + \frac{3}{2} + \frac{9}{2} + \frac{15}{2} = \frac{27}{2} \quad \dots\dots ③ \\
 \therefore \int_9^{10} f(x)dx &= \int_0^{10} f(x)dx - \int_0^9 f(x)dx \\
 &= \frac{27}{2} - \frac{21}{2} = 3 \quad \dots\dots ④
 \end{aligned}$$

답 3

채점 기준	비율
① $\int_n^{n+3} f(x)dx$ 를 n 에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	20 %
② $\int_0^9 f(x)dx$ 의 값을 구할 수 있다.	30 %
③ $\int_0^{10} f(x)dx$ 의 값을 구할 수 있다.	30 %
④ $\int_9^{10} f(x)dx$ 의 값을 구할 수 있다.	20 %

유형 05 정적분의 계산; 구간에 따라 다르게 정의된 함수 본책 137쪽

함수 $f(x) = \begin{cases} g(x) & (x \geq c) \\ h(x) & (x \leq c) \end{cases}$ 가 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속이고 $a < c < b$

일 때

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)dx = \int_a^c h(x)dx + \int_c^b g(x)dx$$

$$\begin{aligned}
 0832 \quad & \int_0^2 xf(x)dx = \int_0^1 xf(x)dx + \int_1^2 xf(x)dx \\
 &= \int_0^1 x(x^2 - 1)dx + \int_1^2 x(x - 1)dx \\
 &= \int_0^1 (x^3 - x)dx + \int_1^2 (x^2 - x)dx \\
 &= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2 \right]_0^1 + \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 \right]_1^2 \\
 &= -\frac{1}{4} + \frac{5}{6} = \frac{7}{12}
 \end{aligned}$$

$$\text{따라서 } k = \frac{7}{12} \text{이므로} \quad 12k = 7 \quad \text{답 ⑤}$$

0833 함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속이면 $x=1$ 에서 연속이므로

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) \\
 2 &= -1 + a \quad \therefore a = 3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \int_0^3 f(x)dx &= \int_0^1 (-x+3)dx + \int_1^3 (-x^2+3x)dx \\ &= \left[-\frac{1}{2}x^2+3x\right]_0^1 + \left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2\right]_1^3 \\ &= \frac{5}{2} + \frac{10}{3} = \frac{35}{6}\end{aligned}$$

답 ③

0834 $f(x) = \begin{cases} -3x+6 & (x \geq 0) \\ 6 & (x \leq 0) \end{cases}$ 이므로

→ ①

$$\begin{aligned}\int_{-2}^3 f(x)dx &= \int_{-2}^0 6dx + \int_0^3 (-3x+6)dx \\ &= \left[6x\right]_{-2}^0 + \left[-\frac{3}{2}x^2+6x\right]_0^3 \\ &= 12 + \frac{9}{2} = \frac{33}{2}\end{aligned}$$

→ ③

답 $\frac{33}{2}$

채점 기준	비율
① $f(x)$ 를 구할 수 있다.	30 %
② $\int_{-2}^3 f(x)dx$ 를 구간에 따라 나누어 두 정적분의 합으로 나타낼 수 있다.	40 %
③ 정적분의 값을 구할 수 있다.	30 %

0835 $\int_0^a f(x)dx = \int_0^1 (3x^2+1)dx + \int_1^a 4xdx$

$$\begin{aligned}&= \left[x^3+x\right]_0^1 + \left[2x^2\right]_1^a \\ &= 2 + (2a^2-2) = 2a^2\end{aligned}$$

따라서 $2a^2=8$ 이므로 $a^2=4$ $\therefore a=2$ ($\because a>1$)

답 2

유형 06 정적분의 계산: 절댓값 기호를 포함한 함수

본책 137쪽

절댓값 기호를 포함한 함수의 정적분의 값을 구할 때

(i) 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되게 하는 x 의 값을 경계로 구간을 나눈다.

(ii) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ 임을 이용한다.

0836 $|x^2-1| = \begin{cases} x^2-1 & (x \leq -1 \text{ 또는 } x \geq 1) \\ -x^2+1 & (-1 \leq x \leq 1) \end{cases}$ 이므로

$$\begin{aligned}&\int_0^3 \frac{|x^2-1|}{x+1} dx \\ &= \int_0^1 \frac{-x^2+1}{x+1} dx + \int_1^3 \frac{x^2-1}{x+1} dx \\ &= -\int_0^1 \frac{(x+1)(x-1)}{x+1} dx + \int_1^3 \frac{(x+1)(x-1)}{x+1} dx \\ &= -\int_0^1 (x-1)dx + \int_1^3 (x-1)dx \\ &= -\left[\frac{1}{2}x^2-x\right]_0^1 + \left[\frac{1}{2}x^2-x\right]_1^3 \\ &= \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}\end{aligned}$$

답 ②

0837 $|x| = \begin{cases} x & (x \geq 0) \\ -x & (x \leq 0) \end{cases}$ 이므로

$$\begin{aligned}\int_{-2}^3 (2|x|-1)dx &= \int_{-2}^0 (-2x-1)dx + \int_0^3 (2x-1)dx \\ &= \left[-x^2-x\right]_{-2}^0 + \left[x^2-x\right]_0^3 \\ &= 2+6=8\end{aligned}$$

답 8

0838 $|3x^2-6x| = \begin{cases} 3x^2-6x & (x \leq 0 \text{ 또는 } x \geq 2) \\ -3x^2+6x & (0 \leq x \leq 2) \end{cases}$ 이고 $a>2$ 이

므로

$$\begin{aligned}\int_0^a |3x^2-6x|dx &= \int_0^2 (-3x^2+6x)dx + \int_2^a (3x^2-6x)dx \\ &= \left[-x^3+3x^2\right]_0^2 + \left[x^3-3x^2\right]_2^a \\ &= a^3-3a^2+8\end{aligned}$$

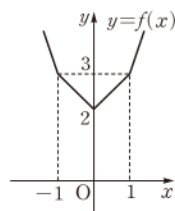
따라서 $a^3-3a^2+8=24$ 이므로 $a^3-3a^2-16=0$

$(a-4)(a^2+a+4)=0$ $\therefore a=4$ ($\because a$ 는 실수)

답 ②

0839 $f(x) = \begin{cases} 3x & (x \geq 1) \\ x+2 & (0 \leq x \leq 1) \\ -x+2 & (-1 \leq x \leq 0) \\ -3x & (x \leq -1) \end{cases}$ 이므로

함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 일 때 최솟값 2를 가지므로 $a=2$



$$\begin{aligned}\therefore \int_0^a f(x)dx &= \int_0^2 f(x)dx \\ &= \int_0^1 (x+2)dx + \int_1^2 3xdx \\ &= \left[\frac{1}{2}x^2+2x\right]_0^1 + \left[\frac{3}{2}x^2\right]_1^2 \\ &= \frac{5}{2} + \frac{9}{2} = 7\end{aligned}$$

답 ⑤

0840 $|x-n| = \begin{cases} x-n & (x \geq n) \\ -x+n & (x \leq n) \end{cases}$ 이므로

$$\begin{aligned}f(n) &= \int_0^{2n} |x-n|dx \\ &= \int_0^n (-x+n)dx + \int_n^{2n} (x-n)dx \\ &= \left[-\frac{1}{2}x^2+nx\right]_0^n + \left[\frac{1}{2}x^2-nx\right]_n^{2n} \\ &= \frac{n^2}{2} + \frac{n^2}{2} = n^2\end{aligned}$$

→ ①

$$\begin{aligned}\therefore \frac{f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(11)}{11} \\ &= \frac{1}{11} \sum_{k=1}^{11} f(k) = \frac{1}{11} \sum_{k=1}^{11} k^2 \\ &= \frac{1}{11} \cdot \frac{11 \cdot 12 \cdot 23}{6} = 46\end{aligned}$$

→ ②

답 46



채점 기준

비율

① $f(n)$ 을 구할 수 있다.	60%
② $\frac{f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(11)}{11}$ 의 값을 구할 수 있다.	40%

자연수의 거듭제곱의 합



- ① $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$
- ② $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- ③ $\sum_{k=1}^n k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$

0841 구간 $[1, 4]$ 에서 $|t-x| = \begin{cases} -t+x & (1 \leq t \leq x) \\ t-x & (x \leq t \leq 4) \end{cases}$ 이므로

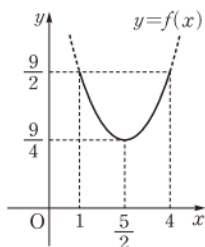
$$\begin{aligned} f(x) &= \int_1^4 |t-x| dt \\ &= \int_1^x (-t+x) dt + \int_x^4 (t-x) dt \\ &= \left[-\frac{1}{2}t^2 + xt \right]_1^x + \left[\frac{1}{2}t^2 - xt \right]_x^4 \\ &= x^2 - 5x + \frac{17}{2} \\ &= \left(x - \frac{5}{2} \right)^2 + \frac{9}{4} \quad (1 \leq x \leq 4) \end{aligned}$$

따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $1 \leq x \leq 4$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최댓값은 $\frac{9}{2}$, 최솟값은 $\frac{9}{4}$ 이다.

즉 $M = \frac{9}{2}$, $m = \frac{9}{4}$ 이므로

$$M - m = \frac{9}{4}$$

답 $\frac{9}{4}$



유형 07

우함수·기함수의 정적분

· 피적분함수가 주어진 경우

본책 138쪽

구간 $[-a, a]$ 에서 정적분의 계산은 피적분함수가 우함수인지 기함수인지를 파악한 후 다음을 이용한다.

- ① 피적분함수가 우함수이면 $\Rightarrow \int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$
- ② 피적분함수가 기함수이면 $\Rightarrow \int_{-a}^a f(x) dx = 0$

0842 $\int_{-a}^a (3x^2 - 2x) dx = 2 \int_0^a 3x^2 dx$

$$= 2 \left[x^3 \right]_0^a = 2a^3$$

즉 $2a^3 = \frac{2}{27}$ 이므로 $a^3 = \frac{1}{27} \quad \therefore a = \frac{1}{3}$

$\therefore 60a = 20$

답 ②

0843 $\int_{-1}^1 f(x) dx$

$$= \int_{-1}^1 (1 + 2x + 3x^2 + \cdots + 30x^{29}) dx$$

$$= \int_{-1}^1 (1 + 3x^2 + \cdots + 29x^{28}) dx + \int_{-1}^1 (2x + 4x^3 + \cdots + 30x^{29}) dx$$

$$= 2 \int_0^1 (1 + 3x^2 + \cdots + 29x^{28}) dx$$

$$= 2 \left[x + x^3 + \cdots + x^{29} \right]_0^1 = 2 \cdot 15 = 30$$

답 30

0844 $\int_{-a}^a (x^3 + 3x^2 + x + a) dx = 2 \int_0^a (3x^2 + a) dx$

$$= 2 \left[x^3 + ax \right]_0^a = 2a^3 + 2a^2$$

이므로 $2a^3 + 2a^2 = (a+1)^2$

$$2a^3 + a^2 - 2a - 1 = 0, \quad (a+1)(2a+1)(a-1) = 0$$

$$\therefore a = -1 \text{ 또는 } a = -\frac{1}{2} \text{ 또는 } a = 1$$

따라서 구하는 모든 실수 a 의 값의 합은

$$-1 + \left(-\frac{1}{2}\right) + 1 = -\frac{1}{2}$$

답 ②

0845 $\int_{-2}^2 |x|(x^3 + x - 1) dx$

$$= \int_{-2}^2 (x^3|x| + x|x| - |x|) dx$$

$$= 2 \int_0^2 (-|x|) dx = 2 \int_0^2 (-x) dx$$

$$= \left[-x^2 \right]_0^2 = -4$$

답 ②

참고 $(-x)^3|x| = -x^3|x|$, $(-x)|x| = -x|x|$, $|x| = |x|$ 이므로 $x^3|x|$, $x|x|$ 는 기함수, $|x|$ 는 우함수이다.

0846 $f(x) = ax + b$ (a, b 는 상수, $a \neq 0$)라 하면

$$\int_{-1}^1 xf(x) dx = 3 \text{에서}$$

$$\int_{-1}^1 xf(x) dx = \int_{-1}^1 (ax^2 + bx) dx = 2a \int_0^1 x^2 dx$$

$$= 2a \left[\frac{1}{3}x^3 \right]_0^1 = 2a \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}a$$

즉 $\frac{2}{3}a = 3$ 이므로 $a = \frac{9}{2}$

→ ①

$$\int_{-1}^1 x^2 f(x) dx = -2 \text{에서}$$

$$\int_{-1}^1 x^2 f(x) dx = \int_{-1}^1 (ax^3 + bx^2) dx = 2b \int_0^1 x^2 dx$$

$$= 2b \left[\frac{1}{3}x^3 \right]_0^1 = 2b \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}b$$

즉 $\frac{2}{3}b = -2$ 이므로 $b = -3$

→ ②

따라서 $f(x) = \frac{9}{2}x - 3$ 이므로 $f(2) = 9 - 3 = 6$

→ ③

답 6

채점 기준

비율

① a의 값을 구할 수 있다.	40 %
② b의 값을 구할 수 있다.	40 %
③ f(2)의 값을 구할 수 있다.	20 %

유형 08

우함수·기함수의 정적분
; 피적분함수가 주어지지 않은 경우

본책 139쪽

- ① $f(-x)=f(x)$ 이면 $\Rightarrow f(x)$ 는 우함수
 ② $f(-x)=-f(x)$ 이면 $\Rightarrow f(x)$ 는 기함수

0847 $f(-x)=f(x)$ 에서 $f(x)$ 는 우함수이므로 $x^3f(x)$, $xf(x)$ 는 모두 기함수이다.

$$\begin{aligned} & \therefore \int_{-1}^1 (2x^3 - x - 1)f(x)dx \\ &= 2 \int_{-1}^1 x^3 f(x)dx - \int_{-1}^1 x f(x)dx - \int_{-1}^1 f(x)dx \\ &= -2 \int_0^1 f(x)dx \\ &= -2 \cdot 5 = -10 \end{aligned}$$

답 -10

우함수, 기함수의 곱

- ① (우함수) \times (우함수) \Rightarrow (우함수)
 ② (우함수) \times (기함수) \Rightarrow (기함수)
 ③ (기함수) \times (기함수) \Rightarrow (우함수)



0848 $f(x)=f(-x)$ 에서 $f(x)$ 는 우함수, $g(x)=-g(-x)$ 에서 $g(-x)=-g(x)$ 이므로 $g(x)$ 는 기함수이다.

$$\begin{aligned} \therefore \int_{-3}^3 \{f(x)+g(x)\}dx &= \int_{-3}^3 f(x)dx + \int_{-3}^3 g(x)dx \\ &= 2 \int_0^3 f(x)dx \\ &= 2 \cdot 4 = 8 \end{aligned}$$

답 ③

0849 $f(-x)=f(x)$ 에서 $f(x)$ 는 우함수이므로

$$\begin{aligned} \int_{-5}^5 f(x)dx &= 2 \int_0^5 f(x)dx = 12 \quad \therefore \int_0^5 f(x)dx = 6 \\ \therefore \int_2^5 f(x)dx &= \int_0^5 f(x)dx - \int_0^2 f(x)dx \\ &= 6 - 3 = 3 \end{aligned}$$

답 3

0850 $f(x)=-f(-x)$ 에서 $f(-x)=-f(x)$ 이므로 $f(x)$ 는 기함수이다.

$$\begin{aligned} \therefore \int_{-2}^3 f(x)dx &= \int_{-2}^2 f(x)dx + \int_2^3 f(x)dx \\ &= \int_2^3 f(x)dx \\ &= \int_0^3 f(x)dx - \int_0^2 f(x)dx \\ &= k - (-5) = k + 5 \end{aligned}$$

이때 $\int_{-2}^3 f(x)dx = 3k - 1$ 이므로

$$\begin{aligned} k + 5 &= 3k - 1, \quad 2k = 6 \\ \therefore k &= 3 \end{aligned}$$

답 3

유형 09

정적분을 포함한 등식
; 아래끝과 위끝이 상수인 경우

본책 140쪽

$f(x)=g(x)+\int_a^b f(t)dt$ (a, b 는 상수) 꼴의 등식이 주어질 때

$\Rightarrow \int_a^b f(t)dt = k$ (k 는 상수)라 하면 $f(x)=g(x)+k$ 이므로 이것을

$\int_a^b f(t)dt = k$ 에 대입하여 k 의 값을 구한다.

0851 $\int_0^4 f(t)dt = k$ (k 는 상수)

..... ①

라 하면 $f(x)=x^3-2x+k$

이것을 ①에 대입하면

$$\int_0^4 (t^3 - 2t + k)dt = k, \quad \left[\frac{1}{4}t^4 - t^2 + kt \right]_0^4 = k$$

$$48 + 4k = k \quad \therefore k = -16$$

따라서 $f(x)=x^3-2x-16$ 이므로

$$f(2) = 8 - 4 - 16 = -12$$

답 ②

0852 $f(x)=3x^2+\int_0^1 (2x+1)f(t)dt$

$$= 3x^2 + 2x \int_0^1 f(t)dt + \int_0^1 f(t)dt$$

이때

$$\int_0^1 f(t)dt = k \quad (k \text{는 상수})$$

..... ①

라 하면 $f(x)=3x^2+2kx+k$

이것을 ①에 대입하면

$$\int_0^1 (3t^2 + 2kt + k)dt = k, \quad \left[t^3 + kt^2 + kt \right]_0^1 = k$$

$$1 + 2k = k \quad \therefore k = -1$$

따라서 $f(x)=3x^2-2x-1$ 이므로

$$f(-2) = 12 + 4 - 1 = 15$$

답 ④

0853 $\int_0^3 tf'(t)dt = k$ (k 는 상수)

..... ①

라 하면 $f(x)=-x^2+6x+k$

$$\therefore f'(x) = -2x + 6$$

... ①

이것을 ①에 대입하면

$$\int_0^3 (-2t^2 + 6t)dt = k, \quad \left[-\frac{2}{3}t^3 + 3t^2 \right]_0^3 = k$$

$$\therefore k = 9$$

... ②

따라서 $f(x)=-x^2+6x+9$ 이므로

$$f(-1) = -1 - 6 + 9 = 2$$

... ③

답 2



채점 기준	비율
① $f'(x)$ 를 구할 수 있다.	40 %
② k 의 값을 구할 수 있다.	30 %
③ $f(-1)$ 의 값을 구할 수 있다.	30 %

0854 $f(x)=mx+n$ 은 연속함수이므로

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x + \int_0^2 f(t)dt - \int_0^4 f(t)dt \\ &= 2x - \left\{ \int_2^0 f(t)dt + \int_0^4 f(t)dt \right\} \\ &= 2x - \int_2^4 f(t)dt \end{aligned}$$

이때 $\int_2^4 f(t)dt$ 는 상수이므로 $m=2$ 이고

$$n = - \int_2^4 f(t)dt \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

따라서 $f(x)=2x+n$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$\begin{aligned} n &= - \int_2^4 (2t+n)dt, \quad n = - \left[t^2 + nt \right]_2^4 \\ n &= - (12 + 2n) \quad \therefore n = -4 \\ \therefore mn &= -8 \end{aligned} \quad \text{답 } \textcircled{1}$$

0855 $f(x)=3x^2-2x+\int_0^2 f(t)dt$ 에서

$$\int_0^2 f(t)dt = k \quad (k \text{는 상수}) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

라 하면 $f(x)=3x^2-2x+k$

이것을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$\begin{aligned} \int_0^2 (3t^2-2t+k)dt &= k, \quad \left[t^3 - t^2 + kt \right]_0^2 = k \\ 4 + 2k &= k \quad \therefore k = -4 \end{aligned}$$

즉 $f(x)=3x^2-2x-4$ 이므로 부등식 $f(x)<g(x)$ 에서

$$\begin{aligned} 3x^2-2x-4 &< 2x^2+3x+2 \\ x^2-5x-6 &< 0, \quad (x+1)(x-6) < 0 \\ \therefore -1 &< x < 6 \end{aligned}$$

따라서 부등식 $f(x)<g(x)$ 를 만족시키는 자연수 x 는 1, 2, 3, 4, 5
이므로 구하는 합은

$$1+2+3+4+5=15 \quad \text{답 } 15$$

0856 $\int_0^1 \{f(y)+g(y)\}dy=a, \int_0^1 \{f(y)-g(y)\}dy=b$ (a, b 는 상수)라 하면

$$f(x)=3x^2+a, g(x)=4x^3+b$$

이므로

$$\begin{aligned} \int_0^1 \{f(y)+g(y)\}dy &= \int_0^1 \{4y^3+3y^2+(a+b)\}dy \\ &= \left[y^4+y^3+(a+b)y \right]_0^1 \\ &= 2+a+b \end{aligned}$$

즉 $2+a+b=a$ 이므로 $b=-2$ → ①

$$\begin{aligned} \int_0^1 \{f(y)-g(y)\}dy &= \int_0^1 \{-4y^3+3y^2+(a-b)\}dy \\ &= \left[-y^4+y^3+(a-b)y \right]_0^1 \\ &= a-b \end{aligned}$$

즉 $a-b=b$ 이므로 $a=2b=-4$ → ②

따라서 $f(x)=3x^2-4, g(x)=4x^3-2$ 이므로

$$f(1)g(1) = -1 \cdot 2 = -2 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

답 -2

채점 기준	비율
① b 의 값을 구할 수 있다.	40 %
② a 의 값을 구할 수 있다.	40 %
③ $f(1)g(1)$ 의 값을 구할 수 있다.	20 %

유형 10

정적분을 포함한 등식

; 아래끝 또는 위끝에 변수가 있는 경우

본책 141쪽

$\int_a^x f(t)dt = g(x)$ (a 는 상수) 꼴의 등식이 주어질 때

① 양변에 $x=a$ 를 대입한다. $\Rightarrow \int_a^a f(t)dt = g(a) = 0$

② 양변을 x 에 대하여 미분한다. $\Rightarrow f(x) = g'(x)$

0857 주어진 등식의 양변에 $x=a$ 를 대입하면

$$\begin{aligned} a^2-4a &= 0, \quad a(a-4) = 0 \\ \therefore a &= 4 \quad (\because a > 0) \end{aligned}$$

주어진 등식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x-4 \\ \therefore f(a) &= f(4) = 4 \end{aligned} \quad \text{답 } \textcircled{5}$$

0858 $f(x)=\int_{-1}^x (t^2+t)dt$ 의 양변에 $x=-1$ 을 대입하면

$$f(-1) = 0$$

주어진 등식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x) = x^2+x$$

따라서 $f'(-1)=0$ 이므로

$$f(-1)+f'(-1) = 0 \quad \text{답 } 0$$

0859 $f(x)=\int_0^x (2at+1)dt$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x) = 2ax+1$$

이때 $f'(3)=19$ 이므로

$$6a+1=19 \quad \therefore a=3 \quad \text{답 } \textcircled{2}$$

0860 $f(x)=\int_x^{x+1} t^3 dt$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x) = (x+1)^3 - x^3 = 3x^2+3x+1$$

$$\therefore \int_0^2 f'(x)dx = \int_0^2 (3x^2+3x+1)dx$$

$$= \left[x^3 + \frac{3}{2}x^2 + x \right]_0^2 = 16 \quad \text{답 } \textcircled{2}$$

0861 주어진 등식의 양변에 $x=a$ 를 대입하면

$$2a^2 + a^2 - 12 = 0, \quad a^2 = 4$$

$$\therefore a = 2 (\because a > 0)$$

주어진 등식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f(x) = 4x + a = 4x + 2$$

따라서 $f(2) = 10$ 이므로 $\frac{a}{f(2)} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$

답 $\frac{1}{5}$

0862 주어진 등식의 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$f(1) = -3$$

..... ㉠

주어진 등식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f(x) + xf'(x) = 3x^2 - 8x + f(x)$$

$$xf'(x) = 3x^2 - 8x \quad \therefore f'(x) = 3x - 8$$

이때

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int (3x - 8) dx = \frac{3}{2}x^2 - 8x + C$$

이므로 ㉠에서

$$\frac{3}{2} - 8 + C = -3 \quad \therefore C = \frac{7}{2}$$

따라서 $f(x) = \frac{3}{2}x^2 - 8x + \frac{7}{2}$ 이므로 $f(k) = 41$ 에서

$$\frac{3}{2}k^2 - 8k + \frac{7}{2} = 41, \quad 3k^2 - 16k - 75 = 0$$

$$(k+3)(3k-25) = 0 \quad \therefore k = -3 (\because k \text{는 정수})$$

답 -3

유형 11 정적분을 포함한 등식; 아래끝 또는 위끝과 피적분함수에 변수가 있는 경우

본책 142쪽

$\int_a^x (x \pm t)f(t)dt$ (a 는 상수) 꼴을 포함한 등식이 주어질 때

(i) $x \int_a^x f(t)dt \pm \int_a^x tf(t)dt$ 로 변형한다.

(ii) (i)에서 얻은 등식의 양변을 x 에 대하여 미분한다.

$$\Rightarrow \frac{d}{dx} \left[x \int_a^x f(t)dt \pm \int_a^x tf(t)dt \right] = \int_a^x f(t)dt + xf(x) \pm xf(x)$$

(복호동순)

0863 $\int_2^x (x-t)f(t)dt = x^3 + ax^2 + 4$ 의 양변에 $x=2$ 를 대입하면

$$8 + 4a + 4 = 0 \quad \therefore a = -3$$

$$\int_2^x (x-t)f(t)dt = x^3 - 3x^2 + 4 \text{에서}$$

$$x \int_2^x f(t)dt - \int_2^x tf(t)dt = x^3 - 3x^2 + 4$$

위의 등식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\int_2^x f(t)dt + xf(x) - xf(x) = 3x^2 - 6x$$

$$\therefore \int_2^x f(t)dt = 3x^2 - 6x$$

위의 등식의 양변을 다시 x 에 대하여 미분하면

$$f(x) = 6x - 6 \quad \therefore b = f(2) = 6$$

$$\therefore a + b = 3$$

답 3

0864 $\int_1^x (x-t)f(t)dt = x^3 - x^2 - x + 1$ 에서

$$x \int_1^x f(t)dt - \int_1^x tf(t)dt = x^3 - x^2 - x + 1$$

위의 등식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\int_1^x f(t)dt + xf(x) - xf(x) = 3x^2 - 2x - 1$$

$$\therefore \int_1^x f(t)dt = 3x^2 - 2x - 1$$

위의 등식의 양변을 다시 x 에 대하여 미분하면

$$f(x) = 6x - 2 \quad \therefore f(0) = -2$$

답 ①

0865 $\int_0^x (x-t)f'(t)dt = x^4$ 에서

$$x \int_0^x f'(t)dt - \int_0^x tf'(t)dt = x^4$$

위의 등식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\int_0^x f'(t)dt + xf'(x) - xf'(x) = 4x^3$$

$$\int_0^x f'(t)dt = 4x^3, \quad \left[f(t) \right]_0^x = 4x^3$$

$$\therefore f(x) - f(0) = 4x^3$$

이때 $f(0) = -2$ 이므로 $f(x) = 4x^3 - 2$

답 $f(x) = 4x^3 - 2$

유형 12 정적분으로 정의된 함수의 극대·극소

본책 142쪽

$f(x) = \int_a^x g(t)dt$ (a 는 상수)와 같이 정의된 다항함수 $f(x)$ 의 극값을 찾을 때

(i) 양변을 x 에 대하여 미분한다. $\Rightarrow f'(x) = g(x)$

(ii) $f'(x) = 0$ 을 만족시키는 x 의 값 b 를 구한다.

(iii) $x=b$ 의 좌우에서 $f'(x)$ 의 부호를 조사하여 증감표를 만든다.

$$\Rightarrow f'(x) \text{의 부호가} \begin{cases} \text{양} \rightarrow \text{음} \Rightarrow f(x) \text{는 } x=b \text{에서 극대} \\ \text{음} \rightarrow \text{양} \Rightarrow f(x) \text{는 } x=b \text{에서 극소} \end{cases}$$

0866 $f(x) = \int_0^x (-3t^2 + at + b)dt$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x) = -3x^2 + ax + b$$

함수 $f(x)$ 가 $x = -3$ 에서 극솟값 -18 을 가지므로

$$f(-3) = -18, \quad f'(-3) = 0$$

이때

$$f(-3) = \int_0^{-3} (-3t^2 + at + b)dt$$

$$= \left[-t^3 + \frac{1}{2}at^2 + bt \right]_0^{-3}$$

$$= 27 + \frac{9}{2}a - 3b$$

이므로 $27 + \frac{9}{2}a - 3b = -18$

$$\therefore 3a - 2b = -30$$

..... ㉠

$f'(-3) = 0$ 에서 $-27 - 3a + b = 0$

$$\therefore 3a - b = -27$$

..... ㉡



㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a = -8, b = 3$
 $\therefore ab = -24$

답 ①

0867 $f(x) = \int_0^x (t^2 + kt - 8)dt$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x) = x^2 + kx - 8$$

함수 $f(x)$ 가 $x=2$ 에서 극솟값을 가지므로 $f'(2) = 0$

$$4 + 2k - 8 = 0$$

$$2k = 4 \quad \therefore k = 2$$

답 2

0868 $f(x) = \int_0^x (t^2 - 2t - 3)dt$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x) = x^2 - 2x - 3 = (x+1)(x-3)$$

$f'(x) = 0$ 에서 $x = -1$ 또는 $x = 3$

x	\dots	-1	\dots	3	\dots
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	\nearrow	극대	\searrow	극소	\nearrow

따라서 $f(x)$ 는 $x = -1$ 일 때 극대이므로 극댓값 a 는

$$a = f(-1) = \int_0^{-1} (t^2 - 2t - 3)dt$$

$$= \left[\frac{1}{3}t^3 - t^2 - 3t \right]_0^{-1} = \frac{5}{3}$$

또 $x = 3$ 일 때 극소이므로 극솟값 b 는

$$b = f(3) = \int_0^3 (t^2 - 2t - 3)dt$$

$$= \left[\frac{1}{3}t^3 - t^2 - 3t \right]_0^3 = -9$$

$$\therefore 3a + b = 3 \cdot \frac{5}{3} + (-9) = -4$$

답 ①

0869 $f(x) = \int_0^x (t-1)(t-a)dt$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x) = (x-1)(x-a)$$

$f'(x) = 0$ 에서 $x = 1$ 또는 $x = a$

즉 $f(x)$ 는 $x = 1$ 일 때 극대, $x = a$ 일 때 극소이다.

→ ①

이때 $f(x)$ 의 극댓값이 $\frac{11}{6}$ 이므로

$$f(1) = \int_0^1 (t-1)(t-a)dt$$

$$= \int_0^1 \{t^2 - (a+1)t + a\}dt$$

$$= \left[\frac{1}{3}t^3 - \frac{a+1}{2}t^2 + at \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{a+1}{2} + a$$

$$= \frac{3a-1}{6} = \frac{11}{6}$$

$$3a-1=11 \quad \therefore a=4$$

→ ②

따라서 $f(x)$ 는 $x=4$ 에서 극솟값을 가지므로 구하는 극솟값은

$$f(4) = \int_0^4 (t-1)(t-4)dt$$

$$= \int_0^4 (t^2 - 5t + 4)dt$$

$$= \left[\frac{1}{3}t^3 - \frac{5}{2}t^2 + 4t \right]_0^4 = -\frac{8}{3}$$

→ ③

$$\text{답 } -\frac{8}{3}$$

채점 기준	비율
① $f(x)$ 가 극소일 때의 x 의 값을 구할 수 있다.	20 %
② a 의 값을 구할 수 있다.	40 %
③ $f(x)$ 의 극솟값을 구할 수 있다.	40 %

0870 $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$F'(x) = f(x) = x^3 - 3x + 2a$$

이므로 사차함수 $F(x)$ 가 극댓값을 가지려면 삼차방정식 $F'(x) = 0$, 즉 $f(x) = 0$ 이 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.

이때 $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1)$ 이므로 $f'(x) = 0$ 에서

$$x = -1 \text{ 또는 } x = 1$$

즉 $f(-1)f(1) < 0$ 이어야 하므로

$$(2a+2)(2a-2) < 0, \quad (a+1)(a-1) < 0$$

$$\therefore -1 < a < 1$$

따라서 정수 a 의 값은 0이다.

답 0

유형 13

정적분으로 정의된 함수의 최대·최소

본책 143쪽

주어진 등식을 미분하여 $f(x)$ 또는 $f'(x)$ 를 구한 후 $f(x)$ 의 최댓값과 최솟값을 구한다.

0871 $f(x) = \int_x^{x+1} (t^3 - t)dt$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x) = \{(x+1)^3 - (x+1)\} - (x^3 - x)$$

$$= 3x^2 + 3x = 3x(x+1)$$

$f'(x) = 0$ 에서 $x = -1$ 또는 $x = 0$

x	-1	\dots	0	\dots	1
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		\searrow	극소	\nearrow	

이때

$$f(-1) = \int_{-1}^0 (t^3 - t)dt = \left[\frac{1}{4}t^4 - \frac{1}{2}t^2 \right]_{-1}^0 = \frac{1}{4}$$

$$f(0) = \int_0^1 (t^3 - t)dt = \left[\frac{1}{4}t^4 - \frac{1}{2}t^2 \right]_0^1 = -\frac{1}{4}$$

$$f(1) = \int_1^2 (t^3 - t)dt = \left[\frac{1}{4}t^4 - \frac{1}{2}t^2 \right]_1^2 = \frac{9}{4}$$

이므로 $-1 \leq x \leq 1$ 에서 $f(x)$ 의 최댓값은 $\frac{9}{4}$, 최솟값은 $-\frac{1}{4}$ 이다.

$$\text{즉 } M = \frac{9}{4}, m = -\frac{1}{4} \text{이므로}$$

$$M + m = 2$$

답 ④

0872 $\int_0^x (x-t)f(t)dt = \frac{1}{4}x^4 + x^3 + 3x^2$ 에서

$$x \int_0^x f(t)dt - \int_0^x t f(t)dt = \frac{1}{4}x^4 + x^3 + 3x^2$$

위의 등식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\int_0^x f(t)dt + x f(x) - x f(x) = x^3 + 3x^2 + 6x$$

$$\therefore \int_0^x f(t)dt = x^3 + 3x^2 + 6x \quad \rightarrow ①$$

위의 등식의 양변을 다시 x 에 대하여 미분하면

$$f(x) = 3x^2 + 6x + 6 \quad \rightarrow ②$$

따라서 $f(x) = 3(x+1)^2 + 3$ 이므로 $f(x)$ 는 $x = -1$ 일 때 최솟값 3을 갖는다. $\rightarrow ③$

답 3

채점 기준	비율
① $\int_0^x f(t)dt$ 를 구할 수 있다.	50%
② $f(x)$ 를 구할 수 있다.	30%
③ $f(x)$ 의 최솟값을 구할 수 있다.	20%

0873 $f(x) = \int_{-1}^x (1-|t|)dt$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x) = 1 - |x|$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = 1 \quad (\because 0 \leq x \leq 3)$$

x	0	...	1	...	3
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$		/	극대	\	

따라서 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 극대이면서 최대이므로 최댓값은

$$f(1) = \int_{-1}^1 (1-|t|)dt$$

$$= 2 \int_0^1 (1-t)dt$$

$$= 2 \int_0^1 (1-t)dt \quad \begin{array}{l} y=1-|x| \text{의 그래프는 } y\text{-축에 대하여} \\ \text{대칭이므로 우함수이다.} \end{array}$$

$$= 2 \left[t - \frac{1}{2}t^2 \right]_0^1$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

답 ②

유형 14

정적분으로 정의된 함수의 그래프

본책 143쪽

$F(x) = \int_a^x f(t)dt$ 에 대하여 $y=F(x)$ 의 그래프가 주어질 때

(i) 그래프로부터 $F(x)$ 의 식을 구한다.

(ii) 주어진 등식의 양변을 x 에 대하여 미분하여 $F'(x)=f(x)$ 임을 이용한다.

0874 주어진 그래프에 의하여

$$F(x) = a(x-1)(x-2) = a(x^2 - 3x + 2) \quad (a < 0)$$

라 하면 $\int_2^x f(t)dt = a(x^2 - 3x + 2)$

이 등식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f(x) = a(2x-3)$$

$y=f(x)$ 의 그래프가 점 (1, 3)을 지나므로 $f(1)=3$

$$-a=3 \quad \therefore a=-3$$

따라서 $f(x) = -3(2x-3)$ 이므로 $f(0)=9$ 답 ⑤

0875 주어진 그래프에 의하여

$$f(x) = ax(x-2) \quad (a > 0)$$

라 하자. 이때 함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 축의 방정식은 $x=1$ 이고,

$f(x)$ 의 최솟값이 -1 이므로 $f(1)=-1$ 에서

$$-a=-1 \quad \therefore a=1$$

$$\therefore f(x) = x(x-2) = x^2 - 2x$$

$F(x) = \int_0^x f(t)dt$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$F'(x) = f(x)$$

따라서 $F(x)$ 는 $x=2$ 에서 극소이므로 극솟값은

$$F(2) = \int_0^2 f(t)dt = \int_0^2 (t^2 - 2t)dt \quad \begin{array}{l} F'(2)=0 \text{이고, } x=2 \text{의 좌우에서} \\ F'(x) \text{의 부호가 음에서 양으로 바뀌} \\ \text{므로 } F(x) \text{는 } x=2 \text{에서 극소이다.} \end{array}$$

$$= \left[\frac{1}{3}t^3 - t^2 \right]_0^2 = -\frac{4}{3}$$

답 $-\frac{4}{3}$

0876 주어진 그래프에 의하여

$$f(x) = a(x-2)(x-5) \quad (a > 0)$$

라 하고, $g(x) = \int_x^{x+2} f(t)dt$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$g'(x) = f(x+2) - f(x)$$

$$= ax(x-3) - a(x-2)(x-5)$$

$$= a(x^2 - 3x - x^2 + 7x - 10)$$

$$= 2a(2x-5)$$

$$g'(x)=0 \text{에서 } x = \frac{5}{2}$$

따라서 $g(x)$ 는 $x = \frac{5}{2}$ 에서 극소이면서

최소이므로

$$k = \frac{5}{2}$$

x	...	$\frac{5}{2}$...
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	\	극소	/

답 ③

0877 $S(x) = \int_0^x f(t)dt$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$S'(x) = f(x)$$

$$S'(x)=0 \text{에서 } x=1 \text{ 또는 } x=4 \quad (\because 0 \leq x \leq 4)$$

x	0	...	1	...	4
$S'(x)$		+	0	-	0
$S(x)$		/	극대	\	

이때

$$S(0)=0$$

$$S(1) = \int_0^1 f(t)dt = 2$$

$$S(4) = \int_0^4 f(t)dt = \int_0^1 f(t)dt + \int_1^4 f(t)dt = 2 + (-6) = -4$$



이므로 $S(x)$ 의 최댓값은 2, 최솟값은 -4이다.

따라서 구하는 합은

$$2 + (-4) = -2$$

답 -2

0878 $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$F'(x) = f(x)$$

이므로 $f(x)$ 는 $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ 의 도함수이다.

그런데 주어진 그래프에서 $y = F(x)$ 가

$0 \leq x \leq a$ 에서 감소하므로 $f(x) \leq 0$

$a \leq x \leq c$ 에서 증가하므로 $f(x) \geq 0$

$x \geq c$ 에서 감소하므로 $f(x) \leq 0$

따라서 $y = f(x)$ 의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같으므로

$$f(a) = 0, f(b) > 0,$$

$$f(c) = 0, f(d) < 0$$

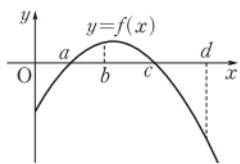
∴ $f(x) = 0$ 을 만족시키는 x 의 값은 a, c 이다.

ㄴ. $f(b)f(d) < 0$

ㄷ. ㉠에서 $x > c$ 일 때, $f(x) < 0$ 이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③



유형 15 정적분으로 정의된 함수의 극한

$$; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_a^{x+a} f(t)dt \text{ 풀}$$

본책 144쪽

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_a^{x+a} f(t)dt$ 의 값을 구할 때

(i) $F'(t) = f(t)$ 라 한다.

(ii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_a^{x+a} f(t)dt = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x+a) - F(a)}{x} = F'(a) = f(a)$ 임을 이용한다.

0879 $f(x) = \int_0^x (9t^2 - 2t + 2)dt$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x) = 9x^2 - 2x + 2$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_0^x f'(t)dt = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0) = 2$$

답 2

0880 $f(x) = x^3 - x^2$, $F'(x) = f(x)$ 라 하면

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_3^{3+h} (x^3 - x^2)dx &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_3^{3+h} f(x)dx \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(3+h) - F(3)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(3+h) - F(3)}{3h} \cdot 3 \\ &= 3F'(3) \\ &= 3f(3) \\ &= 3 \cdot 18 = 54 \end{aligned}$$

답 ③

0881 $f(x) = x^2 - x + a$, $F'(x) = f(x)$ 라 하면

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{1-2h}^{1+h} (x^2 - x + a)dx \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{1-2h}^{1+h} f(x)dx = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(1+h) - F(1-2h)}{h} \quad \cdots ① \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{F(1+h) - F(1)\} - \{F(1-2h) - F(1)\}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(1+h) - F(1)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(1-2h) - F(1)}{-2h} \cdot 2 \\ &= F'(1) + 2F'(1) \quad \cdots ② \\ &= 3F'(1) = 3f(1) = 3a \end{aligned}$$

따라서 $3a = 1$ 이므로 $a = \frac{1}{3}$

답 ③

1/3

채점 기준	비율
① 주어진 등식의 좌변을 $F(x)$ 를 이용하여 나타낼 수 있다.	40 %
② 주어진 등식의 좌변을 $F'(1)$ 을 이용하여 나타낼 수 있다.	40 %
③ a 의 값을 구할 수 있다.	20 %

0882 $f(t) = |t - 5a|$, $F'(t) = f(t)$ 라 하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_0^x |t - 5a|dt &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x) - F(0)}{x} \\ &= F'(0) = f(0) \\ &= |-5a| = -5a \quad (\because a < 0) \end{aligned}$$

따라서 $-5a = 2a^2 - 3$ 이므로 $2a^2 + 5a - 3 = 0$

$$(a+3)(2a-1) = 0 \quad \therefore a = -3 \quad (\because a < 0)$$

답 -3

0883 $F'(x) = f(x)$ 라 하면

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{-1}^{-1+h} f(x)dx &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(-1+h) - F(-1)}{h} \\ &= F'(-1) = f(-1) \end{aligned}$$

따라서 $f(-1) = -1$ 이므로

$$1 - a + b = -1 \quad \therefore a - b = 2 \quad \cdots ①$$

또 $f(1) = 5$ 에서

$$1 + a + b = 5 \quad \therefore a + b = 4 \quad \cdots ②$$

①, ②를 연립하여 풀면 $a = 3, b = 1$

$$\therefore ab = 3$$

답 3

유형 16 정적분으로 정의된 함수의 극한

$$; \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{x-a} \int_a^x f(t)dt \text{ 풀}$$

본책 145쪽

$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{x-a} \int_a^x f(t)dt$ 의 값을 구할 때

(i) $F'(t) = f(t)$ 라 한다.

(ii) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{x-a} \int_a^x f(t)dt = \lim_{x \rightarrow a} \frac{F(x) - F(a)}{x-a} = F'(a) = f(a)$ 임을 이용한다.

0884 $F'(t)=f(t)$ 라 하면

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} \int_x^1 f(t) dt &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{x-1} \int_1^x f(t) dt \\ &= -\lim_{x \rightarrow 1} \frac{F(x)-F(1)}{x-1} \\ &= -F'(1) = -f(1) \\ &= -4\end{aligned}$$

답 ①

0885 $F'(t)=f(t)$ 라 하면

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{x+1} \int_{-1}^x f(t) dt &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{F(x^3)-F(-1)}{x+1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{F(x^3)-F(-1)}{x^3-(-1)} \cdot (x^2-x+1) \\ &= 3F'(-1) = 3f(-1) \\ &= 3 \cdot (-3) = -9\end{aligned}$$

답 ③

0886 $F'(t)=f(t)$ 라 하면

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x^2-4} \int_2^x f(t) dt &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{F(x)-F(2)}{x-2} \cdot \frac{1}{x+2} \\ &= \frac{1}{4} F'(2) = \frac{1}{4} f(2) \\ &= \frac{4+a}{4}\end{aligned}$$

따라서 $\frac{4+a}{4}=3$ 이므로 $a=8$

답 ⑤

0887 $f(t)=t(k-t)$, $F'(t)=f(t)$ 라 하면

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} \int_1^x t(k-t) dt &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} \int_1^x f(t) dt \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{F(x)-F(1)}{x-1} \\ &= F'(1) = f(1) \\ &= k-1\end{aligned}$$

→ ①

$$\begin{aligned}\therefore \sum_{k=1}^{10} \left\{ \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} \int_1^x t(k-t) dt \right\} &= \sum_{k=1}^{10} (k-1) \\ &= \frac{10 \cdot 11}{2} - 10 \\ &= 45\end{aligned}$$

→ ②

답 45

채점 기준	비율
① 극한을 간단히 할 수 있다.	60 %
② 주어진 식의 값을 구할 수 있다.	40 %

0888 **전략** 먼저 주어진 등식에서 다항함수 $f(x)$ 의 차수를 구한다.

풀이 $f(x)$ 의 차수를 n ($n \geq 2$ 인 자연수)이라 하면 주어진 등식의 좌변의 차수는 n^2 , 우변의 차수는 $n+1$ 이므로

$$n^2 = n+1 \quad \therefore n^2 - n - 1 = 0$$

그런데 위의 식을 만족시키는 자연수 n 은 존재하지 않으므로 $f(x)$ 는 일차 이하의 다항식이다.

$f(x)=ax+b$ (a, b 는 상수)라 하면

$$\begin{aligned}f(f(x)) &= f(ax+b) = a(ax+b) + b = a^2x + ab + b, \\ \int_0^x f(t) dt &= \int_0^x (at+b) dt = \left[\frac{1}{2}at^2 + bt \right]_0^x = \frac{1}{2}ax^2 + bx\end{aligned}$$

이므로 주어진 등식은

$$\begin{aligned}a^2x + ab + b &= \frac{1}{2}ax^2 + bx - 2x^2 + 15x + 5 \\ \therefore a^2x + ab + b &= \left(\frac{1}{2}a - 2 \right)x^2 + (b + 15)x + 5\end{aligned}$$

양변의 동류항의 계수를 비교하면

$$\begin{aligned}0 &= \frac{1}{2}a - 2, \quad a^2 = b + 15, \quad ab + b = 5 \\ \therefore a &= 4, \quad b = 1\end{aligned}$$

따라서 $f(x)=4x+1$ 이므로 $f(1)=5$

답 ⑤

0889 **전략** 이차함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 a 이고

$f(a)=f(b)=0$ 이면 $f(x)=a(x-a)(x-b)$ 임을 이용한다. (단, $a \neq b$)

풀이 조건 ②에서 $f(b)-b^2=0$, $f(b+1)-(b+1)^2=0$ 이므로 $b, b+1$ 은 이차방정식 $f(x)-x^2=0$ 의 근이다.

$g(x)=f(x)-x^2$ 이라 하면 $g(x)$ 의 최고차항의 계수는 $a-1$ 이므로

$$\begin{aligned}g(x) &= (a-1)(x-b)(x-b-1) \\ \therefore \int_b^{b+1} g(x) dx &= \int_b^{b+1} (a-1)(x-b)(x-b-1) dx \\ &= (a-1) \int_b^{b+1} \{x^2 - (2b+1)x + b(b+1)\} dx \\ &= (a-1) \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{2b+1}{2}x^2 + b(b+1)x \right]_b^{b+1} \\ &= (a-1) \left[\left\{ \frac{1}{3}(b+1)^3 - \frac{1}{2}(2b+1)(b+1)^2 + b(b+1)^2 \right\} \right. \\ &\quad \left. - \left\{ \frac{1}{3}b^3 - \frac{1}{2}b^2(2b+1) + b^2(b+1) \right\} \right] \\ &= (a-1) \left\{ \frac{(b+1)^2(2b-1)}{6} - \frac{b^2(2b+3)}{6} \right\} \\ &= (a-1) \left(\frac{2b^3+3b^2-1}{6} - \frac{2b^3+3b^2}{6} \right) \\ &= -\frac{a-1}{6}\end{aligned}$$

또 $g(x)=f(x)-x^2$ 이므로 조건 ①에 의하여

$$\begin{aligned}\int_b^{b+1} g(x) dx &= \int_b^{b+1} \{f(x)-x^2\} dx \\ &= \int_b^{b+1} f(x) dx - \int_b^{b+1} x^2 dx \\ &= -\left[\frac{1}{3}x^3 \right]_b^{b+1} \\ &= -\frac{1}{3}(3b^2+3b+1)\end{aligned}$$

따라서 $-\frac{a-1}{6} = -\frac{1}{3}(3b^2+3b+1)$ 이므로

$$a = 6b^2 + 6b + 3 = 6\left(b + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{2}$$

즉 a 는 $b = -\frac{1}{2}$ 일 때 최솟값 $\frac{3}{2}$ 을 갖는다.

답 $\frac{3}{2}$



0890 전략 $C(x) = \int_0^x C'(x)dx$ 임을 이용하여 $C(8) - C(4)$ 의 값을 구한다.

풀이 $C(x) = \int_0^x C'(x)dx = \int_0^x (1.5x^2 + 30x + 200)dx$

운행 거리가 40000 km일 때부터 80000 km일 때까지 지출하게 되는 차량 유지비는

$$\begin{aligned} & C(8) - C(4) \\ &= \int_0^8 (1.5x^2 + 30x + 200)dx - \int_0^4 (1.5x^2 + 30x + 200)dx \\ &= \int_4^8 (1.5x^2 + 30x + 200)dx \\ &= \left[0.5x^3 + 15x^2 + 200x \right]_4^8 \\ &= 2816 - 1072 \\ &= 1744 \text{ (만 원)} \end{aligned}$$

답 ②

0891 전략 주어진 식을 변형하여 정적분의 성질을 이용한다.

풀이 $k \int_a^c x dx - \int_a^c x^2 dx = \int_c^b x^2 dx - k \int_c^b x dx$ 에서

$$k \left(\int_a^c x dx + \int_c^b x dx \right) = \int_a^c x^2 dx + \int_c^b x^2 dx$$

$$k \int_a^b x dx = \int_a^b x^2 dx, \quad k \left[\frac{1}{2}x^2 \right]_a^b = \left[\frac{1}{3}x^3 \right]_a^b$$

$$\therefore \frac{k}{2}(b^2 - a^2) = \frac{1}{3}(b^3 - a^3)$$

$a \neq b$ 이고, $a+b=4$, $ab=1$ 이므로

$$\begin{aligned} k &= \frac{2}{3} \cdot \frac{b^3 - a^3}{b^2 - a^2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{a^2 + ab + b^2}{a + b} \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{(a+b)^2 - ab}{a+b} = \frac{2}{3} \cdot \frac{4^2 - 1}{4} = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

답 ②

다른 풀이 $k \int_a^c x dx - \int_a^c x^2 dx = \int_c^b x^2 dx - k \int_c^b x dx$ 에서

$$\int_a^c (kx - x^2)dx = \int_c^b (x^2 - kx)dx$$

$$\int_a^c (kx - x^2)dx - \int_c^b (x^2 - kx)dx = 0$$

$$\int_a^c (kx - x^2)dx + \int_c^b (kx - x^2)dx = 0$$

$$\int_a^b (kx - x^2)dx = 0, \quad \left[\frac{k}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 \right]_a^b = 0$$

$$\frac{k}{2}b^2 - \frac{1}{3}b^3 - \left(\frac{k}{2}a^2 - \frac{1}{3}a^3 \right) = 0$$

$$\therefore \frac{k}{2}(b^2 - a^2) = \frac{1}{3}(b^3 - a^3)$$

0892 전략 x 의 값의 범위를 나누어 $f(x)$ 를 구한 후 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=mx - \frac{1}{4}$ 이 만나지 않도록 그려 본다.

풀이 $|t-x| = \begin{cases} t-x & (t \geq x) \\ -t+x & (t \leq x) \end{cases}$

(i) $x \leq 0$ 일 때,

$$f(x) = \int_0^2 (t-x)dt = \left[\frac{1}{2}t^2 - xt \right]_0^2 = -2x + 2$$

(ii) $0 < x < 2$ 일 때,

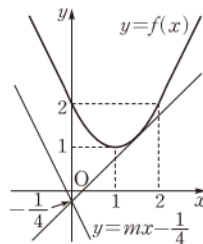
$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^x (-t+x)dt + \int_x^2 (t-x)dt \\ &= \left[-\frac{1}{2}t^2 + xt \right]_0^x + \left[\frac{1}{2}t^2 - xt \right]_x^2 \\ &= \frac{1}{2}x^2 + 2 - 2x + \frac{1}{2}x^2 \\ &= x^2 - 2x + 2 \end{aligned}$$

(iii) $x \geq 2$ 일 때,

$$f(x) = \int_0^2 (-t+x)dt = \left[-\frac{1}{2}t^2 + xt \right]_0^2 = 2x - 2$$

이상에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

$x \leq 0$ 에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 기울기가 -2 인 직선이므로 $m < -2$ 이면 직선 $y=mx - \frac{1}{4}$ 과 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 만난다.



$0 < x < 2$ 에서 직선 $y=mx - \frac{1}{4}$ 과 함수

$y=f(x)$ 의 그래프가 접할 때, 그 접점의 좌표를 $(a, a^2 - 2a + 2)$ 라 하면 $f'(a) = 2a - 2$ 이므로 접선의 방정식은

$$y - (a^2 - 2a + 2) = (2a - 2)(x - a)$$

이 직선이 점 $(0, -\frac{1}{4})$ 을 지나므로

$$-\frac{1}{4} - (a^2 - 2a + 2) = (2a - 2) \cdot (-a)$$

$$a^2 = \frac{9}{4} \quad \therefore a = \frac{3}{2} \quad (\because 0 < a < 2)$$

$$\therefore m = f'(a) = 2 \cdot \frac{3}{2} - 2 = 1$$

따라서 직선 $y=mx - \frac{1}{4}$ 과 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 만나지 않도록 하는 실수 m 의 값의 범위는

$$-2 \leq m < 1$$

즉 $\alpha = -2$, $\beta = 1$ 이므로 $\beta - \alpha = 3$

답 3

0893 전략 $f(x+y) = f(x) + f(y)$ 의 x, y 에 적당한 수나 문자를 대입하여 $f(x)$ 의 성질을 알아본다.

풀이 $f(x+y) = f(x) + f(y)$ ㉠

$x=0, y=0$ 을 ㉠에 대입하면

$$f(0) = f(0) + f(0) \quad \therefore f(0) = 0$$

또 ㉠에 y 대신 $-x$ 를 대입하면

$$f(0) = f(x) + f(-x)$$

$$\therefore f(-x) = -f(x)$$

따라서 함수 $f(x)$ 는 기함수이므로

$$\begin{aligned} & \int_{-2}^1 f(x)dx + \int_{-1}^2 f(x)dx \\ &= \int_{-2}^0 f(x)dx + \int_0^1 f(x)dx + \int_{-1}^0 f(x)dx + \int_0^2 f(x)dx \\ &= \int_{-2}^2 f(x)dx + \int_{-1}^1 f(x)dx \\ &= 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

답 0

0894 전략 $f(-x)=f(x)$ 이므로 $\int_{-a}^0 f(x)dx = \int_0^a f(x)dx$ 이다.

풀이 조건에서 함수 $f(x)$ 가 $f(-x)=f(x)$ 를 만족시키므로

$$\begin{aligned}\int_{-2}^1 f(x)dx &= \int_{-2}^0 f(x)dx + \int_0^1 f(x)dx \\ &= \int_0^2 f(x)dx + \int_0^1 f(x)dx\end{aligned}$$

$$\text{즉 } b=a+\int_0^1 f(x)dx \text{이므로 } \int_0^1 f(x)dx=b-a$$

$$\begin{aligned}\therefore \int_{-3}^1 f(x)dx &= \int_{-3}^0 f(x)dx + \int_0^1 f(x)dx \\ &= \int_0^3 f(x)dx + \int_0^1 f(x)dx \\ &= \int_0^1 f(x)dx + \int_1^3 f(x)dx + \int_0^1 f(x)dx \\ &= 2\int_0^1 f(x)dx + \int_1^3 f(x)dx \\ &= 2(b-a)+c \\ &= -2a+2b+c\end{aligned}$$

답 ⑤

0895 전략 주어진 조건을 이용하여 함수 $h(x)$ 의 성질을 찾아 정적분의 값을 구한다.

풀이 $f(-x)=-f(x)$, $g(-x)=g(x)$ 이므로

$$h(-x)=f(-x)g(-x)=-f(x)g(x)=-h(x)$$

따라서 다항함수 $h(x)$ 는 기함수이므로 $h'(x)$ 는 우함수이다. 즉

$$\begin{aligned}\int_{-3}^3 (x+5)h'(x)dx &= \int_{-3}^3 \underbrace{xh'(x)}_{\text{(기함수)} \times \text{(우함수)} \rightarrow \text{(기함수)}} + \int_{-3}^3 5h'(x)dx \\ &= 2\int_0^3 5h'(x)dx \\ &= 10\int_0^3 h'(x)dx \\ &= 10[h(x)]_0^3 \\ &= 10\{h(3)-h(0)\}=10\end{aligned}$$

$$\therefore h(3)-h(0)=1$$

이때 $h(-x)=-h(x)$ 의 양변에 $x=0$ 을 대입하면

$$h(0)=-h(0) \quad \therefore h(0)=0$$

$$\therefore h(3)=h(0)+1=1$$

답 ①

참고 다항함수 $h(x)$ 가 기함수이므로 $h(x)=a_1x+a_3x^3+a_5x^5+\dots$ (a_1, a_2, a_3, \dots 은 상수)이라 하면

$$\begin{aligned}h'(x) &= a_1+3a_3x^2+5a_5x^4+\dots \\ &= a_1+3a_3 \cdot (-x)^2+5a_5 \cdot (-x)^4+\dots \\ &= h'(-x)\end{aligned}$$

이므로 $h'(x)$ 는 우함수이다.

0896 전략 함수 $f(x)$ 가 $x=a$ 에서 미분가능하면

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f'(x) \text{이어야 함을 이용한다.}$$

$$\text{풀이 } f'(x) = \begin{cases} 10x-5(a+1) & (x>1) \\ -4x-1 & (x<1) \end{cases}$$

이때 함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 미분가능하므로

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \{10x-5(a+1)\} = \lim_{x \rightarrow 1^-} (-4x-1)$$

$$10-5(a+1)=-5 \quad \therefore a=2$$

$$\text{즉 } f(x) = \begin{cases} 5x^2-15x+10 & (x \geq 1) \\ -2x^2-x+3 & (x < 1) \end{cases} \text{이므로}$$

$$f(x) = \begin{cases} 5(x-1)(x-2) & (x \geq 1) \\ -(2x+3)(x-1) & (x < 1) \end{cases}$$

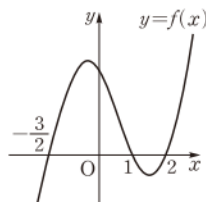
에서 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

$g(x) = \int_{-\frac{3}{2}}^x f(t)dt$ 의 양변을 x 에 대하여 미

분하면

$$g'(x)=f(x)$$

$$g'(x)=0 \text{에서 } x=-\frac{3}{2} \text{ 또는 } x=1 \text{ 또는 } x=2$$



x	\dots	$-\frac{3}{2}$	\dots	1	\dots	2	\dots
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	\searrow	극소	\nearrow	극대	\searrow	극소	\nearrow

따라서 함수 $g(x)$ 는 $x=-\frac{3}{2}$, $x=2$ 에서 극솟값을 갖는다. 그런데

$$g\left(-\frac{3}{2}\right)=0 \text{이므로 구하는 극솟값은}$$

$$\begin{aligned}g(2) &= \int_{-\frac{3}{2}}^2 f(t)dt \\ &= \int_{-\frac{3}{2}}^1 (-2t^2-t+3)dt + \int_1^2 (5t^2-15t+10)dt \\ &= \left[-\frac{2}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + 3t\right]_{-\frac{3}{2}}^1 + \left[\frac{5}{3}t^3 - \frac{15}{2}t^2 + 10t\right]_1^2 \\ &= \frac{125}{24} - \frac{5}{6} = \frac{35}{8}\end{aligned}$$

답 $\frac{35}{8}$

0897 전략 $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ 임을 이용한다.

풀이 $g(a) = \int_a^{a+4} f(x)dx$ 라 하면

$$\begin{aligned}g(a) &= \int_a^4 (-x^2+4x)dx + \int_4^{a+4} (x-4)dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3+2x^2\right]_a^4 + \left[\frac{1}{2}x^2-4x\right]_4^{a+4} \\ &= \frac{32}{3} + \frac{1}{3}a^3 - 2a^2 + \frac{1}{2}(a+4)^2 - 4(a+4) + 8 \\ &= \frac{1}{3}a^3 - \frac{3}{2}a^2 + \frac{32}{3}\end{aligned}$$

$$\therefore g'(a) = a^2 - 3a = a(a-3)$$

$$g'(a)=0 \text{에서 } a=0 \text{ 또는 } a=3$$

a	0	\dots	3	\dots	4
$g'(a)$	0	$-$	0	$+$	
$g(a)$		\searrow	극소	\nearrow	

따라서 $g(a)$ 는 $a=3$ 일 때 최소이므로 최솟값은



$$g(3)=9-\frac{27}{2}+\frac{32}{3}=\frac{37}{6}$$

즉 $p=6, q=37$ 이므로

$$p+q=43$$

답 43

0898 전략 사각형 PBCQ는 사다리꼴임을 이용하여 넓이 $S(x)$ 를 x 에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 $PQ=y$ 라 하면 $\triangle APQ \sim \triangle ABC$ (AA 답음)이므로

$$\overline{AP} : \overline{AB} = \overline{PQ} : \overline{BC}$$

$$x : 6 = y : 8 \quad \therefore y = \frac{4}{3}x$$

따라서 사각형 PBCQ의 넓이 $S(x)$ 는

$$\begin{aligned} S(x) &= \frac{1}{2}(8+y)(6-x) = \frac{1}{2}\left(8+\frac{4}{3}x\right)(6-x) \\ &= -\frac{2}{3}x^2 + 24 \quad (0 < x < 6) \end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned} &\lim_{x \rightarrow 4} \frac{5x+4}{x^2-16} \int_4^x S(x) dx \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{5x+4}{(x+4)(x-4)} \int_4^x S(x) dx \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{5x+4}{x+4} \cdot \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{x-4} \int_4^x S(x) dx \\ &= 3S(4) \\ &= 3 \cdot \frac{40}{3} = 40 \end{aligned}$$

답 ③

0899 전략 $F'(x)=f(x)$ 라 하고 주어진 식을 변형한 후 미분계수의 정의를 이용한다.

풀이 $F'(x)=f(x)$ 라 하면

$$\begin{aligned} \lim_{b \rightarrow a} \frac{\int_a^b f(x) dx}{\int_a^b f(x) dx} &= \lim_{b \rightarrow a} \frac{\frac{b^2-a^2}{b^2-a^2} \int_a^b f(x) dx}{\int_a^b f(x) dx} \\ &= \lim_{b \rightarrow a} (b+a) \cdot \frac{\frac{F(b^2)-F(a^2)}{b^2-a^2}}{\frac{F(b)-F(a)}{b-a}} \\ &= 2a \cdot \frac{F'(a^2)}{F'(a)} = 2a \cdot \frac{f(a^2)}{f(a)} \\ &= 2a \cdot \frac{6}{2} = 6a \end{aligned}$$

답 ③

0900 전략 $\int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx = \int_a^b \{f(x)+g(x)\} dx$ 임을 이용한다.

풀이 함수 $y=f(x), y=g(x)$ 의 그래프가 두 점 $(0, 2), (2, 4)$ 에서 만나므로

$$f(0)=g(0)=2, f(2)=g(2)=4$$

→ ①

$$\begin{aligned} &\therefore \int_0^2 f'(x)g(x) dx + \int_0^2 f(x)g'(x) dx \\ &= \int_0^2 \{f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\} dx \\ &= \int_0^2 \{f(x)g(x)\}' dx \\ &= \left[f(x)g(x) \right]_0^2 \\ &= f(2)g(2) - f(0)g(0) \\ &= 16 - 4 = 12 \end{aligned}$$

→ ②

→ ③

답 12

채점 기준	비율
① $f(0)=g(0)=2, f(2)=g(2)=4$ 임을 알 수 있다.	30 %
② 주어진 정적분을 변형할 수 있다.	40 %
③ 주어진 정적분의 값을 구할 수 있다.	30 %

0901 전략 함수 $y=x^3-3x+1$ 의 그래프를 그려 α, β 의 값의 범위를 찾은 후 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되게 하는 x 의 값을 경계로 구간을 나누어 본다.

풀이 $f(x)=x^3-3x+1$ 이라 하면

$$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=-1 \text{ 또는 } x=1$$

x	\cdots	-1	\cdots	1	\cdots
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	\nearrow	3	\searrow	-1	\nearrow

따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

→ ①

이때 $f(-2)=-1, f(0)=1, f(2)=3$ 이므로

$$-2 < \alpha < -1, 1 < \beta < 2$$

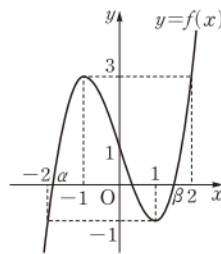
→ ②

또 $\alpha^3-3\alpha+1=0, \beta^3-3\beta+1=0$ 이므로

$$\begin{aligned} &\int_{\alpha}^{\beta} |x^2-1| dx \\ &= \int_{\alpha}^{-1} (x^2-1) dx + \int_{-1}^1 (-x^2+1) dx + \int_1^{\beta} (x^2-1) dx \\ &= \int_{\alpha}^{-1} (x^2-1) dx + 2 \int_0^1 (-x^2+1) dx + \int_1^{\beta} (x^2-1) dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 - x \right]_{\alpha}^{-1} + 2 \left[-\frac{1}{3}x^3 + x \right]_0^1 + \left[\frac{1}{3}x^3 - x \right]_1^{\beta} \\ &= \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\alpha^3 + \alpha \right) + \frac{4}{3} + \left(\frac{1}{3}\beta^3 - \beta + \frac{2}{3} \right) \\ &= -\frac{\alpha^3-3\alpha}{3} + \frac{\beta^3-3\beta}{3} + \frac{8}{3} \\ &= -\frac{-1}{3} + \frac{-1}{3} + \frac{8}{3} \\ &= \frac{8}{3} \end{aligned}$$

→ ③

답 $\frac{8}{3}$



채점 기준	비율
① 함수 $y=f(x)$ 의 그래프를 그릴 수 있다.	30 %
② $-2 < a < -1, 1 < \beta < 2$ 임을 알 수 있다.	20 %
③ $\int_a^{\beta} x^2-1 dx$ 의 값을 구할 수 있다.	50 %

0902 전략 주어진 등식의 좌변을 $x \int_1^x f(t)dt - \int_1^x t f(t)dt$ 로 변형한 후 양변을 x 에 대하여 미분한다.

풀이 $\int_1^x (x-t)f(t)dt = x^3 - ax^2 + bx + 3$ 의 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$1 - a + b + 3 = 0 \quad \therefore a - b = 4 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\int_1^x (x-t)f(t)dt = x^3 - ax^2 + bx + 3 \text{에서}$$

$$x \int_1^x f(t)dt - \int_1^x t f(t)dt = x^3 - ax^2 + bx + 3$$

위의 등식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\int_1^x f(t)dt + xf(x) - xf(x) = 3x^2 - 2ax + b$$

$$\therefore \int_1^x f(t)dt = 3x^2 - 2ax + b$$

$x=1$ 을 위의 등식의 양변에 대입하면

$$3 - 2a + b = 0 \quad \therefore 2a - b = 3 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면

$$a = -1, b = -5 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

따라서 $\int_1^x f(t)dt = 3x^2 + 2x - 5$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f(x) = 6x + 2 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

이므로 $f(3) = 20$

$$\therefore f(3) + a + b = 14 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

답 14

채점 기준	비율
① a, b 의 값을 구할 수 있다.	60 %
② $f(x)$ 를 구할 수 있다.	30 %
③ $f(3) + a + b$ 의 값을 구할 수 있다.	10 %

0903 전략 주어진 등식의 양변을 x 에 대하여 미분하여 함수 $y=g'(x)$ 의 그래프의 개형을 그려 본다.

풀이 $g(x) = \int_0^x (x-t)f(t)dt = x \int_0^x f(t)dt - \int_0^x t f(t)dt$ 에서

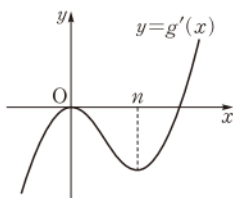
$$g'(x) = \int_0^x f(t)dt + xf(x) - xf(x) = \int_0^x f(t)dt$$

$x=0$ 을 위의 등식의 양변에 대입하면

$g'(0)=0$ 이고, $g'(x)$ 의 도함수가 $f(x)$

이므로 함수 $y=g'(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. $\cdots \cdots \textcircled{1}$

$g'(x) = ax^2(x-b)$ (a, b 는 상수, $a > 0, b > n$)라 하면



$$ax^2(x-b) = \int_0^x f(t)dt$$

위의 등식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$2ax(x-b) + ax^2 = f(x)$$

$$f(x)=0 \text{에서} \quad 2ax(x-b) + ax^2 = 0$$

$$ax(3x-2b)=0 \quad \therefore x=0 \text{ 또는 } x=\frac{2b}{3}$$

$$\text{즉 } n=\frac{2b}{3} \text{이므로} \quad b=\frac{3}{2}n$$

$$g'(x) = ax^2\left(x - \frac{3}{2}n\right) = a\left(x^3 - \frac{3}{2}nx^2\right) \text{이므로}$$

$$g(x) = \int g'(x)dx = \int a\left(x^3 - \frac{3}{2}nx^2\right)dx$$

$$= a\left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{n}{2}x^3\right) + C$$

이때 $g(0)=C=0$ 이므로

$$g(x) = a\left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{n}{2}x^3\right) \quad x=0 \text{을 주어진 등식에 대입하면 } g'(0)=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$g(k) > 0$ 에서

$$g(k) = a\left(\frac{1}{4}k^4 - \frac{n}{2}k^3\right) = \frac{1}{4}ak^3(k-2n) > 0$$

이고 $a > 0, k > 0$ 이므로

$$k-2n > 0 \quad \therefore k > 2n$$

따라서 $a_n = 2n+1$ 이므로 $\cdots \cdots \textcircled{3}$

$$\sum_{n=1}^{10} a_n = \sum_{n=1}^{10} (2n+1) = 2 \cdot \frac{10 \cdot 11}{2} + 10 = 120 \quad \cdots \cdots \textcircled{4}$$

답 120

채점 기준	비율
① $y=g'(x)$ 의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.	30 %
② $g(x)$ 를 구할 수 있다.	40 %
③ a_n 을 구할 수 있다.	20 %
④ $\sum_{n=1}^{10} a_n$ 의 값을 구할 수 있다.	10 %

0904 전략 주어진 조건을 이용하여 함수 $y=F(x)$ 의 그래프의 개형을 찾는다.

풀이 $f(x)$ 는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이고,

$f(-x) = -f(x)$ 에서 기함수이므로 $f(x) = x^3 + ax$ (a 는 상수)라 하면

$$F(x) = \int_{-1}^x (t^3 + at)dt = \left[\frac{1}{4}t^4 + \frac{a}{2}t^2 \right]_{-1}^x$$

$$= \frac{1}{4}x^4 + \frac{a}{2}x^2 - \frac{1}{4} - \frac{a}{2}$$

$$= \frac{1}{4}(-x)^4 + \frac{a}{2}(-x)^2 - \frac{1}{4} - \frac{a}{2}$$

$$= F(-x)$$

즉 $F(x)$ 는 우함수이다. $\cdots \cdots \textcircled{1}$

또 $F(x) = \int_{-1}^x f(t)dt$ 의 양변에 $x=-1$ 을 대입하면

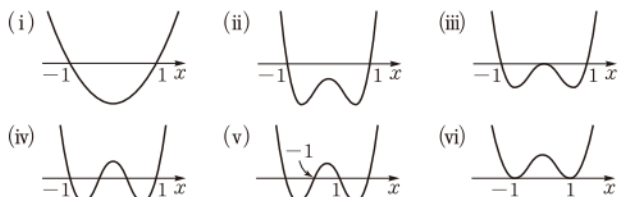
$$F(-1) = 0$$

이때 $F(x)$ 는 우함수이므로

$$F(1) = F(-1) = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$



따라서 $y=F(x)$ 의 그래프의 개형은 다음 중 하나이다.



이때 $F(x)$ 는 $-1 < x < 1$ 에서 극솟값을 갖고, 함수 $g(m)$ 은 $m=0$ 에서 불연속이므로 함수 $y=F(x)$ 의 그래프의 개형은 (iii)과 같다.
즉 $F(0)=0$ 이므로

$$F(x) = \frac{1}{4}x^2(x+1)(x-1) \quad \rightarrow ③$$

한편 곡선 $y=F(x)$ 와 직선 $y=2$ 의 교점의 개수는 2이므로

$$g(2)=2 \quad \rightarrow ④$$

$$\therefore F(2)+g(2)=3+2=5 \quad \rightarrow ⑤$$

채점 기준	비율
① $F(x)$ 가 우함수임을 알 수 있다.	20%
② $F(-1), F(1)$ 의 값을 구할 수 있다.	20%
③ $F(x)$ 를 구할 수 있다.	40%
④ $F(2)+g(2)$ 의 값을 구할 수 있다.	20%

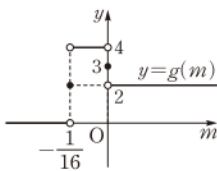
참고 $F(x) = \frac{1}{4}x^2(x+1)(x-1) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{4}x^2$ 에서

$$F'(x) = x^3 - \frac{1}{2}x = x\left(x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$F'(x)=0 \text{에서 } x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ 또는 } x=0 \text{ 또는 } x=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

따라서 $F(x)$ 는 $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ 또는 $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 에서 극

솟값 $-\frac{1}{16}$ 을 가지므로 $y=g(m)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



III. 다항함수의 적분법

09 정적분의 활용

0905 $\int_{-2}^0 x^2(x+2)dx = \int_{-2}^0 (x^3+2x^2)dx$

$$= \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 \right]_{-2}^0 = \frac{4}{3} \quad \rightarrow ④$$

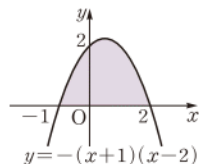
0906 곡선 $y=-(x+1)(x-2)$ 와 x 축의 교점의 x 좌표는 $-(x+1)(x-2)=0$ 에서

$$x=-1 \text{ 또는 } x=2$$

$y=-(x+1)(x-2)=-x^2+x+2$ 이므로 구하는 넓이는

$$\int_{-1}^2 (-x^2+x+2)dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x \right]_{-1}^2$$

$$= \frac{10}{3} - \left(-\frac{7}{6} \right) = \frac{9}{2} \quad \rightarrow ⑤$$



0907 곡선 $y=x^2-x$ 와 x 축의 교점의 x 좌표는 $x^2-x=0$ 에서

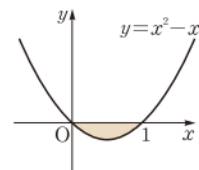
$$x(x-1)=0$$

$$\therefore x=0 \text{ 또는 } x=1$$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_0^1 \{-(x^2-x)\}dx = -\int_0^1 (x^2-x)dx$$

$$= -\left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 \right]_0^1 = \frac{1}{6} \quad \rightarrow ⑥$$



0908 곡선 $y=x^3-4x$ 와 x 축의 교점의 x 좌표는 $x^3-4x=0$ 에서

$$x(x+2)(x-2)=0$$

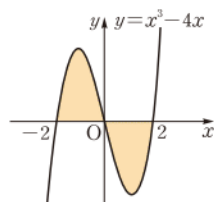
$$\therefore x=-2 \text{ 또는 } x=0 \text{ 또는 } x=2$$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-2}^0 (x^3-4x)dx + \int_0^2 (-x^3+4x)dx$$

$$= \left[\frac{1}{4}x^4 - 2x^2 \right]_{-2}^0 + \left[-\frac{1}{4}x^4 + 2x^2 \right]_0^2$$

$$= 4 + 4 = 8 \quad \rightarrow ⑧$$



0909 $\int_{-1}^2 x^2 dx = \left[\frac{1}{3}x^3 \right]_{-1}^2 = \frac{8}{3} - \left(-\frac{1}{3} \right) = 3 \quad \rightarrow ③$

0910 $\int_{-2}^1 \{ -(-x^2-2) \} dx = \int_{-2}^1 (x^2+2)dx$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3 + 2x \right]_{-2}^1$$

$$= \frac{7}{3} - \left(-\frac{20}{3} \right) = 9 \quad \rightarrow ⑨$$

0911 곡선 $y = -2x^2$ 과 직선 $y = -x - 1$

의 교점의 x 좌표는 $-2x^2 = -x - 1$ 에서

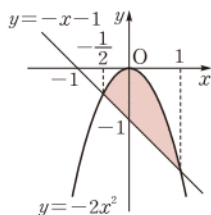
$$2x^2 - x - 1 = 0$$

$$(2x+1)(x-1) = 0$$

$$\therefore x = -\frac{1}{2} \text{ 또는 } x = 1$$

따라서 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{1}{2}}^1 \{-2x^2 - (-x-1)\} dx &= \int_{-\frac{1}{2}}^1 (-2x^2 + x + 1) dx \\ &= \left[-\frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x \right]_{-\frac{1}{2}}^1 \\ &= \frac{5}{6} - \left(-\frac{7}{24} \right) = \frac{9}{8} \end{aligned}$$



0912 곡선 $y = x^2 - 2$ 와 직선 $y = 3x + 2$ 의

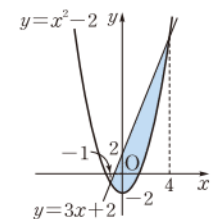
교점의 x 좌표는 $x^2 - 2 = 3x + 2$ 에서

$$x^2 - 3x - 4 = 0, \quad (x+1)(x-4) = 0$$

$$\therefore x = -1 \text{ 또는 } x = 4$$

따라서 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} \int_{-1}^4 \{(3x+2) - (x^2-2)\} dx &= \int_{-1}^4 (-x^2 + 3x + 4) dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 4x \right]_{-1}^4 \\ &= \frac{56}{3} - \left(-\frac{13}{6} \right) = \frac{125}{6} \end{aligned}$$



0913 곡선 $y = x^3 - x$ 와 직선 $y = x$ 의 교

점의 x 좌표는 $x^3 - x = x$ 에서

$$x^3 - 2x = 0$$

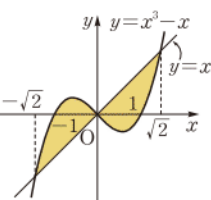
$$x(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2}) = 0$$

$$\therefore x = 0 \text{ 또는 } x = -\sqrt{2}$$

$$\text{또는 } x = \sqrt{2}$$

따라서 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} \int_{-\sqrt{2}}^0 \{(x^3-x) - x\} dx + \int_0^{\sqrt{2}} \{x - (x^3-x)\} dx &= \int_{-\sqrt{2}}^0 (x^3 - 2x) dx + \int_0^{\sqrt{2}} (-x^3 + 2x) dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4 - x^2 \right]_{-\sqrt{2}}^0 + \left[-\frac{1}{4}x^4 + x^2 \right]_0^{\sqrt{2}} = 1 + 1 = 2 \end{aligned}$$



0914 두 곡선 $y = x^2$, $y = -x^2 + 2$ 의 교

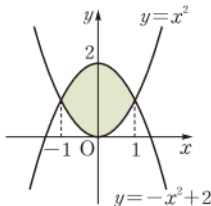
점의 x 좌표는 $x^2 = -x^2 + 2$ 에서

$$2x^2 - 2 = 0, \quad 2(x+1)(x-1) = 0$$

$$\therefore x = -1 \text{ 또는 } x = 1$$

따라서 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \{(-x^2+2) - x^2\} dx &= \int_{-1}^1 (-2x^2 + 2) dx = 4 \int_0^1 (-x^2 + 1) dx \\ &= 4 \left[-\frac{1}{3}x^3 + x \right]_0^1 = 4 \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{3} \end{aligned}$$



우함수 · 기함수의 정적분

함수 $f(x)$ 가 닫힌구간 $[-a, a]$ 에서 연속일 때

① $f(x)$ 가 우함수이면 $\Rightarrow \int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$

② $f(x)$ 가 기함수이면 $\Rightarrow \int_{-a}^a f(x) dx = 0$

0915 두 곡선 $y = x^2 - 5x + 6$,

$y = -x^2 + 3x$ 의 교점의 x 좌표는

$$x^2 - 5x + 6 = -x^2 + 3x$$

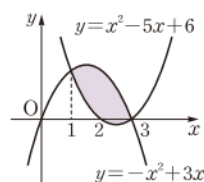
$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$(x-1)(x-3) = 0$$

$$\therefore x = 1 \text{ 또는 } x = 3$$

따라서 구하는 넓이는

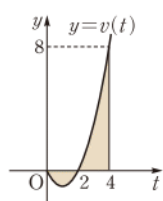
$$\begin{aligned} \int_1^3 \{(-x^2+3x) - (x^2-5x+6)\} dx &= \int_1^3 (-2x^2 + 8x - 6) dx \\ &= \left[-\frac{2}{3}x^3 + 4x^2 - 6x \right]_1^3 \\ &= 0 - \left(-\frac{8}{3} \right) = \frac{8}{3} \end{aligned}$$



0916 (1) $0 + \int_0^4 (t^2 - 2t) dt = \left[\frac{1}{3}t^3 - t^2 \right]_0^4 = \frac{16}{3}$

(2) $\int_1^2 (t^2 - 2t) dt = \left[\frac{1}{3}t^3 - t^2 \right]_1^2 = -\frac{4}{3} - \left(-\frac{2}{3} \right) = -\frac{2}{3}$

(3) $\int_0^4 |t^2 - 2t| dt$
 $= \int_0^2 (-t^2 + 2t) dt + \int_2^4 (t^2 - 2t) dt$
 $= \left[-\frac{1}{3}t^3 + t^2 \right]_0^2 + \left[\frac{1}{3}t^3 - t^2 \right]_2^4$
 $= \frac{4}{3} + \frac{20}{3} = 8$

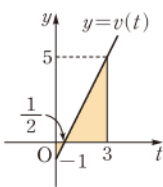


☐ (1) $\frac{16}{3}$ (2) $-\frac{2}{3}$ (3) 8

0917 (1) $5 + \int_0^2 (2t-1) dt = 5 + \left[t^2 - t \right]_0^2 = 5 + 2 = 7$

(2) $\int_0^3 (2t-1) dt = \left[t^2 - t \right]_0^3 = 6$

(3) $\int_0^3 |2t-1| dt$
 $= \int_0^{\frac{1}{2}} (-2t+1) dt + \int_{\frac{1}{2}}^3 (2t-1) dt$
 $= \left[-t^2 + t \right]_0^{\frac{1}{2}} + \left[t^2 - t \right]_{\frac{1}{2}}^3$
 $= \frac{1}{4} + \frac{25}{4} = \frac{13}{2}$



☐ (1) 7 (2) 6 (3) $\frac{13}{2}$



유형 01

곡선과 x 축 사이의 넓이

; $f(x) \geq 0$ 또는 $f(x) \leq 0$ 인 경우

본책 152쪽

연속함수 $f(x)$ 에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 와 x 축 및 두 직선 $x=a, x=b$ 로 둘러싸인 도형의 넓이는

① 구간 $[a, b]$ 에서 $f(x) \geq 0$ 일 때, $\int_a^b f(x)dx$

② 구간 $[a, b]$ 에서 $f(x) \leq 0$ 일 때, $\int_a^b \{-f(x)\}dx$

0918 곡선 $y=x^2-4x$ 와 x 축의 교점의 x 좌표는 $x^2-4x=0$ 에서

$$x(x-4)=0 \quad \therefore x=0 \text{ 또는 } x=4$$

$$\therefore S_1 = \int_0^4 \{-(x^2-4x)\}dx$$

$$= -\int_0^4 (x^2-4x)dx$$

$$= -\left[\frac{1}{3}x^3-2x^2\right]_0^4$$

$$= \frac{32}{3}$$

곡선 $y=9-x^2$ 과 x 축의 교점의 x 좌표는 $9-x^2=0$ 에서

$$x^2-9=0, \quad (x+3)(x-3)=0$$

$$\therefore x=-3 \text{ 또는 } x=3$$

$$\therefore S_2 = \int_{-3}^3 (9-x^2)dx$$

$$= 2\int_0^3 (9-x^2)dx$$

$$= 2\left[9x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^3$$

$$= 2 \cdot 18 = 36$$

$$\therefore 3S_1+S_2=3 \cdot \frac{32}{3}+36=68$$

답 ④

다른 풀이 포물선 $y=x(x-4)$ 와 x 축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$S_1 = \frac{(4-0)^3}{6} = \frac{32}{3}$$

포물선 $y=-(x+3)(x-3)$ 과 x 축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$S_2 = \frac{\{3-(-3)\}^3}{6} = 36$$

$$\therefore 3S_1+S_2=68$$

0919 오른쪽 그림에서 색칠한 부분의 넓이는

$$\int_0^a \{-(x^2-ax)\}dx$$

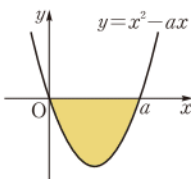
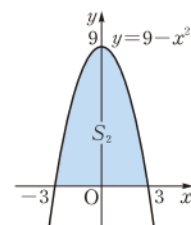
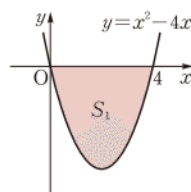
$$= -\int_0^a (x^2-ax)dx$$

$$= -\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{a}{2}x^2\right]_0^a = \frac{a^3}{6}$$

따라서 $\frac{a^3}{6} = \frac{9}{2}$ 이므로 $a^3=27$

$$\therefore a=3$$

답 ③



0920 $f(x)=ax(x-2)^2$ ($a<0$)이라 하면 곡선 $y=f(x)$ 와 x 축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_0^2 \{-ax(x-2)^2\}dx = -a \int_0^2 (x^3-4x^2+4x)dx$$

$$= -a \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + 2x^2 \right]_0^2$$

$$= -\frac{4}{3}a$$

따라서 $-\frac{4}{3}a=2$ 이므로

$$a = -\frac{3}{2}$$

$$\therefore f(x) = -\frac{3}{2}x(x-2)^2 \quad \text{답 } f(x) = -\frac{3}{2}x(x-2)^2$$

0921 $xf(x) = \int_0^x tf'(t)dt + \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 8x$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f(x) + xf'(x) = xf'(x) + x^2 - 2x - 8$$

$$\therefore f(x) = x^2 - 2x - 8$$

곡선 $y=x^2-2x-8$ 과 x 축의 교점의 x 좌표는 $x^2-2x-8=0$ 에서 $(x+2)(x-4)=0$

$$\therefore x=-2 \text{ 또는 } x=4$$

오른쪽 그림에서 구하는 넓이는

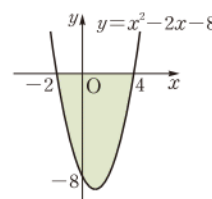
$$\int_{-2}^4 \{-(x^2-2x-8)\}dx$$

$$= -\int_{-2}^4 (x^2-2x-8)dx$$

$$= -\left[\frac{1}{3}x^3-x^2-8x\right]_{-2}^4$$

$$= -\left(-\frac{80}{3}-\frac{28}{3}\right) = 36$$

답 36



$$\text{0922 } S_1+S_2+S_3 = \int_{-2}^1 (-x^2-x+2)dx$$

$$= \left[-\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2x \right]_{-2}^1$$

$$= \frac{7}{6} - \left(-\frac{10}{3}\right) = \frac{9}{2}$$

이때 S_1, S_2, S_3 이 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$2S_2 = S_1 + S_3$$

따라서 $3S_2 = \frac{9}{2}$ 이므로

$$S_2 = \frac{3}{2} \quad S_1+S_2+S_3 = S_2+2S_2 = 3S_2$$

답 $\frac{3}{2}$

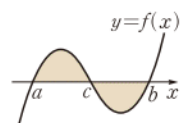
유형 02

곡선과 x 축 사이의 넓이; 끝

본책 152쪽

오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=f(x)$ 와 x 축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\Rightarrow \int_a^c f(x)dx + \int_c^b \{-f(x)\}dx$$

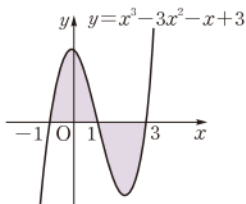


0923 $y=(x+1)(x-1)(x-3)$ 에서

$$y=x^3-3x^2-x+3$$

따라서 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 (x^3-3x^2-x+3)dx \\ & + \int_1^3 (-x^3+3x^2+x-3)dx \\ & = 2 \int_0^1 (-3x^2+3)dx + \int_1^3 (-x^3+3x^2+x-3)dx \\ & = 2 \left[-x^3+3x \right]_0^1 + \left[-\frac{1}{4}x^4+x^3+\frac{1}{2}x^2-3x \right]_1^3 \\ & = 2 \cdot 2 + 4 = 8 \end{aligned}$$



답 ③

0924 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 (x^2-4x+3)dx + \int_1^2 (-x^2+4x-3)dx \\ & = 2 \int_0^1 (x^2+3)dx + \int_1^2 (-x^2+4x-3)dx \\ & = 2 \left[\frac{1}{3}x^3+3x \right]_0^1 + \left[-\frac{1}{3}x^3+2x^2-3x \right]_1^2 \\ & = 2 \cdot \frac{10}{3} + \frac{2}{3} = \frac{22}{3} \end{aligned}$$

답 ③

0925 곡선 $y=-2x^3+2x^2+4x$ 와 x 축의 교점의 x 좌표는 $-2x^3+2x^2+4x=0$ 에서

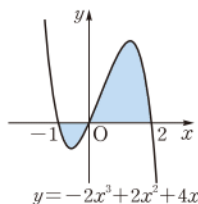
$$x^3-x^2-2x=0$$

$$x(x+1)(x-2)=0$$

$$\therefore x=-1 \text{ 또는 } x=0 \text{ 또는 } x=2$$

따라서 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^0 (2x^3-2x^2-4x)dx + \int_0^2 (-2x^3+2x^2+4x)dx \\ & = \left[\frac{1}{2}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - 2x^2 \right]_{-1}^0 + \left[-\frac{1}{2}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + 2x^2 \right]_0^2 \\ & = \frac{5}{6} + \frac{16}{3} = \frac{37}{6} \end{aligned}$$



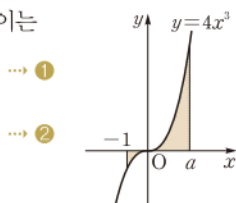
답 $\frac{37}{6}$

0926 오른쪽 그림에서 색칠한 부분의 넓이는

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^0 (-4x^3)dx + \int_0^a 4x^3dx \quad \cdots ① \\ & = \left[-x^4 \right]_{-1}^0 + \left[x^4 \right]_0^a = 1 + a^4 \quad \cdots ② \end{aligned}$$

따라서 $1+a^4=17$ 이므로 $a^4=16$

$$\therefore a=2 (\because a>0)$$



답 2

채점 기준

비율

① 색칠한 부분의 넓이를 적분 기호를 사용하여 나타낼 수 있다.	40%
② 색칠한 부분의 넓이를 a 에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40%
③ a 의 값을 구할 수 있다.	20%

0927 $S_1 = \int_a^0 (-x^3)dx = \left[-\frac{1}{4}x^4 \right]_a^0 = \frac{1}{4}a^4$

$$S_2 = \int_0^b x^3 dx = \left[\frac{1}{4}x^4 \right]_0^b = \frac{1}{4}b^4$$

이때 $|a|=3b$ 이므로 $a^4=81b^4$

$$\therefore \frac{S_1}{S_2} = \frac{\frac{1}{4}a^4}{\frac{1}{4}b^4} = \frac{a^4}{b^4} = \frac{81b^4}{b^4} = 81$$

답 ⑤

유형 03 곡선과 직선 사이의 넓이

본책 153쪽

- (i) 곡선과 직선의 교점의 x 좌표를 구하여 적분 구간을 정한다.
- (ii) 곡선과 직선을 그려 위치 관계를 파악한다.
- (iii) (i)의 적분 구간에서 {(위쪽 그래프의 식) - (아래쪽 그래프의 식)}의 정적분의 값을 구한다.

0928 곡선 $y=-x^3+x^2+x$ 와 직선

$y=-x$ 의 교점의 x 좌표는

$$-x^3+x^2+x=-x \text{에서}$$

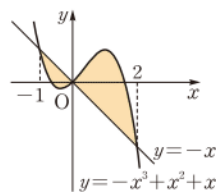
$$x^3-x^2-2x=0$$

$$x(x+1)(x-2)=0$$

$$\therefore x=-1 \text{ 또는 } x=0 \text{ 또는 } x=2$$

따라서 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^0 \{-x - (-x^3+x^2+x)\}dx + \int_0^2 \{-x^3+x^2+x - (-x)\}dx \\ & = \int_{-1}^0 (x^3-x^2-2x)dx + \int_0^2 (-x^3+x^2+2x)dx \\ & = \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x^2 \right]_{-1}^0 + \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + x^2 \right]_0^2 \\ & = \frac{5}{12} + \frac{8}{3} = \frac{37}{12} \end{aligned}$$



답 ②

0929 곡선 $y=-x^2+4x$ 와 직선 $y=x$ 의 교점의 x 좌표는

$$-x^2+4x=x \text{에서}$$

$$x^2-3x=0, \quad x(x-3)=0$$

$$\therefore x=0 \text{ 또는 } x=3$$

$$\therefore S_1 = \int_0^3 \{(-x^2+4x) - x\}dx$$

$$= \int_0^3 (-x^2+3x)dx$$

$$= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 \right]_0^3$$

$$= \frac{9}{2}$$

곡선 $y=-x^2+4x$ 와 x 축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_0^4 (-x^2+4x)dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 \right]_0^4 = \frac{32}{3} \quad \leftarrow S_1+S_2$$

$$\therefore S_2 = \frac{32}{3} - \frac{9}{2} = \frac{37}{6}$$

$$\therefore \frac{S_1}{S_2} = \frac{\frac{9}{2}}{\frac{37}{6}} = \frac{27}{37}$$

답 $\frac{27}{37}$



0930 $y = x|2x-1| = \begin{cases} 2x^2-x & (x \geq \frac{1}{2}) \\ -2x^2+x & (x \leq \frac{1}{2}) \end{cases}$

$y = x|2x-1|$ 의 그래프와 직선 $y=x$ 의 교점의 x 좌표는

(i) $x \geq \frac{1}{2}$ 일 때,

$$2x^2-x = x \text{에서} \quad 2x^2-2x=0 \\ x(x-1)=0$$

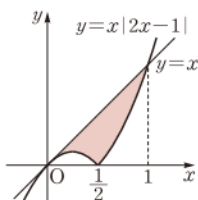
$$\therefore x=1 \left(\because x \geq \frac{1}{2} \right)$$

(ii) $x \leq \frac{1}{2}$ 일 때,

$$-2x^2+x = x \text{에서} \quad -2x^2=0 \quad \therefore x=0$$

(i), (ii)에서 구하는 넓이는

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \{x - (-2x^2+x)\} dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \{x - (2x^2-x)\} dx \\ = \int_0^{\frac{1}{2}} 2x^2 dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 (-2x^2+2x) dx \\ = \left[\frac{2}{3}x^3 \right]_0^{\frac{1}{2}} + \left[-\frac{2}{3}x^3 + x^2 \right]_{\frac{1}{2}}^1 \\ = \frac{1}{12} + \frac{1}{6} = \frac{1}{4}$$



답 ①

0931 곡선 $y = x^2-3x$ 와 직선 $y=ax$ 의 교점의 x 좌표는 $x^2-3x=ax$ 에서

$$x^2-(3+a)x=0$$

$$x\{x-(3+a)\}=0$$

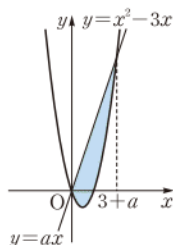
$$\therefore x=0 \text{ 또는 } x=3+a$$

따라서 오른쪽 그림에서 색칠한 부분의 넓이는

$$\int_0^{3+a} \{ax - (x^2-3x)\} dx \\ = \int_0^{3+a} \{-x^2 + (a+3)x\} dx \\ = \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{a+3}{2}x^2 \right]_0^{3+a} \\ = \frac{1}{6}(a+3)^3$$

$$\text{즉 } \frac{1}{6}(a+3)^3 = 36 \text{이므로} \quad a+3=6$$

$$\therefore a=3$$



→ ②

→ ③

답 3

채점 기준	비율
① 곡선과 직선의 교점의 x 좌표를 구할 수 있다.	30 %
② 곡선과 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 a 에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	50 %
③ a 의 값을 구할 수 있다.	20 %

0932 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프의 교점의 x 좌표가 0, 2, 4이므로 삼차방정식 $g(x)-f(x)=0$ 의 세 근은 0, 2, 4이다.

이때 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 양수이므로 $g(x)-f(x)$ 의 최고차항의 계수는 음수이다. 즉

$$g(x)-f(x) = ax(x-2)(x-4) \\ = a(x^3-6x^2+8x) \quad (a < 0)$$

라 하면 색칠한 부분의 넓이가 2이므로

$$\int_2^4 \{g(x)-f(x)\} dx = \int_2^4 a(x^3-6x^2+8x) dx \\ = a \left[\frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + 4x^2 \right]_2^4 \\ = -4a$$

$$\text{즉 } -4a=2 \text{이므로} \quad a=-\frac{1}{2}$$

따라서 $g(x)-f(x) = -\frac{1}{2}x(x-2)(x-4)$ 이므로

$$g(1)-f(1) = -\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (-1) \cdot (-3) = -\frac{3}{2} \quad \text{답 } -\frac{3}{2}$$

유형 04 두 곡선 사이의 넓이

본책 154쪽

(i) 두 곡선의 교점의 x 좌표를 구하여 적분 구간을 정한다.

(ii) 두 곡선을 그려 위치 관계를 파악한다.

(iii) (i)의 적분 구간에서 {(위쪽 그래프의 식) - (아래쪽 그래프의 식)}의 정적분의 값을 구한다.

0933 두 곡선 $y = x^3+2x^2-2$,

$y = -x^2+2$ 의 교점의 x 좌표는

$$x^3+2x^2-2 = -x^2+2 \text{에서}$$

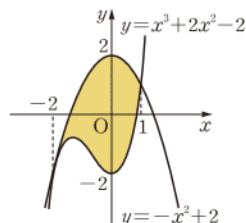
$$x^3+3x^2-4=0$$

$$(x+2)^2(x-1)=0$$

$$\therefore x=-2 \text{ 또는 } x=1$$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-2}^1 \{(-x^2+2) - (x^3+2x^2-2)\} dx \\ = \int_{-2}^1 (-x^3-3x^2+4) dx \\ = \left[-\frac{1}{4}x^4 - x^3 + 4x \right]_{-2}^1 \\ = \frac{11}{4} - (-4) = \frac{27}{4}$$



답 ③

0934 두 곡선 $y = x^2-2x+3$,

$y = -2x^2+10x-6$ 의 교점의 x 좌표는

$$x^2-2x+3 = -2x^2+10x-6 \text{에서}$$

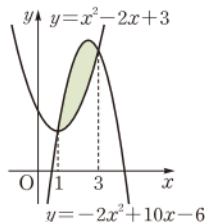
$$x^2-4x+3=0$$

$$(x-1)(x-3)=0$$

$$\therefore x=1 \text{ 또는 } x=3$$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_1^3 \{(-2x^2+10x-6) - (x^2-2x+3)\} dx \\ = \int_1^3 (-3x^2+12x-9) dx \\ = \left[-x^3+6x^2-9x \right]_1^3 = 0 - (-4) = 4$$



답 ②

$$\begin{aligned}
 0935 \quad & \int_{-5}^6 \{f(x)-g(x)\}dx \\
 &= \int_{-5}^0 \{f(x)-g(x)\}dx + \int_0^4 \{f(x)-g(x)\}dx \\
 &\quad + \int_4^6 \{f(x)-g(x)\}dx \\
 &= -\int_{-5}^0 \{g(x)-f(x)\}dx + \int_0^4 \{f(x)-g(x)\}dx \\
 &\quad - \int_4^6 \{g(x)-f(x)\}dx \\
 &= -10+7-5=-8
 \end{aligned}$$

답 -8

0936 두 곡선 $y=x^3-2x$, $y=x^2$ 의 교점의 x 좌표는 $x^3-2x=x^2$ 에서

$$x^3-x^2-2x=0$$

$$x(x+1)(x-2)=0$$

$$\therefore x=-1 \text{ 또는 } x=0 \text{ 또는 } x=2 \rightarrow \textcircled{1}$$

$$\therefore S_2-S_1$$

$$= \int_0^2 \{x^2-(x^3-2x)\}dx - \int_{-1}^0 \{(x^3-2x)-x^2\}dx$$

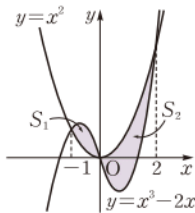
$$= \int_0^2 (-x^3+x^2+2x)dx - \int_{-1}^0 (x^3-x^2-2x)dx$$

$$= \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + x^2 \right]_0^2 - \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x^2 \right]_{-1}^0$$

$$= \frac{8}{3} - \frac{5}{12} = \frac{9}{4}$$

$\rightarrow \textcircled{2}$

답 $\frac{9}{4}$



채점 기준

비율

① 두 곡선의 교점의 x 좌표를 구할 수 있다.

30 %

② S_2-S_1 의 값을 구할 수 있다.

70 %

0937 곡선 $y=x^2$ 을 x 축에 대하여 대칭이동한 곡선의 방정식은 $y=-x^2$

이 곡선을 x 축의 방향으로 -1만큼, y 축의 방향으로 5만큼 평행이동한 곡선의 방정식은

$$y=-(x+1)^2+5$$

$$\therefore f(x)=-(x+1)^2+5=-x^2-2x+4$$

두 곡선 $y=x^2$, $y=f(x)$ 의 교점의 x 좌표는

$$x^2=-x^2-2x+4$$

$$x^2+x-2=0, \quad (x+2)(x-1)=0$$

$$\therefore x=-2 \text{ 또는 } x=1$$

따라서 구하는 넓이는

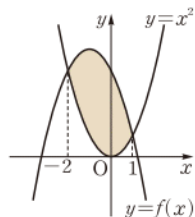
$$\int_{-2}^1 \{(-x^2-2x+4)-x^2\}dx$$

$$= \int_{-2}^1 (-2x^2-2x+4)dx$$

$$= \left[-\frac{2}{3}x^3 - x^2 + 4x \right]_{-2}^1$$

$$= \frac{7}{3} - \left(-\frac{20}{3} \right) = 9$$

답 ②



유형 05 곡선과 접선으로 둘러싸인 도형의 넓이

본책 155쪽

(i) 접선의 방정식을 구한다.

(ii) 곡선과 접선의 교점의 x 좌표를 구하여 적분 구간을 정한다.

(iii) 곡선과 접선을 그려 위치 관계를 파악한다.

(iv) (ii)의 적분 구간에서 {(위쪽 그래프의 식)-(아래쪽 그래프의 식)}의 정적분의 값을 구한다.

0938 $y=x^2+1$ 에서 $y'=2x$

즉 곡선 위의 점 (1, 2)에서의 접선의 기울기는 $2 \cdot 1 = 2$ 이므로 접선의 방정식은

$$y-2=2(x-1)$$

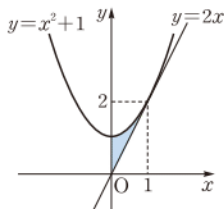
$$\therefore y=2x$$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_0^1 \{(x^2+1)-2x\}dx = \int_0^1 (x^2-2x+1)dx$$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 + x \right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

답 ①



0939 $y=x^3$ 에서 $y'=3x^2$

즉 곡선 위의 점 (1, 1)에서의 접선의 기울기는 $3 \cdot 1^2 = 3$ 이므로 접선의 방정식은

$$y-1=3(x-1)$$

$$\therefore y=3x-2$$

곡선 $y=x^3$ 과 직선 $y=3x-2$ 의 교점의 x 좌표는 $x^3=3x-2$ 에서

$$x^3-3x+2=0, \quad (x+2)(x-1)^2=0$$

$$\therefore x=-2 \text{ 또는 } x=1$$

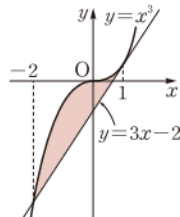
따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-2}^1 \{x^3-(3x-2)\}dx = \int_{-2}^1 (x^3-3x+2)dx$$

$$= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + 2x \right]_{-2}^1$$

$$= \frac{3}{4} - (-6) = \frac{27}{4}$$

답 ⑤



0940 $y=x^3+2x^2-x-2$ 에서

$$y'=3x^2+4x-1$$

즉 곡선 위의 점 (-2, 0)에서의 접선의 기울기는

$$3 \cdot (-2)^2 + 4 \cdot (-2) - 1 = 3$$

이므로 접선의 방정식은

$$y-0=3(x+2)$$

$$\therefore y=3x+6$$

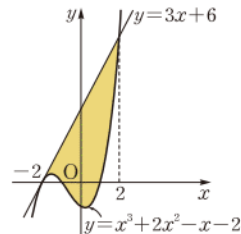
곡선 $y=x^3+2x^2-x-2$ 와 직선 $y=3x+6$ 의 교점의 x 좌표는

$$x^3+2x^2-x-2=3x+6$$

$$x^3+2x^2-4x-8=0, \quad (x+2)^2(x-2)=0$$

$$\therefore x=-2 \text{ 또는 } x=2$$

따라서 위의 그림에서 색칠한 부분의 넓이 S는



$\rightarrow \textcircled{1}$

$\rightarrow \textcircled{2}$



$$\begin{aligned}
 S &= \int_{-2}^2 \{(3x+6) - (x^3+2x^2-x-2)\} dx \\
 &= \int_{-2}^2 (-x^3-2x^2+4x+8) dx \\
 &= 2 \int_0^2 (-2x^2+8) dx \\
 &= 2 \left[-\frac{2}{3}x^3+8x \right]_0^2 \\
 &= 2 \cdot \frac{32}{3} = \frac{64}{3} \\
 \therefore 3S &= 3 \cdot \frac{64}{3} = 64
 \end{aligned}$$

→ ③

답 64

채점 기준	비율
① 접선의 방정식을 구할 수 있다.	30 %
② 곡선과 접선의 교점의 x 좌표를 구할 수 있다.	20 %
③ 3S의 값을 구할 수 있다.	50 %

0941 $y=x^2$ 에서 $y'=2x$
 점점의 좌표를 (t, t^2) 이라 하면 이 점에서
 의 접선의 기울기는 $2t$ 이므로 접선의 방정
 식은

$$\begin{aligned}
 y-t^2 &= 2t(x-t) \\
 \therefore y &= 2tx-t^2 \quad \dots\dots ㉠
 \end{aligned}$$

이 직선이 점 $(\frac{1}{2}, -2)$ 를 지나므로

$$\begin{aligned}
 -2 &= t - t^2, \quad t^2 - t - 2 = 0 \\
 (t+1)(t-2) &= 0 \\
 \therefore t &= -1 \text{ 또는 } t=2
 \end{aligned}$$

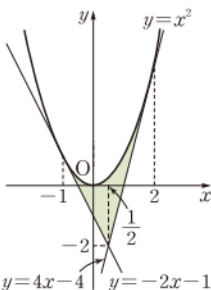
(i) $t=-1$ 일 때, ㉠에서 $y=-2x-1$

(ii) $t=2$ 일 때, ㉠에서 $y=4x-4$

따라서 구하는 넓이는

$$\begin{aligned}
 &\int_{-1}^{\frac{1}{2}} \{x^2 - (-2x-1)\} dx + \int_{\frac{1}{2}}^2 \{x^2 - (4x-4)\} dx \\
 &= \int_{-1}^{\frac{1}{2}} (x^2+2x+1) dx + \int_{\frac{1}{2}}^2 (x^2-4x+4) dx \\
 &= \left[\frac{1}{3}x^3+x^2+x \right]_{-1}^{\frac{1}{2}} + \left[\frac{1}{3}x^3-2x^2+4x \right]_{\frac{1}{2}}^2 \\
 &= \frac{9}{8} + \frac{9}{8} = \frac{9}{4}
 \end{aligned}$$

답 ④



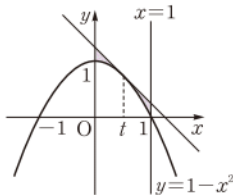
0942 $y=1-x^2$ 에서

$$y' = -2x$$

즉 곡선 위의 점 $(t, 1-t^2)$ 에서의 접선
 의 기울기는 $-2t$ 이므로 접선의 방정식
 은

$$\begin{aligned}
 y-(1-t^2) &= -2t(x-t) \\
 \therefore y &= -2tx+t^2+1
 \end{aligned}$$

위의 그림에서 색칠한 부분의 넓이는



$$\begin{aligned}
 &\int_0^1 \{(-2tx+t^2+1) - (1-x^2)\} dx \\
 &= \int_0^1 (x^2-2tx+t^2) dx \\
 &= \left[\frac{1}{3}x^3-tx^2+t^2x \right]_0^1 \\
 &= \frac{1}{3} - t + t^2 \\
 &= \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{12}
 \end{aligned}$$

따라서 구하는 넓이의 최솟값은 $\frac{1}{12}$ 이다.

답 $\frac{1}{12}$

유형 06 두 도형의 넓이가 같을 조건

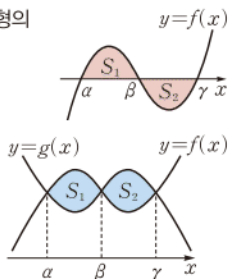
본책 155쪽

(1) 곡선 $y=f(x)$ 와 x 축으로 둘러싸인 두 도형의
 넓이를 각각 S_1, S_2 라 할 때, $S_1=S_2$ 이면

$$\Rightarrow \int_a^{\gamma} f(x) dx = 0$$

(2) 두 곡선 $y=f(x), y=g(x)$ 로 둘러싸
 인 두 도형의 넓이를 각각 S_1, S_2 라 할
 때, $S_1=S_2$ 이면

$$\Rightarrow \int_a^{\gamma} \{f(x) - g(x)\} dx = 0$$



0943 곡선 $y=x^3-(a+2)x^2+2ax$ 와 x 축의 교점의 x 좌표는
 $x^3-(a+2)x^2+2ax=0$ 에서

$$x(x-2)(x-a)=0$$

$$\therefore x=0 \text{ 또는 } x=2 \text{ 또는 } x=a$$

오른쪽 그림에서 색칠한 두 부분의 넓
 이가 서로 같으므로

$$\int_0^a \{x^3 - (a+2)x^2 + 2ax\} dx = 0$$

$$\left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}(a+2)x^3 + ax^2 \right]_0^a = 0$$

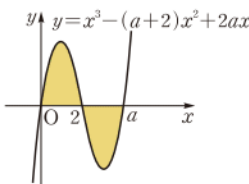
$$\frac{1}{4}a^4 - \frac{1}{3}(a+2)a^3 + a^3 = 0$$

$$-\frac{1}{12}a^4 + \frac{1}{3}a^3 = 0$$

$$a^4 - 4a^3 = 0, \quad a^3(a-4) = 0$$

$$\therefore a=4 \quad (\because a>2)$$

답 ③



0944 색칠한 두 부분의 넓이가 서로 같으므로

$$\int_0^2 \{(4-x^2) - k\} dx = 0$$

즉 $\int_0^2 (-x^2+4-k) dx = 0$ 이므로

$$\left[-\frac{1}{3}x^3 + 4x - kx \right]_0^2 = 0$$

$$\frac{16}{3} - 2k = 0 \quad \therefore k = \frac{8}{3}$$

답 ①

0945 색칠한 두 부분의 넓이가 서로 같으므로

$$\begin{aligned} \int_0^4 \{-x^2(x-4) - ax(x-4)\} dx &= 0 \\ \text{즉 } \int_0^4 \{-x^3 + (4-a)x^2 + 4ax\} dx &= 0 \text{ 이므로} \\ \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{4-a}{3}x^3 + 2ax^2 \right]_0^4 &= 0 \\ -64 + \frac{64(4-a)}{3} + 32a &= 0 \\ 32a = -64 \quad \therefore a = -2 \end{aligned}$$

답 ⑤

0946 $A : B = 1 : 2$ 에서 $B = 2A$ 이고, 곡선 $y = x^2 - 6x + p$ 가 직선 $x = 3$ 에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림에서 빗금 친 부분의 넓이는 $\frac{1}{2}B = A$ 이다. $\rightarrow ①$

즉 곡선 $y = x^2 - 6x + p$ 와 x 축, y 축 및 직선 $x = 3$ 으로 둘러싸인 두 도형의 넓이가 서로 같으므로

$$\int_0^3 (x^2 - 6x + p) dx = 0 \quad \rightarrow ②$$

$$\left[\frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + px \right]_0^3 = 0$$

$$-18 + 3p = 0 \quad \therefore p = 6 \quad \rightarrow ③$$

답 6

채점 기준	비율
① A와 빗금 친 부분의 넓이가 서로 같음을 알 수 있다.	30 %
② $\int_0^3 (x^2 - 6x + p) dx = 0$ 임을 알 수 있다.	40 %
③ p의 값을 구할 수 있다.	30 %

0947 삼차방정식 $x^3 - 2x + k = 0$ 의 근 중 가장 큰 값을 $\alpha (\alpha > 0)$ 라 하면

$$\alpha^3 - 2\alpha + k = 0$$

$$\therefore k = 2\alpha - \alpha^3 \quad \dots\dots ①$$

$S_1 = S_2$ 이므로

$$\int_0^\alpha (x^3 - 2x + k) dx = 0$$

$$\left[\frac{1}{4}x^4 - x^2 + kx \right]_0^\alpha = 0$$

$$\frac{1}{4}\alpha^4 - \alpha^2 + k\alpha = 0, \quad \alpha^4 - 4\alpha^2 + 4k\alpha = 0$$

$$\therefore \alpha^3 - 4\alpha + 4k = 0 \quad (\because \alpha > 0) \quad \dots\dots ②$$

①을 ②에 대입하면

$$\alpha^3 - 4\alpha + 4(2\alpha - \alpha^3) = 0$$

$$-3\alpha^3 + 4\alpha = 0, \quad \alpha(3\alpha^2 - 4) = 0$$

그런데 $\alpha > 0$ 이므로 $\alpha = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

$$\therefore k = 2 \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3} - \left(\frac{2\sqrt{3}}{3} \right)^3 = \frac{4\sqrt{3}}{9}$$

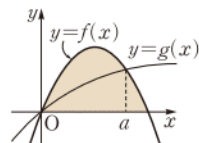
답 $\frac{4\sqrt{3}}{9}$

유형 07 두 곡선 사이의 넓이의 활용: 이등분

본책 156쪽

오른쪽 그림과 같이 곡선 $y = f(x)$ 와 x 축으로 둘러싸인 도형의 넓이 S가 곡선 $y = g(x)$ 에 의하여 이등분되면

$$\Rightarrow \int_0^a |f(x) - g(x)| dx = \frac{1}{2}S$$



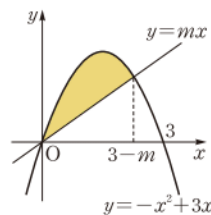
0948 곡선 $y = -x^2 + 3x$ 와 직선 $y = mx$ 의 교점의 x 좌표는 $-x^2 + 3x = mx$ 에서

$$x^2 + (m-3)x = 0, \quad x(x+m-3) = 0$$

$$\therefore x = 0 \text{ 또는 } x = 3-m$$

따라서 오른쪽 그림에서 색칠한 부분의 넓이는

$$\begin{aligned} & \int_0^{3-m} \{(-x^2 + 3x) - mx\} dx \\ &= \int_0^{3-m} \{-x^2 + (3-m)x\} dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{3-m}{2}x^2 \right]_0^{3-m} \\ &= \frac{1}{6}(3-m)^3 \end{aligned}$$



이때 곡선 $y = -x^2 + 3x$ 와 x 축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_0^3 (-x^2 + 3x) dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 \right]_0^3 = \frac{9}{2}$$

이므로

$$\frac{1}{6}(3-m)^3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{2} \quad \therefore (3-m)^3 = \frac{27}{2}$$

답 ③

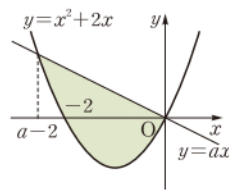
0949 곡선 $y = x^2 + 2x$ 와 직선 $y = ax$ 의 교점의 x 좌표는 $x^2 + 2x = ax$ 에서

$$x^2 + (2-a)x = 0, \quad x(x+2-a) = 0$$

$$\therefore x = 0 \text{ 또는 } x = a-2 \quad \rightarrow ①$$

따라서 오른쪽 그림에서 색칠한 부분의 넓이는

$$\begin{aligned} & \int_{a-2}^0 \{ax - (x^2 + 2x)\} dx \\ &= \int_{a-2}^0 \{-x^2 + (a-2)x\} dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{a-2}{2}x^2 \right]_{a-2}^0 \\ &= \frac{1}{6}(2-a)^3 \end{aligned} \quad \rightarrow ②$$



이때 곡선 $y = x^2 + 2x$ 와 x 축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$-\int_{-2}^0 (x^2 + 2x) dx = -\left[\frac{1}{3}x^3 + x^2 \right]_{-2}^0 = \frac{4}{3} \quad \rightarrow ③$$

이므로

$$\frac{1}{6}(2-a)^3 = 2 \cdot \frac{4}{3}, \quad (2-a)^3 = 16$$

$$8 - 12a + 6a^2 - a^3 = 16$$

$$\therefore a^3 - 6a^2 + 12a = -8$$

$\rightarrow ④$

답 -8



채점 기준	비율
① 곡선 $y=x^2+2x$ 와 직선 $y=ax$ 의 교점의 x 좌표를 구할 수 있다.	20 %
② 색칠한 부분의 넓이를 a 에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30 %
③ 곡선 $y=x^2+2x$ 와 x 축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.	30 %
④ a^3-6a^2+12a 의 값을 구할 수 있다.	20 %

0950 두 곡선 $y=-x^2+4x$, $y=ax^2$ 의 교점의 x 좌표는 $-x^2+4x=ax^2$ 에서

$$(a+1)x^2-4x=0, \quad x\{(a+1)x-4\}=0$$

$$\therefore x=0 \text{ 또는 } x=\frac{4}{a+1}$$

따라서 오른쪽 그림에서 색칠한 부분의 넓이는

$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{4}{a+1}} \{(-x^2+4x)-ax^2\}dx \\ &= \int_0^{\frac{4}{a+1}} \{-(a+1)x^2+4x\}dx \\ &= \left[-\frac{a+1}{3}x^3+2x^2\right]_0^{\frac{4}{a+1}} \\ &= \frac{32}{3(a+1)^2} \end{aligned}$$

이때 곡선 $y=-x^2+4x$ 와 x 축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

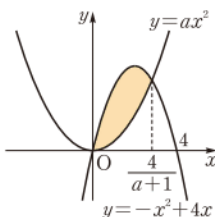
$$\int_0^4 (-x^2+4x)dx = \left[-\frac{1}{3}x^3+2x^2\right]_0^4 = \frac{32}{3}$$

이므로

$$\frac{32}{3(a+1)^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{32}{3}$$

$$(a+1)^2=2 \quad \therefore a=\sqrt{2}-1 \quad (\because a>0)$$

답 $\sqrt{2}-1$



유형 08 두 곡선 사이의 넓이의 활용
: 넓이의 최솟값

본책 157쪽

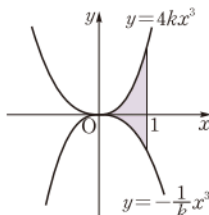
(i) 두 곡선 사이의 넓이를 정적분을 이용하여 나타낸다.

(ii) 산술평균과 기하평균의 관계, 증감표 등을 이용하여 넓이의 최솟값을 구한다.

0951 오른쪽 그림에서 두 곡선 $y=4kx^3$, $y=-\frac{1}{k}x^3$ 과 직선 $x=1$ 로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \left\{4kx^3 - \left(-\frac{1}{k}x^3\right)\right\}dx \\ &= \left(4k + \frac{1}{k}\right) \int_0^1 x^3 dx \\ &= \left(4k + \frac{1}{k}\right) \left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^1 \\ &= k + \frac{1}{4k} \end{aligned}$$

이때 $k>0$, $\frac{1}{4k}>0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여



$$k + \frac{1}{4k} \geq 2\sqrt{k \cdot \frac{1}{4k}} = 1 \quad (\text{단, 등호는 } k=\frac{1}{4k} \text{ 일 때 성립})$$

따라서 구하는 넓이의 최솟값은 1이다.

답 ④

산술평균과 기하평균의 관계

$a>0, b>0$ 일 때,

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \quad (\text{단, 등호는 } a=b \text{ 일 때 성립})$$



0952 곡선 $y=-x^2+4nx$ 와 직선 $y=nx$ 의 교점의 x 좌표는 $-x^2+4nx=nx$ 에서

$$x^2-3nx=0$$

$$x(x-3n)=0$$

$$\therefore x=0 \text{ 또는 } x=3n$$

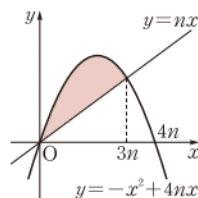
따라서 오른쪽 그림에서 색칠한 부분의 넓이 S_n 은

$$\begin{aligned} S_n &= \int_0^{3n} \{(-x^2+4nx)-nx\}dx \\ &= \int_0^{3n} (-x^2+3nx)dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{3n}{2}x^2\right]_0^{3n} \\ &= \frac{9}{2}n^3 \end{aligned}$$

$$\text{즉 } \frac{9}{2}n^3 > 90 \text{에서 } n^3 > 20$$

따라서 자연수 n 의 최솟값은 3이다.

답 ③



0953 곡선 $y=x^2-kx$ 와 x 축 및 직선 $x=2$ 로 둘러싸인 도형의 넓이를 $S(k)$ 라 하면

$$\begin{aligned} S(k) &= \int_0^k (-x^2+kx)dx + \int_k^2 (x^2-kx)dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{k}{2}x^2\right]_0^k + \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{k}{2}x^2\right]_k^2 \\ &= \frac{1}{3}k^3 - 2k + \frac{8}{3} \end{aligned}$$

$$\therefore S'(k) = k^2 - 2 = (k+\sqrt{2})(k-\sqrt{2})$$

$$S'(k)=0 \text{에서 } k=\sqrt{2} \quad (\because 0 < k < 2)$$

k	0	...	$\sqrt{2}$...	2
$S'(k)$		-	0	+	
$S(k)$		\	극소	/	

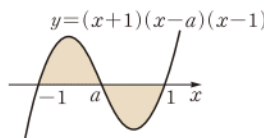
따라서 $S(k)$ 는 $k=\sqrt{2}$ 일 때 최솟값이다.

답 $\sqrt{2}$

0954 곡선

$$y=(x+1)(x-a)(x-1)$$

$(-1 < a < 1)$ 과 x 축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 $S(a)$ 라 하면 오른쪽 그림에서



$$\begin{aligned}
 S(a) &= \int_{-1}^a (x+1)(x-a)(x-1)dx \\
 &\quad + \int_a^1 \{-(x+1)(x-a)(x-1)\}dx \\
 &= \int_{-1}^a (x^3 - ax^2 - x + a)dx - \int_a^1 (x^3 - ax^2 - x + a)dx \\
 &= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{a}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + ax \right]_{-1}^a \\
 &\quad - \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{a}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + ax \right]_a^1 \\
 &= -\frac{1}{6}a^4 + a^2 + \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

$$\therefore S'(a) = -\frac{2}{3}a^3 + 2a = -\frac{2}{3}a(a^2 - 3)$$

$$S'(a)=0 \text{에서} \quad a=0 \quad (\because -1 < a < 1)$$

a	-1	...	0	...	1
$S'(a)$		-	0	+	
$S(a)$		\	극소	/	

따라서 $S(a)$ 는 $a=0$ 일 때 최소이다.

답 0

유형 09 주기함수의 정적분

본책 157쪽

함수 $f(x)$ 가 정의역에 속하는 모든 실수 x 에 대하여

$$f(x+k)=f(x) \quad (k \text{는 상수})$$

이면 $y=f(x)$ 의 그래프는 일정한 모양이 반복되므로 다음이 성립한다.

$$\textcircled{1} \int_a^b f(x)dx = \int_{a+k}^{b+k} f(x)dx$$

$$\textcircled{2} \int_a^{a+k} f(x)dx = \int_b^{b+k} f(x)dx$$

0955 함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여 $f(x+3)=f(x)$ 이므로

$$\int_1^4 f(x)dx = \int_4^7 f(x)dx = \int_7^{10} f(x)dx = \int_{10}^{13} f(x)dx = 2$$

$$\therefore \int_1^{13} f(x)dx = \int_1^4 f(x)dx + \int_4^7 f(x)dx + \int_7^{10} f(x)dx$$

$$+ \int_{10}^{13} f(x)dx$$

$$= 4 \cdot 2 = 8$$

답 ②

0956 조건 (가)에 의하여

$$\int_{-1}^1 f(x)dx = \int_{-1}^1 x^2 dx = 2 \int_0^1 x^2 dx = 2 \left[\frac{1}{3}x^3 \right]_0^1 = \frac{2}{3} \quad \cdots \textcircled{1}$$

이때 조건 (나)에서 함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여

$$f(x)=f(x+2) \text{이므로}$$

$$\int_{-6}^6 f(x)dx = 6 \int_{-1}^1 f(x)dx = 6 \cdot \frac{2}{3} = 4 \quad \cdots \textcircled{2}$$

답 4

채점 기준

비율

① $\int_{-1}^1 f(x)dx$ 의 값을 구할 수 있다.

40%

② $\int_{-6}^6 f(x)dx$ 의 값을 구할 수 있다.

60%

0957 함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여 $f(x)=f(x+4)$ 이므로

$$\int_1^2 f(x)dx = \int_5^6 f(x)dx = \int_9^{10} f(x)dx$$

$$= \cdots = \int_{2017}^{2018} f(x)dx = \int_{2021}^{2022} f(x)dx = \cdots \quad \text{답 ①}$$

0958 함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여 $f(x+2)=f(x)$ 이므로

$$\int_0^2 f(x)dx = \int_2^4 f(x)dx = \int_4^6 f(x)dx$$

$$= \int_6^8 f(x)dx = \int_8^{10} f(x)dx = 8$$

$$\therefore \int_0^{10} f(x)dx = \int_0^2 f(x)dx + \int_2^4 f(x)dx + \int_4^6 f(x)dx$$

$$+ \int_6^8 f(x)dx + \int_8^{10} f(x)dx$$

$$= 5 \cdot 8 = 40$$

또 $f(-x)=f(x)$ 에서 $f(x)$ 는 우함수이므로

$$\int_{-10}^{10} f(x)dx = 2 \int_0^{10} f(x)dx = 2 \cdot 40 = 80$$

답 80

유형 10 함수와 그 역함수의 정적분

본책 158쪽

함수 $y=f(x)$ 와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이다.

⇒ 넓이가 같은 도형을 이용한다.

0959 함수 $f(x)=x^3+2$ ($x \geq 0$)의 역함수가 $g(x)$ 이므로 $y=f(x)$ 의 그래프와 $y=g(x)$ 의 그래프는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이다.

오른쪽 그림에서

$$(A \text{의 넓이}) = (B \text{의 넓이})$$

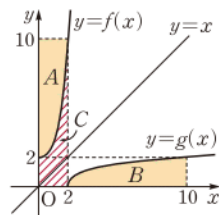
이므로

$$\int_0^2 f(x)dx + \int_2^{10} g(x)dx = (C \text{의 넓이}) + (B \text{의 넓이})$$

$$= (C \text{의 넓이}) + (A \text{의 넓이})$$

$$= 2 \cdot 10 = 20$$

답 ⑤



0960 함수 $f(x)=\sqrt{x-2}$ 의 역함수가 $g(x)$ 이므로 $y=f(x)$ 의 그래프와 $y=g(x)$ 의 그래프는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이다.

⇒ ①

오른쪽 그림에서

$$(A \text{의 넓이}) = (B \text{의 넓이}) \quad \cdots \textcircled{2}$$

이므로

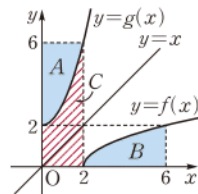
$$\int_0^2 g(x)dx + \int_2^6 f(x)dx = (C \text{의 넓이}) + (B \text{의 넓이})$$

$$= (C \text{의 넓이}) + (A \text{의 넓이})$$

$$= 2 \cdot 6 = 12$$

⇒ ③

답 12





채점 기준

비율

- | | |
|---|-----|
| ① $y=f(x)$ 의 그래프와 $y=g(x)$ 의 그래프가 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭임을 알 수 있다. | 40% |
| ② $(A\text{의 넓이})=(B\text{의 넓이})$ 임을 알 수 있다. | 40% |
| ③ 주어진 정적분의 값을 구할 수 있다. | 20% |

0961 함수 $f(x)=\frac{1}{2}x(x^2+1)$ ($x \geq 0$)

의 역함수가 $g(x)$ 이므로 $y=f(x)$ 의 그래프와 $y=g(x)$ 의 그래프는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이다.

오른쪽 그림에서

$$(B\text{의 넓이})=(A\text{의 넓이})$$

$$=2 \cdot 5 - 1 \cdot 1 - (C\text{의 넓이})$$

$$=9 - \int_1^2 f(x) dx$$

$$=9 - \int_1^2 \frac{1}{2}x(x^2+1) dx$$

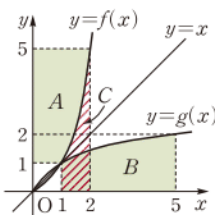
$$=9 - \frac{1}{2} \int_1^2 (x^3+x) dx$$

$$=9 - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 \right]_1^2$$

$$=9 - \frac{1}{2} \cdot \frac{21}{4} = \frac{51}{8}$$

$$\therefore \int_1^5 g(x) dx = (B\text{의 넓이}) = \frac{51}{8}$$

답 ⑤



0962 함수 $f(x)$ 의 역함수가 $g(x)$ 이므로 $y=f(x)$ 의 그래프와 $y=g(x)$ 의 그래프는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이다.

오른쪽 그림에서

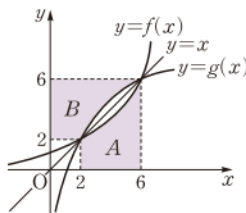
$$(A\text{의 넓이})=(B\text{의 넓이})=S$$

이므로

$$\int_2^6 g(x) dx = 6^2 - 2^2 - (B\text{의 넓이}) = 32 - S$$

$$\therefore k=32$$

답 ⑤



유형 11 함수와 그 역함수의 그래프로 둘러싸인 도형의 넓이

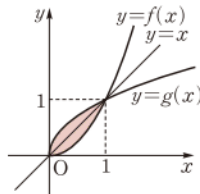
본책 159쪽

두 곡선 $y=f(x)$ 와 $x=f(y)$ 로 둘러싸인 도형의 넓이는

→ 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=x$ 로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배와 같다.

0963 두 곡선 $y=f(x)$ 와 $y=g(x)$ 는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로 두 곡선 $y=f(x)$ 와 $y=g(x)$ 의 교점의 x 좌표는 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=x$ 의 교점의 x 좌표와 같다.

$$x^2=x \text{에서 } x(x-1)=0$$



$$\therefore x=0 \text{ 또는 } x=1$$

이때 두 곡선 $y=f(x)$ 와 $y=g(x)$ 로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=x$ 로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배와 같으므로 구하는 넓이는

$$2 \int_0^1 \{x-f(x)\} dx = 2 \int_0^1 (x-x^2) dx$$

$$= 2 \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

답 ②

0964 오른쪽 그림과 같이 구하는 넓이는 직선 $y=x$ 에 의하여 이등분되고, 빗금 친 부분의 넓이는

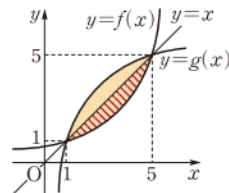
$$\frac{1}{2} \cdot (5^2 - 1^2) - \int_1^5 f(x) dx$$

$$= 12 - 9 = 3$$

따라서 구하는 넓이는 빗금 친 부분의 넓이의 2배이므로

$$2 \cdot 3 = 6$$

답 6



0965 두 곡선 $y=f(x)$ 와 $y=g(x)$ 는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이고

$$f'(x) = 3x^2 - 2x + 1 = 3\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{2}{3} > 0$$

이므로 함수 $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 증가한다.

두 곡선 $y=f(x)$ 와 $y=g(x)$ 의 교점의 x 좌표는 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=x$ 의 교점의 x 좌표와 같으므로 $x^3 - x^2 + x = x$ 에서

$$x^3 - x^2 = 0, \quad x^2(x-1) = 0$$

$$\therefore x=0 \text{ 또는 } x=1$$

이때 두 곡선 $y=f(x)$ 와 $y=g(x)$ 로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=x$ 로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배와 같으므로 구하는 넓이는

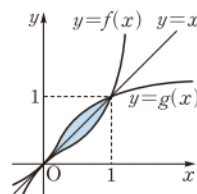
$$2 \int_0^1 \{x-f(x)\} dx = 2 \int_0^1 \{x-(x^3-x^2+x)\} dx$$

$$= 2 \int_0^1 (-x^3+x^2) dx$$

$$= 2 \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 \right]_0^1$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{6}$$

답 ③



유형 12~13 위치의 변화량과 움직인 거리

본책 159, 160쪽

수직선 위를 움직이는 점 P의 시간 t 에서의 속도가 $v(t)$ 이고 $t=a$ 에서의 위치가 x_0 일 때

① 시간 t 에서의 점 P의 위치 x 는 $\Rightarrow x = x_0 + \int_a^t v(t) dt$

② 시간 $t=a$ 에서 $t=b$ 까지 점 P의 위치의 변화량은 $\Rightarrow \int_a^b v(t) dt$

③ 시간 $t=a$ 에서 $t=b$ 까지 점 P가 움직인 거리 s 는

$$\Rightarrow s = \int_a^b |v(t)| dt$$

0966 $t=0$ 에서의 점 P의 좌표가 2이므로 $t=3$ 에서 점 P의 위치는

$$2 + \int_0^3 (6-2t)dt = 2 + \left[6t - t^2 \right]_0^3 = 2 + 9 = 11$$

답 ⑤

0967 $v(t)=0$ 일 때 물이 멈추므로

$$4t - t^2 = 0, \quad t(4-t) = 0$$

$$\therefore t=0 \text{ 또는 } t=4$$

따라서 $t=4$ 일 때까지 흘러나온 물의 양은

$$1^2 \cdot \int_0^4 (4t - t^2)dt = \left[2t^2 - \frac{1}{3}t^3 \right]_0^4 = \frac{32}{3}$$

답 ③

물체의 운동과 속도의 관계

- ① 움직이던 물체가 정지할 때 \Rightarrow (속도) = 0
 ② 움직이던 물체가 운동 방향을 바꿀 때 \Rightarrow (속도) = 0

0968 $\int_0^{10} 2t dt + \int_{10}^{20} (60-4t)dt$

$$= \left[t^2 \right]_0^{10} + \left[60t - 2t^2 \right]_{10}^{20}$$

$$= 100 + 0 = 100 \text{ (m)}$$

따라서 20분 후의 지면으로부터 열기구의 높이는 100 m이다.

답 100 m

0969 시각 t 에서의 점 P의 위치를 x 라 하면

$$x = 0 + \int_0^t (12 - t^2)dt$$

$$= \left[12t - \frac{1}{3}t^3 \right]_0^t$$

$$= -\frac{1}{3}t^3 + 12t$$

... ①

점 P가 다시 원점을 통과할 때 $x=0$ 이므로

$$-\frac{1}{3}t^3 + 12t = 0, \quad t^3 - 36t = 0$$

$$t(t+6)(t-6) = 0 \quad \therefore t=6 \text{ (} \because t>0 \text{)}$$

따라서 $t=6$ 일 때 점 P가 다시 원점을 통과한다.

... ②

답 6

채점 기준

비율

① 시각 t 에서의 점 P의 위치를 구할 수 있다.

40 %

② 점 P가 다시 원점을 통과하는 시각을 구할 수 있다.

60 %

0970 $v(t)=0$ 일 때 점 P가 움직이는 방향이 바뀌므로

$$8-4t=0 \quad \therefore t=2$$

따라서 $t=2$ 에서의 점 P의 위치는

$$0 + \int_0^2 (8-4t)dt = \left[8t - 2t^2 \right]_0^2 = 8$$

답 8

0971 자동차 B가 P지점을 지나 t 초 동안 달린 거리를 x_B m라 하면

$$x_B = \int_0^t (2t+2)dt = t^2 + 2t$$

자동차 A가 P지점을 지나 $(t+2)$ 초 동안 달린 거리를 x_A m라 하면

$$x_A = \frac{16(t+2)}{2} \quad \left[\text{(거리)} = \text{(속력)} \times \text{(시간)} \right]$$

A와 B가 만날 때 $x_A = x_B$ 이므로

$$16(t+2) = t^2 + 2t, \quad t^2 - 14t - 32 = 0$$

$$(t+2)(t-16) = 0 \quad \therefore t=16 \text{ (} \because t>0 \text{)}$$

따라서 자동차 B가 P지점을 지난 지 16초 후에 두 자동차 A, B가 만난다.

답 ③

0972 $v(t)=30-2t=0$ 에서 $t=15$

따라서 전동차는 제동을 건 후 15초 후에 정지하므로 정지할 때까지 달린 거리는

$$\int_0^{15} |30-2t|dt = \int_0^{15} (30-2t)dt$$

$$= \left[30t - t^2 \right]_0^{15} = 225 \text{ (m)}$$

답 ④

0973 $v(t)=20-10t=0$ 에서 $t=2$

따라서 물체는 위로 쏘아 올린 지 2초 후에 최고 높이에 도달하므로 구하는 거리는

$$\int_2^4 |20-10t|dt = \int_2^4 (10t-20)dt$$

$$= \left[5t^2 - 20t \right]_2^4$$

$$= 0 - (-20) = 20 \text{ (m)}$$

답 20 m

0974 (1) 원점에서 출발하였으므로 위치의 변화량이 0이면 점 P의 위치가 원점이다.

$t=a$ ($a>0$)일 때 점 P의 위치의 변화량이 0이라 하면

$$\int_0^a (6-2t)dt = 0, \quad \left[6t - t^2 \right]_0^a = 0$$

$$6a - a^2 = 0, \quad a(6-a) = 0 \quad \therefore a=6 \text{ (} \because a>0 \text{)}$$

따라서 점 P가 원점으로 돌아오는 데 걸리는 시간은 6초이다.

... ①

(2) $\int_0^6 |6-2t|dt = \int_0^3 (6-2t)dt + \int_3^6 (2t-6)dt$

$$= \left[6t - t^2 \right]_0^3 + \left[t^2 - 6t \right]_3^6$$

$$= 9 + 9 = 18$$

... ②

답 (1) 6초 (2) 18

채점 기준

비율

① 점 P가 원점으로 돌아오는 데 걸리는 시간을 구할 수 있다.

60 %

② 점 P가 원점으로 돌아올 때까지 움직인 거리를 구할 수 있다.

40 %

0975 낙하를 시작한 지 t ($t>0$)초부터 $(t+1)$ 초까지 물체가 낙하한 거리는

$$\int_t^{t+1} |-10t|dt = \left[5t^2 \right]_t^{t+1} = 10t + 5 \text{ (m)}$$



즉 물체가 1초 동안 낙하한 거리가 80 m 이상이 되려면

$$10t + 5 \geq 80 \quad \therefore t \geq 7.5$$

따라서 이 물체가 1초 동안 낙하한 거리가 80 m 이상이 되는 것은 낙하를 시작한 지 7.5초가 지나서부터이다. **답 ③**

0976 $t=a$ ($a>0$)일 때 열차가 달린 거리가 3 km라 하면

$$\int_0^a \left| \frac{3}{4}t^2 + \frac{1}{2}t \right| dt = 3, \quad \int_0^a \left(\frac{3}{4}t^2 + \frac{1}{2}t \right) dt = 3$$

$$\left[\frac{1}{4}t^3 + \frac{1}{4}t^2 \right]_0^a = 3, \quad \frac{1}{4}a^3 + \frac{1}{4}a^2 = 3$$

$$a^3 + a^2 - 12 = 0, \quad (a-2)(a^2 + 3a + 6) = 0$$

$$\therefore a = 2 \quad (\because a^2 + 3a + 6 > 0)$$

열차가 출발한 후 2분이 지났을 때의 속도는

$$v(2) = \frac{3}{4} \cdot 2^2 + \frac{1}{2} \cdot 2 = 4 \text{ (km/min)}$$

따라서 열차가 출발한 후 5분 동안 달린 거리는

$$3 + \int_2^5 4 dt = 3 + [4t]_2^5 = 3 + 12 = 15 \text{ (km)} \quad \text{답 15 km}$$

0977 $v(t) = at(t-20)$ ($a<0$)이라 하면 속도 $v(t)$ 의 그래프가 점 (10, 10)을 지나므로

$$10 = a \cdot 10 \cdot (-10) \quad \therefore a = -\frac{1}{10}$$

$$\therefore v(t) = -\frac{1}{10}t(t-20)$$

$$= -\frac{1}{10}t^2 + 2t$$

이때 두 항구 A, B 사이의 거리는 $t=0$ 에서 $t=20$ 까지 배가 이동한 거리이므로

$$\begin{aligned} \int_0^{20} \left| -\frac{1}{10}t^2 + 2t \right| dt &= \int_0^{20} \left(-\frac{1}{10}t^2 + 2t \right) dt \\ &= \left[-\frac{1}{30}t^3 + t^2 \right]_0^{20} \\ &= \frac{400}{3} \text{ (km)} \quad \text{답 ②} \end{aligned}$$

유형 14

그래프에서의 위치와 움직인 거리

본책 161쪽

수직선 위를 움직이는 점 P의 시간 t 에서의 속도를 $v(t)$ 라 할 때

① $\int_a^b v(t) dt \Rightarrow t=a$ 에서 $t=b$ 까지 점 P의 위치의 변화량

② $\int_a^b |v(t)| dt \Rightarrow t=a$ 에서 $t=b$ 까지 점 P가 움직인 거리

$\Rightarrow y=v(t)$ 의 그래프와 t 축 및 두 직선 $t=a$, $t=b$ 로 둘러싸인 도형의 넓이

0978 \neg . 점 P의 운동 방향은

$$v(t) = 0, \text{ 즉 } t = \frac{7}{3}, t = 5 \quad \left[\begin{array}{l} \text{두 점 } (2, 1), (3, -2) \text{를 지나는 직선의 방정식이} \\ v(t) = -3t + 7 \text{이므로 } v(t) = 0 \text{일 때, } t = \frac{7}{3} \end{array} \right.$$

일 때 바뀌므로 $t=7$ 일 때까지 두 번 바뀐다.

\neg . 점 P의 시간 t 에서의 속력 $|v(t)|$ 의 값이 가장 큰 것은 $t=3$ 일 때이다.

\neg . $t=7$ 일 때 점 P의 위치는

$$\begin{aligned} \int_0^7 v(t) dt &= \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{7}{3} \right) \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot \left(5 - \frac{7}{3} \right) \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 \\ &= \frac{5}{3} - \frac{8}{3} + 1 = 0 \end{aligned}$$

이므로 $t=7$ 일 때 점 P는 원점에 놓여 있다.

이상에서 옳은 것은 \neg , \neg 이다. **답 ③**

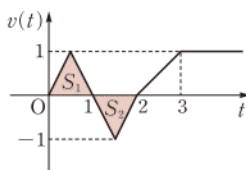
0979 $t=a$ 일 때, 원점을 다시 통과하

므로 $\int_0^a v(t) dt = 0$ 이어야 한다.

오른쪽 그림에서 $S_1 = S_2$ 이므로 $t=2$

일 때 다시 원점을 통과한다.

$$\therefore a = 2$$



답 2

0980 $t=3$ 에서의 점 P의 위치는 $\int_0^3 v(t) dt$ 이므로

$$\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 4a + \frac{1}{2} \cdot (3-1) \cdot (-a) = 3$$

$$\therefore a = 3$$

\rightarrow ①

따라서 $t=0$ 에서 $t=5$ 까지 점 P가 움직인 거리는

$$\begin{aligned} \int_0^5 |v(t)| dt &= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 12 + \frac{1}{2} \cdot (3-1) \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot (5-3) \cdot 12 \\ &= 6 + 3 + 12 = 21 \end{aligned}$$

\rightarrow ②

답 21

채점 기준	비율
① a 의 값을 구할 수 있다.	50 %
② $t=0$ 에서 $t=5$ 까지 점 P가 움직인 거리를 구할 수 있다.	50 %

0981 $t=3$ 에서의 점 P의 위치는 $\int_0^3 v(t) dt$ 이므로

$$\int_0^3 v(t) dt = 2$$

이때 $\int_0^3 v(t) dt = \int_0^2 v(t) dt + \int_2^3 v(t) dt$ 이므로

$$3 + \int_2^3 v(t) dt = 2 \quad \therefore \int_2^3 v(t) dt = -1$$

따라서 $t=3$ 에서 $t=5$ 까지 점 P가 움직인 거리는

$$\begin{aligned} \int_3^5 |v(t)| dt &= \int_2^5 |v(t)| dt - \int_2^3 |v(t)| dt \\ &= 3 - 1 = 2 \end{aligned}$$

답 2

0982 $t=0$ 에서의 점 P의 위치를 x_0 이라 하면 $t=2$ 에서의 점 P의 위치는 $x_0 + \int_0^2 v(t) dt$ 이므로

$$x_0 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot a = 5$$

$$\therefore x_0 + a = 5$$

$\dots\dots$ ①

$t=2$ 에서 $t=4$ 까지의 위치의 변화량과 $t=6$ 에서 $t=7$ 까지의 위치의 변화량은 각각 0이고, $t=7$ 에서의 점 P의 위치는 $x_0 + \int_0^7 v(t) dt$ 이므로

$$x_0 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot a + (6-4) \cdot (-a) = -1$$

$$\therefore x_0 - a = -1 \quad \dots\dots ㉔$$

㉓, ㉔을 연립하여 풀면 $x_0 = 2, a = 3$

따라서 $t = 10$ 에서의 점 P의 위치는

$$\frac{-1 + \frac{1}{2} \cdot (10-7) \cdot 3}{\text{--- } (t=7\text{에서의 위치}) + (t=7\text{에서 } t=10\text{까지의 위치의 변화량)}} = \frac{7}{2} \quad \text{답 ③}$$

0983 오른쪽 그림에서 속도 $v(t)$ 의 그래프와 t 축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 차례대로 A, B, C, D라 하면 주어진 조건에서

$$A = B + C + D$$

$$B = C - D$$

$$\therefore \int_0^c v(t) dt = A - B = C + D$$

$$\int_c^f |v(t)| dt = C + D$$

$$\therefore \int_0^c v(t) dt = \int_c^f |v(t)| dt$$

ㄴ. 점 P는 $t = a, t = c, t = e$ 에서 운동 방향을 바꾸므로 3번 바꾼다.

$$\text{ㄷ. } \int_a^c |v(t)| dt = B, \int_c^f |v(t)| dt = C + D \text{이므로}$$

$$\int_a^c |v(t)| dt + \int_c^f |v(t)| dt = B + C + D = A$$

$$\int_0^c v(t) dt = A - B \text{이고, } B \neq 0 \text{이므로}$$

$$\int_0^c v(t) dt \neq \int_a^c |v(t)| dt + \int_c^f |v(t)| dt$$

$$\text{ㄹ. } \int_0^a v(t) dt = A > 0, \int_0^c v(t) dt = A - B = C + D > 0,$$

$$\int_0^e v(t) dt = A - B + C = 2C + D > 0,$$

$$\int_0^f v(t) dt = A - B + C - D = 2C > 0$$

따라서 점 P의 위치의 변화량이 0이 되는 때는 없으므로 점 P는 출발 후 원점을 다시 지나지 않는다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ①

0984 **전략** 정적분의 성질을 이용하여 주어진 조건을 간단히 한다.

$$\text{풀이} \cdot \int_0^{2013} f(x) dx = \int_3^{2013} f(x) dx \text{이므로}$$

$$\int_0^{2013} f(x) dx - \int_3^{2013} f(x) dx = 0$$

$$\int_0^{2013} f(x) dx + \int_{2013}^3 f(x) dx = 0$$

$$\therefore \int_0^3 f(x) dx = 0$$

$f(x) = x^2 + ax + b$ (a, b 는 상수)라 하면

$$\int_0^3 (x^2 + ax + b) dx = \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{a}{2}x^2 + bx \right]_0^3$$

$$= 9 + \frac{9}{2}a + 3b$$

$$\text{즉 } 9 + \frac{9}{2}a + 3b = 0 \text{이므로 } 3a + 2b = -6 \quad \dots\dots ㉓$$

$$\text{또 } f(3) = 0 \text{이므로 } 9 + 3a + b = 0 \quad \dots\dots ㉔$$

㉓, ㉔을 연립하여 풀면 $a = -4, b = 3$

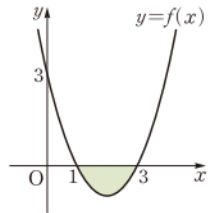
따라서 $f(x) = x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$ 이므로

$$S = \int_1^3 (-x^2 + 4x - 3) dx$$

$$= \left[-\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 3x \right]_1^3$$

$$= 0 - \left(-\frac{4}{3} \right) = \frac{4}{3}$$

$$\therefore 30S = 30 \cdot \frac{4}{3} = 40 \quad \text{답 40}$$



0985 **전략** 곡선 $y = 2x^2 + 3x - 2$ 와 두 직선 $y = x + 2, y = x - 2$ 의 교점의 x 좌표를 각각 구하고 곡선과 두 직선을 좌표평면에 나타낸다.

풀이 · 곡선 $y = 2x^2 + 3x - 2$ 와 직선

$y = x + 2$ 의 교점의 x 좌표는

$$2x^2 + 3x - 2 = x + 2 \text{에서}$$

$$x^2 + x - 2 = 0$$

$$(x+2)(x-1) = 0$$

$$\therefore x = -2 \text{ 또는 } x = 1$$

또 곡선 $y = 2x^2 + 3x - 2$ 와 직선

$y = x - 2$ 의 교점의 x 좌표는 $2x^2 + 3x - 2 = x - 2$ 에서

$$x^2 + x = 0, \quad x(x+1) = 0$$

$$\therefore x = -1 \text{ 또는 } x = 0$$

따라서 구하는 넓이는

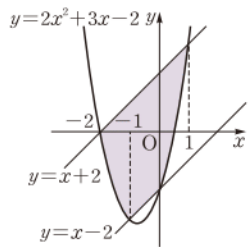
$$\int_{-2}^1 \{(x+2) - (2x^2 + 3x - 2)\} dx$$

$$- \int_{-1}^0 \{(x-2) - (2x^2 + 3x - 2)\} dx$$

$$= \int_{-2}^1 (-2x^2 - 2x + 4) dx - \int_{-1}^0 (-2x^2 - 2x) dx$$

$$= \left[-\frac{2}{3}x^3 - x^2 + 4x \right]_{-2}^1 - \left[-\frac{2}{3}x^3 - x^2 \right]_{-1}^0$$

$$= 9 - \frac{1}{3} = \frac{26}{3} \quad \text{답 ①}$$



0986 **전략** 두 점 P, Q의 x 좌표는 곡선과 직선의 방정식을 연립하여 만든 이차방정식의 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용한다.

풀이 · 직선 l 의 방정식을 $y = m(x+1)$ ($m > 0$)이라 하고, 두 점 P, Q의 x 좌표를 각각 α, β 라 하면 α, β 는 이차방정식

$x^2 = m(x+1)$, 즉 $x^2 - mx - m = 0$ 의 두 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = m, \quad \alpha\beta = -m \quad \dots\dots ㉓$$

이때 $\overline{AP} : \overline{AQ} = 1 : 4$ 이므로 $\overline{AP} : \overline{AQ} = \overline{AP'} : \overline{AQ'} = (a+1) : (\beta+1) = 1 : 4$ 이라 하면 $\triangle PAP' \sim \triangle QAQ'$ (AA 닮음)이므로

$$\beta + 1 = 4\alpha + 4 \quad \therefore \beta = 4\alpha + 3$$

이것을 ㉓에 각각 대입하면

$$5\alpha + 3 = m, \quad \alpha(4\alpha + 3) = -m$$

$$\text{즉 } \alpha(4\alpha + 3) = -(5\alpha + 3) \text{이므로 } 4\alpha^2 + 8\alpha + 3 = 0$$



$$(2\alpha+3)(2\alpha+1)=0 \quad \therefore \alpha=-\frac{3}{2} \text{ 또는 } \alpha=-\frac{1}{2}$$

$$\text{그런데 } \alpha=-\frac{3}{2} \text{ 이면 } m=-\frac{9}{2}<0 \text{ 이므로 } \alpha=-\frac{1}{2}$$

$$\therefore \beta=1, m=\frac{1}{2}$$

따라서 직선 l 의 방정식은 $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$ 이므로 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{1}{2}}^1 \left\{ \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \right) - x^2 \right\} dx &= \int_{-\frac{1}{2}}^1 \left(-x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \right) dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x \right]_{-\frac{1}{2}}^1 \\ &= \frac{5}{12} - \left(-\frac{7}{48} \right) = \frac{9}{16} \end{aligned}$$

답 ④

0987 전략 $q_0=525$ 일 때의 p_0 의 값을 구한다.

풀이 $q_0=525$ 이므로

$$500 + 0.01p_0^2 = 525, \quad 0.01p_0^2 = 25$$

$$p_0^2 = 2500 \quad \therefore p_0 = 50$$

따라서 현재 가격이 525원일 때의 생산자 과잉 S 는

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{50} \{q_0 - f(p)\} dp \\ &= \int_0^{50} \{525 - (500 + 0.01p^2)\} dp \\ &= \int_0^{50} \left(-\frac{1}{100}p^2 + 25 \right) dp = \left[-\frac{1}{300}p^3 + 25p \right]_0^{50} \\ &= -\frac{1250}{3} + 1250 = \frac{2500}{3} \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{S}{100} = \frac{25}{3} \quad \text{답 } \frac{25}{3}$$

0988 전략 $f'(x)$ 가 최대가 되는 x 의 값을 구하여 점 P의 좌표를 구한다.

풀이 $f'(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x = -\frac{1}{2}(x-2)^2 + 2$ 에서 $f'(x)$ 는 $x=2$

일 때 최대이므로 점 P의 좌표는 (2, 0)이다.

즉 함수 $y=g(x)$ 의 그래프가 점 (2, 0)을 지나므로

$$g(2) = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} + a = 0 \quad \therefore a = -\frac{8}{3}$$

이때 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 교점의 x 좌표는

$$-\frac{1}{6}x^3 + x^2 - \frac{8}{3} = \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{8}{3} \text{에서}$$

$$x^3 - 4x^2 + 4x = 0$$

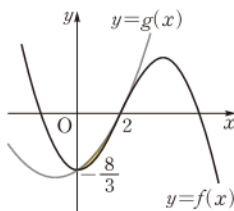
$$x(x-2)^2 = 0$$

$$\therefore x=0 \text{ 또는 } x=2$$

따라서 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} b &= \int_0^2 \left\{ \left(\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{8}{3} \right) - \left(-\frac{1}{6}x^3 + x^2 - \frac{8}{3} \right) \right\} dx \\ &= \int_0^2 \left(\frac{1}{6}x^3 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{2}{3}x \right) dx \\ &= \left[\frac{1}{24}x^4 - \frac{2}{9}x^3 + \frac{1}{3}x^2 \right]_0^2 = \frac{2}{9} \\ \therefore 9(b-a) &= 9 \left\{ \frac{2}{9} - \left(-\frac{8}{3} \right) \right\} = 26 \end{aligned}$$

답 26



0989 전략 t 의 값의 범위에 따른 함수 $f(x)$ 의 최댓값과 최솟값을 조사하여 두 함수 $g(t)$, $h(t)$ 를 구한다.

풀이 $y=f(x)$ 의 그래프가 오른쪽 그림

과 같으므로

$$g(t) = \begin{cases} f(t+2) & (t \geq -1) \\ f(t) & (t \leq -1) \end{cases}$$

$$h(t) = \begin{cases} f(t) & (t \geq 0) \\ 0 & (-2 \leq t \leq 0) \\ f(t+2) & (t \leq -2) \end{cases}$$

즉 $y=g(x)$, $y=h(x)$ 의 그래프는

오른쪽 그림과 같으므로 두 곡선

$y=g(x)$, $y=h(x)$ 및 두 직선

$x=-2$, $x=2$ 로 둘러싸인 도형의 넓

이는

$$\begin{aligned} &\int_{-2}^2 \{g(x) - h(x)\} dx \\ &= \int_{-2}^0 \{g(x) - h(x)\} dx + \int_0^2 \{g(x) - h(x)\} dx \\ &= 2 \int_{-2}^{-1} g(x) dx + \int_0^2 \{g(x) - h(x)\} dx \\ &= 2 \int_{-2}^{-1} ax^2 dx + \int_0^2 \{a(x+2)^2 - ax^2\} dx \\ &= 2a \int_{-2}^{-1} x^2 dx + a \int_0^2 (4x+4) dx \\ &= 2a \left[\frac{1}{3}x^3 \right]_{-2}^{-1} + a \left[2x^2 + 4x \right]_0^2 \\ &= \frac{14}{3}a + 16a = \frac{62}{3}a \end{aligned}$$

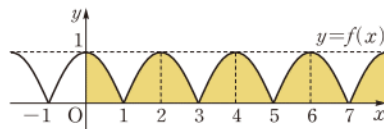
$$\text{따라서 } \frac{62}{3}a = 31 \text{ 이므로 } a = \frac{3}{2}$$

$$\therefore 10a = 10 \cdot \frac{3}{2} = 15$$

답 15

0990 전략 $y=f(x)$ 의 그래프를 그려 같은 넓이를 갖는 부분을 찾는다.

풀이 조건 (가), (나)에 의하여 $y=f(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



이때

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (1-x^2) dx = \left[x - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

이므로 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} \int_0^{100} f(x) dx &= 100 \int_0^1 f(x) dx \\ &= 100 \cdot \frac{2}{3} = \frac{200}{3} \end{aligned}$$

답 $\frac{200}{3}$

0991 전략 두 곡선 $y=f(x)$ 와 $y=g(x)$ 로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=x$ 로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배와 같음을 이용한다.

풀이 두 곡선 $y=f(x)$ 와 $y=g(x)$ 의 교점은 직선 $y=x$ 위의 점이므로 교점의 좌표는 $(1, 1), (2, 2)$ 이다.

즉 $f(1)=1, f(2)=2$ 이므로

$$a+b=1, 4a+b=2$$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=\frac{1}{3}, b=\frac{2}{3}$

$$\therefore f(x)=\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}$$

이때

$$A=2\int_0^1 \{f(x)-x\}dx, B=2\int_1^2 \{x-f(x)\}dx$$

이므로

$$\begin{aligned} A-B &= 2\int_0^1 \{f(x)-x\}dx - 2\int_1^2 \{x-f(x)\}dx \\ &= 2\left[\int_0^1 \{f(x)-x\}dx + \int_1^2 \{f(x)-x\}dx\right] \\ &= 2\int_0^2 \{f(x)-x\}dx \\ &= 2\int_0^2 \left(\frac{1}{3}x^2 - x + \frac{2}{3}\right)dx \\ &= 2\left[\frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x\right]_0^2 \\ &= 2 \cdot \frac{2}{9} = \frac{4}{9} \end{aligned}$$

답 ④

0992 전략 주어진 그래프를 이용하여 $f'(t)$ 를 구한다.

풀이 주어진 그래프에 의하여

$$f'(t)=a(t-1)(t-5) \quad (a>0)$$

라 하면 $f'(0)=5$ 이므로

$$5a=5 \quad \therefore a=1$$

$$\therefore f'(t)=(t-1)(t-5)=t^2-6t+5$$

점 P가 출발할 때의 운동 방향과 반대 방향으로 움직인 시간은 $t=1$ 에서 $t=5$ 일 때까지이다.

따라서 점 P가 반대 방향으로 움직인 거리 l 은

$$\begin{aligned} l &= \int_1^5 |t^2-6t+5|dt = \int_1^5 (-t^2+6t-5)dt \\ &= \left[-\frac{1}{3}t^3+3t^2-5t\right]_1^5 = \frac{25}{3} - \left(-\frac{7}{3}\right) = \frac{32}{3} \\ \therefore 6l &= 6 \cdot \frac{32}{3} = 64 \end{aligned}$$

답 64

0993 전략 시각 t 에서의 속도가 $v(t)$ 인 물체가 정지할 때, $v(t)=0$ 이다.

풀이 $28-4t=0$ 에서 $t=7$

따라서 열차는 제동을 건 지 7초 후에 정지하므로 정지할 때까지 달린 거리는

$$\begin{aligned} \int_0^7 |28-4t|dt &= \int_0^7 (28-4t)dt \\ &= \left[28t-2t^2\right]_0^7 = 98 \text{ (m)} \end{aligned}$$

즉 열차가 장애물과 부딪히지 않고 정지하기 위한 x 의 값의 범위는 $x>98$ 이다.

답 ⑤

0994 전략 두 자동차 P, Q가 움직인 거리의 합이 400의 배수일 때 P, Q는 서로 만난다.

풀이 2분, 즉 120초 동안 자동차 P가 움직인 거리는

$$\begin{aligned} s_1(120) &= \int_0^5 8t dt + \int_5^{120} 40 dt \\ &= \left[4t^2\right]_0^5 + \left[40t\right]_5^{120} \\ &= 100 + 4600 \\ &= 4700 \text{ (m)} \end{aligned}$$

120초 동안 자동차 Q가 움직인 거리는

$$\begin{aligned} s_2(120) &= \int_0^{10} 6t dt + \int_{10}^{120} 60 dt \\ &= \left[3t^2\right]_0^{10} + \left[60t\right]_{10}^{120} \\ &= 300 + 6600 \\ &= 6900 \text{ (m)} \end{aligned}$$

두 자동차 P, Q가 움직인 거리의 합이 400의 배수일 때 P, Q는 서로 만나고, $400n \leq 4700 + 6900 = 11600$ 에서 $n \leq 29$ 이므로 P, Q는 29회 만난다.

한편 $7.5k$ ($k=1, 2, 3, \dots, 16$)초 동안 자동차 P가 움직인 거리는

$$\begin{aligned} \int_0^5 8t dt + \int_5^{7.5k} 40 dt &= \left[4t^2\right]_0^5 + \left[40t\right]_5^{7.5k} \\ &= 100 + (300k - 200) \\ &= 300k - 100 \text{ (m)} \end{aligned}$$

$k=1, 2, 3, \dots, 16$ 일 때, P가 이동한 거리는 200 m, 500 m, 800 m, ..., 4700 m이고, P, R가 만날 수 있는 위치는 M 또는 N 이므로 $k=2, 4, 6, \dots, 16$ 일 때에는 P, R가 만날 수 없다.

$k=1, 3, 5, \dots, 15$ 일 때, P가 움직인 거리와 P, R의 위치는 다음 표와 같다.

k	1	3	5	7	9	11	13	15
P가 움직인 거리(m)	200	800	1400	2000	2600	3200	3800	4400
P의 위치	N	M	N	M	N	M	N	M
R의 위치	N	N	N	N	N	N	N	N

즉 P, R는 $k=1, 5, 9, 13$ 일 때 만나므로 4회 만난다.

따라서 구하는 합은 $29+4=33$

답 ⑤

0995 전략 정적분과 미분계수의 정의를 이용한다.

풀이 $f(x)$ 의 한 부정적분을 $F(x)$ 라 하면 $F'(x)=f(x)$ 이므로

$$S(t) = \int_2^t f(x)dx = F(t) - F(2) \quad \cdots ①$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{t \rightarrow 2} \frac{S(t)}{t-2} &= \lim_{t \rightarrow 2} \frac{F(t) - F(2)}{t-2} \\ &= F'(2) = f(2) = 4 \end{aligned} \quad \cdots ②$$

답 4

채점 기준	비율
① $S(t)$ 를 식으로 나타낼 수 있다.	40 %
② $\lim_{t \rightarrow 2} \frac{S(t)}{t-2}$ 의 값을 구할 수 있다.	60 %



0996 전략 색칠한 두 부분의 넓이를 각각 구하여 그 넓이의 합이 4임을 이용한다.

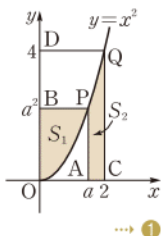
풀이 오른쪽 그림과 같이 색칠한 두 부분의 넓이를 각각 S_1, S_2 라 하면

$$\begin{aligned} S_1 &= a \cdot a^2 - \int_0^a x^2 dx \\ &= a^3 - \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^a \\ &= \frac{2}{3} a^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_2 &= \int_a^2 x^2 dx = \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_a^2 \\ &= \frac{8}{3} - \frac{1}{3} a^3 \end{aligned}$$

이때 $S_1 + S_2 = 4$ 이므로

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} a^3 + \left(\frac{8}{3} - \frac{1}{3} a^3 \right) &= 4, \quad \frac{1}{3} a^3 = \frac{4}{3} \\ a^3 &= 4 \quad \therefore a = \sqrt[3]{4} \end{aligned}$$



→ ①

→ ②

→ ③

답 $\sqrt[3]{4}$

채점 기준	비율
① S_1 을 a 에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40 %
② S_2 를 a 에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40 %
③ a 의 값을 구할 수 있다.	20 %

0997 전략 곡선 $y = \frac{1}{4}x^2 + 1$ 과 직선 $y=5$ 의 교점의 x 좌표와

$y=m|x|+1$ 의 그래프와 직선 $y=5$ 의 교점의 x 좌표를 구하여 S_1, S_2 의 값을 구한다.

풀이 곡선 $y = \frac{1}{4}x^2 + 1$ 과 직선

$y=5$ 의 교점의 x 좌표는

$$\frac{1}{4}x^2 + 1 = 5 \text{에서}$$

$$x^2 = 16 \quad \therefore x = \pm 4$$

$$\begin{aligned} \therefore S_1 &= \int_{-4}^4 \left\{ 5 - \left(\frac{1}{4}x^2 + 1 \right) \right\} dx \\ &= 2 \int_0^4 \left(-\frac{1}{4}x^2 + 4 \right) dx \\ &= 2 \left[-\frac{1}{12}x^3 + 4x \right]_0^4 \\ &= 2 \cdot \frac{32}{3} = \frac{64}{3} \end{aligned}$$

→ ①

$y=m|x|+1$ 의 그래프와 직선 $y=5$ 의 교점의 x 좌표는

$m|x|+1=5$ 에서

$$|x| = \frac{4}{m} \quad \therefore x = \pm \frac{4}{m}$$

$$\therefore S_2 = \frac{1}{2} \cdot \left\{ \frac{4}{m} - \left(-\frac{4}{m} \right) \right\} \cdot (5-1) = \frac{16}{m}$$

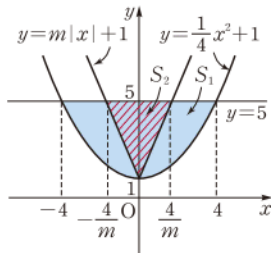
→ ②

이때 $S_1 = 3S_2$ 이므로

$$\frac{64}{3} = 3 \cdot \frac{16}{m} \quad \therefore m = \frac{9}{4}$$

→ ③

답 $\frac{9}{4}$



채점 기준

비율

① S_1 의 값을 구할 수 있다.	40 %
② S_2 를 m 에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40 %
③ m 의 값을 구할 수 있다.	20 %

0998 전략 $f(x) = f(-x)$ 이므로 $f(x)$ 는 우함수이고, 그 그래프가 y 축에 대하여 대칭이다.

풀이 곡선 $y=f(x)$ 와 x 축의 교점의 x 좌표는 $f(x)=0$ 에서

$$(x^2-4)(x^2-k)=0$$

$$(x+2)(x-2)(x+\sqrt{k})(x-\sqrt{k})=0$$

$$\therefore x = \pm 2 \text{ 또는 } x = \pm \sqrt{k}$$

→ ①

한편 $f(-x) = \{(-x)^2-4\}\{(-x)^2-k\} = (x^2-4)(x^2-k) = f(x)$ 에서 $f(x)$ 는 우함수이고, $A+C=B$ 이므로

$$\frac{B}{2} = A = C$$

→ ②

따라서 오른쪽 그림에서 색칠한 두 부분의 넓이가 서로 같으므로

$$\int_0^2 (x^2-4)(x^2-k) dx = 0 \quad \rightarrow ③$$

즉 $\int_0^2 \{x^4 - (4+k)x^2 + 4k\} dx = 0$ 이므로

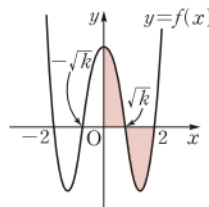
$$\left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{4+k}{3}x^3 + 4kx \right]_0^2 = 0$$

$$\frac{32}{5} - \frac{8}{3}(4+k) + 8k = 0$$

$$80k = 64 \quad \therefore k = \frac{4}{5}$$

→ ④

답 $\frac{4}{5}$



채점 기준

비율

① 곡선 $y=f(x)$ 와 x 축의 교점의 x 좌표를 구할 수 있다.	20 %
② $\frac{B}{2} = A = C$ 임을 알 수 있다.	20 %
③ $\int_0^2 (x^2-4)(x^2-k) dx = 0$ 임을 알 수 있다.	30 %
④ k 의 값을 구할 수 있다.	30 %

0999 전략 점 A의 시각 t 에서의 위치를 식으로 나타내고 그 최솟값을 구한다.

풀이 점 A의 시각 t 에서의 위치 x 는

$$x = 10 + \int_0^t (2t-4) dt$$

$$= 10 + \left[t^2 - 4t \right]_0^t = t^2 - 4t + 10$$

$$= (t-2)^2 + 6$$

→ ①

따라서 점 A는 $t=2$ 일 때 원점에서 가장 가까이 있으며 그때의 위치는 6이다.

→ ②

답 6

채점 기준

비율

① 점 A의 시각 t 에서의 위치를 구할 수 있다.	80 %
② 점 A가 원점에서 가장 가까이 있을 때의 위치를 구할 수 있다.	20 %



1000 전략 두 점 P, Q의 시각 t 에서의 위치를 각각 구하여 두 점의 위치가 같아지는 t 의 값이 $t > 0$ 에서 오직 하나임을 이용한다.

풀이 두 점 P, Q의 시각 t 에서의 위치를 각각 $x_P(t)$, $x_Q(t)$ 라 하면

$$x_P(t) = \int_0^t (3t^2 + 2t - 1) dt = \left[t^3 + t^2 - t \right]_0^t = t^3 + t^2 - t$$

$$x_Q(t) = \int_0^t \left(2t + \frac{a}{4} \right) dt = \left[t^2 + \frac{a}{4}t \right]_0^t = t^2 + \frac{a}{4}t \quad \cdots \textcircled{1}$$

두 점 P, Q가 만날 때 $x_P(t) = x_Q(t)$ 이므로

$$t^3 + t^2 - t = t^2 + \frac{a}{4}t, \quad t^3 - \left(\frac{a}{4} + 1 \right)t = 0$$

$$\therefore t \left\{ t^2 - \left(\frac{a}{4} + 1 \right) \right\} = 0 \quad \cdots \textcircled{2}$$

두 점 P, Q가 원점을 동시에 출발한 후 한 번만 만나려면 이 방정식이 오직 하나의 양근을 가져야 하므로

$$\frac{a}{4} + 1 > 0 \quad \therefore a > -4$$

따라서 정수 a 의 최솟값은 -3 이다.

$\cdots \textcircled{3}$

답 -3

채점 기준	비율
① 두 점 P, Q의 시각 t 에서의 위치를 각각 구할 수 있다.	40 %
② t 에 대한 방정식을 세울 수 있다.	20 %
③ 정수 a 의 최솟값을 구할 수 있다.	40 %