쎈

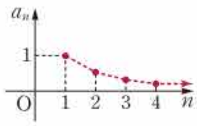
정답 및 풀이

⋯→ 정답을 확인하려 할 때에는 「**빠른 정답 찾기**」를 이용하면 편리합니다.

01 수열의 극한

0001 주어진 수열의 일반항을 a_n이라 하면

$a_n=\dfrac{1}{n}$



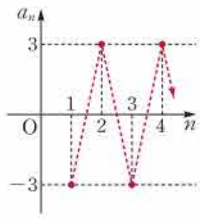
위의 그림에서 n의 값이 한없이 커질 때, a_n의 값은 0에 한없이 가까워지므로 이 수열은 0에 수렴한다.

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$

답 수렴, 0

0002 주어진 수열의 일반항을 a_n이라 하면

$a_n=(-1)^n\cdot 3$

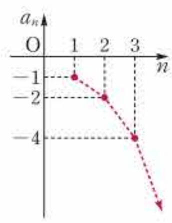


오른쪽 그림에서 n의 값이 한없이 커질 때, a_n의 값은 -3과 3이 교대로 되므로 이 수열은 발산(진동)한다.

답 발산

0003 주어진 수열의 일반항을 a_n이라 하면

$a_n=-2^{n-1}$

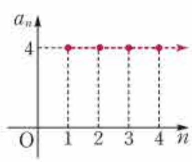


오른쪽 그림에서 n의 값이 한없이 커질 때, a_n의 값은 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지므로 이 수열은 음의 무한대로 발산한다.

답 발산

0004 주어진 수열의 일반항을 a_n이라 하면

$a_n=4$



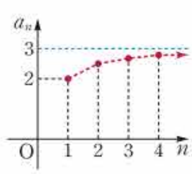
오른쪽 그림에서 n의 값이 한없이 커질 때, a_n의 값은 4이므로 이 수열은 4에 수렴한다.

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}4=4$

답 수렴, 4

0005 주어진 수열의 일반항을 a_n이라 하면

$a_n=3-\dfrac{1}{n}$



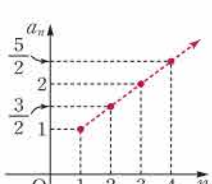
오른쪽 그림에서 n의 값이 한없이 커질 때, a_n의 값은 3에 한없이 가까워지므로 이 수열은 3에 수렴한다.

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\left(3-\dfrac{1}{n}\right)=3$

답 수렴, 3

0006 주어진 수열의 일반항을 a_n이라 하면

$a_n=\dfrac{n+1}{2}$

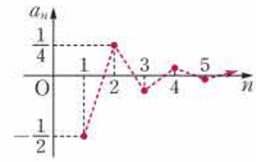


오른쪽 그림에서 n의 값이 한없이 커질 때, a_n의 값도 한없이 커지므로 이 수열은 양의 무한대로 발산한다.

답 발산

0007 주어진 수열의 일반항을 a_n이라 하면

$a_n=\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$



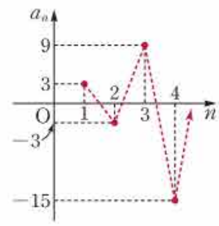
오른쪽 그림에서 n의 값이 한없이 커질 때, a_n의 값은 0에 한없이 가까워지므로 이 수열은 0에 수렴한다.

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\left\{\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n\right\}=0$

답 수렴, 0

0008 주어진 수열의 일반항을 a_n이라 하면

$a_n=1-(-2)^n$



오른쪽 그림에서 n의 값이 한없이 커질 때, a_n의 값은 양수와 음수가 교대로 되면서 그 절댓값이 한없이 커지므로 이 수열은 발산(진동)한다.

답 발산

0009 $\lim\limits_{n\to\infty}(-a_n+2)=-\lim\limits_{n\to\infty}a_n+\lim\limits_{n\to\infty}2$

$=-2+2=0$

답 0

0010 $\lim\limits_{n\to\infty}(4a_n-3b_n)=4\lim\limits_{n\to\infty}a_n-3\lim\limits_{n\to\infty}b_n$

$=4\cdot2-3\cdot(-3)=17$

답 17

0011 $\lim\limits_{n\to\infty}2a_nb_n=2\lim\limits_{n\to\infty}a_n\cdot\lim\limits_{n\to\infty}b_n$

$=2\cdot2\cdot(-3)=-12$

답 -12

0012 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2a_n}{3b_n}=\dfrac{2\lim\limits_{n\to\infty}a_n}{3\lim\limits_{n\to\infty}b_n}=\dfrac{2\cdot2}{3\cdot(-3)}=-\dfrac{4}{9}$

답 $-\dfrac{4}{9}$

0013 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n^2-7}{5b_n}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}a_n\cdot\lim\limits_{n\to\infty}a_n-\lim\limits_{n\to\infty}7}{5\lim\limits_{n\to\infty}b_n}$

$=\dfrac{2\cdot2-7}{5\cdot(-3)}=\dfrac{1}{5}$

답 $\dfrac{1}{5}$

0014 $\lim\limits_{n\to\infty}(3-8a_n)=\lim\limits_{n\to\infty}3-8\lim\limits_{n\to\infty}a_n$

$=3-8\alpha$

답 $3-8\alpha$

0015 $\lim\limits_{n\to\infty}(2a_n+4b_n)=2\lim\limits_{n\to\infty}a_n+4\lim\limits_{n\to\infty}b_n$

$=2\alpha+4\beta$

답 $2\alpha+4\beta$

0016 $\lim\limits_{n\to\infty}5a_n^2b_n^3=5\lim\limits_{n\to\infty}a_n\cdot\lim\limits_{n\to\infty}a_n\cdot\lim\limits_{n\to\infty}b_n\cdot\lim\limits_{n\to\infty}b_n\cdot\lim\limits_{n\to\infty}b_n$

$=5\alpha^2\beta^3$

답 $5\alpha^2\beta^3$

0017 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2a_n-5}{b_n^2}=\dfrac{2\lim\limits_{n\to\infty}a_n-\lim\limits_{n\to\infty}5}{\lim\limits_{n\to\infty}b_n\cdot\lim\limits_{n\to\infty}b_n}$

$=\dfrac{2\alpha-5}{\beta^2}$

답 $\dfrac{2\alpha-5}{\beta^2}$

0018 $\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{3}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}2+3\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}$
$=2+3\cdot0=2$ 답 2

0019 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5}{n}-\frac{4}{n^3}\right)=5\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}-4\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}$
$=5\cdot0-4\cdot0=0$ 답 0

0020 $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)\left(3-\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)\cdot\lim_{n\to\infty}\left(3-\frac{1}{n}\right)$
$=1\cdot3=3$ 답 3

0021 $\lim_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{n^2}}{1-\frac{1}{n}}=\dfrac{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)}=\frac{1}{1}=1$ 답 1

0022 $\lim_{n\to\infty}\dfrac{5-n}{2n-3}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{\frac{5}{n}-1}{2-\frac{3}{n}}=-\frac{1}{2}$ 답 수렴, $-\frac{1}{2}$

0023 $\lim_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n^2+2}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{2}{n^2}}=0$ 답 수렴, 0

0024 $\lim_{n\to\infty}\dfrac{n^3+6n^2-n}{n^2-1}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{n+6-\frac{1}{n}}{1-\frac{1}{n^2}}=\infty$ 답 발산

0025 $\lim_{n\to\infty}(n^2-5n+1)=\lim_{n\to\infty}n^2\left(1-\frac{5}{n}+\frac{1}{n^2}\right)$
$=\infty$ 답 발산

0026 $\lim_{n\to\infty}(3n-n^2)=\lim_{n\to\infty}n^2\left(\frac{3}{n}-1\right)=-\infty$ 답 발산

0027 $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$
$=\lim_{n\to\infty}\dfrac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$
$=\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=0$ 답 수렴, 0

0028 $\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n^2+4n}-n}$
$=\lim_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+4n}+n}{(\sqrt{n^2+4n}-n)(\sqrt{n^2+4n}+n)}$
$=\lim_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+4n}+n}{4n}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{1+\frac{4}{n}}+1}{4}$
$=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ 답 수렴, $\frac{1}{2}$

0029 $\lim_{n\to\infty}\dfrac{3n^2-2}{n^2+2}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{3-\frac{2}{n^2}}{1+\frac{2}{n^2}}=3,$
$\lim_{n\to\infty}\dfrac{3n^2}{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{3}{1+\frac{1}{n^2}}=3$
이므로 $\lim_{n\to\infty}a_n=3$ 답 3

0030 $-1\le\sin n\theta\le1$이므로
$-\frac{1}{n}\le\frac{\sin n\theta}{n}\le\frac{1}{n}$
$\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$이므로
$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin n\theta}{n}=0$ 답 0

0031 $-1\le\cos n\theta\le1$이므로
$-\frac{1}{3n}\le\frac{\cos n\theta}{3n}\le\frac{1}{3n}$
$\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{3n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3n}=0$이므로
$\lim_{n\to\infty}\frac{\cos n\theta}{3n}=0$ 답 0

0032 공비가 0.4이고, $-1<0.4<1$이므로 0에 수렴한다. 답 수렴

0033 공비가 -2이고, $-2<-1$이므로 발산한다. 답 발산

0034 공비가 $\sqrt{2.4}$이고, $\sqrt{2.4}>1$이므로 발산한다. 답 발산

0035 $\frac{(-2)^n}{5^n}=\left(-\frac{2}{5}\right)^n$에서 공비가 $-\frac{2}{5}$이고, $-1<-\frac{2}{5}<1$
이므로 0에 수렴한다. 답 수렴

0036 공비가 $-\frac{1}{3}$이고, $-1<-\frac{1}{3}<1$이므로 0에 수렴한다. 답 수렴

0037 공비가 $\sqrt{2}$이고, $\sqrt{2}>1$이므로 발산한다. 답 발산

0038 $\lim_{n\to\infty}\dfrac{2^{n+1}}{2^n-1}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{2}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}=2$ 답 수렴, 2

0039 $\lim_{n\to\infty}\dfrac{3^n-1}{4^n+1}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{\left(\frac{3}{4}\right)^n-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1+\left(\frac{1}{4}\right)^n}=0$ 답 수렴, 0

0040 $\lim_{n\to\infty}\dfrac{3^{2n}+5^n}{9^{n+1}-5^n}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{1+\left(\frac{5}{9}\right)^n}{9-\left(\frac{5}{9}\right)^n}=\frac{1}{9}$ 답 수렴, $\frac{1}{9}$

0041 $\lim_{n\to\infty}\frac{7^n+2^n}{2^n+5^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{7}{5}\right)^n+\left(\frac{2}{5}\right)^n}{\left(\frac{2}{5}\right)^n+1}=\infty$ 답 발산

0042 공비가 $-2r$이므로 주어진 등비수열이 수렴하려면

$-1<-2r\le 1$ $\quad\therefore -\frac{1}{2}\le r<\frac{1}{2}$ 답 $-\frac{1}{2}\le r<\frac{1}{2}$

0043 공비가 $\frac{r}{3}$이므로 주어진 등비수열이 수렴하려면

$-1<\frac{r}{3}\le 1$ $\quad\therefore -3<r\le 3$ 답 $-3<r\le 3$

유형 01 수열의 수렴과 발산

본책 12쪽

수열 $\{a_n\}$의 수렴, 발산은 일반항 a_n에 $n=1, 2, 3, \cdots$을 차례대로 대입한 후 그 값이 어떤 일정한 값에 가까워지는지 아닌지 조사하여 판정한다.
① 일정한 값에 가까워지면 ➡ 수렴
② 한없이 커지거나 한없이 작아지거나 진동하면 ➡ 발산

0044 ① n의 값이 한없이 커지면 $4n-1$의 값도 한없이 커지므로 주어진 수열은 양의 무한대로 발산한다.

② n의 값이 한없이 커지면 $\frac{(-1)^n}{5}$의 값은 $-\frac{1}{5}$과 $\frac{1}{5}$이 교대로 되므로 주어진 수열은 발산(진동)한다.

③ 홀수 번째 항 $-2, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{5}, \cdots$는 0에 수렴하고, 짝수 번째 항 $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots$도 0에 수렴하므로 주어진 수열은 0에 수렴한다.

④ n의 값이 한없이 커지면 $\left(-\frac{3}{2}\right)^n$의 값은 음수와 양수가 교대로 되면서 그 절댓값이 한없이 커지므로 주어진 수열은 발산(진동)한다.

⑤ 주어진 수열에서 각 항의 분모를 유리화하면

$\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{4}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{8}}{2}, \cdots, \frac{\sqrt{2n}}{2}, \cdots$

n의 값이 한없이 커지면 $\frac{\sqrt{2n}}{2}$의 값도 한없이 커지므로 주어진 수열은 양의 무한대로 발산한다.

답 ③

SSEN 특강 부호가 교대로 나타나는 수열의 극한값

수열 $\{a_n\}$에서 a_n의 값의 부호가 양과 음(또는 음과 양)이 교대로 나타날 때, 자연수 k에 대하여

$\lim_{k\to\infty}a_{2k-1}=\lim_{k\to\infty}a_{2k}=\alpha$ (α는 실수)

이면 수열 $\{a_n\}$은 수렴하고 극한값은 α이다.

0045 수열 $\left\{\frac{5}{6n+1}\right\}$에서 n의 값이 한없이 커지면 $\frac{5}{6n+1}$의 값은 0에 한없이 가까워지므로 이 수열은 0에 수렴한다.

$\therefore a=0$ ··· ❶

수열 $\left\{\frac{2n+(-1)^n}{n}\right\}$에서 $\frac{2n+(-1)^n}{n}=2+\frac{(-1)^n}{n}$이므로

$n=1, 2, 3, 4, \cdots$를 차례대로 대입하면

$2-1,\ 2+\frac{1}{2},\ 2-\frac{1}{3},\ 2+\frac{1}{4},\ \cdots$ 홀수 번째 항은 2에 수렴하고, 짝수 번째 항도 2에 수렴한다.

따라서 n의 값이 한없이 커지면 $\frac{2n+(-1)^n}{n}$의 값은 2에 한없이 가까워지므로 수열 $\left\{\frac{2n+(-1)^n}{n}\right\}$은 2에 수렴한다.

$\therefore b=2$ ··· ❷

$\therefore a+b=2$ ··· ❸

답 2

채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ b의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	10 %

0046 ㄱ. n의 값이 한없이 커지면 $\frac{3n}{n+1}$의 값은 3에 한없이 가까워지므로 수열 $\left\{\frac{3n}{n+1}\right\}$은 3에 수렴한다.

ㄴ. $\frac{1+(-1)^n}{2}$에 $n=1, 2, 3, 4, \cdots$를 차례대로 대입하면

$0, 1, 0, 1, \cdots$

따라서 n의 값이 한없이 커지면 $\frac{1+(-1)^n}{2}$의 값은 0과 1이 교대로 되므로 수열 $\left\{\frac{1+(-1)^n}{2}\right\}$은 발산(진동)한다.

ㄷ. $\cos n\pi$에 $n=1, 2, 3, 4, \cdots$를 차례대로 대입하면

$-1, 1, -1, 1, \cdots$

따라서 n의 값이 한없이 커지면 $\cos n\pi$의 값은 -1과 1이 교대로 되므로 수열 $\{\cos n\pi\}$는 발산(진동)한다.

ㄹ. $\log\frac{1}{n}=-\log n$에 $n=1, 2, 3, 4, \cdots$를 차례대로 대입하면

$0, -\log 2, -\log 3, -\log 4, \cdots, -\log n, \cdots$

따라서 n의 값이 한없이 커지면 $\log\frac{1}{n}$의 값은 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지므로 수열 $\left\{\log\frac{1}{n}\right\}$은 음의 무한대로 발산한다.

이상에서 수렴하는 수열은 ㄱ뿐이다. 답 ①

유형 02 수열의 극한에 대한 기본 성질

본책 12쪽

$\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$, $\lim_{n\to\infty}b_n=\beta$ (α, β는 실수)이면 상수 p, q, r에 대하여

$$\lim_{n\to\infty}\frac{ra_nb_n}{pa_n+qb_n}=\frac{r\lim_{n\to\infty}a_n\cdot\lim_{n\to\infty}b_n}{p\lim_{n\to\infty}a_n+q\lim_{n\to\infty}b_n}=\frac{r\alpha\beta}{p\alpha+q\beta}$$

(단, $pa_n+qb_n\neq0$, $p\alpha+q\beta\neq0$)

0047 $\lim_{n\to\infty}\frac{2a_n-b_n}{a_nb_n+2}=\frac{2\lim_{n\to\infty}a_n-\lim_{n\to\infty}b_n}{\lim_{n\to\infty}a_n\cdot\lim_{n\to\infty}b_n+2}$

$=\frac{2\cdot(-3)-2}{-3\cdot2+2}=2$ 답 2

0048 $\lim_{n\to\infty}(a_n-1)=2$에서 $\lim_{n\to\infty}a_n=3$

$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n(a_n-2)=\lim_{n\to\infty}a_n\cdot\lim_{n\to\infty}(a_n-2)$

$=3\cdot(3-2)=3$

답 ③

0049 $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left(7-\frac{2}{n^2}\right)=7$ ❶

$\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{(n-1)(n+1)}+5\right\}=5$ ❷

$\therefore \lim_{n\to\infty}(a_n-3)(b_n+2)=\lim_{n\to\infty}(a_n-3)\cdot\lim_{n\to\infty}(b_n+2)$

$=(7-3)\cdot(5+2)$

$=28$ ❸

답 28

채점 기준	비율
❶ $\lim_{n\to\infty}a_n$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷ $\lim_{n\to\infty}b_n$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ $\lim_{n\to\infty}(a_n-3)(b_n+2)$의 값을 구할 수 있다.	40 %

0050 $\lim_{n\to\infty}(a_n^2-a_nb_n+b_n^2)$

$=\lim_{n\to\infty}\{(a_n+b_n)^2-3a_nb_n\}$

$=\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)\cdot\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)-3\lim_{n\to\infty}a_nb_n$

$=5\cdot5-3\cdot3=16$

답 16

유형 03 $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\alpha$의 이용 (본책 13쪽)

$\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$ (α는 실수)이면

$\lim_{n\to\infty}a_{n-1}=\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\lim_{n\to\infty}a_{n+2}=\cdots=\lim_{n\to\infty}a_{2n}=\cdots=\alpha$

0051 수열 $\{a_n\}$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$ (α는 실수)라 하면

$\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\lim_{n\to\infty}a_{n+2}=\alpha$

$\lim_{n\to\infty}\frac{2a_{n+2}+3}{a_{n+1}-3}=-4$에서 $\frac{2\alpha+3}{\alpha-3}=-4$

$2\alpha+3=-4\alpha+12,\quad 6\alpha=9$

$\therefore \alpha=\frac{3}{2}$

답 ⑤

0052 수열 $\{a_n\}$이 0이 아닌 실수에 수렴하므로

$\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$ ($\alpha\neq0$)라 하면 $\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\alpha$

$\frac{1}{a_{n+1}}=2-a_n$에서 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}(2-a_n)$이므로

$\frac{1}{\alpha}=2-\alpha,\quad \alpha^2-2\alpha+1=0$

$(\alpha-1)^2=0\quad \therefore \alpha=1$

답 ⑤

0053 이차방정식 $x^2-a_nx+a_{2n}+3=0$이 중근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(-a_n)^2-4(a_{2n}+3)=0$

$\therefore a_n^2-4a_{2n}-12=0$ …… ㉠ ❶

한편 수열 $\{a_n\}$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$ (α는 실수)라 하면

$\lim_{n\to\infty}a_{2n}=\alpha$

㉠에서 $\lim_{n\to\infty}(a_n^2-4a_{2n}-12)=0$이므로

$\alpha^2-4\alpha-12=0,\quad (\alpha+2)(\alpha-6)=0$

$\therefore \alpha=-2$ 또는 $\alpha=6$

이때 $a_n>0$이므로 $\alpha=6$ ❷

$\therefore \lim_{n\to\infty}\sqrt{a_n}=\sqrt{6}$ ❸

답 $\sqrt{6}$

채점 기준	비율
❶ 이차방정식의 판별식을 이용하여 a_n에 대한 식을 세울 수 있다.	30 %
❷ $\lim_{n\to\infty}a_n$의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ $\lim_{n\to\infty}\sqrt{a_n}$의 값을 구할 수 있다.	20 %

유형 04 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한 (본책 13쪽)

(i) 분모의 최고차항으로 분자, 분모를 각각 나눈다.

(ii) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$임을 이용하여 극한값을 구한다.

0054 ① $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-10}{n(n-3)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-10}{n^2-3n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{10}{n^2}}{1-\frac{3}{n}}=1$

② $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2n}}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{\frac{2}{n}}}{1+\frac{1}{n}}=0$

③ $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+5n}}{5n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{5}{n}}}{5}=\frac{1}{5}$

④ $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{16n+4}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{16+\frac{4}{n}}}=\frac{1}{4}$

⑤ $\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2-(n+3)^2}{2n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{-4n-8}{2n+1}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{-4-\frac{8}{n}}{2+\frac{1}{n}}=-2$

답 ④

0055 $a_n+a_{n+1}=n^2$ …… ㉠

$a_{n+1}+a_{n+2}=(n+1)^2$ …… ㉡

㉡−㉠을 하면 $a_{n+2}-a_n=(n+1)^2-n^2=2n+1$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+2}-a_n}{n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n+2}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}}=2$

답 ⑤

0056 이차방정식 $x^2+3nx+1=0$의 두 근이 α_n, β_n이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha_n+\beta_n=-3n,\ \alpha_n\beta_n=1$

$\therefore\ \alpha_n{}^2+\beta_n{}^2=(\alpha_n+\beta_n)^2-2\alpha_n\beta_n$

$=(-3n)^2-2\cdot1=9n^2-2$ ⋯ ❶

$f(n)=n^2+3n\cdot n+1=4n^2+1$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha_n{}^2+\beta_n{}^2}{f(n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{9n^2-2}{4n^2+1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{9-\frac{2}{n^2}}{4+\frac{1}{n^2}}=\frac{9}{4}$$ ⋯ ❷

답 $\frac{9}{4}$

채점 기준	비율
❶ $\alpha_n{}^2+\beta_n{}^2$을 구할 수 있다.	50 %
❷ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\alpha_n{}^2+\beta_n{}^2}{f(n)}$의 값을 구할 수 있다.	50 %

0057 $n\geq2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}=2n^2-n-\{2(n-1)^2-(n-1)\}$

$=4n-3$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{a_n\overbrace{a_{n+1}}^{a_{n+1}=4(n+1)-3=4n+1}}{S_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(4n-3)(4n+1)}{2n^2-n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{16n^2-8n-3}{2n^2-n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{16-\frac{8}{n}-\frac{3}{n^2}}{2-\frac{1}{n}}=8$$

답 8

유형 05 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한; 합 또는 곱

본책 14쪽

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$에서 a_n이 합 또는 곱의 꼴로 주어진 경우 다음과 같은 순서로 극한값을 구한다.

(i) 합 또는 곱으로 된 부분을 간단히 정리하여 n에 대한 식으로 나타낸다.

(ii) $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한값을 구하는 방법을 이용하여 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$의 값을 구한다.

0058 $1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\cdots+n}{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2(n^2+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n}{2n^2+2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{2+\frac{2}{n^2}}=\frac{1}{2}$$

답 ①

SSEN 특강 자연수의 거듭제곱의 합

① $\sum\limits_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$

② $\sum\limits_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

③ $\sum\limits_{k=1}^{n}k^3=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

0059 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n+1}{n}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{2}=\frac{1}{2}$$

답 $\frac{1}{2}$

0060 $1+3+5+\cdots+(2n-1)=\sum\limits_{k=1}^{n}(2k-1)$

$$=2\cdot\frac{n(n+1)}{2}-n$$

$$=n^2$$

$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\sum\limits_{k=1}^{n}k^2$

$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

따라서 $f(n)=\dfrac{n^2}{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}=\dfrac{6n}{2n^2+3n+1}$이므로

$$\lim_{n\to\infty}nf(n)=\lim_{n\to\infty}\frac{6n^2}{2n^2+3n+1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{6}{2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}=3$$

답 ③

0061 $a_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{n}{n+1}$$

$$=\frac{1}{n+1}$$ ⋯ ❶

$b_n=1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3$

$$=\sum_{k=1}^{n}k^3=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$$

$$=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$ ⋯ ❷

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}a_n{}^4b_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)^4}\cdot\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{4(n+1)^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}=\frac{1}{4}$$ ⋯ ❸

답 $\frac{1}{4}$

채점 기준	비율
❶ a_n을 간단히 할 수 있다.	30 %
❷ b_n을 간단히 할 수 있다.	20 %
❸ $\lim\limits_{n\to\infty}a_n{}^4b_n$의 값을 구할 수 있다.	50 %

유형 06 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한; 로그

본책 14쪽

일반적으로 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$ $(a_n>0,\ \alpha>0)$일 때,

$\lim_{n\to\infty} \log a_n=\log(\lim_{n\to\infty} a_n)=\log \alpha$

가 성립함을 이용하여 극한값을 구한다.

0062 $\log_2(2n+1)+\log_2(2n-1)-2\log_2(n+1)$

$$=\log_2\frac{(2n+1)(2n-1)}{(n+1)^2}$$

$$=\log_2\frac{4n^2-1}{n^2+2n+1}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\{\log_2(2n+1)+\log_2(2n-1)-2\log_2(n+1)\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\log_2\frac{4n^2-1}{n^2+2n+1}=\log_2\left(\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2-1}{n^2+2n+1}\right)$$

$$=\log_2\left(\lim_{n\to\infty}\frac{4-\frac{1}{n^2}}{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}\right)$$

$$=\log_2 4=2$$

답 2

SSEN 특강 로그의 성질

$a>0,\ a\neq1,\ M>0,\ N>0$일 때

① $\log_a 1=0,\ \log_a a=1$

② $\log_a MN=\log_a M+\log_a N$

③ $\log_a \frac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$

④ $\log_a M^k=k\log_a M$ (단, k는 실수)

0063 $\lim_{n\to\infty}(\log_4\sqrt{n^2+n+2}-\log_4\sqrt{2n^2-n+1})$

$$=\lim_{n\to\infty}\log_4\frac{\sqrt{n^2+n+2}}{\sqrt{2n^2-n+1}}=\log_4\left(\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+n+2}}{\sqrt{2n^2-n+1}}\right)$$

$$=\log_4\left(\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}}{\sqrt{2-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}}\right)$$

$$=\log_4\frac{1}{\sqrt{2}}=\log_{2^2}2^{-\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4}$$

답 ④

0064 $a_n=\log_2\frac{n+2}{n}$이므로

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$

$$=\log_2 3+\log_2\frac{4}{2}+\log_2\frac{5}{3}+\log_2\frac{6}{4}$$

$$+\cdots+\log_2\frac{n+1}{n-1}+\log_2\frac{n+2}{n}$$

$$=\log_2\left(3\cdot\frac{4}{2}\cdot\frac{5}{3}\cdot\frac{6}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{n+1}{n-1}\cdot\frac{n+2}{n}\right)$$

$$=\log_2\frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

$$\therefore 2^{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}=2^{\log_2\frac{(n+1)(n+2)}{2}}=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{2^{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2}{(n+1)(n+2)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2}{n^2+3n+2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}$$

$$=2$$

답 ④

유형 07 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한; 미정계수의 결정

본책 15쪽

$\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$, $\lim_{n\to\infty} b_n=\infty$이고 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\alpha$ (α는 실수)일 때

① $\alpha=0$

➡ (a_n의 차수)<(b_n의 차수)

② $\alpha\neq0$

➡ (a_n의 차수)=(b_n의 차수)이고, 최고차항의 계수의 비가 α이다.

0065 $a\neq0$이면 $\lim_{n\to\infty}\frac{an^2+bn+2}{3n-2}=\infty$ (또는 $-\infty$)이므로

$a=0$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{an^2+bn+2}{3n-2}=\lim_{n\to\infty}\frac{bn+2}{3n-2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{b+\frac{2}{n}}{3-\frac{2}{n}}$$

$$=\frac{b}{3}$$

따라서 $\frac{b}{3}=3$이므로 $b=9$

$\therefore a+b=9$

답 ②

0066 $\lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)(2n+1)}{an^2+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-n-1}{an^2+3}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2-\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}{a+\frac{3}{n^2}}$$

$$=\frac{2}{a}$$

따라서 $\frac{2}{a}=-\frac{1}{6}$이므로 $a=-12$

답 -12

0067 $a\neq0$이면 $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{25n^2-5n+1}}{an^2+10n+3}=0$이고 $b\neq0$이므로

$a=0$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{25n^2-5n+1}}{an^2+10n+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{25n^2-5n+1}}{10n+3}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{25-\frac{5}{n}+\frac{1}{n^2}}}{10+\frac{3}{n}}$$

$$=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$$

따라서 $b=\frac{1}{2}$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{an^2-4n+1}{\sqrt{bn^2+3n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{-4n+1}{\sqrt{\frac{1}{2}n^2+3n}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-4+\frac{1}{n}}{\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{3}{n}}}$$
$$=-4\sqrt{2}$$

답 $-4\sqrt{2}$

0068 $a+3b\neq 0$이면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(a+3b)n^2-(a+b)n+2}{6n+b^2}=\infty\ (\text{또는 } -\infty)$$

이므로 $a+3b=0$

$\therefore a=-3b$ ...... ㉠ ⋯ ❶

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{(a+3b)n^2-(a+b)n+2}{6n+b^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2bn+2}{6n+b^2}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2b+\frac{2}{n}}{6+\frac{b^2}{n}}$$
$$=\frac{b}{3}$$

따라서 $\frac{b}{3}=1$이므로 $b=3$

$b=3$을 ㉠에 대입하면 $a=-9$ ⋯ ❷

$\therefore ab=-27$ ⋯ ❸

답 -27

채점 기준	비율
❶ a를 b에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30 %
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	60 %
❸ ab의 값을 구할 수 있다.	10 %

유형 08~09 $\infty-\infty$ 꼴의 극한

본책 15, 16쪽

① 분자에만 근호가 있는 경우

$$\Rightarrow \sqrt{f(n)}-\sqrt{g(n)}=\frac{f(n)-g(n)}{\sqrt{f(n)}+\sqrt{g(n)}}$$

② 분모에만 근호가 있는 경우

$$\Rightarrow \frac{h(n)}{\sqrt{f(n)}-\sqrt{g(n)}}=\frac{h(n)\{\sqrt{f(n)}+\sqrt{g(n)}\}}{f(n)-g(n)}$$

③ 분자, 분모에 모두 근호가 있는 경우

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{h(n)}-\sqrt{k(n)}}{\sqrt{f(n)}-\sqrt{g(n)}}=\frac{\{h(n)-k(n)\}\{\sqrt{f(n)}+\sqrt{g(n)}\}}{\{f(n)-g(n)\}\{\sqrt{h(n)}+\sqrt{k(n)}\}}$$

0069 $\lim_{n\to\infty}(2n-\sqrt{4n^2-n})$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n-\sqrt{4n^2-n})(2n+\sqrt{4n^2-n})}{2n+\sqrt{4n^2-n}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+\sqrt{4n^2-n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2+\sqrt{4-\frac{1}{n}}}$$
$$=\frac{1}{2+2}=\frac{1}{4}$$

답 ④

0070 $\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}}$$
$$=\frac{2}{1+1}=1$$

답 ⑤

0071 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 2, 공차가 4이므로

$$S_n=\frac{n\{2\cdot 2+(n-1)\cdot 4\}}{2}=2n^2$$
$$\therefore \lim_{n\to\infty}(\sqrt{S_{n+1}+1}-\sqrt{S_n})$$
$$=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{2(n+1)^2+1}-\sqrt{2n^2})$$
$$=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{2n^2+4n+3}-\sqrt{2n^2})$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{2n^2+4n+3}-\sqrt{2n^2})(\sqrt{2n^2+4n+3}+\sqrt{2n^2})}{\sqrt{2n^2+4n+3}+\sqrt{2n^2}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4n+3}{\sqrt{2n^2+4n+3}+\sqrt{2n^2}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4+\frac{3}{n}}{\sqrt{2+\frac{4}{n}+\frac{3}{n^2}}+\sqrt{2}}$$
$$=\frac{4}{\sqrt{2}+\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

답 $\sqrt{2}$

0072 $\sqrt{(3n)^2}<\sqrt{9n^2+3n+1}<\sqrt{(3n+1)^2}$이므로

$3n<\sqrt{9n^2+3n+1}<3n+1$

$\therefore a_n=3n$ ⋯ ❶

$$\therefore \lim_{n\to\infty}(\sqrt{9n^2+3n+1}-a_n)$$
$$=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{9n^2+3n+1}-3n)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{9n^2+3n+1}-3n)(\sqrt{9n^2+3n+1}+3n)}{\sqrt{9n^2+3n+1}+3n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3n+1}{\sqrt{9n^2+3n+1}+3n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{1}{n}}{\sqrt{9+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}+3}$$
$$=\frac{3}{3+3}$$
$$=\frac{1}{2}$$ ⋯ ❷

답 $\frac{1}{2}$

채점 기준	비율
❶ a_n을 구할 수 있다.	40 %
❷ $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{9n^2+3n+1}-a_n)$의 값을 구할 수 있다.	60 %

0073 $a_{2k}=4\cdot 2k-3=8k-3$이므로

$$a_2+a_4+\cdots+a_{2n}=\sum_{k=1}^{n}a_{2k}=\sum_{k=1}^{n}(8k-3)$$
$$=8\cdot\frac{n(n+1)}{2}-3n$$
$$=4n^2+n$$

또 $a_{2k-1}=4(2k-1)-3=8k-7$이므로

$$a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1}=\sum_{k=1}^{n}a_{2k-1}=\sum_{k=1}^{n}(8k-7)$$
$$=8\cdot\frac{n(n+1)}{2}-7n$$
$$=4n^2-3n$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}(\sqrt{a_2+a_4+\cdots+a_{2n}}-\sqrt{a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1}})$$
$$=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{4n^2+n}-\sqrt{4n^2-3n})$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{4n^2+n}-\sqrt{4n^2-3n})(\sqrt{4n^2+n}+\sqrt{4n^2-3n})}{\sqrt{4n^2+n}+\sqrt{4n^2-3n}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4n}{\sqrt{4n^2+n}+\sqrt{4n^2-3n}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4}{\sqrt{4+\frac{1}{n}}+\sqrt{4-\frac{3}{n}}}$$
$$=\frac{4}{2+2}=1$$

답 ③

0074 $$\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{n^2+3n}-n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2(\sqrt{n^2+3n}+n)}{(\sqrt{n^2+3n}-n)(\sqrt{n^2+3n}+n)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2(\sqrt{n^2+3n}+n)}{3n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2\left(\sqrt{1+\frac{3}{n}}+1\right)}{3}$$
$$=\frac{2(1+1)}{3}=\frac{4}{3}$$

답 $\frac{4}{3}$

0075 $$\lim_{n\to\infty}\frac{5}{\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2+1}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{5(\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2+1})}{(\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2+1})(\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2+1})}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{5(\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2+1})}{2n-1}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{5\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}\right)}{2-\frac{1}{n}}$$
$$=\frac{5(1+1)}{2}=5$$

답 ④

0076 주어진 수열의 일반항을 a_n이라 하면

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}-n}=\frac{1}{\sqrt{n^2+n}-n}$$ ··· ❶

$$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+n}-n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+n}+n}{(\sqrt{n^2+n}-n)(\sqrt{n^2+n}+n)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+n}+n}{n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}{1}$$
$$=\frac{1+1}{1}=2$$ ··· ❷

답 2

채점 기준	비율
❶ 일반항을 구할 수 있다.	30 %
❷ 극한값을 구할 수 있다.	70 %

0077 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha_n+\beta_n=1$, $\alpha_n\beta_n=3n-\sqrt{9n^2+2n}$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\alpha_n}+\frac{1}{\beta_n}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha_n+\beta_n}{\alpha_n\beta_n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3n-\sqrt{9n^2+2n}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3n+\sqrt{9n^2+2n}}{(3n-\sqrt{9n^2+2n})(3n+\sqrt{9n^2+2n})}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3n+\sqrt{9n^2+2n}}{-2n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\sqrt{9+\frac{2}{n}}}{-2}$$
$$=\frac{3+3}{-2}=-3$$

답 ①

유형 10 $\infty-\infty$ 꼴의 극한; 미정계수의 결정 본책 16쪽

(i) 무리식을 유리화하여 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴로 변형한다.

(ii) (i)의 식이 0이 아닌 실수 α로 수렴하면 분자와 분모의 차수가 같고, 최고차항의 계수의 비가 α임을 이용한다.

0078 $a\le 0$이면 $\lim_{n\to\infty}\{\sqrt{n^2+4n+3}-(an+b)\}=\infty$이므로

$a>0$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\{\sqrt{n^2+4n+3}-(an+b)\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\{\sqrt{n^2+4n+3}-(an+b)\}\{\sqrt{n^2+4n+3}+(an+b)\}}{\sqrt{n^2+4n+3}+(an+b)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(1-a^2)n^2+2(2-ab)n+3-b^2}{\sqrt{n^2+4n+3}+an+b}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(1-a^2)n+2(2-ab)+\frac{3-b^2}{n}}{\sqrt{1+\frac{4}{n}+\frac{3}{n^2}}+a+\frac{b}{n}}$$

이 식의 극한값이 4이므로

$$1-a^2=0,\ \frac{2(2-ab)}{1+a}=4$$

두 식을 연립하여 풀면

$a=1,\ b=-2$ ($\because a>0$)

$\therefore a+b=-1$

답 ②

0079 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{9n^2+an}-3n+a}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{9n^2+an}+(3n-a)}{\{\sqrt{9n^2+an}-(3n-a)\}\{\sqrt{9n^2+an}+(3n-a)\}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{9n^2+an}+3n-a}{7an-a^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{9+\frac{a}{n}}+3-\frac{a}{n}}{7a-\frac{a^2}{n}}$$

$$=\frac{3+3}{7a}=\frac{6}{7a}$$

따라서 $\frac{6}{7a}=\frac{1}{7}$이므로

$a=6$

답 6

0080 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\sqrt{a^2n+b^2n+4n^2}-2n)$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{a^2n+b^2n+4n^2}-2n)(\sqrt{a^2n+b^2n+4n^2}+2n)}{\sqrt{a^2n+b^2n+4n^2}+2n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(a^2+b^2)n}{\sqrt{a^2n+b^2n+4n^2}+2n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{a^2+b^2}{\sqrt{\frac{a^2}{n}+\frac{b^2}{n}+4}+2}$$

$$=\frac{a^2+b^2}{2+2}=\frac{a^2+b^2}{4}$$

따라서 $\frac{a^2+b^2}{4}=2$이므로

$a^2+b^2=8$

답 8

0081 $k\geq0$이면 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$이므로 $k<0$ ⋯ ❶

$\therefore \displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$

$$=\lim_{n\to\infty}\{\sqrt{(n-2)(2n+1)}+kn\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\{\sqrt{(n-2)(2n+1)}+kn\}\{\sqrt{(n-2)(2n+1)}-kn\}}{\sqrt{(n-2)(2n+1)}-kn}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(2-k^2)n^2-3n-2}{\sqrt{2n^2-3n-2}-kn}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(2-k^2)n-3-\frac{2}{n}}{\sqrt{2-\frac{3}{n}-\frac{2}{n^2}}-k}$$

이때 수열 $\{a_n\}$이 수렴하므로

$2-k^2=0,\quad k^2=2$

$\therefore k=-\sqrt{2}$ ($\because k<0$) ⋯ ❷

$$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{-3-\frac{2}{n}}{\sqrt{2-\frac{3}{n}-\frac{2}{n^2}}+\sqrt{2}}$$

$$=\frac{-3}{\sqrt{2}+\sqrt{2}}=-\frac{3\sqrt{2}}{4}$$ ⋯ ❸

답 $-\frac{3\sqrt{2}}{4}$

채점 기준	비율
❶ $k<0$임을 알 수 있다.	20 %
❷ k의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$의 값을 구할 수 있다.	30 %

유형 11 일반항 a_n을 포함한 식의 극한값

본책 17쪽

상수 $p,\ q,\ r,\ s$에 대하여 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{ra_n+s}{pa_n+q}=\alpha$ (α는 실수)일 때, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$의 값은 다음과 같은 순서로 구한다. (단, $p\neq0,\ r\neq0$)

(i) $\frac{ra_n+s}{pa_n+q}=b_n$으로 놓고, a_n을 b_n에 대한 식으로 나타낸다.

(ii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}b_n=\alpha$임을 이용하여 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$의 값을 구한다.

0082 $\frac{3a_n-2}{2a_n+1}=b_n$으로 놓으면

$3a_n-2=2a_nb_n+b_n,\quad (3-2b_n)a_n=b_n+2$

$\therefore a_n=\frac{b_n+2}{3-2b_n}$

이때 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}b_n=3$이므로

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{b_n+2}{3-2b_n}=\frac{3+2}{3-2\cdot3}=-\frac{5}{3}$$

답 ①

다른 풀이 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$ (α는 실수)로 놓으면

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3a_n-2}{2a_n+1}=3$에서 $\quad\frac{3\alpha-2}{2\alpha+1}=3$

$3\alpha-2=6\alpha+3,\quad 3\alpha=-5\quad \therefore \alpha=-\frac{5}{3}$

$\therefore \displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=-\frac{5}{3}$

0083 $(n+3)a_n=b_n$으로 놓으면 $\quad a_n=\frac{b_n}{n+3}$

이때 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}b_n=4$이므로

$$\lim_{n\to\infty}(2n+5)a_n=\lim_{n\to\infty}\left\{(2n+5)\cdot\frac{b_n}{n+3}\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+5}{n+3}\cdot\lim_{n\to\infty}b_n$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{5}{n}}{1+\frac{3}{n}}\cdot\lim_{n\to\infty}b_n$$

$$=2\cdot4=8$$

답 ⑤

0084 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_n-2)=5$에서 $\quad\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=7$

$3a_n+b_n=c_n$으로 놓으면 $\quad b_n=-3a_n+c_n$

이때 $\lim_{n\to\infty} c_n=7$이므로

$$\lim_{n\to\infty} b_n=\lim_{n\to\infty}(-3a_n+c_n)=-3\cdot7+7=-14$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_n-b_n}{a_n+b_n}=\frac{7-(-14)}{7+(-14)}=-3$$

답 -3

0085 $(n+1)a_n=c_n$으로 놓으면 $\quad a_n=\frac{c_n}{n+1}$

$(n^3+1)b_n=d_n$으로 놓으면 $\quad b_n=\frac{d_n}{n^3+1}$ ⋯ ❶

이때 $\lim_{n\to\infty} c_n=4$, $\lim_{n\to\infty} d_n=6$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(4n-1)^2b_n}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(4n-1)^2d_n}{n^3+1}}{\frac{c_n}{n+1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(16n^2-8n+1)(n+1)}{(n+1)(n^2-n+1)}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{d_n}{c_n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{16n^2-8n+1}{n^2-n+1}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{d_n}{c_n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{16-\frac{8}{n}+\frac{1}{n^2}}{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{d_n}{c_n}$$

$$=16\cdot\frac{6}{4}=24$$ ⋯ ❷

답 24

채점 기준	비율
❶ a_n, b_n을 n에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30 %
❷ $\lim_{n\to\infty}\frac{(4n-1)^2b_n}{a_n}$의 값을 구할 수 있다.	70 %

0086 $a_n-b_n=c_n$으로 놓으면 $\quad b_n=a_n-c_n$

$\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$, $\lim_{n\to\infty} c_n=-2$이므로 $\quad \lim_{n\to\infty}\frac{c_n}{a_n}=0$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{2a_n+b_n}{a_n-2b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2a_n+(a_n-c_n)}{a_n-2(a_n-c_n)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3a_n-c_n}{-a_n+2c_n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3-\frac{c_n}{a_n}}{-1+2\cdot\frac{c_n}{a_n}}$$

$$=-3$$

답 -3

다른 풀이 $\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$일 때,

$$\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\lim_{n\to\infty} a_n\left(1-\frac{b_n}{a_n}\right)=-2$$

이므로 $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{b_n}{a_n}\right)=0$이어야 한다.

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=1$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{2a_n+b_n}{a_n-2b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{b_n}{a_n}}{1-2\cdot\frac{b_n}{a_n}}=\frac{2+1}{1-2}=-3$$

참고 $\lim_{n\to\infty} p_n=\infty$일 때, $\lim_{n\to\infty} p_nq_n$이 수렴하려면 $\lim_{n\to\infty} q_n=0$이어야 한다.

유형 12 수열의 극한의 대소 관계

본책 17쪽

세 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n=\beta$ (α, β는 실수)일 때, 다음이 성립한다.

➡ 모든 자연수 n에 대하여 $a_n\le c_n\le b_n$이고 $\alpha=\beta$이면

$$\lim_{n\to\infty} c_n=\alpha$$

0087 $\sqrt{16n^2-n}<(n+1)a_n<\sqrt{16n^2+3n}$에서

$$\frac{\sqrt{16n^2-n}}{n+1}<a_n<\frac{\sqrt{16n^2+3n}}{n+1}$$

이때 $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{16n^2-n}}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{16n^2+3n}}{n+1}=4$이므로

$$\lim_{n\to\infty} a_n=4$$

답 ①

0088 $2n-100<a_n<2n+100$에서

$$2-\frac{100}{n}<\frac{a_n}{n}<2+\frac{100}{n}$$

이때 $\lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{100}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{100}{n}\right)=2$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=2$$

답 2

0089 $2n<a_n<2n+1$에서

$$\sum_{k=1}^{n}2k<\sum_{k=1}^{n}a_k<\sum_{k=1}^{n}(2k+1)$$

$$2\cdot\frac{n(n+1)}{2}<\sum_{k=1}^{n}a_k<2\cdot\frac{n(n+1)}{2}+n$$

$$n^2+n<\sum_{k=1}^{n}a_k<n^2+2n$$

$$\therefore \frac{n^2+n}{6n^2+10}<\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}{6n^2+10}<\frac{n^2+2n}{6n^2+10}$$ ⋯ ❶

이때 $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n}{6n^2+10}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n}{6n^2+10}=\frac{1}{6}$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}{6n^2+10}=\frac{1}{6}$$ ⋯ ❷

답 $\frac{1}{6}$

채점 기준	비율
❶ $\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}{6n^2+10}$에 대한 부등식을 세울 수 있다.	50 %
❷ $\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}{6n^2+10}$의 값을 구할 수 있다.	50 %

0090 이차방정식 $x^2-(n-1)x+a_n=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$$D_1=\{-(n-1)\}^2-4a_n<0, \quad 4a_n>n^2-2n+1$$

$$\therefore a_n>\frac{n^2-2n+1}{4}$$

이차방정식 $x^2-nx+a_n=0$의 판별식을 D_2라 하면

$$D_2=(-n)^2-4a_n\ge0 \quad \therefore a_n\le\frac{n^2}{4}$$

따라서 $\frac{n^2-2n+1}{4}<a_n\le\frac{n^2}{4}$이므로

$$\frac{n^2-2n+1}{4(2n^2+n)}<\frac{a_n}{2n^2+n}\le\frac{n^2}{4(2n^2+n)}$$

이때 $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-2n+1}{8n^2+4n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{8n^2+4n}=\frac{1}{8}$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{2n^2+n}=\frac{1}{8}$$ 답 ②

유형 13 수열의 극한의 대소 관계 ; 삼각함수를 포함한 수열

본책 18쪽

삼각함수를 포함한 수열 $\{a_n\}$의 극한값은 θ가 상수일 때
$-1\le\sin\theta\le1$, $-1\le\cos\theta\le1$
임을 이용하여 a_n에 대한 부등식을 세우고 극한의 대소 관계를 이용하여 구한다.

0091 $-1\le\cos n\theta\le1$이므로 $\quad -\frac{1}{n^2}\le\frac{\cos n\theta}{n^2}\le\frac{1}{n^2}$

이때 $\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$이므로 $\quad \lim_{n\to\infty}\frac{\cos n\theta}{n^2}=0$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{\cos n\theta+n^2}{n-n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\cos n\theta}{n^2}+1}{\frac{1}{n}-1}=-1$$ 답 ②

0092 $-1\le\sin n\theta\le1$이므로 $n>0$일 때

$$-\frac{1+n^2}{n^3}\le\frac{(1+n^2)\sin n\theta}{n^3}\le\frac{1+n^2}{n^3}$$ ··· ❶

이때 $\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1+n^2}{n^3}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1+n^2}{n^3}=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(1+n^2)\sin n\theta}{n^3}=0$$ ··· ❷

답 0

채점 기준	비율
❶ $\frac{(1+n^2)\sin n\theta}{n^3}$에 대한 부등식을 세울 수 있다.	40 %
❷ $\lim_{n\to\infty}\frac{(1+n^2)\sin n\theta}{n^3}$의 값을 구할 수 있다.	60 %

0093 ㄱ. $-1\le\sin\frac{n\pi}{2}\le1$이므로

$$-\frac{1}{\sqrt{n}}\le\frac{1}{\sqrt{n}}\sin\frac{n\pi}{2}\le\frac{1}{\sqrt{n}}$$

이때 $\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\sin\frac{n\pi}{2}=0$$

ㄴ. $-\frac{1}{2}\le\cos\frac{2n\pi}{3}\le1$이므로

$$-\frac{1}{2n}\le\frac{1}{n}\cos\frac{2n\pi}{3}\le\frac{1}{n}$$

이때 $\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{2n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cos\frac{2n\pi}{3}=0$$

ㄷ. $0<\tan\frac{\pi}{4n}\le1$이므로

$$0<\frac{1}{n+1}\tan\frac{\pi}{4n}\le\frac{1}{n+1}$$

이때 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\tan\frac{\pi}{4n}=0$$

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ⑤

유형 14 수열의 극한에 대한 합답형 문제

본책 18쪽

① 성립하지 않는 성질은 반례를 찾는다.
② 극한값을 구하려는 수열을 수렴하는 수열에 대한 식으로 나타낸다.

0094 ㄱ. $a_n<b_n$에서 $\quad \lim_{n\to\infty}a_n\le\lim_{n\to\infty}b_n$

이때 $\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$이므로 $\quad \lim_{n\to\infty}b_n=\infty$

ㄴ. [반례] $a_n=\frac{1}{n}$, $b_n=\frac{2}{n}$이면 $a_n<b_n$이지만

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=0$$

ㄷ. [반례] $\{a_n\}$: 1, 0, 1, 0, 1, ⋯

$\{b_n\}$: 0, 1, 0, 1, 0, ⋯

이면 $\lim_{n\to\infty}a_nb_n=0$이지만 $\lim_{n\to\infty}a_n\ne0$, $\lim_{n\to\infty}b_n\ne0$이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ뿐이다. 답 ①

0095 ㄱ. [반례] $a_n=n^2$, $b_n=\frac{1}{n}$이면 $\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$, $\lim_{n\to\infty}b_n=0$

이지만 $\quad \lim_{n\to\infty}a_nb_n=\lim_{n\to\infty}n=\infty$

ㄴ. $a_n+b_n=c_n$으로 놓으면 $\quad b_n=c_n-a_n$

$\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$, $\lim_{n\to\infty}c_n=\alpha$이므로 $\quad \lim_{n\to\infty}\frac{c_n}{a_n}=0$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{c_n-a_n}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{c_n}{a_n}-1\right)=0-1=-1$$

ㄷ. $a_n-b_n=c_n$으로 놓으면 $\quad b_n=a_n-c_n$

이때 $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$, $\lim_{n\to\infty}c_n=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}(a_n-c_n)=\lim_{n\to\infty}a_n-\lim_{n\to\infty}c_n=\alpha$$

ㄹ. [반례] $a_n=n-\frac{1}{n}$, $b_n=n+\frac{1}{n}$, $c_n=n$이면 $a_n<c_n<b_n$이고

$\lim_{n\to\infty}(b_n-a_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}=0$이지만 수열 $\{c_n\}$은 발산한다.

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ③

0096 ㄱ. [반례] $a_n=(-1)^n$이면

$$\lim_{n\to\infty}a_{2n}=1,\ \lim_{n\to\infty}a_{2n-1}=-1$$

따라서 두 수열 $\{a_{2n}\}$, $\{a_{2n-1}\}$이 모두 수렴하지만 수열 $\{a_n\}$은 발산(진동)한다.

ㄴ. [반례] $a_n=\frac{1}{n}$, $b_n=n$이면

$$\lim_{n\to\infty}a_n=0,\ \lim_{n\to\infty}a_nb_n=\lim_{n\to\infty}1=1$$

따라서 두 수열 $\{a_n\}$, $\{a_nb_n\}$이 모두 수렴하지만 수열 $\{b_n\}$은 발산한다.

ㄷ. $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\alpha$, $\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\beta$ (α, β는 실수)라 하면

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\{(a_n+b_n)+(a_n-b_n)\}$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)+\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$$
$$\lim_{n\to\infty} b_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\{(a_n+b_n)-(a_n-b_n)\}$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)-\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$$

따라서 두 수열 $\{a_n+b_n\}$, $\{a_n-b_n\}$이 모두 수렴하면 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$도 모두 수렴한다.

이상에서 옳은 것은 ㄷ뿐이다. 답 ③

0097 ㄱ. $-|a_n|\le a_n\le |a_n|$에서

$\lim_{n\to\infty}(-|a_n|)=\lim_{n\to\infty}|a_n|=0$이므로 $\quad \lim_{n\to\infty} a_n=0$

ㄴ. $a_n>0$, $\frac{a_{n+1}}{a_n}<\frac{1}{3}$에서 $\quad a_{n+1}<\frac{1}{3}a_n$

$a_n<\frac{1}{3}a_{n-1}<\left(\frac{1}{3}\right)^2 a_{n-2}<\cdots<\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} a_1$

$\therefore 0<a_n<\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\cdot a_1$

이때 $\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\cdot a_1\right\}=0$이므로 $\quad \lim_{n\to\infty} a_n=0$

ㄷ. $a_{n+1}=a_n^{\frac{1}{2}}$에서 $\quad \log a_{n+1}=\frac{1}{2}\log a_n$

이때 $\log a_n=b_n$으로 놓으면 $\quad b_{n+1}=\frac{1}{2}b_n$

$\therefore b_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\cdot b_1 \quad \therefore \log a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\cdot\log a_1$

따라서 $\lim_{n\to\infty}\log a_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\cdot\log a_1=0$이므로

$\log(\lim_{n\to\infty} a_n)=0 \quad \therefore \lim_{n\to\infty} a_n=1$

ㄹ. [반례] $a_n=(-1)^n$이면 $\lim_{n\to\infty} a_n^2=1$이지만 $\lim_{n\to\infty} a_n$은 발산한다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ㄱ, ㄴ

SSEN 특강 등비수열의 귀납적 정의

수열 $\{a_n\}$에서

$\frac{a_{n+1}}{a_n}=r$ 또는 $a_{n+1}=ra_n$ 또는 $a_{n+1}{}^2=a_na_{n+2}$

➡ 수열 $\{a_n\}$은 등비수열

유형 15 등비수열의 극한

본책 19쪽

수열 $\left\{\frac{c^n+d^n}{a^n+b^n}\right\}$ 꼴의 극한값은 다음과 같은 순서로 구한다.

(단, a, b, c, d는 실수이다.)

(i) $|a|>|b|$이면 a^n, $|a|<|b|$이면 b^n으로 분자, 분모를 각각 나눈다.

(ii) $|r|<1$이면 $\lim_{n\to\infty} r^n=0$임을 이용하여 주어진 수열의 극한값을 구한다.

0098 $\lim_{n\to\infty}\frac{4^{n+2}}{2^{n+1}-4^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{4^2}{2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n-1}=-16$ 답 ①

0099 $\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$ (α는 실수)라 하면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5^{n+1}+3^n\cdot a_n}{3^{n+1}-5^n\cdot a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{5+\left(\frac{3}{5}\right)^n\cdot a_n}{3\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^n-a_n}=\frac{5}{-\alpha}$$

따라서 $\frac{5}{-\alpha}=5$이므로 $\quad \alpha=-1$ 답 -1

0100 $x^2-4x+2=0$에서 $\quad x=2\pm\sqrt{2}$

$\alpha=2+\sqrt{2}$, $\beta=2-\sqrt{2}$라 하면 $0<\frac{\beta}{\alpha}<1$이므로

$0<\beta<\alpha$이므로 $\;0<\frac{\beta}{\alpha}<1$

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n=0$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{\alpha^{n+1}+\beta^{n+1}}{\alpha^n+\beta^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha+\beta\cdot\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n}{1+\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n}$$
$$=\alpha=2+\sqrt{2}$$

답 ③

참고 $\alpha=2-\sqrt{2}$, $\beta=2+\sqrt{2}$라 하면 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha^{n+1}+\beta^{n+1}}{\alpha^n+\beta^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha\cdot\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n+\beta}{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n+1}=\beta=2+\sqrt{2}$$

0101 $4^{n+1}-3^n<(2^{n+1}+4^{n-1})a_n<2^n+4^{n+1}$에서

$$\frac{4^{n+1}-3^n}{2^{n+1}+4^{n-1}}<a_n<\frac{2^n+4^{n+1}}{2^{n+1}+4^{n-1}}$$

이때

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4^{n+1}-3^n}{\underbrace{2^{n+1}+4^{n-1}}_{2^{n+1}=2^2\cdot 2^{n-1}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{16-3\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}}{4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+1}=16,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n+4^{n+1}}{2^{n+1}+4^{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+16}{4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+1}=16$$

이므로 $\quad \lim_{n\to\infty} a_n=16$ 답 ⑤

0102 $2x^{n+1}+3x+1$을 $x-2$로 나누었을 때의 나머지 a_n은

$a_n=2\cdot 2^{n+1}+3\cdot 2+1=4\cdot 2^n+7$ ··· ❶

$2x^{n+1}+3x+1$을 $x-3$으로 나누었을 때의 나머지 b_n은

$b_n=2\cdot 3^{n+1}+3\cdot 3+1=6\cdot 3^n+10$ ··· ❷

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_n+b_n}{3^n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{4\cdot 2^n+6\cdot 3^n+17}{3^n+1}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n+6+17\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1+\left(\frac{1}{3}\right)^n}$$
$$=6$$ ··· ❸

답 6

채점 기준	비율
❶ a_n을 구할 수 있다.	30 %
❷ b_n을 구할 수 있다.	30 %
❸ $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+b_n}{3^n+1}$의 값을 구할 수 있다.	40 %

유형 16 등비수열의 극한; 수열의 합

본책 20쪽

(i) a_n, S_n을 각각 구한다.
(ii) $|r|<1$이면 $\lim_{n\to\infty} r^n=0$임을 이용하여 극한값을 구한다.

0103 $n\ge2$일 때,

$$\begin{aligned}a_n&=S_n-S_{n-1}=(2^n+3^n)-(2^{n-1}+3^{n-1})\\&=\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot2^n+\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot3^n\\&=\frac{1}{2}\cdot2^n+\frac{2}{3}\cdot3^n\end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{S_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}\cdot2^n+\frac{2}{3}\cdot3^n}{2^n+3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n+\frac{2}{3}}{\left(\frac{2}{3}\right)^n+1}=\frac{2}{3}$$

답 ①

0104 $a_n=3\cdot2^{n-1}$, $S_n=\dfrac{3(2^n-1)}{2-1}=3\cdot2^n-3$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot2^n-3}{3\cdot2^{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\left\{2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}=2$$

답 2

0105 $n\ge2$일 때,

$$\begin{aligned}a_n&=S_n-S_{n-1}=n\cdot5^{n-1}-(n-1)5^{n-2}\\&=5n\cdot5^{n-2}-(n-1)5^{n-2}\\&=(4n+1)5^{n-2}\end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot5^{n-1}}{(4n+1)5^{n-2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{5n}{4n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{5}{4+\frac{1}{n}}=\frac{5}{4}$$

답 $\frac{5}{4}$

0106 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면

$a_1+a_2+a_3=14$에서 $a_1+a_1r+a_1r^2=14$

$\therefore a_1(1+r+r^2)=14$ ······ ㉠

$a_4+a_5+a_6=-378$에서 $a_1r^3+a_1r^4+a_1r^5=-378$

$\therefore a_1r^3(1+r+r^2)=-378$ ······ ㉡

㉡÷㉠을 하면 $r^3=-27$ $\therefore r=-3$

$r=-3$을 ㉠에 대입하면

$7a_1=14$ $\therefore a_1=2$ ··· ❶

따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 2, 공비가 -3인 등비수열이므로

$a_n=2\cdot(-3)^{n-1}$

$\therefore a_{2n+1}=2\cdot(-3)^{2n}=2\cdot9^n$ ··· ❷

또 $S_n=\dfrac{2\{1-(-3)^n\}}{1-(-3)}=\dfrac{1}{2}\{1-(-3)^n\}$이므로

$$\begin{aligned}S_n^{\,2}&=\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\{1-(-3)^n\}^2\\&=\frac{1}{4}\{(-3)^{2n}-2\cdot(-3)^n+1\}\\&=\frac{1}{4}\cdot9^n-\frac{1}{2}\cdot(-3)^n+\frac{1}{4}\end{aligned}$$ ··· ❸

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{S_n^{\,2}}{a_{2n+1}}&=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{4}\cdot9^n-\frac{1}{2}\cdot(-3)^n+\frac{1}{4}}{2\cdot9^n}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^n+\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^n}{2}\\&=\frac{1}{8}\end{aligned}$$ ··· ❹

답 $\frac{1}{8}$

채점 기준	비율
❶ 첫째항과 공비를 구할 수 있다.	30 %
❷ a_{2n+1}을 구할 수 있다.	20 %
❸ $S_n^{\,2}$을 구할 수 있다.	20 %
❹ $\lim_{n\to\infty}\frac{S_n^{\,2}}{a_{2n+1}}$의 값을 구할 수 있다.	30 %

유형 17 등비수열의 수렴 조건

본책 21쪽

① 등비수열 $\{r^n\}$이 수렴하려면 ➡ $-1<r\le1$
② 등비수열 $\{ar^{n-1}\}$이 수렴하려면 ➡ $a=0$ 또는 $-1<r\le1$

0107 공비가 $\dfrac{x^2-5x-3}{3}$이므로 주어진 등비수열이 수렴하려면 $-1<\dfrac{x^2-5x-3}{3}\le1$

(i) $-1<\dfrac{x^2-5x-3}{3}$, 즉 $x^2-5x>0$에서

$x(x-5)>0$ $\therefore x<0$ 또는 $x>5$

(ii) $\dfrac{x^2-5x-3}{3}\le1$, 즉 $x^2-5x-6\le0$에서

$(x+1)(x-6)\le0$ $\therefore -1\le x\le6$

(i), (ii)에서 $-1\le x<0$ 또는 $5<x\le6$

따라서 주어진 등비수열이 수렴하도록 하는 정수 x는 -1, 6이므로 구하는 합은 5이다.

답 ③

0108 공비가 $\log_2 x-1$이므로 주어진 등비수열이 수렴하려면

$-1<\log_2 x-1\le1$

$0<\log_2 x\le2$, $\log_2 1<\log_2 x\le\log_2 2^2$

$\therefore 1<x\le4$

따라서 정수 x는 2, 3, 4이므로 구하는 곱은

$2\cdot3\cdot4=24$

답 24

0109 공비가 $2\cos x$이므로 주어진 등비수열이 수렴하려면

$-1<2\cos x\le1$, $-\dfrac{1}{2}<\cos x\le\dfrac{1}{2}$

$\therefore \dfrac{\pi}{3}\le x<\dfrac{2}{3}\pi$ ($\because 0\le x<\pi$)

답 ③

0110 공비가 $\dfrac{|x|}{4}-1$이므로 주어진 등비수열이 수렴하려면

$-1<\dfrac{|x|}{4}-1\le1$, $0<\dfrac{|x|}{4}\le2$

$\therefore 0<|x|\le8$ ··· ❶

따라서 정수 x는 ±1, ±2, ±3, $\cdots$, ±8의 16개이다. ··· ❷

답 16

채점 기준	비율
❶ $\|x\|$의 값의 범위를 구할 수 있다.	80 %
❷ 정수 x의 개수를 구할 수 있다.	20 %

0111 등비수열 $\{r^n\}$이 수렴하므로 $-1<r\le 1$ ⋯ ㉠

ㄱ. 공비가 $-r$이고 ㉠에서 $-1\le -r<1$
이때 $-r=-1$, 즉 $r=1$이면 수열 $\{(-r)^n\}$은 수렴하지 않는다.

ㄴ. 공비가 $\frac{1-r}{2}$이고 ㉠에서 $-1\le -r<1$

$0\le 1-r<2 \quad \therefore 0\le \frac{1-r}{2}<1$

따라서 수열 $\left\{\left(\frac{1-r}{2}\right)^n\right\}$은 수렴한다.

ㄷ. 공비가 r^2이고 ㉠에서 $0\le r^2\le 1$이므로 수열 $\{r^{2n}\}$은 수렴한다.

이상에서 항상 수렴하는 수열은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ④

0112 수열 $\{(x+1)(x^2-2x)^n\}$의 첫째항이 $(x+1)(x^2-2x)$, 공비가 x^2-2x이므로 이 등비수열이 수렴하려면

$(x+1)(x^2-2x)=0$ 또는 $-1<x^2-2x\le 1$

$\therefore x+1=0$ 또는 $-1<x^2-2x\le 1$

$x+1=0$에서 $x=-1$ ⋯⋯ ㉠

$-1<x^2-2x\le 1$에서

(i) $-1<x^2-2x$, 즉 $x^2-2x+1>0$일 때,
$(x-1)^2>0 \quad \therefore x\ne 1$인 모든 실수

(ii) $x^2-2x\le 1$, 즉 $x^2-2x-1\le 0$일 때,
$1-\sqrt{2}\le x\le 1+\sqrt{2}$

(i), (ii)에서 $1-\sqrt{2}\le x<1$ 또는 $1<x\le 1+\sqrt{2}$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 주어진 등비수열이 수렴하도록 하는 정수 x는 -1, 0, 2의 3개이다. 답 ②

유형 18 r^n을 포함한 수열의 극한 본책 22쪽

등비수열 $\{r^n\}$에서 공비 r의 값의 범위를
$|r|<1,\ r=1,\ |r|>1,\ r=-1$
인 경우로 나누어 극한을 조사한다.

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} r^n=\begin{cases} 0 & (|r|<1) \\ 1 & (r=1) \\ \text{발산} & (|r|>1 \text{ 또는 } r=-1)\end{cases}$$

0113 (i) $|r|<1$일 때, $\lim_{n\to\infty} r^n=0$이므로

$$a=\lim_{n\to\infty}\frac{r^n}{r^n+1}=0$$

(ii) $r=1$일 때, $\lim_{n\to\infty} r^n=1$이므로

$$b=\lim_{n\to\infty}\frac{r^n}{r^n+1}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

(iii) $|r|>1$일 때, $\lim_{n\to\infty}|r^n|=\infty$이므로

$$c=\lim_{n\to\infty}\frac{r^n}{r^n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{r^n}}=1$$

이상에서 $a+b-c=-\frac{1}{2}$ 답 $-\frac{1}{2}$

0114 ① $x<-1$일 때, $\lim_{n\to\infty}|x^n|=\lim_{n\to\infty}x^{2n}=\infty$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-x^{2n}}{1+x^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{x^n}-x^n}{\frac{1}{x^n}+1}$$

에서 주어진 수열은 발산(진동)한다.

② $-1<x<0$일 때, $\lim_{n\to\infty}x^n=\lim_{n\to\infty}x^{2n}=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-x^{2n}}{1+x^n}=1$$

③ $0<x<1$일 때, $\lim_{n\to\infty}x^n=\lim_{n\to\infty}x^{2n}=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-x^{2n}}{1+x^n}=1$$

④ $x=1$일 때, $\lim_{n\to\infty}x^n=\lim_{n\to\infty}x^{2n}=1$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-x^{2n}}{1+x^n}=\frac{1-1}{1+1}=0$$

⑤ $x>1$일 때, $\lim_{n\to\infty}x^n=\lim_{n\to\infty}x^{2n}=\infty$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-x^{2n}}{1+x^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{x^n}-x^n}{\frac{1}{x^n}+1}=-\infty$$

답 ③

0115 (i) $0<r<1$일 때, $\lim_{n\to\infty}r^n=\lim_{n\to\infty}r^{n+1}=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^n-3}{r^{n+1}+1}=-3 \quad \cdots ❶$$

(ii) $r=1$일 때, $\lim_{n\to\infty}r^n=\lim_{n\to\infty}r^{n+1}=1$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^n-3}{r^{n+1}+1}=\frac{1-3}{1+1}=-1 \quad \cdots ❷$$

(iii) $r>1$일 때, $\lim_{n\to\infty}r^n=\lim_{n\to\infty}r^{n+1}=\infty$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^n-3}{r^{n+1}+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{r}-\frac{3}{r^{n+1}}}{1+\frac{1}{r^{n+1}}}=\frac{1}{r} \quad \cdots ❸$$

답 $0<r<1$일 때 -3, $r=1$일 때 -1, $r>1$일 때 $\frac{1}{r}$

채점 기준	비율
❶ $0<r<1$일 때, 극한값을 구할 수 있다.	30 %
❷ $r=1$일 때, 극한값을 구할 수 있다.	30 %
❸ $r>1$일 때, 극한값을 구할 수 있다.	40 %

0116 (i) $|r|<7$일 때, $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{r}{7}\right)^n=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{7^n-r^n}{7^n+r^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\left(\frac{r}{7}\right)^n}{1+\left(\frac{r}{7}\right)^n}=1$$

(ii) $r=7$일 때,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{7^n-r^n}{7^n+r^n}=0$$

(iii) $|r|>7$일 때, $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{7}{r}\right)^n=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{7^n-r^n}{7^n+r^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{7}{r}\right)^n-1}{\left(\frac{7}{r}\right)^n+1}=-1$$

이상에서 $\lim_{n\to\infty}\dfrac{7^n-r^n}{7^n+r^n}=1$을 만족시키는 r의 값의 범위는 $|r|<7$이므로 정수 r는 $-6, -5, -4, \cdots, 6$의 13개이다.

답 13

유형 19 x^n을 포함한 극한으로 정의된 함수 본책 22쪽

x의 값의 범위를 $|x|<1$, $x=1$, $|x|>1$, $x=-1$인 경우로 나누어 함수식을 구한다.

① $|x|<1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}x^n=0$

② $|x|>1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{x^n}=0$

0117 (i) $|x|<1$일 때, $\lim_{n\to\infty}x^{2n}=\lim_{n\to\infty}x^{2n-1}=0$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n-1}+3x+2}{x^{2n}+1}=3x+2$$

(ii) $x=1$일 때, $\lim_{n\to\infty}x^{2n}=\lim_{n\to\infty}x^{2n-1}=1$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n-1}+3x+2}{x^{2n}+1}=\frac{1+3+2}{1+1}=3$$

(iii) $|x|>1$일 때, $\lim_{n\to\infty}x^{2n}=\lim_{n\to\infty}|x^{2n-1}|=\infty$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n-1}+3x+2}{x^{2n}+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{x}+\frac{3}{x^{2n-1}}+\frac{2}{x^{2n}}}{1+\frac{1}{x^{2n}}}=\frac{1}{x}$$

(iv) $x=-1$일 때, $\lim_{n\to\infty}x^{2n}=1$, $\lim_{n\to\infty}x^{2n-1}=-1$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n-1}+3x+2}{x^{2n}+1}=\frac{-1-3+2}{1+1}=-1$$

이상에서 $f(x)=\begin{cases}3x+2 & (|x|<1)\\ 3 & (x=1)\\ \dfrac{1}{x} & (|x|>1)\\ -1 & (x=-1)\end{cases}$

$$\therefore f(-1)+f\left(-\frac{1}{3}\right)+(f\circ f)(6)$$
$$=-1+\left\{3\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)+2\right\}+\underbrace{f\left(\frac{1}{6}\right)}_{f(6)=\frac{1}{6}}$$
$$=-1+1+\left(3\cdot\frac{1}{6}+2\right)=\frac{5}{2}$$

답 ③

다른 풀이 $f(-1)=\lim_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^{2n-1}-3+2}{(-1)^{2n}+1}=\dfrac{-1-1}{1+1}=-1$

$$f\left(-\frac{1}{3}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(-\frac{1}{3}\right)^{2n-1}+3\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)+2}{\left(-\frac{1}{3}\right)^{2n}+1}=-1+2=1$$

$$f(6)=\lim_{n\to\infty}\frac{6^{2n-1}+3\cdot6+2}{6^{2n}+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{6}+\frac{20}{6^{2n}}}{1+\frac{1}{6^{2n}}}=\frac{1}{6}$$

$$(f\circ f)(6)=f\left(\frac{1}{6}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{6}\right)^{2n-1}+3\cdot\frac{1}{6}+2}{\left(\frac{1}{6}\right)^{2n}+1}=\frac{1}{2}+2=\frac{5}{2}$$

$$\therefore f(-1)+f\left(-\frac{1}{3}\right)+(f\circ f)(6)=-1+1+\frac{5}{2}=\frac{5}{2}$$

0118 (i) $|x|<1$일 때, $\lim_{n\to\infty}x^{2n}=\lim_{n\to\infty}x^{2n+1}=0$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1-x^{2n+1}}{1+x^{2n}}=1$$

(ii) $x=1$일 때, $\lim_{n\to\infty}x^{2n}=\lim_{n\to\infty}x^{2n+1}=1$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1-x^{2n+1}}{1+x^{2n}}=\frac{1-1}{1+1}=0$$

(iii) $|x|>1$일 때, $\lim_{n\to\infty}x^{2n}=\lim_{n\to\infty}|x^{2n+1}|=\infty$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1-x^{2n+1}}{1+x^{2n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{x^{2n}}-x}{\frac{1}{x^{2n}}+1}=-x$$

(iv) $x=-1$일 때, $\lim_{n\to\infty}x^{2n}=1$, $\lim_{n\to\infty}x^{2n+1}=-1$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1-x^{2n+1}}{1+x^{2n}}=\frac{1-(-1)}{1+1}=1$$

이상에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 ③이다.

답 ③

0119 (i) $\frac{1}{2}\le x<1$일 때, $\lim_{n\to\infty}x^n=\lim_{n\to\infty}x^{n+1}=0$이므로

$$y=\lim_{n\to\infty}\frac{x^n+2x}{x^{n+1}+1}=2x$$

(ii) $x=1$일 때, $\lim_{n\to\infty}x^n=\lim_{n\to\infty}x^{n+1}=1$이므로

$$y=\lim_{n\to\infty}\frac{x^n+2x}{x^{n+1}+1}=\frac{1+2}{1+1}=\frac{3}{2}$$

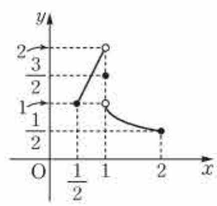
(iii) $1<x\le2$일 때, $\lim_{n\to\infty}x^n=\lim_{n\to\infty}x^{n+1}=\infty$이므로

$$y=\lim_{n\to\infty}\frac{x^n+2x}{x^{n+1}+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{x}+\frac{2}{x^n}}{1+\frac{1}{x^{n+1}}}=\frac{1}{x}$$

이상에서 주어진 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 치역은

$\left\{y\,\middle|\,\frac{1}{2}\le y<2\right\}$

답 ①



유형 20~21 수열의 극한의 활용 본책 23, 24쪽

점의 좌표, 선분의 길이 등을 n에 대한 식으로 나타낸 후 이 식의 극한값을 구한다.

0120 원 $x^2+y^2=n^2$과 x축이 만나는 점의 좌표는 $(n, 0)$, $(-n, 0)$이므로 $a_n=n$ ($\because a_n>0$)

$y=\sqrt{n}$을 $x^2+y^2=n^2$에 대입하여 정리하면

$x^2+n=n^2$, $x^2=n^2-n$ $\therefore x=\pm\sqrt{n^2-n}$

$\therefore b_n=\sqrt{n^2-n}$ ($\because b_n>0$)

$$\therefore \lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\lim_{n\to\infty}(n-\sqrt{n^2-n})$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n-\sqrt{n^2-n})(n+\sqrt{n^2-n})}{n+\sqrt{n^2-n}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+\sqrt{n^2-n}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\sqrt{1-\frac{1}{n}}}=\frac{1}{2}$$

답 $\frac{1}{2}$

0121 $P_n\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}\right)$에서 직선 OP_n의 기울기는

$$\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n}}=\frac{1}{n}$$

이므로 점 P_n을 지나고 직선 OP_n과 수직인 직선의 방정식은

$$y-\frac{1}{n^2}=-n\left(x-\frac{1}{n}\right) \qquad \therefore y=-nx+1+\frac{1}{n^2}$$

따라서 이 직선의 y절편은 $1+\frac{1}{n^2}$이므로

$$a_n=1+\frac{1}{n^2}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)=1$$

답 1

0122 $P_n(n, 3^n)$, $Q_n(n, 4^n)$이므로 $\overline{P_nQ_n}=4^n-3^n$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{\overline{P_{n+1}Q_{n+1}}}{\overline{P_nQ_n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{4^{n+1}-3^{n+1}}{4^n-3^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4-3\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^n}{1-\left(\frac{3}{4}\right)^n}=4$$

답 ⑤

0123 $P_n(n, \sqrt{n+1})$, $Q_n(n, 0)$이므로

$\overline{OP_n}=\sqrt{n^2+(\sqrt{n+1})^2}=\sqrt{n^2+n+1}$, $\overline{OQ_n}=n$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}(\overline{OP_n}-\overline{OQ_n})$$

$$=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n+1}-n)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+n+1}-n)(\sqrt{n^2+n+1}+n)}{\sqrt{n^2+n+1}+n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{\sqrt{n^2+n+1}+n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+1}=\frac{1}{2}$$

답 ④

0124 $P_n\left(n, \frac{n^2}{2}\right)$, $P_{n+1}\left(n+1, \frac{(n+1)^2}{2}\right)$이므로

$$a_n=\overline{P_nP_{n+1}}=\sqrt{\{(n+1)-n\}^2+\left\{\frac{(n+1)^2}{2}-\frac{n^2}{2}\right\}^2}$$

$$=\sqrt{n^2+n+\frac{5}{4}} \qquad \cdots❶$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{n}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n+\frac{5}{4}}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{5}{4n^2}}}=1 \qquad \cdots❷$$

답 1

채점 기준	비율
❶ a_n을 구할 수 있다.	50 %
❷ $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{a_n}$의 값을 구할 수 있다.	50 %

0125 직선 $x+y=2$, 즉 $y=-x+2$와 직선 $y=\frac{n}{n+2}x$의 교점 P_n의 x좌표는 $-x+2=\frac{n}{n+2}x$에서

$$\frac{2n+2}{n+2}x=2 \qquad \therefore x=\frac{n+2}{n+1}$$

$x=\frac{n+2}{n+1}$를 $y=\frac{n}{n+2}x$에 대입하면

$$y=\frac{n}{n+2}\cdot\frac{n+2}{n+1}=\frac{n}{n+1}$$

따라서 $P_n\left(\frac{n+2}{n+1}, \frac{n}{n+1}\right)$이고, $A(2, 0)$이므로

$$S_n=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\frac{n}{n+1}=\frac{n}{n+1}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}=1$$

답 ②

0126 $\triangle AB_1P_n \backsim \triangle AB_nC_n$이고 닮음비가 $1:n$이므로

$\overline{AP_n} : \overline{AC_n}=1:n$

$$\therefore \overline{AP_n}=\frac{\overline{AC_n}}{n}=\frac{\sqrt{3^2+n^2}}{n}=\frac{\sqrt{9+n^2}}{n}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\overline{AP_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{9+n^2}}{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{9}{n^2}+1}=1$$

답 1

0127 $a_1=1$, $a_2=1+3$, $a_3=1+3+5$, $\cdots$에서

$$a_n=1+3+5+\cdots+(2n-1)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=2\cdot\frac{n(n+1)}{2}-n$$

$$=n^2 \qquad \cdots❶$$

$b_1=3$, $b_2=3+6$, $b_3=3+6+9$, $\cdots$에서

$$b_n=3+6+9+\cdots+3n$$

$$=\sum_{k=1}^{n}3k=3\cdot\frac{n(n+1)}{2}$$

$$=\frac{3n^2+3n}{2} \qquad \cdots❷$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{2b_n}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+3n}{n^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(3+\frac{3}{n}\right)=3 \qquad \cdots❸$$

답 3

채점 기준	비율
❶ a_n을 구할 수 있다.	30 %
❷ b_n을 구할 수 있다.	30 %
❸ $\lim_{n\to\infty}\frac{2b_n}{a_n}$의 값을 구할 수 있다.	40 %

0128 $a_1=\sqrt{3}$이라 하고 a_1에서 네 개의 키를 순서대로 눌러 나오는 수를 a_2, a_2에서 네 개의 키를 순서대로 눌러 나오는 수를 a_3, $\cdots$이라 하면

$$a_{n+1}=\sqrt{a_n+3}$$

양변을 제곱하면 $\quad a_{n+1}{}^2=a_n+3$

이때 $\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha\ (\alpha>0)$라 하면 $\lim_{n\to\infty} a_{n+1}=\alpha$이므로

$\lim_{n\to\infty} a_{n+1}{}^2=\lim_{n\to\infty}(a_n+3)$에서

$\alpha^2=\alpha+3, \quad \alpha^2-\alpha-3=0$

$\therefore \alpha=\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}\ (\because \alpha>0)$ 답 ②

0129 1st S_n을 구한다.

$S_n=\sum_{k=1}^{3n}k=\dfrac{3n(3n+1)}{2}$

2nd T_n을 구한다.

$$T_n=\sum_{k=1}^{3n}k-\sum_{k=1}^{n}3k=\frac{3n(3n+1)}{2}-3\cdot\frac{n(n+1)}{2}=3n^2$$

3rd $\lim_{n\to\infty}\dfrac{T_n}{S_n}$의 값을 구한다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{T_n}{S_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2}{\frac{3n(3n+1)}{2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{3n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{3+\frac{1}{n}}=\frac{2}{3}$$ 답 ②

0130 1st 주어진 등식의 좌변에서 근호를 포함한 식을 유리화한다.

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{an^2+4n}-bn)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{an^2+4n}-bn)(\sqrt{an^2+4n}+bn)}{\sqrt{an^2+4n}+bn}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(a-b^2)n^2+4n}{\sqrt{an^2+4n}+bn}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(a-b^2)n+4}{\sqrt{a+\frac{4}{n}}+b} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

2nd $a+b$의 값을 구한다.

㉠의 극한값이 $\dfrac{1}{5}$이므로

$a-b^2=0,\ \dfrac{4}{\sqrt{a}+b}=\dfrac{1}{5}$

$a-b^2=0$에서 $\quad a=b^2 \quad \therefore \sqrt{a}=|b| \qquad \cdots\cdots ㉡$

$a>0$이므로 $b\neq0$

$\dfrac{4}{\sqrt{a}+b}=\dfrac{1}{5}$에서 $\quad \sqrt{a}+b=20 \qquad \cdots\cdots ㉢$

㉡을 ㉢에 대입하면 $\quad |b|+b=20$

그런데 $b<0$이면 $|b|+b=-b+b=0$이므로 $\quad b>0$

$2b=20$이므로 $\quad b=10$

따라서 $a=b^2=100$이므로

$a+b=110$ 답 110

0131 1st $a_nb_n=c_n$으로 놓고 b_n을 a_n, c_n에 대한 식으로 나타낸다.

$a_nb_n=c_n$으로 놓으면 $\quad b_n=\dfrac{c_n}{a_n}$

2nd $\lim_{n\to\infty}(a_nb_n{}^2-a_nb_n-b_n+4)$의 값을 구한다.

$\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$, $\lim_{n\to\infty}c_n=2$이므로 $\quad \lim_{n\to\infty}\dfrac{c_n}{a_n}=0$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}(a_nb_n{}^2-a_nb_n-b_n+4)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left\{a_n\cdot\left(\frac{c_n}{a_n}\right)^2-a_n\cdot\frac{c_n}{a_n}-\frac{c_n}{a_n}+4\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{c_n{}^2}{a_n}-c_n-\frac{c_n}{a_n}+4\right)$$
$$=0-2-0+4=2$$ 답 ⑤

다른 풀이 $\lim_{n\to\infty}a_nb_n=2$이고, $\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$이므로 $\lim_{n\to\infty}b_n=0$이다.

$$\therefore \lim_{n\to\infty}(a_nb_n{}^2-a_nb_n-b_n+4)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\{(b_n-1)(a_nb_n-1)+3\}$$
$$=-1\cdot1+3=2$$

0132 1st T_n을 구한다.

조건 (가)에서 $\quad a_1+a_2+a_3+a_4=1+2+3+4=10$

조건 (나)에서

$a_5+a_6+a_7+a_8=2(a_1+a_2+a_3+a_4)=2\cdot10$

$a_9+a_{10}+a_{11}+a_{12}=2(a_5+a_6+a_7+a_8)=2^2\cdot10$

$\vdots$

$\therefore a_{4n-3}+a_{4n-2}+a_{4n-1}+a_{4n}=2^{n-1}\cdot10$

$$\therefore T_n=\sum_{k=1}^{4n}a_k$$
$$=(a_1+a_2+a_3+a_4)+(a_5+a_6+a_7+a_8)+(a_9+a_{10}+a_{11}+a_{12})+\cdots+(a_{4n-3}+a_{4n-2}+a_{4n-1}+a_{4n})$$
$$=10+2\cdot10+2^2\cdot10+\cdots+2^{n-1}\cdot10$$
$$=\frac{10(2^n-1)}{2-1}=10\cdot2^n-10$$

2nd $a_{4n-2}+a_{4n}$을 구한다.

조건 (가)에서 $\quad a_2+a_4=2+4=6$

조건 (나)에서

$a_6+a_8=2(a_2+a_4)=2\cdot6$

$a_{10}+a_{12}=2(a_6+a_8)=2^2\cdot6$

$\vdots$

$\therefore a_{4n-2}+a_{4n}=2^{n-1}\cdot6$

3rd $\lim_{n\to\infty}\dfrac{T_n}{a_{4n-2}+a_{4n}}$의 값을 구한다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{T_n}{a_{4n-2}+a_{4n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{10\cdot2^n-10}{2^{n-1}\cdot6}=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{10}{3}-\frac{5}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}=\frac{10}{3}$$ 답 ③

0133 1st $|r|<1$이면 $\lim_{n\to\infty}r^n=0$임을 이용할 수 있도록 주어진 수열의 일반항을 변형한다.

$$\frac{(4x-1)^n}{2^{3n}+3^{2n}}=\frac{(4x-1)^n}{8^n+9^n}=\frac{\left(\frac{4x-1}{9}\right)^n}{\left(\frac{8}{9}\right)^n+1}$$

2nd x의 값의 범위를 구한다.

$\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{8}{9}\right)^n=0$이므로 주어진 수열이 수렴하려면 등비수열 $\left\{\left(\dfrac{4x-1}{9}\right)^n\right\}$이 수렴해야 하므로

$-1<\frac{4x-1}{9}\le 1, \quad -9<4x-1\le 9$

$-8<4x\le 10 \quad \therefore -2<x\le \frac{5}{2}$

3rd 정수 x의 개수를 구한다.

정수 x는 -1, 0, 1, 2의 4개이다. 답 ②

0134 1st $a<4$일 때의 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수를 구한다.

(i) $a<4$일 때, $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a}{4}\right)^n=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot a^n+4^{n+1}}{a^{n+1}+b\cdot 4^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot\left(\frac{a}{4}\right)^n+4}{a\cdot\left(\frac{a}{4}\right)^n+b}=\frac{4}{b}$$

즉 $\frac{4}{b}>1$이어야 하므로 $\quad b<4$

따라서 $a<4$, $b<4$를 만족시키는 자연수 a, b의 순서쌍 $(a,\ b)$는 $\quad 3\cdot 3=9$(개)

2nd $a=4$일 때의 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수를 구한다.

(ii) $a=4$일 때,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot a^n+4^{n+1}}{a^{n+1}+b\cdot 4^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot 4^n+4^{n+1}}{4^{n+1}+b\cdot 4^n}=\frac{7}{4+b}$$

즉 $\frac{7}{4+b}>1$이어야 하므로

$4+b<7 \quad \therefore b<3$

따라서 $a=4$, $b<3$을 만족시키는 자연수 a, b의 순서쌍 $(a,\ b)$는 $\quad (4,\ 1)$, $(4,\ 2)$의 2개

3rd $a>4$일 때의 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수를 구한다.

(iii) $a>4$일 때, $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4}{a}\right)^n=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot a^n+4^{n+1}}{a^{n+1}+b\cdot 4^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3}{a}+\left(\frac{4}{a}\right)^{n+1}}{1+\frac{b}{4}\cdot\left(\frac{4}{a}\right)^{n+1}}=\frac{3}{a}$$

즉 $\frac{3}{a}>1$이어야 하므로 $\quad a<3$

이는 $a>4$를 만족시키지 않으므로 자연수 a, b의 순서쌍 $(a,\ b)$는 없다.

4th 조건을 만족시키는 순서쌍의 개수를 구한다.

이상에서 구하는 순서쌍의 개수는

$9+2+0=11$ 답 11

0135 1st ㄱ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄱ. $\theta=0$일 때,

$\sin\theta=0$, $\cos\theta=1$이므로

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{0-2}{0+1}=-2$$

2nd ㄴ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄴ. $0<\theta<\frac{\pi}{4}$일 때,

$0<\sin\theta<\cos\theta$이므로 $\quad 0<\frac{\sin\theta}{\cos\theta}<1$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{3\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)^n-2}{2\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)^n+1}=-2$$

3rd ㄷ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄷ. $\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{\pi}{2}$일 때,

$0<\cos\theta<\sin\theta$이므로 $\quad 0<\frac{\cos\theta}{\sin\theta}<1$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{3-2\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)^n}{2+\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)^n}=\frac{3}{2}$$

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ⑤

0136 1st x의 값의 범위를 나누어 $f(x)$를 구한다.

(i) $|x|<1$일 때, $\lim_{n\to\infty}x^{2n}=\lim_{n\to\infty}x^{2n+1}=0$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{(a-2)x^{2n+1}+2x}{3x^{2n}+1}=2x$$

(ii) $x=1$일 때, $\lim_{n\to\infty}x^{2n}=\lim_{n\to\infty}x^{2n+1}=1$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{(a-2)x^{2n+1}+2x}{3x^{2n}+1}=\frac{(a-2)\cdot 1+2\cdot 1}{3\cdot 1+1}=\frac{a}{4}$$

(iii) $|x|>1$일 때, $\lim_{n\to\infty}x^{2n}=\lim_{n\to\infty}|x^{2n+1}|=\infty$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{(a-2)x^{2n+1}+2x}{3x^{2n}+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{(a-2)x+\frac{2}{x^{2n-1}}}{3+\frac{1}{x^{2n}}}=\frac{a-2}{3}x$$

(iv) $x=-1$일 때, $\lim_{n\to\infty}x^{2n}=1$, $\lim_{n\to\infty}x^{2n+1}=-1$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{(a-2)x^{2n+1}+2x}{3x^{2n}+1}=\frac{(a-2)\cdot(-1)+2\cdot(-1)}{3\cdot 1+1}=-\frac{a}{4}$$

이상에서

$$f(x)=\begin{cases}2x & (|x|<1)\\ \frac{a}{4} & (x=1)\\ \frac{a-2}{3}x & (|x|>1)\\ -\frac{a}{4} & (x=-1)\end{cases}$$

2nd 조건을 만족시키는 모든 a의 값을 구한다.

$(f\circ f)(1)=f(f(1))=f\left(\frac{a}{4}\right)=\frac{5}{4}$를 만족시키는 모든 a의 값을 구하면

(i) $\left|\frac{a}{4}\right|<1$, 즉 $|a|<4$일 때,

$f\left(\frac{a}{4}\right)=2\cdot\frac{a}{4}=\frac{a}{2}$이므로

$\frac{a}{2}=\frac{5}{4} \quad \therefore a=\frac{5}{2}$

(ii) $\frac{a}{4}=1$, 즉 $a=4$일 때,

$f\left(\frac{a}{4}\right)=\frac{a}{4}$이므로 $\quad \frac{a}{4}=\frac{5}{4} \quad \therefore a=5$

이는 $a=4$를 만족시키지 않는다.

(iii) $\left|\frac{a}{4}\right|>1$, 즉 $|a|>4$일 때,

$f\left(\frac{a}{4}\right)=\frac{a-2}{3}\cdot\frac{a}{4}=\frac{a^2-2a}{12}$이므로

$$\frac{a^2-2a}{12}=\frac{5}{4},\qquad a^2-2a-15=0$$

$$(a+3)(a-5)=0$$

$$\therefore a=5\ (\because |a|>4)$$

(iv) $\frac{a}{4}=-1$, 즉 $a=-4$일 때,

$f\left(\frac{a}{4}\right)=-\frac{a}{4}$이므로

$$-\frac{a}{4}=\frac{5}{4}\qquad \therefore a=-5$$

이는 $a=-4$를 만족시키지 않는다.

3rd 모든 a의 값의 합을 구한다.

이상에서 $(f\circ f)(1)=\frac{5}{4}$가 되도록 하는 모든 a의 값의 합은

$$\frac{5}{2}+5=\frac{15}{2}$$

답 ③

0137 1st $f(x)$를 간단히 한다.

$x>1$일 때, $\lim_{n\to\infty}x^n=\infty$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{2x^{n+1}+3x^n}{x^n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2x+3}{1+\frac{1}{x^n}}=2x+3$$

$$\therefore f(x)=\begin{cases}x+a & (x\le 1)\\ 2x+3 & (x>1)\end{cases}$$

2nd a의 값을 구한다.

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이면 $x=1$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1-}f(x)=f(1)$$

이때

$$\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1+}(2x+3)=5,$$

$$\lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to1-}(x+a)=1+a,$$

$$f(1)=1+a$$

이므로

$$1+a=5\qquad \therefore a=4$$

답 ②

0138 1st 두 점 P_n, P_{n+1}의 좌표를 구한다.

$y=\sqrt{x}$에서 $x=4^n$일 때,

$$y=\sqrt{4^n}=\sqrt{2^{2n}}=2^n$$

$x=4^{n+1}$일 때,

$$y=\sqrt{4^{n+1}}=\sqrt{2^{2(n+1)}}=2^{n+1}$$

$$\therefore \mathrm{P}_n(4^n,\ 2^n),\ \mathrm{P}_{n+1}(4^{n+1},\ 2^{n+1})$$

2nd L_n^2을 구한다.

$L_n=\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}}$에서

$$\begin{aligned}L_n^2&=\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}}^2\\&=(4^{n+1}-4^n)^2+(2^{n+1}-2^n)^2\\&=(3\cdot4^n)^2+(2^n)^2\\&=9\cdot16^n+4^n\end{aligned}$$

3rd $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{L_{n+1}}{L_n}\right)^2$의 값을 구한다.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{L_{n+1}}{L_n}\right)^2&=\lim_{n\to\infty}\frac{L_{n+1}^2}{L_n^2}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{9\cdot16^{n+1}+4^{n+1}}{9\cdot16^n+4^n}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{9\cdot16+4\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^n}{9+\left(\frac{1}{4}\right)^n}\\&=16\end{aligned}$$

답 16

0139 1st a_n을 구한다.

직선 l_n의 기울기가 $\frac{n^2}{2n}=\frac{n}{2}$이므로 직선 $\mathrm{A}_n\mathrm{C}_n$의 기울기는 $-\frac{2}{n}$이다.

따라서 직선 $\mathrm{A}_n\mathrm{C}_n$의 방정식은

$$y-n^2=-\frac{2}{n}(x-2n)\qquad \therefore y=-\frac{2}{n}x+n^2+4$$

이때 점 $\mathrm{C}_n(a_n,\ b_n)$이 이 직선 위에 있으므로

$$b_n=-\frac{2}{n}a_n+n^2+4 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

한편 원 C_n의 반지름의 길이가 b_n이므로 $\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{C}_n}=b_n$

즉 $\sqrt{(a_n-2n)^2+(b_n-n^2)^2}=b_n$이므로

$$a_n^2-4na_n+4n^2-2n^2b_n+n^4=0$$

㉠을 위의 식에 대입하면

$$a_n^2-4na_n+4n^2-2n^2\left(-\frac{2}{n}a_n+n^2+4\right)+n^4=0$$

$$a_n^2-n^4-4n^2=0,\qquad a_n^2=n^4+4n^2$$

이때 $a_n>0$이므로 $a_n=n\sqrt{n^2+4}$

2nd a_n-b_n을 구한다.

$a_n=n\sqrt{n^2+4}$를 ㉠에 대입하면

$$\begin{aligned}b_n&=-\frac{2}{n}\cdot n\sqrt{n^2+4}+n^2+4\\&=\sqrt{n^2+4}\left(\sqrt{n^2+4}-2\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore a_n-b_n&=n\sqrt{n^2+4}-\sqrt{n^2+4}\left(\sqrt{n^2+4}-2\right)\\&=\sqrt{n^2+4}\left(n+2-\sqrt{n^2+4}\right)\end{aligned}$$

3rd $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-b_n}{\sqrt{n^2+4}}$의 값을 구한다.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-b_n}{\sqrt{n^2+4}}&=\lim_{n\to\infty}\left(n+2-\sqrt{n^2+4}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(n+2-\sqrt{n^2+4}\right)\left(n+2+\sqrt{n^2+4}\right)}{n+2+\sqrt{n^2+4}}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{4n}{n+2+\sqrt{n^2+4}}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{4}{1+\frac{2}{n}+\sqrt{1+\frac{4}{n^2}}}=2\end{aligned}$$

답 ④

0140 1st a_1, a_2, a_3, $\cdots$을 차례대로 구한다.

이어 붙이는 정사각형의 한 변의 길이는 차례대로 1, 2, 3, 5, 8, $\cdots$이므로 a_n은

$$\frac{\pi}{2},\ \pi,\ \frac{3}{2}\pi,\ \frac{5}{2}\pi,\ 4\pi,\ \cdots$$

(2nd) $\frac{a_{n+1}}{a_n}$을 a_n, a_{n-1}에 대한 식으로 나타낸다.

이때

$$a_1=\frac{\pi}{2},\ a_2=\pi,\ a_{n+2}=a_{n+1}+a_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

이므로

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{a_n+a_{n-1}}{a_n}=1+\frac{a_{n-1}}{a_n}\ (n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$$

(3rd) c의 값을 구한다.

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}}=c$이므로 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a_{n-1}}{a_n}\right)$

에서

$$c=1+\frac{1}{c},\qquad c^2-c-1=0$$

$$\therefore c=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\ (\because c>0)$$

답 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

0141 전략 $\frac{B-A}{AB}=\frac{1}{A}-\frac{1}{B}$임을 이용하여 주어진 식을 변형한 후 a_n을 구한다.

풀이 $\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k-a_{k+1}}{a_k a_{k+1}}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{a_{k+1}}-\frac{1}{a_k}\right)$

$$=\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_1}\right)+\left(\frac{1}{a_3}-\frac{1}{a_2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}\right)$$

$$=\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_1}=\frac{1}{a_{n+1}}-3\left(\because a_1=\frac{1}{3}\right)$$

즉 $\frac{1}{a_{n+1}}-3=4n(n+2)$이므로

$$\frac{1}{a_{n+1}}=4n^2+8n+3=(2n+1)(2n+3)$$

따라서 $a_{n+1}=\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$이므로

$$a_n=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\ (n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$$

이때 위의 식에 $n=1$을 대입하면 $a_1=\frac{1}{(2-1)(2+1)}=\frac{1}{3}$이므로

$$a_n=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)\quad \cdots❶$$

$$\therefore S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{n}{2n+1}\quad \cdots❷$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}n^2a_nS_n=\lim_{n\to\infty}\left\{n^2\cdot\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\cdot\frac{n}{2n+1}\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{(2n-1)(2n+1)^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(2-\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{8}\quad \cdots❸$$

답 $\frac{1}{8}$

채점 기준	비율
❶ a_n을 구할 수 있다.	40 %
❷ S_n을 구할 수 있다.	30 %
❸ $\lim_{n\to\infty}n^2a_nS_n$의 값을 구할 수 있다.	30 %

0142 전략 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한은 분모의 최고차항으로 분자, 분모를 각각 나누고, $\infty-\infty$ 꼴의 극한은 무리식으로 주어진 경우 유리화하여 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴로 변형한다.

풀이 조건 (가)에서

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(an+1)(bn+1)}{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{abn^2+(a+b)n+1}{n^2+1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{ab+\frac{a+b}{n}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}}=ab$$

이므로

$$ab=8\quad \cdots\cdots ㉠\quad \cdots❶$$

조건 (나)에서

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+an}-n-b)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\{\sqrt{n^2+an}-(n+b)\}\{\sqrt{n^2+an}+(n+b)\}}{\sqrt{n^2+an}+(n+b)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(a-2b)n-b^2}{\sqrt{n^2+an}+n+b}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{a-2b-\frac{b^2}{n}}{\sqrt{1+\frac{a}{n}}+1+\frac{b}{n}}$$

$$=\frac{a-2b}{1+1}=\frac{a-2b}{2}$$

이므로

$$\frac{a-2b}{2}=-3$$

$$\therefore a-2b=-6\quad \cdots\cdots ㉡\quad \cdots❷$$

㉡에서 $a=2b-6$이므로 이 식을 ㉠에 대입하면

$$(2b-6)b=8,\qquad b^2-3b-4=0$$

$$(b+1)(b-4)=0$$

$$\therefore b=4\ (\because b>0)$$

따라서 ㉠에서 $4a=8$이므로 $\quad a=2\quad \cdots❸$

$$\therefore a+b=6\quad \cdots❹$$

답 6

채점 기준	비율
❶ 조건 (가)에서 ab의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷ 조건 (나)에서 $a-2b$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ a, b의 값을 구할 수 있다.	20 %
❹ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	10 %

0143 전략 $R_n(x)$는 상수이거나 일차식이므로 $R_n(x)=ax+b$로 놓는다.

풀이 x^n을 $(x-2)(x-3)$으로 나누었을 때의 몫을 $Q_n(x)$라 하고, $R_n(x)=ax+b$ (a, b는 상수)로 놓으면

$$x^n=(x-2)(x-3)Q_n(x)+ax+b\quad \cdots\cdots ㉠\quad \cdots❶$$

㉠의 양변에 $x=2$를 대입하면

$2^n=2a+b$ ...... ㉡

㉠의 양변에 $x=3$을 대입하면

$3^n=3a+b$ ...... ㉢

㉢－㉡을 하면

$a=3^n-2^n$

이것을 ㉡에 대입하면

$2^n=2(3^n-2^n)+b$

$\therefore b=3\cdot 2^n-2\cdot 3^n$

$\therefore R_n(x)=(3^n-2^n)x+3\cdot 2^n-2\cdot 3^n$ ···➋

따라서 $R_n(0)=3\cdot 2^n-2\cdot 3^n$, $R_n(1)=2\cdot 2^n-3^n$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{R_n(0)}{R_n(1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot 2^n-2\cdot 3^n}{2\cdot 2^n-3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n-2}{2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n-1}=2$$ ···➌

답 2

채점 기준	비율
➊ 몫과 나머지를 이용하여 항등식을 세울 수 있다.	20 %
➋ $R_n(x)$를 구할 수 있다.	40 %
➌ $\lim_{n\to\infty}\frac{R_n(0)}{R_n(1)}$의 값을 구할 수 있다.	40 %

SSEN 특강 다항식의 나눗셈에서의 나머지

다항식 $P(x)$를 $A(x)$로 나누었을 때의 나머지 $R(x)$는

① $A(x)$가 일차식 ➡ $R(x)$는 상수
➡ $R(x)=a$ (단, a는 상수)

② $A(x)$가 이차식 ➡ $R(x)$는 상수이거나 일차식
➡ $R(x)=ax+b$ (단, a, b는 상수)

③ $A(x)$가 삼차식 ➡ $R(x)$는 상수이거나 이차 이하의 다항식
➡ $R(x)=ax^2+bx+c$ (단, a, b, c는 상수)

0144 전략 k의 값의 범위를 나누어 a_k를 구한다.

풀이 $a_k=\lim_{n\to\infty}\frac{(6k)^{n+1}+30^{n+1}}{k^{2n}+30^n}$에서

(ⅰ) $1\le k\le 4$일 때, $k\le k^2\le 4k$, $6\le 6k\le 24$이므로

$k^2<6k<30$

따라서 $0<\frac{k^2}{30}<1$, $0<\frac{6k}{30}<1$이므로

$$a_k=\lim_{n\to\infty}\frac{6k\cdot\left(\frac{6k}{30}\right)^n+30}{\left(\frac{k^2}{30}\right)^n+1}=30$$ ···➊

(ⅱ) $k=5$일 때, $k^2=25$, $6k=30$이므로

$$a_k=\lim_{n\to\infty}\frac{30^{n+1}+30^{n+1}}{25^n+30^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{30+30}{\left(\frac{5}{6}\right)^n+1}=60$$ ···➋

(ⅲ) $k=6$일 때, $k^2=6k=36$이므로

$$a_k=\lim_{n\to\infty}\frac{36^{n+1}+30^{n+1}}{36^n+30^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{36+30\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^n}{1+\left(\frac{5}{6}\right)^n}=36$$ ···➌

(ⅳ) $k\ge 7$일 때, $k^2\ge 7k$, $6k\ge 42$이므로

$30<6k<k^2$

따라서 $0<\frac{30}{k^2}<1$, $0<\frac{6k}{k^2}<1$이므로

$$a_k=\lim_{n\to\infty}\frac{6k\cdot\left(\frac{6k}{k^2}\right)^n+30\cdot\left(\frac{30}{k^2}\right)^n}{1+\left(\frac{30}{k^2}\right)^n}=0$$ ···➍

이상에서

$\sum_{k=1}^{6}a_k=30\cdot 4+60+36=216$

따라서 $m\ge 7$일 때, $\sum_{k=1}^{m}a_k=216$이므로

$\sum_{k=1}^{m}(a_k+k)=216+\frac{m(m+1)}{2}$

$216+\frac{m(m+1)}{2}\ge 300$에서

$m(m+1)\ge 168$

이때 $12\cdot 13=156$, $13\cdot 14=182$이므로 자연수 m의 최솟값은 13이다. ···➎

답 13

채점 기준	비율
➊ $1\le k\le 4$일 때, a_k의 값을 구할 수 있다.	20 %
➋ $k=5$일 때, a_k의 값을 구할 수 있다.	20 %
➌ $k=6$일 때, a_k의 값을 구할 수 있다.	20 %
➍ $k\ge 7$일 때, a_k의 값을 구할 수 있다.	20 %
➎ 주어진 부등식을 만족시키는 자연수 m의 최솟값을 구할 수 있다.	20 %

0145 전략 길이가 a m인 식물이 매년 x %씩 자란다고 할 때, n년 후 이 식물의 길이는 $a\left(1+\frac{x}{100}\right)^n$ m이다.

풀이 n년 후 A 수목원과 B 수목원에 있는 두 식물 P, Q의 길이의 합은 각각

$a_n=8.2\times 1.06^n+6.5\times 1.07^n$

$b_n=10.8\times 1.06^n+5.2\times 1.07^n$ ···➊

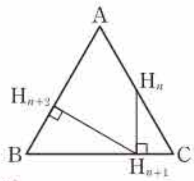
$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{10b_n}{a_n}=10\lim_{n\to\infty}\frac{10.8\times 1.06^n+5.2\times 1.07^n}{8.2\times 1.06^n+6.5\times 1.07^n}=10\lim_{n\to\infty}\frac{10.8\times\left(\frac{1.06}{1.07}\right)^n+5.2}{8.2\times\left(\frac{1.06}{1.07}\right)^n+6.5}=10\times\frac{5.2}{6.5}=8$$ ···➋

답 8

채점 기준	비율
❶ a_n, b_n을 구할 수 있다.	30 %
❷ $\lim_{n\to\infty}\frac{10b_n}{a_n}$의 값을 구할 수 있다.	70 %

0146 전략 삼각비를 이용하여 $\overline{\mathrm{H}_n\mathrm{H}_{n+1}}$의 길이와 $\overline{\mathrm{H}_{n+1}\mathrm{H}_{n+2}}$의 길이 사이의 관계를 찾는다.

풀이 변 AC 위의 한 점을 H_n이라 하면
점 H_{n+1}은 변 BC 위에 있으므로



$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{BH}_{n+1}}&=2-\overline{\mathrm{CH}_{n+1}}\\&=2-\overline{\mathrm{H}_n\mathrm{H}_{n+1}}\tan 30^\circ\\&=2-\frac{1}{\sqrt{3}}\overline{\mathrm{H}_n\mathrm{H}_{n+1}}\end{aligned}$$

$\angle \mathrm{CH}_n\mathrm{H}_{n+1}=30^\circ$

또 점 H_{n+2}는 변 AB 위에 있고

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{H}_{n+1}\mathrm{H}_{n+2}}&=\overline{\mathrm{BH}_{n+1}}\sin 60^\circ\\&=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(2-\frac{1}{\sqrt{3}}\overline{\mathrm{H}_n\mathrm{H}_{n+1}}\right)\\&=\sqrt{3}-\frac{1}{2}\overline{\mathrm{H}_n\mathrm{H}_{n+1}}\end{aligned}$$ ···➊

$\lim_{n\to\infty}\overline{\mathrm{H}_n\mathrm{H}_{n+1}}=\alpha$ (α는 실수)라 하면 $\lim_{n\to\infty}\overline{\mathrm{H}_{n+1}\mathrm{H}_{n+2}}=\alpha$이므로

$\lim_{n\to\infty}\overline{\mathrm{H}_{n+1}\mathrm{H}_{n+2}}=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{3}-\frac{1}{2}\overline{\mathrm{H}_n\mathrm{H}_{n+1}}\right)$에서

$$\alpha=\sqrt{3}-\frac{1}{2}\alpha,\qquad \frac{3}{2}\alpha=\sqrt{3}$$

$$\therefore \alpha=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$ ···➋

답 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

채점 기준	비율
❶ $\overline{\mathrm{H}_{n+1}\mathrm{H}_{n+2}}$를 $\overline{\mathrm{H}_n\mathrm{H}_{n+1}}$에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	50 %
❷ $\lim_{n\to\infty}\overline{\mathrm{H}_n\mathrm{H}_{n+1}}$의 값을 구할 수 있다.	50 %

I. 수열의 극한

02 급수

0147 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{3n-2}{4n+1}=\frac{3}{4}$ 답 $\frac{3}{4}$

0148 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{-n^2+2n}{(n+3)(5n-7)}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-n^2+2n}{5n^2+8n-21}=-\frac{1}{5}$$ 답 $-\frac{1}{5}$

0149 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left\{2-\left(\frac{1}{5}\right)^n\right\}=2$ 답 2

0150 주어진 급수는 첫째항이 1, 공차가 2인 등차수열의 합이므로 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$$S_n=\frac{n\{2\cdot1+(n-1)\cdot2\}}{2}=n^2$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}n^2=\infty$$

따라서 주어진 급수는 발산한다. 답 발산

SSEN 특강 등차수열의 합

첫째항이 a, 공차가 d인 등차수열의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

$$S_n=\frac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}$$

0151 주어진 급수는 첫째항이 1, 공비가 $\frac{1}{4}$인 등비수열의 합이므로 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$$S_n=\frac{1\cdot\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{4}{3}\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right\}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{4}{3}\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right\}=\frac{4}{3}$$

따라서 주어진 급수는 수렴하고, 그 합은 $\frac{4}{3}$이다. 답 수렴, $\frac{4}{3}$

0152 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$$\begin{aligned}S_n&=(\sqrt{3}-1)+(\sqrt{5}-\sqrt{3})+(\sqrt{7}-\sqrt{5})+(\sqrt{9}-\sqrt{7})\\&\quad+\cdots+(\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1})\\&=\sqrt{2n+1}-1\end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{2n+1}-1)=\infty$$

따라서 주어진 급수는 발산한다. 답 발산

0153 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{k+1}{2}=\frac{1}{2}\left\{\frac{n(n+1)}{2}+n\right\}=\frac{n^2+3n}{4}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+3n}{4}=\infty$$

따라서 주어진 급수는 발산한다. 답 발산

02 급수

0154 제 n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{k+1}-\frac{k+1}{k+2}\right)$$
$$=\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{2}{3}-\frac{3}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{n}{n+1}-\frac{n+1}{n+2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}-\frac{n+1}{n+2}=-\frac{n}{2(n+2)}$$
$$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left\{-\frac{n}{2(n+2)}\right\}=-\frac{1}{2}$$

따라서 주어진 급수는 수렴하고, 그 합은 $-\frac{1}{2}$이다.

답 수렴, $-\frac{1}{2}$

0155 제 n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}(2^k-1)=\frac{2(2^n-1)}{2-1}-n=2^{n+1}-2-n$$
$$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}(2^{n+1}-2-n)=\infty$$

따라서 주어진 급수는 발산한다. 답 발산

0156 제 n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+2)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$
$$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}=\frac{3}{4}$$

따라서 주어진 급수는 수렴하고, 그 합은 $\frac{3}{4}$이다. 답 수렴, $\frac{3}{4}$

0157 주어진 급수는 첫째항이 -3, 공차가 4인 등차수열의 합이므로 제 n항을 a_n이라 하면

$$a_n=-3+(n-1)\cdot 4=4n-7$$
$$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}(4n-7)=\infty\neq 0$$

따라서 주어진 급수는 발산한다. 답 풀이 참조

0158 주어진 급수의 제 n항을 a_n이라 하면 $a_n=2$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n=2\neq 0$$

따라서 주어진 급수는 발산한다. 답 풀이 참조

0159 주어진 급수는 첫째항이 100, 공차가 -3인 등차수열의 합이므로 제 n항을 a_n이라 하면

$$a_n=100+(n-1)\cdot(-3)=-3n+103$$
$$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}(-3n+103)=-\infty\neq 0$$

따라서 주어진 급수는 발산한다. 답 풀이 참조

0160 주어진 급수의 제 n항을 a_n이라 하면 $a_n=\frac{2n}{3n+1}$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{3n+1}=\frac{2}{3}\neq 0$$

따라서 주어진 급수는 발산한다. 답 풀이 참조

0161 주어진 급수의 제 n항을 a_n이라 하면 $a_n=\sqrt{n^2+n}-n$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-n)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+n}-n)(\sqrt{n^2+n}+n)}{\sqrt{n^2+n}+n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}=\frac{1}{2}\neq 0$$

따라서 주어진 급수는 발산한다. 답 풀이 참조

0162 주어진 급수의 제 n항을 a_n이라 하면 $a_n=\frac{4^n}{2^n+3^n}$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{4^n}{2^n+3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{4}{3}\right)^n}{\left(\frac{2}{3}\right)^n+1}=\infty\neq 0$$

따라서 주어진 급수는 발산한다. 답 풀이 참조

0163 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n+\sum_{n=1}^{\infty}b_n=2+(-1)=1$ 답 1

0164 $\sum_{n=1}^{\infty}(3a_n+5b_n)=3\sum_{n=1}^{\infty}a_n+5\sum_{n=1}^{\infty}b_n$

$$=3\cdot 2+5\cdot(-1)=1$$

답 1

0165 $\sum_{n=1}^{\infty}(4a_n-3b_n)=4\sum_{n=1}^{\infty}a_n-3\sum_{n=1}^{\infty}b_n$

$$=4\cdot 2-3\cdot(-1)=11$$

답 11

0166 첫째항이 1, 공비가 $\frac{1}{3}$이고, $-1<\frac{1}{3}<1$이므로 주어진 등비급수는 수렴한다.

따라서 그 합은

$$\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{\frac{2}{3}}=\frac{3}{2}$$

답 수렴, $\frac{3}{2}$

0167 공비가 $-\sqrt{5}$이고, $-\sqrt{5}<-1$이므로 주어진 등비급수는 발산한다. 답 발산

0168 첫째항이 1, 공비가 -0.1이고, $-1<-0.1<1$이므로 주어진 등비급수는 수렴한다.

따라서 그 합은

$$\frac{1}{1-(-0.1)}=\frac{1}{1.1}=\frac{10}{11}$$

답 수렴, $\frac{10}{11}$

0169 공비가 $\frac{4}{3}$이고, $\frac{4}{3}>1$이므로 주어진 등비급수는 발산한다. 답 발산

0170 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}$에서 첫째항이 1, 공비가 $-\frac{2}{3}$이고, $-1<-\frac{2}{3}<1$이므로 주어진 등비급수는 수렴한다.
따라서 그 합은

$$\frac{1}{1-\left(-\frac{2}{3}\right)}=\frac{1}{\frac{5}{3}}=\frac{3}{5}$$

답 수렴, $\frac{3}{5}$

0171 $\sum_{n=1}^{\infty}3\cdot(-1)^{n-1}$에서 공비가 -1이므로 주어진 등비급수는 발산한다.

답 발산

0172 $\sum_{n=1}^{\infty}(2-\sqrt{3})^n$에서 첫째항이 $2-\sqrt{3}$, 공비가 $2-\sqrt{3}$이고, $-1<2-\sqrt{3}<1$이므로 주어진 등비급수는 수렴한다.
따라서 그 합은

$$\frac{2-\sqrt{3}}{1-(2-\sqrt{3})}=\frac{(2-\sqrt{3})(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}$$
$$=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

답 수렴, $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$

0173 $\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n+\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n$

$$=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}+\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}$$
$$=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

답 $\frac{3}{2}$

0174 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4^n}-\frac{1}{2^n}\right)=3\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$$=3\cdot\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}-\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}$$
$$=3\cdot\frac{1}{3}-1=0$$

답 0

0175 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n-3^n}{5^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^n-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n$

$$=\frac{\frac{2}{5}}{1-\frac{2}{5}}-\frac{\frac{3}{5}}{1-\frac{3}{5}}$$
$$=\frac{2}{3}-\frac{3}{2}=-\frac{5}{6}$$

답 $-\frac{5}{6}$

0176 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^{n+1}}{6^n}\cos n\pi$

$$=5\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^n\cos n\pi$$
$$=5\left\{\frac{5}{6}\cos\pi+\left(\frac{5}{6}\right)^2\cos 2\pi+\left(\frac{5}{6}\right)^3\cos 3\pi+\cdots\right\}$$
$$=5\left\{-\frac{5}{6}+\left(-\frac{5}{6}\right)^2+\left(-\frac{5}{6}\right)^3+\cdots\right\}$$
$$=5\cdot\frac{-\frac{5}{6}}{1-\left(-\frac{5}{6}\right)}=5\cdot\left(-\frac{5}{11}\right)=-\frac{25}{11}$$

답 $-\frac{25}{11}$

0177 공비가 $-2x$이므로 주어진 등비급수가 수렴하려면
$-1<-2x<1$ $\therefore -\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}$

답 $-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}$

0178 공비가 $2x-1$이므로 주어진 등비급수가 수렴하려면
$-1<2x-1<1$, $0<2x<2$
$\therefore 0<x<1$

답 $0<x<1$

0179 공비가 $-\frac{x}{3}$이므로 주어진 등비급수가 수렴하려면
$-1<-\frac{x}{3}<1$ $\therefore -3<x<3$

답 $-3<x<3$

0180 (1) $\triangle ABC\backsim\triangle A_1BB_1$ (AA 닮음)이고 점 A_1은 $\overline{AB}$를 1 : 2로 내분하는 점이므로

$\overline{AB}:\overline{A_1B}=3:2$

따라서 $\overline{AC}:\overline{A_1B_1}=\overline{AB}:\overline{A_1B}=3:2$이므로

$\overline{A_1B_1}=\frac{2}{3}\overline{AC}=\frac{2}{3}$

(2) (1)과 같은 방법으로 하면

$$\overline{A_2B_2}=\frac{2}{3}\overline{A_1B_1}=\left(\frac{2}{3}\right)^2,$$
$$\overline{A_3B_3}=\frac{2}{3}\overline{A_2B_2}=\left(\frac{2}{3}\right)^3,$$
$$\vdots$$
$$\therefore \overline{A_1B_1}+\overline{A_2B_2}+\overline{A_3B_3}+\cdots=\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^3+\cdots$$
$$=\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}}=2$$

답 (1) $\frac{2}{3}$ (2) 2

0181 $0.\dot{1}6\dot{9}=0.169+0.000169+0.000000169+\cdots$

$$=\frac{169}{1000}+\frac{169}{1000^2}+\frac{169}{1000^3}+\cdots$$
$$=\frac{\frac{169}{1000}}{1-\frac{1}{1000}}=\frac{169}{999}$$

답 $\frac{169}{999}$

0182 $0.5\dot{7}=0.5+0.07+0.007+0.0007+\cdots$

$$=0.5+\left(\frac{7}{100}+\frac{7}{1000}+\frac{7}{10000}+\cdots\right)$$
$$=0.5+\frac{\frac{7}{100}}{1-\frac{1}{10}}$$
$$=0.5+\frac{7}{90}=\frac{26}{45}$$

답 $\frac{26}{45}$

0183 $1.\dot{4}\dot{2}=1+0.42+0.0042+0.000042+\cdots$

$$=1+\left(\frac{42}{100}+\frac{42}{100^2}+\frac{42}{100^3}+\cdots\right)$$
$$=1+\frac{\frac{42}{100}}{1-\frac{1}{100}}$$
$$=1+\frac{14}{33}=\frac{47}{33}$$

답 $\frac{47}{33}$

유형 01 급수의 합; 부분분수 본책 32쪽

급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$에서 a_n이 $\frac{1}{AB}$ $(A \neq B)$ 꼴로 주어진 경우 급수의 합은 다음과 같은 순서로 구한다.

(i) 급수의 제n항을 구한다.

(ii) $\frac{1}{AB}=\frac{1}{B-A}\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{B}\right)$임을 이용하여 부분합 S_n을 구한다.

(iii) $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값을 구한다.

0184 주어진 급수의 제n항을 a_n이라 하면

$$a_n=\frac{1}{(2n)^2-1}=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$$

이때 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)$$
$$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}$$

답 $\frac{1}{2}$

0185 주어진 급수의 제n항을 a_n이라 하면

$$a_n=\frac{1}{n+(n-1)+(n-2)+\cdots+1}=\frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}}$$
$$=\frac{2}{n(n+1)}=2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

이때 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}2\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$
$$=2\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$$
$$=2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=2$$

답 ④

0186 주어진 급수의 제n항을 a_n이라 하면

$$a_n=\frac{2n+1}{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}=\frac{2n+1}{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$
$$=\frac{6}{n(n+1)}=6\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

이때 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}6\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$
$$=6\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$$
$$=6\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}6\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=6$$

답 ④

0187 $S_n=\frac{n\{2\cdot 4+(n-1)\cdot 4\}}{2}=2n(n+1)$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{S_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n(n+1)}$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{1}{2}$$

답 $\frac{1}{2}$

0188 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha_n+\beta_n=-(n-2),\ \alpha_n\beta_n=n^2$$

이므로

$$(\alpha_n-2)(\beta_n-2)=\alpha_n\beta_n-2(\alpha_n+\beta_n)+4$$
$$=n^2+2(n-2)+4$$
$$=n^2+2n=n(n+2)$$

⋯ ❶

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\alpha_n-2)(\beta_n-2)}$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}=\frac{3}{4}$$

⋯ ❷

답 $\frac{3}{4}$

채점 기준	비율
❶ $(\alpha_n-2)(\beta_n-2)$를 구할 수 있다.	40 %
❷ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\alpha_n-2)(\beta_n-2)}$의 값을 구할 수 있다.	60 %

0189 $a_{n+2}=a_n+a_{n+1}$에서 $\quad a_n=a_{n+2}-a_{n+1}$

$$\therefore b_n=\frac{a_n}{a_{n+1}a_{n+2}}=\frac{a_{n+2}-a_{n+1}}{a_{n+1}a_{n+2}}=\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_{n+2}}$$
$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_{n+2}}\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{a_{k+1}}-\frac{1}{a_{k+2}}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}\right)+\left(\frac{1}{a_3}-\frac{1}{a_4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_{n+2}}\right)\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_{n+2}}\right)$$
$$=\frac{1}{a_2}=\frac{1}{3}\ (\because a_2=3)$$

답 ②

참고 $a_1=2,\ a_2=3,\ a_{n+2}=a_n+a_{n+1}$에서
$a_1<a_2<a_3<a_4<\cdots$
따라서 $\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$이므로
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_{n+2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}=0$$

유형 02 급수의 합; 로그

본책 32쪽

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\log a_n$의 합은 로그의 성질을 이용하여 구한다.

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\log a_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\log a_k$$
$$=\lim_{n\to\infty}(\log a_1+\log a_2+\log a_3+\cdots+\log a_n)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\log(a_1a_2a_3\cdots a_n)$$

0190 $\sum_{n=2}^{\infty}\log\frac{n^2}{n^2-1}$

$$=\sum_{n=2}^{\infty}\log\frac{n\cdot n}{(n-1)(n+1)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n}\log\frac{k\cdot k}{(k-1)(k+1)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\log\frac{2\cdot 2}{1\cdot 3}+\log\frac{3\cdot 3}{2\cdot 4}+\log\frac{4\cdot 4}{3\cdot 5}+\cdots+\log\frac{n\cdot n}{(n-1)(n+1)}\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\log\left\{\frac{2\cdot 2}{1\cdot 3}\cdot\frac{3\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{4\cdot 4}{3\cdot 5}\cdot\cdots\cdot\frac{n\cdot n}{(n-1)(n+1)}\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\log\frac{2n}{n+1}=\log 2$$

답 ③

0191 주어진 급수의 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\log_2 a_k$$
$$=\log_2 a_1+\log_2 a_2+\log_2 a_3+\cdots+\log_2 a_n$$
$$=\log_2(a_1a_2a_3\cdots a_n)=\log_2\frac{4n-1}{n+4}$$
$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\log_2 a_n=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\log_2\frac{4n-1}{n+4}$$
$$=\log_2 4=2$$

답 2

0192 주어진 급수의 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\log_2\left(1+\frac{1}{a_k}\right)=\sum_{k=1}^{n}\log_2\frac{a_k+1}{a_k}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\log_2\frac{k^2+2k+1}{k^2+2k}=\sum_{k=1}^{n}\log_2\frac{(k+1)^2}{k(k+2)}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\log_2\left(\frac{k+1}{k}\cdot\frac{k+1}{k+2}\right)$$
$$=\log_2\left(\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\right)+\log_2\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{4}\right)+\log_2\left(\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\right)+\cdots+\log_2\left(\frac{n+1}{n}\cdot\frac{n+1}{n+2}\right)$$
$$=\log_2\left(\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\cdots\cdot\frac{n+1}{n}\cdot\frac{n+1}{n+2}\right)$$
$$=\log_2\frac{2(n+1)}{n+2}$$ ··· ❶

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\log_2\left(1+\frac{1}{a_n}\right)=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\log_2\frac{2(n+1)}{n+2}$$
$$=\log_2 2=1$$ ··· ❷

답 1

채점 기준	비율
❶ 부분합 S_n을 구할 수 있다.	80 %
❷ $\sum_{n=1}^{\infty}\log_2\left(1+\frac{1}{a_n}\right)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

유형 03 항의 부호가 교대로 바뀌는 급수

본책 33쪽

홀수 번째 항까지의 부분합 S_{2n-1}과 짝수 번째 항까지의 부분합 S_{2n}에 대하여

① $\lim_{n\to\infty}S_{2n-1}=\lim_{n\to\infty}S_{2n}=\alpha$ (α는 실수) $\Rightarrow$ $\lim_{n\to\infty}S_n=\alpha$에 수렴

② $\lim_{n\to\infty}S_{2n-1}\neq\lim_{n\to\infty}S_{2n}$ $\Rightarrow$ $\lim_{n\to\infty}S_n$은 발산

0193 급수의 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하자.

ㄱ. $S_n=\left(2-\frac{3}{2}\right)+\left(\frac{3}{2}-\frac{4}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{n+1}{n}-\frac{n+2}{n+1}\right)$
$$=2-\frac{n+2}{n+1}$$
$$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{n+2}{n+1}\right)=1$$
따라서 주어진 급수는 1에 수렴한다.

ㄴ. $S_1=2,\ S_2=\frac{1}{2},\ S_3=2,\ S_4=\frac{2}{3},\ S_5=2,\ S_6=\frac{3}{4},\ \cdots$이므로
$$S_{2n-1}=2,\ S_{2n}=\frac{n}{n+1}$$
$$\therefore \lim_{n\to\infty}S_{2n-1}=2,\ \lim_{n\to\infty}S_{2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$$
따라서 $\lim_{n\to\infty}S_{2n-1}\neq\lim_{n\to\infty}S_{2n}$이므로 주어진 급수는 발산한다.

ㄷ. $S_1=-1,\ S_2=-\frac{2}{3},\ S_3=-1,\ S_4=-\frac{4}{5},\ S_5=-1,\ S_6=-\frac{6}{7},\ \cdots$이므로
$$S_{2n-1}=-1,\ S_{2n}=-\frac{2n}{2n+1}$$
$$\therefore \lim_{n\to\infty}S_{2n-1}=-1,\ \lim_{n\to\infty}S_{2n}=\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{2n}{2n+1}\right)=-1$$
따라서 $\lim_{n\to\infty}S_{2n-1}=\lim_{n\to\infty}S_{2n}=-1$이므로 주어진 급수는 -1에 수렴한다.

이상에서 수렴하는 급수인 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ④

0194 급수의 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하자.

① $S_1=1,\ S_2=-1,\ S_3=2,\ S_4=-2,\ S_5=3,\ S_6=-3,\ \cdots$이므로
$$S_{2n-1}=n,\ S_{2n}=-n$$
$$\therefore \lim_{n\to\infty}S_{2n-1}=\lim_{n\to\infty}n=\infty,\ \lim_{n\to\infty}S_{2n}=\lim_{n\to\infty}(-n)=-\infty$$
따라서 주어진 급수는 발산한다.

② $S_n=0+0+\cdots+0=0$이므로 $\lim_{n\to\infty}S_n=0$
따라서 주어진 급수는 0에 수렴한다.

③ $S_n=1+0+0+\cdots+0=1$이므로

$\lim_{n\to\infty} S_n=1$

따라서 주어진 급수는 1에 수렴한다.

④ $S_1=\frac{1}{2},\ S_2=0,\ S_3=\frac{1}{3},\ S_4=0,\ S_5=\frac{1}{4},\ S_6=0,\ \cdots$이므로

$S_{2n-1}=\frac{1}{n+1},\ S_{2n}=0$

$\therefore \lim_{n\to\infty} S_{2n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0,\ \lim_{n\to\infty} S_{2n}=0$

따라서 $\lim_{n\to\infty} S_{2n-1}=\lim_{n\to\infty} S_{2n}=0$이므로 주어진 급수는 0에 수렴한다.

⑤ $S_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$

$=1-\frac{1}{n+1}$

$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$

따라서 주어진 급수는 1에 수렴한다.

답 ①

0195 급수의 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$S_1=a_1,\ S_2=a_1-a_2,\ S_3=a_1,\ S_4=a_1-a_3,\ \cdots$

$\therefore S_{2n-1}=a_1,\ S_{2n}=a_1-a_{n+1}$

주어진 급수가 수렴하려면 $\lim_{n\to\infty} S_{2n-1}=\lim_{n\to\infty} S_{2n}=a_1$이어야 한다.

따라서 $\lim_{n\to\infty}(a_1-a_{n+1})=a_1$에서 $\lim_{n\to\infty} a_{n+1}=0$, 즉 $\lim_{n\to\infty} a_n=0$이어야 한다.

ㄱ. $\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}=0$

ㄴ. $\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=0$

ㄷ. $\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\log\frac{2n}{n+1}=\log 2\neq 0$

이상에서 주어진 급수가 수렴하도록 하는 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ②

유형 04 급수와 수열의 극한값 사이의 관계 본책 33쪽

급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴 ➡ $\lim_{n\to\infty} a_n=0$

0196 주어진 급수가 수렴하므로

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{n}-5\right)=0$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=5$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{2n+5a_n}{n+a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+5\cdot\frac{a_n}{n}}{1+\frac{a_n}{n}}$

$=\frac{2+5\cdot 5}{1+5}=\frac{9}{2}$

답 $\frac{9}{2}$

0197 주어진 급수가 수렴하므로

$\lim_{n\to\infty}\left(a_n-\frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n^3}\right)=0$

$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n^3}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}{n^3}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}$

$=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

답 ④

0198 $S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$이라 하면

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{2n-1}+20a_{2n}}{a_n-4}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{S_{2n}+19a_{2n}}{a_n-4}$ ...... ㉠

$\lim_{n\to\infty} S_n=\sum_{n=1}^{\infty} a_n=30$이므로

$\lim_{n\to\infty} S_{2n}=\lim_{n\to\infty} S_n=30$

또 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty} a_n=0$

$\therefore \lim_{n\to\infty} a_{2n}=\lim_{n\to\infty} a_n=0$

따라서 ㉠에서

$\lim_{n\to\infty}\frac{S_{2n}+19a_{2n}}{a_n-4}=\frac{30+19\cdot 0}{0-4}=-\frac{15}{2}$

답 ②

0199 주어진 급수가 수렴하므로

$\lim_{n\to\infty}(3a_n-4)=0 \qquad \therefore \lim_{n\to\infty} a_n=\frac{4}{3}$

따라서 $r=\frac{4}{3}$이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{r^{n+2}-2}{r^n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{4}{3}\right)^{n+2}-2}{\left(\frac{4}{3}\right)^n+1}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{4}{3}\right)^2-2\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^{-n}}{1+\left(\frac{4}{3}\right)^{-n}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{16}{9}-2\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^n}{1+\left(\frac{3}{4}\right)^n}$

$=\frac{16}{9}$

답 $\frac{16}{9}$

0200 주어진 급수가 수렴하므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{2a_n+1}{a_n-3}=0$ ··· ❶

$\frac{2a_n+1}{a_n-3}=b_n$으로 놓으면

$a_nb_n-3b_n=2a_n+1, \qquad (b_n-2)a_n=3b_n+1$

$\therefore a_n=\frac{3b_n+1}{b_n-2}$ ··· ❷

이때 $\lim_{n\to\infty} b_n=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{3b_n+1}{b_n-2}$$

$$=\frac{3\cdot 0+1}{0-2}=-\frac{1}{2} \quad \cdots ❸$$

답 $-\frac{1}{2}$

채점 기준	비율
❶ $\lim_{n\to\infty}\frac{2a_n+1}{a_n-3}=0$임을 알 수 있다.	40 %
❷ a_n을 b_n에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30 %
❸ $\lim_{n\to\infty} a_n$의 값을 구할 수 있다.	30 %

0201 $\lim_{n\to\infty} S_n=\sum_{n=1}^{\infty} a_n=S$이므로

$$\lim_{n\to\infty} S_{n+1}=\lim_{n\to\infty} S_n=S$$

또 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty} a_n=0$

따라서 $S_n+2S_{n+1}=2+a_n-\left(\frac{1}{3}\right)^n$에서

$$\lim_{n\to\infty}(S_n+2S_{n+1})=\lim_{n\to\infty}\left\{2+a_n-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}$$

$$S+2S=2, \quad 3S=2$$

$$\therefore 30S=20$$

답 20

유형 05 급수의 수렴과 발산 본책 34쪽

급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$의 수렴과 발산을 조사할 때에는 $\lim_{n\to\infty} a_n$의 값이 0인지 0이 아닌지 파악한 후 다음을 이용한다.

① $\lim_{n\to\infty} a_n\neq 0$ ➡ 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$은 발산

② $\lim_{n\to\infty} a_n=0$ ➡ 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$의 부분합 S_n을 구한 후 $\lim_{n\to\infty} S_n$의 수렴, 발산을 조사한다.

0202 ① $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\cdots$

$$>1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\cdots$$

$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots=\infty$$

따라서 주어진 급수는 발산한다.

② 주어진 급수의 제n항은 $\frac{n}{2n-1}$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n-1}=\frac{1}{2}\neq 0$$

따라서 주어진 급수는 발산한다.

③ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$$

$$=\lim_{n\to\infty}\{(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\cdots+(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-1)=\infty$$

④ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2+4+6+\cdots+2n}$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2(1+2+3+\cdots+n)}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2\cdot\frac{n(n+1)}{2}}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$$

⑤ 주어진 급수의 제n항은 $\log\frac{n}{3n-1}$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\log\frac{n}{3n-1}=\log\frac{1}{3}\neq 0$$

따라서 주어진 급수는 발산한다.

답 ④

0203 ㄱ. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$$

ㄴ. $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{3n-2}=\frac{1}{3}\neq 0$이므로 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3n-2}$은 발산한다.

ㄷ. $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+1}=1\neq 0$이므로 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^2+1}$은 발산한다.

ㄹ. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{(3n-2)(3n+1)}$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+1}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{3k-2}-\frac{1}{3k+1}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+1}\right)\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{3n+1}\right)=1$$

이상에서 수렴하는 급수인 것은 ㄱ, ㄹ이다.

답 ③

0204 ㄱ. $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+4n}-n)=\lim_{n\to\infty}\frac{4n}{\sqrt{n^2+4n}+n}$

$$=\frac{4}{1+1}=2\neq 0$$

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n^2+4n}-n)$은 발산한다.

ㄴ. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+5}+\sqrt{n+4}}$

$=\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+5}-\sqrt{n+4})$

$=\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (\sqrt{k+5}-\sqrt{k+4})$

$=\lim_{n\to\infty} \{(\sqrt{6}-\sqrt{5})+(\sqrt{7}-\sqrt{6})+\cdots+(\sqrt{n+5}-\sqrt{n+4})\}$

$=\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n+5}-\sqrt{5})=\infty$

ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{\frac{1}{n+3}}-\sqrt{\frac{1}{n+1}}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{\frac{1}{k+3}}-\sqrt{\frac{1}{k+1}}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\sqrt{\frac{1}{4}}-\sqrt{\frac{1}{2}}\right)+\left(\sqrt{\frac{1}{5}}-\sqrt{\frac{1}{3}}\right)+\left(\sqrt{\frac{1}{6}}-\sqrt{\frac{1}{4}}\right)\right.$

$\left.+\cdots+\left(\sqrt{\frac{1}{n+2}}-\sqrt{\frac{1}{n}}\right)+\left(\sqrt{\frac{1}{n+3}}-\sqrt{\frac{1}{n+1}}\right)\right\}$

$=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{\frac{1}{n+2}}+\sqrt{\frac{1}{n+3}}-\sqrt{\frac{1}{2}}-\sqrt{\frac{1}{3}}\right)$

$=-\sqrt{\frac{1}{2}}-\sqrt{\frac{1}{3}}$

이상에서 수렴하는 급수인 것은 ㄷ뿐이다. 답 ㄷ

유형 06~07 급수의 성질 본책 35, 36쪽

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n=\alpha$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n=\beta$ (α, β는 실수)이면 상수 p, q에 대하여

$\sum_{n=1}^{\infty}(pa_n+qb_n)=p\sum_{n=1}^{\infty}a_n+q\sum_{n=1}^{\infty}b_n=p\alpha+q\beta$

0205 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n=\alpha$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n=\beta$라 하면

$\sum_{n=1}^{\infty}(2a_n+b_n)=10$에서 $\quad 2\sum_{n=1}^{\infty}a_n+\sum_{n=1}^{\infty}b_n=10$

$\therefore 2\alpha+\beta=10$ ...... ㉠

$\sum_{n=1}^{\infty}(3a_n+2b_n)=33$에서 $\quad 3\sum_{n=1}^{\infty}a_n+2\sum_{n=1}^{\infty}b_n=33$

$\therefore 3\alpha+2\beta=33$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad \alpha=-13$, $\beta=36$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n-\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\alpha-\beta=-49$ 답 ①

다른 풀이 $a_n-b_n=p(2a_n+b_n)+q(3a_n+2b_n)$ (p, q는 상수)으로 놓으면

$a_n-b_n=(2p+3q)a_n+(p+2q)b_n$

$\therefore 2p+3q=1$, $p+2q=-1$

두 식을 연립하여 풀면

$p=5$, $q=-3$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\{5(2a_n+b_n)-3(3a_n+2b_n)\}$

$=5\sum_{n=1}^{\infty}(2a_n+b_n)-3\sum_{n=1}^{\infty}(3a_n+2b_n)$

$=5\cdot10-3\cdot33=-49$

0206 $2a_n-3b_n=c_n$으로 놓으면

$2a_n=3b_n+c_n \qquad \therefore a_n=\frac{3}{2}b_n+\frac{1}{2}c_n$

이때 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n=4$, $\sum_{n=1}^{\infty} c_n=10$이므로

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2}b_n+\frac{1}{2}c_n\right)$

$=\frac{3}{2}\sum_{n=1}^{\infty}b_n+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}c_n$

$=\frac{3}{2}\cdot4+\frac{1}{2}\cdot10=11$ 답 ②

0207 $a_n-\frac{2}{n(n+2)}=b_n$으로 놓으면

$a_n=b_n+\frac{2}{n(n+2)}$ ⋯ ❶

이때 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n=5$이고

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n(n+2)}$

$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)\right.$

$\left.+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}$

$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{3}{2}$ ⋯ ❷

이므로

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{b_n+\frac{2}{n(n+2)}\right\}$

$=\sum_{n=1}^{\infty}b_n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n(n+2)}$

$=5+\frac{3}{2}=\frac{13}{2}$ ⋯ ❸

답 $\frac{13}{2}$

채점 기준	비율
❶ a_n을 b_n, n에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	20 %
❷ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n(n+2)}$의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$의 값을 구할 수 있다.	30 %

0208 $\sum_{n=1}^{\infty}\log a_n=\alpha$, $\sum_{n=1}^{\infty}\log b_n=\beta$라 하면

$\sum_{n=1}^{\infty}\log(a_nb_n)=5$에서

$\sum_{n=1}^{\infty}\log(a_nb_n)=\sum_{n=1}^{\infty}(\log a_n+\log b_n)$

$=\sum_{n=1}^{\infty}\log a_n+\sum_{n=1}^{\infty}\log b_n$

이므로 $\quad \alpha+\beta=5$ ...... ㉠

$\sum_{n=1}^{\infty}\log\frac{a_n^2}{b_n}=1$에서

$\sum_{n=1}^{\infty}\log\frac{a_n^2}{b_n}=\sum_{n=1}^{\infty}(2\log a_n-\log b_n)$

$=2\sum_{n=1}^{\infty}\log a_n-\sum_{n=1}^{\infty}\log b_n$

이므로 $\quad 2\alpha-\beta=1$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$\alpha=2,\ \beta=3$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\log\frac{a_n}{b_n^{\ 3}}=\sum_{n=1}^{\infty}(\log a_n-3\log b_n)$

$=\sum_{n=1}^{\infty}\log a_n-3\sum_{n=1}^{\infty}\log b_n$

$=\alpha-3\beta$

$=2-3\cdot3=-7$

답 -7

0209 ㄱ. $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\alpha,\ \sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=\beta$라 하면

$\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}\{(a_n+b_n)-a_n\}$

$=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)-\sum_{n=1}^{\infty}a_n$

$=\beta-\alpha$

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$도 수렴한다.

ㄴ. $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$이 수렴하면 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$

$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$이 수렴하면 $\lim_{n\to\infty}b_n=0$

$\therefore \lim_{n\to\infty}a_nb_n=\lim_{n\to\infty}a_n\cdot\lim_{n\to\infty}b_n=0$

ㄷ. [반례] $\{a_n\}$: 1, 0, 1, 0, 1, ⋯

$\{b_n\}$: 0, 1, 0, 1, 0, ⋯

이면 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n=0$으로 수렴하고 $\lim_{n\to\infty}a_n\neq0$이지만 $\lim_{n\to\infty}b_n\neq0$이다.

ㄹ. [반례] $\{a_n\}$: 1, -1, 1, -1, 1, ⋯

$\{b_n\}$: -1, 1, -1, 1, -1, ⋯

이면 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$과 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$은 모두 발산하지만 $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=0$이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ①

참고 ㄹ. 수열 $\{a_n\}$: 1, -1, 1, -1, 1, ⋯에 대하여 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$의 제 n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$S_{2n-1}=1,\ S_{2n}=0$

$\therefore \lim_{n\to\infty}S_{2n-1}=1,\ \lim_{n\to\infty}S_{2n}=0$

따라서 $\lim_{n\to\infty}S_{2n-1}\neq\lim_{n\to\infty}S_{2n}$이므로 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$은 발산한다.

0210 ① [반례] $a_n=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$이면

$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=0$

이지만

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

$=\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$

$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$

$=\lim_{n\to\infty}\{(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\cdots+(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\}$

$=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-1)=\infty$

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$은 발산한다.

② $\lim_{n\to\infty}a_n$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$라 하면

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_{n+1}-a_n)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(a_{k+1}-a_k)$

$=\lim_{n\to\infty}\{(a_2-a_1)+(a_3-a_2)$

$+\cdots+(a_{n+1}-a_n)\}$

$=\lim_{n\to\infty}(\underbrace{a_{n+1}}_{\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha}-a_1)=\alpha-a_1$

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_{n+1}-a_n)$도 수렴한다.

③ [반례] $a_n=1,\ b_n=2$이면 $\lim_{n\to\infty}a_n=1,\ \lim_{n\to\infty}b_n=2$

즉 $\lim_{n\to\infty}a_n$과 $\lim_{n\to\infty}b_n$은 모두 수렴하지만

$\lim_{n\to\infty}a_nb_n=2\neq0$

이므로 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$은 발산한다.

④ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$이 수렴하면 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}=0$

따라서 $\lim_{n\to\infty}a_n\neq0$이므로 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$은 발산한다.

⑤ [반례] $a_n=\frac{1}{n(n+1)},\ b_n=1$이면

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$

$=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$

즉 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$은 수렴하고 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$은 발산하지만

$\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=1$

이므로 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$은 수렴한다.

답 ②

0211 ㄱ. $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=\alpha,\ \sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)=\beta$라 하면

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\{(a_n+b_n)+(a_n-b_n)\}$

$=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)$

$=\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{2}\beta$

$\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\{(a_n+b_n)-(a_n-b_n)\}$

$=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)$

$=\frac{1}{2}\alpha-\frac{1}{2}\beta$

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$과 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$도 모두 수렴한다.

ㄴ. $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-1)=\alpha,\ \sum_{n=1}^{\infty}(b_n+1)=\beta$라 하면

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\{(a_n-1)+(b_n+1)\}$

$=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-1)+\sum_{n=1}^{\infty}(b_n+1)=\alpha+\beta$

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$도 수렴한다.

ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty} a_nb_n$이 수렴하므로 $\quad \lim_{n\to\infty} a_nb_n=0$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{a_nb_n}{b_n}=\frac{\lim_{n\to\infty} a_nb_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}=\frac{0}{2}=0$$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

유형 08 급수의 활용; 좌표평면

본책 36쪽

(i) 주어진 조건을 이용하여 점의 좌표, 선분의 길이, 도형의 넓이 등을 n에 대한 식으로 나타낸다.
(ii) 부분합을 이용하여 급수의 합을 구한다.

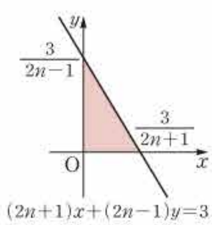
0212 $x-5y+5=0$에서 $y=\frac{1}{5}x+1$이므로 y좌표가 자연수이려면 x좌표가 5의 배수이어야 한다.
$x=5n$ (n은 자연수)으로 놓으면 $y=n+1$이므로

$$a_n=5n,\ b_n=n+1$$

$$\begin{aligned}\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_nb_n}&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5n(n+1)}\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{5}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{5}\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{5}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{1}{5}\end{aligned}$$

답 ①

0213 직선 $(2n+1)x+(2n-1)y=3$의 x절편이 $\frac{3}{2n+1}$, y절편이 $\frac{3}{2n-1}$이므로



$$\begin{aligned}a_n&=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2n-1}\cdot\frac{3}{2n+1}\\&=\frac{9}{4}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\end{aligned}$$ ··· ❶

$$\begin{aligned}\therefore \sum_{n=1}^{\infty}a_n&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9}{4}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{9}{4}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{9}{4}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right\}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{9}{4}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{9}{4}\end{aligned}$$ ··· ❷

답 $\frac{9}{4}$

채점 기준	비율
❶ a_n을 구할 수 있다.	40 %
❷ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$의 값을 구할 수 있다.	60 %

0214 $P_n\left(n,\ \frac{1}{n+1}\right)$이므로

$$\overline{OR_n}=n,\ \overline{OQ_n}=\frac{1}{n+1}$$

$$\therefore \square P_nQ_nOR_n=\frac{n}{n+1}$$

$P_{n+1}\left(n+1,\ \frac{1}{n+2}\right)$이므로

$$\overline{OR_{n+1}}=n+1,\ \overline{OQ_{n+1}}=\frac{1}{n+2}$$

$$\therefore \square P_{n+1}Q_{n+1}OR_{n+1}=\frac{n+1}{n+2}$$

따라서

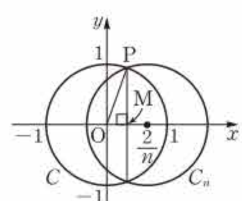
$$\begin{aligned}S_n&=\frac{n+1}{n+2}-\frac{n}{n+1}=\frac{1}{(n+1)(n+2)}\\&=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}S_n&=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}\\&=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

답 ①

0215 오른쪽 그림과 같이 두 원 C와 C_n의 교점 중 한 점을 P라 하고 공통인 현과 x축의 교점을 M이라 하면 직각삼각형 POM에서 $\overline{OP}=1$,



$\overline{OM}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{n}=\frac{1}{n}$이므로

점 M은 두 원의 중심을 연결한 선분의 중점이다.

$$\overline{PM}=\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}=\frac{\sqrt{n^2-1}}{n}$$

따라서 $l_n=2\overline{PM}=\frac{2\sqrt{n^2-1}}{n}$이므로

$$\begin{aligned}(nl_n)^2&=\left(n\cdot\frac{2\sqrt{n^2-1}}{n}\right)^2=4(n^2-1)\\&=4(n-1)(n+1)\end{aligned}$$ ··· ❶

$$\begin{aligned}\therefore &\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(nl_n)^2}\\&=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{4(n-1)(n+1)}\\&=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{8}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{8}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k+1}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{8}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{8}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\\&=\frac{1}{8}\cdot\frac{3}{2}=\frac{3}{16}\end{aligned}$$ ··· ❷

따라서 $p=16$, $q=3$이므로

$p+q=19$ ⋯➌

답 19

채점 기준	비율
➊ $(nl_n)^2$을 구할 수 있다.	40 %
➋ $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(nl_n)^2}$의 값을 구할 수 있다.	50 %
➌ $p+q$의 값을 구할 수 있다.	10 %

유형 09 등비급수의 합

본책 37쪽

(ⅰ) 주어진 급수를 $\sum_{n=1}^{\infty}ar^{n-1}$ 꼴로 나타낸다.

(ⅱ) $-1<r<1$이면 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}ar^{n-1}$의 합이 $\frac{a}{1-r}$임을 이용한다.

0216 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{2n-1}-3^n}{12^{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{-1}\cdot 4^n-3^n}{12\cdot 12^n}$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{24}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{12}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

$$=\frac{1}{24}\cdot\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}-\frac{1}{12}\cdot\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}$$

$$=\frac{1}{48}-\frac{1}{36}$$

$$=-\frac{1}{144}$$

답 ②

0217 4^n에 $n=1, 2, 3, \cdots$을 차례대로 대입하면

$4, 16, 64, 256, \cdots$

이므로

$a_1=4,\ a_2=1,\ a_3=4,\ a_4=1,\ \cdots$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{5^n}=\frac{4}{5}+\frac{1}{5^2}+\frac{4}{5^3}+\frac{1}{5^4}+\frac{4}{5^5}+\frac{1}{5^6}+\cdots$$

$$=\left(\frac{4}{5}+\frac{4}{5^3}+\frac{4}{5^5}+\cdots\right)+\left(\frac{1}{5^2}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{5^6}+\cdots\right)$$

$$=\frac{\frac{4}{5}}{1-\frac{1}{25}}+\frac{\frac{1}{25}}{1-\frac{1}{25}}$$

$$=\frac{5}{6}+\frac{1}{24}$$

$$=\frac{7}{8}$$

답 ④

0218 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_n=ar^{n-1}$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{6^n}{a_n+3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{6^n}{ar^{n-1}+3^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{a}{r}\cdot\left(\frac{r}{6}\right)^n+\left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{a}{r}\cdot\left(\frac{r}{6}\right)^n}$$

즉 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{a}{r}\cdot\left(\frac{r}{6}\right)^n}=30$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a}{r}\cdot\left(\frac{r}{6}\right)^n=\frac{1}{30} \quad \cdots\cdots ㉠$$

$\frac{r}{6}\neq 1$이면 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{r}{6}\right)^n$은 0으로 수렴하거나 발산하므로 ㉠이 성립하려면 $\frac{r}{6}=1$이어야 한다.

$\therefore r=6$

따라서 ㉠에서 $\frac{a}{r}=\frac{1}{30}$, 즉 $\frac{a}{6}=\frac{1}{30}$이므로

$a=\frac{1}{5}$

$\therefore a_n=\frac{1}{5}\cdot 6^{n-1}$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}=\sum_{n=1}^{\infty}5\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}=\frac{5}{1-\frac{1}{6}}=6$$

답 6

0219 $0\le x\le\frac{\pi}{3}$에서 $\frac{1}{2}\le\cos x\le 1$

$\frac{3}{2}\le 1+\cos x\le 2$

$\therefore \frac{1}{2}\le\frac{1}{1+\cos x}\le\frac{2}{3}$

$$\therefore f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\cos x\left(\frac{1}{1+\cos x}\right)^{n-1}$$

$$=\frac{\cos x}{1-\frac{1}{1+\cos x}}$$

$$=1+\cos x \quad \cdots ➊$$

(1) 함수 $f(x)$는 $\cos x=1$, 즉 $x=0$일 때 최댓값 2를 갖는다. ⋯➋

(2) 함수 $f(x)$는 $\cos x=\frac{1}{2}$, 즉 $x=\frac{\pi}{3}$일 때 최솟값 $\frac{3}{2}$을 갖는다. ⋯➌

답 (1) 최댓값: 2, $x=0$ (2) 최솟값: $\frac{3}{2}$, $x=\frac{\pi}{3}$

채점 기준	비율
➊ $f(x)$를 간단히 할 수 있다.	50 %
➋ $f(x)$의 최댓값과 그때의 x의 값을 구할 수 있다.	25 %
➌ $f(x)$의 최솟값과 그때의 x의 값을 구할 수 있다.	25 %

0220 $x^n=(-5)^{n-1}$에서

(ⅰ) $n=2k\ (k=1, 2, 3, \cdots)$일 때,

$x^n=(-5)^{2k-1}=-5^{2k-1}<0$

이때 n은 짝수이므로 실근의 개수는 0이다.

$\therefore a_{2k}=0$

(ⅱ) $n=2k+1\ (k=1, 2, 3, \cdots)$일 때,

$x^n=(-5)^{2k}=5^{2k}>0$

이때 n은 홀수이므로 실근의 개수는 1이다.

$\therefore a_{2k+1}=1$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $a_n=\begin{cases}0 & (n=2k)\\ 1 & (n=2k+1)\end{cases}$ $(k=1, 2, 3, \cdots)$

$$\therefore \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} = \frac{a_2}{3^2} + \frac{a_3}{3^3} + \frac{a_4}{3^4} + \frac{a_5}{3^5} + \frac{a_6}{3^6} + \frac{a_7}{3^7} + \cdots$$
$$= \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^5} + \frac{1}{3^7} + \cdots$$
$$= \frac{\frac{1}{27}}{1-\frac{1}{9}} = \frac{1}{24}$$

답 ①

SSEN 특강

실수 a와 2 이상의 자연수 n에 대하여

$x^n = a$

를 만족시키는 x의 값 중 실수인 것은 다음과 같다.

	$a>0$	$a=0$	$a<0$
n이 짝수	$\sqrt[n]{a}$, $-\sqrt[n]{a}$	0	없다.
n이 홀수	$\sqrt[n]{a}$	0	$\sqrt[n]{a}$

유형 10 합이 주어진 등비급수

본책 38쪽

$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \alpha$ (α는 실수) ➡ $\frac{a}{1-r} = \alpha$

0221 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = -2$에서

$$\frac{a}{1-r} = -2 \qquad \therefore a = -2(1-r) \qquad \cdots\cdots ㉠$$

수열 $\{a_n^2\}$은 첫째항이 a^2, 공비가 r^2인 등비수열이므로

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = 12$에서

$$\frac{a^2}{1-r^2} = 12 \qquad \therefore \frac{a^2}{(1+r)(1-r)} = 12 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠을 ㉡에 대입하면 $\frac{4(1-r)^2}{(1+r)(1-r)} = 12$

$$\frac{1-r}{1+r} = 3, \qquad 1-r = 3+3r$$
$$4r = -2 \qquad \therefore r = -\frac{1}{2}$$

$r = -\frac{1}{2}$을 ㉠에 대입하면

$$a = -3$$

따라서 수열 $\{a_n^3\}$은 첫째항이 $a^3 = -27$, 공비가 $r^3 = -\frac{1}{8}$인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^3 = \frac{-27}{1-\left(-\frac{1}{8}\right)} = -24$$

답 ⑤

0222 주어진 급수는 첫째항이 1, 공비가 $-\frac{1}{2}x$인 등비급수이고 그 합이 4이므로

$$\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}x\right)} = 4, \qquad 1 = 4+2x$$
$$2x = -3 \qquad \therefore x = -\frac{3}{2}$$

답 $-\frac{3}{2}$

0223 주어진 방정식의 좌변은 첫째항이 1, 공비가 $\sin^2 x$인 등비급수이므로

$$1+\sin^2 x+\sin^4 x+\sin^6 x+\cdots = \frac{1}{1-\sin^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

따라서 $\frac{1}{\cos^2 x} = 2$에서 $\cos^2 x = \frac{1}{2}$

$$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\because 0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$$
$$\therefore x = \frac{\pi}{4}$$

답 $\frac{\pi}{4}$

0224 두 등비수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 공비를 r라 하면

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 8$에서 $\frac{a_1}{1-r} = 8$ $\cdots\cdots ㉠$

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = 6$에서 $\frac{b_1}{1-r} = 6$ $\cdots\cdots ㉡$

㉠$-$㉡을 하면 $\frac{a_1-b_1}{1-r} = 2$

이때 $a_1-b_1=1$이므로 $\frac{1}{1-r} = 2$ $\therefore r = \frac{1}{2}$

$r = \frac{1}{2}$을 ㉠, ㉡에 대입하면 $a_1 = 4$, $b_1 = 3$

따라서 수열 $\{a_nb_n\}$은 첫째항이 $a_1b_1 = 4\cdot3 = 12$, 공비가 $r^2 = \frac{1}{4}$인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_nb_n = \frac{12}{1-\frac{1}{4}} = 16$$

답 16

0225 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n+(-x)^n}{3^n} = 0+2\cdot\left(\frac{x}{3}\right)^2+0+2\cdot\left(\frac{x}{3}\right)^4+\cdots$

따라서 주어진 급수는 첫째항이 $2\cdot\left(\frac{x}{3}\right)^2$, 공비가 $\left(\frac{x}{3}\right)^2$인 등비급수이고 그 합이 $\frac{8}{5}$이므로

$$\frac{\frac{2}{9}x^2}{1-\frac{x^2}{9}} = \frac{8}{5}, \qquad \frac{2x^2}{9-x^2} = \frac{8}{5}$$
$$10x^2 = 72-8x^2, \qquad x^2 = 4$$
$$\therefore x = 2 \ (\because x > 0)$$

답 ②

0226 수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면 $a_2 = ar$, $a_3 = ar^2$, $a_5 = ar^4$이므로

$$2ar^2 = ar+ar^4$$

$ar \neq 0$이므로 양변을 ar로 나누면

$$2r = 1+r^3, \qquad r^3-2r+1 = 0$$
$$(r-1)(r^2+r-1) = 0$$
$$\therefore r = 1 \text{ 또는 } r = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$$

이때 수열 $\{a_n\}$의 모든 항이 양수이면서 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하려면

$0 < r < 1$이어야 하므로 $r = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ ⋯→ ❶

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 4+2\sqrt{5}$에서

$$\frac{a}{1-\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} = 4+2\sqrt{5}, \qquad \frac{2a}{3-\sqrt{5}} = 4+2\sqrt{5}$$

$\therefore\ a=(2+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})=1+\sqrt{5}$ ··· ❷

$\therefore\ a_2=ar=(1+\sqrt{5})\cdot\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

$=2$ ··· ❸

답 2

채점 기준	비율
❶ 수열 $\{a_n\}$의 공비를 구할 수 있다.	40 %
❷ 수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 구할 수 있다.	40 %
❸ a_2를 구할 수 있다.	20 %

SSEN 특강 등차중항과 등비중항

세 수 a, b, c가 이 순서대로
① 등차수열을 이룬다. ➡ b는 a와 c의 등차중항이다.
➡ $2b=a+c$
② 등비수열을 이룬다. ➡ b는 a와 c의 등비중항이다.
➡ $b^2=ac$

유형 11~12 등비급수의 수렴 조건

본책 39쪽

① 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$이 수렴하려면 ➡ $-1<r<1$

② 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$이 수렴하려면 ➡ $a=0$ 또는 $-1<r<1$

0227 주어진 급수의 첫째항과 공비가 $\dfrac{\log_2 x^2-1}{5}$이므로 급수가 수렴하려면

$-1<\dfrac{\log_2 x^2-1}{5}<1$

$-5<\log_2 x^2-1<5,\quad -4<\log_2 x^2<6$

$\therefore\ 2^{-4}<x^2<2^6$, 즉 $\dfrac{1}{16}<x^2<64$

따라서 정수 x는 ±1, ±2, ±3, ±4, ±5, ±6, ±7의 14개이다.

답 ④

0228 주어진 급수는 첫째항과 공비가 $2\cos\theta$이므로 급수가 수렴하려면

$-1<2\cos\theta<1,\quad -\dfrac{1}{2}<\cos\theta<\dfrac{1}{2}$

$\therefore\ \dfrac{\pi}{3}<\theta<\dfrac{2}{3}\pi\ (\because\ 0<\theta<\pi)$

답 $\dfrac{\pi}{3}<\theta<\dfrac{2}{3}\pi$

0229 주어진 급수는 첫째항이 x, 공비가 $\dfrac{x-2}{3}$이므로 급수가 수렴하려면

$x=0$ 또는 $-1<\dfrac{x-2}{3}<1$

$-1<\dfrac{x-2}{3}<1$에서 $\quad -3<x-2<3$

$\therefore\ -1<x<5$

따라서 정수 x는 0, 1, 2, 3, 4이므로 구하는 합은

$0+1+2+3+4=10$

답 ②

0230 (i) 수열 $\{(x-1)(3x-1)^n\}$의 첫째항이 $(x-1)(3x-1)$, 공비가 $3x-1$이므로 수열이 수렴하려면

$(x-1)(3x-1)=0$ 또는 $-1<3x-1\le1$

$\therefore\ x-1=0$ 또는 $-1<3x-1\le1$

$x-1=0$에서 $\quad x=1$ ······ ㉠

$-1<3x-1\le1$에서 $\quad 0<3x\le2$

$\therefore\ 0<x\le\dfrac{2}{3}$ ······ ㉡

㉠, ㉡에서 $\quad\therefore\ x=1$ 또는 $0<x\le\dfrac{2}{3}$ ··· ❶

(ii) 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(x^2-x+1)^n$의 첫째항과 공비가 x^2-x+1이므로 급수가 수렴하려면

$-1<x^2-x+1<1$

$x^2-x+1>-1$에서 $\quad x^2-x+2>0$

이때 $x^2-x+2=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{7}{4}>0$이므로 모든 실수 x에 대하여 성립한다. ······ ㉢

$x^2-x+1<1$에서 $\quad x^2-x<0,\quad x(x-1)<0$

$\therefore\ 0<x<1$ ······ ㉣

㉢, ㉣에서 $\quad 0<x<1$ ··· ❷

(i), (ii)에서 $\quad 0<x\le\dfrac{2}{3}$ ··· ❸

답 $0<x\le\dfrac{2}{3}$

채점 기준	비율
❶ 주어진 수열이 수렴하도록 하는 x의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❷ 주어진 급수가 수렴하도록 하는 x의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❸ x의 값의 범위를 구할 수 있다.	20 %

0231 주어진 급수는 첫째항이 $(x-3)^2$, 공비가 $\dfrac{x-1}{2}$이므로 급수가 수렴하려면

$(x-3)^2=0$ 또는 $-1<\dfrac{x-1}{2}<1$

(i) $(x-3)^2=0$, 즉 $x=3$일 때,

$S=0$

(ii) $-1<\dfrac{x-1}{2}<1$, 즉 $-1<x<3$일 때,

$S=\dfrac{(x-3)^2}{1-\dfrac{x-1}{2}}=\dfrac{2(x-3)^2}{-(x-3)}=-2x+6$

이때 $-1<x<3$이므로 $\quad -6<-2x<2$

$\therefore\ 0<-2x+6<8$, 즉 $0<S<8$

(i), (ii)에서 $\quad 0\le S<8$

따라서 정수 S의 최댓값은 7이다.

답 ③

0232 $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$이 수렴하므로 $\quad -1<r<1$ ······ ㉠

① $\sum_{n=1}^{\infty} r^{2n}=\sum_{n=1}^{\infty}(r^2)^n$은 공비가 r^2인 등비급수이고 ㉠에서

$0\le r^2<1$

따라서 주어진 급수는 수렴한다.

② $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r-1}{3}\right)^n$은 공비가 $\frac{r-1}{3}$인 등비급수이고 ㉠에서

$$-2<r-1<0 \qquad \therefore -\frac{2}{3}<\frac{r-1}{3}<0$$

따라서 주어진 급수는 수렴한다.

③ $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r+1}{2}\right)^n$은 공비가 $\frac{r+1}{2}$인 등비급수이고 ㉠에서

$$0<r+1<2 \qquad \therefore 0<\frac{r+1}{2}<1$$

따라서 주어진 급수는 수렴한다.

④ $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{4}-1\right)^n$은 공비가 $\frac{r}{4}-1$인 등비급수이고 ㉠에서

$$-\frac{1}{4}<\frac{r}{4}<\frac{1}{4} \qquad \therefore -\frac{5}{4}<\frac{r}{4}-1<-\frac{3}{4}$$

따라서 주어진 급수는 항상 수렴한다고 할 수 없다.

⑤ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n+(-r)^n}{2}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}r^n+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-r)^n$

$\sum_{n=1}^{\infty}r^n$이 수렴하므로 $\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}r^n$도 수렴한다.

$\sum_{n=1}^{\infty}(-r)^n$은 공비가 $-r$인 등비급수이고 ㉠에서

$-1<-r<1$이므로 $\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-r)^n$도 수렴한다.

따라서 주어진 급수는 수렴한다.

답 ④

0233 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하자.

ㄱ. $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$이 수렴하면 $\quad a=0$ 또는 $-1<r<1$

수열 $\{a_{2n}\}$의 첫째항은 ar, 공비는 r^2이므로

$ar=0$ 또는 $0\le r^2<1$ $\quad a_2, a_4, a_6, \cdots$, 즉 $ar, ar^3, ar^5, \cdots$

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}$도 수렴한다.

ㄴ. $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$이 발산하면 $\quad a\ne0$, $r\le-1$ 또는 $r\ge1$

수열 $\{a_{2n-1}\}$의 첫째항은 a, 공비는 r^2이므로

$a\ne0$, $r^2\ge1$ $\quad a_1, a_3, a_5, \cdots$, 즉 $a, ar^2, ar^4, \cdots$

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}$도 발산한다.

ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n+\frac{1}{3}\right)$이 수렴하면

$$\lim_{n\to\infty}\left(a_n+\frac{1}{3}\right)=0 \qquad \therefore \lim_{n\to\infty}a_n=-\frac{1}{3}\ne0$$

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$은 발산한다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ㄱ, ㄴ

0234 $\sum_{n=1}^{\infty}a^n$과 $\sum_{n=1}^{\infty}b^n$이 모두 수렴하므로

$-1<a<1$ ...... ㉠

$-1<b<1$ ...... ㉡

ㄱ. $\sum_{n=1}^{\infty}(ab)^n$은 첫째항과 공비가 ab인 등비급수이고 ㉠, ㉡에서

$$-1<ab<1$$

따라서 주어진 급수는 수렴한다.

ㄴ. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a}{b}\right)^n$은 첫째항과 공비가 $\frac{a}{b}$인 등비급수이다.

[반례] $a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{1}{3}$이면 $\quad \frac{a}{b}=\frac{3}{2}>1$

따라서 주어진 급수는 발산한다.

ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty}(a+b)^n$은 첫째항과 공비가 $a+b$인 등비급수이고 ㉠, ㉡에서

$$-2<a+b<2$$

따라서 주어진 급수는 항상 수렴한다고 할 수 없다.

ㄹ. $\sum_{n=1}^{\infty}(|a|-|b|)^n$은 첫째항과 공비가 $|a|-|b|$인 등비급수이고 ㉠, ㉡에서 $\quad 0\le|a|<1$, $0\le|b|<1$

$$\therefore -1<|a|-|b|<1$$

따라서 주어진 급수는 수렴한다.

이상에서 항상 수렴하는 급수인 것은 ㄱ, ㄹ이다. 답 ③

SSEN 특강 부등식의 사칙계산

실수 x, y에 대하여 $a<x<b$, $c<y<d$일 때

① $a+c<x+y<b+d$

② $a-d<x-y<b-c$

③ a, b, c, d가 양수이면
$ac<xy<bd$

④ a, b, c, d 중에 음수가 있으면
ac, ad, bc, bd 중에서 $\quad$ (최솟값)$<xy<$(최댓값)

0235 두 등비수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 첫째항을 각각 a, b, 공비를 각각 r_1, r_2라 하자.

ㄱ. $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$과 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$이 모두 수렴하면

$a=0$ 또는 $-1<r_1<1$ ...... ㉠

$b=0$ 또는 $-1<r_2<1$ ...... ㉡

$\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$은 첫째항이 ab, 공비가 r_1r_2인 등비급수이고 ㉠, ㉡에서 $\quad ab=0$ 또는 $-1<r_1r_2<1$

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$은 수렴한다.

ㄴ. [반례] $a_n=-2^n$, $b_n=2^n$이면 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$과 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$은 모두 발산하지만 $\quad \lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=0$

ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^3$은 첫째항이 a^3, 공비가 r_1^3인 등비급수이고, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n^3$은 첫째항이 b^3, 공비가 r_2^3인 등비급수이다.

이때 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^3$과 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n^3$이 모두 수렴하면

$a^3=0$ 또는 $-1<r_1^3<1$,

$b^3=0$ 또는 $-1<r_2^3<1$

$\therefore a=0$ 또는 $-1<r_1<1$,

$b=0$ 또는 $-1<r_2<1$

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$과 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$이 모두 수렴하므로 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)$도 수렴한다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ④

유형 13 S_n과 a_n 사이의 관계를 이용하는 급수 (본책 40쪽)

$a_1=S_1$, $a_n=S_n-S_{n-1}$ $(n\geq 2)$임을 이용하여 일반항 a_n을 구한다.

0236 (i) $n=1$일 때, $a_1=S_1=2$

(ii) $n\geq 2$일 때,

$$\begin{aligned}a_n&=S_n-S_{n-1}\\&=\frac{n(3n+1)}{2}-\frac{(n-1)(3n-2)}{2}\\&=\frac{6n-2}{2}=3n-1 \qquad \cdots\cdots ㉠\end{aligned}$$

이때 $a_1=2$는 $n=1$을 ㉠에 대입한 것과 같으므로

$a_n=3n-1$

$$\begin{aligned}\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_na_{n+1}}&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-1)(3n+2)}\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3n-1}-\frac{1}{3n+2}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3k-1}-\frac{1}{3k+2}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{8}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{3n-1}-\frac{1}{3n+2}\right)\right\}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3n+2}\right)\\&=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{6}\end{aligned}$$

답 ①

0237 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

$S_n=12\left\{1-\left(\frac{3}{4}\right)^n\right\}$

(i) $n=1$일 때, $a_1=S_1=3$

(ii) $n\geq 2$일 때,

$$\begin{aligned}a_n&=S_n-S_{n-1}\\&=12\left\{1-\left(\frac{3}{4}\right)^n\right\}-12\left\{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}\right\}\\&=12\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}\cdot\left(-\frac{3}{4}+1\right)\\&=3\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} \qquad \cdots\cdots ㉠\end{aligned}$$

이때 $a_1=3$은 $n=1$을 ㉠에 대입한 것과 같으므로

$a_n=3\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$ ⋯ ❶

$\therefore a_1+a_3+a_5+a_7+\cdots$

$$=3+3\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2+3\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^4+3\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^6+\cdots$$

$$=\frac{3}{1-\frac{9}{16}}=\frac{48}{7}$$ ⋯ ❷

답 $\frac{48}{7}$

채점 기준	비율
❶ a_n을 구할 수 있다.	40 %
❷ 급수 $a_1+a_3+a_5+a_7+\cdots$의 합을 구할 수 있다.	60 %

0238 $\log_3(S_n+1)=n$에서 $S_n+1=3^n$

$\therefore S_n=3^n-1$

(i) $n=1$일 때, $a_1=S_1=2$

(ii) $n\geq 2$일 때,

$$\begin{aligned}a_n&=S_n-S_{n-1}=3^n-1-(3^{n-1}-1)\\&=2\cdot 3^{n-1} \qquad \cdots\cdots ㉠\end{aligned}$$

이때 $a_1=2$는 $n=1$을 ㉠에 대입한 것과 같으므로

$a_n=2\cdot 3^{n-1}$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2\cdot 3^{n-1}}=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{4}$$

답 ⑤

0239 $b_n=5^na_n$으로 놓고, 수열 $\{b_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

$S_n=2^n-1$

(i) $n=1$일 때, $b_1=S_1=1$

(ii) $n\geq 2$일 때,

$$\begin{aligned}b_n&=S_n-S_{n-1}\\&=(2^n-1)-(2^{n-1}-1)\\&=2^{n-1} \qquad \cdots\cdots ㉠\end{aligned}$$

이때 $b_1=1$은 $n=1$을 ㉠에 대입한 것과 같으므로

$b_n=2^{n-1}$

즉 $5^na_n=2^{n-1}$이므로 $a_n=\frac{2^{n-1}}{5^n}$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{2^{n-1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^n}=\frac{\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}}=\frac{1}{4}$$

답 $\frac{1}{4}$

유형 14 등비급수의 도형에의 활용; 점의 좌표 (본책 41쪽)

한없이 움직이는 점이 가까워지는 점의 x좌표, y좌표를 각각 등비급수를 이용하여 나타낸다.

0240 $\overline{OP_1}=1$, $\overline{P_1P_2}=\frac{3}{4}$, $\overline{P_2P_3}=\left(\frac{3}{4}\right)^2$, $\overline{P_3P_4}=\left(\frac{3}{4}\right)^3$, ⋯

점 P_n이 한없이 가까워지는 점의 좌표를 (x, y)라 하면

$$\begin{aligned}x&=\overline{OP_1}-\overline{P_2P_3}+\overline{P_4P_5}-\overline{P_6P_7}+\cdots\\&=1-\left(\frac{3}{4}\right)^2+\left(\frac{3}{4}\right)^4-\left(\frac{3}{4}\right)^6+\cdots\\&=\frac{1}{1-\left(-\frac{9}{16}\right)}=\frac{16}{25}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y&=\overline{P_1P_2}-\overline{P_3P_4}+\overline{P_5P_6}-\overline{P_7P_8}+\cdots\\&=\frac{3}{4}-\left(\frac{3}{4}\right)^3+\left(\frac{3}{4}\right)^5-\left(\frac{3}{4}\right)^7+\cdots\\&=\frac{\frac{3}{4}}{1-\left(-\frac{9}{16}\right)}=\frac{12}{25}\end{aligned}$$

따라서 점 P_n이 한없이 가까워지는 점의 좌표는 $\left(\frac{16}{25}, \frac{12}{25}\right)$이다.

답 ④

0241 $\overline{OP_1}=1$, $\overline{P_1P_2}=\frac{1}{2}$, $\overline{P_2P_3}=\left(\frac{1}{2}\right)^2$, $\overline{P_3P_4}=\left(\frac{1}{2}\right)^3$, $\cdots$

$$x=\overline{OP_1}\cos 30°-\overline{P_1P_2}\cos 30°+\overline{P_2P_3}\cos 30°-\overline{P_3P_4}\cos 30°+\cdots$$
$$=1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\cdots$$
$$=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{\sqrt{3}}{3} \quad \cdots ❶$$

$$y=\overline{OP_1}\sin 30°+\overline{P_1P_2}\sin 30°+\overline{P_2P_3}\sin 30°+\overline{P_3P_4}\sin 30°+\cdots$$
$$=1\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\frac{1}{2}+\cdots$$
$$=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1 \quad \cdots ❷$$
$$\therefore xy=\frac{\sqrt{3}}{3} \quad \cdots ❸$$

답 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

채점 기준	비율
❶ x의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ y의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ xy의 값을 구할 수 있다.	20 %

0242 원 $x^2+y^2=\left(\frac{1}{2}\right)^n$, 즉 $x^2+y^2=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2n}$에 접하고 기울기가 1인 직선의 방정식은

$$y=x\pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\cdot\sqrt{2},\ 즉\ y=x\pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}$$

이때 제4사분면을 지나는 접선의 방정식은 $y=x-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}$이므로

$$a_n=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}$$

따라서

$$a_{2n}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2n-1}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2(n-1)}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}=\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{1-\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$$

답 ④

SSEN 특강 기울기가 주어진 원의 접선의 방정식

원 $x^2+y^2=r^2\ (r>0)$에 접하고 기울기가 m인 직선의 방정식은
$$y=mx\pm r\sqrt{m^2+1}$$

0243 $\overline{OP_1}=1$, $\overline{P_1P_2}=\frac{2}{3}$, $\overline{P_2P_3}=\left(\frac{2}{3}\right)^2$, $\overline{P_3P_4}=\left(\frac{2}{3}\right)^3$, $\cdots$

점 P_n이 한없이 가까워지는 점의 y좌표는

$$\overline{OP_1}-\overline{P_1P_2}\cos 60°-\overline{P_2P_3}\cos 60°+\overline{P_3P_4}-\overline{P_4P_5}\cos 60°-\overline{P_5P_6}\cos 60°+\cdots$$
$$=1-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}-\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot\frac{1}{2}+\left(\frac{2}{3}\right)^3-\left(\frac{2}{3}\right)^4\cdot\frac{1}{2}-\left(\frac{2}{3}\right)^5\cdot\frac{1}{2}+\cdots$$
$$=\left\{1+\left(\frac{2}{3}\right)^3+\left(\frac{2}{3}\right)^6+\cdots\right\}-\frac{1}{3}\left\{1+\left(\frac{2}{3}\right)^3+\left(\frac{2}{3}\right)^6+\cdots\right\}-\frac{2}{9}\left\{1+\left(\frac{2}{3}\right)^3+\left(\frac{2}{3}\right)^6+\cdots\right\}$$
$$=\left(1-\frac{1}{3}-\frac{2}{9}\right)\left\{1+\left(\frac{2}{3}\right)^3+\left(\frac{2}{3}\right)^6+\cdots\right\}$$
$$=\frac{4}{9}\cdot\frac{1}{1-\frac{8}{27}}$$
$$=\frac{12}{19}$$

답 $\frac{12}{19}$

유형 15~18 등비급수의 활용 본책 42~44쪽

(i) 도형의 길이, 넓이 등이 줄어드는 규칙을 찾는다.
(ii) (i)에서 구한 규칙이 등비급수이면 첫째항 a와 공비 $r\ (|r|<1)$를 구한다.
(iii) 등비급수의 합이 $\frac{a}{1-r}$임을 이용한다.

0244 $\angle XOY=30°$이므로

$$\overline{P_0P_1}=\overline{OP_0}\sin 30°=2\cdot\frac{1}{2}=1$$

$\angle OP_0P_1=60°$이므로

$$\overline{P_1P_2}=\overline{P_0P_1}\sin 60°=1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\angle OP_1P_2=60°$이므로

$$\overline{P_2P_3}=\overline{P_1P_2}\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$
$$\vdots$$
$$\therefore \overline{P_0P_1}+\overline{P_1P_2}+\overline{P_2P_3}+\cdots=1+\frac{\sqrt{3}}{2}+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\cdots$$
$$=\frac{1}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}$$
$$=\frac{2}{2-\sqrt{3}}$$
$$=2(2+\sqrt{3})$$

답 ④

0245 $\angle P_1OP_2=45°$이므로 — 직선 $y=x$의 기울기가 1이므로 $\tan(\angle P_1OP_2)=1$ $\therefore \angle P_1OP_2=45°$

$$\overline{P_1P_2}=\overline{OP_1}\sin 45°=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\angle P_2OP_3=45°$이고 $\overline{OP_2}=\overline{P_1P_2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$이므로 — $\triangle OP_1P_2$는 직각이등변삼각형

$$\overline{P_2P_3}=\overline{OP_2}\sin 45°=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

$\angle P_3OP_4=45°$이고 $\overline{OP_3}=\overline{P_2P_3}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$이므로

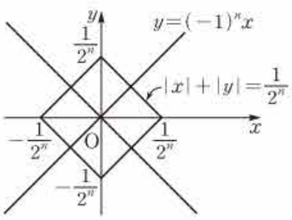
$$\overline{P_3P_4}=\overline{OP_3}\sin 45°=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3$$
$$\vdots \quad \cdots ❶$$

$$\therefore \overline{P_1P_2}+\overline{P_2P_3}+\overline{P_3P_4}+\cdots=\frac{\sqrt{2}}{2}+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3+\cdots$$
$$=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}$$
$$=1+\sqrt{2} \quad \cdots ❷$$

답 $1+\sqrt{2}$

채점 기준	비율
❶ $\overline{P_1P_2}$, $\overline{P_2P_3}$, $\overline{P_3P_4}$, …의 길이를 구할 수 있다.	50 %
❷ $\overline{P_1P_2}+\overline{P_2P_3}+\overline{P_3P_4}+\cdots$의 값을 구할 수 있다.	50 %

0246 도형 $|x|+|y|=\frac{1}{2^n}$과 직선 $y=(-1)^n x$는 오른쪽 그림과 같으므로 $\overline{A_nB_n}$의 길이는 도형 $|x|+|y|=\frac{1}{2^n}$의 한 변의 길이와 같다.
└ 정사각형



$n=1$일 때, 도형 $|x|+|y|=\frac{1}{2}$과 x축, y축의 양의 방향이 만나는 점의 좌표는 각각 $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$, $\left(0, \frac{1}{2}\right)$이므로

$$\overline{A_1B_1}=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$n=2$일 때, 도형 $|x|+|y|=\frac{1}{2^2}$과 x축, y축의 양의 방향이 만나는 점의 좌표는 각각 $\left(\frac{1}{2^2}, 0\right)$, $\left(0, \frac{1}{2^2}\right)$이므로

$$\overline{A_2B_2}=\sqrt{\left(\frac{1}{2^2}\right)^2+\left(\frac{1}{2^2}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

$n=3$일 때, 도형 $|x|+|y|=\frac{1}{2^3}$과 x축, y축의 양의 방향이 만나는 점의 좌표는 각각 $\left(\frac{1}{2^3}, 0\right)$, $\left(0, \frac{1}{2^3}\right)$이므로

$$\overline{A_3B_3}=\sqrt{\left(\frac{1}{2^3}\right)^2+\left(\frac{1}{2^3}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{8}$$

⋮

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\overline{A_nB_n}=\overline{A_1B_1}+\overline{A_2B_2}+\overline{A_3B_3}+\cdots$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{8}+\cdots$$
$$=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1-\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$$

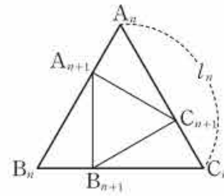
답 $\sqrt{2}$

0247 원 C_1, C_2, C_3의 반지름의 길이는 1, $\frac{1}{2}$, $\left(\frac{1}{2}\right)^2$, …이므로

$$l_1=2\pi\cdot 1,\ l_2=2\pi\cdot\frac{1}{2},\ l_3=2\pi\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2,\ \cdots$$
$$\therefore l_n=2\pi\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$
$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}l_n=\sum_{n=1}^{\infty}2\pi\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{2\pi}{1-\frac{1}{2}}=4\pi$$

답 4π

0248 오른쪽 그림과 같이 정삼각형 $A_nB_nC_n$의 한 변의 길이를 l_n이라 하면



$$\overline{A_nA_{n+1}}=\frac{1}{3}l_n,\ \overline{A_nC_{n+1}}=\frac{2}{3}l_n$$

$\triangle A_nA_{n+1}C_{n+1}$에서 코사인법칙에 의하여

$$l_{n+1}^2$$
$$=\left(\frac{1}{3}l_n\right)^2+\left(\frac{2}{3}l_n\right)^2-2\cdot\frac{1}{3}l_n\cdot\frac{2}{3}l_n\cdot\cos 60°$$
$$=\frac{1}{3}l_n^2$$
$$\therefore l_{n+1}=\frac{1}{\sqrt{3}}l_n$$

이때 $a_n=3l_n$이므로

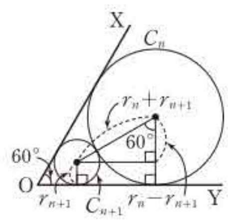
$$a_{n+1}=3l_{n+1}=3\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}l_n=\frac{1}{\sqrt{3}}a_n$$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 9, 공비가 $\frac{1}{\sqrt{3}}$인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{9}{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}=\frac{9\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}=\frac{27+9\sqrt{3}}{2}$$

답 ③

0249 원 C_n의 반지름의 길이를 r_n이라 하면 오른쪽 그림에서



$$\frac{r_n-r_{n+1}}{r_n+r_{n+1}}=\underbrace{\frac{1}{2}}_{\cos 60°}$$
$$2r_n-2r_{n+1}=r_n+r_{n+1}$$
$$\therefore r_{n+1}=\frac{1}{3}r_n \quad \cdots ❶$$

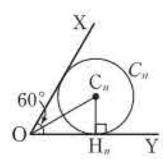
따라서 수열 $\{r_n\}$은 첫째항이 1, 공비가 $\frac{1}{3}$인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}l_n=2\pi r_1+2\pi r_2+2\pi r_3+\cdots$$
$$=2\pi+2\pi\cdot\frac{1}{3}+2\pi\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2+\cdots$$
$$=\frac{2\pi}{1-\frac{1}{3}}=3\pi \quad \cdots ❷$$

답 3π

채점 기준	비율
❶ r_n과 r_{n+1} 사이의 관계식을 구할 수 있다.	40 %
❷ $\sum_{n=1}^{\infty}l_n$의 값을 구할 수 있다.	60 %

참고 오른쪽 그림과 같이 원 C_n의 중심을 C_n, 원 C_n과 $\overline{OY}$의 접점을 H_n이라 하면



$$\angle C_nOH_n=\frac{1}{2}\cdot 60°=30°$$
$$\therefore \angle OC_nH_n=60°$$

0250 색칠한 정사각형의 넓이를 큰 순서대로 S_1, S_2, S_3, …이라 하면

$$S_1=2\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{2},\ S_2=S_1\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4},$$
$$S_3=S_2\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2,\ \cdots$$

$\therefore\ S_n=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

따라서 색칠한 정사각형의 넓이의 합은

$$\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{2}{3}$$

답 $\frac{2}{3}$

0251 정사각형 ABCD의 넓이는 $2\cdot2=4$이므로

$S_1=4\cdot\frac{1}{2}=2,\ S_2=S_1\cdot\frac{1}{2}=2\cdot\frac{1}{2},$

$S_3=S_2\cdot\frac{1}{2}=2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2,\ \cdots$

$\therefore\ S_n=2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}S_n=\sum_{n=1}^{\infty}2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{2}{1-\frac{1}{2}}=4$

답 ⑤

0252 $S_1=3^2+4\cdot1^2,\ S_2=3^2+4\cdot1^2+4\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2,$

$S_3=3^2+4\cdot1^2+4\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2+4\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^4,\ \cdots$

$\therefore\ S_n=3^2+\sum_{k=1}^{n}4\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^{k-1}$

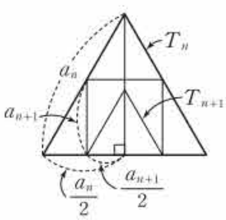
$\therefore\ \lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left\{3^2+\sum_{k=1}^{n}4\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^{k-1}\right\}$

$=3^2+\frac{4}{1-\frac{1}{9}}=9+\frac{9}{2}=\frac{27}{2}$

답 ①

0253 $S_1=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot2^2=\sqrt{3}$ ··· ❶

오른쪽 그림과 같이 정삼각형 T_n의 한 변의 길이를 a_n이라 하면



$\frac{a_{n+1}}{\frac{a_n}{2}-\frac{a_{n+1}}{2}}=\underbrace{\sqrt{3}}_{\tan 60^\circ}$

$a_{n+1}=\frac{\sqrt{3}}{2}a_n-\frac{\sqrt{3}}{2}a_{n+1}$

$(2+\sqrt{3})a_{n+1}=\sqrt{3}a_n$

$\therefore\ a_{n+1}=\frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}a_n=(2\sqrt{3}-3)a_n$

이때 $S_n=\frac{\sqrt{3}}{4}{a_n}^2$이므로

$S_{n+1}=\frac{\sqrt{3}}{4}{a_{n+1}}^2=\frac{\sqrt{3}}{4}\{(2\sqrt{3}-3)a_n\}^2$

$=\frac{\sqrt{3}}{4}(21-12\sqrt{3}){a_n}^2=(21-12\sqrt{3})S_n$ ··· ❷

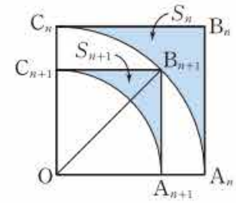
따라서 수열 $\{S_n\}$은 첫째항이 $\sqrt{3}$, 공비가 $21-12\sqrt{3}$인 등비수열이므로

$\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{\sqrt{3}}{1-(21-12\sqrt{3})}=\frac{9+5\sqrt{3}}{8}$ ··· ❸

답 $\frac{9+5\sqrt{3}}{8}$

채점 기준	비율
❶ S_1의 값을 구할 수 있다.	10 %
❷ S_n과 S_{n+1} 사이의 관계식을 구할 수 있다.	50 %
❸ $\sum_{n=1}^{\infty}S_n$의 값을 구할 수 있다.	40 %

0254 오른쪽 그림과 같이 $\square OA_nB_nC_n$에서 점 O를 중심으로 하고 $\overline{OA_n}$을 반지름으로 하는 사분원을 제외하고 남은 부분의 넓이를 S_n이라 하면



$S_1=2^2-\frac{1}{4}\pi\cdot2^2=4-\pi$

$S_n=\overline{OA_n}^2-\frac{1}{4}\pi\cdot\overline{OA_n}^2$이고

$\overline{OA_{n+1}}=\overline{OB_{n+1}}\cos45^\circ=\frac{1}{\sqrt{2}}\overline{OA_n}$이므로

$S_{n+1}=\overline{OA_{n+1}}^2-\frac{1}{4}\pi\cdot\overline{OA_{n+1}}^2$

$=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\overline{OA_n}\right)^2-\frac{1}{4}\pi\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\overline{OA_n}\right)^2$

$=\frac{1}{2}\left(\overline{OA_n}^2-\frac{1}{4}\pi\cdot\overline{OA_n}^2\right)$

$=\frac{1}{2}S_n$

즉 수열 $\{S_n\}$은 첫째항이 $4-\pi$, 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열이므로

$\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{4-\pi}{1-\frac{1}{2}}=8-2\pi$

따라서 $a=8,\ b=-2$이므로

$a+b=6$

답 ③

0255 $a_1=10\times1.05\times0.25=\frac{21}{8}$

$a_2=\underbrace{(10\times1.05\times0.75)}_{\text{장학금을 지급하고 남은 금액}}\times1.05\times0.25$

$=(10\times1.05\times0.25)\times1.05\times0.75$

$=\frac{21}{8}\times\frac{63}{80}$

$a_3=(10\times1.05\times0.75\times1.05\times0.75)\times1.05\times0.25$

$=(10\times1.05\times0.25)\times(1.05\times0.75)^2$

$=\frac{21}{8}\times\left(\frac{63}{80}\right)^2$

⋮

$\therefore\ a_n=\frac{21}{8}\times\left(\frac{63}{80}\right)^{n-1}$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $\frac{21}{8}$, 공비가 $\frac{63}{80}$인 등비수열이므로

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{\frac{21}{8}}{1-\frac{63}{80}}=\frac{210}{17}$

답 $\frac{210}{17}$

0256 추가 멈출 때까지 움직인 거리는

$20+20\cdot\frac{3}{4}+20\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2+20\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^3+\cdots=\frac{20}{1-\frac{3}{4}}=80\,(\text{cm})$

답 ①

0257 처음 생산된 비닐의 양을 A, n 번째 수거하여 재생산된 비닐의 양을 a_n이라 하면

$a_1=A\times0.75\times0.8=\frac{3}{5}A,$

$a_{n+1}=a_n\times0.75\times0.8=\frac{3}{5}a_n$

즉 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $\frac{3}{5}A$, 공비가 $\frac{3}{5}$인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{\frac{3}{5}A}{1-\frac{3}{5}} = \frac{3}{2}A$$

$$\therefore (\text{재활용률}) = \frac{\frac{3}{2}A}{A} \times 100 = 150\,(\%)$$

답 ⑤

0258 매회 복용량을 a mg이라 하자. 6시간이 지날 때마다 체내에 남아 있는 약의 양은 반으로 줄어들고 24시간마다 a mg을 복용하므로 처음 약을 복용하고 24시간 후, 즉 두 번째로 약을 복용한 직후 체내에 남아 있는 약의 양은

$$a + \underbrace{\frac{a}{2^4}}_{\text{처음 복용한 약의 남아 있는 양}} = a + \frac{a}{16}$$

48시간 후 체내에 남아 있는 약의 양은

$$a + \frac{1}{2^4}\left(a + \frac{a}{16}\right) = a + \frac{a}{16} + \frac{a}{16^2}$$

$$\vdots$$

따라서 $24n$시간 후 체내에 남아 있는 약의 양은

$$a + \frac{a}{16} + \frac{a}{16^2} + \cdots + \frac{a}{16^n} = \sum_{k=1}^{n+1} a \cdot \left(\frac{1}{16}\right)^{k-1}$$ ··· ❶

규칙적으로 평생 복용할 때 체내에 남아 있는 약의 양은

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n+1} a \cdot \left(\frac{1}{16}\right)^{k-1} = \frac{a}{1-\frac{1}{16}} = \frac{16}{15}a$$ ··· ❷

즉 $\frac{16}{15}a \le 160$이어야 하므로

$a \le 150$

따라서 매회 복용할 수 있는 약은 최대 150 mg이다. ··· ❸

답 150 mg

채점 기준	비율
❶ $24n$시간 후 체내에 남아 있는 약의 양을 구할 수 있다.	40 %
❷ 평생 복용할 때 체내에 남아 있는 약의 양을 구할 수 있다.	40 %
❸ 매회 복용할 수 있는 약의 최대 양을 구할 수 있다.	20 %

유형 19 순환소수와 등비급수

본책 45쪽

(i) 주어진 순환소수를 분수로 나타낸다.
(ii) 첫째항과 공비를 구하여 등비급수의 합을 구한다.

0259 $0.2\dot{6} = \frac{26-2}{90} = \frac{4}{15}$, $0.0\dot{3} = \frac{3}{90} = \frac{1}{30}$이므로 공비를 r라 하면

$$\frac{4}{15}r^3 = \frac{1}{30}, \qquad r^3 = \frac{1}{8}$$

$$\therefore r = \frac{1}{2}$$

따라서 구하는 등비급수의 합은

$$\frac{\frac{4}{15}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{8}{15} = 0.5\dot{3}$$

답 ④

0260 $0.\dot{6} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$, $0.\dot{1}2\dot{6} = \frac{126}{999} = \frac{14}{111}$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{a_1}{1-\frac{2}{3}} = \frac{14}{111}$$

$$\therefore a_1 = \frac{14}{111} \cdot \frac{1}{3} = \frac{14}{333} = 0.\dot{0}4\dot{2}$$

답 ③

0261 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 $0.\dot{x} = \frac{x}{9}$, 공비가 $0.0\dot{x} = \frac{x}{90}$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{\frac{x}{9}}{1-\frac{x}{90}} = \frac{10x}{90-x}$$ ··· ❶

따라서 $\frac{10x}{90-x} = \frac{40}{41}$이므로

$41x = 360 - 4x, \qquad 45x = 360$

$\therefore x = 8$ ··· ❷

답 8

채점 기준	비율
❶ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$을 x에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	50 %
❷ x의 값을 구할 수 있다.	50 %

0262 $\frac{8}{33} = 0.\dot{2}\dot{4}$이므로

$a_1 = 2,\ a_2 = 4,\ a_3 = 2,\ a_4 = 4,\ \cdots$

$$\therefore \frac{a_1}{7} + \frac{a_2}{7^2} + \frac{a_3}{7^3} + \frac{a_4}{7^4} + \frac{a_5}{7^5} + \frac{a_6}{7^6} + \cdots$$

$$= \frac{2}{7} + \frac{4}{7^2} + \frac{2}{7^3} + \frac{4}{7^4} + \frac{2}{7^5} + \frac{4}{7^6} + \cdots$$

$$= \left(\frac{2}{7} + \frac{2}{7^3} + \frac{2}{7^5} + \cdots\right) + \left(\frac{4}{7^2} + \frac{4}{7^4} + \frac{4}{7^6} + \cdots\right)$$

$$= \frac{\frac{2}{7}}{1-\frac{1}{49}} + \frac{\frac{4}{49}}{1-\frac{1}{49}} = \frac{7}{24} + \frac{1}{12} = \frac{3}{8}$$

따라서 $p = 8$, $q = 3$이므로 $\qquad p + q = 11$

답 11

0263 1st $\frac{a_n}{a_{n+2}}$을 구한다.

$a_{n+1} = \sqrt{n}\,a_n$에서 $\qquad a_{n+2} = \sqrt{n+1}\,a_{n+1} = \sqrt{n+1}\sqrt{n}\,a_n$

$$\therefore \frac{a_n}{a_{n+2}} = \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}}$$

2nd $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})a_n}{a_{n+2}}$의 값을 구한다.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})a_n}{a_{n+2}}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left\{\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)\right\}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) = 1$$

답 ②

0264 1st b_n을 a_n과 a_{n+1}에 대한 식으로 나타낸다.

조건 (가)에서 $\log a_n a_{n+1} b_n = 0$

$\therefore a_n a_{n+1} b_n = 1$

$a_n > 0$이므로 — 수열 $\{a_n\}$의 첫째항과 공차가 양수이므로 $a_n > 0$

$$b_n = \frac{1}{a_n a_{n+1}}$$
$$= \frac{1}{a_{n+1} - a_n}\left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}}\right)$$
$$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}}\right)$$

— 수열 $\{a_n\}$의 공차

2nd a_1의 값을 구한다.

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}}\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3}\left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}}\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3}\left\{\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2}\right) + \left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}}\right)\right\}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_{n+1}}\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_1 + 3n}\right)$$
$$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{a_1} - 0\right)$$
$$= \frac{1}{3a_1}$$

따라서 $\frac{1}{3a_1} = \frac{1}{12}$이므로 $a_1 = 4$ 답 ⑤

0265 1st a_n에 대한 부등식을 세운다.

조건 (가)에서 $a_n - b_n < \frac{3}{2}$ $\therefore a_n < b_n + \frac{3}{2}$

조건 (나)에서 $a_n > \frac{3n^2-2}{2n^2+1}$

$\therefore \frac{3n^2-2}{2n^2+1} < a_n < b_n + \frac{3}{2}$ ······ ㉠

2nd $\lim_{n\to\infty} a_n$의 값을 구한다.

조건 (다)에서 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\left(b_n + \frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}$

또 $\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2-2}{2n^2+1} = \frac{3}{2}$이므로 ㉠에서

$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{3}{2}$ 답 $\frac{3}{2}$

0266 1st a의 값을 구한다.

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{an^2+6}{9n^2-6n-8}$이 수렴하므로

$$\lim_{n\to\infty} \frac{an^2+6}{9n^2-6n-8} = 0$$

이때 $\lim_{n\to\infty} \frac{an^2+6}{9n^2-6n-8} = \frac{a}{9}$이므로

$\frac{a}{9} = 0$ $\therefore a = 0$

2nd b의 값을 구한다.

$$b = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{6}{9n^2-6n-8}$$
$$= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{6}{(3n-4)(3n+2)}$$
$$= \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{3n-4} - \frac{1}{3n+2}\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{3k-4} - \frac{1}{3k+2}\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{11}\right) + \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{14}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{3n-7} - \frac{1}{3n-1}\right) + \left(\frac{1}{3n-4} - \frac{1}{3n+2}\right)\right\}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{5} - \frac{1}{3n-1} - \frac{1}{3n+2}\right)$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{5} = \frac{7}{10}$$

3rd $10b - a$의 값을 구한다.

$10b - a = 10 \cdot \frac{7}{10} - 0 = 7$ 답 7

0267 1st ㄱ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄱ. [반례] $a_n = 0$, $b_n = -1$이면 $a_n > b_n$이고 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 0$으로 수렴하지만 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$은 발산한다.

2nd ㄴ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄴ. $\alpha - \beta = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n)$

$= (a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + (a_3 - b_3) + \cdots$

> 0 ($\because a_n > b_n$)

$\therefore \alpha > \beta$

3rd ㄷ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$과 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 모두 수렴하므로 α, β의 대소에 관계없이

$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0$

이상에서 옳은 것은 ㄴ뿐이다. 답 ②

0268 1st $p_n + q_n$, $p_n q_n$을 구한다.

원점 O에서 원 C_n에 그은 접선의 방정식을 $y = mx$라 하면 원 C_n의 중심 $(2n, n+1)$과 접선 $mx - y = 0$ 사이의 거리는 원의 반지름의 길이와 같으므로

$$\frac{|2mn - n - 1|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = 1$$

$|2mn - n - 1| = \sqrt{m^2+1}$

양변을 제곱하면

$4m^2n^2 + n^2 + 1 - 4mn^2 - 4mn + 2n = m^2 + 1$

$\therefore (4n^2-1)m^2 - (4n^2+4n)m + n^2 + 2n = 0$ ······ ㉠

이차방정식 ㉠의 두 실근이 p_n, q_n이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$p_n + q_n = \frac{4n^2+4n}{4n^2-1},\ p_n q_n = \frac{n^2+2n}{4n^2-1}$$

(2nd) $(2p_n-1)(2q_n-1)$을 구한다.

$$(2p_n-1)(2q_n-1)=4p_nq_n-2(p_n+q_n)+1$$
$$=\frac{4n^2+8n}{4n^2-1}-\frac{8n^2+8n}{4n^2-1}+1$$
$$=-\frac{1}{4n^2-1}=-\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$
$$=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$$

(3rd) $\sum_{n=1}^{\infty}\{(2p_n-1)(2q_n-1)\}$의 값을 구한다.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\{(2p_n-1)(2q_n-1)\}$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)$$
$$=-\frac{1}{2}$$

답 ①

0269

(1st) $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$의 값의 범위를 각각 구한다.

이차방정식 $x^2+x-3=0$에서 $\quad x=\frac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$

$\alpha<\beta$이므로 $\quad \alpha=\frac{-1-\sqrt{13}}{2}$, $\beta=\frac{-1+\sqrt{13}}{2}$

이때 $\alpha<-1$, $\beta>1$이므로

$$-1<\frac{1}{\alpha}<0,\ 0<\frac{1}{\beta}<1$$

(2nd) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\alpha^n}+\frac{1}{\beta^n}\right)$의 값을 구한다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=-1,\ \alpha\beta=-3$$
$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\alpha^n}+\frac{1}{\beta^n}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\alpha}\right)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\beta}\right)^n$$
$$=\frac{\frac{1}{\alpha}}{1-\frac{1}{\alpha}}+\frac{\frac{1}{\beta}}{1-\frac{1}{\beta}}$$
$$=\frac{1}{\alpha-1}+\frac{1}{\beta-1}$$
$$=\frac{(\alpha+\beta)-2}{\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1}$$
$$=\frac{-1-2}{-3-(-1)+1}$$
$$=3$$

답 3

0270

(1st) a_n을 구한다.

$a_1=1$이므로 $\quad f(a_1)=-2<0$

$$\therefore a_2=(f\circ f)(a_1)+2=-\frac{1}{3}f(a_1)+1+2$$
$$=\frac{2}{3}+3$$

$f(a_2)=-2\cdot\left(\frac{2}{3}+3\right)<0$이므로

$$a_3=(f\circ f)(a_2)+2=-\frac{1}{3}f(a_2)+1+2$$
$$=\left(\frac{2}{3}\right)^2+\frac{2}{3}\cdot3+3$$

$f(a_3)=-2\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^2+\frac{2}{3}\cdot3+3\right\}<0$이므로

$$a_4=(f\circ f)(a_3)+2=-\frac{1}{3}f(a_3)+1+2$$
$$=\left(\frac{2}{3}\right)^3+\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot3+\frac{2}{3}\cdot3+3$$
$$\vdots$$
$$\therefore a_n=\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}+\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}\cdot3+\left(\frac{2}{3}\right)^{n-3}\cdot3+\cdots+\frac{2}{3}\cdot3+3$$
$$=\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}+\frac{3\cdot\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right\}}{1-\frac{2}{3}}$$
$$=9-8\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

(2nd) $\sum_{n=1}^{\infty}(9-a_n)$의 값을 구한다.

$9-a_n=8\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}(9-a_n)=\sum_{n=1}^{\infty}8\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}=\frac{8}{1-\frac{2}{3}}=24$$

답 24

0271

(1st) 첫째항과 공비에 대한 두 방정식을 세운다.

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면 수열 $\{a_{2n}\}$은 첫째항이 $a_2=ar$, 공비가 r^2인 등비수열이므로

$\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}=3$에서 $\quad \frac{ar}{1-r^2}=3$

$$\therefore \frac{ar}{(1-r)(1+r)}=3 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

수열 $\{a_{3n}\}$은 첫째항이 $a_3=ar^2$, 공비가 r^3인 등비수열이므로

$\sum_{n=1}^{\infty}a_{3n}=\frac{12}{13}$에서 $\quad \frac{ar^2}{1-r^3}=\frac{12}{13}$

$$\therefore \frac{ar^2}{(1-r)(1+r+r^2)}=\frac{12}{13} \qquad \cdots\cdots ㉡$$

(2nd) 첫째항과 공비를 구한다.

㉠÷㉡을 하면 $\quad \frac{1+r+r^2}{r(1+r)}=\frac{13}{4}$

$$4+4r+4r^2=13r^2+13r$$
$$9r^2+9r-4=0,\quad (3r+4)(3r-1)=0$$
$$\therefore r=\frac{1}{3}\ (\because -1<r<1)$$

$r=\frac{1}{3}$을 ㉠에 대입하면 $\quad a=8$

(3rd) $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$의 값을 구한다.

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{8}{1-\frac{1}{3}}=12$$

답 ④

참고 두 등비수열 $\{a_{2n}\}$, $\{a_{3n}\}$의 공비 r^2, r^3의 값의 범위가 각각

$-1<r^2<1$, $-1<r^3<1$

이므로 $\quad -1<r<1$

따라서 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$은 수렴한다.

0272 (1st) r의 값의 범위를 구한다.

조건 (가)에서 주어진 급수의 첫째항과 공비가 $\frac{r-4}{9}$이고 급수가 수렴하므로

$$-1<\frac{r-4}{9}<1, \qquad -9<r-4<9$$

$$\therefore -5<r<13$$

(2nd) $-5<r<8$, $r=8$, $8<r<13$일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{r^{n+1}-2^{3n}+4^n}{r^n+2^{3n+2}+4^{n-1}}$의 값을 구한다.

(i) $-5<r<8$일 때,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^{n+1}-2^{3n}+4^n}{r^n+2^{3n+2}+4^{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{r^{n+1}-8^n+4^n}{r^n+4\cdot 8^n+4^{n-1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{r\cdot\left(\frac{r}{8}\right)^n-1+\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\left(\frac{r}{8}\right)^n+4+\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

$$=-\frac{1}{4}$$

(ii) $r=8$일 때,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^{n+1}-2^{3n}+4^n}{r^n+2^{3n+2}+4^{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{8^{n+1}-8^n+4^n}{8^n+4\cdot 8^n+4^{n-1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{8-1+\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1+4+\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

$$=\frac{7}{5}$$

따라서 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(iii) $8<r<13$일 때,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^{n+1}-2^{3n}+4^n}{r^n+2^{3n+2}+4^{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{r^{n+1}-8^n+4^n}{r^n+4\cdot 8^n+4^{n-1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{r-\left(\frac{8}{r}\right)^n+\left(\frac{4}{r}\right)^n}{1+4\cdot\left(\frac{8}{r}\right)^n+\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{4}{r}\right)^n}$$

$$=r$$

따라서 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(3rd) 조건을 만족시키는 정수 r의 개수를 구한다.

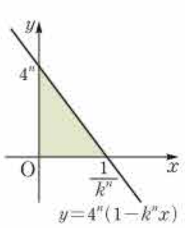
이상에서 조건 (가), (나)를 모두 만족시키는 r의 값의 범위는

$$-5<r<8$$

따라서 정수 r는 $-4, -3, -2, \cdots, 7$의 12개이다. 답 12

0273 (1st) S_n을 구한다.

직선 $y=4^n(1-k^nx)$의 x절편이 $\frac{1}{k^n}$, y절편이 4^n이므로



$$S_n=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{k^n}\cdot 4^n=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{4}{k}\right)^n$$

(2nd) k의 값의 범위를 구한다.

$\sum_{n=1}^{\infty}S_n$은 첫째항이 $\frac{2}{k}$, 공비가 $\frac{4}{k}$인 등비급수이므로 이 급수가 수렴하려면

$$-1<\frac{4}{k}<1$$

그런데 k는 자연수이므로 $\quad k>4$

(3rd) 자연수 k의 최솟값을 구한다.

따라서 자연수 k의 최솟값은 5이다. 답 ②

0274 (1st) 점 P_n의 y좌표를 구한다.

직선 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}(x-1)$과 이차함수 $y=3x(x-1)$의 그래프의 교점의 x좌표는 $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}(x-1)=3x(x-1)$에서

$$(x-1)\left\{3x-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}=0$$

$$\therefore x=1 \text{ 또는 } x=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

따라서 점 P_n의 x좌표가 $\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$이므로 y좌표는

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left\{\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-1\right\}=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

(2nd) $\sum_{n=1}^{\infty}\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{H}_n}$의 값을 구한다.

$\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{H}_n}=\left|\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right|=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{H}_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

$$=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}-\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{4}}$$

$$=2-\frac{4}{9}=\frac{14}{9}$$

답 ②

0275 (1st) $\frac{a_n}{b_n}$을 구한다.

같은 시간 동안 움직인 거리는 속력에 정비례하므로

$$a_1 : b_1=1:1$$

$$a_2 : b_2=\frac{4}{5} : \frac{9}{10}$$

$$a_3 : b_3=\left(\frac{4}{5}\right)^2 : \left(\frac{9}{10}\right)^2$$

$$\vdots$$

따라서 $a_n : b_n=\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1} : \left(\frac{9}{10}\right)^{n-1}$이므로

$$a_n\cdot\left(\frac{9}{10}\right)^{n-1}=b_n\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}$$

$$\therefore \frac{a_n}{b_n}=\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}\cdot\left(\frac{10}{9}\right)^{n-1}=\left(\frac{8}{9}\right)^{n-1}$$

(2nd) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{b_n}$의 값을 구한다.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{b_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{8}{9}\right)^{n-1}=\frac{1}{1-\frac{8}{9}}=9$$

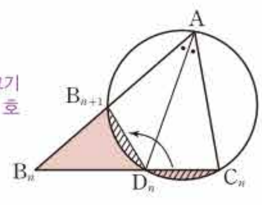
답 9

0276 (1st) R_n에서 새로 색칠한 부분과 넓이가 같은 도형을 찾는다.

오른쪽 그림에서

$\angle\mathrm{B}_{n+1}\mathrm{AD}_n=\angle\mathrm{D}_n\mathrm{AC}_n$이므로

$\overset{\frown}{\mathrm{B}_{n+1}\mathrm{D}_n}=\overset{\frown}{\mathrm{D}_n\mathrm{C}_n}$ ← 한 원에서 같은 크기의 원주각에 대한 호의 길이는 같다.



즉 빗금 친 두 부분의 넓이가 서로 같으므로 그림 R_n에서 새로 색칠한 부분인 의 넓이는 $\triangle\mathrm{B}_{n+1}\mathrm{B}_n\mathrm{D}_n$의 넓이와 같다.

(2nd) S_1의 값을 구한다.

$\triangle AB_1C_1$에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{B_1C_1}^2=\overline{AB_1}^2+\overline{AC_1}^2-2\cdot\overline{AB_1}\cdot\overline{AC_1}\cdot\cos\frac{\pi}{3}$$
$$=3^2+2^2-2\cdot3\cdot2\cdot\frac{1}{2}=7$$

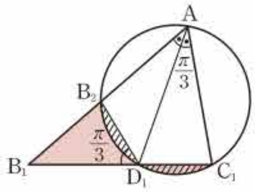
$\therefore\ \overline{B_1C_1}=\sqrt{7}$

또 $\triangle AB_1C_1$에서 각의 이등분선의 성질에 의하여

$\overline{B_1D_1}:\overline{D_1C_1}=\overline{AB_1}:\overline{AC_1}=3:2$

$\therefore\ \overline{B_1D_1}=\frac{3}{5}\overline{B_1C_1}=\frac{3\sqrt{7}}{5},\ \overline{D_1C_1}=\frac{2}{5}\overline{B_1C_1}=\frac{2\sqrt{7}}{5}$

오른쪽 그림과 같이 $\overline{B_2D_1}$을 그으면 사각형 $AB_2D_1C_1$이 원에 내접하므로



$\angle B_1D_1B_2=\angle B_2AC_1=\frac{\pi}{3}$

$\therefore\ S_1=\triangle B_2B_1D_1$

$$=\frac{1}{2}\cdot\overline{B_1D_1}\cdot\underbrace{\overline{B_2D_1}}_{\angle B_2AD_1=\angle D_1AC_1\text{이므로 } \overline{B_2D_1}=\overline{D_1C_1}}\cdot\sin\frac{\pi}{3}$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{3\sqrt{7}}{5}\cdot\frac{2\sqrt{7}}{5}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$=\frac{21\sqrt{3}}{50}$$

(3rd) 그림 R_n과 R_{n+1}에서 새로 색칠한 부분의 넓이의 비를 구한다.

$\overline{B_nD_n}\,/\!/\,\overline{B_{n+1}D_{n+1}}$이므로 두 삼각형 AB_nD_n, $AB_{n+1}D_{n+1}$은 닮음이고, 닮음비는 두 삼각형 AB_1D_1과 AB_2D_2의 닮음비와 같다.

이때 $\triangle B_2B_1D_1$에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{B_1B_2}^2=\overline{B_1D_1}^2+\overline{B_2D_1}^2-2\cdot\overline{B_1D_1}\cdot\overline{B_2D_1}\cdot\cos\frac{\pi}{3}$$
$$=\left(\frac{3\sqrt{7}}{5}\right)^2+\left(\frac{2\sqrt{7}}{5}\right)^2-2\cdot\frac{3\sqrt{7}}{5}\cdot\frac{2\sqrt{7}}{5}\cdot\frac{1}{2}=\frac{49}{25}$$

이므로 $\overline{B_1B_2}=\frac{7}{5}$

$\therefore\ \overline{AB_2}=\overline{AB_1}-\overline{B_1B_2}=3-\frac{7}{5}=\frac{8}{5}$

두 삼각형 AB_1D_1과 AB_2D_2의 닮음비가 $3:\frac{8}{5}$, 즉 $1:\frac{8}{15}$이므로 그림 R_n에서 새로 색칠한 부분과 그림 R_{n+1}에서 새로 색칠한 부분의 넓이의 비는

$$1^2:\left(\frac{8}{15}\right)^2=1:\frac{64}{225}$$

(4th) $\lim_{n\to\infty}S_n$의 값을 구한다.

$\lim_{n\to\infty}S_n$은 첫째항이 $\frac{21\sqrt{3}}{50}$이고 공비가 $\frac{64}{225}$인 등비급수의 합이므로

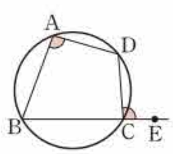
$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\frac{21\sqrt{3}}{50}}{1-\frac{64}{225}}=\frac{27\sqrt{3}}{46}$$

답 ①

SSEN 특강 원에 내접하는 사각형의 성질

원에 내접하는 사각형에서 한 외각의 크기는 그와 이웃한 내각의 대각의 크기와 같다.

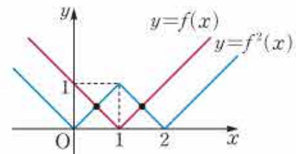
➡ $\angle A=\angle DCE$

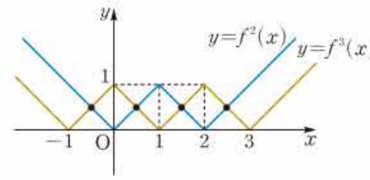


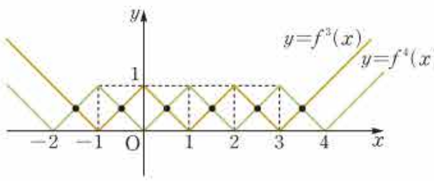
0277 전략 좌표평면 위에 $y=f(x)$, $y=f^2(x)$, $y=f^3(x)$, $\cdots$의 그래프를 나타내어 a_n을 구한다.

풀이 $y=f^2(x)=(f\circ f)(x)=|f(x)-1|$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 후 $y<0$인 부분을 x축에 대하여 대칭이동한 그래프이다.

같은 방법으로 $y=f^3(x)$, $y=f^4(x)$의 그래프를 좌표평면 위에 나타내면 다음 그림과 같다.







$\therefore\ a_1=2,\ a_2=4,\ a_3=6,\ \cdots,\ a_n=2n$ ⋯ ❶

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_na_{n+1}}$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n\cdot2(n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n(n+1)}$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$=\frac{1}{4}$$ ⋯ ❷

답 $\frac{1}{4}$

채점 기준	비율
❶ a_n을 구할 수 있다.	50 %
❷ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_na_{n+1}}$의 값을 구할 수 있다.	50 %

0278 전략 먼저 x의 값의 범위를 나누어 $f(x)$를 구한다.

풀이 (i) $0<x<1$일 때,

$\lim_{n\to\infty}x^{n-1}=\lim_{n\to\infty}x^{n+1}=0$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{n-1}+5}{2x^{n+1}+1}=5$$

(ii) $x=1$일 때,

$\lim_{n\to\infty}x^{n-1}=\lim_{n\to\infty}x^{n+1}=1$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{n-1}+5}{2x^{n+1}+1}=\frac{1+5}{2+1}=2$$

(iii) $x>1$일 때,

$\lim_{n\to\infty} x^{n-1}=\lim_{n\to\infty} x^{n+1}=\infty$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{n-1}+5}{2x^{n+1}+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{x^2}+\frac{5}{x^{n+1}}}{2+\frac{1}{x^{n+1}}}=\frac{1}{2x^2}$$

이상에서 $f(x)=\begin{cases} 5 & (0<x<1) \\ 2 & (x=1) \\ \frac{1}{2x^2} & (x>1) \end{cases}$ 이므로 ⋯❶

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(2^{n-2})=f\left(\frac{1}{2}\right)+f(1)+f(2)+f(2^2)+f(2^3)+\cdots$$

$$=5+2+\underbrace{\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^7}+\cdots}_{\text{첫째항이 }\frac{1}{2^3}\text{, 공비가 }\frac{1}{2^2}\text{인 등비급수}}$$

$$=5+2+\frac{\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{43}{6}$$ ⋯❷

답 $\frac{43}{6}$

채점 기준	비율
❶ $f(x)$를 구할 수 있다.	60 %
❷ $\sum_{n=1}^{\infty} f(2^{n-2})$의 값을 구할 수 있다.	40 %

0279 전략 조건 (가), (나)를 이용하여 a_1, a_n을 먼저 구한 후 조건 (다)를 이용하여 b_1, b_n을 구한다.

풀이 두 조건 (가), (나)에서 수열 $\{a_n{}^2\}$은 첫째항이 $a_1{}^2$, 공비가 $\left(-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n{}^2=\frac{a_1{}^2}{1-\frac{1}{4}}=\frac{4}{3}a_1{}^2$$

즉 $\frac{4}{3}a_1{}^2=a_1$이므로 $\quad a_1=\frac{3}{4}$ ($\because a_1\neq 0$)

$$\therefore a_n=\frac{3}{4}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$ ⋯❶

$n=1$을 $\sum_{k=1}^{n} a_kb_k=\frac{1}{6^n}-\frac{3}{4^n}$에 대입하면

$$a_1b_1=\frac{1}{6}-\frac{3}{4},\qquad \frac{3}{4}b_1=-\frac{7}{12}$$

$$\therefore b_1=-\frac{7}{9}$$ ⋯❷

$n\ge 2$일 때,

$$a_nb_n=\sum_{k=1}^{n} a_kb_k-\sum_{k=1}^{n-1} a_kb_k=\left(\frac{1}{6^n}-\frac{3}{4^n}\right)-\left(\frac{1}{6^{n-1}}-\frac{3}{4^{n-1}}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{6^n}-\frac{6}{6^n}\right)-\left(\frac{3}{4^n}-\frac{12}{4^n}\right)$$

$$=-\frac{5}{6^n}+\frac{9}{4^n}$$

즉 $\frac{3}{4}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\cdot b_n=-\frac{5}{6^n}+\frac{9}{4^n}$이므로

$$b_n=\frac{4}{3}\cdot(-2)^{n-1}\cdot\left(-\frac{5}{6^n}+\frac{9}{4^n}\right)$$

$$=-\frac{2}{3}\left\{-5\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^n+9\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}$$

$$=\frac{10}{3}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^n-6\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^n\ (n\ge 2)$$ ⋯❸

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} b_n=b_1+\sum_{n=2}^{\infty} b_n$$

$$=-\frac{7}{9}+\sum_{n=2}^{\infty}\left\{\frac{10}{3}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^n-6\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}$$

$$=-\frac{7}{9}+\frac{10}{3}\cdot\frac{\frac{1}{9}}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}-6\cdot\frac{\frac{1}{4}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}$$

$$=-\frac{7}{9}+\frac{5}{18}-1=-\frac{3}{2}$$ ⋯❹

답 $-\frac{3}{2}$

채점 기준	비율
❶ a_n을 구할 수 있다.	20 %
❷ b_1을 구할 수 있다.	20 %
❸ $n\ge 2$일 때, b_n을 구할 수 있다.	30 %
❹ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$의 값을 구할 수 있다.	30 %

0280 전략 두 점 A_n, B_n의 x좌표를 이용하여 $\overline{A_nB_n}$의 길이를 구한다.

풀이 직선 $y=2n-1$과 함수 $y=-\log_{\sqrt{2}}(1+x)$의 그래프의 교점 A_n의 x좌표는 $2n-1=-\log_{\sqrt{2}}(1+x)$에서

$$1+x=(\sqrt{2})^{1-2n}$$

$$\therefore x=(\sqrt{2})^{1-2n}-1=\frac{\sqrt{2}}{2^n}-1$$

직선 $y=2n-1$과 함수 $y=-\log_2(1-x)$의 그래프의 교점 B_n의 x좌표는 $2n-1=-\log_2(1-x)$에서

$$1-x=2^{1-2n}$$

$$\therefore x=1-2^{1-2n}=1-\frac{2}{4^n}$$ ⋯❶

$$\therefore \overline{A_nB_n}=1-\frac{2}{4^n}-\left(\frac{\sqrt{2}}{2^n}-1\right)$$

$$=2-\frac{2}{4^n}-\frac{\sqrt{2}}{2^n}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}(2-\overline{A_nB_n})=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{4^n}+\frac{\sqrt{2}}{2^n}\right)$$

$$=2\cdot\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}+\sqrt{2}\cdot\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{2}{3}+\sqrt{2}$$ ⋯❷

따라서 $p=\frac{2}{3}$, $q=1$이므로

$$30(p+q)=30\cdot\left(\frac{2}{3}+1\right)$$

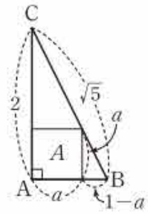
$$=50$$ ⋯❸

답 50

채점 기준	비율
❶ 두 점 A_n, B_n의 x좌표를 구할 수 있다.	40 %
❷ $\sum_{n=1}^{\infty}(2-\overline{A_nB_n})$의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ $30(p+q)$의 값을 구할 수 있다.	10 %

0281 전략 정사각형의 한 변과 직각삼각형 ABC의 두 변이 만나서 생기는 직각삼각형은 모두 직각삼각형 ABC와 닮음임을 이용한다.

풀이 정사각형 A의 한 변의 길이를 a라 하면 오른쪽 그림에서



$$(1-a):a=\underbrace{1:2}_{\overline{AB}:\overline{AC}}$$

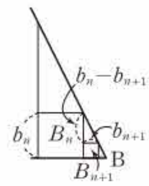
$$2-2a=a$$

$$\therefore a=\frac{2}{3}$$

따라서 정사각형 A의 넓이는

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$$ ···❶

한편 정사각형 B_n의 한 변의 길이를 b_n이라 하면 오른쪽 그림에서



$$b_{n+1}:(b_n-b_{n+1})=1:2$$

$$2b_{n+1}=b_n-b_{n+1}$$

$$\therefore b_{n+1}=\frac{1}{3}b_n$$

따라서 두 정사각형 B_n과 B_{n+1}의 닮음비가 $1:\frac{1}{3}$이므로 넓이의 비는

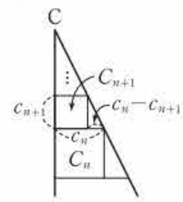
$$1^2:\left(\frac{1}{3}\right)^2=1:\frac{1}{9}$$

즉 수열 $\{S_n\}$의 공비는 $\frac{1}{9}$이고, 정사각형 A의 넓이가 $\frac{4}{9}$이므로 정사각형 B_1의 넓이는

$$S_1=\frac{4}{9}\cdot\frac{1}{9}=\frac{4}{81}$$ ···❷

두 정사각형 A와 B_1의 닮음비도 $1:\frac{1}{3}$이므로 넓이의 비는 $1:\frac{1}{9}$이다.

또 정사각형 C_n의 한 변의 길이를 c_n이라 하면 오른쪽 그림에서



$$(c_n-c_{n+1}):c_{n+1}=1:2$$

$$2c_n-2c_{n+1}=c_{n+1}$$

$$\therefore c_{n+1}=\frac{2}{3}c_n$$

따라서 두 정사각형 C_n과 C_{n+1}의 닮음비가 $1:\frac{2}{3}$이므로 넓이의 비는

$$1^2:\left(\frac{2}{3}\right)^2=1:\frac{4}{9}$$

즉 수열 $\{S_n'\}$의 공비는 $\frac{4}{9}$이고, 정사각형 A의 넓이가 $\frac{4}{9}$이므로 정사각형 C_1의 넓이는

$$S_1'=\frac{4}{9}\cdot\frac{4}{9}=\frac{16}{81}$$ ···❸

두 정사각형 A와 C_1의 닮음비도 $1:\frac{2}{3}$이므로 넓이의 비는 $1:\frac{4}{9}$이다.

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}(S_n+S_n')=\sum_{n=1}^{\infty}S_n+\sum_{n=1}^{\infty}S_n'$$

$$=\frac{\frac{4}{81}}{1-\frac{1}{9}}+\frac{\frac{16}{81}}{1-\frac{4}{9}}$$

$$=\frac{1}{18}+\frac{16}{45}=\frac{37}{90}$$ ···❹

답 $\frac{37}{90}$

채점 기준	비율
❶ 정사각형 A의 넓이를 구할 수 있다.	20 %
❷ 수열 $\{S_n\}$의 공비와 S_1의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ 수열 $\{S_n'\}$의 공비와 S_1'의 값을 구할 수 있다.	30 %
❹ $\sum_{n=1}^{\infty}(S_n+S_n')$의 값을 구할 수 있다.	20 %

Ⅱ. 여러 가지 함수의 미분

03 지수함수와 로그함수의 미분

0282 $\lim_{x\to4}3^x=3^4=81$ 답 81

0283 $\lim_{x\to0}\left\{\left(\frac{1}{7}\right)^x-5\right\}=\left(\frac{1}{7}\right)^0-5=1-5=-4$ 답 -4

0284 $\lim_{x\to2}\frac{6^x}{4^{x+1}-2^x}=\frac{6^2}{4^3-2^2}=\frac{36}{64-4}=\frac{3}{5}$ 답 $\frac{3}{5}$

0285 $\lim_{x\to\infty}\frac{3^x}{2^{2x}}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^x=0$ 답 0

0286 $\lim_{x\to\infty}(5^x-2^x)=\lim_{x\to\infty}5^x\left\{1-\left(\frac{2}{5}\right)^x\right\}$

이때 $\lim_{x\to\infty}5^x=\infty$, $\lim_{x\to\infty}\left\{1-\left(\frac{2}{5}\right)^x\right\}=1$이므로

$$\lim_{x\to\infty}5^x\left\{1-\left(\frac{2}{5}\right)^x\right\}=\infty$$ 답 ∞

0287 $-x=t$로 놓으면 $x\longrightarrow-\infty$일 때 $t\longrightarrow\infty$이므로

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3^x}{3^x-3^{-x}}=\lim_{t\to\infty}\frac{3^{-t}}{3^{-t}-3^t}=\lim_{t\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{9}\right)^t}{\left(\frac{1}{9}\right)^t-1}$$

이때 $\lim_{t\to\infty}\left(\frac{1}{9}\right)^t=0$이므로 $\lim_{t\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{9}\right)^t}{\left(\frac{1}{9}\right)^t-1}=0$ 답 0

다른 풀이 $\lim_{x\to-\infty}\frac{3^x}{3^x-3^{-x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3^{2x}}{3^{2x}-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{9^x}{9^x-1}$

이때 $\lim_{x\to-\infty}9^x=0$이므로 $\lim_{x\to-\infty}\frac{9^x}{9^x-1}=0$

0288 $\lim_{x\to16}\log_2 x=\log_2 16=4$ 답 4

0289 $\lim_{x\to\infty}\log\frac{1}{x}=\lim_{x\to\infty}(-\log x)=-\infty$ 답 $-\infty$

0290 $\lim_{x\to0+}\log_4 4x=\lim_{x\to0+}(1+\log_4 x)=-\infty$ 답 $-\infty$

0291 $x-1=t$로 놓으면 $x\longrightarrow1+$일 때 $t\longrightarrow0+$이므로

$$\lim_{x\to1+}\log_{\frac{1}{2}}(x-1)=\lim_{t\to0+}\log_{\frac{1}{2}}t=\infty$$ 답 ∞

0292 $\lim_{x\to\infty}\{\log_5(x+1)-\log_5 x\}=\lim_{x\to\infty}\log_5\frac{x+1}{x}$

$$=\log_5\left(\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{x}\right)$$

$$=\log_5 1=0$$ 답 0

0293 $\lim_{x\to3+}\{\log(x^2-9)-\log(x-3)\}$

$=\lim_{x\to3+}\log\frac{x^2-9}{x-3}=\lim_{x\to3+}\log\frac{(x+3)(x-3)}{x-3}$

$=\lim_{x\to3+}\log(x+3)=\log\{\lim_{x\to3+}(x+3)\}$

$=\log 6$ 답 $\log 6$

0294 $\lim_{x\to0}(1+x)^{-\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0}\{(1+x)^{\frac{1}{x}}\}^{-1}=e^{-1}=\frac{1}{e}$ 답 $\frac{1}{e}$

0295 $\lim_{x\to0}(1+5x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0}\{(1+5x)^{\frac{1}{5x}}\}^5=e^5$ 답 e^5

0296 $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{3x}=\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{2x}\right\}^{\frac{3}{2}}=e^{\frac{3}{2}}$ 답 $e^{\frac{3}{2}}$

0297 $\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{3x}\right)^{6x}=\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{3x}\right)^{-3x}\right\}^{\frac{6}{-3}}$

$=e^{-2}=\frac{1}{e^2}$ 답 $\frac{1}{e^2}$

0298 답 e^2 **0299** 답 $\frac{1}{e}$

0300 답 $\ln 10$

0301 $e^{2x}=\frac{1}{4}$에서 $2x=\ln\frac{1}{4}$, $2x=-2\ln 2$

$\therefore x=-\ln 2$ 답 $-\ln 2$

0302 $\ln e^3=3\ln e=3$ 답 3

0303 $\ln\sqrt{e}=\ln e^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\ln e=\frac{1}{2}$ 답 $\frac{1}{2}$

0304 $\ln\frac{1}{2e}=\ln(2e)^{-1}=-(\ln 2+\ln e)$

$=-\ln 2-1$ 답 $-\ln 2-1$

0305 $\frac{1}{\log_5 e}+\frac{1}{\log_2 e}=\ln 5+\ln 2=\ln 10$ 답 $\ln 10$

0306 $\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+4x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+4x)}{4x}\cdot4$

$=1\cdot4=4$ 답 4

0307 $\lim_{x\to0}\frac{x}{\ln(1+3x)}=\lim_{x\to0}\frac{1}{\frac{\ln(1+3x)}{x}}$

$=\lim_{x\to0}\frac{1}{\frac{\ln(1+3x)}{3x}\cdot3}$

$=\frac{1}{1\cdot3}=\frac{1}{3}$ 답 $\frac{1}{3}$

0308 $\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)^5}{x}=\lim_{x\to0}\frac{5\ln(1+x)}{x}=5\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}$

$=5\cdot1=5$ 답 5

0309 $\lim_{x\to0}\frac{e^{-x}-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{e^{-x}-1}{-x}\cdot(-1)$

$=1\cdot(-1)=-1$ 답 -1

0310 $\lim_{x\to0}\frac{3x}{e^{5x}-1}=\lim_{x\to0}\frac{3}{\frac{e^{5x}-1}{x}}=\lim_{x\to0}\frac{3}{\frac{e^{5x}-1}{5x}\cdot5}$

$=\frac{3}{1\cdot5}=\frac{3}{5}$ 답 $\frac{3}{5}$

0311 $\lim_{x\to0}\frac{e^{4x}-e^{2x}}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}(e^{2x}-1)}{2x}$

$=1\cdot1=1$ 답 1

다른 풀이 $\lim_{x\to0}\frac{e^{4x}-e^{2x}}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{(e^{4x}-1)-(e^{2x}-1)}{2x}$

$=\lim_{x\to0}\left(\frac{e^{4x}-1}{2x}-\frac{e^{2x}-1}{2x}\right)$

$=\lim_{x\to0}\left(\frac{e^{4x}-1}{4x}\cdot2-\frac{e^{2x}-1}{2x}\right)$

$=1\cdot2-1=1$

0312 $\lim_{x\to0}\frac{\log_3(1-3x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\log_3(1-3x)}{-3x}\cdot(-3)$

$=\frac{1}{\ln 3}\cdot(-3)$

$=-\frac{3}{\ln 3}$ 답 $-\frac{3}{\ln 3}$

0313 $\lim_{x\to0}\frac{2^x-1}{2x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{2^x-1}{x}$

$=\frac{1}{2}\ln 2=\ln\sqrt{2}$ 답 $\ln\sqrt{2}$

0314 답 $y'=-5e^x$

0315 $y=e^{x+1}=e\cdot e^x$이므로

$y'=e\cdot(e^x)'=e\cdot e^x=e^{x+1}$ 답 $y'=e^{x+1}$

0316 $y'=1\cdot e^x+(x+1)e^x=(x+2)e^x$ 답 $y'=(x+2)e^x$

0317 $y'=3x^2\cdot e^x+x^3\cdot e^x=x^2(x+3)e^x$ 답 $y'=x^2(x+3)e^x$

0318 답 $y'=3\ln 2\cdot 2^x$

0319 $y=5^{2x+1}=5\cdot5^{2x}=5\cdot25^x$이므로

$y'=5\cdot25^x\ln 25=10\ln 5\cdot5^{2x}$ 답 $y'=10\ln 5\cdot5^{2x}$

0320 $y'=4\cdot3^x+4x\cdot3^x\ln 3=4\cdot3^x(x\ln 3+1)$

답 $y'=4\cdot3^x(x\ln 3+1)$

0321 $y'=2^x\ln 2\cdot(x-1)+2^x\cdot 1$
$=2^x\{(x-1)\ln 2+1\}$

답 $y'=2^x\{(x-1)\ln 2+1\}$

0322 $y=\ln 2x=\ln 2+\ln x$이므로
$y'=\dfrac{1}{x}$

답 $y'=\dfrac{1}{x}$

0323 $y=\ln x^5=5\ln x$이므로
$y'=\dfrac{5}{x}$

답 $y'=\dfrac{5}{x}$

0324 $y=x\ln 3x=x(\ln 3+\ln x)$이므로
$y'=1\cdot(\ln 3+\ln x)+x\cdot\dfrac{1}{x}=\ln 3x+1$

답 $y'=\ln 3x+1$

0325 $y'=e^x\cdot\ln x+e^x\cdot\dfrac{1}{x}=e^x\left(\ln x+\dfrac{1}{x}\right)$

답 $y'=e^x\left(\ln x+\dfrac{1}{x}\right)$

0326 답 $y'=\dfrac{2}{x\ln 10}-1$

0327 $y=\log_2 7x=\log_2 7+\log_2 x$이므로
$y'=\dfrac{1}{x\ln 2}$

답 $y'=\dfrac{1}{x\ln 2}$

0328 $y=x\log_5 2x=x(\log_5 2+\log_5 x)$이므로
$y'=1\cdot(\log_5 2+\log_5 x)+x\cdot\dfrac{1}{x\ln 5}=\log_5 2x+\dfrac{1}{\ln 5}$

답 $y'=\log_5 2x+\dfrac{1}{\ln 5}$

0329 $y=(\log_3 x)^2=(\log_3 x)(\log_3 x)$이므로
$y'=\dfrac{1}{x\ln 3}\cdot\log_3 x+\log_3 x\cdot\dfrac{1}{x\ln 3}=\dfrac{2\log_3 x}{x\ln 3}$

답 $y'=\dfrac{2\log_3 x}{x\ln 3}$

유형 01 지수함수의 극한

본책 56쪽

(i) 주어진 식을 다음과 같이 변형한다.
- $\dfrac{\infty}{\infty}$ 꼴 ➡ 분모에서 밑이 가장 큰 항으로 분모, 분자를 나눈다.
- $\infty-\infty$ 꼴 ➡ 밑이 가장 큰 항으로 묶는다.

(ii) $a>1$이면 $\lim\limits_{x\to\infty}a^x=\infty$, $0<a<1$이면 $\lim\limits_{x\to\infty}a^x=0$임을 이용하여 극한값을 구한다.

0330 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3^{x+1}-2^x}{3^x+2^x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3-\left(\frac{2}{3}\right)^x}{1+\left(\frac{2}{3}\right)^x}=3$

답 ③

0331 $\lim\limits_{x\to\infty}(9^x-5^x)^{\frac{1}{2x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\left\{9^x\left(1-\dfrac{5^x}{9^x}\right)\right\}^{\frac{1}{2x}}$
$=\lim\limits_{x\to\infty}(9^x)^{\frac{1}{2x}}\cdot\left\{1-\left(\dfrac{5}{9}\right)^x\right\}^{\frac{1}{2x}}$
$=\lim\limits_{x\to\infty}(3^{2x})^{\frac{1}{2x}}\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\left\{1-\left(\dfrac{5}{9}\right)^x\right\}^{\frac{1}{2x}}$
$=3\cdot 1=3$

답 ⑤

0332 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a\cdot 3^{x+1}+2}{3^{x-1}-4}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a\cdot 3^2+\dfrac{2}{3^{x-1}}}{1-\dfrac{4}{3^{x-1}}}=9a$ ··· ❶

따라서 $9a=18$이므로 $a=2$ ··· ❷

답 2

채점 기준	비율
❶ 주어진 식의 좌변을 간단히 할 수 있다.	70 %
❷ a의 값을 구할 수 있다.	30 %

0333 $-x=t$로 놓으면 $x\to-\infty$일 때 $t\to\infty$이므로
$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2^x+4x^3-1}{1+2x^3}=\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{2^{-t}-4t^3-1}{1-2t^3}$
$=\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{t^3\cdot 2^t}-4-\dfrac{1}{t^3}}{\dfrac{1}{t^3}-2}$
$=\dfrac{-4}{-2}=2$

답 ⑤

0334 ㄱ. $-x=t$로 놓으면 $x\to-\infty$일 때 $t\to\infty$이므로
$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4^x+4^{-x}}{4^x-4^{-x}}=\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{4^{-t}+4^t}{4^{-t}-4^t}$
$=\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{\left(\frac{1}{16}\right)^t+1}{\left(\frac{1}{16}\right)^t-1}=-1$

ㄴ. $\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{1}{x}=\infty$이므로
$\lim\limits_{x\to0+}5^{\frac{1}{x}}=\infty$, $\lim\limits_{x\to0+}5^{-\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0+}\left(\dfrac{1}{5}\right)^{\frac{1}{x}}=0$
$\therefore \lim\limits_{x\to0+}\dfrac{5^{\frac{1}{x}}}{5^{\frac{1}{x}}-5^{-\frac{1}{x}}}=\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{1}{1-5^{-\frac{2}{x}}}=1$
$\lim\limits_{x\to0-}\dfrac{1}{x}=-\infty$이므로
$\lim\limits_{x\to0-}5^{\frac{1}{x}}=0$, $\lim\limits_{x\to0-}5^{-\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0-}\left(\dfrac{1}{5}\right)^{\frac{1}{x}}=\infty$
$\therefore \lim\limits_{x\to0-}\dfrac{5^{\frac{1}{x}}}{5^{\frac{1}{x}}-5^{-\frac{1}{x}}}=0$
따라서 $\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{5^{\frac{1}{x}}}{5^{\frac{1}{x}}-5^{-\frac{1}{x}}}\neq\lim\limits_{x\to0-}\dfrac{5^{\frac{1}{x}}}{5^{\frac{1}{x}}-5^{-\frac{1}{x}}}$이므로 극한값은 존재하지 않는다.

ㄷ. $\dfrac{1}{x}=t$로 놓으면 $x\to-\infty$일 때 $t\to0-$이므로
$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{1-2^{\frac{1}{x}}}=\lim\limits_{t\to0-}\dfrac{1}{1-2^t}=\infty$

ㄹ. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2^x}{\sqrt{3^x}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^x=0$

이상에서 극한값이 존재하는 것은 ㄱ, ㄹ이다.

답 ③

0335 $\lim_{x\to0+}\frac{1}{x}=\infty$이므로 $\quad\lim_{x\to0+}2^{\frac{1}{x}}=\infty$

$\therefore \lim_{x\to0+}\frac{2^{\frac{1}{x}}+2^b}{2^{\frac{1}{x}}+2^a}=\lim_{x\to0+}\frac{1+2^{b-\frac{1}{x}}}{1+2^{a-\frac{1}{x}}}=1$

$\lim_{x\to0-}\frac{1}{x}=-\infty$이므로 $\quad\lim_{x\to0-}2^{\frac{1}{x}}=0$

$\therefore \lim_{x\to0-}\frac{2^{\frac{1}{x}}+2^b}{2^{\frac{1}{x}}+2^a}=\frac{2^b}{2^a}=2^{b-a}$

이때 $\lim_{x\to0}\frac{2^{\frac{1}{x}}+2^b}{2^{\frac{1}{x}}+2^a}$의 값이 존재하려면 $1=2^{b-a}$이어야 하므로

$b-a=0$

또 $c=1$이므로

$a-b+c=-(b-a)+c=1$ 답 1

유형 02 로그함수의 극한 본책 56쪽

(i) 주어진 식을 로그의 성질을 이용하여 $\lim_{x\to\infty}\{\log_a f(x)\}$ 꼴로 변형한다.

(ii) $\lim_{x\to\infty}\{\log_a f(x)\}=\log_a\left\{\lim_{x\to\infty}f(x)\right\}$임을 이용한다.

(단, $a>0,\ a\neq1,\ f(x)>0,\ \lim_{x\to\infty}f(x)>0$)

0336 $\lim_{x\to1}(\log_2|x^2-1|-\log_2|x^3-1|)$

$=\lim_{x\to1}\log_2\left|\frac{x^2-1}{x^3-1}\right|$

$=\lim_{x\to1}\log_2\left|\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)}\right|$

$=\lim_{x\to1}\log_2\left|\frac{x+1}{x^2+x+1}\right|$

$=\log_2\left(\lim_{x\to1}\left|\frac{x+1}{x^2+x+1}\right|\right)$

$=\log_2\frac{2}{3}=1-\log_2 3$ 답 ②

0337 $\lim_{x\to\infty}(\log_5\sqrt{5x^2+x}-\log_5 x)=\lim_{x\to\infty}\log_5\frac{\sqrt{5x^2+x}}{x}$

$=\log_5\left(\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{5x^2+x}}{x}\right)$

$=\log_5\left(\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{5+\frac{1}{x}}}{1}\right)$

$=\log_5\sqrt{5}=\frac{1}{2}$ 답 $\frac{1}{2}$

0338 $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\log_4(6^x+8^x)=\lim_{x\to\infty}\log_4(6^x+8^x)^{\frac{1}{x}}$

$=\lim_{x\to\infty}\log_4\left[8^x\left\{\left(\frac{3}{4}\right)^x+1\right\}\right]^{\frac{1}{x}}$

$=\lim_{x\to\infty}\log_4 8^{x\cdot\frac{1}{x}}\left\{\left(\frac{3}{4}\right)^x+1\right\}^{\frac{1}{x}}$

$=\log_4\left[\lim_{x\to\infty}8\cdot\left\{\left(\frac{3}{4}\right)^x+1\right\}^{\frac{1}{x}}\right]$

$=\log_4(8\cdot1)=\frac{3}{2}$ 답 ③

0339 $\lim_{x\to\infty}\{\log_3(ax-1)-\log_3(2x+1)\}$

$=\lim_{x\to\infty}\log_3\frac{ax-1}{2x+1}=\log_3\left(\lim_{x\to\infty}\frac{ax-1}{2x+1}\right)$

$=\log_3\left(\lim_{x\to\infty}\frac{a-\frac{1}{x}}{2+\frac{1}{x}}\right)=\log_3\frac{a}{2}$ ⋯ ❶

따라서 $\log_3\frac{a}{2}=3$이므로

$\frac{a}{2}=3^3 \qquad \therefore a=54$ ⋯ ❷

답 54

채점 기준	비율
❶ 주어진 식의 좌변을 간단히 할 수 있다.	70 %
❷ a의 값을 구할 수 있다.	30 %

유형 03 $\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$ 꼴의 극한 본책 57쪽

① $\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$

② $\lim_{x\to0}(1+ax)^{\frac{b}{x}}=\lim_{x\to0}\{(1+ax)^{\frac{1}{ax}}\}^{ab}=e^{ab}$

(단, a, b는 0이 아닌 상수)

0340 $\lim_{x\to0}(1+3x)^{\frac{2}{x}}+\lim_{x\to0}(1-2x)^{\frac{3}{x}}$

$=\lim_{x\to0}\{(1+3x)^{\frac{1}{3x}}\}^6+\lim_{x\to0}\{(1-2x)^{-\frac{1}{2x}}\}^{-6}$

$=e^6+e^{-6}=e^6+\frac{1}{e^6}$

$\therefore k=6$ 답 ⑤

0341 $x-1=t$로 놓으면 $x\longrightarrow1$일 때 $t\longrightarrow0$이므로

$\lim_{x\to1}x^{\frac{2}{1-x}}=\lim_{t\to0}(1+t)^{-\frac{2}{t}}=\lim_{t\to0}\{(1+t)^{\frac{1}{t}}\}^{-2}$

$=e^{-2}=\frac{1}{e^2}$ 답 $\frac{1}{e^2}$

0342 $\lim_{x\to0}\left\{\left(1+\frac{x}{a}\right)(1+ax)\right\}^{\frac{1}{x}}$

$=\lim_{x\to0}\left(1+\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{x}}\cdot(1+ax)^{\frac{1}{x}}$

$=\lim_{x\to0}\left\{\left(1+\frac{x}{a}\right)^{\frac{a}{x}}\right\}^{\frac{1}{a}}\cdot\{(1+ax)^{\frac{1}{ax}}\}^a$

$=e^{\frac{1}{a}}\cdot e^a=e^{a+\frac{1}{a}}$ ⋯ ❶

따라서 $e^{a+\frac{1}{a}}=e^{\frac{5}{2}}$이므로 $\quad a+\frac{1}{a}=\frac{5}{2}$

$2a^2-5a+2=0, \qquad (2a-1)(a-2)=0$

$\therefore a=2$ ($\because$ a는 자연수) ⋯ ❷

답 2

채점 기준	비율
❶ 주어진 식의 좌변을 간단히 할 수 있다.	50 %
❷ a의 값을 구할 수 있다.	50 %

유형 04 $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ 꼴의 극한

본책 57쪽

① $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$

② $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{bx}=\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1+\frac{a}{x}\right)^{\frac{x}{a}}\right\}^{ab}=e^{ab}$

(단, a, b는 0이 아닌 상수)

0343 $\lim_{x\to\infty}\left\{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x+1}\right)\left(1+\frac{1}{x+2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2x}\right)\right\}^{2x}$

$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{x+1}{x}\cdot\frac{x+2}{x+1}\cdot\frac{x+3}{x+2}\cdot\cdots\cdot\frac{2x+1}{2x}\right)^{2x}$

$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x}\right)^{2x}$

$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{2x}=e$

답 ③

0344 $\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{2x}\right)\left(1+\frac{1}{6x}\right)\right\}^{12x}$

$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{12x}\cdot\left(1+\frac{1}{6x}\right)^{12x}$

$=\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{2x}\right\}^6\cdot\left\{\left(1+\frac{1}{6x}\right)^{6x}\right\}^2$

$=e^6\cdot e^2=e^8$

답 ④

0345 $-x=t$로 놓으면 $x\to-\infty$일 때 $t\to\infty$이므로

$\lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{a}{x}\right)^{3x}=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{a}{t}\right)^{-3t}$

$=\lim_{t\to\infty}\left\{\left(1+\frac{a}{t}\right)^{\frac{t}{a}}\right\}^{-3a}$

$=\frac{1}{e^{3a}}$ ⋯ ❶

따라서 $\frac{1}{e^{3a}}=\frac{1}{e^6}$이므로 $3a=6$

$\therefore a=2$ ⋯ ❷

답 2

채점 기준	비율
❶ 주어진 식의 좌변을 간단히 할 수 있다.	70 %
❷ a의 값을 구할 수 있다.	30 %

0346 ㄱ. $x+1=t$로 놓으면 $x\to-1$일 때 $t\to0$이므로

$\lim_{x\to-1}(x+2)^{\frac{1}{x+1}}=\lim_{t\to0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=e$

ㄴ. $-x=t$로 놓으면 $x\to-\infty$일 때 $t\to\infty$이므로

$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{t\to\infty}\left(1-\frac{1}{t}\right)^{-t}=e$

ㄷ. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x$

$=\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-x}\right\}^{-1}$

$=\frac{1}{e}$

이상에서 극한값이 e인 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ④

0347 $\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{2}{x}\right)\left(1+\frac{3}{x}\right)\cdots\left(1+\frac{10}{x}\right)\right\}^x$

$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\cdot\left(1+\frac{2}{x}\right)^x\cdot\left(1+\frac{3}{x}\right)^x\cdot\cdots\cdot\left(1+\frac{10}{x}\right)^x$

$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\cdot\left\{\left(1+\frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}}\right\}^2\cdot\left\{\left(1+\frac{3}{x}\right)^{\frac{x}{3}}\right\}^3$

$\cdots\cdots\left\{\left(1+\frac{10}{x}\right)^{\frac{x}{10}}\right\}^{10}$

$=e\cdot e^2\cdot e^3\cdot\cdots\cdot e^{10}$

$=e^{1+2+3+\cdots+10}$

$=e^{55}$

답 e^{55}

0348 $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}{\left(1-\frac{1}{x}\right)^x}$

$=\frac{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}{\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x}$

$=\frac{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}{\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-x}\right\}^{-1}}$

$=\frac{e}{e^{-1}}=e^2$

답 e^2

다른 풀이 $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^x$

$\frac{2}{x-1}=t$로 놓으면 $x=\frac{2}{t}+1$이고 $x\to\infty$일 때 $t\to0+$이므로

$\lim_{t\to0+}(1+t)^{\frac{2}{t}+1}=\lim_{t\to0+}(1+t)^{\frac{2}{t}}\cdot(1+t)$

$=\lim_{t\to0+}\{(1+t)^{\frac{1}{t}}\}^2\cdot(1+t)$

$=e^2\cdot1=e^2$

유형 05 $\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}$ 꼴의 극한

본책 58쪽

① $\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$ ② $\lim_{x\to\infty}x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=1$

0349 $x+3=t$로 놓으면 $x\to-3$일 때 $t\to0$이므로

$\lim_{x\to-3}\frac{\ln\sqrt{x+4}}{x+3}=\lim_{t\to0}\frac{\ln\sqrt{1+t}}{t}$

$=\lim_{t\to0}\frac{1}{2}\cdot\frac{\ln(1+t)}{t}$

$=\frac{1}{2}\cdot1=\frac{1}{2}$

답 ④

0350 $a=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+6x)}{\ln(1+4x)}$

$=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+6x)}{6x}\cdot\frac{4x}{\ln(1+4x)}\cdot\frac{6}{4}$

$=1\cdot1\cdot\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$ ⋯ ❶

$b=\lim_{x\to\infty} e^x \ln(1+e^{-x})$에서 $e^x=t$로 놓으면 $x \to \infty$일 때 $t \to \infty$이므로

$$b=\lim_{t\to\infty} t\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)=1 \quad \cdots ❷$$

$$\therefore a+b=\frac{5}{2} \quad \cdots ❸$$

답 $\frac{5}{2}$

채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	50 %
❷ b의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	10 %

참고 $\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$에서 $\frac{1}{x}=t$로 놓으면 $x \to 0+$일 때 $t \to \infty$이므로 $\lim_{t\to\infty} t\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)=1$

0351 $y=e^{2x}-1$로 놓으면 $\quad e^{2x}=y+1$

$$2x=\ln(y+1), \qquad x=\frac{1}{2}\ln(y+1)$$

x와 y를 서로 바꾸면 $\quad y=\frac{1}{2}\ln(x+1)$

따라서 $g(x)=\frac{1}{2}\ln(x+1)$이므로

$$\lim_{x\to0}\frac{g(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{1}{2}\cdot\frac{\ln(x+1)}{x}$$
$$=\frac{1}{2}\cdot1=\frac{1}{2}$$

답 ①

0352 $\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\ln\frac{2+3x}{2+x}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\ln\frac{1+\frac{3}{2}x}{1+\frac{1}{2}x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\left\{\ln\left(1+\frac{3}{2}x\right)-\ln\left(1+\frac{1}{2}x\right)\right\}$$
$$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{\ln\left(1+\frac{3}{2}x\right)}{x}-\frac{\ln\left(1+\frac{1}{2}x\right)}{x}\right\}$$
$$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{\ln\left(1+\frac{3}{2}x\right)}{\frac{3}{2}x}\cdot\frac{3}{2}-\frac{\ln\left(1+\frac{1}{2}x\right)}{\frac{1}{2}x}\cdot\frac{1}{2}\right\}$$
$$=1\cdot\frac{3}{2}-1\cdot\frac{1}{2}=1$$

답 ②

0353 $\lim_{x\to\infty} x\{\ln(x+1)-\ln(x-1)\}$

$$=\lim_{x\to\infty} x\ln\frac{x+1}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to\infty} x\ln\left(1+\frac{2}{x-1}\right)$$

$\frac{2}{x-1}=t$로 놓으면 $x=\frac{t+2}{t}$이고 $x \to \infty$일 때 $t \to 0+$이므로

$$\lim_{t\to0+}\frac{t+2}{t}\cdot\ln(1+t)=\lim_{t\to0+}(t+2)\cdot\frac{\ln(1+t)}{t}$$
$$=2\cdot1=2$$

답 2

유형 06 $\lim_{x\to0}\frac{\log_a(1+x)}{x}$ 꼴의 극한

본책 59쪽

$a>0$, $a\neq1$일 때

① $\lim_{x\to0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\frac{1}{\ln a}$

② $\lim_{x\to0}\frac{\log_a(1+bx)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\log_a(1+bx)}{bx}\cdot b=\frac{b}{\ln a}$

(단, b는 0이 아닌 상수)

0354 $\lim_{x\to0}\frac{\log_3(4+x)-\log_3 4}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\log_3\frac{4+x}{4}}{x}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\log_3\left(1+\frac{x}{4}\right)}{\frac{x}{4}}\cdot\frac{1}{4}$$
$$=\frac{1}{\ln 3}\cdot\frac{1}{4}$$
$$=\frac{1}{4\ln 3}$$

답 $\frac{1}{4\ln 3}$

0355 $x-1=t$로 놓으면 $x \to 1$일 때 $t \to 0$이므로

$$\lim_{x\to1}\frac{\log_2 x}{x-1}=\lim_{t\to0}\frac{\log_2(1+t)}{t}=\frac{1}{\ln 2}$$

답 ④

0356 $\lim_{x\to0}\frac{\log_7(1+3x)}{\log_5(1-x)}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\log_7(1+3x)}{3x}\cdot\frac{-x}{\log_5(1-x)}\cdot(-3)$$
$$=\frac{1}{\ln 7}\cdot\ln 5\cdot(-3)=-3\log_7 5$$

답 ②

0357 $\lim_{x\to0}\frac{ax}{\log_4(1+2x)}=\lim_{x\to0}\frac{2x}{\log_4(1+2x)}\cdot\frac{a}{2}$

$$=\ln 4\cdot\frac{a}{2}=a\ln 2$$

따라서 $a\ln 2=3\ln 2$이므로 $\quad a=3 \quad \cdots ❶$

$$\therefore \lim_{x\to0}\frac{\log_9(1+ax)}{5x}=\lim_{x\to0}\frac{\log_9(1+3x)}{5x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\log_9(1+3x)}{3x}\cdot\frac{3}{5}$$
$$=\frac{1}{\ln 9}\cdot\frac{3}{5}=\frac{3}{10\ln 3} \quad \cdots ❷$$

답 $\frac{3}{10\ln 3}$

채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	50 %
❷ 극한값을 구할 수 있다.	50 %

유형 07 $\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}$ 꼴의 극한

본책 59쪽

① $\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1$

② $\lim_{x\to0}\frac{e^{ax}-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{e^{ax}-1}{ax}\cdot a=a$ (단, a는 0이 아닌 상수)

0358 $\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+3x)}{e^{4x}-1}=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+3x)}{3x}\cdot\frac{4x}{e^{4x}-1}\cdot\frac{3}{4}$

$=1\cdot1\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{4}$

답 ②

0359 $\lim_{x\to0}\frac{e^{5x}+e^{2x}-2}{5x}$

$=\lim_{x\to0}\frac{(e^{5x}-1)+(e^{2x}-1)}{5x}$

$=\lim_{x\to0}\left(\frac{e^{5x}-1}{5x}+\frac{e^{2x}-1}{2x}\cdot\frac{2}{5}\right)$

$=1+1\cdot\frac{2}{5}=\frac{7}{5}$

답 $\frac{7}{5}$

0360 $x-1=t$로 놓으면 $x\longrightarrow1$일 때 $t\longrightarrow0$이므로

$\lim_{x\to1}\frac{e^{x-1}-x^2}{x-1}=\lim_{t\to0}\frac{e^t-(t+1)^2}{t}$

$=\lim_{t\to0}\frac{e^t-(t^2+2t+1)}{t}$

$=\lim_{t\to0}\left(\frac{e^t-1}{t}-t-2\right)$

$=1-2=-1$

답 ②

0361 $\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)(1+2x)(1+3x)(1+4x)}{e^x-1}$

$=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)+\ln(1+2x)+\ln(1+3x)+\ln(1+4x)}{e^x-1}$

$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{\ln(1+x)}{x}+\frac{\ln(1+2x)}{2x}\cdot2+\frac{\ln(1+3x)}{3x}\cdot3+\frac{\ln(1+4x)}{4x}\cdot4\right\}\cdot\frac{x}{e^x-1}$

$=(1+1\cdot2+1\cdot3+1\cdot4)\cdot1=10$

답 10

0362 조건 ㈎에서

$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{\ln(1+5x)}=\lim_{x\to0}\frac{5x}{\ln(1+5x)}\cdot\frac{f(x)}{5x}$

$=1\cdot\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{5x}$

$=\frac{1}{5}\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}$

따라서 $\frac{1}{5}\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=2$이므로 $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=10$

조건 ㈏에서

$\lim_{x\to0}\frac{e^{3x}-1}{g(x)}=\lim_{x\to0}\frac{e^{3x}-1}{3x}\cdot\frac{3x}{g(x)}$

$=1\cdot\lim_{x\to0}\frac{3x}{g(x)}$

$=3\lim_{x\to0}\frac{x}{g(x)}$

따라서 $3\lim_{x\to0}\frac{x}{g(x)}=6$이므로 $\lim_{x\to0}\frac{x}{g(x)}=2$

$\therefore\ \lim_{x\to0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}\cdot\frac{x}{g(x)}$

$=10\cdot2=20$

답 20

0363 $x>0$이므로 주어진 부등식의 각 변을 x로 나누면

$\frac{\ln\left(1+\frac{1}{3}x\right)}{x}\le\frac{f(x)}{x}\le\frac{e^{2x}-1}{6x}$

이때

$\lim_{x\to0+}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{3}x\right)}{x}=\lim_{x\to0+}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{3}x\right)}{\frac{1}{3}x}\cdot\frac{1}{3}=1\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$,

$\lim_{x\to0+}\frac{e^{2x}-1}{6x}=\lim_{x\to0+}\frac{e^{2x}-1}{2x}\cdot\frac{1}{3}=1\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$

이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim_{x\to0+}\frac{f(x)}{x}=\frac{1}{3}$ ··· ❶

$\lim_{x\to0+}\frac{f(6x)}{x}$에서 $6x=t$로 놓으면 $x\longrightarrow0+$일 때 $t\longrightarrow0+$이므로

$\lim_{x\to0+}\frac{f(6x)}{x}=\lim_{t\to0+}6\cdot\frac{f(t)}{t}$

$=6\cdot\frac{1}{3}=2$ ··· ❷

답 2

채점 기준	비율
❶ $\lim_{x\to0+}\frac{f(x)}{x}$의 값을 구할 수 있다.	60 %
❷ $\lim_{x\to0+}\frac{f(6x)}{x}$의 값을 구할 수 있다.	40 %

SSEN 특강 함수의 극한의 대소 관계

세 함수 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$와 a에 가까운 모든 실수 x에 대하여

(1) $f(x)\le g(x)$이고 극한값 $\lim_{x\to a}f(x)$와 $\lim_{x\to a}g(x)$가 존재하면

$\lim_{x\to a}f(x)\le\lim_{x\to a}g(x)$

(2) $f(x)\le h(x)\le g(x)$이고 $\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(x)=L$ (L은 실수)이면

$\lim_{x\to a}h(x)=L$

유형 08 $\lim_{x\to0}\frac{a^x-1}{x}$ 꼴의 극한

본책 60쪽

$a>0$, $a\ne1$일 때

① $\lim_{x\to0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$

② $\lim_{x\to0}\frac{a^{bx}-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{a^{bx}-1}{bx}\cdot b=b\ln a$ (단, b는 0이 아닌 상수)

0364 $\lim_{x\to0}\frac{e^x-3^{-x}}{x}=\lim_{x\to0}\frac{e^x-1-(3^{-x}-1)}{x}$

$=\lim_{x\to0}\left(\frac{e^x-1}{x}+\frac{3^{-x}-1}{-x}\right)$

$=1+\ln3$

답 ⑤

0365 $\lim_{x\to0}\frac{(4^x-1)\log_2(1+x)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{4^x-1}{x}\cdot\frac{\log_2(1+x)}{x}$

$=\ln4\cdot\frac{1}{\ln2}=2\ln2\cdot\frac{1}{\ln2}$

$=2$

답 2

0366 $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+ax)}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+ax)}{ax}\cdot\frac{a}{2}$

$=1\cdot\frac{a}{2}=\frac{a}{2}$

따라서 $\frac{a}{2}=b$이므로

$a=2b$ ······ ㉠

$\lim_{x\to 0}\frac{3^{8x}-1}{bx}=\lim_{x\to 0}\frac{3^{8x}-1}{8x}\cdot\frac{8}{b}=\ln 3\cdot\frac{8}{b}=\frac{8}{b}\ln 3$

따라서 $\frac{8}{b}\ln 3=a\ln 3$이므로

$\frac{8}{b}=a$ ······ ㉡ ··· ❶

㉠을 ㉡에 대입하면 $\frac{8}{b}=2b$

$b^2=4$ $\therefore b=2$ ($\because b>0$)

$b=2$를 ㉠에 대입하면 $a=4$ ··· ❷

$\therefore a+b=6$ ··· ❸

답 6

채점 기준	비율
❶ a, b 사이의 관계식을 구할 수 있다.	60 %
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	10 %

0367 $\lim_{x\to 0}\frac{8^x-4^x-2^x+1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(4^x-1)(2^x-1)}{x^2}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{4^x-1}{x}\cdot\frac{2^x-1}{x}$

$=\ln 4\cdot\ln 2=2(\ln 2)^2$

답 ④

0368 $\lim_{x\to -1}\frac{2^{x+1}-1}{x^2-1}=\lim_{x\to -1}\frac{2^{x+1}-1}{x+1}\cdot\frac{1}{x-1}$

$x+1=t$로 놓으면 $x\longrightarrow -1$일 때 $t\longrightarrow 0$이므로

$\lim_{t\to 0}\frac{2^t-1}{t}\cdot\frac{1}{t-2}=\ln 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}\ln 2$

$=\ln 2^{-\frac{1}{2}}=\ln\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore a=\frac{\sqrt{2}}{2}$

답 ②

0369 $y=\log_3(x+1)$로 놓으면 $x+1=3^y$

$x=3^y-1$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=3^x-1$

따라서 $g(x)=3^x-1$이므로 ··· ❶

$\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{3^x-1}{\log_3(x+1)}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{3^x-1}{x}\cdot\frac{x}{\log_3(x+1)}$

$=\ln 3\cdot\ln 3=(\ln 3)^2$ ··· ❷

답 $(\ln 3)^2$

채점 기준	비율
❶ $g(x)$를 구할 수 있다.	30 %
❷ 극한값을 구할 수 있다.	70 %

유형 09 지수 · 로그함수의 극한 ; 미정계수의 결정

본책 61쪽

$x\to a$일 때

① (분모) → 0이고 극한값이 존재하면 (분자) → 0이다.

② (분자) → 0이고 0이 아닌 극한값이 존재하면 (분모) → 0이다.

0370 $x\longrightarrow 0$일 때 (분모) $\longrightarrow 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉 $\lim_{x\to 0}(\sqrt{ax+b}-1)=0$이므로 $\sqrt{b}-1=0$

$\therefore b=1$

$b=1$을 주어진 식의 좌변에 대입하면

$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{ax+1}-1}{e^x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{ax+1}-1)(\sqrt{ax+1}+1)}{(e^x-1)(\sqrt{ax+1}+1)}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{ax}{(e^x-1)(\sqrt{ax+1}+1)}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{x}{e^x-1}\cdot\frac{a}{\sqrt{ax+1}+1}$

$=1\cdot\frac{a}{2}=\frac{a}{2}$

따라서 $\frac{a}{2}=2$이므로 $a=4$

$\therefore a-b=3$

답 ⑤

0371 $x\longrightarrow 0$일 때 (분모) $\longrightarrow 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉 $\lim_{x\to 0}(e^{2a+x}-b)=0$이므로 $e^{2a}-b=0$

$\therefore e^{2a}=b$

$e^{2a}=b$를 주어진 식의 좌변에 대입하면

$\lim_{x\to 0}\frac{be^x-b}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{b(e^x-1)}{2x}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{b}{2}\cdot\frac{e^x-1}{x}$

$=\frac{b}{2}\cdot 1=\frac{b}{2}$

따라서 $\frac{b}{2}=e^2$이므로 $b=2e^2$

답 ⑤

0372 $f(a)=0$이므로 $x\longrightarrow a$일 때 $f(x)\longrightarrow 0$이다.

이때 $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\ln(1+8x)}=\frac{1}{b}$에서 $x\longrightarrow a$일 때 (분자) $\longrightarrow 0$이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모) $\longrightarrow 0$이다.

즉 $\lim_{x\to a}\ln(1+8x)=0$이므로 $\ln(1+8a)=0$

$1+8a=1$ $\therefore a=0$ ··· ❶

$f(x)=e^x-1$이므로

$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\ln(1+8x)}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\ln(1+8x)}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}\cdot\frac{8x}{\ln(1+8x)}\cdot\frac{1}{8}$

$=1\cdot 1\cdot\frac{1}{8}=\frac{1}{8}$

따라서 $\frac{1}{8}=\frac{1}{b}$이므로 $b=8$ ··· ❷

$\therefore a+b=8$ ··· ❸

답 8

채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷ b의 값을 구할 수 있다.	60 %
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	10 %

0373 $x \longrightarrow 0$일 때 (분자) $\longrightarrow 0$이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모) $\longrightarrow 0$이다.

즉 $\lim_{x\to0}(ax^2+b)=0$이므로 $\quad b=0$

$b=0$을 주어진 식의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to0}\frac{(e^x-1)\ln(1+x)}{ax^2}=\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}\cdot\frac{\ln(1+x)}{x}\cdot\frac{1}{a}$$
$$=1\cdot1\cdot\frac{1}{a}=\frac{1}{a}$$

따라서 $\frac{1}{a}=6$이므로 $\quad a=\frac{1}{6}$

$\therefore 12a+b=2$ 답 2

0374 $x \longrightarrow \frac{1}{2}$일 때 (분모) $\longrightarrow 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉 $\lim_{x\to\frac{1}{2}}(ax+b)=0$이므로 $\quad \frac{1}{2}a+b=0$

$\therefore a=-2b$ ...... ㉠

㉠을 주어진 식의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{-2bx+b}{\ln 2x}=\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{-b(2x-1)}{\ln 2x}$$

$x-\frac{1}{2}=t$로 놓으면 $x \longrightarrow \frac{1}{2}$일 때 $t \longrightarrow 0$이므로

$$\lim_{t\to0}(-b)\cdot\frac{2t}{\ln(2t+1)}=-b\cdot1=-b$$

따라서 $-b=3$이므로 $\quad b=-3$

$b=-3$을 ㉠에 대입하면 $\quad a=6$

$\therefore a-b=9$ 답 9

유형 10 지수·로그함수의 극한의 도형에의 활용 본책 61쪽

(i) 주어진 점의 좌표를 이용하여 구하는 선분의 길이, 도형의 넓이를 지수·로그에 대한 식으로 나타낸다.
(ii) 극한의 성질을 이용하여 극한값을 구한다.

0375 $P(t, e^t)$ $(t>0)$이라 하면

$$S_1=\frac{1}{2}(e-1)t,\ S_2=\frac{3}{2}(e^t-1)$$
$$\therefore \frac{S_1}{S_2}=\frac{(e-1)t}{3(e^t-1)}$$

제1사분면 위의 점 P가 점 B에 한없이 가까워지면 $t \longrightarrow 0+$이므로 구하는 극한값은

$$\lim_{t\to0+}\frac{S_1}{S_2}=\lim_{t\to0+}\frac{(e-1)t}{3(e^t-1)}$$
$$=\lim_{t\to0+}\frac{e-1}{3}\cdot\frac{t}{e^t-1}$$
$$=\frac{e-1}{3}\cdot1=\frac{e-1}{3}$$

답 $\frac{e-1}{3}$

0376 $A(t, \ln(t+1))$, $B(t, 0)$이므로

$$S(t)=\frac{1}{2}t\ln(t+1)\ (\because \underline{t\ln(t+1)>0})$$

$t>0$이면 $\ln(t+1)>0$
$t<0$이면 $\ln(t+1)<0$
$\therefore t\ln(t+1)>0$

$$\therefore \lim_{t\to0}\frac{S(t)}{t^2}=\lim_{t\to0}\frac{1}{t^2}\cdot\frac{1}{2}t\ln(t+1)$$
$$=\lim_{t\to0}\frac{1}{2}\cdot\frac{\ln(t+1)}{t}$$
$$=\frac{1}{2}\cdot1=\frac{1}{2}$$

답 ③

0377 $P(a, 5^a)$, $Q(a, 2^a)$이므로

$\overline{PQ}=5^a-2^a$

$$\therefore \lim_{a\to0+}\frac{\overline{PQ}}{a}=\lim_{a\to0+}\frac{5^a-2^a}{a}$$
$$=\lim_{a\to0+}\frac{5^a-1-(2^a-1)}{a}$$
$$=\lim_{a\to0+}\left(\frac{5^a-1}{a}-\frac{2^a-1}{a}\right)$$
$$=\ln5-\ln2=\ln\frac{5}{2}$$

답 ③

0378 $R(0, \ln3)$이고, $P(t, \ln(t+3))$ $(t>0)$이라 하면 $H(t, \ln3)$이므로

$$\overline{RH}=t,\ \overline{PH}=\ln(t+3)-\ln3=\ln\frac{t+3}{3}$$ ···➊

제1사분면 위의 점 P가 점 R에 한없이 가까워지면 $t \longrightarrow 0+$이므로 구하는 극한값은

$$\lim_{t\to0+}\frac{\overline{PH}}{\overline{RH}}=\lim_{t\to0+}\frac{\ln\frac{t+3}{3}}{t}=\lim_{t\to0+}\frac{\ln\left(1+\frac{t}{3}\right)}{\frac{t}{3}}\cdot\frac{1}{3}$$
$$=1\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$$ ···➋

답 $\frac{1}{3}$

채점 기준	비율
❶ $\overline{RH}$, $\overline{PH}$의 길이를 t에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30 %
❷ 극한값을 구할 수 있다.	70 %

유형 11 지수·로그함수의 연속 본책 62쪽

함수 $f(x)=\begin{cases} g(x) & (x\neq a) \\ k & (x=a)\end{cases}$가 모든 실수 x에서 연속

➡ $\lim_{x\to a}g(x)=k$ (단, 함수 $g(x)$는 $x\neq a$인 모든 실수 x에서 연속이고 k는 상수이다.)

0379 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이면 $\lim_{x\to0}f(x)=f(0)$이므로

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(a+3x)}{x}=b$$ ...... ㉠

$x \longrightarrow 0$일 때 (분모) $\longrightarrow 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉 $\lim_{x\to0}\ln(a+3x)=0$이므로 $\quad \ln a=0$

$\therefore a=1$

$a=1$을 ㉠에 대입하면

$$b=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+3x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+3x)}{3x}\cdot3$$
$$=1\cdot3=3$$
$$\therefore a+b=4$$

답 ④

0380 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이면 $x=0$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to0+}f(x)=\lim_{x\to0-}f(x)=f(0)$$
$$\therefore \lim_{x\to0+}\frac{e^{2x}-1}{ax}=\lim_{x\to0-}\frac{2x^2+1}{x-1}=-1$$

$\lim_{x\to0-}\frac{2x^2+1}{x-1}=\frac{2\cdot0+1}{0-1}=-1$

이때 $\lim_{x\to0+}\frac{e^{2x}-1}{ax}=\lim_{x\to0+}\frac{e^{2x}-1}{2x}\cdot\frac{2}{a}=1\cdot\frac{2}{a}=\frac{2}{a}$이므로

$\frac{2}{a}=-1 \qquad \therefore a=-2$

답 -2

0381 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이면 $x=1$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1-}f(x)=f(1)$$
$$\therefore \lim_{x\to1+}\frac{\ln(3x-2)}{e^{x-1}-1}=\lim_{x\to1-}(ax^2+2x+3)=a+5$$

$\lim_{x\to1-}(ax^2+2x+3)=a\cdot1^2+2\cdot1+3=a+5$

이때 $\lim_{x\to1+}\frac{\ln(3x-2)}{e^{x-1}-1}$에서 $x-1=t$로 놓으면 $x\longrightarrow1+$일 때 $t\longrightarrow0+$이므로

$$\lim_{x\to1+}\frac{\ln(3x-2)}{e^{x-1}-1}=\lim_{t\to0+}\frac{\ln(3t+1)}{e^t-1}$$
$$=\lim_{t\to0+}\frac{\ln(3t+1)}{3t}\cdot\frac{t}{e^t-1}\cdot3$$
$$=1\cdot1\cdot3=3$$

따라서 $3=a+5$이므로 $a=-2$

답 ②

0382 $x\neq1$일 때, $f(x)=\frac{3^{2x-2}-1}{x-1}$ ...... ㉠

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이면 $x=1$에서 연속이므로

$$f(1)=\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\frac{3^{2x-2}-1}{x-1}$$

$x-1=t$로 놓으면 $x\longrightarrow1$일 때 $t\longrightarrow0$이므로

$\lim_{t\to0}\frac{3^{2t}-1}{t}=\lim_{t\to0}\frac{3^{2t}-1}{2t}\cdot2=2\ln3$ ··· ❶

㉠에서 $f(2)=\frac{3^{4-2}-1}{2-1}=8$ ··· ❷

$\therefore f(1)f(2)=2\ln3\cdot8=16\ln3$ ··· ❸

답 $16\ln3$

채점 기준	비율
❶ $f(1)$의 값을 구할 수 있다.	60 %
❷ $f(2)$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ $f(1)f(2)$의 값을 구할 수 있다.	10 %

0383 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $x=0$에서 연속이어야 하므로 $\lim_{x\to0}f(x)=f(0)$

$\therefore \lim_{x\to0}\frac{e^x+e^{-x}-a}{x^2}=b$ ...... ㉠

$x\longrightarrow0$일 때 (분모)$\longrightarrow0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\longrightarrow0$이다.

즉 $\lim_{x\to0}(e^x+e^{-x}-a)=0$이므로 $2-a=0$

$\therefore a=2$

$a=2$를 ㉠에 대입하면

$$b=\lim_{x\to0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}-2e^x+1}{x^2e^x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{(e^x-1)^2}{x^2e^x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{e^x}\cdot\left(\frac{e^x-1}{x}\right)^2$$
$$=1\cdot1^2=1$$
$$\therefore a^2+b^2=2^2+1^2=5$$

답 ②

유형 12 지수함수의 도함수

본책 63쪽

① $y=e^x$이면 $y'=e^x$
② $y=a^x$ $(a>0,\ a\neq1)$이면 $y'=a^x\ln a$

0384 $f'(x)=5^x\ln5\cdot(2x^3-1)+5^x\cdot6x^2$이므로

$f'(0)=1\cdot\ln5\cdot(-1)=-\ln5$

답 ①

0385 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1,\ f(1))$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)$이고 $f'(x)=2^x\ln2+3^x\ln3$이므로

$$f'(1)=2\ln2+3\ln3=\ln2^2+\ln3^3$$
$$=\ln(2^2\cdot3^3)=\ln108$$

따라서 $\ln a=\ln108$이므로 $a=108$

답 108

0386 $f'(x)=e^x+(x-a)e^x=(x-a+1)e^x$이므로

$f'(2)=(2-a+1)e^2=(3-a)e^2$

따라서 $(3-a)e^2=\frac{3}{2}e^2$이므로 $3-a=\frac{3}{2}$

$\therefore a=\frac{3}{2}$

답 ③

0387 $\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1-h)}{h}$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)-\{f(1-h)-f(1)\}}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}+\lim_{h\to0}\frac{f(1-h)-f(1)}{-h}$$

$=f'(1)+f'(1)=2f'(1)$ ··· ❶

이때 $f(x)=2^{x+1}=2\cdot2^x$에서

$f'(x)=2\cdot2^x\cdot\ln2=2^{x+1}\ln2$ ··· ❷

$\therefore 2f'(1)=2\cdot2^2\cdot\ln2=8\ln2$ ··· ❸

답 $8\ln2$

채점 기준	비율
❶ 주어진 극한을 미분계수로 나타낼 수 있다.	40 %
❷ $f'(x)$를 구할 수 있다.	40 %
❸ 극한값을 구할 수 있다.	20 %

SSEN 특강 미분계수를 이용한 극한값의 계산

(i) 미분계수의 정의를 이용하여 주어진 식을 $f'(a)$를 사용한 식으로 변형한다.
(ii) 도함수 $f'(x)$를 구한 후 $f'(a)$의 값을 구한다.
(iii) (i)의 식에 $f'(a)$의 값을 대입한다.

0388 $\lim_{x\to3}\frac{e^xf(x)-8}{x-3}=2e$ …… ㉠

㉠에서 $x\to3$일 때 (분모) $\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to0$이다.

즉 $\lim_{x\to3}\{e^xf(x)-8\}=0$이므로 $\quad e^3f(3)-8=0$

$\therefore e^3f(3)=8$

㉠에서 $e^xf(x)=g(x)$로 놓으면 $g(3)=8$이므로

$$\lim_{x\to3}\frac{g(x)-g(3)}{x-3}=g'(3)=2e$$

이때 $g'(x)=e^xf(x)+e^xf'(x)$이므로

$g'(3)=e^3f(3)+e^3f'(3)$

따라서 $e^3f(3)+e^3f'(3)=2e$이므로

$e^3\{f(3)+f'(3)\}=2e$

$\therefore f(3)+f'(3)=2e^{-2}$

답 ①

유형 13 로그함수의 도함수 본책 63쪽

① $y=\ln x$이면 $\quad y'=\frac{1}{x}$

② $y=\log_a x\ (a>0,\ a\neq1)$이면 $\quad y'=\frac{1}{x\ln a}$

0389 $\lim_{x\to1}\frac{f(x^2)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x^2)-f(1)}{x^2-1}\cdot(x+1)$
$=2f'(1)$

이때 $f'(x)=\ln x+x\cdot\frac{1}{x}=\ln x+1$이므로

$2f'(1)=2\cdot(0+1)=2$

답 2

0390 $f(x)=\log_4\frac{1}{x}-\log_2\frac{1}{x}=-\log_4x+\log_2x$
$=-\frac{1}{2}\log_2x+\log_2x$
$=\frac{1}{2}\log_2x$

이므로

$$f'(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x\ln2}=\frac{1}{2x\ln2}$$

$$\therefore f'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{\ln2}$$

답 $\frac{1}{\ln2}$

0391 $f(x)=x^2\log_5 3x=x^2(\log_5 3+\log_5 x)$이므로

$$f'(x)=2x(\log_5 3+\log_5 x)+x^2\cdot\frac{1}{x\ln5}$$
$$=2x\log_5 3x+\frac{x}{\ln5}$$
$$=2x\log_5 3x+x\log_5 e$$

따라서 $f'(1)=2\log_5 3+\log_5 e=\log_5 9e$이므로

$a=9e$

답 ⑤

0392 함수 $f(x)=\ln 2x$는 닫힌구간 $[3,\ 9]$에서 연속이고 열린구간 $(3,\ 9)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$$\frac{f(9)-f(3)}{9-3}=f'(c)$$

인 c가 열린구간 $(3,\ 9)$에 적어도 하나 존재한다.

이때 $f(9)=\ln18$, $f(3)=\ln6$이고 $f(x)=\ln2x=\ln2+\ln x$에서

$f'(x)=\frac{1}{x}$이므로

$$\frac{\ln18-\ln6}{9-3}=\frac{1}{c},\qquad \frac{\ln3}{6}=\frac{1}{c}$$

$$\therefore c=\frac{6}{\ln3}$$

답 ④

SSEN 특강 평균값 정리

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 열린구간 $(a,\ b)$에서 미분가능할 때,

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

인 c가 a와 b 사이에 적어도 하나 존재한다.

0393 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=4$ …… ㉠

㉠에서 $x\to1$일 때 (분모) $\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to0$이다.

즉 $\lim_{x\to1}f(x)=0$이므로 $\quad f(1)=0$

이때 $f(1)=b$이므로 $\quad b=0$ ··· ❶

㉠에서 $f(1)=0$이므로

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=4$$

이때 $f(x)=ax^2\ln x$에서

$$f'(x)=2ax\ln x+ax^2\cdot\frac{1}{x}=2ax\ln x+ax$$

이므로

$f'(1)=a\quad\therefore a=4$ ··· ❷

따라서 $f'(x)=8x\ln x+4x$이므로

$f'(2)-2a=(16\ln2+8)-8=16\ln2$ ··· ❸

답 $16\ln2$

채점 기준	비율
❶ b의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷ a의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ $f'(2)-2a$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0394 $k(x)=f(x)g(x)$로 놓으면

$$\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\{f(1+h)g(1+h)-f(1)g(1)\}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{k(1+h)-k(1)}{h}=k'(1)$$

$k(x)=f(x)g(x)$

$=(3-\ln x)e^{x-3}$

$=(3-\ln x)\dfrac{e^x}{e^3}$

이므로

$$k'(x)=-\frac{1}{x}\cdot\frac{e^x}{e^3}+(3-\ln x)\frac{e^x}{e^3}$$

따라서 구하는 극한값은

$$k'(1)=-\frac{1}{e^2}+\frac{3}{e^2}=\frac{2}{e^2}$$

답 $\dfrac{2}{e^2}$

다른 풀이 $f(1+h)g(1+h)-f(1)g(1)$

$=\{3-\ln(1+h)\}e^{h-2}-3e^{-2}$

$=\dfrac{1}{e^2}\{3(e^h-1)-e^h\ln(1+h)\}$

$\therefore \displaystyle\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\{f(1+h)g(1+h)-f(1)g(1)\}$

$=\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{1}{e^2}\left\{3\cdot\frac{e^h-1}{h}-e^h\cdot\frac{\ln(1+h)}{h}\right\}$

$=\dfrac{1}{e^2}(3\cdot1-1\cdot1)=\dfrac{2}{e^2}$

유형 14 지수·로그함수의 미분가능성

본책 64쪽

함수 $F(x)=\begin{cases}f(x) & (x\ge a)\\ g(x) & (x<a)\end{cases}$가 다음 조건을 모두 만족시키면 $x=a$에서 미분가능하다.

① 함수 $F(x)$가 $x=a$에서 연속이다.

➡ $\displaystyle\lim_{x\to a+}f(x)=\lim_{x\to a-}g(x)=f(a)$

② $F'(a)$가 존재한다.

➡ $\displaystyle\lim_{x\to a+}f'(x)=\lim_{x\to a-}g'(x)$

0395 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하려면 $x=1$에서 연속이어야 하므로

$\displaystyle\lim_{x\to1+}\ln ax=\lim_{x\to1-}(bx^2+2)=f(1)$

$\therefore \ln a=b+2$ ...... ㉠

또 $f'(1)$이 존재해야 하므로 $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x} & (x>1)\\ 2bx & (x<1)\end{cases}$에서

$y=\ln ax$
$=\ln a+\ln x$
이므로 $y'=\dfrac{1}{x}$

$\displaystyle\lim_{x\to1+}\frac{1}{x}=\lim_{x\to1-}2bx$

$1=2b$ $\quad\therefore b=\dfrac{1}{2}$

$b=\dfrac{1}{2}$을 ㉠에 대입하면 $\quad\ln a=\dfrac{5}{2}$

$\therefore a=e^{\frac{5}{2}}$

답 $a=e^{\frac{5}{2}}$, $b=\dfrac{1}{2}$

0396 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 미분가능하면 $x=1$에서 미분가능하고 $x=1$에서 연속이므로

$\displaystyle\lim_{x\to1+}(ax^3-1)=\lim_{x\to1-}(e^{x-1}+b)=f(1)$

$a-1=1+b$

$\therefore a-b=2$ ...... ㉠ ⋯ ❶

또 $f'(1)$이 존재하므로 $f'(x)=\begin{cases}3ax^2 & (x>1)\\ e^{x-1} & (x<1)\end{cases}$에서

$\displaystyle\lim_{x\to1+}3ax^2=\lim_{x\to1-}e^{x-1}$

$3a=1$ $\quad\therefore a=\dfrac{1}{3}$

$a=\dfrac{1}{3}$을 ㉠에 대입하면 $\quad\dfrac{1}{3}-b=2$

$\therefore b=-\dfrac{5}{3}$ ⋯ ❷

$\therefore ab=-\dfrac{5}{9}$ ⋯ ❸

답 $-\dfrac{5}{9}$

채점 기준	비율
❶ a, b 사이의 관계식을 구할 수 있다.	30 %
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	60 %
❸ ab의 값을 구할 수 있다.	10 %

0397 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하려면 $x=1$에서 연속이어야 하므로

$\displaystyle\lim_{x\to1+}(\ln x+ax^2)=\lim_{x\to1-}be^{x-1}=f(1)$

$\therefore a=b$ ...... ㉠

또 $f'(1)$이 존재해야 하므로 $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}+2ax & (x>1)\\ be^{x-1} & (x<1)\end{cases}$에서

$\displaystyle\lim_{x\to1+}\left(\frac{1}{x}+2ax\right)=\lim_{x\to1-}be^{x-1}$

$\therefore 1+2a=b$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-1$, $b=-1$

$\therefore a+b=-2$

답 ①

0398 1st 주어진 식의 좌변에서 밑이 a, b인 로그를 밑이 e인 로그로 변환한다.

$$\lim_{x\to0+}\frac{a^x+\log_b x}{b^x+\log_a x}=\lim_{x\to0+}\frac{a^x+\dfrac{\ln x}{\ln b}}{b^x+\dfrac{\ln x}{\ln a}}\quad\text{...... ㉠}$$

2nd ㉠을 간단히 한다.

$\displaystyle\lim_{x\to0+}a^x=1$, $\displaystyle\lim_{x\to0+}b^x=1$이고, $\displaystyle\lim_{x\to0+}\ln x=-\infty$이므로 ㉠의 분모, 분자를 각각 $\ln x$로 나누면

$$\lim_{x\to0+}\frac{\dfrac{a^x}{\ln x}+\dfrac{1}{\ln b}}{\dfrac{b^x}{\ln x}+\dfrac{1}{\ln a}}=\frac{\displaystyle\lim_{x\to0+}\left(\frac{a^x}{\ln x}+\frac{1}{\ln b}\right)}{\displaystyle\lim_{x\to0+}\left(\frac{b^x}{\ln x}+\frac{1}{\ln a}\right)}$$

$$=\frac{\dfrac{1}{\ln b}}{\dfrac{1}{\ln a}}=\frac{\ln a}{\ln b}=\log_b a$$

3rd $\log_a b$의 값을 구한다.

따라서 $\log_b a=\dfrac{1}{4}$이므로

$$\log_a b=\frac{1}{\log_b a}=4$$

답 ⑤

0399 1st $\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1$임을 이용하여 $g(n)$을 구한다.

$$\begin{aligned}g(n)&=\lim_{x\to0}f(x)\\&=\lim_{x\to0}\frac{x}{e^x+e^{2x}+e^{3x}+\cdots+e^{nx}-n}\\&=\lim_{x\to0}\frac{x}{e^x-1+e^{2x}-1+e^{3x}-1+\cdots+e^{nx}-1}\\&=\lim_{x\to0}\frac{1}{\frac{e^x-1+e^{2x}-1+e^{3x}-1+\cdots+e^{nx}-1}{x}}\\&=\lim_{x\to0}\frac{1}{\frac{e^x-1}{x}+\frac{e^{2x}-1}{2x}\cdot2+\frac{e^{3x}-1}{3x}\cdot3+\cdots+\frac{e^{nx}-1}{nx}\cdot n}\\&=\frac{1}{1+2+3+\cdots+n}\\&=\frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}}=\frac{2}{n(n+1)}\end{aligned}$$

2nd $\sum_{n=1}^{\infty}g(n)$의 값을 구한다.

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}g(n)&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n(n+1)}=2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\\&=2\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\\&=2\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}\\&=2\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=2\end{aligned}$$

답 2

0400 1st $x=\frac{1}{t}$로 놓고 주어진 식을 변형한다.

$x=\frac{1}{t}$로 놓으면 $x\to\infty$일 때 $t\to0+$이므로

$$\lim_{x\to\infty}x^a\ln\left(b+\frac{c}{x^2}\right)=\lim_{t\to0+}\frac{\ln(b+ct^2)}{t^a}=2 \quad \cdots\cdots ㉠$$

2nd b의 값을 구한다.

㉠에서 $t\to0+$일 때 (분모) $\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to0$이다.

즉 $\lim_{t\to0+}\ln(b+ct^2)=0$이므로 $\quad\ln b=0\quad\therefore b=1$

3rd a, c의 값을 구한다.

$b=1$을 ㉠에 대입하면

$$\begin{aligned}\lim_{t\to0+}\frac{\ln(1+ct^2)}{t^a}&=\lim_{t\to0+}\frac{\ln(1+ct^2)}{ct^2}\cdot\frac{ct^2}{t^a}\\&=1\cdot\lim_{t\to0+}\frac{ct^2}{t^a}=\lim_{t\to0+}ct^{2-a}\end{aligned}$$

$\therefore \lim_{t\to0+}ct^{2-a}=2$

이때 $2-a\neq0$, 즉 $a\neq2$이면 $\lim_{t\to0+}ct^{2-a}=0$이므로

$a=2$

따라서 $\lim_{t\to0+}c=2$이므로 $\quad c=2$

4th $a+b+c$의 값을 구한다.

$a+b+c=5$

답 ①

0401 1st $\overline{PQ}$의 길이를 구한다.

$P(k,\ e^{\frac{k}{2}})$, $Q(k,\ e^{\frac{k}{2}+3t})$이므로

$$\overline{PQ}=e^{\frac{k}{2}+3t}-e^{\frac{k}{2}}=e^{\frac{k}{2}}(e^{3t}-1)$$

2nd $\overline{QR}$의 길이를 구한다.

점 R는 직선 $y=e^{\frac{k}{2}+3t}$과 곡선 $y=e^{\frac{x}{2}}$의 교점이므로 점 R의 x좌표는 $e^{\frac{x}{2}}=e^{\frac{k}{2}+3t}$에서

$\frac{x}{2}=\frac{k}{2}+3t\qquad\therefore x=k+6t$

$\therefore \overline{QR}=(k+6t)-k=6t$

3rd $f(t)$를 구한다.

$\overline{PQ}=\overline{QR}$에서 $\quad e^{\frac{k}{2}}(e^{3t}-1)=6t$

$e^{\frac{k}{2}}=\frac{6t}{e^{3t}-1}\qquad\therefore k=2\ln\frac{6t}{e^{3t}-1}$

$\therefore f(t)=2\ln\frac{6t}{e^{3t}-1}$

4th 극한값을 구한다.

$$\begin{aligned}\lim_{t\to0+}f(t)&=\lim_{t\to0+}2\ln\frac{6t}{e^{3t}-1}\\&=2\lim_{t\to0+}\ln\left(\frac{3t}{e^{3t}-1}\cdot2\right)\\&=2\ln2\\&=\ln4\end{aligned}$$

답 ③

0402 1st 합성함수 $(g\circ f)(x)$가 $x=1$에서 연속이어야 함을 이용한다.

함수 $(g\circ f)(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $x=1$에서 연속이어야 하므로

$\lim_{x\to1+}(g\circ f)(x)=\lim_{x\to1-}(g\circ f)(x)=(g\circ f)(1)$, 즉

$\lim_{x\to1+}g(f(x))=\lim_{x\to1-}g(f(x))=g(f(1))$

$f(x)=t$로 놓으면

(i) $x\to1+$일 때, $t\to1-$이므로

$\lim_{x\to1+}g(f(x))=\lim_{t\to1-}g(t)=2^1+2^{-1}=\frac{5}{2}$

(ii) $x\to1-$일 때,

$a>0$이면 $t\to a-$이므로

$\lim_{x\to1-}g(f(x))=\lim_{t\to a-}g(t)=2^a+2^{-a}$

$a<0$이면 $t\to a+$이므로

$\lim_{x\to1-}g(f(x))=\lim_{t\to a+}g(t)=2^a+2^{-a}$

$\therefore \lim_{x\to1-}g(f(x))=2^a+2^{-a}$

이때 $g(\underbrace{f(1)}_{f(1)=-3\cdot1+4=1})=g(1)=2^1+2^{-1}=\frac{5}{2}$이므로 (i), (ii)에서

$2^a+2^{-a}=\frac{5}{2}\quad\cdots\cdots ㉠$

2nd 모든 실수 a의 값의 곱을 구한다.

㉠에서 $2^a=k\,(k>0)$로 놓으면 $\quad k+\frac{1}{k}=\frac{5}{2}$

$2k^2-5k+2=0,\qquad(2k-1)(k-2)=0$

$\therefore k=\frac{1}{2}$ 또는 $k=2$

즉 $2^a=\frac{1}{2}$ 또는 $2^a=2$이므로

$a=-1$ 또는 $a=1$

따라서 모든 실수 a의 값의 곱은

$-1\cdot1=-1$

답 ⑤

0403 1st 조건 (가)를 이용하여 $f(1)$, $f'(1)$의 값을 구한다.

조건 (가)에서 $x \to 1$일 때 (분자) $\to 0$이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모) $\to 0$이다.

즉 $\lim_{x\to1}\{f(x)-e\}=0$이므로 $\quad f(1)=e$

$$\therefore \lim_{x\to1}\frac{\ln(2x-1)}{f(x)-e}=\lim_{x\to1}\frac{\ln(2x-1)}{x-1}\cdot\frac{x-1}{f(x)-f(1)}$$
$$=\frac{1}{f'(1)}\cdot\lim_{x\to1}\frac{\ln(2x-1)}{x-1}$$

$x-1=t$로 놓으면 $x \to 1$일 때 $t \to 0$이므로

$$\frac{1}{f'(1)}\cdot\lim_{x\to1}\frac{\ln(2x-1)}{x-1}=\frac{1}{f'(1)}\lim_{t\to0}\frac{\ln(2t+1)}{t}$$
$$=\frac{1}{f'(1)}\lim_{t\to0}\frac{\ln(2t+1)}{2t}\cdot2$$
$$=\frac{2}{f'(1)}$$

따라서 $\frac{2}{f'(1)}=\frac{1}{e}$이므로

$f'(1)=2e$

2nd 조건 (나)를 이용하여 $g(1)$, $g'(1)$의 값을 구한다.

조건 (나)에서

$f(x)\ln x+g(x)e^x=(x^2-2x)e^x \quad \cdots\cdots ㉠$

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$g(1)\cdot e=-e$

$\therefore g(1)=-1$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f'(x)\ln x+f(x)\cdot\frac{1}{x}+g'(x)e^x+g(x)e^x$$
$$=(2x-2)e^x+(x^2-2x)e^x$$
$$f'(x)\ln x+f(x)\cdot\frac{1}{x}+g'(x)e^x+g(x)e^x=(x^2-2)e^x$$

양변에 $x=1$을 대입하면

$f(1)+g'(1)\cdot e+g(1)\cdot e=-e$

이때 $f(1)=e$, $g(1)=-1$이므로

$e+g'(1)\cdot e-e=-e$

$\therefore g'(1)=-1$

3rd $a+b$의 값을 구한다.

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)g(x)+a}{x-1}=b$에서 $x \to 1$일 때 (분모) $\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to 0$이다.

즉 $\lim_{x\to1}\{f(x)g(x)+a\}=0$이므로

$e\cdot(-1)+a=0 \qquad \therefore a=e$

$h(x)=f(x)g(x)$로 놓으면 $h(1)=f(1)g(1)=-e$이므로

$$b=\lim_{x\to1}\frac{f(x)g(x)+e}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{h(x)-h(1)}{x-1}$$
$$=h'(1)$$

$h'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$이므로

$b=f'(1)g(1)+f(1)g'(1)$

$=2e\cdot(-1)+e\cdot(-1)$

$=-3e$

$\therefore a+b=-2e$ 답 ②

0404 1st $-1\le x<1$일 때와 $x<-1$일 때 $g'(x)$를 구한다.

$h_k(x)=(x^k-1)e^{x+1}$으로 놓으면

$$g(x)=45|f(x)|-\sum_{k=1}^{n}|h_k(x)|$$

(i) $-1\le x<1$일 때,

$f(x)\le0$, $h_k(x)\le0$이므로

$$g(x)=-45f(x)-\{-h_1(x)-h_2(x)-h_3(x)-\cdots-h_n(x)\}$$
$$=-45f(x)+h_1(x)+h_2(x)+h_3(x)+\cdots+h_n(x)$$
$$\therefore g'(x)=-45f'(x)+h_1'(x)+h_2'(x)+h_3'(x)+\cdots+h_n'(x)$$

(ii) $x<-1$일 때,

$f(x)>0$이고 k가 홀수이면 $h_k(x)<0$, k가 짝수이면 $h_k(x)>0$이므로

$$g(x)=45f(x)-\{-h_1(x)+h_2(x)-h_3(x)+\cdots+(-1)^n h_n(x)\}$$
$$=45f(x)+h_1(x)-h_2(x)+h_3(x)-\cdots-(-1)^n h_n(x)$$
$$\therefore g'(x)=45f'(x)+h_1'(x)-h_2'(x)+h_3'(x)-\cdots-(-1)^n h_n'(x)$$

2nd $g(x)$가 $x=-1$에서 미분가능하도록 식을 세운다.

(i), (ii)에서 $g(x)$가 $x=-1$에서 미분가능하려면

$\lim_{x\to-1+}g'(x)=\lim_{x\to-1-}g'(x)$이어야 하므로

$$-45f'(-1)+h_1'(-1)+h_2'(-1)+h_3'(-1)+\cdots+h_n'(-1)$$
$$=45f'(-1)+h_1'(-1)-h_2'(-1)+h_3'(-1)-\cdots-(-1)^n h_n'(-1) \quad \cdots\cdots ㉠$$

3rd n이 홀수일 때와 짝수일 때 조건을 만족시키는 n의 값을 구한다.

$f'(x)=2x$이므로 $\quad f'(-1)=-2$

$h_k'(x)=kx^{k-1}e^{x+1}+(x^k-1)e^{x+1}=(x^k+kx^{k-1}-1)e^{x+1}$에서

$$h_k'(-1)=\begin{cases}k-2 & (k\text{는 홀수})\\ -k & (k\text{는 짝수})\end{cases}$$

(iii) $n=2m-1$ (m은 자연수)일 때,

㉠에서

$90f'(-1)=2\{h_2'(-1)+h_4'(-1)+\cdots+h_{2m-2}'(-1)\}$

$90\cdot(-2)=2\{-2-4-\cdots-(2m-2)\}$

$-90=-2\{1+2+\cdots+(m-1)\}$

$-90=-2\cdot\frac{(m-1)m}{2}$

$m^2-m-90=0, \qquad (m-10)(m+9)=0$

$\therefore m=10$ ($\because m$은 자연수)

$\therefore n=2\cdot10-1=19$

(iv) $n=2m$ (m은 자연수)일 때,

㉠에서

$90f'(-1)=2\{h_2'(-1)+h_4'(-1)+\cdots+h_{2m}'(-1)\}$

$90\cdot(-2)=2(-2-4-\cdots-2m)$

$-90=-2(1+2+\cdots+m)$

$-90=-2\cdot\frac{m(m+1)}{2}$

$m^2+m-90=0, \qquad (m-9)(m+10)=0$

$\therefore m=9$ ($\because m$은 자연수)

$\therefore n=2\cdot9=18$

(4th) 모든 자연수 n의 값의 합을 구한다.

(iii), (iv)에서 모든 자연수 n의 값의 합은

$$19+18=37$$

답 ④

참고 $f(-1)=0,\ h_k(-1)=\begin{cases}-2 & (k\text{는 홀수})\\ 0 & (k\text{는 짝수})\end{cases}$

(i) n이 짝수이면

$$g(-1)=45\cdot 0-(\overbrace{2+0+2+\cdots+0}^{2:\ \frac{n}{2}\text{개},\ 0:\ \frac{n}{2}\text{개}})=-2\cdot\frac{n}{2}=-n,$$

$$\lim_{x\to -1-}g(x)=45\cdot 0-(2+0+2+\cdots+0)=-2\cdot\frac{n}{2}=-n$$

이므로 $\quad g(-1)=\lim_{x\to -1-}g(x)$

(ii) n이 홀수이면

$$g(-1)=45\cdot 0-(\overbrace{2+0+2+\cdots+2}^{2:\ \frac{n+1}{2}\text{개},\ 0:\ \frac{n-1}{2}\text{개}})=-2\cdot\frac{n+1}{2}=-n-1,$$

$$\lim_{x\to -1-}g(x)=45\cdot 0-(2+0+2+\cdots+2)=-2\cdot\frac{n+1}{2}=-n-1$$

이므로 $\quad g(-1)=\lim_{x\to -1-}g(x)$

(i), (ii)에서 $g(x)$는 $x=-1$에서 연속이다.

0405

전략 $\lim_{x\to\infty}\{\log_a f(x)\}=\log_a\left\{\lim_{x\to\infty}f(x)\right\}$임을 이용한다.

풀이

$$f(x)=\sum_{k=1}^{12}\{\ln(e^{2k}x^2+e^{-2k})-\ln(e^{-2k}x^2+e^{2k})\}$$
$$=\sum_{k=1}^{12}\ln\frac{e^{2k}x^2+e^{-2k}}{e^{-2k}x^2+e^{2k}}$$
$$=\sum_{k=1}^{12}\ln\frac{e^{4k}x^2+1}{x^2+e^{4k}}$$

이므로

$$\alpha=\lim_{x\to\infty}f(x)$$
$$=\lim_{x\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{12}\ln\frac{e^{4k}x^2+1}{x^2+e^{4k}}\right)$$
$$=\sum_{k=1}^{12}\left(\lim_{x\to\infty}\ln\frac{e^{4k}x^2+1}{x^2+e^{4k}}\right)$$
$$=\sum_{k=1}^{12}\left\{\ln\left(\lim_{x\to\infty}\frac{e^{4k}x^2+1}{x^2+e^{4k}}\right)\right\}$$
$$=\sum_{k=1}^{12}\ln e^{4k}=\sum_{k=1}^{12}4k$$
$$=4\cdot\frac{12\cdot 13}{2}=312 \quad\cdots ❶$$

$$\beta=\lim_{x\to 0}f(x)$$
$$=\lim_{x\to 0}\left(\sum_{k=1}^{12}\ln\frac{e^{4k}x^2+1}{x^2+e^{4k}}\right)$$
$$=\sum_{k=1}^{12}\left(\lim_{x\to 0}\ln\frac{e^{4k}x^2+1}{x^2+e^{4k}}\right)$$
$$=\sum_{k=1}^{12}\left\{\ln\left(\lim_{x\to 0}\frac{e^{4k}x^2+1}{x^2+e^{4k}}\right)\right\}$$
$$=\sum_{k=1}^{12}\ln e^{-4k}=\sum_{k=1}^{12}(-4k)$$
$$=-4\cdot\frac{12\cdot 13}{2}=-312 \quad\cdots ❷$$

$$\therefore\ \alpha-\beta=624 \quad\cdots ❸$$

답 624

채점 기준	비율
❶ α의 값을 구할 수 있다.	50 %
❷ β의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $\alpha-\beta$의 값을 구할 수 있다.	10 %

0406

전략 $\lim_{t\to 0+}\frac{f(t)}{t}$의 값을 a에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 직선 OP의 기울기는 $\frac{a^t-1}{t}$이므로 점 $\mathrm{P}(t,\ a^t-1)$을 지나고 직선 OP에 수직인 직선의 방정식은

$$y-(a^t-1)=-\frac{t}{a^t-1}(x-t)$$

$x=0$일 때 $y=a^t-1+\frac{t^2}{a^t-1}$이므로

$$f(t)=a^t-1+\frac{t^2}{a^t-1}$$

$$\therefore\ \lim_{t\to 0+}\frac{f(t)}{t}=\lim_{t\to 0+}\left(\frac{a^t-1}{t}+\frac{t}{a^t-1}\right)$$
$$=\ln a+\frac{1}{\ln a} \quad\cdots ❶$$

$a>1$에서 $\ln a>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\ln a+\frac{1}{\ln a}\ge 2\sqrt{\ln a\cdot\frac{1}{\ln a}}=2$$

이때 등호는 $\ln a=\frac{1}{\ln a}$, 즉 $\ln a=1$일 때 성립하므로

$$a=e \qquad \therefore\ \alpha=e \quad\cdots ❷$$

두 곡선 $y=e^x-1$과 $y=\beta^{x-2}-1$의 교점의 x좌표가 k이므로

$$e^k-1=\beta^{k-2}-1$$

$$\therefore\ \left(\frac{\beta}{e}\right)^k=\beta^2 \quad\cdots\cdots ㉠$$

(i) $1<\beta<e$일 때,

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\beta}{e}\right)^n=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\beta^{k+n}}{e^k(e^n+\beta^n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\beta^k\cdot\left(\frac{\beta}{e}\right)^n}{e^k\left\{1+\left(\frac{\beta}{e}\right)^n\right\}}=0\ne 4e^2$$

따라서 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $\beta=e$일 때,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\beta^{k+n}}{e^k(e^n+\beta^n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{e^k\cdot e^n}{e^k\cdot 2e^n}=\frac{1}{2}\ne 4e^2$$

따라서 조건을 만족시키지 않는다.

(iii) $\beta>e$일 때,

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{e}{\beta}\right)^n=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\beta^{k+n}}{e^k(e^n+\beta^n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\beta^k}{e^k\left\{\left(\frac{e}{\beta}\right)^n+1\right\}}=\left(\frac{\beta}{e}\right)^k$$
$$=\beta^2\ (\because ㉠)$$

즉 $\beta^2=4e^2$이므로 $\quad\beta=2e\ (\because\ \beta>e) \quad\cdots ❸$

이상에서 $\quad\beta=2e$

$$\therefore\ \frac{\beta}{\alpha}=\frac{2e}{e}=2 \quad\cdots ❹$$

답 2

채점 기준	비율
❶ $\lim_{t\to 0+}\frac{f(t)}{t}$의 값을 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30 %
❷ α의 값을 구할 수 있다.	20 %
❸ β의 값을 구할 수 있다.	40 %
❹ $\frac{\beta}{\alpha}$의 값을 구할 수 있다.	10 %

SSEN 특강 산술평균과 기하평균의 관계

$a>0$, $b>0$일 때,

$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ (단, 등호는 $a=b$일 때 성립)

0407

전략 도함수의 정의를 이용하여 $f'(x)$를 구한다.

풀이 $f(x+y)=e^y f(x)+e^x f(y)$에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$f(0+0)=1\cdot f(0)+1\cdot f(0)$

$\therefore f(0)=0$

$$\begin{aligned}\therefore f'(x)&=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{e^h f(x)+e^x f(h)-f(x)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{(e^h-1)f(x)+e^x f(h)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{e^h-1}{h}\cdot f(x)+\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}\cdot e^x\\&=f(x)+\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}\cdot e^x\\&=f(x)+\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h}\cdot e^x\ (\because f(0)=0)\\&=f(x)+f'(0)\cdot e^x\\&=f(x)+3e^x\ (\because f'(0)=3)\end{aligned}$$ ➊

따라서

$g(x)=f'(x)-f(x)=3e^x$

이므로

$g'(x)=3e^x$

$\therefore g'(1)=3e$ ➋

답 $3e$

채점 기준	비율
➊ $f'(x)$를 $f(x)$를 사용한 식으로 나타낼 수 있다.	70 %
➋ $g'(1)$의 값을 구할 수 있다.	30 %

0408

전략 함수 $f_n(x)g(x)$가 $x=0$에서 연속임을 이용하여 k의 값을 구한다.

풀이 함수 $f_n(x)g(x)$가 구간 $(-1, \infty)$에서 연속이면 $x=0$에서 연속이므로

$\lim_{x\to0} f_n(x)g(x)=f_n(0)g(0)$

$f_n(0)g(0)=0\cdot3=0$이고, $x\neq0$일 때

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0} f_n(x)g(x)&=\lim_{x\to0}\frac{x^n+kx^2}{(e^x-1)\ln(x+1)}\\&=\lim_{x\to0}(x^{n-2}+k)\cdot\frac{x}{e^x-1}\cdot\frac{x}{\ln(x+1)}\\&=k\cdot1\cdot1=k\end{aligned}$$

이므로 $k=0$ ➊

따라서 $f_n(x)=x^n$이므로

$h_n(x)=x^n\ln x$

$h_n'(x)=nx^{n-1}\ln x+x^n\cdot\frac{1}{x}=x^{n-1}(n\ln x+1)$

$x>0$이므로 $h_n'(x)=0$에서 $n\ln x+1=0$

$\ln x=-\frac{1}{n}$ $\quad\therefore x=e^{-\frac{1}{n}}$

즉 $a_n=e^{-\frac{1}{n}}$이므로

$$\begin{aligned}h_n(a_n)&=h_n(e^{-\frac{1}{n}})=(e^{-\frac{1}{n}})^n\ln e^{-\frac{1}{n}}\\&=e^{-1}\cdot\left(-\frac{1}{n}\right)=-\frac{1}{en}\end{aligned}$$

같은 방법으로 하면 $h_{n+1}(x)=x^{n+1}\ln x$, $a_{n+1}=e^{-\frac{1}{n+1}}$이므로

$$\begin{aligned}h_{n+1}(a_{n+1})&=h_{n+1}(e^{-\frac{1}{n+1}})=(e^{-\frac{1}{n+1}})^{n+1}\ln e^{-\frac{1}{n+1}}\\&=e^{-1}\cdot\left(-\frac{1}{n+1}\right)\\&=-\frac{1}{e(n+1)}\end{aligned}$$ ➋

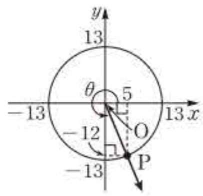
$$\begin{aligned}&\therefore \sum_{n=3}^{\infty}h_n(a_n)h_{n+1}(a_{n+1})\\&=\sum_{n=3}^{\infty}\left[\left(-\frac{1}{en}\right)\cdot\left\{-\frac{1}{e(n+1)}\right\}\right]\\&=\frac{1}{e^2}\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}\\&=\frac{1}{e^2}\sum_{n=3}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\\&=\frac{1}{e^2}\lim_{n\to\infty}\sum_{t=3}^{n}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}\right)\\&=\frac{1}{e^2}\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}\\&=\frac{1}{e^2}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{n+1}\right)\\&=\frac{1}{e^2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{3e^2}\end{aligned}$$ ➌

답 $\frac{1}{3e^2}$

채점 기준	비율
➊ k의 값을 구할 수 있다.	30 %
➋ $h_n(a_n)$, $h_{n+1}(a_{n+1})$을 구할 수 있다.	40 %
➌ $\sum_{n=3}^{\infty}h_n(a_n)h_{n+1}(a_{n+1})$의 값을 구할 수 있다.	30 %

04 삼각함수의 미분

0409 $\overline{OP}=\sqrt{5^2+(-12)^2}=13$



(1) $\csc\theta=-\dfrac{13}{12}$

(2) $\sec\theta=\dfrac{13}{5}$

(3) $\cot\theta=-\dfrac{5}{12}$

답 (1) $-\dfrac{13}{12}$ (2) $\dfrac{13}{5}$ (3) $-\dfrac{5}{12}$

0410 (1) $\csc\theta=\csc 30^\circ=\dfrac{1}{\sin 30^\circ}=\dfrac{1}{\frac{1}{2}}=2$

$\sec\theta=\sec 30^\circ=\dfrac{1}{\cos 30^\circ}=\dfrac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

$\cot\theta=\cot 30^\circ=\dfrac{1}{\tan 30^\circ}=\dfrac{1}{\frac{1}{\sqrt{3}}}=\sqrt{3}$

(2) $\csc\theta=\csc 300^\circ=\dfrac{1}{\sin 300^\circ}=\dfrac{1}{\sin(360^\circ-60^\circ)}$

$=\dfrac{1}{-\frac{\sqrt{3}}{2}}=-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

$\sec\theta=\sec 300^\circ=\dfrac{1}{\cos 300^\circ}=\dfrac{1}{\cos(360^\circ-60^\circ)}$

$=\dfrac{1}{\frac{1}{2}}=2$

$\cot\theta=\cot 300^\circ=\dfrac{1}{\tan 300^\circ}=\dfrac{1}{\tan(360^\circ-60^\circ)}$

$=\dfrac{1}{-\sqrt{3}}=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

(3) $\csc\theta=\csc\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{1}{\sin\frac{\pi}{4}}=\dfrac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}}=\sqrt{2}$

$\sec\theta=\sec\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{1}{\cos\frac{\pi}{4}}=\dfrac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}}=\sqrt{2}$

$\cot\theta=\cot\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{1}{\tan\frac{\pi}{4}}=\dfrac{1}{1}=1$

(4) $\csc\theta=\csc\dfrac{2}{3}\pi=\dfrac{1}{\sin\frac{2}{3}\pi}=\dfrac{1}{\sin\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)}=\dfrac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

$\sec\theta=\sec\dfrac{2}{3}\pi=\dfrac{1}{\cos\frac{2}{3}\pi}=\dfrac{1}{\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)}=\dfrac{1}{-\frac{1}{2}}=-2$

$\cot\theta=\cot\dfrac{2}{3}\pi=\dfrac{1}{\tan\frac{2}{3}\pi}=\dfrac{1}{\tan\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)}=\dfrac{1}{-\sqrt{3}}=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

답 풀이 참조

0411 (ⅰ) $\sin\theta\cot\theta<0$에서

$\sin\theta\cot\theta=\sin\theta\cdot\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}=\cos\theta$

따라서 $\cos\theta<0$이므로 θ는 제2사분면 또는 제3사분면의 각이다.

(ⅱ) $\sec\theta\csc\theta>0$에서

$\sec\theta\csc\theta=\dfrac{1}{\cos\theta}\cdot\dfrac{1}{\sin\theta}$

따라서 $\dfrac{1}{\cos\theta}$과 $\dfrac{1}{\sin\theta}$의 부호가 서로 같으므로 θ는 제1사분면 또는 제3사분면의 각이다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 θ는 제3사분면의 각이다. 답 제3사분면

0412 (1) $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{2}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\dfrac{1}{4}$

$1+2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{4}$

$\therefore \sin\theta\cos\theta=-\dfrac{3}{8}$

(2) $\tan\theta+\cot\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}+\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}=\dfrac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$

$=\dfrac{1}{\sin\theta\cos\theta}=-\dfrac{8}{3}$

답 (1) $-\dfrac{3}{8}$ (2) $-\dfrac{8}{3}$

0413 $\tan^2\theta+1=\sec^2\theta$이므로

$\tan^2\theta+1=\left(-\dfrac{5}{3}\right)^2$

$\therefore \tan^2\theta=\dfrac{16}{9}$

이때 θ가 제2사분면의 각이므로 $\tan\theta<0$

$\therefore \tan\theta=-\dfrac{4}{3}$ 답 $-\dfrac{4}{3}$

0414 $\tan\theta=2$이고 $\tan^2\theta+1=\sec^2\theta$이므로

$\sec^2\theta=2^2+1=5$

$\cot\theta=\dfrac{1}{\tan\theta}=\dfrac{1}{2}$이고 $1+\cot^2\theta=\csc^2\theta$이므로

$\csc^2\theta=1+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{5}{4}$

$\therefore \sec^2\theta+\csc^2\theta=5+\dfrac{5}{4}=\dfrac{25}{4}$ 답 $\dfrac{25}{4}$

0415 $\sin 105^\circ=\sin(60^\circ+45^\circ)$

$=\sin 60^\circ\cos 45^\circ+\cos 60^\circ\sin 45^\circ$

$=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ 답 $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

0416 $\cos 15^\circ=\cos(45^\circ-30^\circ)$

$=\cos 45^\circ\cos 30^\circ+\sin 45^\circ\sin 30^\circ$

$=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{1}{2}$

$=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ 답 $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

0417 $\sin\frac{\pi}{12}=\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)$

$$=\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

답 $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

0418 $\tan\frac{5}{12}\pi=\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)=\dfrac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan\frac{\pi}{6}}{1-\tan\frac{\pi}{4}\tan\frac{\pi}{6}}$

$$=\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{3}}{1-1\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}}=\frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}$$
$$=\frac{(3+\sqrt{3})^2}{9-3}=2+\sqrt{3}$$

답 $2+\sqrt{3}$

0419 $\sin 65^\circ\cos 20^\circ-\cos 65^\circ\sin 20^\circ$

$$=\sin(65^\circ-20^\circ)=\sin 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

답 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

0420 $\cos 35^\circ\cos 25^\circ-\sin 35^\circ\sin 25^\circ$

$$=\cos(35^\circ+25^\circ)=\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$$

답 $\frac{1}{2}$

0421 $\dfrac{\tan 110^\circ-\tan 80^\circ}{1+\tan 110^\circ\tan 80^\circ}=\tan(110^\circ-80^\circ)$

$$=\tan 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

답 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

0422 (1) $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $0<\beta<\frac{\pi}{2}$에서 $\cos\alpha>0$, $\sin\beta>0$이므로

$$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\frac{5}{13}\right)^2}=\frac{12}{13},$$
$$\sin\beta=\sqrt{1-\cos^2\beta}=\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=\frac{3}{5}$$

(2) $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

$$=\frac{5}{13}\cdot\frac{4}{5}+\frac{12}{13}\cdot\frac{3}{5}=\frac{56}{65}$$

(3) $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

$$=\frac{12}{13}\cdot\frac{4}{5}+\frac{5}{13}\cdot\frac{3}{5}=\frac{63}{65}$$

답 (1) $\cos\alpha=\frac{12}{13}$, $\sin\beta=\frac{3}{5}$ (2) $\frac{56}{65}$ (3) $\frac{63}{65}$

0423 $\pi<\alpha<\frac{3}{2}\pi$에서 $\cos\alpha<0$이므로

$$\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\sqrt{1-\left(-\frac{3}{5}\right)^2}=-\frac{4}{5}$$
$$\therefore \tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{-\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}}=\frac{3}{4}$$

(1) $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=2\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)=\frac{24}{25}$

(2) $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\left(-\frac{4}{5}\right)^2-\left(-\frac{3}{5}\right)^2=\frac{7}{25}$

(3) $\tan 2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\dfrac{2\cdot\frac{3}{4}}{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2}=\dfrac{24}{7}$

답 (1) $\frac{24}{25}$ (2) $\frac{7}{25}$ (3) $\frac{24}{7}$

0424 $\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$이므로

$$\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\left(\sin\theta\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+\cos\theta\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$
$$=\sqrt{2}\left(\sin\theta\cos\frac{\pi}{4}+\cos\theta\sin\frac{\pi}{4}\right)$$
$$=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$$

답 $\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$

참고 $\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\left(\sin\theta\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+\cos\theta\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$$=\sqrt{2}\left(\sin\theta\sin\frac{\pi}{4}+\cos\theta\cos\frac{\pi}{4}\right)$$
$$=\sqrt{2}\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)$$

0425 $\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}=2$이므로

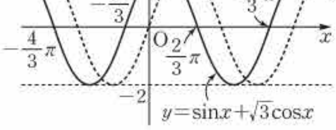
$$-\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta=2\left\{\sin\theta\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+\cos\theta\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$$
$$=2\left(\sin\theta\cos\frac{2}{3}\pi+\cos\theta\sin\frac{2}{3}\pi\right)$$
$$=2\sin\left(\theta+\frac{2}{3}\pi\right)$$

답 $2\sin\left(\theta+\frac{2}{3}\pi\right)$

0426 $y=\sin x+\sqrt{3}\cos x$

$$=2\left(\sin x\cdot\frac{1}{2}+\cos x\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$=2\left(\sin x\cos\frac{\pi}{3}+\cos x\sin\frac{\pi}{3}\right)$$
$$=2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$$

이므로 주어진 함수의 최댓값은 2, 최솟값은 -2, 주기는 2π이다. 또 $y=2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$의 그래프는 $y=2\sin x$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{\pi}{3}$만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



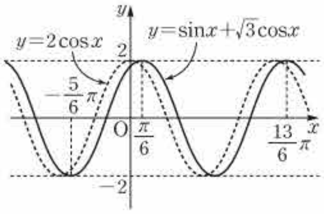
답 풀이 참조

다른 풀이 $y=\sin x+\sqrt{3}\cos x$

$$=2\left(\sin x\cdot\frac{1}{2}+\cos x\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$=2\left(\sin x\sin\frac{\pi}{6}+\cos x\cos\frac{\pi}{6}\right)$$
$$=2\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$$

이므로 주어진 함수의 최댓값은 2, 최솟값은 -2, 주기는 2π이다.

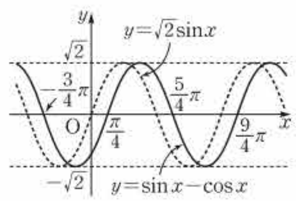
또 $y=2\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$의 그래프는 $y=2\cos x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{6}$만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



0427 $y=\sin x-\cos x$

$$=\sqrt{2}\left(\sin x\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}-\cos x\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$
$$=\sqrt{2}\left(\sin x\cos\frac{\pi}{4}-\cos x\sin\frac{\pi}{4}\right)$$
$$=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$$

이므로 주어진 함수의 최댓값은 $\sqrt{2}$, 최솟값은 $-\sqrt{2}$, 주기는 2π이다. 또 $y=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$의 그래프는 $y=\sqrt{2}\sin x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{4}$만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



답 풀이 참조

0428 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\sin 2x=\sin\frac{\pi}{2}=1$ 답 1

0429 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}2\cos 3x=2\cos\frac{\pi}{2}=0$ 답 0

0430 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\cos x}{\tan x}=\frac{\cos\frac{\pi}{3}}{\tan\frac{\pi}{3}}=\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{6}$ 답 $\frac{\sqrt{3}}{6}$

0431 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 x}{\sin x-1}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin^2 x}{\sin x-1}$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{(1+\sin x)(1-\sin x)}{\sin x-1}$$
$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\sin x)\cdot(-1)$$
$$=-\left(1+\sin\frac{\pi}{2}\right)=-2$$

답 -2

0432 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin 2x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{2\sin x\cos x}$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2\sin x}$$
$$=\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}$$

답 $\frac{1}{2}$

0433 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{1-\tan x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{1-\frac{\sin x}{\cos x}}$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{\frac{\cos x-\sin x}{\cos x}}$$
$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(-\cos x)$$
$$=-\cos\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

답 $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

0434 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}\cdot 2=1\cdot 2=2$ 답 2

0435 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{3x}\cdot\frac{3}{2}=1\cdot\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$ 답 $\frac{3}{2}$

0436 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\sin 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}\cdot\frac{2x}{\sin 2x}\cdot\frac{5}{2}$

$$=1\cdot 1\cdot\frac{5}{2}=\frac{5}{2}$$

답 $\frac{5}{2}$

0437 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\tan 7x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}\cdot\frac{7x}{\tan 7x}\cdot\frac{3}{7}$

$$=1\cdot 1\cdot\frac{3}{7}=\frac{3}{7}$$

답 $\frac{3}{7}$

0438 $\lim\limits_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta+\tan 4\theta}{3\theta}=\lim\limits_{\theta\to 0}\left(\frac{\sin\theta}{3\theta}+\frac{\tan 4\theta}{3\theta}\right)$

$$=\lim_{\theta\to 0}\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\cdot\frac{1}{3}+\frac{\tan 4\theta}{4\theta}\cdot\frac{4}{3}\right)$$
$$=1\cdot\frac{1}{3}+1\cdot\frac{4}{3}=\frac{5}{3}$$

답 $\frac{5}{3}$

0439 $\lim\limits_{\theta\to 0}\frac{\theta+\tan 2\theta}{\sin\theta}=\lim\limits_{\theta\to 0}\left(\frac{\theta}{\sin\theta}+\frac{\tan 2\theta}{\sin\theta}\right)$

$$=\lim_{\theta\to 0}\left(\frac{\theta}{\sin\theta}+\frac{\theta}{\sin\theta}\cdot\frac{\tan 2\theta}{2\theta}\cdot 2\right)$$
$$=1+1\cdot 1\cdot 2=3$$

답 3

0440 $\frac{1}{x}=t$로 놓으면 $x\longrightarrow\infty$일 때 $t\longrightarrow 0+$이므로

$$\lim_{x\to\infty}x\sin\frac{1}{x}=\lim_{t\to 0+}\frac{\sin t}{t}=1$$

답 1

0441 $\frac{\pi}{3}-\theta=t$로 놓으면 $\theta\longrightarrow\frac{\pi}{3}$일 때 $t\longrightarrow 0$이므로

$$\lim_{\theta\to\frac{\pi}{3}}\frac{3\theta-\pi}{\tan\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)}=\lim_{t\to 0}\frac{3\left(\frac{\pi}{3}-t\right)-\pi}{\tan t}=\lim_{t\to 0}\frac{-3t}{\tan t}$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\tan t}\cdot(-3)$$
$$=1\cdot(-3)=-3$$

답 -3

0442 답 $y'=1-2\sin x$

0443 답 $y'=\cos x-\frac{1}{x}$

0444 답 $y'=3\cos x+\sin x$

0445 $y'=2x\sin x+x^2\cos x=x(2\sin x+x\cos x)$

답 $y'=x(2\sin x+x\cos x)$

0446 $y'=e^x\cos x+e^x(-\sin x)=e^x(\cos x-\sin x)$

답 $y'=e^x(\cos x-\sin x)$

0447 $y'=\cos x\cos x+\sin x(-\sin x)=\cos^2 x-\sin^2 x$

답 $y'=\cos^2 x-\sin^2 x$

0448 $y=\sin^2 x=\sin x\sin x$이므로

$y'=\cos x\sin x+\sin x\cos x=2\sin x\cos x$

답 $y'=2\sin x\cos x$

유형 01 삼각함수

본책 72쪽

각 θ를 나타내는 동경과 원점 O를 중심으로 하고 반지름의 길이가 r인 원의 교점을 $\mathrm{P}(x,\ y)$라 하면

① $\csc\theta=\dfrac{r}{y}\ (y\neq 0)$, $\sec\theta=\dfrac{r}{x}\ (x\neq 0)$, $\cot\theta=\dfrac{x}{y}\ (y\neq 0)$

② $\csc\theta=\dfrac{1}{\sin\theta}$, $\sec\theta=\dfrac{1}{\cos\theta}$, $\cot\theta=\dfrac{1}{\tan\theta}$

0449 $\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\left(-\dfrac{5}{13}\right)^2=\dfrac{144}{169}$

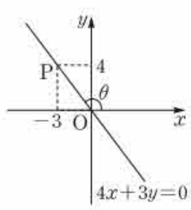
이때 θ가 제3사분면의 각이므로 $\sin\theta=-\dfrac{12}{13}$

$\therefore \csc\theta=\dfrac{1}{\sin\theta}=-\dfrac{13}{12}$,

$\cot\theta=\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}=\dfrac{-\frac{5}{13}}{-\frac{12}{13}}=\dfrac{5}{12}$

$\therefore \csc\theta+\cot\theta=-\dfrac{13}{12}+\dfrac{5}{12}=-\dfrac{2}{3}$ 답 $-\dfrac{2}{3}$

0450 직선 $4x+3y=0$을 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



이때 $0<\theta<\pi$이므로 직선 $4x+3y=0$ 위의 점 $\mathrm{P}(-3,\ 4)$에 대하여

$\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{(-3)^2+4^2}=5$

따라서 $\sin\theta=\dfrac{4}{5}$, $\cot\theta=-\dfrac{3}{4}$, $\sec\theta=-\dfrac{5}{3}$이므로

$5\sin\theta-4\cot\theta+3\sec\theta=4+3-5=2$ 답 ⑤

0451 $\sec\theta-\csc\theta=\dfrac{1}{\cos\theta}-\dfrac{1}{\sin\theta}$

$=\dfrac{\sin\theta-\cos\theta}{\sin\theta\cos\theta}$ …… ㉠

$\sin\theta-\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\dfrac{3}{4}$

$1-2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{3}{4}$ $\quad\therefore \sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{8}$

따라서 ㉠에서

$\sec\theta-\csc\theta=\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{8}}=4\sqrt{3}$ 답 ①

0452 $\tan\theta+\cot\theta=-\dfrac{9}{4}$에서

$\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}+\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}=-\dfrac{9}{4}$, $\quad\dfrac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}=-\dfrac{9}{4}$

$\dfrac{1}{\sin\theta\cos\theta}=-\dfrac{9}{4}$ $\quad\therefore \sin\theta\cos\theta=-\dfrac{4}{9}$ ⋯→ ❶

따라서

$(\sin\theta+\cos\theta)^2=\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$

$=1+2\cdot\left(-\dfrac{4}{9}\right)=\dfrac{1}{9}$

이므로 $|\sin\theta+\cos\theta|=\dfrac{1}{3}$ ⋯→ ❷

답 $\dfrac{1}{3}$

채점 기준	비율
❶ $\sin\theta\cos\theta$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ $\lvert\sin\theta+\cos\theta\rvert$의 값을 구할 수 있다.	60 %

0453 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\csc\theta+\sec\theta=-a$ …… ㉠

$\csc\theta\sec\theta=-3$ …… ㉡

㉠에서 $\dfrac{1}{\sin\theta}+\dfrac{1}{\cos\theta}=-a$

$\therefore \dfrac{\cos\theta+\sin\theta}{\sin\theta\cos\theta}=-a$ …… ㉢

㉡에서 $\dfrac{1}{\sin\theta\cos\theta}=-3$

$\therefore \sin\theta\cos\theta=-\dfrac{1}{3}$

이것을 ㉢에 대입하여 정리하면 $\cos\theta+\sin\theta=\dfrac{a}{3}$

위의 식의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\dfrac{a^2}{9}$

$1+2\cdot\left(-\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{a^2}{9}$, $\quad a^2=3$

$\therefore a=\sqrt{3}\ (\because a>0)$ 답 ③

유형 02 삼각함수 사이의 관계

본책 72쪽

① $\tan^2\theta+1=\sec^2\theta$

② $1+\cot^2\theta=\csc^2\theta$

0454 ㄱ. $\dfrac{\csc\theta}{\sec\theta-\tan\theta}+\dfrac{\csc\theta}{\sec\theta+\tan\theta}$

$=\dfrac{\csc\theta(\sec\theta+\tan\theta)+\csc\theta(\sec\theta-\tan\theta)}{(\sec\theta-\tan\theta)(\sec\theta+\tan\theta)}$

$=\dfrac{2\csc\theta\sec\theta}{\sec^2\theta-\tan^2\theta}=\dfrac{2\csc\theta\sec\theta}{\tan^2\theta+1-\tan^2\theta}$

$=2\csc\theta\sec\theta$

ㄴ. $\frac{\cot\theta}{1+\csc\theta}+\frac{1+\csc\theta}{\cot\theta}=\frac{\cot^2\theta+(1+\csc\theta)^2}{(1+\csc\theta)\cot\theta}$

$=\frac{\cot^2\theta+1+2\csc\theta+\csc^2\theta}{(1+\csc\theta)\cot\theta}$

$=\frac{\csc^2\theta+2\csc\theta+\csc^2\theta}{(1+\csc\theta)\cot\theta}$

$=\frac{2\csc\theta(1+\csc\theta)}{(1+\csc\theta)\cot\theta}$

$=\frac{2\csc\theta}{\cot\theta}=2\cdot\frac{1}{\sin\theta}\cdot\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$=2\sec\theta$

ㄷ. $\frac{\cos\theta}{1-\tan\theta}+\frac{\sin\theta}{1-\cot\theta}=\frac{\cos\theta}{1-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}+\frac{\sin\theta}{1-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}}$

$=\frac{\cos^2\theta}{\cos\theta-\sin\theta}+\frac{\sin^2\theta}{\sin\theta-\cos\theta}$

$=\frac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{\cos\theta-\sin\theta}$

$=\frac{(\cos\theta-\sin\theta)(\cos\theta+\sin\theta)}{\cos\theta-\sin\theta}$

$=\cos\theta+\sin\theta$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

0455 (주어진 식)

$=(\sin^2\theta-2+\csc^2\theta)+(\cos^2\theta-2+\sec^2\theta)$
$\quad-(\tan^2\theta-2+\cot^2\theta)$

$=(\sin^2\theta+\cos^2\theta)+(\sec^2\theta-\tan^2\theta)+(\csc^2\theta-\cot^2\theta)-2$

$=1+1+1-2$

$=1$ 답 1

0456 $\frac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta}=7-4\sqrt{3}$에서

$1+\tan\theta=(7-4\sqrt{3})(1-\tan\theta)$

$1+\tan\theta=7-7\tan\theta-4\sqrt{3}+4\sqrt{3}\tan\theta$

$(4-2\sqrt{3})\tan\theta=3-2\sqrt{3}$

$\therefore \tan\theta=\frac{3-2\sqrt{3}}{4-2\sqrt{3}}=\frac{3-2\sqrt{3}}{2(2-\sqrt{3})}$

$=\frac{(3-2\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}{2(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}$

$=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore \sec^2\theta=\tan^2\theta+1=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+1=\frac{7}{4}$

이때 $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$이므로 $\quad\sec\theta=-\frac{\sqrt{7}}{2}$ 답 ④

0457 $\frac{1}{1+\sin\theta}+\frac{1}{1-\sin\theta}=\frac{5}{2}$에서

$\frac{(1-\sin\theta)+(1+\sin\theta)}{1-\sin^2\theta}=\frac{5}{2}$

$\frac{2}{\cos^2\theta}=\frac{5}{2}$, $\quad 2\sec^2\theta=\frac{5}{2}$

$\therefore \sec^2\theta=\frac{5}{4}$ ⋯ ❶

$\tan^2\theta+1=\sec^2\theta$이므로

$\tan^2\theta+1=\frac{5}{4}\quad \therefore \tan^2\theta=\frac{1}{4}$

이때 $\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$이므로 $\quad\tan\theta=\frac{1}{2}$ ⋯ ❷

$\therefore \tan\theta+\cot\theta=\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}$

$=\frac{1}{2}+2=\frac{5}{2}$ ⋯ ❸

답 $\frac{5}{2}$

채점 기준	비율
❶ $\sec^2\theta$의 값을 구할 수 있다.	20 %
❷ $\tan\theta$의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ $\tan\theta+\cot\theta$의 값을 구할 수 있다.	30 %

유형 03 삼각함수의 덧셈정리 본책 73쪽

① $\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$ (복호동순)
② $\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$ (복호동순)
③ $\tan(\alpha\pm\beta)=\frac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}$ (복호동순)

0458 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $\frac{3}{2}\pi<\beta<2\pi$에서 $\cos\alpha>0$, $\sin\beta<0$이므로

$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=\frac{4}{5}$,

$\sin\beta=-\sqrt{1-\cos^2\beta}=-\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=-\frac{3}{5}$

$\therefore \cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

$=\frac{4}{5}\cdot\frac{4}{5}+\frac{3}{5}\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)=\frac{7}{25}$ 답 $\frac{7}{25}$

0459 $\tan\beta=\tan\{(\alpha+\beta)-\alpha\}$

$=\frac{\tan(\alpha+\beta)-\tan\alpha}{1+\tan(\alpha+\beta)\tan\alpha}$

$=\frac{1-\frac{1}{3}}{1+1\cdot\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}$ 답 ②

0460 $\cot20^\circ+\tan10^\circ=\frac{\cos20^\circ}{\sin20^\circ}+\frac{\sin10^\circ}{\cos10^\circ}$

$=\frac{\cos20^\circ\cos10^\circ+\sin20^\circ\sin10^\circ}{\sin20^\circ\cos10^\circ}$

$=\frac{\cos(20^\circ-10^\circ)}{\sin20^\circ\cos10^\circ}$

$=\frac{\cos10^\circ}{\sin20^\circ\cos10^\circ}$

$=\frac{1}{\sin20^\circ}=\csc20^\circ$ 답 ③

0461 $\sin\alpha+\cos\beta=\frac{1}{3}$, $\cos\alpha+\sin\beta=\frac{1}{\sqrt{3}}$의 양변을 각각 제곱하면

$\sin^2\alpha+\cos^2\beta+2\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{9}$ ⋯⋯ ㉠

$\cos^2\alpha+\sin^2\beta+2\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{3}$ ⋯⋯ ㉡

㉠+㉡을 하면

$$2+2(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)=\frac{4}{9}$$

$$2+2\sin(\alpha+\beta)=\frac{4}{9}$$

$$\therefore \sin(\alpha+\beta)=-\frac{7}{9}$$

답 ①

0462 $g\left(\frac{1}{2}\right)=\alpha,\ g\left(\frac{1}{3}\right)=\beta\ \left(0<\alpha<\frac{\pi}{2},\ 0<\beta<\frac{\pi}{2}\right)$라 하면

└ 함수 $f(x)$의 정의역이 $0<x<\frac{\pi}{2}$이므로 $0<g(x)<\frac{\pi}{2}$이다.

$$\alpha+\beta=\theta$$

$g(x)$는 $f(x)$의 역함수이므로

$$f(\alpha)=\frac{1}{2},\ f(\beta)=\frac{1}{3}$$

즉 $\tan\alpha=\frac{1}{2}$, $\tan\beta=\frac{1}{3}$이므로

$$\tan\theta=\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}=1$$

이때 $0<\alpha+\beta<\pi$, 즉 $0<\theta<\pi$이므로

$$\theta=\frac{\pi}{4}$$

답 $\frac{\pi}{4}$

0463 $\sec^2\alpha=\tan^2\alpha+1=\left(\frac{4}{3}\right)^2+1=\frac{25}{9}$이므로

$$\cos^2\alpha=\frac{9}{25}\qquad \therefore \cos\alpha=\frac{3}{5}\ \left(\because 0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\therefore \sin\alpha=\underbrace{\tan\alpha\cos\alpha}_{\sin\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\cos\alpha}=\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{5}=\frac{4}{5}$$ ···· ❶

$\sec^2\beta=\tan^2\beta+1=\left(-\frac{15}{8}\right)^2+1=\frac{289}{64}$이므로

$$\cos^2\beta=\frac{64}{289}\qquad \therefore \cos\beta=\frac{8}{17}\ \left(\because -\frac{\pi}{2}<\beta<0\right)$$

$$\therefore \sin\beta=\tan\beta\cos\beta=-\frac{15}{8}\cdot\frac{8}{17}=-\frac{15}{17}$$ ···· ❷

$$\therefore \sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

$$=\frac{4}{5}\cdot\frac{8}{17}+\frac{3}{5}\cdot\left(-\frac{15}{17}\right)=-\frac{13}{85}$$ ···· ❸

따라서 $a=85$, $b=13$이므로 $\quad a+b=98$ ···· ❹

답 98

채점 기준	비율
❶ $\cos\alpha$, $\sin\alpha$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷ $\cos\beta$, $\sin\beta$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ $\sin(\alpha+\beta)$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❹ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	10 %

유형 04 삼각함수의 덧셈정리의 활용; 방정식

본책 74쪽

이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 삼각함수에 대한 식을 세운다.

➡ 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근이 α, β일 때,

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a},\ \alpha\beta=\frac{c}{a}$$

0464 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\tan\alpha+\tan\beta=-2a,\ \tan\alpha\tan\beta=a+1$$

$$\therefore \tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

$$=\frac{-2a}{1-(a+1)}=2$$

답 2

0465 $2x^2-4x+1=0$의 해는 $\quad x=\frac{2\pm\sqrt{2}}{2}$

이때 $\tan\alpha>\tan\beta$이므로

$$\tan\alpha=\frac{2+\sqrt{2}}{2},\ \tan\beta=\frac{2-\sqrt{2}}{2}$$ ···· ❶

$$\therefore \tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{\frac{2+\sqrt{2}}{2}-\frac{2-\sqrt{2}}{2}}{1+\frac{2+\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{2-\sqrt{2}}{2}}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{1+\frac{1}{2}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$ ···· ❷

$$\therefore \sec^2(\alpha-\beta)=\tan^2(\alpha-\beta)+1$$

$$=\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2+1=\frac{17}{9}$$ ···· ❸

답 $\frac{17}{9}$

채점 기준	비율
❶ $\tan\alpha$, $\tan\beta$의 값을 구할 수 있다.	20 %
❷ $\tan(\alpha-\beta)$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $\sec^2(\alpha-\beta)$의 값을 구할 수 있다.	40 %

다른 풀이 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\tan\alpha+\tan\beta=2,\ \tan\alpha\tan\beta=\frac{1}{2}$$

$\tan\alpha>\tan\beta$에서 $\tan\alpha-\tan\beta>0$이므로

$$\tan\alpha-\tan\beta=\sqrt{(\tan\alpha+\tan\beta)^2-4\tan\alpha\tan\beta}$$

$$=\sqrt{2^2-4\cdot\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$$

$$\therefore \tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{\sqrt{2}}{1+\frac{1}{2}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

0466 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\tan\alpha+\tan\beta=-\sin\theta,\ \tan\alpha\tan\beta=\cos\theta$$

$$\therefore \tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{-\sin\theta}{1-\cos\theta}$$

즉 $\frac{-\sin\theta}{1-\cos\theta}=\frac{1}{3}$이므로 $\quad 1-\cos\theta=-3\sin\theta$

위의 식의 양변을 제곱하면

$$1-2\cos\theta+\cos^2\theta=9\sin^2\theta$$

$$1-2\cos\theta+\cos^2\theta=9(1-\cos^2\theta)$$

$$5\cos^2\theta-\cos\theta-4=0,\qquad (5\cos\theta+4)(\cos\theta-1)=0$$

$$\therefore \cos\theta=-\frac{4}{5}\ 또는\ \cos\theta=1$$

이때 주어진 이차방정식이 두 실근을 가지므로 판별식을 D라 하면

$$D=\sin^2\theta-4\cos\theta\ge0$$

$$(1-\cos^2\theta)-4\cos\theta\ge0$$

$$\therefore \cos^2\theta+4\cos\theta-1\le0$$ ······ ㉠

(i) $\cos\theta=-\frac{4}{5}$일 때,

$$\left(-\frac{4}{5}\right)^2+4\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)-1=-\frac{89}{25}$$

이므로 ㉠을 만족시킨다.

(ii) $\cos\theta=1$일 때,

$$1^2+4\cdot1-1=4$$

이므로 ㉠을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $\cos\theta=-\frac{4}{5}$ 답 ②

유형 05 삼각함수의 덧셈정리의 활용 ; 두 직선이 이루는 각의 크기 본책 74쪽

① 직선 $y=mx+n$이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 θ라 하면

$$\tan\theta=m$$

② 두 직선 l, m이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 각각 α, β일 때, 두 직선 l, m이 이루는 예각의 크기를 θ라 하면

$$\tan\theta=|\tan(\alpha-\beta)|=\left|\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\right|$$

0467 두 직선 $y=\frac{3}{4}x+1$, $y=-3x$가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α, β라 하면

$$\tan\alpha=\frac{3}{4},\ \tan\beta=-3$$

$$\therefore \tan\theta=|\tan(\alpha-\beta)|=\left|\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\right|$$

$$=\left|\frac{\frac{3}{4}-(-3)}{1+\frac{3}{4}\cdot(-3)}\right|=3$$

$$\therefore \sec^2\theta=\tan^2\theta+1=3^2+1=10$$ 답 ②

0468 두 직선 $2x+y-3=0$, $x+3y+1=0$, 즉 $y=-2x+3$, $y=-\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}$이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α, β라 하면

$$\tan\alpha=-2,\ \tan\beta=-\frac{1}{3}$$

두 직선이 이루는 예각의 크기를 θ라 하면

$$\tan\theta=|\tan(\alpha-\beta)|=\left|\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\right|$$

$$=\left|\frac{-2-\left(-\frac{1}{3}\right)}{1+(-2)\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)}\right|=1$$

$$\therefore \theta=\frac{\pi}{4}\ \left(\because 0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$$ 답 $\frac{\pi}{4}$

0469 두 직선 $ax-y+1=0$, $x-5y+2=0$, 즉 $y=ax+1$, $y=\frac{1}{5}x+\frac{2}{5}$가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α, β라 하면

$$\tan\alpha=a,\ \tan\beta=\frac{1}{5}$$

두 직선이 이루는 예각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$이면

$$|\tan(\alpha-\beta)|=\tan\frac{\pi}{4}$$

$$\left|\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\right|=1,\qquad \frac{a-\frac{1}{5}}{1+a\cdot\frac{1}{5}}=\pm1$$

$$a-\frac{1}{5}=1+\frac{1}{5}a \text{ 또는 } a-\frac{1}{5}=-1-\frac{1}{5}a$$

$$\therefore a=\frac{3}{2} \text{ 또는 } a=-\frac{2}{3}$$

따라서 모든 a의 값의 합은

$$\frac{3}{2}+\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{5}{6}$$ 답 $\frac{5}{6}$

0470 세 직선 $y=3x$, $y=5x$, $y=mx$가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α, β, γ라 하면

$$\tan\alpha=3,\ \tan\beta=5,\ \tan\gamma=m$$

$0<m<3$이므로 두 직선 $y=5x$, $y=mx$가 이루는 예각의 크기는 $\beta-\gamma$

따라서 $\tan\alpha=\tan(\beta-\gamma)$에서

$$\tan\alpha=\frac{\tan\beta-\tan\gamma}{1+\tan\beta\tan\gamma},\qquad 3=\frac{5-m}{1+5m}$$

$$3+15m=5-m,\qquad 16m=2$$

$$\therefore m=\frac{1}{8}$$ 답 ①

0471 두 직선 $y=2x$, $y=ax+b$가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α, β라 하면

$$\tan\alpha=2,\ \tan\beta=a$$

이때 $\beta-\alpha=45°$이므로

$$\tan(\beta-\alpha)=\tan45°,\qquad \frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha}=1$$

$$\frac{a-2}{1+2a}=1,\qquad a-2=1+2a$$

$$\therefore a=-3$$

따라서 직선 $y=-3x+b$가 점 $(1,\ 2)$를 지나므로

$$2=-3+b\qquad \therefore b=5$$

$$\therefore a-b=-8$$ 답 ④

0472 $|ax|=\begin{cases} ax & (x\ge0) \\ -ax & (x<0)\end{cases}$이므로

$$\tan\alpha=a,\ \tan\beta=-a$$

$\tan\alpha=a$에서 $\sec^2\alpha=\tan^2\alpha+1=a^2+1$이므로

$$\cos^2\alpha=\frac{1}{a^2+1}\qquad \therefore \cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}\ \left(\because 0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\therefore \sin\alpha=\tan\alpha\cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+1}}$$ ⋯ ❶

$\tan\beta=-a$에서 $\sec^2\beta=\tan^2\beta+1=a^2+1$이므로

$$\cos^2\beta=\frac{1}{a^2+1}\qquad \therefore \cos\beta=-\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}\ \left(\because \frac{\pi}{2}<\beta<\pi\right)$$

$$\therefore \sin\beta=\tan\beta\cos\beta=\frac{a}{\sqrt{a^2+1}}$$ ⋯ ❷

$\therefore \cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

$$=\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}\right)+\frac{a}{\sqrt{a^2+1}}\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2+1}}$$

$$=-\frac{1}{a^2+1}+\frac{a^2}{a^2+1}=\frac{a^2-1}{a^2+1} \quad \cdots ❸$$

따라서 $\frac{a^2-1}{a^2+1}=\frac{4}{5}$이므로 $\quad 5a^2-5=4a^2+4$

$a^2=9 \quad \therefore a=3\,(\because a>0) \quad \cdots ❹$

답 3

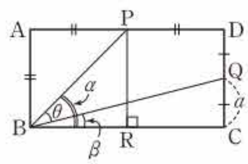
채점 기준	비율
❶ $\cos\alpha$, $\sin\alpha$의 값을 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30 %
❷ $\cos\beta$, $\sin\beta$의 값을 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30 %
❸ $\cos(\alpha-\beta)$의 값을 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30 %
❹ a의 값을 구할 수 있다.	10 %

유형 06 삼각함수의 덧셈정리의 활용; 도형

본책 75쪽

주어진 도형에서 적당한 각을 문자로 놓은 후 삼각함수의 덧셈정리를 이용한다.

0473 오른쪽 그림과 같이 점 P에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 R라 하고 $\overline{QC}=a$, $\angle PBR=\alpha$, $\angle QBC=\beta$라 하면



$\tan\alpha=\frac{2a}{2a}=1$,

$\tan\beta=\frac{a}{4a}=\frac{1}{4}$

△PBR, △QBC는 직각삼각형이다.

$\therefore \tan\theta=\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

$$=\frac{1-\frac{1}{4}}{1+1\cdot\frac{1}{4}}=\frac{3}{5}$$

답 ③

0474 △ABC는 $\overline{AB}=\overline{AC}$인 이등변삼각형이므로

$\angle C=\angle B=\beta$

$\alpha+2\beta=\pi$이므로 $\quad \alpha+\beta=\pi-\beta$

$\therefore \tan(\alpha+\beta)=\tan(\pi-\beta)=-\tan\beta$

$\tan(\alpha+\beta)=-\frac{5}{3}$에서

$-\tan\beta=-\frac{5}{3} \quad \therefore \tan\beta=\frac{5}{3}$

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{\tan\alpha+\frac{5}{3}}{1-\frac{5}{3}\tan\alpha}$$

$$=\frac{3\tan\alpha+5}{3-5\tan\alpha}$$

이므로 $\quad \frac{3\tan\alpha+5}{3-5\tan\alpha}=-\frac{5}{3}$

$9\tan\alpha+15=-15+25\tan\alpha$

$16\tan\alpha=30 \quad \therefore \tan\alpha=\frac{15}{8}$

답 ④

0475 $\overline{AB}=a$라 하면 $\overline{BG}=\sqrt{(2a)^2+a^2}=\sqrt{5}a$이므로

$\sin\alpha=\frac{a}{\sqrt{5}a}=\frac{\sqrt{5}}{5}$, $\cos\alpha=\frac{2a}{\sqrt{5}a}=\frac{2\sqrt{5}}{5} \quad \cdots ❶$

$\overline{BD}=\sqrt{(3a)^2+a^2}=\sqrt{10}a$이므로

$\sin\beta=\frac{a}{\sqrt{10}a}=\frac{\sqrt{10}}{10}$, $\cos\beta=\frac{3a}{\sqrt{10}a}=\frac{3\sqrt{10}}{10} \quad \cdots ❷$

$\therefore \sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

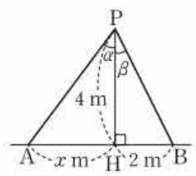
$$=\frac{\sqrt{5}}{5}\cdot\frac{3\sqrt{10}}{10}+\frac{2\sqrt{5}}{5}\cdot\frac{\sqrt{10}}{10}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \cdots ❸$$

답 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

채점 기준	비율
❶ $\sin\alpha$, $\cos\alpha$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ $\sin\beta$, $\cos\beta$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $\sin(\alpha+\beta)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0476 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AH}=x$ m, $\angle APH=\alpha$, $\angle BPH=\beta$라 하면



$\tan\alpha=\frac{x}{4}$, $\tan\beta=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

$\therefore \tan\theta=\tan(\alpha+\beta)$

$$=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

$$=\frac{\frac{x}{4}+\frac{1}{2}}{1-\frac{x}{4}\cdot\frac{1}{2}}=\frac{2x+4}{8-x}$$

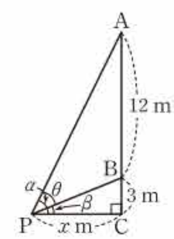
즉 $\frac{2x+4}{8-x}=2$이므로 $\quad 2x+4=16-2x \quad \therefore x=3$

따라서 두 지점 A, B 사이의 거리는

$\overline{AH}+\overline{BH}=5\,(\text{m})$

답 5 m

0477 오른쪽 그림과 같이 $\overline{PC}=x$ m, $\angle APC=\alpha$, $\angle BPC=\beta$라 하면



$\tan\alpha=\frac{12+3}{x}=\frac{15}{x}$, $\tan\beta=\frac{3}{x}$

$\therefore \tan\theta=\tan(\alpha-\beta)$

$$=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

$$=\frac{\frac{15}{x}-\frac{3}{x}}{1+\frac{15}{x}\cdot\frac{3}{x}}=\frac{12}{x+\frac{45}{x}} \quad \cdots\cdots ㉠$$

이때 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$에서 $\tan\theta$의 값이 최대이려면 $x+\frac{45}{x}$의 값이 최소이어야 한다.

$x>0$, $\frac{45}{x}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$x+\frac{45}{x}\ge 2\sqrt{x\cdot\frac{45}{x}}=6\sqrt{5}$ (단, 등호는 $x=\frac{45}{x}$일 때 성립)

따라서 ㉠에서 $\tan\theta$의 최댓값은

$\frac{12}{6\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$

답 ③

유형 07 배각의 공식 본책 76쪽

① $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$
② $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$
③ $\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

0478 $\sin\theta + \cos\theta = \frac{1}{4}$의 양변을 제곱하면

$$\sin^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta = \frac{1}{16}$$

$$1 + 2\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{16} \qquad \therefore 2\sin\theta\cos\theta = -\frac{15}{16}$$

$$\therefore \sin 2\theta = -\frac{15}{16}$$

답 $-\frac{15}{16}$

0479 $2\sin\theta - \cos\theta = 0$에서

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{1}{2} \qquad \therefore \tan\theta = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} = \frac{2\cdot\frac{1}{2}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{4}{3}$$

답 ④

0480 $f(x) = \cos 2x + 2\cos x + 1$

$$= (2\cos^2 x - 1) + 2\cos x + 1$$
$$= 2\cos^2 x + 2\cos x$$
$$= 2\left(\cos x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}$$

이때 $-1 \le \cos x \le 1$이므로 $f(x)$는 $\cos x = -\frac{1}{2}$일 때 최솟값 $-\frac{1}{2}$을 갖는다.

답 $-\frac{1}{2}$

0481 $\sec^2 x = \tan^2 x + 1 = \left(-\frac{3}{4}\right)^2 + 1 = \frac{25}{16}$이므로

$$\cos^2 x = \frac{16}{25} \qquad \therefore \cos x = -\frac{4}{5}\ \left(\because \frac{\pi}{2} < x < \pi\right)$$

$$\therefore \sin x = \tan x\cos x = -\frac{3}{4}\cdot\left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{3}{5} \quad \cdots ❶$$

$$\therefore \sin 2x + \cos 2x = 2\sin x\cos x + 1 - 2\sin^2 x$$
$$= 2\cdot\frac{3}{5}\cdot\left(-\frac{4}{5}\right) + 1 - 2\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^2$$
$$= -\frac{17}{25} \quad \cdots ❷$$

답 $-\frac{17}{25}$

채점 기준	비율
❶ $\cos x$, $\sin x$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ $\sin 2x + \cos 2x$의 값을 구할 수 있다.	60 %

유형 08 배각의 공식의 활용 본책 76쪽

주어진 조건을 이용하여 필요한 삼각함수의 값을 구하고, 배각의 공식을 이용한다.

0482 두 직선 $y=3x$, $y=mx$가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 2θ, θ라 하면

$$\tan 2\theta = 3,\ \tan\theta = m$$

$\tan 2\theta = \dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$이므로

$$3 = \frac{2m}{1-m^2}, \qquad 3m^2 + 2m - 3 = 0$$

$$\therefore m = \frac{-1\pm\sqrt{10}}{3}$$

이때 $0 < m < 3$이므로 직선 $y=mx$가 직선 $y=3x$와 x축의 양의 방향이 이루는 예각을 이등분하므로 $0<m<3$

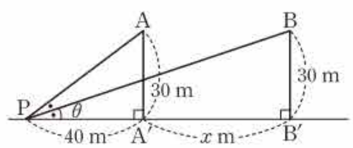
$$m = \frac{-1+\sqrt{10}}{3}$$

따라서 $a=-1$, $b=10$이므로

$$a+b=9$$

답 ③

0483 다음 그림과 같이 $\angle BPB' = \theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{4}\right)$라 하면



$$\tan(\angle APA') = \tan 2\theta = \frac{30}{40} = \frac{3}{4} \quad \cdots ❶$$

이때 $\tan 2\theta = \dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$이므로

$$\frac{3}{4} = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$$

$$3\tan^2\theta + 8\tan\theta - 3 = 0$$

$$(\tan\theta + 3)(3\tan\theta - 1) = 0$$

$$\therefore \tan\theta = \frac{1}{3}\ \left(\because 0<\theta<\frac{\pi}{4}\right) \quad \cdots ❷$$

$\overline{A'B'} = x\,(\text{m})$라 하면 $\dfrac{30}{40+x} = \dfrac{1}{3}$이므로 △BPB′에서 $\tan\theta$의 값이다.

$$40 + x = 90$$

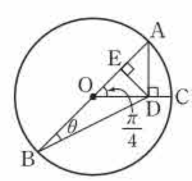
$$\therefore x = 50$$

따라서 $\overline{A'B'}$의 길이는 50 m이다. $\cdots ❸$

답 50 m

채점 기준	비율
❶ $\tan(\angle APA')$의 값을 구할 수 있다.	20 %
❷ $\tan(\angle BPB')$의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ $\overline{A'B'}$의 길이를 구할 수 있다.	30 %

0484 오른쪽 그림과 같이 점 D에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 E라 하면 $\angle OAD = \frac{\pi}{4}$이므로 △AED와 △ODE는 직각이등변삼각형이다.



$\overline{AE} = \overline{DE} = \overline{OE} = a$라 하면 직각삼각형 BDE에서 $\overline{BE} = 3a$이므로 $\overline{BE} = \overline{BO} + \overline{OE} = \overline{AO} + \overline{OE}$

$$\overline{BD} = \sqrt{\overline{BE}^2 + \overline{DE}^2}$$
$$= \sqrt{(3a)^2 + a^2} = \sqrt{10}\,a$$

$\therefore \sin\theta=\dfrac{a}{\sqrt{10}a}=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$,

$\cos\theta=\dfrac{3a}{\sqrt{10}a}=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$

$\therefore \sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta=2\cdot\dfrac{\sqrt{10}}{10}\cdot\dfrac{3\sqrt{10}}{10}=\dfrac{3}{5}$ 답 ③

유형 09 삼각함수의 합성 본책 77쪽

$y=a\sin\theta+b\cos\theta=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$

$\left(\text{단, } \sin\alpha=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \cos\alpha=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$

➡ y의 최댓값은 $\sqrt{a^2+b^2}$, 최솟값은 $-\sqrt{a^2+b^2}$이다.

0485 $y=3\sin x-2\cos\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)+1$

$=3\sin x-2\left(\cos x\cos\dfrac{\pi}{6}+\sin x\sin\dfrac{\pi}{6}\right)+1$

$=3\sin x-\sqrt{3}\cos x-\sin x+1$

$=2\sin x-\sqrt{3}\cos x+1$

$=\sqrt{7}\left(\sin x\cdot\dfrac{2}{\sqrt{7}}-\cos x\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}\right)+1$

$=\sqrt{7}\sin(x-\alpha)+1\ \left(\text{단, } \sin\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}},\ \cos\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{7}}\right)$

이때 $-1\le\sin(x-\alpha)\le 1$이므로

$-\sqrt{7}+1\le\sqrt{7}\sin(x-\alpha)+1\le\sqrt{7}+1$

따라서 $M=\sqrt{7}+1$, $m=-\sqrt{7}+1$이므로

$Mm=(\sqrt{7}+1)(-\sqrt{7}+1)=-6$ 답 ②

0486 $y=\sqrt{3}\sin x+\cos x$

$=2\left(\sin x\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\cos x\cdot\dfrac{1}{2}\right)$

$=2\left(\sin x\cos\dfrac{\pi}{6}+\cos x\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$

$=2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)$

따라서 $y=2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)$의 그래프는 $y=2\sin x$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\dfrac{\pi}{6}$ 만큼 평행이동한 것이므로

$a=2,\ b=-\dfrac{\pi}{6}\qquad \therefore ab=-\dfrac{\pi}{3}$ 답 ④

0487 $f(x)=4a\sin x+3a\cos x-1$

$=5a\left(\sin x\cdot\dfrac{4}{5}+\cos x\cdot\dfrac{3}{5}\right)-1$

$=5a\sin(x+\alpha)-1\ \left(\text{단, } \sin\alpha=\dfrac{3}{5},\ \cos\alpha=\dfrac{4}{5}\right)$

이때 $a>0$이고 $-1\le\sin(x+\alpha)\le 1$이므로

$-5a-1\le 5a\sin(x+\alpha)-1\le 5a-1$

$f(x)$의 최댓값이 4이므로

$5a-1=4\qquad \therefore a=1$

따라서 $f(x)$의 최솟값은

$-5-1=-6$ 답 -6

0488 $\angle APB=90^\circ$이므로 $\angle PAB=\theta$라 하면

$\overline{AP}=8\cos\theta$, $\overline{PB}=8\sin\theta$ ⋯ ❶

$\therefore \overline{AP}+\overline{PB}=8\cos\theta+8\sin\theta$

$=8\sqrt{2}\left(\cos\theta\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\sin\theta\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$=8\sqrt{2}\left(\cos\theta\sin\dfrac{\pi}{4}+\sin\theta\cos\dfrac{\pi}{4}\right)$

$=8\sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)$ ⋯ ❷

이때 $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$에서 $\dfrac{\pi}{4}<\theta+\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{3}{4}\pi$이므로

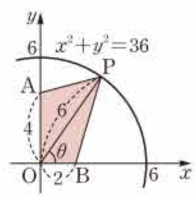
$\dfrac{\sqrt{2}}{2}<\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)\le 1\qquad \therefore 8<8\sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)\le 8\sqrt{2}$

따라서 구하는 최댓값은 $8\sqrt{2}$이다. ⋯ ❸

답 $8\sqrt{2}$

채점 기준	비율
❶ $\overline{AP}$, $\overline{PB}$의 길이를 삼각함수로 나타낼 수 있다.	20 %
❷ $\overline{AP}+\overline{PB}$를 하나의 삼각함수로 변형할 수 있다.	50 %
❸ $\overline{AP}+\overline{PB}$의 최댓값을 구할 수 있다.	30 %

0489 오른쪽 그림과 같이 $\overline{PO}$를 긋고 $\angle POB=\theta$라 하면



$\triangle POB=\dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot 6\cdot\sin\theta$

$=6\sin\theta$

$\triangle PAO=\dfrac{1}{2}\cdot 4\cdot 6\cdot\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)$

$=12\cos\theta$

$\therefore \square AOBP=\triangle POB+\triangle PAO=6\sin\theta+12\cos\theta$

$=6\sqrt{5}\left(\sin\theta\cdot\dfrac{1}{\sqrt{5}}+\cos\theta\cdot\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)$

$=6\sqrt{5}\sin(\theta+\alpha)$

$\left(\text{단, } \sin\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{5}},\ \cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)$

이때 $0<\sin(\underline{\theta+\alpha})\le 1$이므로 $0<\theta<\dfrac{\pi}{2},\ 0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$

$0<6\sqrt{5}\sin(\theta+\alpha)\le 6\sqrt{5}$

따라서 $\square AOBP$의 넓이의 최댓값은 $6\sqrt{5}$이다. 답 $6\sqrt{5}$

유형 10 삼각함수의 극한 본책 78쪽

삼각함수 사이의 관계, 배각의 공식을 이용하여 주어진 식을 극한값을 구할 수 있는 형태로 변형한 후 다음을 이용한다.

① 실수 a에 대하여 $\lim\limits_{x\to a}\sin x=\sin a$, $\lim\limits_{x\to a}\cos x=\cos a$

② $a\ne n\pi+\dfrac{\pi}{2}$ (n은 정수)인 실수 a에 대하여

$\lim\limits_{x\to a}\tan x=\tan a$

0490 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin x-\sin 2x}{\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin x-2\sin x\cos x}{1-\cos^2 x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin x(1-\cos x)}{(1+\cos x)(1-\cos x)}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin x}{1+\cos x}=0$ 답 ③

0491 $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1-\tan^2 x}{\sin x-\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1-\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}{\sin x-\cos x}$

$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos^2 x(\sin x-\cos x)}$

$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{(\cos x+\sin x)(\cos x-\sin x)}{\cos^2 x(\sin x-\cos x)}$

$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{-(\cos x+\sin x)}{\cos^2 x}$

$=\frac{-\sqrt{2}}{\frac{1}{2}}=-2\sqrt{2}$ 답 ②

0492 $x\neq0$인 실수 x에 대하여 $-1\le\cos\frac{1}{x}\le1$이므로

$-|\sin x|\le\sin x\cos\frac{1}{x}\le|\sin x|$ ⋯ ❶

이때 $\lim_{x\to0}(-|\sin x|)=0$, $\lim_{x\to0}|\sin x|=0$이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim_{x\to0}\sin x\cos\frac{1}{x}=0$ ⋯ ❷

답 0

채점 기준	비율
❶ $\sin x\cos\frac{1}{x}$의 값의 범위를 구할 수 있다.	50 %
❷ 극한값을 구할 수 있다.	50 %

0493 $\lim_{x\to0}\frac{\sec 2x-1}{\sec x-1}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{\cos 2x}-1}{\frac{1}{\cos x}-1}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1-\cos 2x}{\cos 2x}}{\frac{1-\cos x}{\cos x}}$

$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{2(1-\cos^2 x)}{2\cos^2 x-1}}{\frac{1-\cos x}{\cos x}}$

$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{2(1+\cos x)(1-\cos x)}{2\cos^2 x-1}}{\frac{1-\cos x}{\cos x}}$

$=\lim_{x\to0}\frac{2\cos x(1+\cos x)}{2\cos^2 x-1}$

$=\frac{2\cdot1\cdot(1+1)}{2\cdot1^2-1}=4$ 답 4

유형 11~12 $\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}$, $\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x}$ 꼴의 극한 본책 78, 79쪽

a, b가 0이 아닌 상수일 때

① $\lim_{x\to0}\frac{\sin ax}{bx}=\lim_{x\to0}\frac{\sin ax}{ax}\cdot\frac{a}{b}=\frac{a}{b}$

② $\lim_{x\to0}\frac{\tan ax}{bx}=\lim_{x\to0}\frac{\tan ax}{ax}\cdot\frac{a}{b}=\frac{a}{b}$

0494 $\lim_{x\to0}\frac{\sin(\sin 2x)}{\sin 3x}$

$=\lim_{x\to0}\frac{\sin(\sin 2x)}{\sin 2x}\cdot\frac{3x}{\sin 3x}\cdot\frac{\sin 2x}{2x}\cdot\frac{2}{3}$

$=1\cdot1\cdot1\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$ 답 $\frac{2}{3}$

0495 $\lim_{x\to0}\frac{\sin 5x-\sin x}{\sin 2x}$

$=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin 5x}{\sin 2x}-\frac{\sin x}{\sin 2x}\right)$

$=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin 5x}{5x}\cdot\frac{2x}{\sin 2x}\cdot\frac{5}{2}-\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{2x}{\sin 2x}\cdot\frac{1}{2}\right)$

$=1\cdot1\cdot\frac{5}{2}-1\cdot1\cdot\frac{1}{2}=2$ 답 ⑤

0496 $\lim_{x\to0}\frac{e^{4x}-1}{\sin 3x}=\lim_{x\to0}\frac{e^{4x}-1}{4x}\cdot\frac{3x}{\sin 3x}\cdot\frac{4}{3}$

$=1\cdot1\cdot\frac{4}{3}=\frac{4}{3}$ 답 ④

0497 $\lim_{x\to0}\frac{\sin f(x)}{f(\sin x)}=\lim_{x\to0}\frac{\sin(x^2+2x)}{\sin^2 x+2\sin x}$

$=\lim_{x\to0}\frac{\sin(x^2+2x)}{\sin x(\sin x+2)}$

$=\lim_{x\to0}\frac{\sin(x^2+2x)}{x^2+2x}\cdot\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{x+2}{\sin x+2}$

$=1\cdot1\cdot\frac{2}{2}=1$ 답 1

0498 $f(n)=\lim_{x\to0}\frac{x}{\sin x+\sin 2x+\sin 3x+\cdots+\sin nx}$

$=\lim_{x\to0}\frac{1}{\frac{\sin x}{x}+\frac{\sin 2x}{x}+\frac{\sin 3x}{x}+\cdots+\frac{\sin nx}{x}}$

$=\lim_{x\to0}\frac{1}{\frac{\sin x}{x}+\frac{\sin 2x}{2x}\cdot2+\frac{\sin 3x}{3x}\cdot3+\cdots+\frac{\sin nx}{nx}\cdot n}$

$=\frac{1}{1+2+3+\cdots+n}=\frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}}$

$=\frac{2}{n(n+1)}$ ⋯ ❶

$\therefore\sum_{k=1}^{10}f(k)=\sum_{k=1}^{10}\frac{2}{k(k+1)}=2\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$

$=2\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{11}\right)\right\}$

$=2\left(1-\frac{1}{11}\right)=\frac{20}{11}$ ⋯ ❷

따라서 $a=20$, $b=11$이므로

$a+b=31$ ⋯ ❸

답 31

채점 기준	비율
❶ $f(n)$을 구할 수 있다.	60 %
❷ $\sum_{k=1}^{10}f(k)$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	10 %

0499 $\lim_{x\to0}\frac{\tan(2x^3-x^2+x)}{3x^3+x^2-x}$

$=\lim_{x\to0}\frac{\tan(2x^3-x^2+x)}{2x^3-x^2+x}\cdot\frac{2x^3-x^2+x}{3x^3+x^2-x}$

$=\lim_{x\to0}\frac{\tan(2x^3-x^2+x)}{2x^3-x^2+x}\cdot\frac{2x^2-x+1}{3x^2+x-1}$

$=1\cdot\frac{1}{-1}=-1$ 답 ①

0500 $\lim_{x\to0}\frac{5x}{\tan 2x+\tan 3x}=\lim_{x\to0}\frac{5}{\frac{\tan 2x}{x}+\frac{\tan 3x}{x}}$

$=\lim_{x\to0}\frac{5}{\frac{\tan 2x}{2x}\cdot 2+\frac{\tan 3x}{3x}\cdot 3}$

$=\frac{5}{1\cdot2+1\cdot3}$

$=1$

답 1

0501 $\lim_{x\to0}\frac{3^x-1}{a\tan x}=\lim_{x\to0}\frac{3^x-1}{x}\cdot\frac{x}{\tan x}\cdot\frac{1}{a}$

$=\ln 3\cdot1\cdot\frac{1}{a}$

$=\frac{1}{a}\ln 3$ ⋯ ❶

따라서 $\frac{1}{a}\ln 3=\ln\sqrt{3}$이므로

$\frac{1}{a}\ln 3=\frac{1}{2}\ln 3$

$\therefore a=2$ ⋯ ❷

답 2

채점 기준	비율
❶ 극한값을 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	70 %
❷ a의 값을 구할 수 있다.	30 %

0502 $\lim_{x\to0}\frac{\tan 5x}{f(x)}$

$=\lim_{x\to0}\frac{\tan 5x}{5x}\cdot\frac{\ln(1+3x)}{f(x)}\cdot\frac{3x}{\ln(1+3x)}\cdot\frac{5}{3}$

$=\lim_{x\to0}\frac{\tan 5x}{5x}\cdot\frac{1}{\frac{f(x)}{\ln(1+3x)}}\cdot\frac{3x}{\ln(1+3x)}\cdot\frac{5}{3}$

$=1\cdot\frac{1}{\frac{1}{9}}\cdot1\cdot\frac{5}{3}$

$=15$

답 ⑤

유형 13 $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x}$ 꼴의 극한

본책 79쪽

(i) 분자, 분모에 $1+\cos x$를 곱한다.
(ii) $1-\cos^2 x=\sin^2 x$임을 이용한다.
(iii) 삼각함수의 극한을 이용한다.

0503 $\lim_{x\to0}\frac{\csc x-\cot x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{\sin x}-\frac{\cos x}{\sin x}}{x}$

$=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x\sin x}$

$=\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x\sin x(1+\cos x)}$

$=\lim_{x\to0}\frac{\sin^2 x}{x\sin x(1+\cos x)}$

$=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{1+\cos x}$

$=1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

답 ④

0504 $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x\tan 5x}=\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x\tan 5x(1+\cos x)}$

$=\lim_{x\to0}\frac{\sin^2 x}{x\tan 5x(1+\cos x)}$

$=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\cdot\frac{5x}{\tan 5x}\cdot\frac{1}{5(1+\cos x)}$

$=1^2\cdot1\cdot\frac{1}{5\cdot2}$

$=\frac{1}{10}$

답 $\frac{1}{10}$

0505 $f(n)=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos nx}{x^2}$

$=\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos nx)(1+\cos nx)}{x^2(1+\cos nx)}$

$=\lim_{x\to0}\frac{\sin^2 nx}{x^2(1+\cos nx)}$

$=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin nx}{nx}\right)^2\cdot\frac{n^2}{1+\cos nx}$

$=1^2\cdot\frac{n^2}{2}=\frac{n^2}{2}$ ⋯ ❶

$\therefore \sum_{k=1}^{7}f(k)=\sum_{k=1}^{7}\frac{k^2}{2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{7\cdot8\cdot15}{6}=70$ ⋯ ❷

답 70

채점 기준	비율
❶ $f(n)$을 구할 수 있다.	70 %
❷ $\sum_{k=1}^{7}f(k)$의 값을 구할 수 있다.	30 %

0506 $\lim_{x\to0}\frac{2\cos^2 x+\cos x-3}{x^2}$

$=\lim_{x\to0}\frac{(\cos x-1)(2\cos x+3)}{x^2}$

$=\lim_{x\to0}\frac{(\cos x-1)(\cos x+1)(2\cos x+3)}{x^2(\cos x+1)}$

$=\lim_{x\to0}\frac{-\sin^2 x(2\cos x+3)}{x^2(\cos x+1)}$

$=\lim_{x\to0}(-1)\cdot\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\cdot\frac{2\cos x+3}{\cos x+1}$

$=-1\cdot1^2\cdot\frac{5}{2}=-\frac{5}{2}$

답 $-\frac{5}{2}$

0507 $\lim_{x\to0}\frac{x^3}{\sin x-\tan x}$

$=\lim_{x\to0}\frac{x^3}{\sin x-\frac{\sin x}{\cos x}}$

$=\lim_{x\to0}\frac{x^3\cos x}{-\sin x(1-\cos x)}$

$=\lim_{x\to0}\frac{x^3\cos x(1+\cos x)}{-\sin x(1-\cos x)(1+\cos x)}$

$=\lim_{x\to0}\frac{x^3\cos x(1+\cos x)}{-\sin^3 x}$

$=\lim_{x\to0}(-1)\cdot\left(\frac{x}{\sin x}\right)^3\cdot\cos x(1+\cos x)$

$=-1\cdot1^3\cdot1\cdot2$

$=-2$

답 ①

0508 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\sin x-\sin 2x}{x^3}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\sin x-2\sin x\cos x}{x^3}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\sin x(1-\cos x)}{x^3}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\sin x(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^3(1+\cos x)}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\sin^3 x}{x^3(1+\cos x)}=\lim\limits_{x\to0}2\cdot\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^3\cdot\dfrac{1}{1+\cos x}$

$=2\cdot1^3\cdot\dfrac{1}{2}=1$

답 1

유형 14 치환을 이용한 삼각함수의 극한 ; $x\to a\,(a\neq0)$일 때 본책 80쪽

$x-a=t$로 놓으면 $x\to a$일 때 $t\to0$이므로

① $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin(x-a)}{x-a}=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\sin t}{t}=1$

② $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\tan(x-a)}{x-a}=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\tan t}{t}=1$

0509 $\dfrac{\pi}{2}-x=t$로 놓으면 $x\to\dfrac{\pi}{2}$일 때 $t\to0$이므로

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{\frac{\pi}{2}-x}=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}{t}$

$=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\sin t}{t}=1$

답 ④

0510 $\lim\limits_{x\to-3}f(x)=\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^2-9}{\tan\pi x}=\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{(x+3)(x-3)}{\tan\pi x}$

$x+3=t$로 놓으면 $x\to-3$일 때 $t\to0$이므로

$\lim\limits_{x\to-3}f(x)=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{t(t-6)}{\tan\pi(t-3)}=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{t(t-6)}{\tan(\pi t-3\pi)}$

$\tan(\pi t-3\pi)$
$=-\tan(3\pi-\pi t)$
$=-\tan(-\pi t)$
$=\tan\pi t$

$=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{t(t-6)}{\tan\pi t}$

$=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\pi t}{\tan\pi t}\cdot\dfrac{t-6}{\pi}$

$=1\cdot\left(-\dfrac{6}{\pi}\right)=-\dfrac{6}{\pi}$

답 ①

SSEN 특강 여러 가지 각에 대한 삼각함수의 성질

(1) $-\theta$의 삼각함수

① $\sin(-\theta)=-\sin\theta$ ② $\cos(-\theta)=\cos\theta$

③ $\tan(-\theta)=-\tan\theta$

(2) $\dfrac{\pi}{2}\pm\theta$의 삼각함수

① $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta\right)=\cos\theta,\quad \sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta$

② $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta\right)=-\sin\theta,\quad \cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta$

③ $\tan\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta\right)=-\dfrac{1}{\tan\theta},\quad \tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=\dfrac{1}{\tan\theta}$

(3) $\pi\pm\theta$의 삼각함수

① $\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta,\ \sin(\pi-\theta)=\sin\theta$

② $\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta,\ \cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$

③ $\tan(\pi+\theta)=\tan\theta,\quad \tan(\pi-\theta)=-\tan\theta$

0511 $x+\pi=t$로 놓으면 $x\to-\pi$일 때 $t\to0$이므로

$\lim\limits_{x\to-\pi}\dfrac{1+\cos x}{(x+\pi)\sin x}=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{1+\cos(t-\pi)}{t\sin(t-\pi)}$

$=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{1-\cos t}{-t\sin t}$

$=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{(1-\cos t)(1+\cos t)}{-t\sin t(1+\cos t)}$

$=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\sin^2 t}{-t\sin t(1+\cos t)}$

$=\lim\limits_{t\to0}\left(-\dfrac{\sin t}{t}\right)\cdot\dfrac{1}{1+\cos t}$

$=-1\cdot\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{2}$

답 ②

0512 $x-1=t$로 놓으면 $x\to1$일 때 $t\to0$이므로

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sin\left(\cos\frac{\pi}{2}x\right)}{x-1}=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\sin\left\{\cos\frac{\pi}{2}(t+1)\right\}}{t}$

$=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\sin\left\{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}t\right)\right\}}{t}$

$=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\sin\left(-\sin\frac{\pi}{2}t\right)}{t}$

$=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\sin\left(-\sin\frac{\pi}{2}t\right)}{-\sin\frac{\pi}{2}t}\cdot\dfrac{\sin\frac{\pi}{2}t}{\frac{\pi}{2}t}\cdot\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)$

$=1\cdot1\cdot\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=-\dfrac{\pi}{2}$

답 $-\dfrac{\pi}{2}$

0513 $\sin x+\sqrt{3}\cos x=2\left(\sin x\cdot\dfrac{1}{2}+\cos x\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$=2\left(\sin x\cos\dfrac{\pi}{3}+\cos x\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$

$=2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ ···➊

$\therefore \lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{3}}\dfrac{\sin x+\sqrt{3}\cos x}{3x+\pi}=\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{3}}\dfrac{2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}{3\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}$

$x+\dfrac{\pi}{3}=t$로 놓으면 $x\to-\dfrac{\pi}{3}$일 때 $t\to0$이므로

$\lim\limits_{t\to0}\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{\sin t}{t}=\dfrac{2}{3}\cdot1=\dfrac{2}{3}$ ···➋

답 $\dfrac{2}{3}$

채점 기준	비율
➊ 분자를 하나의 삼각함수로 변형할 수 있다.	40 %
➋ 극한값을 구할 수 있다.	60 %

0514 $-\cot x=t$로 놓으면 $x\to\dfrac{\pi}{2}+$일 때 $t\to0+$이므로

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}+}\tan x\ln(1-\cot x)=\lim\limits_{t\to0+}\left(-\dfrac{1}{t}\right)\cdot\ln(1+t)$

$\dfrac{1}{\cot x}=-\dfrac{1}{t}$

$=\lim\limits_{t\to0+}(-1)\cdot\dfrac{\ln(1+t)}{t}$

$=-1\cdot1=-1$

답 ②

04 삼각함수의 미분

유형 15 치환을 이용한 삼각함수의 극한 ; $x \longrightarrow \infty$일 때

본책 81쪽

$\frac{1}{x}=t$로 놓으면 $x \to \infty$일 때 $t \to 0+$이므로

① $\lim_{x\to\infty} x\sin\frac{1}{x}=\lim_{t\to0+}\frac{\sin t}{t}=1$

② $\lim_{x\to\infty} x\tan\frac{1}{x}=\lim_{t\to0+}\frac{\tan t}{t}=1$

0515 $\frac{1}{x}=t$로 놓으면 $x \longrightarrow \infty$일 때 $t \longrightarrow 0+$이므로

$$\lim_{x\to\infty}\tan\left(\sin\frac{1}{x}\right)\csc\frac{1}{x}=\lim_{t\to0+}\tan(\sin t)\csc t$$
$$=\lim_{t\to0+}\frac{\tan(\sin t)}{\sin t}$$
$$=1$$

답 1

0516 $\frac{1}{x}=t$로 놓으면 $x \longrightarrow \infty$일 때 $t \longrightarrow 0+$이므로

$$\lim_{x\to\infty}x^2\left(1-\cos\frac{2}{x}\right)=\lim_{t\to0+}\frac{1}{t^2}(1-\cos 2t) \quad \cdots ❶$$
$$=\lim_{t\to0+}\frac{(1-\cos 2t)(1+\cos 2t)}{t^2(1+\cos 2t)}$$
$$=\lim_{t\to0+}\frac{\sin^2 2t}{t^2(1+\cos 2t)}$$
$$=\lim_{t\to0+}\left(\frac{\sin 2t}{2t}\right)^2\cdot\frac{4}{1+\cos 2t}$$
$$=1^2\cdot\frac{4}{2}=2 \quad \cdots ❷$$

답 2

채점 기준	비율
❶ $\frac{1}{x}$을 t로 치환하여 나타낼 수 있다.	20 %
❷ 극한값을 구할 수 있다.	80 %

0517 $\frac{4}{x-2}=t$로 놓으면 $x=2+\frac{4}{t}$이고, $x \longrightarrow \infty$일 때 $t \longrightarrow 0+$이므로

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x+3}{4}\tan\frac{4}{x-2}=\lim_{t\to0+}\frac{7t+8}{4t}\tan t$$

$\frac{2\left(2+\frac{4}{t}\right)+3}{4}=\frac{7+\frac{8}{t}}{4}=\frac{7t+8}{4t}$

$$=\lim_{t\to0+}\frac{7t+8}{4}\cdot\frac{\tan t}{t}$$
$$=2\cdot1=2$$

답 ②

유형 16 삼각함수의 극한; 미정계수의 결정

본책 81쪽

$x \to a$일 때

① (분모) $\to$ 0이고 극한값이 존재하면 (분자) $\to$ 0이다.

② (분자) $\to$ 0이고 0이 아닌 극한값이 존재하면 (분모) $\to$ 0이다.

0518 $x \longrightarrow 0$일 때 (분자) $\longrightarrow$ 0이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모) $\longrightarrow$ 0이다.

즉 $\lim_{x\to0}(ax\sin x+b)=0$이므로

$b=0$

$b=0$을 주어진 식의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{ax\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{ax\sin x(1+\cos x)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin^2 x}{ax\sin x(1+\cos x)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{a}\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{1+\cos x}$$
$$=\frac{1}{a}\cdot1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2a}$$

따라서 $\frac{1}{2a}=\frac{1}{10}$이므로 $\quad a=5$

$\therefore a^2+b^2=25$

답 25

0519 $x \longrightarrow 0$일 때 (분모) $\longrightarrow$ 0이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow$ 0이다.

즉 $\lim_{x\to0}\ln(x+a)=0$이므로

$\ln a=0 \quad \therefore a=1$ $\cdots$ ❶

$a=1$을 주어진 식의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(x+1)}{\sin bx}=\lim_{x\to0}\frac{\ln(x+1)}{x}\cdot\frac{bx}{\sin bx}\cdot\frac{1}{b}$$
$$=1\cdot1\cdot\frac{1}{b}=\frac{1}{b}$$

따라서 $\frac{1}{b}=\frac{1}{3}$이므로 $\quad b=3$ $\cdots$ ❷

$\therefore a+b=4$ $\cdots$ ❸

답 4

채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷ b의 값을 구할 수 있다.	60 %
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	10 %

0520 $x \longrightarrow 1$일 때 (분자) $\longrightarrow$ 0이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모) $\longrightarrow$ 0이다.

즉 $\lim_{x\to1}(\sqrt{ax}-2)=0$이므로

$\sqrt{a}=2 \quad \therefore a=4$

$a=4$를 주어진 식의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to1}\frac{\sin(x-1)}{2\sqrt{x}-2}=\lim_{x\to1}\frac{\sin(x-1)}{2(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}\cdot(\sqrt{x}+1)$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{\sin(x-1)}{x-1}\cdot\frac{\sqrt{x}+1}{2}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{\sin(x-1)}{x-1}$$

$x-1=t$로 놓으면 $x \longrightarrow 1$일 때 $t \longrightarrow 0$이므로

$$\lim_{t\to0}\frac{\sin t}{t}=1$$

따라서 $b=1$이므로 $\quad a-b=3$

답 ②

0521 $x \longrightarrow 0$일 때 (분자) $\longrightarrow$ 0이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모) $\longrightarrow$ 0이다.

즉 $\lim_{x\to0}(a-b\cos x)=0$이므로

$a-b=0 \quad \therefore a=b$ $\cdots\cdots$ ㉠

$b=a$를 주어진 식의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{a-a\cos x}&=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{a(1-\cos x)}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{x^2(1+\cos x)}{a(1-\cos x)(1+\cos x)}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{x^2(1+\cos x)}{a\sin^2 x}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{1}{a}\cdot\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2\cdot(1+\cos x)\\&=\frac{1}{a}\cdot 1^2\cdot 2=\frac{2}{a}\end{aligned}$$

따라서 $\frac{2}{a}=1$이므로 $\quad a=2,\ b=2\ (\because$ ㉠$)$

$\therefore\ ab=4$

답 ②

0522 $f(x)=ax+b\,(a\neq 0)$로 놓으면 주어진 식은

$$\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}}\frac{\cos(\pi+x)}{ax+b}=\frac{1}{2}\qquad\cdots\cdots \text{㉠}$$

$x\longrightarrow -\frac{\pi}{2}$일 때 (분자) $\longrightarrow$ 0이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모) $\longrightarrow$ 0이다.

즉 $\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}}(ax+b)=0$이므로

$$-\frac{\pi}{2}a+b=0\qquad\therefore\ b=\frac{\pi}{2}a\qquad\cdots\cdots \text{㉡}$$

㉡을 ㉠의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}}\frac{\cos(\pi+x)}{ax+\frac{\pi}{2}a}=\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}}\frac{\cos(\pi+x)}{a\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}$$

$x+\frac{\pi}{2}=t$로 놓으면 $x\longrightarrow -\frac{\pi}{2}$일 때 $t\longrightarrow 0$이므로

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}+t\right)}{at}&=\lim_{t\to 0}\frac{-\sin t}{at}=\lim_{t\to 0}\left(-\frac{1}{a}\right)\cdot\frac{\sin t}{t}\\&=\left(-\frac{1}{a}\right)\cdot 1=-\frac{1}{a}\end{aligned}$$

즉 $-\frac{1}{a}=\frac{1}{2}$이므로 $\quad a=-2$

$a=-2$를 ㉡에 대입하면 $\quad b=-\pi$

따라서 $f(x)=-2x-\pi$이므로 $\quad f(2\pi)=-5\pi$

$\therefore\ k=-5$

답 -5

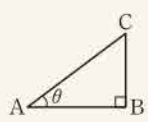
유형 17 삼각함수의 극한의 도형에의 활용

본책 82쪽

오른쪽 그림에서 다음을 이용하여 선분의 길이를 삼각함수로 나타낸 후 극한값을 구한다.

① $\overline{AB}=\overline{AC}\cos\theta$

② $\overline{BC}=\overline{AC}\sin\theta=\overline{AB}\tan\theta$



0523 직각삼각형 BCH에서

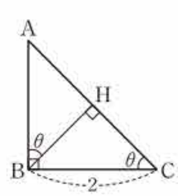
$\overline{BH}=2\sin\theta$

오른쪽 그림에서

$$\angle ABH=\frac{\pi}{2}-\angle A=\angle C=\theta$$

이므로 직각삼각형 ABH에서

$\overline{AH}=\overline{BH}\tan\theta=2\sin\theta\tan\theta$



$$\begin{aligned}\therefore\ \lim_{\theta\to 0+}\frac{\overline{AH}}{\theta^2}&=\lim_{\theta\to 0+}\frac{2\sin\theta\tan\theta}{\theta^2}\\&=\lim_{\theta\to 0+}2\cdot\frac{\sin\theta}{\theta}\cdot\frac{\tan\theta}{\theta}\\&=2\cdot 1\cdot 1=2\end{aligned}$$

답 ②

다른 풀이 직각삼각형 ABC에서 $\quad \overline{AC}=\frac{2}{\cos\theta}$

직각삼각형 BCH에서 $\quad \overline{CH}=2\cos\theta$

$$\begin{aligned}\therefore\ \overline{AH}=\overline{AC}-\overline{CH}&=\frac{2}{\cos\theta}-2\cos\theta\\&=\frac{2(1-\cos^2\theta)}{\cos\theta}=\frac{2\sin^2\theta}{\cos\theta}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore\ \lim_{\theta\to 0+}\frac{\overline{AH}}{\theta^2}&=\lim_{\theta\to 0+}\frac{2\sin^2\theta}{\theta^2\cos\theta}=\lim_{\theta\to 0+}\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^2\cdot\frac{2}{\cos\theta}\\&=1^2\cdot 2=2\end{aligned}$$

0524 직각삼각형 POH에서 $\quad \overline{PH}=\sin\theta,\ \overline{OH}=\cos\theta$

따라서 $\overline{HB}=\overline{OB}-\overline{OH}=1-\cos\theta$이므로

$$S(\theta)=\frac{1}{2}\sin\theta(1-\cos\theta)$$

$$\begin{aligned}\therefore\ \lim_{\theta\to 0+}\frac{S(\theta)}{\theta^3}&=\lim_{\theta\to 0+}\frac{\sin\theta(1-\cos\theta)}{2\theta^3}\\&=\lim_{\theta\to 0+}\frac{\sin\theta(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}{2\theta^3(1+\cos\theta)}\\&=\lim_{\theta\to 0+}\frac{\sin^3\theta}{2\theta^3(1+\cos\theta)}\\&=\lim_{\theta\to 0+}\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^3\cdot\frac{1}{1+\cos\theta}\\&=\frac{1}{2}\cdot 1^3\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}\end{aligned}$$

답 $\frac{1}{4}$

0525 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{AC}}{\sin 2\theta}=\frac{\overline{AB}}{\sin 3\theta}\qquad\therefore\ \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}=\frac{\sin 2\theta}{\sin 3\theta}$$

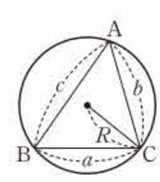
$$\begin{aligned}\therefore\ \lim_{\theta\to 0+}\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}&=\lim_{\theta\to 0+}\frac{\sin 2\theta}{\sin 3\theta}\\&=\lim_{\theta\to 0+}\frac{\sin 2\theta}{2\theta}\cdot\frac{3\theta}{\sin 3\theta}\cdot\frac{2}{3}\\&=1\cdot 1\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{3}\end{aligned}$$

답 ③

SSEN 특강 사인법칙

오른쪽 그림과 같은 삼각형 ABC에서 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$



0526 $\angle POQ=\theta$라 하면 원의 반지름의 길이는 2^n, 호 PQ의 길이는 π이므로

$$2^n\cdot\theta=\pi\qquad\therefore\ \theta=\frac{\pi}{2^n}$$

직각삼각형 QOH에서

$$\overline{QH}=2^n\sin\frac{\pi}{2^n},\ \overline{OH}=2^n\cos\frac{\pi}{2^n}\qquad\cdots\cdots ❶$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{\overline{\mathrm{QH}}\cdot\overline{\mathrm{OH}}}{2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n\sin\frac{\pi}{2^n}\cdot 2^n\cos\frac{\pi}{2^n}}{2^n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}2^n\sin\frac{\pi}{2^n}\cos\frac{\pi}{2^n}$$

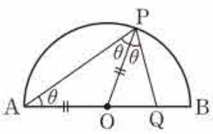
$\frac{\pi}{2^n}=t$로 놓으면 $n\longrightarrow\infty$일 때 $t\longrightarrow 0+$이므로

$$\lim_{t\to 0+}\frac{\pi}{t}\cdot\sin t\cdot\cos t=\lim_{t\to 0+}\pi\cdot\frac{\sin t}{t}\cdot\cos t$$
$$=\pi\cdot 1\cdot 1=\pi \qquad \cdots ❷$$

답 π

채점 기준	비율
❶ $\overline{\mathrm{QH}}$, $\overline{\mathrm{OH}}$의 길이를 삼각함수로 나타낼 수 있다.	30 %
❷ 극한값을 구할 수 있다.	70 %

0527 오른쪽 그림과 같이



$\angle\mathrm{APO}=\angle\mathrm{OPQ}=\theta$라 하면

$\angle\mathrm{PAO}=\theta$이므로 $\triangle\mathrm{PAQ}$에서

$\angle\mathrm{PQA}=\pi-3\theta$

$\triangle\mathrm{POQ}$에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{\mathrm{OQ}}}{\sin\theta}=\frac{\overline{\mathrm{OP}}}{\sin(\pi-3\theta)},\qquad \frac{\overline{\mathrm{OQ}}}{\sin\theta}=\frac{3}{\sin 3\theta}$$

$$\therefore \overline{\mathrm{OQ}}=\frac{3\sin\theta}{\sin 3\theta}$$

점 P가 점 B에 한없이 가까워질 때 $\theta\longrightarrow 0+$이므로

$$\lim_{\theta\to 0+}\overline{\mathrm{AQ}}=\lim_{\theta\to 0+}(\overline{\mathrm{AO}}+\overline{\mathrm{OQ}})=\lim_{\theta\to 0+}\left(3+\frac{3\sin\theta}{\sin 3\theta}\right)$$
$$=\lim_{\theta\to 0+}\left(3+\frac{\sin\theta}{\theta}\cdot\frac{3\theta}{\sin 3\theta}\right)$$
$$=3+1\cdot 1=4$$

답 4

0528 부채꼴 AOB의 반지름의 길이를 r라 하면

$\widehat{\mathrm{AB}}=r\theta$ $\cdots$ ❶

$\triangle\mathrm{AOB}$에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{\mathrm{AB}}^2=r^2+r^2-2\cdot r\cdot r\cdot\cos\theta=2r^2-2r^2\cos\theta$$
$$=2r^2(1-\cos\theta)$$

$$\therefore \overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{2r^2(1-\cos\theta)}=r\sqrt{2(1-\cos\theta)} \qquad \cdots ❷$$

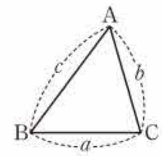
$$\therefore \lim_{\theta\to 0+}\frac{\widehat{\mathrm{AB}}}{\overline{\mathrm{AB}}}=\lim_{\theta\to 0+}\frac{r\theta}{r\sqrt{2(1-\cos\theta)}}$$
$$=\lim_{\theta\to 0+}\frac{\theta\sqrt{1+\cos\theta}}{\sqrt{2(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}}$$
$$=\lim_{\theta\to 0+}\frac{\theta\sqrt{1+\cos\theta}}{\sqrt{2\sin^2\theta}}$$
$$=\lim_{\theta\to 0+}\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\theta}{\sin\theta}\cdot\sqrt{1+\cos\theta}\ (\because \sin\theta>0)$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot 1\cdot\sqrt{2}=1 \qquad \cdots ❸$$

답 1

채점 기준	비율
❶ $\widehat{\mathrm{AB}}$의 길이를 θ에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	20 %
❷ $\overline{\mathrm{AB}}$의 길이를 θ에 대한 삼각함수로 나타낼 수 있다.	30 %
❸ 극한값을 구할 수 있다.	50 %

SSEN 특강 코사인법칙

오른쪽 그림과 같은 삼각형 ABC에서



① $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$
② $b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$
③ $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

유형 18 삼각함수의 연속 본책 83쪽

$x\neq a$인 모든 실수 x에서 연속인 함수 $g(x)$에 대하여 함수

$$f(x)=\begin{cases} g(x) & (x\neq a) \\ k & (x=a) \end{cases}\ (k\text{는 상수})$$

가 모든 실수 x에서 연속 ➡ $\lim_{x\to a}g(x)=k$

0529 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이려면 $\lim_{x\to 1}f(x)=f(1)$이어야 하므로

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sin 3(x-1)}{x-1}=k$$

$x-1=t$로 놓으면 $x\longrightarrow 1$일 때 $t\longrightarrow 0$이므로

$$k=\lim_{t\to 0}\frac{\sin 3t}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin 3t}{3t}\cdot 3=1\cdot 3=3$$

답 3

0530 $x\neq 0$일 때, $f(x)=\frac{1-\cos ax}{(e^x-1)^2}$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이면 $x=0$에서 연속이므로 $\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)$

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos ax}{(e^x-1)^2}=4$$

이때

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos ax}{(e^x-1)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos ax)(1+\cos ax)}{(e^x-1)^2(1+\cos ax)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 ax}{(e^x-1)^2(1+\cos ax)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin ax}{ax}\right)^2\cdot\left(\frac{x}{e^x-1}\right)^2\cdot\frac{1}{1+\cos ax}\cdot a^2$$
$$=1^2\cdot 1^2\cdot\frac{1}{2}\cdot a^2$$
$$=\frac{a^2}{2}$$

따라서 $\frac{a^2}{2}=4$이므로 $a^2=8$

$$\therefore a=2\sqrt{2}\ (\because a>0)$$

답 ④

0531 함수 $f(x)$가 구간 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$에서 연속이면 $x=0$에서 연속이므로 $\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)$

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{a-\cos x}{\sin^2 bx}=\frac{1}{8} \qquad \cdots\cdots ㉠ \qquad \cdots ❶$$

$x\longrightarrow 0$일 때 (분모) $\longrightarrow 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉 $\lim_{x\to 0}(a-\cos x)=0$이므로 $a-1=0$

$$\therefore a=1 \qquad \cdots ❷$$

$a=1$을 ㉠의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{\sin^2 bx}=\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{\sin^2 bx(1+\cos x)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin^2 x}{\sin^2 bx(1+\cos x)}$$
$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\cdot\left(\frac{bx}{\sin bx}\right)^2\cdot\frac{1}{1+\cos x}\cdot\frac{1}{b^2}$$
$$=1^2\cdot1^2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{b^2}=\frac{1}{2b^2}$$

따라서 $\frac{1}{2b^2}=\frac{1}{8}$이므로 $b^2=4$

$\therefore b=2\ (\because b>0)$ ···➌

답 $a=1,\ b=2$

채점 기준	비율
➊ $f(x)$가 $x=0$에서 연속임을 이용하여 식을 세울 수 있다.	30 %
➋ a의 값을 구할 수 있다.	20 %
➌ b의 값을 구할 수 있다.	50 %

0532 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이려면

$$\lim_{x\to0+}f(x)=\lim_{x\to0-}f(x)=f(0)$$

이어야 하므로

$$\lim_{x\to0+}f(x)=\lim_{x\to0+}\frac{ax}{e^{2x}-1}=\lim_{x\to0+}\frac{2x}{e^{2x}-1}\cdot\frac{a}{2}$$
$$=1\cdot\frac{a}{2}=\frac{a}{2},$$
$$\lim_{x\to0-}f(x)=\lim_{x\to0-}\frac{2\tan x}{5x+\sin x}=\lim_{x\to0-}\frac{2\cdot\frac{\tan x}{x}}{5+\frac{\sin x}{x}}$$
$$=\frac{2\cdot1}{5+1}=\frac{1}{3},$$
$$f(0)=b$$

에서 $\frac{a}{2}=\frac{1}{3}=b$

따라서 $a=\frac{2}{3},\ b=\frac{1}{3}$이므로 $a+b=1$ 답 ⑤

유형 19 삼각함수의 도함수 본책 83쪽

① $y=\sin x \Rightarrow y'=\cos x$
② $y=\cos x \Rightarrow y'=-\sin x$

0533 $f(x)=3^x(\sin x+\cos x)$에서

$$f'(x)=3^x\ln3(\sin x+\cos x)+3^x(\cos x-\sin x)$$
$$=3^x\{(\ln3-1)\sin x+(\ln3+1)\cos x\}$$
$$\therefore f'(0)=1\cdot(\ln3+1)=\ln3+1$$ 답 ③

0534 $f(x)=\sqrt{3}\sin x-\cos x-x$에서

$$f'(x)=\sqrt{3}\cos x+\sin x-1$$
$$=2\left(\cos x\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\sin x\cdot\frac{1}{2}\right)-1$$
$$=2\left(\cos x\sin\frac{\pi}{3}+\sin x\cos\frac{\pi}{3}\right)-1$$
$$=2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-1$$

$f'(\alpha)=\sqrt{2}-1$에서 $2\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)-1=\sqrt{2}-1$

$\therefore \sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$0\le\alpha\le\frac{\pi}{2}$에서 $\frac{\pi}{3}\le\alpha+\frac{\pi}{3}\le\frac{5}{6}\pi$이므로

$\alpha+\frac{\pi}{3}=\frac{3}{4}\pi \qquad \therefore \alpha=\frac{5}{12}\pi$ 답 ⑤

0535 $f(x)=e^x\cos x$에서

$$f'(x)=e^x\cos x+e^x(-\sin x)$$
$$=e^x(\cos x-\sin x)$$ ···➊

$f'(x)=0$에서 $e^x(\cos x-\sin x)=0$

$\cos x-\sin x=0\ (\because e^x>0)$

$\therefore \cos x=\sin x$

$0<x<2\pi$이므로

$x=\frac{\pi}{4}$ 또는 $x=\frac{5}{4}\pi$ ···➋

따라서 모든 x의 값의 합은

$\frac{\pi}{4}+\frac{5}{4}\pi=\frac{3}{2}\pi$ ···➌

답 $\frac{3}{2}\pi$

채점 기준	비율
➊ $f'(x)$를 구할 수 있다.	50 %
➋ x의 값을 구할 수 있다.	40 %
➌ 모든 x의 값의 합을 구할 수 있다.	10 %

0536 $f'(0)=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h}$

$$=\lim_{h\to0}\frac{2\tan h-5h^2\sin\frac{1}{h}}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\left(2\cdot\frac{\tan h}{h}-5h\sin\frac{1}{h}\right)$$
$$=2\cdot1-5\lim_{h\to0}h\sin\frac{1}{h}$$ ······ ㉠

이때 $-1\le\sin\frac{1}{h}\le1$에서

$-|h|\le h\sin\frac{1}{h}\le|h|$

$\lim_{h\to0}(-|h|)=0,\ \lim_{h\to0}|h|=0$이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim_{h\to0}h\sin\frac{1}{h}=0$

따라서 ㉠에서

$f'(0)=2-5\cdot0=2$ 답 2

유형 20 삼각함수의 도함수 ; 미분계수를 이용한 극한값의 계산 본책 84쪽

(i) 미분계수의 정의를 이용하여 주어진 식을 $f'(a)$가 포함된 식으로 변형한다.
(ii) $f'(x)$를 구하여 $f'(a)$의 값을 구한 후 (i)에 대입한다.

0537 $\lim_{h\to0}\frac{f(\pi+2h)-f(\pi-h)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(\pi+2h)-f(\pi)-\{f(\pi-h)-f(\pi)\}}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(\pi+2h)-f(\pi)}{2h}\cdot2+\lim_{h\to0}\frac{f(\pi-h)-f(\pi)}{-h}$

$=2f'(\pi)+f'(\pi)=3f'(\pi)$

$f(x)=x\sin x$에서 $f'(x)=\sin x+x\cos x$이므로

$3f'(\pi)=3(\sin\pi+\pi\cos\pi)=-3\pi$ 답 ①

0538 $f(x)=\lim_{h\to0}\frac{x\cos(x+h)-x\cos x}{h}$

$=x\lim_{h\to0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}$ ← $g(x)=\cos x$로 놓으면 $\lim_{h\to0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=g'(x)$

$=x(\cos x)'$

$=-x\sin x$ ⋯ ❶

따라서 $f'(x)=-\sin x-x\cos x$이므로 ⋯ ❷

$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}=-1$ ⋯ ❸

답 -1

채점 기준	비율
❶ $f(x)$를 구할 수 있다.	50 %
❷ $f'(x)$를 구할 수 있다.	40 %
❸ $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$의 값을 구할 수 있다.	10 %

0539 $\lim_{x\to0}\frac{f(\pi-\sin x)-f(\pi)}{x}$

$=\lim_{x\to0}\frac{f(\pi-\sin x)-f(\pi)}{(\pi-\sin x)-\pi}\cdot\frac{-\sin x}{x}$

$=-\lim_{x\to0}\frac{f(\pi-\sin x)-f(\pi)}{(\pi-\sin x)-\pi}$

$\pi-\sin x=t$로 놓으면 $x\longrightarrow0$일 때 $t\longrightarrow\pi$이므로

$-\lim_{t\to\pi}\frac{f(t)-f(\pi)}{t-\pi}=-f'(\pi)$

$f(x)=\sin x\cos x$에서

$f'(x)=\cos x\cos x+\sin x(-\sin x)$

$=\cos^2x-\sin^2x$

$\therefore -f'(\pi)=-(\cos^2\pi-\sin^2\pi)=-1$ 답 ②

유형 21 삼각함수의 미분가능성 본책 84쪽

함수 $F(x)=\begin{cases}f(x) & (x\ge a)\\ g(x) & (x<a)\end{cases}$가 다음 조건을 모두 만족시키면 $x=a$에서 미분가능하다.

① 함수 $F(x)$가 $x=a$에서 연속이다. ➡ $f(a)=\lim_{x\to a-}g(x)$

② $F'(a)$가 존재한다. ➡ $\lim_{x\to a+}f'(x)=\lim_{x\to a-}g'(x)$

0540 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 미분가능하려면 $x=0$에서 연속이어야 하므로

$\lim_{x\to0+}(e^x\sin x+a)=\lim_{x\to0-}(2x^2+bx+3)=f(0)$

$\therefore a=3$

또 $f'(0)$이 존재해야 하므로

$f'(x)=\begin{cases}e^x(\sin x+\cos x) & (x>0)\\ 4x+b & (x<0)\end{cases}$에서

$\lim_{x\to0+}e^x(\sin x+\cos x)=\lim_{x\to0-}(4x+b)$

$\therefore b=1$ 답 $a=3$, $b=1$

0541 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 미분가능하려면 $x=0$에서 연속이어야 하므로

$\lim_{x\to0+}\sin x=\lim_{x\to0-}(ax+b)=f(0)$ $\therefore b=0$

또 $f'(0)$이 존재해야 하므로 $f'(x)=\begin{cases}a & (-1<x<0)\\ \cos x & (0<x<1)\end{cases}$에서

$\lim_{x\to0+}\cos x=\lim_{x\to0-}a$ $\therefore a=1$

$\therefore a+b=1$ 답 ①

0542 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 미분가능하면 $x=0$에서 미분가능하다. 즉 $x=0$에서 연속이므로

$\lim_{x\to0+}(a\sin x+b\cos x)=\lim_{x\to0-}e^{x-1}=f(0)$

$\therefore b=\frac{1}{e}$ ⋯ ❶

또 $f'(0)$이 존재하므로 $f'(x)=\begin{cases}a\cos x-\frac{1}{e}\sin x & (x>0)\\ e^{x-1} & (x<0)\end{cases}$에서

$\lim_{x\to0+}\left(a\cos x-\frac{1}{e}\sin x\right)=\lim_{x\to0-}e^{x-1}$

$\therefore a=\frac{1}{e}$ ⋯ ❷

$\therefore ab=\frac{1}{e^2}$ ⋯ ❸

답 $\frac{1}{e^2}$

채점 기준	비율
❶ b의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷ a의 값을 구할 수 있다.	60 %
❸ ab의 값을 구할 수 있다.	10 %

0543 1st 점 P의 x좌표를 구한다.

점 A의 x좌표는 $-x^2-2x+8=0$에서

$x^2+2x-8=0$, $(x+4)(x-2)=0$

$\therefore x=2$ ($\because x>0$) $\therefore$ A$(2, 0)$

점 P는 곡선 $y=-x^2-2x+8$ 위의 점이므로

P$(t, -t^2-2t+8)$ $(0<t<2)$

로 놓으면 B$(0, 8)$이므로

$\overline{PQ}=t$, $\overline{BQ}=8-(-t^2-2t+8)=t^2+2t$

직각삼각형 BQP에서 $\tan\theta_1=\frac{t^2+2t}{t}=t+2$

따라서 $t+2=3$이므로 $t=1$

2nd $\tan\theta_2$의 값을 구한다.

P$(1, 5)$이므로 직각삼각형 QOP에서

$\tan\theta_2=\frac{5}{1}=5$

3rd $\tan\theta_3$의 값을 구한다.

$\overline{PA}=\sqrt{1^2+(-5)^2}=\sqrt{26}$, $\overline{OP}=\sqrt{1^2+5^2}=\sqrt{26}$이므로 $\triangle$POA에서 코사인법칙에 의하여

$$2^2=(\sqrt{26})^2+(\sqrt{26})^2-2\cdot\sqrt{26}\cdot\sqrt{26}\cdot\cos\theta_3$$

$$52\cos\theta_3=48 \qquad \therefore \cos\theta_3=\frac{12}{13}$$

따라서 $\sec\theta_3=\frac{13}{12}$이므로

$$\underbrace{\tan\theta_3=\sqrt{\sec^2\theta_3-1}}_{0<\theta_3<\pi\text{이고 }\cos\theta_3>0\text{이므로 }\tan\theta_3>0}=\sqrt{\left(\frac{13}{12}\right)^2-1}=\frac{5}{12}$$

(4th) $\tan(\theta_2+\theta_3)$의 값을 구한다.

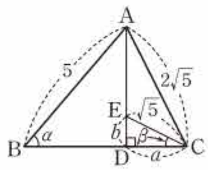
$$\tan(\theta_2+\theta_3)=\frac{\tan\theta_2+\tan\theta_3}{1-\tan\theta_2\tan\theta_3}$$

$$=\frac{5+\frac{5}{12}}{1-5\cdot\frac{5}{12}}=-5$$

답 -5

0544 (1st) $\overline{CD}$, $\overline{DE}$의 길이를 구한다.

오른쪽 그림과 같이 $\overline{CD}=a$, $\overline{DE}=b$라 하면 직각삼각형 EDC에서



$$a^2+b^2=5 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$\overline{AE}:\overline{DE}=3:1$이므로

$$\overline{AE}=3\overline{DE}=3b$$

직각삼각형 ADC에서 $\quad a^2+(\underbrace{4b}_{\overline{AD}=3b+b=4b})^2=(2\sqrt{5})^2$

$$\therefore a^2+16b^2=20 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a=2,\ b=1\ (\because a>0,\ b>0)$$

(2nd) $\sin\alpha$, $\cos\alpha$의 값을 구한다.

직각삼각형 ABD에서 $\overline{BD}=\sqrt{5^2-\underbrace{4^2}_{\overline{AD}=4b=4}}=3$이므로

$$\sin\alpha=\frac{4}{5},\ \cos\alpha=\frac{3}{5}$$

(3rd) $\sin\beta$, $\cos\beta$의 값을 구한다.

직각삼각형 EDC에서

$$\sin\beta=\frac{1}{\sqrt{5}},\ \cos\beta=\frac{2}{\sqrt{5}}$$

(4th) $\cos(\alpha-\beta)$의 값을 구한다.

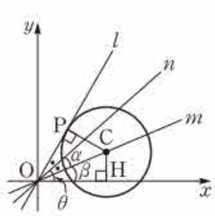
$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

$$=\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}+\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

답 ⑤

0545 (1st) 직선 m이 x축의 양의 방향과 이루는 각에 대한 sin, cos의 값을 구한다.

오른쪽 그림과 같이 두 직선 m, n이 이루는 예각의 크기를 α, 직선 m이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 β라 하고, 점 C에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하자.



C$(2\sqrt{5},\ \sqrt{5})$이므로

$$\overline{OC}=\sqrt{(2\sqrt{5})^2+(\sqrt{5})^2}=5$$

직각삼각형 COH에서

$$\sin\beta=\frac{\sqrt{5}}{5},\ \cos\beta=\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

(2nd) 두 직선 m, n이 이루는 예각에 대한 sin, cos의 값을 구한다.

$\overline{CP}=3$이므로 직각삼각형 CPO에서

$$\overline{OP}=\sqrt{5^2-3^2}=4$$

$\cos\underbrace{2\alpha}_{\angle COP=2\alpha}=\frac{4}{5}$이므로 $\qquad 2\cos^2\alpha-1=\frac{4}{5}$

$$\cos^2\alpha=\frac{9}{10} \qquad \therefore \cos\alpha=\frac{3\sqrt{10}}{10}\ \left(\because 0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\therefore \sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\frac{9}{10}}=\frac{\sqrt{10}}{10}\ \left(\because 0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$$

(3rd) $\cos\theta$의 값을 구한다.

$\theta=\alpha+\beta$이므로

$$\cos\theta=\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

$$=\frac{3\sqrt{10}}{10}\cdot\frac{2\sqrt{5}}{5}-\frac{\sqrt{10}}{10}\cdot\frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

답 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

다른 풀이 두 직선 m, n이 이루는 예각의 크기를 α라 하면 직선 m이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기는 $\theta-\alpha$이므로

$$\tan(\theta-\alpha)=\underbrace{\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}}_{\text{직선 }m\text{, 즉 직선 OC의 기울기}}=\frac{1}{2} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$\overline{OC}=5$, $\overline{CP}=3$에서 $\overline{OP}=4$이므로 직각삼각형 CPO에서

$$\tan 2\alpha=\frac{3}{4}, \qquad \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\frac{3}{4}$$

$$8\tan\alpha=3-3\tan^2\alpha, \qquad 3\tan^2\alpha+8\tan\alpha-3=0$$

$$(\tan\alpha+3)(3\tan\alpha-1)=0$$

$$\therefore \tan\alpha=\frac{1}{3}\ \left(\because 0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$$

㉠에서 $\frac{\tan\theta-\tan\alpha}{1+\tan\theta\tan\alpha}=\frac{1}{2}$이므로

$$\frac{\tan\theta-\frac{1}{3}}{1+\tan\theta\cdot\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}, \qquad 2\tan\theta-\frac{2}{3}=1+\frac{1}{3}\tan\theta$$

$$\frac{5}{3}\tan\theta=\frac{5}{3} \qquad \therefore \tan\theta=1$$

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$에서 $\theta=\frac{\pi}{4}$이므로

$$\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

0546 (1st) $f(\theta)$를 구한다.

B$(\cos\theta,\ \sin\theta)$이므로 $\qquad f(\theta)=1\cdot\sin\theta=\sin\theta$

(2nd) $g(\theta)$를 구한다.

사각형 OACB가 평행사변형이므로

$$\overline{BC}=\overline{OA}=1 \qquad \therefore \text{C}(1+\cos\theta,\ \sin\theta)$$

$$\therefore g(\theta)=\overline{OC}^2=(1+\cos\theta)^2+\sin^2\theta$$

$$=1+2\cos\theta+\cos^2\theta+\sin^2\theta$$

$$=2+2\cos\theta$$

(3rd) $f(\theta)+g(\theta)$의 최댓값을 구한다.

$$f(\theta)+g(\theta)=\sin\theta+2\cos\theta+2$$

$$=\sqrt{5}\left(\sin\theta\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}+\cos\theta\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}\right)+2$$

$$=\sqrt{5}\sin(\theta+\alpha)+2\left(\text{단, }\sin\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}},\ \cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

이때 $0<\sin(\theta+\alpha)\le 1$이므로 $\quad 0<\theta<\frac{\pi}{2},\ 0<\alpha<\frac{\pi}{2}$

$$2<\sqrt{5}\sin(\theta+\alpha)+2\le 2+\sqrt{5}$$

따라서 $f(\theta)+g(\theta)$의 최댓값은 $2+\sqrt{5}$이다. 답 ①

참고 $\triangle$OAC에서 $\overline{OA}=\overline{AC}=1$이고 $\angle A=\pi-\theta$이므로 코사인법칙에 의하여 ($\overline{OB}=\sqrt{\cos^2\theta+\sin^2\theta}=1$)

$$g(\theta)=1^2+1^2-2\cdot1\cdot1\cdot\cos(\pi-\theta)=2+2\cos\theta$$

임을 이용할 수도 있다.

0547 1st $f(x)$를 구한다.

$\sin\frac{x}{2^{n-1}}=2\sin\frac{x}{2^n}\cos\frac{x}{2^n}$에서

$$\sin\frac{x}{2^n}\cos\frac{x}{2^n}=\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2^{n-1}}$$

$\therefore f(x)$

$$=\lim_{n\to\infty}\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2^2}\cdot\cos\frac{x}{2^3}\cdot\cdots\cdot\cos\frac{x}{2^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2^2}\cdot\cos\frac{x}{2^3}\cdot\cdots\cdot\cos\frac{x}{2^n}\cdot\sin\frac{x}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2^2}\cdot\cos\frac{x}{2^3}\cdot\cdots\cdot\underbrace{\cos\frac{x}{2^{n-1}}\cdot\sin\frac{x}{2^{n-1}}}_{\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2^{n-2}}}}{2\sin\frac{x}{2^n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2^2}\cdot\cos\frac{x}{2^3}\cdot\cdots\cdot\underbrace{\cos\frac{x}{2^{n-2}}\cdot\sin\frac{x}{2^{n-2}}}_{\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2^{n-3}}}}{2^2\sin\frac{x}{2^n}}$$

$\vdots$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\underbrace{\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}}_{\frac{1}{2}\sin x}}{2^{n-1}\sin\frac{x}{2^n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}$$

$\frac{x}{2^n}=t$로 놓으면 $n\to\infty$일 때 $t\to 0$이므로

$$f(x)=\lim_{t\to0}\frac{\sin x}{\frac{x}{t}\cdot\sin t}$$

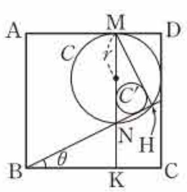
$$=\lim_{t\to0}\frac{\sin x}{x\cdot\frac{\sin t}{t}}=\frac{\sin x}{x}$$

2nd $\lim_{x\to0}f(x)$의 값을 구한다.

$$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$$

답 1

0548 1st 원 C의 반지름의 길이를 θ에 대한 삼각함수로 나타낸다.



오른쪽 그림과 같이 직선 MN이 선분 BC와 만나는 점을 K라 하고 원 C의 반지름의 길이를 r라 하면

$$\overline{NK}=1-2r,\ \overline{BK}=1-r \quad (\overline{CK}=r)$$

직각삼각형 NBK에서

$$\tan\theta=\frac{1-2r}{1-r}$$

$$(1-r)\tan\theta=1-2r,\qquad (2-\tan\theta)r=1-\tan\theta$$

$$\therefore r=\frac{1-\tan\theta}{2-\tan\theta}\qquad\cdots\cdots ㉠$$

2nd r'을 θ에 대한 삼각함수로 나타낸다.

직각삼각형 MNH에서 ($\angle MHN=\frac{\pi}{2}$)

$$\angle HMN=\frac{\pi}{2}-\angle MNH$$

$$=\frac{\pi}{2}-\angle BNK\ (\because \text{맞꼭지각})$$

$$=\theta$$

이므로

$$\overline{NH}=2r\sin\theta,\ \overline{MH}=2r\cos\theta$$

따라서 $\triangle$MNH의 넓이는

$$\frac{1}{2}\cdot r'(2r+2r\sin\theta+2r\cos\theta)=\frac{1}{2}\cdot2r\sin\theta\cdot2r\cos\theta$$

$$\therefore r'=\frac{2r\sin\theta\cos\theta}{1+\sin\theta+\cos\theta}$$

$$=\frac{2\sin\theta\cos\theta}{1+\sin\theta+\cos\theta}\cdot\frac{1-\tan\theta}{2-\tan\theta}\ (\because ㉠)$$

3rd 극한값을 구한다.

$$\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}-}\frac{r'}{\frac{\pi}{4}-\theta}$$

$$=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}-}\frac{1}{\frac{\pi}{4}-\theta}\cdot\frac{2\sin\theta\cos\theta}{1+\sin\theta+\cos\theta}\cdot\frac{1-\tan\theta}{2-\tan\theta}$$

$$=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}-}\frac{2\sin\theta\cos\theta}{(2-\tan\theta)(1+\sin\theta+\cos\theta)}\cdot\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}-}\frac{1-\tan\theta}{\frac{\pi}{4}-\theta}$$

$$=\frac{1}{1+\sqrt{2}}\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}-}\frac{1-\tan\theta}{\frac{\pi}{4}-\theta}$$

$\frac{\pi}{4}-\theta=t$로 놓으면 $\theta\to\frac{\pi}{4}-$일 때 $t\to 0+$이므로

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}}\lim_{t\to0+}\frac{1-\tan\left(\frac{\pi}{4}-t\right)}{t}$$

$$=\frac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}\lim_{t\to0+}\frac{1-\frac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan t}{1+\tan\frac{\pi}{4}\tan t}}{t}$$

$$=(\sqrt{2}-1)\lim_{t\to0+}\frac{1-\frac{1-\tan t}{1+\tan t}}{t}$$

$$=(\sqrt{2}-1)\lim_{t\to0+}\frac{2\tan t}{t(1+\tan t)}$$

$$=(\sqrt{2}-1)\lim_{t\to0+}\frac{\tan t}{t}\cdot\frac{2}{1+\tan t}$$

$$=(\sqrt{2}-1)\cdot1\cdot2=2(\sqrt{2}-1)$$

답 $2(\sqrt{2}-1)$

SSEN 특강 삼각형의 내심의 응용

삼각형 ABC의 내접원의 반지름의 길이를 r라 하면

$$\triangle ABC=\frac{1}{2}r(\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA})$$

0549 1st $S(\theta)$를 구한다.

$\triangle$ABC에서

$$\overline{AC}=\frac{\overline{AB}}{\cos\theta}=\sec\theta,\ \overline{BC}=\overline{AB}\tan\theta=\tan\theta$$

$\overline{CD}$가 $\angle C$의 이등분선이므로 $\overline{CA}:\overline{CB}=\overline{AD}:\overline{BD}$에서

$$\sec\theta:\tan\theta=\overline{AD}:(1-\overline{AD})$$

$\overline{AD}\tan\theta=\sec\theta(1-\overline{AD})$

$(\sec\theta+\tan\theta)\overline{AD}=\sec\theta$

$\therefore \overline{AD}=\dfrac{\sec\theta}{\sec\theta+\tan\theta}=\dfrac{1}{1+\sin\theta}$

$$\begin{aligned}\therefore S(\theta)&=\frac{1}{2}\cdot\overline{AD}^2\cdot\theta\\&=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{1+\sin\theta}\right)^2\cdot\theta\\&=\frac{\theta}{2(1+\sin\theta)^2}\end{aligned}$$

2nd $T(\theta)$를 구한다.

$\overline{CE}=\overline{AC}-\overline{AE}=\sec\theta-\dfrac{1}{1+\sin\theta}$이므로

$$\begin{aligned}T(\theta)&=\frac{1}{2}\cdot\overline{CE}\cdot\overline{BC}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\\&=\frac{1}{2}\cdot\left(\sec\theta-\frac{1}{1+\sin\theta}\right)\cdot\tan\theta\cdot\cos\theta\\&=\frac{1}{2}\sin\theta\left(\sec\theta-\frac{1}{1+\sin\theta}\right)\end{aligned}$$

3rd 극한값을 구한다.

$$\begin{aligned}&\lim_{\theta\to0+}\frac{\{S(\theta)\}^2}{T(\theta)}\\&=\lim_{\theta\to0+}\frac{\left\{\dfrac{\theta}{2(1+\sin\theta)^2}\right\}^2}{\dfrac{1}{2}\sin\theta\left(\sec\theta-\dfrac{1}{1+\sin\theta}\right)}\\&=\lim_{\theta\to0+}\frac{\dfrac{\theta^2}{4(1+\sin\theta)^4}}{\dfrac{\sin\theta(1+\sin\theta-\cos\theta)}{2\cos\theta(1+\sin\theta)}}\\&=\lim_{\theta\to0+}\frac{\theta^2\cos\theta}{2\sin\theta(1+\sin\theta)^3(1+\sin\theta-\cos\theta)}\\&=\frac{1}{2}\lim_{\theta\to0+}\frac{\theta}{\sin\theta}\cdot\frac{\cos\theta}{(1+\sin\theta)^3}\cdot\frac{\theta}{1+\sin\theta-\cos\theta}\\&=\frac{1}{2}\cdot1\cdot\frac{1}{1^3}\cdot\lim_{\theta\to0+}\frac{1}{\dfrac{\sin\theta}{\theta}+\dfrac{1-\cos\theta}{\theta}}\qquad\cdots\cdots ㉠\end{aligned}$$

이때

$$\begin{aligned}\lim_{\theta\to0+}\frac{1-\cos\theta}{\theta}&=\lim_{\theta\to0+}\frac{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}{\theta(1+\cos\theta)}\\&=\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin^2\theta}{\theta(1+\cos\theta)}\\&=\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin\theta}{\theta}\cdot\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}\\&=1\cdot0\\&=0\end{aligned}$$

이므로 ㉠에서

$$\begin{aligned}\lim_{\theta\to0+}\frac{\{S(\theta)\}^2}{T(\theta)}&=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+0}\\&=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

답 ②

SSEN 특강 부채꼴의 넓이

반지름의 길이가 r, 중심각의 크기가 θ(라디안)인 부채꼴의 넓이 S는 $S=\dfrac{1}{2}r^2\theta$

0550 1st b를 a에 대한 식으로 나타낸다.

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이면 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to1}f(x)=f(1)$

$\therefore \lim_{x\to1}\dfrac{\sin^2(x-1)}{x^2+ax+b}=k$ ······ ㉠

$x\to1$일 때 (분자) $\to0$이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모) $\to0$이다.

즉 $\lim_{x\to1}(x^2+ax+b)=0$이므로 $1+a+b=0$

$\therefore b=-a-1$ ······ ㉡

2nd a, b의 값을 구한다.

㉡을 ㉠의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1}\frac{\sin^2(x-1)}{x^2+ax-a-1}&=\lim_{x\to1}\frac{\sin^2(x-1)}{(x-1)(x+a+1)}\\&=\lim_{x\to1}\frac{\sin(x-1)}{x-1}\cdot\frac{\sin(x-1)}{x+a+1}\\&=\lim_{x\to1}\frac{\sin(x-1)}{x+a+1}\end{aligned}$$

$\therefore \lim_{x\to1}\dfrac{\sin(x-1)}{x+a+1}=k$ ······ ㉢

$x\to1$일 때 (분자) $\to0$이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모) $\to0$이다.

즉 $\lim_{x\to1}(x+a+1)=0$이므로 $a+2=0$

$\therefore a=-2,\ b=1$ ($\because$ ㉡)

3rd $a-b+k$의 값을 구한다.

$a=-2$를 ㉢에 대입하면 $k=\lim_{x\to1}\dfrac{\sin(x-1)}{x-1}=1$

$\therefore a-b+k=-2$

답 ③

참고 $\lim_{x\to1}\dfrac{\sin(x-1)}{x-1}$에서 $x-1=t$로 놓으면 $x\to1$일 때 $t\to0$이므로

$\lim_{x\to1}\dfrac{\sin(x-1)}{x-1}=\lim_{t\to0}\dfrac{\sin t}{t}=1$

0551 1st $f(\theta)$를 구한다.

$\angle ACD=\dfrac{\pi}{4}$, $\overline{AC}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$이므로

$$\begin{aligned}\triangle ACP&=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot1\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)\\&=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sin\frac{\pi}{4}\cos\theta+\cos\frac{\pi}{4}\sin\theta\right)\\&=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta\right)\\&=\frac{1}{2}\cos\theta+\frac{1}{2}\sin\theta\end{aligned}$$

$\angle PCE=\dfrac{\pi}{2}-\theta$이므로

$\triangle PCE=\dfrac{1}{2}\cdot1\cdot1\cdot\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=\dfrac{1}{2}\cos\theta$

$\therefore f(\theta)=\triangle ACP+\triangle PCE=\dfrac{1}{2}\sin\theta+\cos\theta$

2nd $f'\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$의 값을 구한다.

따라서 $f'(\theta)=\dfrac{1}{2}\cos\theta-\sin\theta$이므로

$f'\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{3}-2}{4}$

답 ③

04 삼각함수의 미분

0552 (1st) 조건 ㈎를 이용하여 $f(x)$의 식을 세운다.

조건 ㈎에서

$$\lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{x^4}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\sin x+x^3+f(x)}{x^4}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left\{\frac{\sin x}{x^2}+\frac{1}{x}+\frac{f(x)}{x^4}\right\} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

이때 $-1\le\sin x\le1$이므로 $\quad -\frac{1}{x^2}\le\frac{\sin x}{x^2}\le\frac{1}{x^2}\ (x\ne0)$

$\lim_{x\to\infty}\left(-\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}=0$이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x^2}=0$$

또 $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$이므로 ㉠에서

$$\lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{x^4}=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^4}$$

따라서 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^4}=5$이고 $f(0)=0$이므로

$f(x)=5x^4+ax^3+bx^2+cx$ (a, b, c는 상수)

로 놓자.

(2nd) $f(x)$를 구한다.

$f'(x)=20x^3+3ax^2+2bx+c$이므로

$$g'(x)=2x\sin x+x^2\cos x+3x^2+f'(x)$$
$$=2x\sin x+x^2\cos x+3x^2+20x^3+3ax^2+2bx+c$$
$$=2x\sin x+x^2\cos x+20x^3+3(1+a)x^2+2bx+c$$

조건 ㈏에서

$$\lim_{x\to0}\frac{2x\sin x+x^2\cos x+20x^3+3(1+a)x^2+2bx+c}{x^2}$$
$$=15 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

$x\longrightarrow0$일 때 (분모) $\longrightarrow0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow0$이다.

즉 $\lim_{x\to0}\{2x\sin x+x^2\cos x+20x^3+3(1+a)x^2+2bx+c\}=0$이므로 $\quad c=0$

$c=0$을 ㉡의 좌변에 대입한 후 정리하면

$$\lim_{x\to0}\frac{2\sin x+x\cos x+20x^2+3(1+a)x+2b}{x}$$
$$=15 \qquad \cdots\cdots ㉢$$

$x\longrightarrow0$일 때 (분모) $\longrightarrow0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow0$이다.

즉 $\lim_{x\to0}\{2\sin x+x\cos x+20x^2+3(1+a)x+2b\}=0$이므로

$b=0$

$b=0$을 ㉢의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to0}\frac{2\sin x+x\cos x+20x^2+3(1+a)x}{x}$$
$$=\lim_{x\to0}\left\{2\cdot\frac{\sin x}{x}+\cos x+20x+3(1+a)\right\}$$
$$=2\cdot1+1+0+3(1+a)=3a+6$$

따라서 ㉢에서 $3a+6=15$이므로 $\quad 3a=9 \quad \therefore a=3$

$\therefore f(x)=5x^4+3x^3$

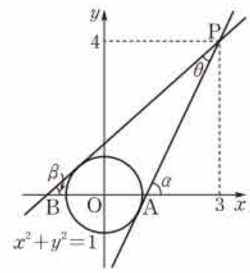
(3rd) 극한값을 구한다.

$g(x)=x^2\sin x+x^3+5x^4+3x^3=x^2\sin x+5x^4+4x^3$이므로

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to0}\frac{5x^4+3x^3}{x^2\sin x+5x^4+4x^3}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{5x+3}{\frac{\sin x}{x}+5x+4}$$
$$=\frac{3}{1+4}=\frac{3}{5}$$

답 $\frac{3}{5}$

0553 전략 θ를 두 접선이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 이용하여 나타낸다.



풀이 오른쪽 그림과 같이 두 접선이 x축과 만나는 점 중 x좌표가 양수인 점을 A, 음수인 점을 B라 하고 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α, β라 하면 $\triangle$PBA에서

$\theta=\alpha-\beta$

$$\therefore \tan\theta=\tan(\alpha-\beta)$$
$$=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta} \qquad \cdots\cdots ㉠ \qquad \cdots❶$$

원의 접선의 방정식을

$y=mx\pm\sqrt{m^2+1}$

이라 하면 이 직선이 점 P(3, 4)를 지나므로

$4=3m\pm\sqrt{m^2+1}$

$4-3m=\pm\sqrt{m^2+1}$

양변을 제곱하면

$16-24m+9m^2=m^2+1$

$\therefore 8m^2-24m+15=0$

이 이차방정식의 두 근은 $\tan\alpha$, $\tan\beta$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\tan\alpha+\tan\beta=3$, $\tan\alpha\tan\beta=\frac{15}{8}$

$$\therefore \tan\alpha-\tan\beta=\sqrt{(\tan\alpha+\tan\beta)^2-4\tan\alpha\tan\beta}$$
$$=\sqrt{3^2-4\cdot\frac{15}{8}}=\frac{\sqrt{6}}{2} \qquad \cdots❷$$

$0<\beta<\alpha<\frac{\pi}{2}$이므로
$\tan\beta<\tan\alpha$
$\therefore \tan\alpha-\tan\beta>0$

따라서 ㉠에서

$$\tan\theta=\frac{\frac{\sqrt{6}}{2}}{1+\frac{15}{8}}=\frac{4\sqrt{6}}{23} \qquad \cdots❸$$

답 $\frac{4\sqrt{6}}{23}$

채점 기준	비율
❶ $\tan\theta$를 $\tan\alpha$, $\tan\beta$에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30 %
❷ $\tan\alpha\tan\beta$, $\tan\alpha-\tan\beta$의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ $\tan\theta$의 값을 구할 수 있다.	20 %

SSEN 특강 원의 접선의 방정식

① 원 $x^2+y^2=r^2\ (r>0)$에 접하고 기울기가 m인 직선의 방정식은
$\quad y=mx\pm r\sqrt{m^2+1}$

② 원 $x^2+y^2=r^2$ 위의 점 (x_1, y_1)에서의 접선의 방정식은
$\quad x_1x+y_1y=r^2$

다른 풀이 오른쪽 그림과 같이 두 접선과 원의 접점을 각각 Q, R라 하면

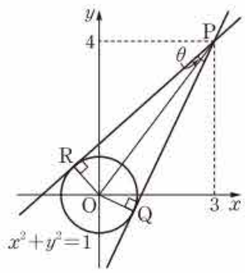
$$\angle\mathrm{OPQ}=\angle\mathrm{OPR}=\frac{\theta}{2}$$

$\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{3^2+4^2}=5$이므로

$$\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{5^2-1^2}=2\sqrt{6}$$

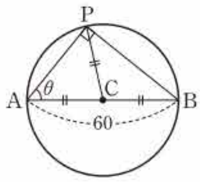
$$\therefore \tan\frac{\theta}{2}=\frac{1}{2\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{12}$$

$$\therefore \tan\theta=\frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}=\frac{2\cdot\frac{\sqrt{6}}{12}}{1-\left(\frac{\sqrt{6}}{12}\right)^2}=\frac{4\sqrt{6}}{23}$$



0554 **전략** $\overline{\mathrm{AP}}$와 $\overline{\mathrm{BP}}$의 길이를 삼각함수로 나타낸다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}$를 지름으로 하는 원을 그리면 $\overline{\mathrm{CA}}=\overline{\mathrm{CB}}=\overline{\mathrm{CP}}$이므로 $\triangle\mathrm{PAB}$가 이 원에 내접한다.



$$\therefore \angle\mathrm{APB}=\frac{\pi}{2}$$

$\angle\mathrm{PAB}=\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$라 하면

$$\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{AB}}\cos\theta=60\cos\theta,$$
$$\overline{\mathrm{BP}}=\overline{\mathrm{AB}}\sin\theta=60\sin\theta \quad \cdots❶$$

공사 비용을 $f(\theta)$억 원이라 하면

$$f(\theta)=6\cdot60\cos\theta+8\cdot60\sin\theta=120(4\sin\theta+3\cos\theta)$$
$$=120\cdot5\left(\sin\theta\cdot\frac{4}{5}+\cos\theta\cdot\frac{3}{5}\right)$$
$$=600\sin(\theta+\alpha)\left(\text{단, }\sin\alpha=\frac{3}{5},\ \cos\alpha=\frac{4}{5}\right) \quad \cdots❷$$

따라서 $f(\theta)$는 $\underbrace{\theta+\alpha}_{0<\theta<\frac{\pi}{2},\ 0<\alpha<\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}$일 때 최대이므로 구하는 값은

$$\tan\theta=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\frac{1}{\tan\alpha}$$
$$=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}}=\frac{4}{3} \quad \cdots❸$$

답 $\frac{4}{3}$

채점 기준	비율
❶ $\overline{\mathrm{AP}}$, $\overline{\mathrm{BP}}$의 길이를 삼각함수로 나타낼 수 있다.	30 %
❷ 공사 비용을 하나의 삼각함수로 나타낼 수 있다.	40 %
❸ 공사 비용이 최대일 때의 $\tan(\angle\mathrm{PAB})$의 값을 구할 수 있다.	30 %

0555 **전략** $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$임을 이용하여 등식의 좌변을 변형한다.

풀이 $\lim_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x^n}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{x^n}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{x^n\cdot\cos x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin x(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^n\cdot\cos x(1+\cos x)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin^3x}{x^n\cdot\cos x(1+\cos x)}$$
$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3\cdot\frac{1}{x^{n-3}}\cdot\frac{1}{\cos x(1+\cos x)} \quad \cdots❶$$

이때 $\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3=1$, $\lim_{x\to0}\frac{1}{\cos x(1+\cos x)}=\frac{1}{2}$이므로 주어진 식이 0이 아닌 값 a에 수렴하려면

$$n-3=0 \qquad \therefore \underbrace{n=3}_{\frac{1}{x^{n-3}}=\frac{1}{x^0}=1}$$

$$\therefore a=1\cdot1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2} \quad \cdots❷$$

답 $a=\frac{1}{2}$, $n=3$

채점 기준	비율
❶ 주어진 식의 좌변을 변형할 수 있다.	60 %
❷ a, n의 값을 구할 수 있다.	40 %

0556 **전략** $S(x)$는 첫째항이 1, 공비가 $\cos x$인 등비급수임을 이용한다.

풀이 $-1<\cos x<1$이므로

$$S(x)=\frac{1}{1-\cos x} \quad \cdots❶$$

$\lim_{x\to0}(ax^2+b)S(x)=4$에서

$$\lim_{x\to0}\frac{ax^2+b}{1-\cos x}=4 \quad \cdots\cdots ㉠$$

$x\longrightarrow0$일 때 (분모) $\longrightarrow0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow0$이다.

즉 $\lim_{x\to0}(ax^2+b)=0$이므로 $\quad b=0 \quad \cdots❷$

$b=0$을 ㉠의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to0}\frac{ax^2}{1-\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{ax^2(1+\cos x)}{(1-\cos x)(1+\cos x)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{ax^2(1+\cos x)}{\sin^2x}$$
$$=\lim_{x\to0}a\cdot\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2\cdot(1+\cos x)$$
$$=a\cdot1^2\cdot2$$
$$=2a$$

따라서 $2a=4$이므로 $\quad a=2 \quad \cdots❸$

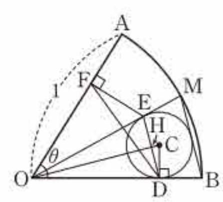
$$\therefore a+b=2 \quad \cdots❹$$

답 2

채점 기준	비율
❶ $S(x)$를 간단히 나타낼 수 있다.	20 %
❷ b의 값을 구할 수 있다.	20 %
❸ a의 값을 구할 수 있다.	50 %
❹ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	10 %

0557 **전략** 원 C의 반지름의 길이를 r로 놓고 $\overline{\mathrm{DE}}$, $\overline{\mathrm{EF}}$의 길이를 θ에 대한 삼각함수로 나타낸다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 $\overline{\mathrm{CO}}$, $\overline{\mathrm{CD}}$를 긋고 원 C의 반지름의 길이를 r라 하면 직각삼각형 ODC에서



$$\angle\mathrm{COD}=\underbrace{\frac{1}{2}\cdot\frac{\theta}{2}}_{\angle\mathrm{MOB}=\frac{1}{2}\angle\mathrm{AOB}}=\frac{\theta}{4}\text{이므로}$$

$$\overline{\mathrm{OD}}=\frac{r}{\tan\frac{\theta}{4}}$$

$\overline{CO}$와 $\overline{DE}$의 교점을 H라 하면 △ODE는 $\overline{OD}=\overline{OE}$인 이등변삼각형이므로

$$\angle OHD=\frac{\pi}{2},\ \overline{DH}=\overline{EH}$$

직각삼각형 ODH에서

$$\overline{DH}=\overline{OD}\sin\frac{\theta}{4}=\frac{r\sin\frac{\theta}{4}}{\tan\frac{\theta}{4}}=r\cos\frac{\theta}{4}$$

$$\therefore\ \overline{DE}=2\overline{DH}=2r\cos\frac{\theta}{4}$$

또 직각삼각형 OEF에서

$$\overline{EF}=\overline{OE}\sin\frac{\theta}{2}=\overline{OD}\sin\frac{\theta}{2}=\frac{r\sin\frac{\theta}{2}}{\tan\frac{\theta}{4}}\ \leftarrow \sin\frac{\theta}{2}=\sin\left(2\cdot\frac{\theta}{4}\right)$$

$$=r\cdot 2\sin\frac{\theta}{4}\cos\frac{\theta}{4}\cdot\frac{\cos\frac{\theta}{4}}{\sin\frac{\theta}{4}}$$

$$=2r\cos^2\frac{\theta}{4}\qquad \cdots ❶$$

이때

$$\angle DEF=\angle OEF+\angle OED$$
$$=\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)+\frac{1}{2}\left(\pi-\frac{\theta}{2}\right)=\pi-\frac{3}{4}\theta$$

이므로

$$f(\theta)=\frac{1}{2}\cdot\overline{DE}\cdot\overline{EF}\cdot\sin(\angle DEF)$$
$$=\frac{1}{2}\cdot 2r\cos\frac{\theta}{4}\cdot 2r\cos^2\frac{\theta}{4}\cdot\sin\left(\pi-\frac{3}{4}\theta\right)$$
$$=2r^2\cos^3\frac{\theta}{4}\sin\frac{3}{4}\theta\qquad \cdots ❷$$

$g(\theta)=\pi r^2$이므로

$$\lim_{\theta\to 0+}\frac{f(\theta)}{\theta g(\theta)}=\lim_{\theta\to 0+}\frac{2r^2\cos^3\frac{\theta}{4}\sin\frac{3}{4}\theta}{\theta\pi r^2}$$
$$=\lim_{\theta\to 0+}\frac{2}{\pi}\cdot\cos^3\frac{\theta}{4}\cdot\frac{\sin\frac{3}{4}\theta}{\frac{3}{4}\theta}\cdot\frac{3}{4}$$
$$=\frac{2}{\pi}\cdot 1^3\cdot 1\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{2\pi}\qquad \cdots ❸$$

답 $\frac{3}{2\pi}$

채점 기준	비율
❶ $\overline{DE}$, $\overline{EF}$의 길이를 θ에 대한 삼각함수로 나타낼 수 있다.	40 %
❷ $f(\theta)$를 구할 수 있다.	30 %
❸ 극한값을 구할 수 있다.	30 %

0558 전략 삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 $g(x)$를 정리한 후 미분하여 $g'(\pi)$와 $f'(\pi)$ 사이의 관계식을 구한다.

풀이 $g(x)=f(x)\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

$$=f(x)\left(\sin x\cos\frac{\pi}{4}+\cos x\sin\frac{\pi}{4}\right)$$
$$=f(x)\left(\sin x\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\cos x\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}f(x)(\sin x+\cos x)\qquad \cdots\cdots ㉠$$

이므로

$$g'(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}f'(x)(\sin x+\cos x)+\frac{\sqrt{2}}{2}f(x)(\cos x-\sin x)\qquad \cdots ❶$$

$$\therefore\ g'(\pi)=-\frac{\sqrt{2}}{2}f'(\pi)-\frac{\sqrt{2}}{2}f(\pi)$$

이때 $m_1=f'(\pi)$, $m_2=g'(\pi)$이므로

$$m_2=-\frac{\sqrt{2}}{2}m_1-\frac{\sqrt{2}}{2}f(\pi)\qquad \cdots\cdots ㉡$$

또 $g(\pi)=-\sqrt{2}$이고 ㉠에서 $g(\pi)=-\frac{\sqrt{2}}{2}f(\pi)$이므로

$$-\frac{\sqrt{2}}{2}f(\pi)=-\sqrt{2}\qquad \therefore\ f(\pi)=2$$

따라서 ㉡에서

$$m_2=-\frac{\sqrt{2}}{2}m_1-\sqrt{2}\qquad \cdots ❷$$

위의 식을 $m_1m_2=-\frac{\sqrt{2}}{2}$에 대입하면

$$m_1\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}m_1-\sqrt{2}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$m_1^2+2m_1-1=0$$
$$\therefore\ m_1=-1+\sqrt{2}\ (\because\ m_1>0)$$

따라서 $m_2=-\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+\sqrt{2})-\sqrt{2}=-1-\frac{\sqrt{2}}{2}$이므로

$$m_1-m_2=\frac{3\sqrt{2}}{2}\qquad \cdots ❸$$

답 $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

채점 기준	비율
❶ $g'(x)$를 구할 수 있다.	50 %
❷ m_2를 m_1에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	20 %
❸ m_1-m_2의 값을 구할 수 있다.	30 %

05 여러 가지 미분법

0559 $y'=-\dfrac{(x-2)'}{(x-2)^2}=-\dfrac{1}{(x-2)^2}$

답 $y'=-\dfrac{1}{(x-2)^2}$

0560 $y'=\dfrac{(2x-3)'(3x+2)-(2x-3)(3x+2)'}{(3x+2)^2}$

$=\dfrac{2(3x+2)-(2x-3)\cdot 3}{(3x+2)^2}=\dfrac{13}{(3x+2)^2}$

답 $y'=\dfrac{13}{(3x+2)^2}$

0561 $y'=\dfrac{(x^2+3)'(x-1)-(x^2+3)(x-1)'}{(x-1)^2}$

$=\dfrac{2x(x-1)-(x^2+3)\cdot 1}{(x-1)^2}$

$=\dfrac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$

$=\dfrac{(x+1)(x-3)}{(x-1)^2}$ 답 $y'=\dfrac{(x+1)(x-3)}{(x-1)^2}$

0562 $y'=\dfrac{(x^2+1)'e^x-(x^2+1)(e^x)'}{(e^x)^2}=\dfrac{2xe^x-(x^2+1)e^x}{e^{2x}}$

$=\dfrac{-e^x(x^2-2x+1)}{e^{2x}}=-\dfrac{(x-1)^2}{e^x}$

답 $y'=-\dfrac{(x-1)^2}{e^x}$

0563 $y'=\dfrac{(\ln x)'x-\ln x\cdot(x)'}{x^2}=\dfrac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x\cdot 1}{x^2}$

$=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$ 답 $y'=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$

0564 $y'=\dfrac{(\cos x)'(1+\sin x)-\cos x(1+\sin x)'}{(1+\sin x)^2}$

$=\dfrac{-\sin x(1+\sin x)-\cos x\cdot\cos x}{(1+\sin x)^2}$

$=\dfrac{-\sin x-(\sin^2 x+\cos^2 x)}{(1+\sin x)^2}$

$=-\dfrac{\sin x+1}{(1+\sin x)^2}$

$=-\dfrac{1}{1+\sin x}$ 답 $y'=-\dfrac{1}{1+\sin x}$

0565 $y=-\dfrac{1}{x^3}=-x^{-3}$이므로

$y'=3x^{-4}=\dfrac{3}{x^4}$ 답 $y'=\dfrac{3}{x^4}$

0566 $y=\dfrac{x^2-6}{x^4}=\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{6}{x^4}=x^{-2}-6x^{-4}$이므로

$y'=-2x^{-3}+24x^{-5}=-\dfrac{2}{x^3}+\dfrac{24}{x^5}$ 답 $y'=-\dfrac{2}{x^3}+\dfrac{24}{x^5}$

0567 답 $y'=\sec x\tan x+\sqrt{3}\csc x\cot x$

0568 답 $y'=2\sec^2 x+\csc^2 x$

0569 $y'=(\sin x)'\tan x+\sin x(\tan x)'$

$=\underline{\cos x\tan x}+\sin x\sec^2 x$ $\quad \cos x\cdot\dfrac{\sin x}{\cos x}=\sin x$

$=\sin x+\sin x\sec^2 x$

$=\sin x(1+\sec^2 x)$ 답 $y'=\sin x(1+\sec^2 x)$

0570 $y'=(x)'\cot x+x(\cot x)'$

$=\cot x-x\csc^2 x$ 답 $y'=\cot x-x\csc^2 x$

0571 $y'=5(2x+1)^4(2x+1)'=5(2x+1)^4\cdot 2$

$=10(2x+1)^4$ 답 $y'=10(2x+1)^4$

0572 $y'=(x^2-1)'(x+3)^2+(x^2-1)\{(x+3)^2\}'$

$=2x(x+3)^2+(x^2-1)\cdot 2(x+3)(x+3)'$

$=2x(x+3)^2+2(x^2-1)(x+3)\cdot 1$

$=2(x+3)\{x(x+3)+x^2-1\}$

$=2(x+3)(2x^2+3x-1)$

답 $y'=2(x+3)(2x^2+3x-1)$

0573 $y=\dfrac{1}{(3-x)^4}=(3-x)^{-4}$이므로

$y'=-4(3-x)^{-5}(3-x)'=-4(3-x)^{-5}\cdot(-1)$

$=\dfrac{4}{(3-x)^5}$ 답 $y'=\dfrac{4}{(3-x)^5}$

0574 $y'=\dfrac{\{(2x-5)^2\}'(x+1)-(2x-5)^2(x+1)'}{(x+1)^2}$

$=\dfrac{2(2x-5)(2x-5)'(x+1)-(2x-5)^2\cdot 1}{(x+1)^2}$

$=\dfrac{2(2x-5)\cdot 2\cdot(x+1)-(2x-5)^2}{(x+1)^2}$

$=\dfrac{(2x-5)\{4(x+1)-(2x-5)\}}{(x+1)^2}$

$=\dfrac{(2x-5)(2x+9)}{(x+1)^2}$

답 $y'=\dfrac{(2x-5)(2x+9)}{(x+1)^2}$

0575 $y'=e^{x^2+3x}(x^2+3x)'=(2x+3)e^{x^2+3x}$

답 $y'=(2x+3)e^{x^2+3x}$

0576 $y'=5^{x^2+1}\cdot\ln 5\cdot(x^2+1)'=5^{x^2+1}\cdot 2x\ln 5$

답 $y'=5^{x^2+1}\cdot 2x\ln 5$

0577 $y'=4\sin^3 x\cdot(\sin x)'=4\sin^3 x\cos x$

답 $y'=4\sin^3 x\cos x$

0578 $y'=\sec(3x+1)\tan(3x+1)\cdot(3x+1)'$

$=3\sec(3x+1)\tan(3x+1)$

답 $y'=3\sec(3x+1)\tan(3x+1)$

0579 $y'=-\sin(\sin x)\cdot(\sin x)'=-\sin(\sin x)\cos x$

답 $y'=-\sin(\sin x)\cos x$

0580 $y'=(x)'\ln|x|+x(\ln|x|)'$

$=\ln|x|+x\cdot\dfrac{1}{x}=\ln|x|+1$ 답 $y'=\ln|x|+1$

0581 $y'=\dfrac{(e^x-1)'}{e^x-1}=\dfrac{e^x}{e^x-1}$ 답 $y'=\dfrac{e^x}{e^x-1}$

0582 $y'=\dfrac{(\cos x)'}{\cos x}=\dfrac{-\sin x}{\cos x}=-\tan x$ 답 $y'=-\tan x$

0583 $y'=\dfrac{(4x+3)'}{(4x+3)\ln 3}=\dfrac{4}{(4x+3)\ln 3}$

답 $y'=\dfrac{4}{(4x+3)\ln 3}$

0584 $y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}=x^{-\frac{2}{3}}$이므로

$y'=-\dfrac{2}{3}x^{-\frac{5}{3}}=-\dfrac{2}{3x\sqrt[3]{x^2}}$

답 $y'=-\dfrac{2}{3x\sqrt[3]{x^2}}$

0585 $y=(1+x^2)\sqrt{x}=\sqrt{x}+x^2\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{5}{2}}$이므로

$y'=\dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}+\dfrac{5}{2}x^{\frac{3}{2}}$

$=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+\dfrac{5}{2}x\sqrt{x}$ 답 $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+\dfrac{5}{2}x\sqrt{x}$

0586 답 $y'=\sqrt{2}x^{\sqrt{2}-1}$

0587 $y'=-ex^{-e-1}=-\dfrac{e}{x^{e+1}}$ 답 $y'=-\dfrac{e}{x^{e+1}}$

0588 $y=\sqrt{3x^2-1}=(3x^2-1)^{\frac{1}{2}}$이므로

$y'=\dfrac{1}{2}(3x^2-1)^{-\frac{1}{2}}(3x^2-1)'=\dfrac{1}{2}(3x^2-1)^{-\frac{1}{2}}\cdot 6x$

$=\dfrac{3x}{\sqrt{3x^2-1}}$ 답 $y'=\dfrac{3x}{\sqrt{3x^2-1}}$

0589 $y=(x^2-1)\sqrt{x-2}=(x^2-1)(x-2)^{\frac{1}{2}}$이므로

$y'=(x^2-1)'(x-2)^{\frac{1}{2}}+(x^2-1)\{(x-2)^{\frac{1}{2}}\}'$

$=2x(x-2)^{\frac{1}{2}}+(x^2-1)\cdot\dfrac{1}{2}(x-2)^{-\frac{1}{2}}(x-2)'$

$=2x(x-2)^{\frac{1}{2}}+(x^2-1)\cdot\dfrac{1}{2}(x-2)^{-\frac{1}{2}}\cdot 1$

$=2x\sqrt{x-2}+\dfrac{x^2-1}{2\sqrt{x-2}}=\dfrac{4x(x-2)+x^2-1}{2\sqrt{x-2}}$

$=\dfrac{5x^2-8x-1}{2\sqrt{x-2}}$ 답 $y'=\dfrac{5x^2-8x-1}{2\sqrt{x-2}}$

0590 $y=\dfrac{5x^2}{\sqrt{2x+1}}=5x^2(2x+1)^{-\frac{1}{2}}$이므로

$y'=(5x^2)'(2x+1)^{-\frac{1}{2}}+5x^2\{(2x+1)^{-\frac{1}{2}}\}'$

$=10x(2x+1)^{-\frac{1}{2}}+5x^2\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)\cdot(2x+1)^{-\frac{3}{2}}(2x+1)'$

$=10x(2x+1)^{-\frac{1}{2}}+5x^2\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)\cdot(2x+1)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2$

$=\dfrac{10x}{\sqrt{2x+1}}-\dfrac{5x^2}{(2x+1)\sqrt{2x+1}}$

$=\dfrac{10x(2x+1)-5x^2}{(2x+1)\sqrt{2x+1}}=\dfrac{15x^2+10x}{(2x+1)\sqrt{2x+1}}$

$=\dfrac{5x(3x+2)}{(2x+1)\sqrt{2x+1}}$ 답 $y'=\dfrac{5x(3x+2)}{(2x+1)\sqrt{2x+1}}$

다른 풀이 $y'=\dfrac{(5x^2)'\sqrt{2x+1}-5x^2(\sqrt{2x+1})'}{(\sqrt{2x+1})^2}$ $\sqrt{2x+1}=(2x+1)^{\frac{1}{2}}$

$=\dfrac{10x\sqrt{2x+1}-5x^2\cdot\dfrac{1}{2}(2x+1)^{-\frac{1}{2}}(2x+1)'}{2x+1}$

$=\dfrac{10x\sqrt{2x+1}-\dfrac{5x^2}{\sqrt{2x+1}}}{2x+1}=\dfrac{10x(2x+1)-5x^2}{(2x+1)\sqrt{2x+1}}$

$=\dfrac{5x(3x+2)}{(2x+1)\sqrt{2x+1}}$

0591 $\dfrac{dx}{dt}=1$, $\dfrac{dy}{dt}=2t$이므로

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{2t}{1}=2t$ 답 $\dfrac{dy}{dx}=2t$

0592 $\dfrac{dx}{dt}=-\dfrac{1}{t^2}$, $\dfrac{dy}{dt}=3t^2$이므로

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{3t^2}{-\frac{1}{t^2}}=-3t^4$ 답 $\dfrac{dy}{dx}=-3t^4$

0593 $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{2\sqrt{t}}$, $\dfrac{dy}{dt}=2(2t+1)\cdot 2=4(2t+1)$이므로

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{4(2t+1)}{\frac{1}{2\sqrt{t}}}=8\sqrt{t}(2t+1)$

답 $\dfrac{dy}{dx}=8\sqrt{t}(2t+1)$

0594 $\frac{dx}{d\theta}=-\sin\theta$, $\frac{dy}{d\theta}=\cos\theta$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\frac{\cos\theta}{-\sin\theta}=-\cot\theta$$

답 $\frac{dy}{dx}=-\cot\theta$

0595 $\frac{dx}{d\theta}=3\sec^2\theta$, $\frac{dy}{d\theta}=2\sec\theta\tan\theta$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\frac{2\sec\theta\tan\theta}{3\sec^2\theta}=\frac{2\tan\theta}{\underbrace{3\sec\theta}_{\frac{2}{3}\cdot\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\cdot\cos\theta=\frac{2}{3}\sin\theta}}=\frac{2}{3}\sin\theta$$

답 $\frac{dy}{dx}=\frac{2}{3}\sin\theta$

0596 $(x-1)^2+(y+2)^2=1$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$2(x-1)+2(y+2)\frac{dy}{dx}=0$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=-\frac{x-1}{y+2}\ (y\neq-2)$$

답 $\frac{dy}{dx}=-\frac{x-1}{y+2}\ (y\neq-2)$

0597 $\overbrace{xy}^{(xy)'=(x)'y+x(y)'}=5$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$y+x\frac{dy}{dx}=0 \qquad \therefore \frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x}$$

답 $\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x}$

0598 $x^3-y^2+2xy-3=0$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$3x^2-2y\frac{dy}{dx}+2y+2x\frac{dy}{dx}=0$$

$$(2x-2y)\frac{dy}{dx}=-3x^2-2y$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=-\frac{3x^2+2y}{2x-2y}\ \underbrace{(x\neq y)}_{2x-2y\neq0\text{에서 } x\neq y}$$

답 $\frac{dy}{dx}=-\frac{3x^2+2y}{2x-2y}\ (x\neq y)$

0599 $\sin x+\sin y=1$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$\cos x+\cos y\frac{dy}{dx}=0 \qquad \therefore \frac{dy}{dx}=-\frac{\cos x}{\cos y}\ (\cos y\neq0)$$

답 $\frac{dy}{dx}=-\frac{\cos x}{\cos y}\ (\cos y\neq0)$

0600 $\underbrace{\frac{x}{y}-\frac{y}{x}}_{x\cdot\frac{1}{y}-y\cdot\frac{1}{x}=2}=2$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{1}{y}-\frac{x}{y^2}\cdot\frac{dy}{dx}-\left(\frac{1}{x}\cdot\frac{dy}{dx}-\frac{y}{x^2}\right)=0$$

$$\left(\frac{1}{x}+\frac{x}{y^2}\right)\frac{dy}{dx}=\frac{1}{y}+\frac{y}{x^2}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{x^2+y^2}{x^2y}}{\frac{x^2+y^2}{xy^2}}=\frac{y}{x}$$

답 $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}$

0601 $\ln|y|=x^3$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx}=3x^2 \qquad \therefore \frac{dy}{dx}=3x^2y$$

답 $\frac{dy}{dx}=3x^2y$

0602 $x=y^3$의 양변을 y에 대하여 미분하면 $\frac{dx}{dy}=3y^2$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{3y^2}$$

답 $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{3y^2}$

참고 $x=y^3$에서 $y=\sqrt[3]{x}$이므로 $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{3y^2}=\frac{1}{3(\sqrt[3]{x})^2}=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$로 나타낼 수도 있다.

0603 $y=\sqrt[4]{x+1}$에서 $x=y^4-1$이므로 양변을 y에 대하여 미분하면 $\frac{dx}{dy}=4y^3$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{4y^3}$$

답 $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{4y^3}$

0604 (1) $g(-2)=a$라 하면 $f(a)=-2$

즉 $a^3-1=-2$이므로

$a^3+1=0$, $(a+1)(a^2-a+1)=0$

$\therefore a=-1\ (\because a^2-a+1>0)$

따라서 $g(-2)=-1$이고, $f'(x)=3x^2$에서 $f'(-1)=3$이므로

$$g'(-2)=\frac{1}{f'(-1)}=\frac{1}{3}$$

(2) $g(7)=a$라 하면 $f(a)=7$

즉 $a^3-1=7$이므로

$a^3-8=0$, $(a-2)(a^2+2a+4)=0$

$\therefore a=2\ (\because a^2+2a+4>0)$

따라서 $g(7)=2$이고, $f'(x)=3x^2$에서 $f'(2)=12$이므로

$$g'(7)=\frac{1}{f'(2)}=\frac{1}{12}$$

답 (1) $\frac{1}{3}$ (2) $\frac{1}{12}$

0605 (1) $g(1)=a$라 하면 $f(a)=1$

즉 $\tan a=1$이므로 $a=\frac{\pi}{4}\ \left(\because 0<a<\frac{\pi}{2}\right)$

따라서 $g(1)=\frac{\pi}{4}$이고, $f'(x)=\sec^2x$에서

$f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=(\sqrt{2})^2=2$이므로

$$g'(1)=\frac{1}{f'\left(\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{1}{2}$$

(2) $g\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=a$라 하면 $f(a)=\frac{1}{\sqrt{3}}$

즉 $\tan a=\frac{1}{\sqrt{3}}$이므로 $a=\frac{\pi}{6}\ \left(\because 0<a<\frac{\pi}{2}\right)$

따라서 $g\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{\pi}{6}$이고, $f'(x)=\sec^2x$에서

$f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2=\frac{4}{3}$이므로

$$g'\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{1}{f'\left(\frac{\pi}{6}\right)}=\frac{1}{\frac{4}{3}}=\frac{3}{4}$$

답 (1) $\frac{1}{2}$ (2) $\frac{3}{4}$

0606 $y'=4x^3-9x^2+5$이므로

$y''=12x^2-18x$

답 $y''=12x^2-18x$

0607 $y'=-\dfrac{(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}=\dfrac{-2x}{(x^2+1)^2}$이므로

$$y''=\dfrac{-2(x^2+1)^2-(-2x)\cdot 2(x^2+1)(x^2+1)'}{(x^2+1)^4}$$
$$=\dfrac{-2(x^2+1)^2+8x^2(x^2+1)}{(x^2+1)^4}$$
$$=\dfrac{2(x^2+1)(-x^2-1+4x^2)}{(x^2+1)^4}$$
$$=\dfrac{2(x^2+1)(3x^2-1)}{(x^2+1)^4}$$
$$=\dfrac{2(3x^2-1)}{(x^2+1)^3}$$

답 $y''=\dfrac{2(3x^2-1)}{(x^2+1)^3}$

0608 $y'=\dfrac{1}{2}(x-1)^{-\frac{1}{2}}$이므로

$$y''=\dfrac{1}{2}\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)(x-1)^{-\frac{3}{2}}=-\dfrac{1}{4(x-1)\sqrt{x-1}}$$

답 $y''=-\dfrac{1}{4(x-1)\sqrt{x-1}}$

0609 $y'=e^{-3x}(-3x)'=-3e^{-3x}$이므로

$y''=-3e^{-3x}(-3x)'=9e^{-3x}$

답 $y''=9e^{-3x}$

0610 $y'=\cos 2x\cdot(2x)'=2\cos 2x$이므로

$y''=2(-\sin 2x)(2x)'=-4\sin 2x$

답 $y''=-4\sin 2x$

0611 $y'=e^x\ln x+e^x\cdot\dfrac{1}{x}=e^x\left(\ln x+\dfrac{1}{x}\right)$이므로

$$y''=e^x\left(\ln x+\dfrac{1}{x}\right)+e^x\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$$
$$=e^x\left(\ln x+\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$$

답 $y''=e^x\left(\ln x+\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$

유형 01 함수의 몫의 미분법; $\dfrac{1}{g(x)}$ 꼴

본책 94쪽

함수 $g(x)$ $(g(x)\neq 0)$가 미분가능할 때

$$\left\{\dfrac{1}{g(x)}\right\}'=-\dfrac{g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

0612 $\displaystyle\lim_{h\to 0}\dfrac{f(2h)-f(-3h)}{h}$

$$=\lim_{h\to 0}\dfrac{\{f(2h)-f(0)\}-\{f(-3h)-f(0)\}}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(2h)-f(0)}{2h}\cdot 2+\lim_{h\to 0}\dfrac{f(-3h)-f(0)}{-3h}\cdot 3$$
$$=2f'(0)+3f'(0)=5f'(0)$$

이때 $f'(x)=\dfrac{1}{(x-1)^2}$이므로

$5f'(0)=5\cdot 1=5$

답 ⑤

0613 $f'(x)=-\dfrac{-\sin x}{(1+\cos x)^2}=\dfrac{\sin x}{(1+\cos x)^2}$이므로

$$f'\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{\left(1+\dfrac{1}{2}\right)^2}=\dfrac{2\sqrt{3}}{9},\ f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1$$

$$\therefore f'\left(\dfrac{\pi}{3}\right)f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$$

답 $\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$

0614 $g'(x)=\dfrac{f(x)+xf'(x)}{\{1-xf(x)\}^2}$이므로

$$g'(0)=\dfrac{f(0)+0\cdot f'(0)}{\{1-0\cdot f(0)\}^2}=f(0)=4$$

답 4

유형 02 함수의 몫의 미분법; $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 꼴

본책 94쪽

두 함수 $f(x)$, $g(x)(g(x)\neq 0)$가 미분가능할 때

$$\left\{\dfrac{f(x)}{g(x)}\right\}'=\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

0615 $f'(x)=\dfrac{(2ax-b)(x-3)-(ax^2-bx+3)\cdot 1}{(x-3)^2}$

$$=\dfrac{ax^2-6ax+3b-3}{(x-3)^2}$$

$f'(0)=2$에서 $\quad\dfrac{3b-3}{9}=2$

$3b-3=18 \quad \therefore b=7$

$f'(2)=-6$에서 $\quad 4a-12a+3b-3=-6$

$-8a+18=-6 \quad \therefore a=3$

$\therefore a-b=-4$

답 -4

0616 $\displaystyle\lim_{h\to 0}\dfrac{f(1-h)-f(1+5h)}{h}$

$$=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(1-h)-f(1)-\{f(1+5h)-f(1)\}}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(1-h)-f(1)}{-h}\cdot(-1)-\lim_{h\to 0}\dfrac{f(1+5h)-f(1)}{5h}\cdot 5$$
$$=-f'(1)-5f'(1)=-6f'(1)$$

이때

$$f'(x)=\dfrac{\dfrac{1}{x\ln 2}\cdot x-\log_2 x}{x^2}=\dfrac{\dfrac{1}{\ln 2}-\log_2 x}{x^2}$$

이므로 $\quad -6f'(1)=-6\cdot\dfrac{1}{\ln 2}=-\dfrac{6}{\ln 2}$

답 ③

0617 $f'(x)=\dfrac{1\cdot(x^2+5)-(x+2)\cdot 2x}{(x^2+5)^2}=\dfrac{-x^2-4x+5}{(x^2+5)^2}$

$(x^2+5)^2>0$이므로 $f'(x)\geq 0$이려면

$-x^2-4x+5\geq 0, \quad x^2+4x-5\leq 0$

$(x+5)(x-1)\leq 0 \quad \therefore -5\leq x\leq 1$

따라서 $f'(x)\geq 0$을 만족시키는 정수 x는 $-5, -4, -3, \cdots, 1$의 7개이다.

답 7

0618 $g(x)=\dfrac{f(x)}{e^{x+1}}=\dfrac{f(x)}{e\cdot e^{x}}$이므로

$$g'(x)=\dfrac{f'(x)(e\cdot e^{x})-f(x)\overbrace{(e\cdot e^{x})}^{(e\cdot e^x)'=e\cdot e^x}}{(e\cdot e^{x})^2}$$

$$=\dfrac{f'(x)-f(x)}{e^{x+1}}$$

$\therefore g'(-1)=f'(-1)-f(-1)$ ...... ㉠

한편 $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{f(x)-4}{x+1}=7$에서 $x\to-1$일 때 (분모) $\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to0$이다.

즉 $\lim\limits_{x\to-1}\{f(x)-4\}=0$이므로 $f(-1)=4$

$\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{f(x)-4}{x+1}=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=f'(-1)$이므로

$f'(-1)=7$

따라서 ㉠에서

$g'(-1)=7-4=3$ 답 ③

0619 $g(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}f_k(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n=\underbrace{x+x^2+x^3+\cdots}_{\text{첫째항이 }x,\text{ 공비가 }x\text{인 등비급수}}$

$=\dfrac{x}{1-x}\ (\because 0<x<1)$ ··· ❶

$\therefore g'(x)=\dfrac{1\cdot(1-x)-x\cdot(-1)}{(1-x)^2}=\dfrac{1}{(1-x)^2}$ ··· ❷

$\therefore g'\left(\dfrac{2}{3}\right)=\dfrac{1}{\left(1-\dfrac{2}{3}\right)^2}=9$ ··· ❸

답 9

채점 기준	비율
❶ $g(x)$를 구할 수 있다.	40 %
❷ $g'(x)$를 구할 수 있다.	40 %
❸ $g'\left(\dfrac{2}{3}\right)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

유형 03 $y=x^n$ (n은 정수)의 도함수 본책 95쪽

n이 정수일 때, $y=x^n$이면 $y'=nx^{n-1}$

0620 $f(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{3}{x^3}+\cdots+\dfrac{10}{x^{10}}$

$=x^{-1}+2x^{-2}+3x^{-3}+\cdots+10x^{-10}$

이므로

$f'(x)=-x^{-2}-2^2x^{-3}-3^2x^{-4}-\cdots-10^2x^{-11}$

$\therefore f'(1)=-1-2^2-3^2-\cdots-10^2$

$=-(1^2+2^2+3^2+\cdots+10^2)$

$=-\sum\limits_{k=1}^{10}k^2=-\dfrac{10\cdot11\cdot21}{6}$

$=-385$ 답 -385

SSEN 특강 자연수의 거듭제곱의 합

① $\sum\limits_{k=1}^{n}k=\dfrac{n(n+1)}{2}$ ② $\sum\limits_{k=1}^{n}k^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

③ $\sum\limits_{k=1}^{n}k^3=\left\{\dfrac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

0621 $y=\dfrac{2x^5-3x^3-1}{x^3}=2x^2-3-x^{-3}$이므로

$\dfrac{dy}{dx}=4x-(-3)x^{-4}=4x+\dfrac{3}{x^4}$ 답 ④

0622 $f(x)=\dfrac{ae^x}{x^4}=ax^{-4}e^x$이므로

$f'(x)=-4ax^{-5}e^x+ax^{-4}e^x$

$=ax^{-4}e^x(-4x^{-1}+1)$

$f'(2)=-e^2$에서

$\dfrac{a}{16}e^2\cdot(-1)=-e^2$ $\therefore a=16$ 답 ④

유형 04 삼각함수의 도함수 본책 95쪽

① $(\sin x)'=\cos x$ ② $(\cos x)'=-\sin x$
③ $(\tan x)'=\sec^2 x$ ④ $(\sec x)'=\sec x\tan x$
⑤ $(\csc x)'=-\csc x\cot x$ ⑥ $(\cot x)'=-\csc^2 x$

0623 $f'(x)=-\csc x\cot x\cdot\cot x+\csc x\cdot(-\csc^2 x)$

$=-\csc x(\cot^2 x+\csc^2 x)$

$\therefore f'\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=-2\cdot\{(\sqrt{3})^2+2^2\}=-14$ 답 -14

0624 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 미분가능하면 $x=0$에서 연속이므로

$\lim\limits_{x\to0+}f(x)=\lim\limits_{x\to0-}f(x)=f(0)$

$\lim\limits_{x\to0+}(2e^x+ax+b)=\lim\limits_{x\to0-}\tan x=2+b$

즉 $2+b=0$이므로 $b=-2$ ··· ❶

또 $f'(0)$이 존재하므로 $f'(x)=\begin{cases}2e^x+a & (x>0)\\ \sec^2 x & (x<0)\end{cases}$에서

$\lim\limits_{x\to0+}(2e^x+a)=\lim\limits_{x\to0-}\sec^2 x$

$2+a=1$ $\therefore a=-1$ ··· ❷

$\therefore ab=2$ ··· ❸

답 2

채점 기준	비율
❶ b의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷ a의 값을 구할 수 있다.	60 %
❸ ab의 값을 구할 수 있다.	10 %

SSEN 특강 구간에 따라 다르게 정의된 함수의 미분가능성

두 함수 $g(x)$, $h(x)$에 대하여 함수 $f(x)=\begin{cases}g(x) & (x\ge a)\\ h(x) & (x<a)\end{cases}$가 $x=a$에서 미분가능하면

① 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이다.

⇒ $\lim\limits_{x\to a+}f(x)=\lim\limits_{x\to a-}f(x)=f(a)$, 즉 $\lim\limits_{x\to a-}h(x)=g(a)$

② $x=a$에서 함수 $f(x)$의 미분계수가 존재한다.

⇒ $\lim\limits_{x\to a+}\dfrac{g(x)-g(a)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a-}\dfrac{h(x)-h(a)}{x-a}$,
즉 $g'(a)=h'(a)$

0625 $f(x)=\dfrac{1+\sec x}{\tan x}=\dfrac{1}{\tan x}+\dfrac{\sec x}{\tan x}=\cot x+\csc x$

이므로

$$f'(x)=-\csc^2 x-\csc x\cot x$$
$$=-\csc x(\csc x+\cot x)$$

따라서 구하는 기울기는

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)=-2-\sqrt{2}$$

답 ①

다른 풀이 $f'(x)=\dfrac{\sec x\tan^2 x-(1+\sec x)\sec^2 x}{\tan^2 x}$

$$=\frac{\sec x(\tan^2 x-\sec x-\sec^2 x)}{\tan^2 x}$$

$1+\tan^2 x=\sec^2 x$ 이므로 $\tan^2 x-\sec^2 x=-1$

$$=\frac{-\sec x(1+\sec x)}{\tan^2 x}$$

따라서 구하는 기울기는

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}(1+\sqrt{2})=-2-\sqrt{2}$$

유형 05 합성함수의 미분법

본책 95쪽

두 함수 $y=f(u)$, $u=g(x)$가 미분가능할 때, 합성함수 $y=f(g(x))$의 도함수는

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} \text{ 또는 } y'=f'(g(x))g'(x)$$

0626 $f(1)=1$이므로

$$\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-1}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=f'(1)$$

이때

$$f'(x)=3\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)^2\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)'$$
$$=3\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)^2\cdot\frac{2(x^2+1)-2x\cdot2x}{(x^2+1)^2}$$
$$=3\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)^2\cdot\frac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2}$$
$$=\frac{-24x^2(x^2-1)}{(x^2+1)^4}$$

이므로 $f'(1)=0$

답 ④

0627 $f'(x)=4(4x^2+ax-1)^3(4x^2+ax-1)'$

$=4(4x^2+ax-1)^3(8x+a)$ ⋯ ❶

$f'(0)=-20$에서 $4\cdot(-1)^3\cdot a=-20$

$\therefore a=5$ ⋯ ❷

따라서 $f'(x)=4(4x^2+5x-1)^3(8x+5)$이므로

$f'(-1)=4\cdot(-2)^3\cdot(-3)=96$ ⋯ ❸

답 96

채점 기준	비율
❶ $f'(x)$를 구할 수 있다.	50 %
❷ a의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ $f'(-1)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0628 $r=2t+1$이므로 $S=4\pi(2t+1)^2$

양변을 t에 대하여 미분하면

$$\frac{dS}{dt}=4\pi\cdot2(2t+1)(2t+1)'=16\pi(2t+1)$$

따라서 $t=4$일 때의 $\dfrac{dS}{dt}$의 값은

$16\pi\cdot9=144\pi$

답 144π

유형 06 합성함수의 미분법; $(f\circ g)(x)$ 꼴

본책 96쪽

함수 $h(x)=(f\circ g)(x)=f(g(x))$의 $x=a$에서의 미분계수는

$$h'(a)=f'(g(a))g'(a)$$

이므로 주어진 조건에서 $g(a)$, $g'(a)$, $f'(g(a))$의 값을 찾아 대입하여 구한다.

0629 $\displaystyle\lim_{x\to-1}\frac{f(x)+1}{x+1}=3$에서 $x\to-1$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이다.

즉 $\displaystyle\lim_{x\to-1}\{f(x)+1\}=0$이므로 $f(-1)=-1$

$\displaystyle\lim_{x\to-1}\frac{f(x)+1}{x+1}=\lim_{x\to-1}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=f'(-1)$이므로

$f'(-1)=3$

$\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{g(x)+1}{x-1}=2$에서 $x\to1$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이다.

즉 $\displaystyle\lim_{x\to1}\{g(x)+1\}=0$이므로 $g(1)=-1$

$\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{g(x)+1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=g'(1)$이므로 $g'(1)=2$

$y=(f\circ g)(x)=f(g(x))$에서 $y'=f'(g(x))g'(x)$이므로

$x=1$에서의 미분계수는

$f'(g(1))g'(1)=f'(-1)g'(1)=3\cdot2=6$

답 6

0630 $h(x)=(f\circ g)(x)=f(g(x))$에서

$h'(x)=f'(g(x))g'(x)$

$\therefore h'(2)=f'(g(2))g'(2)$ $g(2)=8-12+4=0$

$=f'(0)g'(2)$ ⋯⋯ ㉠

$f'(x)=\dfrac{3(x^2+1)-3x\cdot2x}{(x^2+1)^2}=\dfrac{-3x^2+3}{(x^2+1)^2}$이므로

$f'(0)=3$

또 $g'(x)=3x^2-6$이므로 $g'(2)=12-6=6$

따라서 ㉠에서 $h'(2)=3\cdot6=18$

답 ③

0631 $h(x)=f(g(x))$라 하면

$h(1)=f(g(1))=f(1)=2$

$\therefore \displaystyle\lim_{x\to1}\frac{f(g(x))-2}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{h(x)-h(1)}{x-1}=h'(1)$

$h'(x)=f'(g(x))g'(x)$이므로

$h'(1)=f'(g(1))g'(1)=f'(1)g'(1)$

$=3\cdot4=12$

답 12

0632 $f(g(x))=x^3+4x^2$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(g(x))g'(x)=3x^2+8x$ ⋯⋯ ㉠

$g(x)=5$에서 $x^3-3=5$

$x^3=8$ $\therefore x=2$

$f'(5)$의 값을 구해야 하므로 $g(x)=5$를 만족시키는 x의 값을 구한다.

$x=2$를 ㉠에 대입하면

$f'(g(2))g'(2)=12+16$

$\therefore f'(5)g'(2)=28$

$g'(x)=3x^2$이므로 $\quad g'(2)=12$

따라서 $f'(5)\cdot 12=28$이므로

$f'(5)=\frac{7}{3}$ 답 ④

0633 $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)+1}{x-2}=5$에서 $x\to 2$일 때 (분모) $\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to 0$이다.

즉 $\lim_{x\to 2}\{f(x)+1\}=0$이므로

$f(2)=-1$

$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)+1}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)$이므로

$f'(2)=5$ ⋯ ❶

$\lim_{x\to 2}\frac{h(x)-3}{x-2}=15$에서 $x\to 2$일 때 (분모) $\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to 0$이다.

즉 $\lim_{x\to 2}\{h(x)-3\}=0$이므로 $\quad h(2)=3$

$\lim_{x\to 2}\frac{h(x)-3}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{h(x)-h(2)}{x-2}=h'(2)$이므로

$h'(2)=15$ ⋯ ❷

$h(x)=(g\circ f)(x)=g(f(x))$에서

$h(2)=g(f(2))=g(-1)$

이므로 $\quad g(-1)=3$

또 $h'(x)=g'(f(x))f'(x)$이므로

$h'(2)=g'(f(2))f'(2)$

$15=g'(-1)\cdot 5 \quad \therefore g'(-1)=3$ ⋯ ❸

$\therefore g(-1)+g'(-1)=6$ ⋯ ❹

답 6

채점 기준	비율
❶ $f(2)$, $f'(2)$의 값을 구할 수 있다.	25 %
❷ $h(2)$, $h'(2)$의 값을 구할 수 있다.	25 %
❸ $g(-1)$, $g'(-1)$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❹ $g(-1)+g'(-1)$의 값을 구할 수 있다.	10 %

유형 07 합성함수의 미분법; 지수함수, 삼각함수

본책 96쪽

① $\{e^{f(x)}\}'=e^{f(x)}f'(x)$

② $\{\sin f(x)\}'=\cos f(x)\cdot f'(x)$

$\{\cos f(x)\}'=-\sin f(x)\cdot f'(x)$

③ $\{\sin^n f(x)\}'=n\sin^{n-1}f(x)\cdot\cos f(x)\cdot f'(x)$

$\{\cos^n f(x)\}'=n\cos^{n-1}f(x)\cdot\{-\sin f(x)\}\cdot f'(x)$

0634 $h(x)=g(f(x))$라 하면 $\quad h(x)=e^{\sin\frac{x}{2}}$

$\therefore h\left(\frac{\pi}{3}\right)=e^{\sin\frac{\pi}{6}}=\sqrt{e}$

$\therefore \lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{g(f(x))-\sqrt{e}}{x-\frac{\pi}{3}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{h(x)-h\left(\frac{\pi}{3}\right)}{x-\frac{\pi}{3}}=h'\left(\frac{\pi}{3}\right)$

$h'(x)=e^{\sin\frac{x}{2}}\cdot\cos\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{2}$이므로

$h'\left(\frac{\pi}{3}\right)=e^{\sin\frac{\pi}{6}}\cdot\cos\frac{\pi}{6}\cdot\frac{1}{2}$

$=\sqrt{e}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3e}}{4}$ 답 $\frac{\sqrt{3e}}{4}$

0635 $g'(x)=\frac{f'(x)\cdot(e^x+2)^3-f(x)\cdot 3(e^x+2)^2e^x}{(e^x+2)^6}$

$=\frac{(e^x+2)f'(x)-3e^xf(x)}{(e^x+2)^4}$

$\therefore g'(0)=\frac{3f'(0)-3f(0)}{3^4}=\frac{f'(0)-f(0)}{27}$

$=\frac{3}{27}=\frac{1}{9}$ 답 ⑤

0636 $f(x)=\cos^2(4x+\pi)=(\underline{-\cos 4x})^2=\cos^2 4x$이므로

$\cos(4x+\pi)=-\cos 4x$

$f'(x)=2\cos 4x\cdot(-\sin 4x)\cdot 4$

$=-8\sin 4x\cos 4x$

$\therefore f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=-8\cdot\sin\frac{2}{3}\pi\cdot\cos\frac{2}{3}\pi$

$=-8\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=2\sqrt{3}$ 답 ⑤

0637 $f(x)=\frac{e^{3x}}{1-\sin 2x}$에서 $\quad f(0)=1$ ⋯ ❶

$f'(x)=\frac{3e^{3x}(1-\sin 2x)-e^{3x}(-2\cos 2x)}{(1-\sin 2x)^2}$

$=\frac{e^{3x}(3-3\sin 2x+2\cos 2x)}{(1-\sin 2x)^2}$

이므로 $\quad f'(0)=\frac{3+2}{1^2}=5$ ⋯ ❷

$\therefore f(0)+f'(0)=6$ ⋯ ❸

답 6

채점 기준	비율
❶ $f(0)$의 값을 구할 수 있다.	20 %
❷ $f'(0)$의 값을 구할 수 있다.	60 %
❸ $f(0)+f'(0)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0638 $f'(x)=6\cos(2x+\alpha)-2\sin(2x+\alpha)$이므로

$f'\left(\frac{\pi}{8}\right)=0$에서

$6\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=0$

$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}=3, \quad \tan\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=3$

$\frac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan\alpha}{1-\tan\frac{\pi}{4}\tan\alpha}=3, \quad \frac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha}=3$

$1+\tan\alpha=3-3\tan\alpha, \quad 4\tan\alpha=2$

$\therefore \tan\alpha=\frac{1}{2}$ 답 $\frac{1}{2}$

유형 08 합성함수의 미분법; $f(ax+b)$ 꼴

본책 97쪽

함수 $y=f(ax+b)$에 대하여
$y'=af'(ax+b)$

0639 $f(2x-1)=x^2-x+3$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$2f'(2x-1)=2x-1$$

$$\therefore f'(2x-1)=x-\frac{1}{2}$$

$2x-1=5$에서 $x=3$이므로 위의 식의 양변에 $x=3$을 대입하면

$$f'(5)=\frac{5}{2}$$

답 $\frac{5}{2}$

0640 $f(2-x)=f(2+x)$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$-f'(2-x)=f'(2+x) \quad \cdots❶$$

양변에 $x=1$을 대입하면 ┌양변에 $x=-1$을 대입할 수도 있다.

$$-f'(1)=f'(3) \qquad \therefore f'(3)=-4 \quad \cdots❷$$

답 -4

채점 기준	비율
❶ 주어진 등식의 양변을 미분할 수 있다.	50 %
❷ $f'(3)$의 값을 구할 수 있다.	50 %

0641 $f(3x+5)=e^{x^2+1}$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$3f'(3x+5)=2xe^{x^2+1}$$

$$\therefore f'(3x+5)=\frac{2}{3}xe^{x^2+1}$$

$3x+5=-4$에서 $x=-3$이므로 위의 식의 양변에 $x=-3$을 대입하면

$$f'(-4)=-2e^{10}$$

답 ②

유형 09 로그함수의 도함수

본책 97쪽

① $(\ln|x|)'=\frac{1}{x}$

② $(\log_a|x|)'=\frac{1}{x\ln a}$ (단, $a>0$, $a\neq1$)

③ $\{\ln|f(x)|\}'=\frac{f'(x)}{f(x)}$
(단, $f(x)\neq0$이고 $f(x)$는 미분가능하다.)

0642 $f(x)=\ln\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}=\frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin x}{1-\sin x}$

$$=\frac{1}{2}\{\ln(1+\sin x)-\ln(1-\sin x)\}$$

이므로

$$f'(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{\cos x}{1+\sin x}-\frac{-\cos x}{1-\sin x}\right)$$

$$=\frac{\cos x(1-\sin x)+\cos x(1+\sin x)}{2(1-\sin^2 x)}$$

$$=\frac{2\cos x}{2\cos^2 x}=\frac{1}{\cos x}$$

따라서 $x=\frac{\pi}{3}$에서의 미분계수는

$$f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2$$

답 ⑤

0643 $f'(x)=\frac{2\tan x\sec^2 x}{\tan^2 x}=\frac{2\sec^2 x}{\tan x}$

$$=\frac{\frac{2}{\cos^2 x}}{\frac{\sin x}{\cos x}}=\frac{2}{\sin x\cos x}=\frac{4}{\sin 2x}$$

따라서 $a=2$, $b=4$이므로 $\quad ab=8$

답 8

0644 $f'(x)=\frac{2x}{x^2-1}$이므로 $\quad f'(n)=\frac{2n}{n^2-1}$

$$\therefore \sum_{n=2}^{\infty}\frac{4f'(n)}{n}$$

$$=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{8}{n^2-1}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{8}{(n-1)(n+1)}$$

$$=4\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=4\lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k+1}\right)$$

$$=4\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$$

$$=4\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=4\cdot\frac{3}{2}=6$$

답 ③

0645 $g(x)=\log_2 f(x)$라 하면

$$\lim_{x\to2}\frac{\log_2 f(x)-1}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{g(x)-1}{x-2}=\frac{4}{\ln 2}$$

$x\longrightarrow2$일 때 (분모) $\longrightarrow0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow0$이다.

즉 $\lim_{x\to2}\{g(x)-1\}=0$이므로 $\quad g(2)=1 \quad \cdots\cdots ㉠$

$\lim_{x\to2}\frac{g(x)-1}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}=g'(2)$이므로

$$g'(2)=\frac{4}{\ln 2} \quad \cdots❶$$

$g'(x)=\frac{f'(x)}{f(x)\ln 2}$이므로 $\quad g'(2)=\frac{f'(2)}{f(2)\ln 2}$

따라서 $\frac{f'(2)}{f(2)\ln 2}=\frac{4}{\ln 2}$이므로

$$f'(2)=4f(2)$$

$g(2)=\log_2 f(2)$에서 $\quad 1=\log_2 f(2)$ ($\because$ ㉠)

$$\therefore f(2)=2$$

$$\therefore f'(2)=4\cdot2=8 \quad \cdots❷$$

답 8

채점 기준	비율
❶ $g(2)$, $g'(2)$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ $f'(2)$의 값을 구할 수 있다.	60 %

유형 10 로그함수의 미분의 활용; $y=\frac{f(x)}{g(x)}$ 꼴

본책 98쪽

(i) 주어진 식의 양변의 절댓값에 자연로그를 취한다.
⇒ $\ln|y|=\ln|f(x)|-\ln|g(x)|$
(ii) (i)의 식의 양변을 x에 대하여 미분한다.
⇒ $\frac{y'}{y}=\frac{f'(x)}{f(x)}-\frac{g'(x)}{g(x)}$
(iii) (ii)의 식을 y'에 대하여 정리한다.

0646 $f(x)=\frac{(x-1)^3}{x^2(x+1)}$의 양변의 절댓값에 자연로그를 취하면

$$\begin{aligned}\ln|f(x)|&=\ln\left|\frac{(x-1)^3}{x^2(x+1)}\right|\\&=\ln|(x-1)^3|-\ln|x^2(x+1)|\\&=3\ln|x-1|-2\ln|x|-\ln|x+1|\end{aligned}$$

양변을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{3}{x-1}-\frac{2}{x}-\frac{1}{x+1}$$

$$\therefore f'(x)=f(x)\left(\frac{3}{x-1}-\frac{2}{x}-\frac{1}{x+1}\right)$$

$f(2)=\frac{1^3}{2^2\cdot 3}=\frac{1}{12}$이므로

$$f'(2)=\frac{1}{12}\left(3-1-\frac{1}{3}\right)=\frac{5}{36}$$

답 ①

다른 풀이 함수의 몫의 미분법을 이용하면

$$\begin{aligned}f'(x)&=\frac{3(x-1)^2\cdot x^2(x+1)-(x-1)^3\{2x(x+1)+x^2\}}{\{x^2(x+1)\}^2}\\&=\frac{x(x-1)^2\{3x(x+1)-(x-1)(3x+2)\}}{x^4(x+1)^2}\\&=\frac{(x-1)^2(4x+2)}{x^3(x+1)^2}\end{aligned}$$

$$\therefore f'(2)=\frac{1^2\cdot 10}{2^3\cdot 3^2}=\frac{5}{36}$$

0647 $f(x)=\frac{(x+2)(x+1)^3}{(x+3)^2}$의 양변의 절댓값에 자연로그를 취하면

$$\begin{aligned}\ln|f(x)|&=\ln\left|\frac{(x+2)(x+1)^3}{(x+3)^2}\right|\\&=\ln|(x+2)(x+1)^3|-\ln|(x+3)^2|\\&=\ln|x+2|+3\ln|x+1|-2\ln|x+3|\end{aligned}$$

양변을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{x+2}+\frac{3}{x+1}-\frac{2}{x+3}$$

$$\therefore f'(x)=f(x)\left(\frac{1}{x+2}+\frac{3}{x+1}-\frac{2}{x+3}\right)$$

따라서 $g(x)=\frac{1}{x+2}+\frac{3}{x+1}-\frac{2}{x+3}$이므로

$$g(1)=\frac{1}{3}+\frac{3}{2}-\frac{1}{2}=\frac{4}{3}$$

답 $\frac{4}{3}$

0648 $f(x)=\frac{x^5(x-1)^4(x-2)^3}{(x-3)^2(x-4)}$의 양변의 절댓값에 자연로그를 취하면

$$\begin{aligned}\ln|f(x)|&=\ln\left|\frac{x^5(x-1)^4(x-2)^3}{(x-3)^2(x-4)}\right|\\&=\ln|x^5(x-1)^4(x-2)^3|-\ln|(x-3)^2(x-4)|\\&=5\ln|x|+4\ln|x-1|+3\ln|x-2|\\&\quad-2\ln|x-3|-\ln|x-4|\end{aligned}$$ ··· ❶

양변을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{5}{x}+\frac{4}{x-1}+\frac{3}{x-2}-\frac{2}{x-3}-\frac{1}{x-4}$$ ··· ❷

$$\therefore \frac{f'(5)}{f(5)}=1+1+1-1-1=1$$ ··· ❸

답 1

채점 기준	비율
❶ 주어진 식을 변형할 수 있다.	50 %
❷ $\frac{f'(x)}{f(x)}$를 구할 수 있다.	30 %
❸ $\frac{f'(5)}{f(5)}$의 값을 구할 수 있다.	20 %

유형 11 로그함수의 미분의 활용; $y=\{f(x)\}^{g(x)}$ 꼴

본책 98쪽

(i) 주어진 식의 양변에 자연로그를 취한다.
⇒ $\ln y=g(x)\ln f(x)$
(ii) (i)의 식의 양변을 x에 대하여 미분한다.
⇒ $\frac{y'}{y}=g'(x)\ln f(x)+g(x)\cdot\frac{f'(x)}{f(x)}$
(iii) (ii)의 식을 y'에 대하여 정리한다.

0649 $y=x^{\ln x}$의 양변에 자연로그를 취하면

$$\begin{aligned}\ln y&=\ln x^{\ln x}\\&=(\ln x)^2\end{aligned}$$

양변을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{y'}{y}=2\ln x\cdot\frac{1}{x}=\frac{2\ln x}{x}$$

$$\therefore y'=y\cdot\frac{2\ln x}{x}=x^{\ln x}\cdot\frac{2\ln x}{x}$$

따라서 $x=e$에서의 미분계수는

$$e\cdot\frac{2}{e}=2$$

답 ④

0650 $f(x)=x^x$의 양변에 자연로그를 취하면

$$\begin{aligned}\ln f(x)&=\ln x^x\\&=x\ln x\end{aligned}$$

양변을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\ln x+x\cdot\frac{1}{x}=\ln x+1$$

$$\begin{aligned}\therefore f'(x)&=f(x)(\ln x+1)\\&=x^x(1+\ln x)\end{aligned}$$

답 ④

0651 $f(\pi)=\pi^0=1$이므로

$$\lim_{x\to\pi}\frac{f(x)-1}{x-\pi}=\lim_{x\to\pi}\frac{f(x)-f(\pi)}{x-\pi}=f'(\pi)$$

$f(x)=x^{\sin x}$의 양변에 자연로그를 취하면

$$\ln f(x)=\ln x^{\sin x}$$
$$=\sin x\ln x$$
양변을 x에 대하여 미분하면
$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\cos x\ln x+\frac{\sin x}{x}$$
따라서 $f'(x)=f(x)\left(\cos x\ln x+\frac{\sin x}{x}\right)$이므로
$$f'(\pi)=1\cdot\left(-1\cdot\ln\pi+\frac{0}{\pi}\right)=-\ln\pi$$
답 $-\ln\pi$

유형 12 $y=x^n$ (n은 실수)의 도함수 본책 99쪽

n이 실수일 때, $y=x^n$이면 $y'=nx^{n-1}$

0652 $f'(x)=6(x-\sqrt{1+2x^2})^5(x-\sqrt{1+2x^2})'$
$$=6(x-\sqrt{1+2x^2})^5\left(1-\frac{4x}{2\sqrt{1+2x^2}}\right)$$
$$=6(x-\sqrt{1+2x^2})^5\left(1-\frac{2x}{\sqrt{1+2x^2}}\right)$$
이므로
$$a=f'(1)=6(1-\sqrt{3})^5\left(1-\frac{2}{\sqrt{3}}\right),$$
$$b=f'(-1)=6(-1-\sqrt{3})^5\left(1+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$$
$$\therefore ab=6(1-\sqrt{3})^5\left(1-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)\cdot6(-1-\sqrt{3})^5\left(1+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$$
$$=36\{\underbrace{(1-\sqrt{3})(-1-\sqrt{3})}_{(-\sqrt{3}+1)(-\sqrt{3}-1)=3-1=2}\}^5\left(1-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)\left(1+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$$
$$=36\cdot2^5\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)$$
$$=-384$$
답 -384

0653 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $(3, f(3))$에서의 접선의 기울기가 6이므로
$$f'(3)=6$$
이때 $y'=f'(\sqrt{x})\cdot(\sqrt{x})'=f'(\sqrt{x})\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}$이므로 함수 $y=f(\sqrt{x})$의 $x=9$에서의 미분계수는
$$f'(\sqrt{9})\cdot\frac{1}{2\sqrt{9}}=f'(3)\cdot\frac{1}{6}=6\cdot\frac{1}{6}=1$$
답 1

0654 $f'(x)=\dfrac{\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\cdot x-(\sqrt{x^2+1}-1)\cdot1}{x^2}$
$$=\frac{\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}-\sqrt{x^2+1}+1}{x^2}=\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^2\sqrt{x^2+1}}$$
$$\therefore \lim_{x\to0}f'(x)=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^2\sqrt{x^2+1}}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{(\sqrt{x^2+1}-1)(\sqrt{x^2+1}+1)}{x^2\sqrt{x^2+1}(\sqrt{x^2+1}+1)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}(\sqrt{x^2+1}+1)}$$
$$=\frac{1}{2}$$
답 ④

0655 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{\tan x+k}}=(\tan x+k)^{-\frac{1}{2}}$이므로
$$f'(x)=-\frac{1}{2}(\tan x+k)^{-\frac{3}{2}}\sec^2x$$
$$=-\frac{\sec^2x}{2(\tan x+k)\sqrt{\tan x+k}} \quad \cdots❶$$
$f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{4}$에서
$$-\frac{(\sqrt{2})^2}{2(1+k)\sqrt{1+k}}=-\frac{\sqrt{2}}{4}$$
$$(1+k)\sqrt{1+k}=2\sqrt{2},\qquad(1+k)^3=8,\qquad1+k=2$$
$$\therefore k=1 \quad \cdots❷$$
답 1

채점 기준	비율
❶ $f'(x)$를 구할 수 있다.	50 %
❷ k의 값을 구할 수 있다.	50 %

유형 13 매개변수로 나타낸 함수의 미분법 본책 99쪽

매개변수로 나타낸 함수 $x=f(t)$, $y=g(t)$가 t에 대하여 미분가능하고 $f'(t)\neq0$일 때
$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{g'(t)}{f'(t)}$$

0656 $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{-(2t^2+1)-(1-t)\cdot4t}{(2t^2+1)^2}=\dfrac{2t^2-4t-1}{(2t^2+1)^2}$,
$\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{3(2t^2+1)-3t\cdot4t}{(2t^2+1)^2}=\dfrac{3-6t^2}{(2t^2+1)^2}$이므로
$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{3-6t^2}{(2t^2+1)^2}}{\frac{2t^2-4t-1}{(2t^2+1)^2}}=\frac{3-6t^2}{2t^2-4t-1}\ (2t^2-4t-1\neq0)$$
$$\therefore \lim_{t\to\infty}\frac{dy}{dx}=\lim_{t\to\infty}\frac{3-6t^2}{2t^2-4t-1}=\frac{-6}{2}=-3$$
답 -3

0657 $\dfrac{dx}{dt}=4t+\cos t$, $\dfrac{dy}{dt}=e^t+a$이므로
$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{e^t+a}{4t+\cos t}\ (4t+\cos t\neq0)$$
$t=0$일 때의 $\dfrac{dy}{dx}$의 값이 5이므로
$$\frac{1+a}{1}=5\qquad\therefore a=4$$
답 ④

0658 $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{2}{t}+1$, $\dfrac{dy}{dt}=-3t^2+12$이므로
$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{-3t^2+12}{\underbrace{\frac{2}{t}+1}_{t>0\text{이므로 }\frac{2}{t}+1\neq0}}=\frac{-3t(t^2-4)}{t+2}$$
$$=\frac{-3t(t+2)(t-2)}{t+2}=-3t(t-2)$$
$$=-3(t^2-2t)=-3(t-1)^2+3$$

따라서 $\frac{dy}{dx}$는 $t>0$일 때 $t=1$에서 최댓값을 가지므로

$a=1$ 답 1

0659 $\frac{dx}{d\theta}=2\sec^2\theta$, $\frac{dy}{d\theta}=3\sec\theta\tan\theta$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\frac{3\sec\theta\tan\theta}{2\sec^2\theta}=\frac{3\tan\theta}{2\sec\theta}=\frac{3}{2}\sin\theta$$

$\frac{3}{2}\sin\theta=\frac{3}{4}$에서 $\sin\theta=\frac{1}{2}$

$\therefore\ \theta=\frac{\pi}{6}$ 또는 $\theta=\frac{5}{6}\pi\ (\because\ 0\le\theta<2\pi)$

$\theta=\frac{5}{6}\pi$일 때 $x<0$, $y<0$이므로 $\theta=\frac{\pi}{6}$

$\therefore\ a=2\tan\frac{\pi}{6}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$, $b=3\sec\frac{\pi}{6}=2\sqrt{3}$

$\therefore\ ab=4$ 답 ④

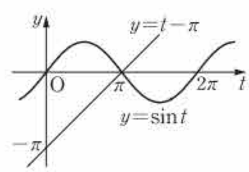
0660 $\lim\limits_{h\to0}\frac{f(\pi+2h)-f(\pi)}{h}=\lim\limits_{h\to0}\frac{f(\pi+2h)-f(\pi)}{2h}\cdot2$

$=2f'(\pi)$ ··· ❶

$\frac{dx}{dt}=1-\cos t$, $\frac{dy}{dt}=1-\sin t$이므로

$$f'(x)=\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{1-\sin t}{1-\cos t}\ (\cos t\neq1)$$ ··· ❷

$x=\pi$를 만족시키는 t의 값은 $t-\sin t=\pi$, 즉 $\sin t=t-\pi$에서 오른쪽 그림의 곡선 $y=\sin t$와 직선 $y=t-\pi$의 교점의 t좌표와 같으므로



$t=\pi$

따라서 구하는 값은

$2f'(\pi)=2\cdot\frac{1}{2}=1$ ··· ❸

답 1

채점 기준	비율
❶ 극한값을 미분계수로 나타낼 수 있다.	30 %
❷ $f'(x)$를 구할 수 있다.	40 %
❸ 극한값을 구할 수 있다.	30 %

유형 14 음함수의 미분법

본책 100쪽

$f(x, y)=0$ 꼴로 주어지면 y를 x의 함수로 보고 각 항을 x에 대하여 미분하여 $\frac{dy}{dx}$를 구한다.

0661 점 $(0, -1)$이 곡선 $x^3-y^3+axy+b=0$ 위의 점이므로

$1+b=0$ $\therefore\ b=-1$

$x^3-y^3+axy-1=0$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$3x^2-3y^2\frac{dy}{dx}+ay+ax\frac{dy}{dx}=0$

$(3y^2-ax)\frac{dy}{dx}=3x^2+ay$

$\therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{3x^2+ay}{3y^2-ax}\ (3y^2-ax\neq0)$

점 $(0, -1)$에서의 접선의 기울기가 2이므로

$-\frac{a}{3}=2$ $\therefore\ a=-6$

$\therefore\ ab=6$ 답 ⑤

0662 $T^2=\frac{2}{5}\pi^2L$의 양변을 L에 대하여 미분하면

$2T\frac{dT}{dL}=\frac{2}{5}\pi^2$

$\therefore\ \frac{dT}{dL}=\frac{\pi^2}{5T}$

$L=40$일 때, $T^2=\frac{2}{5}\pi^2\cdot40=16\pi^2$

$\therefore\ T=4\pi\ (\because\ T>0)$

따라서 $L=40$일 때의 $\frac{dT}{dL}$의 값은

$\frac{\pi^2}{5\cdot4\pi}=\frac{\pi}{20}$ 답 $\frac{\pi}{20}$

0663 $e^{x+y}-e^{x-y}=1$에서

$e^x\cdot e^y-e^x\cdot e^{-y}=1$

양변을 x에 대하여 미분하면

$\left(e^x\cdot e^y+e^x\cdot e^y\frac{dy}{dx}\right)-\left(e^x\cdot e^{-y}-e^x\cdot e^{-y}\frac{dy}{dx}\right)=0$

$e^x(e^y+e^{-y})\frac{dy}{dx}=e^x(e^{-y}-e^y)$

$\therefore\ \frac{dy}{dx}=-\frac{e^y-e^{-y}}{e^y+e^{-y}}\ (\because\ e^x>0)$ 답 $\frac{dy}{dx}=-\frac{e^y-e^{-y}}{e^y+e^{-y}}$

0664 $\frac{\pi}{6}x=y-\underbrace{\cos xy}_{(\cos xy)'=-\sin xy\cdot(xy)'}$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\frac{\pi}{6}=\frac{dy}{dx}+\sin xy\cdot\left(y+x\frac{dy}{dx}\right)$

$x=3$, $y=\frac{\pi}{2}$를 위의 식에 대입하면

$\frac{\pi}{6}=\frac{dy}{dx}+\sin\frac{3}{2}\pi\cdot\left(\frac{\pi}{2}+3\frac{dy}{dx}\right)$

$\frac{\pi}{6}=\frac{dy}{dx}-\frac{\pi}{2}-3\frac{dy}{dx}$, $2\frac{dy}{dx}=-\frac{2}{3}\pi$

$\therefore\ \frac{dy}{dx}=-\frac{\pi}{3}$ 답 ②

0665 점 $(1, 1)$이 곡선 $ax+b\sqrt{y}-6x+3=0$ 위의 점이므로

$a+b-3=0$ $\therefore\ a+b=3$ ······ ㉠ ··· ❶

$ax+b\sqrt{y}-6x+3=0$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$a+\frac{b}{2\sqrt{y}}\cdot\frac{dy}{dx}-6=0$ $\therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{(12-2a)\sqrt{y}}{b}$

점 $(1, 1)$에서의 접선의 기울기가 8이므로

$\frac{12-2a}{b}=8$ $\therefore\ a+4b=6$ ······ ㉡ ··· ❷

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=1$

$\therefore\ a-b=1$ ··· ❸

답 1

채점 기준	비율
❶ 곡선 위의 점의 좌표를 이용하여 a, b 사이의 관계식을 구할 수 있다.	40 %
❷ 곡선 위의 점에서의 접선의 기울기를 이용하여 a, b 사이의 관계식을 구할 수 있다.	40 %
❸ $a-b$의 값을 구할 수 있다.	20 %

유형 15 역함수의 미분법

본책 101쪽

y를 x에 대하여 직접 미분하기 어려운 경우에는 x를 y에 대하여 미분한 후 역함수의 미분법을 이용한다.

➡ $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\frac{dx}{dy}}$ $\left(단,\ \dfrac{dx}{dy}\neq 0\right)$

0666 $x=\cos y$의 양변을 y에 대하여 미분하면

$\dfrac{dx}{dy}=-\sin y \qquad \therefore \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\frac{dx}{dy}}=-\dfrac{1}{\sin y}$

$x=\cos y$에서 $x=\dfrac{1}{2}$일 때 $\qquad y=\dfrac{\pi}{3}\left(\because 0<y<\dfrac{\pi}{2}\right)$

따라서 $x=\dfrac{1}{2}$일 때의 $\dfrac{dy}{dx}$의 값은

$-\dfrac{1}{\sin\frac{\pi}{3}}=-\dfrac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ 답 ①

0667 $x=\sqrt{y^2+1}-2$의 양변을 y에 대하여 미분하면

$\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{2y}{2\sqrt{y^2+1}}=\dfrac{y}{\sqrt{y^2+1}}$

$\therefore \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\frac{dx}{dy}}=\dfrac{\sqrt{y^2+1}}{y}$ 답 ③

0668 $x=\dfrac{3y}{y^2-1}$의 양변을 y에 대하여 미분하면

$\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{3(y^2-1)-3y\cdot 2y}{(y^2-1)^2}=-\dfrac{3(y^2+1)}{(y^2-1)^2}$

$\therefore \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\frac{dx}{dy}}=-\dfrac{(y^2-1)^2}{3(y^2+1)}$

따라서 $y=0$에서의 접선의 기울기는

$-\dfrac{(-1)^2}{3\cdot 1}=-\dfrac{1}{3}$ 답 $-\dfrac{1}{3}$

유형 16 역함수의 미분법의 응용

본책 101쪽

미분가능한 함수 $f(x)$의 역함수가 $g(x)$이고 $g(b)=a$이면

$g'(b)=\dfrac{1}{f'(a)}$ (단, $f'(a)\neq 0$)

0669 $g(7)=a$라 하면 $f(a)=7$이므로

$a^2+4a+2=7, \qquad a^2+4a-5=0$

$(a+5)(a-1)=0 \qquad \therefore a=1\ (\because a>-2)$

따라서 $g(7)=1$이고, $f'(x)=2x+4$이므로

$g'(7)=\dfrac{1}{f'(1)}=\dfrac{1}{2+4}=\dfrac{1}{6}$ 답 $\dfrac{1}{6}$

0670 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-1}{x}=2$에서 $x\to 0$일 때 (분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$이다.

즉 $\lim\limits_{x\to 0}\{f(x)-1\}=0$이므로 $\qquad f(0)=1$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)$이므로

$f'(0)=2$

이때 $f(0)=1$에서 $g(1)=0$이므로

$g'(1)=\dfrac{1}{f'(0)}=\dfrac{1}{2}$ 답 ④

0671 점 $\left(\dfrac{3}{2}\pi,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$가 곡선 $y=g(x)$ 위의 점이므로

$g\left(\dfrac{3}{2}\pi\right)=\dfrac{\pi}{2}$

$f'(x)=3-\sin x$이므로 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $\left(\dfrac{3}{2}\pi,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$에서의 접선의 기울기는

$g'\left(\dfrac{3}{2}\pi\right)=\dfrac{1}{f'\left(\frac{\pi}{2}\right)}=\dfrac{1}{3-1}=\dfrac{1}{2}$ 답 $\dfrac{1}{2}$

0672 $g(a)=b$라 하면 $f(b)=a$이므로

$\ln(e^b+1)=a \qquad \therefore e^b+1=e^a$ ...... ㉠

$f'(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1}$이므로

$f'(a)=\dfrac{e^a}{e^a+1}$,

$g'(a)=\dfrac{1}{f'(b)}=\dfrac{e^b+1}{e^b}=\dfrac{e^a}{e^a-1}\ (\because ㉠)$

$\therefore \dfrac{1}{f'(a)}+\dfrac{1}{g'(a)}=\dfrac{e^a+1}{e^a}+\dfrac{e^a-1}{e^a}=2$ 답 ④

0673 $f(1)=1+2-2=1$이므로 $\qquad g(1)=1$ ··· ❶

$F(x)=f(x)g(x)$라 하면 $\qquad F(1)=f(1)g(1)=1$

$\therefore \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)g(x)-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{F(x)-F(1)}{x-1}=F'(1)$

$F'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$이므로

$F'(1)=f'(1)g(1)+f(1)g'(1)$

$=f'(1)+g'(1)$ ··· ❷

$f'(x)=3x^2+2$에서

$f'(1)=3+2=5,\ g'(1)=\dfrac{1}{f'(1)}=\dfrac{1}{5}$ ··· ❸

$\therefore F'(1)=5+\dfrac{1}{5}=\dfrac{26}{5}$ ··· ❹

답 $\dfrac{26}{5}$

채점 기준	비율
❶ $f(1)$, $g(1)$의 값을 구할 수 있다.	20 %
❷ 극한값을 $f'(1)$, $g'(1)$에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40 %
❸ $f'(1)$, $g'(1)$의 값을 구할 수 있다.	20 %
❹ 극한값을 구할 수 있다.	20 %

0674 조건 (가)에서 $x \to 2$일 때 (분모) $\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to 0$이다.

즉 $\lim_{x\to 2}\{f(x)-3\}=0$이므로 $f(2)=3$

$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-3}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)$이므로

$f'(2)=6$

한편 $g(-3)=a$라 하면 $f(a)=-3$

조건 (나)에서 $f(-x)=-f(x)$이므로 양변에 $x=2$를 대입하면

$f(-2)=-f(2)=-3$

$\therefore a=-2$

또 $f(-x)=-f(x)$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$-f'(-x)=-f'(x) \qquad \therefore f'(-x)=f'(x)$

$\therefore g'(-3)=\frac{1}{f'(-2)}=\frac{1}{f'(2)}=\frac{1}{6}$ 답 ⑤

참고 함수 $f(x)$의 역함수가 존재하므로 $f(x)$는 일대일대응이다.
따라서 $f(-2)=-3$에서 $f(a)=-3$을 만족시키는 a의 값은 -2뿐이다.

유형 17 이계도함수

본책 102쪽

함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$가 미분가능할 때

$$f''(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(x+\Delta x)-f'(x)}{\Delta x}$$

0675 $f'(x)=3e^{ax-b}+3axe^{ax-b}=3e^{ax-b}(1+ax)$이므로

$f''(x)=3ae^{ax-b}(1+ax)+3ae^{ax-b}=3ae^{ax-b}(2+ax)$

$f'(0)=3e$에서 $3e^{-b}=3e$

$e^{-b}=e, \quad -b=1 \quad \therefore b=-1$

$f''(0)=3e$에서 $6ae^{-b}=3e$

$6ae=3e \quad \therefore a=\frac{1}{2}$

$\therefore a+b=-\frac{1}{2}$ 답 ②

0676 $f'(x)=2\ln(x-2)\cdot\frac{1}{x-2}=\frac{2\ln(x-2)}{x-2}$이므로

$f'(3)=0$

$\therefore \lim_{x\to 3}\frac{f'(x)}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{f'(x)-f'(3)}{x-3}=f''(3)$

이때

$$f''(x)=\frac{\frac{2}{x-2}\cdot(x-2)-2\ln(x-2)\cdot 1}{(x-2)^2}=\frac{2-2\ln(x-2)}{(x-2)^2}$$

이므로 $f''(3)=2$ 답 2

0677 $f(x)=\lim_{h\to 0}\frac{x\cos x-x\cos(x+h)}{h}$

$=-x\lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}=-x(\cos x)'$

$=x\sin x$

이므로

$f'(x)=\sin x+x\cos x$

$\therefore f''(x)=\cos x+\cos x-x\sin x$

$=2\cos x-x\sin x$

$\therefore f''(\pi)=-2$ 답 -2

0678 $f'(x)=2e^{2x}\cos x-e^{2x}\sin x=e^{2x}(2\cos x-\sin x)$이므로

$f''(x)=2e^{2x}(2\cos x-\sin x)+e^{2x}(-2\sin x-\cos x)$

$=e^{2x}(3\cos x-4\sin x)$ ⋯ ❶

$x=\alpha$가 $f''(x)=0$의 해이므로

$e^{2\alpha}(3\cos\alpha-4\sin\alpha)=0$

$3\cos\alpha-4\sin\alpha=0\ (\because e^{2\alpha}>0)$

$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{3}{4}\left(\because \underbrace{0<\alpha<\frac{\pi}{2}}_{0<\alpha<\frac{\pi}{2}\text{에서 }\cos\alpha>0}\right)$

$\therefore \tan\alpha=\frac{3}{4}$ ⋯ ❷

답 $\frac{3}{4}$

채점 기준	비율
❶ $f''(x)$를 구할 수 있다.	50 %
❷ $\tan\alpha$의 값을 구할 수 있다.	50 %

0679 $f'(x)=(2x-1)e^x+(x^2-x+a)e^x$

$=(x^2+x+a-1)e^x$

이므로

$f''(x)=(2x+1)e^x+(x^2+x+a-1)e^x$

$=(x^2+3x+a)e^x$

이때 $e^x>0$이므로 모든 실수 x에 대하여 $f''(x)\ge 0$이려면

$x^2+3x+a\ge 0$이어야 한다.

이차방정식 $x^2+3x+a=0$의 판별식을 D라 하면

$D=9-4a\le 0 \qquad \therefore a\ge\frac{9}{4}$

따라서 실수 a의 최솟값은 $\frac{9}{4}$이다. 답 $\frac{9}{4}$

0680 $\lim_{x\to 2}\frac{f'(f(x))-1}{x-2}=6$에서 $x\to 2$일 때 (분모) $\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to 0$이다.

즉 $\lim_{x\to 2}\{f'(f(x))-1\}=0$이므로

$f'(f(2))=1$, 즉 $f'(2)=1\ (\because f(2)=2)$

$\therefore \lim_{x\to 2}\frac{f'(f(x))-1}{x-2}$

$=\lim_{x\to 2}\frac{f'(f(x))-f'(2)}{f(x)-f(2)}\cdot\underbrace{\frac{f(x)-f(2)}{x-2}}_{\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)}$

$=\lim_{x\to 2}\frac{f'(f(x))-f'(2)}{f(x)-f(2)}\cdot f'(2)$

$=\lim_{x\to 2}\frac{f'(f(x))-f'(2)}{f(x)-f(2)}$ ⋯⋯ ㉠

이때 $f(x)=t$로 놓으면 $f(2)=2$에서 $x\to 2$일 때 $t\to 2$이므로 ㉠은

$\lim_{t\to 2}\frac{f'(t)-f'(2)}{t-2}=f''(2)$

$\therefore f''(2)=6$ 답 ③

0681 (1st) $g(\pi)$, $g'(\pi)$의 값을 함수 f를 이용하여 나타낸다.

$$g(\pi)=\frac{f(\pi)\cos\pi}{e^{\pi}}=-\frac{f(\pi)}{e^{\pi}} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$$g'(x)=\frac{\{f'(x)\cos x-f(x)\sin x\}e^{x}-f(x)\cos x\cdot e^{x}}{e^{2x}}$$

$$=\frac{f'(x)\cos x-(\sin x+\cos x)f(x)}{e^{x}}$$

이므로

$$g'(\pi)=\frac{f'(\pi)\cos\pi-(\sin\pi+\cos\pi)f(\pi)}{e^{\pi}}$$

$$=\frac{-f'(\pi)+f(\pi)}{e^{\pi}} \qquad \cdots\cdots ㉡$$

(2nd) $\dfrac{f'(\pi)}{f(\pi)}$의 값을 구한다.

$g'(\pi)=e^{\pi}g(\pi)$이므로 ㉠, ㉡에서

$$\frac{-f'(\pi)+f(\pi)}{e^{\pi}}=e^{\pi}\cdot\left\{-\frac{f(\pi)}{e^{\pi}}\right\}$$

$$(e^{\pi}+1)f(\pi)=f'(\pi)$$

$$\therefore \frac{f'(\pi)}{f(\pi)}=e^{\pi}+1$$

답 ④

0682 (1st) 삼각함수의 극한과 미분계수의 정의를 이용할 수 있도록 주어진 식을 변형한다.

$$\lim_{x\to0}\frac{f(\sin 3x)-f(\tan 2x)}{x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{f(\sin 3x)-f(0)-\{f(\tan 2x)-f(0)\}}{x}$$

$$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{f(\sin 3x)-f(0)}{\sin 3x}\cdot\frac{\sin 3x}{3x}\cdot 3-\frac{f(\tan 2x)-f(0)}{\tan 2x}\cdot\frac{\tan 2x}{2x}\cdot 2\right\}$$

$$=f'(0)\cdot1\cdot3-f'(0)\cdot1\cdot2$$

$$=f'(0)$$

(2nd) 극한값을 구한다.

$f'(x)=\cos x+\sec^2 x$이므로

$$f'(0)=1+1=2$$

답 2

참고 $\sin 3x=t$로 놓으면 $x\to0$일 때 $t\to0$이므로

$$\lim_{x\to0}\frac{f(\sin 3x)-f(0)}{\sin 3x}=\lim_{t\to0}\frac{f(t)-f(0)}{t}=f'(0)$$

마찬가지로 $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{f(\tan 2x)-f(0)}{\tan 2x}=f'(0)$이다.

0683 (1st) $h'(5)$의 값을 함수 f, g를 이용하여 나타낸다.

$h(t)=t\times\{f(t)-g(t)\}$에서

$$h'(t)=\{f(t)-g(t)\}+t\times\{f'(t)-g'(t)\}$$

$$\therefore h'(5)=\{f(5)-g(5)\}+5\{f'(5)-g'(5)\} \quad \cdots ㉠$$

(2nd) $f(5)$, $g(5)$의 값을 구한다.

곡선 $y=x^3+2x^2-15x+5$와 직선 $y=5$가 만나는 점의 x좌표는 $x^3+2x^2-15x+5=5$에서

$$x(x^2+2x-15)=0, \qquad x(x+5)(x-3)=0$$

$\therefore x=-5$ 또는 $x=0$ 또는 $x=3$

$\therefore f(5)=3,\ g(5)=-5$

(3rd) $f'(5)$, $g'(5)$의 값을 구한다.

$F(x)=x^3+2x^2-15x+5$라 하면

$$F(f(t))=t$$

양변을 t에 대하여 미분하면

$$F'(f(t))f'(t)=1$$

이므로 $\quad f'(t)=\dfrac{1}{F'(f(t))}$

$F'(x)=3x^2+4x-15$이므로

$$f'(5)=\frac{1}{F'(f(5))}=\frac{1}{F'(3)}=\frac{1}{24}$$

마찬가지로 $F(g(t))=t$에서

$$g'(5)=\frac{1}{F'(g(5))}=\frac{1}{F'(-5)}=\frac{1}{40}$$

(4th) $h'(5)$의 값을 구한다.

따라서 ㉠에서

$$h'(5)=\{3-(-5)\}+5\left(\frac{1}{24}-\frac{1}{40}\right)$$

$$=8+\frac{1}{12}=\frac{97}{12}$$

답 ④

0684 (1st) $f(1)$, $f'(1)$의 값을 구한다.

$(f\circ g)(0)=2$에서

$$f(\underbrace{g(0)}_{g(0)=e^{\sin 0}=1})=f(1)=2$$

또 $(f\circ g)'(x)=\{f(g(x))\}'=f'(g(x))g'(x)$이고,

$g'(x)=e^{\sin x}\cos x$이므로 $(f\circ g)'(0)=1$에서

$$f'(g(0))\underbrace{g'(0)}_{g'(0)=e^{\sin 0}\cos 0=1}=1 \qquad \therefore f'(1)=1$$

(2nd) $R(x)$를 구한다.

$f(x)$를 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, $R(x)=ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$$f(x)=(x-1)^2Q(x)+ax+b \qquad \cdots\cdots ㉠$$

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면 $\quad f(1)=a+b$

$$\therefore a+b=2 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f'(x)=2(x-1)Q(x)+(x-1)^2Q'(x)+a$$

양변에 $x=1$을 대입하면

$$f'(1)=a \qquad \therefore a=1$$

$a=1$을 ㉡에 대입하면 $\quad b=1$

$\therefore R(x)=x+1$

(3rd) $R(3)$의 값을 구한다.

$R(3)=4$

답 ④

0685 (1st) 주어진 식의 좌변을 미분계수로 나타낸다.

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\ln\frac{e^{x}+e^{2x}+e^{3x}+\cdots+e^{nx}}{n}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\ln(e^{x}+e^{2x}+e^{3x}+\cdots+e^{nx})-\ln n}{x} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$f(x)=\ln(e^{x}+e^{2x}+e^{3x}+\cdots+e^{nx})$이라 하면 $f(0)=\ln n$이므로 ㉠은

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)$$

$\therefore f'(0)=8$

2nd $f'(0)$의 값을 n에 대한 식으로 나타낸다.

$f'(x)=\dfrac{e^x+2e^{2x}+3e^{3x}+\cdots+ne^{nx}}{e^x+e^{2x}+e^{3x}+\cdots+e^{nx}}$이므로

$$f'(0)=\frac{1+2+3+\cdots+n}{n}=\frac{1}{n}\cdot\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n+1}{2}$$

3rd n의 값을 구한다.

따라서 $\dfrac{n+1}{2}=8$이므로

$n+1=16$　　$\therefore n=15$

답 15

0686 1st $g'(0)$의 값을 구한다.

$g(0)=\dfrac{0}{2}=0$, $\lim\limits_{x\to0}g(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{f(x)}=\dfrac{0}{e}=0$이므로 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 연속이고

$\lim\limits_{x\to0}f(x)=e$

$$g'(0)=\lim_{h\to0}\frac{g(h)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{\frac{h}{f(h)}}{h}=\lim_{h\to0}\frac{1}{f(h)}=\frac{1}{e}$$

2nd $g'(2)$의 값을 구한다.

$x\neq0$일 때, $g'(x)=\dfrac{f(x)-xf'(x)}{\{f(x)\}^2}$이므로

$$g'(2)=\frac{f(2)-2f'(2)}{\{f(2)\}^2}$$

조건 (나)에서 $\ln f(2)=1$이므로　　$f(2)=e$

또 $y=\ln f(x)$에서 $y'=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$이므로

$\dfrac{f'(2)}{f(2)}=1$　　$\therefore f'(2)=f(2)=e$

$\therefore g'(2)=\dfrac{e-2e}{e^2}=-\dfrac{1}{e}$

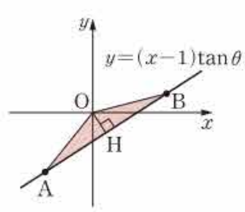
3rd $g'(0)g'(2)$의 값을 구한다.

$g'(0)g'(2)=\dfrac{1}{e}\cdot\left(-\dfrac{1}{e}\right)=-\dfrac{1}{e^2}$

답 $-\dfrac{1}{e^2}$

0687 1st $\triangle$OAB의 밑변의 길이와 높이를 θ에 대한 식으로 나타낸다.

오른쪽 그림과 같이 점 O에서 직선 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면 원점 O와 직선 $y=(x-1)\tan\theta$, 즉 $x\tan\theta-y-\tan\theta=0$ 사이의 거리는



$$\overline{OH}=\frac{|-\tan\theta|}{\sqrt{\tan^2\theta+1}}=\frac{\tan\theta}{\sec\theta}$$

$$=\sin\theta\left(\because 0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$$

직각삼각형 OAH에서 $\overline{AH}=\sqrt{2^2-\sin^2\theta}=\sqrt{4-\sin^2\theta}$이므로

$\overline{AB}=2\overline{AH}=2\sqrt{4-\sin^2\theta}$

2nd $S'(\theta)$를 구한다.

$$S(\theta)=\frac{1}{2}\cdot2\sqrt{4-\sin^2\theta}\cdot\sin\theta$$

$$=\sin\theta\sqrt{4-\sin^2\theta}$$

이므로

$$S'(\theta)=\cos\theta\sqrt{4-\sin^2\theta}+\sin\theta\cdot\frac{-2\sin\theta\cos\theta}{2\sqrt{4-\sin^2\theta}}$$

$$=\cos\theta\sqrt{4-\sin^2\theta}-\frac{\sin^2\theta\cos\theta}{\sqrt{4-\sin^2\theta}}$$

3rd $\lim\limits_{\theta\to0+}S'(\theta)$의 값을 구한다.

$$\lim_{\theta\to0+}S'(\theta)=\lim_{\theta\to0+}\left(\cos\theta\sqrt{4-\sin^2\theta}-\frac{\sin^2\theta\cos\theta}{\sqrt{4-\sin^2\theta}}\right)$$

$$=1\cdot2-\frac{0^2\cdot1}{2}=2$$

답 2

0688 1st 곡선 $x=\sqrt{3}\tan\beta$, $y=2\sqrt{3}\sec\beta$ 위의 점 P에서의 $\dfrac{dy}{dx}$의 값을 구한다.

$x=\sqrt{3}\tan\beta$, $y=2\sqrt{3}\sec\beta$에서

$$\frac{dx}{d\beta}=\sqrt{3}\sec^2\beta,\ \frac{dy}{d\beta}=2\sqrt{3}\sec\beta\tan\beta$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\beta}}{\frac{dx}{d\beta}}=\frac{2\sqrt{3}\sec\beta\tan\beta}{\sqrt{3}\sec^2\beta}=\frac{2\tan\beta}{\sec\beta}$$

이때 $\sqrt{3}\tan\beta=1$, $2\sqrt{3}\sec\beta=4$에서

$$\tan\beta=\frac{1}{\sqrt{3}},\ \sec\beta=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

이므로　　$\dfrac{dy}{dx}=2\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3}}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=1$

2nd 점 P에서의 $\sin^2\alpha$, $\cos^2\alpha$의 값을 구한다.

점 P에서의 두 곡선의 접선이 서로 수직이므로 곡선 $x=a\cos\alpha$, $y=b\sin\alpha$ 위의 점 P에서의 접선의 기울기는 -1이다.

$\dfrac{dx}{d\alpha}=-a\sin\alpha$, $\dfrac{dy}{d\alpha}=b\cos\alpha$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\alpha}}{\frac{dx}{d\alpha}}=-\frac{b\cos\alpha}{a\sin\alpha}\ (\sin\alpha\neq0)$$

즉 $-\dfrac{b}{a}\cdot\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=-1$이므로　　$\dfrac{b}{a}=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$　　…… ㉠

이때 $a\cos\alpha=1$, $b\sin\alpha=4$에서

$$a=\frac{1}{\cos\alpha},\ b=\frac{4}{\sin\alpha}$$

$$\therefore \frac{b}{a}=\frac{4}{\sin\alpha}\cdot\cos\alpha=\frac{4\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

따라서 ㉠에서　　$\dfrac{4\cos\alpha}{\sin\alpha}=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

$4\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=0$,　　$4(1-\sin^2\alpha)-\sin^2\alpha=0$

$4=5\sin^2\alpha$　　$\therefore \sin^2\alpha=\dfrac{4}{5}$

$\therefore \cos^2\alpha=1-\dfrac{4}{5}=\dfrac{1}{5}$

3rd a^2+b^2의 값을 구한다.

따라서 $a^2=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}=5$, $b^2=\dfrac{16}{\sin^2\alpha}=20$이므로

$a^2+b^2=25$

답 ⑤

0689 1st $g(2)$의 값을 구한다.

$f(x-1)+f(5-x)=8$의 양변에 $x=2$를 대입하면

양변에 $x=4$를 대입할 수도 있다.

$f(1)+f(3)=8$,　　$f(1)+6=8$

$\therefore f(1)=2$

$g(x)$가 $f(x)$의 역함수이므로 $\quad g(2)=1$

(2nd) $g'(2)$의 값을 구한다.

$f(x-1)+f(5-x)=8$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f'(x-1)-f'(5-x)=0$$

양변에 $x=2$를 대입하면

$$f'(1)-f'(3)=0, \quad f'(1)-(-2)=0$$

$$\therefore f'(1)=-2$$

$$\therefore g'(2)=\frac{1}{f'(1)}=-\frac{1}{2}$$

답 $-\frac{1}{2}$

0690 (1st) a의 값을 구한다.

$\lim_{x\to -2}\frac{g(x)}{x+2}=b$에서 $x\longrightarrow -2$일 때 (분모) $\longrightarrow 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉 $\lim_{x\to -2}g(x)=0$이므로 $\quad g(-2)=0$

$g(x)$가 $f(x)$의 역함수이므로 $\quad f(0)=-2$

이때 $f(0)=\ln\frac{1}{a}$이므로

$$\ln\frac{1}{a}=-2, \quad \frac{1}{a}=e^{-2}$$

$$\therefore a=e^2$$

(2nd) b의 값을 구한다.

$\lim_{x\to -2}\frac{g(x)}{x+2}=\lim_{x\to -2}\frac{g(x)-g(-2)}{x-(-2)}=g'(-2)=\frac{1}{f'(0)}$이므로

$$b=\frac{1}{f'(0)}$$

$f(x)=\ln\left(\frac{\sec x+\tan x}{e^2}\right)=\ln(\sec x+\tan x)-2$이므로

$$f'(x)=\frac{\sec x\tan x+\sec^2 x}{\sec x+\tan x}$$

$$=\frac{\sec x(\tan x+\sec x)}{\sec x+\tan x}=\sec x$$

$$\therefore b=\frac{1}{f'(0)}=\frac{1}{\sec 0}=1$$

(3rd) ab의 값을 구한다.

$ab=e^2$

답 ③

0691 (1st) ㄱ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄱ. $f'(x)=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\right)$

$$=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\therefore f'(\sqrt{3})=\frac{1}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+1}}=\frac{1}{2}$$

(2nd) ㄴ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄴ. $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}=(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}$이므로

$$f''(x)=-\frac{1}{2}(x^2+1)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2x$$

$$=-x(x^2+1)^{-\frac{3}{2}}$$

$$\therefore (x^2+1)f''(x)+xf'(x)$$

$$=(x^2+1)\{-x(x^2+1)^{-\frac{3}{2}}\}+x(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}$$

$$=-x(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}+x(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}$$

$$=0$$

(3rd) ㄷ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄷ. $\frac{f''(x)}{f'(x)}=-x(x^2+1)^{-\frac{3}{2}}(x^2+1)^{\frac{1}{2}}=-\frac{x}{x^2+1}$이므로

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f''(x)}{f'(x)}=\lim_{x\to\infty}\left(-\frac{x}{x^2+1}\right)=0$$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

0692 (1st) $h'(e)$의 값을 함수 f, g를 이용하여 나타낸다.

$h(x)=f^{-1}(x)g(x)$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$h'(x)=(f^{-1})'(x)g(x)+f^{-1}(x)g'(x)$$

$$\therefore h'(e)=(f^{-1})'(e)g(e)+f^{-1}(e)g'(e)$$

$$=\frac{g(e)}{f'(f^{-1}(e))}+f^{-1}(e)g'(e) \qquad \cdots\cdots ㉠$$

(2nd) $f^{-1}(e)$, $g(e)$의 값을 구한다.

조건 (가)에서 $f(1)=e$이므로 $\quad f^{-1}(e)=1$

조건 (나)에서 $\quad g(f(1))=f'(1)$

$$\therefore g(e)=e$$

(3rd) $g'(e)$의 값을 구한다.

$g(f(x))=f'(x)$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$g'(f(x))f'(x)=f''(x)$$

양변에 $x=1$을 대입하면

$$g'(f(1))f'(1)=f''(1)$$

$$g'(e)\cdot e=f''(1)$$

$$\therefore g'(e)=\frac{f''(1)}{e}$$

조건 (가)에서 $f(1)=e$이므로

$$(1+a+b)e=e, \quad 1+a+b=1$$

$$\therefore b=-a$$

즉 $f(x)=(x^2+ax-a)e^x$이므로

$$f'(x)=(2x+a)e^x+(x^2+ax-a)e^x$$

$$=\{x^2+(a+2)x\}e^x$$

$f'(1)=e$이므로 $\quad (a+3)e=e$

$$a+3=1 \quad \therefore a=-2$$

$$\therefore f'(x)=x^2e^x$$

$f''(x)=2xe^x+x^2e^x=x(x+2)e^x$이므로

$$g'(e)=\frac{f''(1)}{e}=\frac{3e}{e}=3$$

(4th) $h'(e)$의 값을 구한다.

따라서 ㉠에서

$$h'(e)=\frac{e}{f'(1)}+1\cdot 3=1+3=4$$

답 ④

다른 풀이 $h(x)=f^{-1}(x)g(x)$에서

$$h(f(x))=f^{-1}(f(x))g(f(x))$$

$f^{-1}(f(x))=x$이고, 조건 (나)에서 $g(f(x))=f'(x)$이므로

$$h(f(x))=xf'(x)$$

양변을 x에 대하여 미분하면

$$h'(f(x))f'(x)=f'(x)+xf''(x)$$

양변에 $x=1$을 대입하면

$$h'(f(1))f'(1)=f'(1)+f''(1)$$

이때 조건 (가)에 의하여 $f''(x)=x(x+2)e^x$이므로

$$h'(e)\cdot e=e+3e$$

$$\therefore h'(e)=4$$

0693 전략 $a^{\log b}=b^{\log a}$임을 이용하여 $f(x)$를 간단히 나타낸다.

풀이 $f(x)=1+e^{-\ln x}+e^{-2\ln x}+\cdots+e^{-n\ln x}+\cdots$

$$=1+x^{-1}+x^{-2}+\cdots+x^{-n}+\cdots$$

$$=1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\cdots+\frac{1}{x^n}+\cdots$$

$$=\frac{1}{1-\frac{1}{x}}\ \left(\because\ 0<\frac{1}{x}<1\right)$$

$x>1$이므로 $0<\frac{1}{x}<1$

$$=\frac{x}{x-1} \quad \cdots ❶$$

이므로

$$f'(x)=\frac{(x-1)-x}{(x-1)^2}=-\frac{1}{(x-1)^2} \quad \cdots ❷$$

$$\therefore f'(3)=-\frac{1}{4} \quad \cdots ❸$$

답 $-\frac{1}{4}$

채점 기준	비율
❶ $f(x)$를 간단히 할 수 있다.	50 %
❷ $f'(x)$를 구할 수 있다.	30 %
❸ $f'(3)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0694 전략 $f'(x)$를 구한 후 $f'(x)=f(x)g(x)$를 만족시키는 $g(x)$를 구한다.

풀이 $f'(x)=5(ax-\ln x)^4\left(a-\frac{1}{x}\right)$이므로 $f'(x)=f(x)g(x)$에서

$$5(ax-\ln x)^4\left(a-\frac{1}{x}\right)=(ax-\ln x)^5g(x)$$

이때 $a>\frac{1}{e}$에서 $ax-\ln x>0$이므로

$$g(x)=\frac{5\left(a-\frac{1}{x}\right)}{ax-\ln x} \quad \cdots ❶$$

$$\therefore g'(x)=\frac{5\cdot\frac{1}{x^2}\cdot(ax-\ln x)-5\left(a-\frac{1}{x}\right)\left(a-\frac{1}{x}\right)}{(ax-\ln x)^2}$$

$$=\frac{\frac{5(ax-\ln x)}{x^2}-5\left(a-\frac{1}{x}\right)^2}{(ax-\ln x)^2} \quad \cdots ❷$$

$g'(1)=5$에서

$$\frac{5a-5(a-1)^2}{a^2}=5,\qquad 5a-5(a^2-2a+1)=5a^2$$

$$2a^2-3a+1=0,\qquad (2a-1)(a-1)=0$$

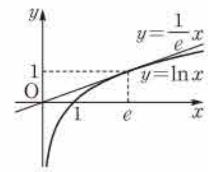
$$\therefore a=\frac{1}{2}\ 또는\ a=1$$

따라서 구하는 합은 $\frac{3}{2}$ $\cdots$ ❸

답 $\frac{3}{2}$

채점 기준	비율
❶ $g(x)$를 구할 수 있다.	40 %
❷ $g'(x)$를 구할 수 있다.	30 %
❸ 모든 a의 값의 합을 구할 수 있다.	30 %

참고 오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=\ln x$와 직선 $y=\frac{1}{e}x$는 점 $(e,\ 1)$에서 접하므로



$a>\frac{1}{e}$이면 $\quad ax>\ln x$

$$\therefore ax-\ln x>0$$

0695 전략 함수 $h(x)$가 $x=1$에서 미분가능하면 $h(x)$는 $x=1$에서 연속이고, $h'(1)$이 존재함을 이용한다.

풀이 $h(x)=(g\circ f)(x)=g(f(x))$

$$=\begin{cases}|2^{ax-a+2}+b| & (x\ge1)\\ |2^x+b| & (x<1)\end{cases}$$

함수 $h(x)$가 $x=1$에서 미분가능하면 $x=1$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to1+}|2^{ax-a+2}+b|=\lim_{x\to1-}|2^x+b|=h(1)$$

$$|2^2+b|=|2+b|$$

$$|b+4|=|b+2|$$

양변을 제곱하면

$$b^2+8b+16=b^2+4b+4$$

$$4b=-12\qquad \therefore b=-3 \quad \cdots ❶$$

한편 $x\longrightarrow1+$일 때 $2^{ax-a+2}-3>0$이므로

$$\lim_{x\to1+}h'(x)=\lim_{x\to1+}(2^{ax-a+2}-3)'$$

$$=\lim_{x\to1+}(2^{ax-a+2}\cdot\ln2\cdot a)$$

$$=4a\ln2$$

$x\longrightarrow1-$일 때 $2^x-3<0$이므로

$$\lim_{x\to1-}h'(x)=\lim_{x\to1-}(3-2^x)'$$

$$=\lim_{x\to1-}(-2^x\cdot\ln2)$$

$$=-2\ln2$$

$h'(1)$이 존재하므로

$$4a\ln2=-2\ln2\qquad \therefore a=-\frac{1}{2} \quad \cdots ❷$$

$$\therefore a+b=-\frac{7}{2} \quad \cdots ❸$$

답 $-\frac{7}{2}$

채점 기준	비율
❶ b의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ a의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	10 %

0696 전략 $x+y$, $x-y$를 이용하여 $\frac{dy}{dx}$를 x, y에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 $x=\frac{1}{2}(2^{at}+2^{3at})$, $y=\frac{1}{2}(2^{at}-2^{3at})$에서

$$\frac{dx}{dt}=\frac{1}{2}(2^{at}\cdot\ln2\cdot a+2^{3at}\cdot\ln2\cdot3a)$$

$$=\frac{a}{2}\ln2\cdot(2^{at}+3\cdot2^{3at})$$

$$\frac{dy}{dt}=\frac{1}{2}(2^{at}\cdot\ln 2\cdot a-2^{3at}\cdot\ln 2\cdot 3a)$$
$$=\frac{a}{2}\ln 2\cdot(2^{at}-3\cdot 2^{3at})$$
$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{2^{at}-3\cdot 2^{3at}}{2^{at}+3\cdot 2^{3at}}$$ ⋯ ❶

이때

$$x+y=\frac{1}{2}(2^{at}+2^{3at})+\frac{1}{2}(2^{at}-2^{3at})=2^{at},$$
$$x-y=\frac{1}{2}(2^{at}+2^{3at})-\frac{1}{2}(2^{at}-2^{3at})=2^{3at}$$

이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(x+y)-3(x-y)}{(x+y)+3(x-y)}$$
$$=\frac{-2x+4y}{4x-2y}=\frac{-x+2y}{2x-y}\ (2x\neq y)$$ ⋯ ❷

따라서 $b=-1$, $c=2$이므로

$b^2+c^2=5$ ⋯ ❸

답 5

채점 기준	비율
❶ $\frac{dy}{dx}$를 t에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40 %
❷ $\frac{dy}{dx}$를 x, y에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40 %
❸ b^2+c^2의 값을 구할 수 있다.	20 %

0697 전략 조건 ㈎를 이용하여 $f(2)$, $f'(2)$의 값을 구한다.

풀이 $f(x)=(g\circ h)(x)=g(h(x))$에서

$f'(x)=g'(h(x))h'(x)$

$\therefore\ f'(0)=g'(h(0))h'(0)$ ⋯⋯ ㉠ ⋯ ❶

조건 ㈎에서 $x\to 2$일 때 (분모) $\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to 0$이다.

즉 $\lim_{x\to 2}f(x)=0$이므로 $f(2)=0$

$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)$이므로

$f'(2)=e$

$h(x)$는 $f(x)$의 역함수이므로 $f(2)=0$에서 $h(0)=2$

$\therefore\ h'(0)=\frac{1}{f'(2)}=\frac{1}{e}$

또 조건 ㈏에서 $g'(2)=2e^2$ ⋯ ❷

따라서 ㉠에서

$f'(0)=g'(2)\cdot\frac{1}{e}=2e^2\cdot\frac{1}{e}=2e$ ⋯ ❸

답 $2e$

채점 기준	비율
❶ $f'(0)$의 값을 함수 g, h를 이용하여 나타낼 수 있다.	30 %
❷ $h(0)$, $h'(0)$, $g'(2)$의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ $f'(0)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

다른 풀이 두 조건 ㈎, ㈏에 의하여

$f(2)=0$, $f'(2)=e$, $g'(2)=2e^2$

$f(x)=(g\circ h)(x)$, 즉 $f(x)=(g\circ f^{-1})(x)$에서

$g(x)=(f\circ f)(x)$

양변을 x에 대하여 미분하면

$g'(x)=f'(f(x))f'(x)$

이므로

$g'(2)=f'(f(2))f'(2)$

$2e^2=f'(0)\cdot e$ $\quad\therefore\ f'(0)=2e$

0698 전략 합성함수의 미분법과 역함수의 미분법을 이용하여 구하는 값을 $f'(1)$로 나타낸다.

풀이 $h(x)=g(x^2+2x)$라 하면

$h'(x)=(2x+2)g'(x^2+2x)$

$\therefore\ h'(1)=4g'(3)$

이때 $f(1)=3$에서 $g(3)=1$이므로

점 A(1, 3)이 $y=f(x)$의 그래프 위의 점이므로 $f(1)=3$

$g'(3)=\frac{1}{f'(1)}$

$\therefore\ h'(1)=\frac{4}{f'(1)}$ ⋯ ❶

원 $(x-4)^2+(y-2)^2=10$의 중심을 C(4, 2)라 하면 직선 AC의 기울기는 $\frac{2-3}{4-1}=-\frac{1}{3}$

따라서 원 $(x-4)^2+(y-2)^2=10$ 위의 점 A에서의 접선의 기울기는 3이므로

직선 AC와 점 A에서의 접선은 수직이므로 기울기의 곱은 -1이다.

$f'(1)=3$ ⋯ ❷

따라서 구하는 미분계수는

$h'(1)=\frac{4}{f'(1)}=\frac{4}{3}$ ⋯ ❸

답 $\frac{4}{3}$

채점 기준	비율
❶ 구하는 미분계수를 $f'(1)$에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	50 %
❷ $f'(1)$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ 미분계수를 구할 수 있다.	10 %

Ⅲ. 미분법

06 도함수의 활용 (1)

0699 $f(x)=\frac{1}{2x+1}$이라 하면 $\quad f'(x)=-\frac{2}{(2x+1)^2}$
점 (0, 1)에서의 접선의 기울기는 $f'(0)=-2$이므로 구하는 접선의 방정식은 $\quad y-1=-2x$
$\therefore y=-2x+1$ 답 $y=-2x+1$

0700 $f(x)=x\sqrt{x}=x^{\frac{3}{2}}$이라 하면
$f'(x)=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}=\frac{3}{2}\sqrt{x}$
점 (1, 1)에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=\frac{3}{2}$이므로 구하는 접선의 방정식은 $\quad y-1=\frac{3}{2}(x-1)$
$\therefore y=\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}$ 답 $y=\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}$

0701 $f(x)=e^{3(x+1)}$이라 하면 $\quad f'(x)=3e^{3(x+1)}$
점 (−1, 1)에서의 접선의 기울기는 $f'(-1)=3$이므로 구하는 접선의 방정식은 $\quad y-1=3(x+1)$
$\therefore y=3x+4$ 답 $y=3x+4$

0702 $f(x)=\ln(x-1)$이라 하면 $\quad f'(x)=\frac{1}{x-1}$
점 (2, 0)에서의 접선의 기울기는 $f'(2)=1$이므로 구하는 접선의 방정식은
$y=x-2$ 답 $y=x-2$

0703 $f(x)=\tan x$라 하면 $\quad f'(x)=\sec^2 x$
점 $\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$에서의 접선의 기울기는 $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=2$이므로 구하는 접선의 방정식은 $\quad y-1=2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$
$\therefore y=2x-\frac{\pi}{2}+1$ 답 $y=2x-\frac{\pi}{2}+1$

0704 $f(x)=e^{2x}$이라 하면 $\quad f'(x)=2e^{2x}$
점 (0, 1)에서의 접선의 기울기는 $f'(0)=2$이므로 접선과 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{2}$이다.
따라서 구하는 직선의 방정식은 $\quad y-1=-\frac{1}{2}x$
$\therefore y=-\frac{1}{2}x+1$ 답 $y=-\frac{1}{2}x+1$

0705 $f(x)=\frac{x-1}{x+1}$이라 하면
$f'(x)=\frac{(x+1)-(x-1)}{(x+1)^2}=\frac{2}{(x+1)^2}$
접점의 좌표를 $\left(t, \underbrace{\frac{t-1}{t+1}}_{f(t)}\right)$이라 하면 $f'(t)=\frac{1}{2}$이므로
$\frac{2}{(t+1)^2}=\frac{1}{2}, \quad (t+1)^2=4$
$t+1=\pm 2 \quad \therefore t=1\ (\because t>0)$
따라서 접점의 좌표가 (1, 0)이므로 구하는 접선의 방정식은
$y=\frac{1}{2}(x-1) \quad \therefore y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$ 답 $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$

0706 $f(x)=\sqrt{x}$라 하면 $\quad f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$
접점의 좌표를 $(t, \sqrt{t})$라 하면 $f'(t)=\frac{1}{2}$이므로
$\frac{1}{2\sqrt{t}}=\frac{1}{2}, \quad \sqrt{t}=1 \quad \therefore t=1$
따라서 접점의 좌표가 (1, 1)이므로 구하는 접선의 방정식은
$y-1=\frac{1}{2}(x-1) \quad \therefore y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$ 답 $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$

0707 $f(x)=e^{x+1}$이라 하면 $\quad f'(x)=e^{x+1}$
접점의 좌표를 (t, e^{t+1})이라 하면 $f'(t)=1$이므로
$e^{t+1}=1, \quad t+1=0 \quad \therefore t=-1$
따라서 접점의 좌표가 (−1, 1)이므로 구하는 접선의 방정식은
$y-1=x+1 \quad \therefore y=x+2$ 답 $y=x+2$

0708 $f(x)=\ln(x+2)$라 하면 $\quad f'(x)=\frac{1}{x+2}$
접점의 좌표를 $(t, \ln(t+2))$라 하면 $f'(t)=1$이므로
$\frac{1}{t+2}=1 \quad \therefore t=-1$
따라서 접점의 좌표가 (−1, 0)이므로 구하는 접선의 방정식은
$y=x+1$ 답 $y=x+1$

0709 $f(x)=-\cos 2x$라 하면 $\quad f'(x)=2\sin 2x$
접점의 좌표를 $(t, -\cos 2t)$라 하면 $f'(t)=1$이므로
$2\sin 2t=1 \quad \therefore \sin 2t=\frac{1}{2}$
이때 $0\le t\le\frac{\pi}{4}$에서 $0\le 2t\le\frac{\pi}{2}$이므로
$2t=\frac{\pi}{6} \quad \therefore t=\frac{\pi}{12}$
따라서 접점의 좌표가 $\left(\frac{\pi}{12}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$이므로 구하는 접선의 방정식은
$y+\frac{\sqrt{3}}{2}=x-\frac{\pi}{12} \quad \therefore y=x-\frac{\pi}{12}-\frac{\sqrt{3}}{2}$
답 $y=x-\frac{\pi}{12}-\frac{\sqrt{3}}{2}$

0710 $f(x)=\frac{1}{x}$이라 하면 $\quad f'(x)=-\frac{1}{x^2}$
접점의 좌표를 $\left(t, \frac{1}{t}\right)$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는
$f'(t)=-\frac{1}{t^2}$이므로 접선의 방정식은
$y-\frac{1}{t}=-\frac{1}{t^2}(x-t)$ …… ㉠
직선 ㉠이 점 (2, 0)을 지나므로
$-\frac{1}{t}=-\frac{1}{t^2}(2-t), \quad t=2-t \quad \therefore t=1$
$t=1$을 ㉠에 대입하면 $\quad y-1=-(x-1)$
$\therefore y=-x+2$ 답 $y=-x+2$

0711 $f(x)=\sqrt{x-1}$이라 하면 $\quad f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}$

접점의 좌표를 $(t,\ \sqrt{t-1})$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=\dfrac{1}{2\sqrt{t-1}}$이므로 접선의 방정식은

$$y-\sqrt{t-1}=\frac{1}{2\sqrt{t-1}}(x-t) \qquad \cdots\cdots ㉠$$

직선 ㉠이 점 $(-1,\ 0)$을 지나므로

$$-\sqrt{t-1}=\frac{1}{2\sqrt{t-1}}(-1-t), \qquad 2t-2=1+t$$

$$\therefore\ t=3$$

$t=3$을 ㉠에 대입하면 $\quad y-\sqrt{2}=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}(x-3)$

$$\therefore\ y=\frac{\sqrt{2}}{4}x+\frac{\sqrt{2}}{4}$$

답 $y=\dfrac{\sqrt{2}}{4}x+\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

0712 $f(x)=2e^x$이라 하면 $\quad f'(x)=2e^x$

접점의 좌표를 $(t,\ 2e^t)$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=2e^t$이므로 접선의 방정식은

$$y-2e^t=2e^t(x-t) \qquad \cdots\cdots ㉠$$

직선 ㉠이 점 $(0,\ 0)$을 지나므로

$$-2e^t=2e^t\cdot(-t) \qquad \therefore\ t=1\ (\because\ e^t>0)$$

$t=1$을 ㉠에 대입하면 $\quad y-2e=2e(x-1)$

$$\therefore\ y=2ex$$

답 $y=2ex$

0713 $f(x)=\ln x$라 하면 $\quad f'(x)=\dfrac{1}{x}$

접점의 좌표를 $(t,\ \ln t)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=\dfrac{1}{t}$이므로 접선의 방정식은

$$y-\ln t=\frac{1}{t}(x-t) \qquad \cdots\cdots ㉠$$

직선 ㉠이 점 $(0,\ 1)$을 지나므로

$$1-\ln t=\frac{1}{t}\cdot(-t), \qquad \ln t=2 \qquad \therefore\ t=e^2$$

$t=e^2$을 ㉠에 대입하면 $\quad y-2=\dfrac{1}{e^2}(x-e^2)$

$$\therefore\ y=\frac{1}{e^2}x+1$$

답 $y=\dfrac{1}{e^2}x+1$

0714 (1) $x=2-\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$, $y=2+\dfrac{1}{2}=\dfrac{5}{2}$

따라서 $t=2$에 대응하는 점의 좌표는 $\quad \left(\dfrac{3}{2},\ \dfrac{5}{2}\right)$

(2) $\dfrac{dx}{dt}=1+\dfrac{1}{t^2}$, $\dfrac{dy}{dt}=1-\dfrac{1}{t^2}$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{1-\frac{1}{t^2}}{1+\frac{1}{t^2}}=\frac{t^2-1}{t^2+1}$$

(3) $t=2$에 대응하는 점에서의 접선의 기울기는 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2^2-1}{2^2+1}=\dfrac{3}{5}$

이므로 $\quad y-\dfrac{5}{2}=\dfrac{3}{5}\left(x-\dfrac{3}{2}\right) \qquad \therefore\ y=\dfrac{3}{5}x+\dfrac{8}{5}$

답 (1) $\left(\dfrac{3}{2},\ \dfrac{5}{2}\right)$ (2) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{t^2-1}{t^2+1}$ (3) $y=\dfrac{3}{5}x+\dfrac{8}{5}$

0715 (1) $x^2-3xy+y^2=1$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$2x-3y-3x\frac{dy}{dx}+2y\frac{dy}{dx}=0$$

$$(3x-2y)\frac{dy}{dx}=2x-3y$$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{2x-3y}{3x-2y}\ (3x\neq 2y)$$

(2) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2\cdot1-3\cdot0}{3\cdot1-2\cdot0}=\dfrac{2}{3}$

(3) $y=\dfrac{2}{3}(x-1) \qquad \therefore\ y=\dfrac{2}{3}x-\dfrac{2}{3}$

답 (1) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2x-3y}{3x-2y}\ (3x\neq 2y)$ (2) $\dfrac{2}{3}$ (3) $y=\dfrac{2}{3}x-\dfrac{2}{3}$

0716 $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$에서 $x\neq0$이고 $\quad f'(x)=1-\dfrac{1}{x^2}$

$f'(x)=0$에서 $\quad \dfrac{1}{x^2}=1 \qquad \therefore\ x=-1$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty,\ -1]$, $[1,\ \infty)$에서 증가하고, 구간 $[-1,\ 0)$, $(0,\ 1]$에서 감소한다.

답 풀이 참조

0717 $f'(x)=-\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=0$

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty,\ 0]$에서 증가하고, 구간 $[0,\ \infty)$에서 감소한다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$

답 풀이 참조

0718 $f(x)=\sqrt[3]{x^2}=x^{\frac{2}{3}}$이므로 $\quad f'(x)=\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty,\ 0]$에서 감소하고, 구간 $[0,\ \infty)$에서 증가한다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$		$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

답 풀이 참조

참고 $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$은 $x=0$에서 극값을 갖지만 $f'(0)$은 존재하지 않는다. 즉 $x=0$에서 미분가능하지 않다.

0719 $f'(x)=\dfrac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x+2}}=\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+2}}$

$f'(x)=0$에서 $\quad x-1=0 \qquad \therefore\ x=1$

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty,\ 1]$에서 감소하고, 구간 $[1,\ \infty)$에서 증가한다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

답 풀이 참조

0720 $f'(x)=2xe^x+x^2e^x=x(x+2)e^x$

$f'(x)=0$에서 $\quad x(x+2)=0\ (\because\ e^x>0)$

$$\therefore\ x=-2 \text{ 또는 } x=0$$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗		↘		↗

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty, -2]$, $[0, \infty)$에서 증가하고, 구간 $[-2, 0]$에서 감소한다. 답 풀이 참조

0721 $f(x)=x-\ln x$에서 $x>0$이고

$f'(x)=1-\dfrac{1}{x}$

$f'(x)=0$에서 $\dfrac{1}{x}=1$ $\therefore x=1$

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘		↗

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(0, 1]$에서 감소하고, 구간 $[1, \infty)$에서 증가한다. 답 풀이 참조

0722 $f(x)=\dfrac{e^x}{x}$에서 $x\neq 0$이고

$f'(x)=\dfrac{e^x\cdot x-e^x}{x^2}=\dfrac{(x-1)e^x}{x^2}$

$f'(x)=0$에서 $x-1=0$ ($\because e^x>0$) $\therefore x=1$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$		$-$	0	$+$
$f(x)$	↘		↘		↗

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty, 0)$, $(0, 1]$에서 감소하고, 구간 $[1, \infty)$에서 증가한다. 답 풀이 참조

0723 $f(x)=\dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$에서 $x>-1$이고

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{1+x}\cdot(1+x)-\ln(1+x)}{(1+x)^2}=\frac{1-\ln(1+x)}{(1+x)^2}$$

$f'(x)=0$에서 $1-\ln(1+x)=0$

$\ln(1+x)=1$, $1+x=e$

$\therefore x=e-1$

x	-1	$\cdots$	$e-1$	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		↗		↘

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(-1, e-1]$에서 증가하고, 구간 $[e-1, \infty)$에서 감소한다.

답 풀이 참조

0724 $f'(x)=1-2\sin x$

$f'(x)=0$에서 $\sin x=\dfrac{1}{2}$

$\therefore x=\dfrac{\pi}{6}$ 또는 $x=\dfrac{5}{6}\pi$ ($\because 0<x<2\pi$)

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{5}{6}\pi$	$\cdots$	2π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗		↘		↗	

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $\left(0, \dfrac{\pi}{6}\right]$, $\left[\dfrac{5}{6}\pi, 2\pi\right)$에서 증가하고, 구간 $\left[\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5}{6}\pi\right]$에서 감소한다. 답 풀이 참조

0725 $f'(x)=\cos x-\sin x$

$f'(x)=0$에서 $\cos x=\sin x$

$\therefore x=\dfrac{\pi}{4}$ ($\because 0<x<\pi$)

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗		↘	

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $\left(0, \dfrac{\pi}{4}\right]$에서 증가하고, 구간 $\left[\dfrac{\pi}{4}, \pi\right)$에서 감소한다. 답 풀이 참조

0726 $f'(x)=1-\csc^2 x$

$f'(x)=0$에서 $\csc^2 x=1$, $\csc x=\pm 1$

$\therefore x=\dfrac{\pi}{2}$ ($\because 0<x<\pi$)

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	π
$f'(x)$		$-$	0	$-$	
$f(x)$		↘		↘	

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(0, \pi)$에서 감소한다. 답 풀이 참조

0727 $f'(x)=-\sin x+\sin x+x\cos x=x\cos x$

$f'(x)=0$에서 $\cos x=0$

$\therefore x=\dfrac{\pi}{2}$ 또는 $x=\dfrac{3}{2}\pi$ ($\because 0<x<2\pi$)

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{3}{2}\pi$	$\cdots$	2π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗		↘		↗	

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $\left[\dfrac{3}{2}\pi, 2\pi\right)$에서 증가하고, 구간 $\left[\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3}{2}\pi\right]$에서 감소한다. 답 풀이 참조

0728 $f'(x)=\dfrac{2(x^2+4)-(2x-3)\cdot 2x}{(x^2+4)^2}=\dfrac{-2(x^2-3x-4)}{(x^2+4)^2}$

$f'(x)=0$에서 $x^2-3x-4=0$

$(x+1)(x-4)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=4$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

따라서 $f(x)$는 $x=4$에서 극댓값 $f(4)=\dfrac{1}{4}$, $x=-1$에서 극솟값 $f(-1)=-1$을 갖는다. 답 극댓값: $\dfrac{1}{4}$, 극솟값: -1

0729 $f(x)=\frac{x+2}{\sqrt{x+1}}$에서 $x>-1$이고

$$f'(x)=\frac{\sqrt{x+1}-(x+2)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x+1}}}{(\sqrt{x+1})^2}=\frac{x}{2(x+1)\sqrt{x+1}}$$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=0$

따라서 $f(x)$는 $x=0$에서 극솟값 $f(0)=2$를 갖는다.

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	극소	↗

답 극솟값: 2

0730 $f'(x)=e^x+xe^x=(1+x)e^x$

$f'(x)=0$에서 $\quad 1+x=0\ (\because e^x>0)$

$\therefore x=-1$

따라서 $f(x)$는 $x=-1$에서 극솟값 $f(-1)=-\frac{1}{e}$을 갖는다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗

답 극솟값: $-\frac{1}{e}$

0731 $f(x)=-x\ln x$에서 $x>0$이고

$$f'(x)=-\ln x-x\cdot\frac{1}{x}=-\ln x-1$$

$f'(x)=0$에서 $\quad \ln x=-1 \quad \therefore x=\frac{1}{e}$

따라서 $f(x)$는 $x=\frac{1}{e}$에서 극댓값 $f\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{e}$을 갖는다.

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{e}$	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		↗	극대	↘

답 극댓값: $\frac{1}{e}$

0732 $f'(x)=1+2\cos x$

$f'(x)=0$에서 $\quad \cos x=-\frac{1}{2}$

$\therefore x=\frac{2}{3}\pi$ 또는 $x=\frac{4}{3}\pi\ (\because 0<x<2\pi)$

x	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}\pi$	$\cdots$	$\frac{4}{3}\pi$	$\cdots$	2π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	극대	↘	극소	↗	

따라서 $f(x)$는 $x=\frac{2}{3}\pi$에서 극댓값 $f\left(\frac{2}{3}\pi\right)=\frac{2}{3}\pi+\sqrt{3}$, $x=\frac{4}{3}\pi$에서 극솟값 $f\left(\frac{4}{3}\pi\right)=\frac{4}{3}\pi-\sqrt{3}$을 갖는다.

답 극댓값: $\frac{2}{3}\pi+\sqrt{3}$, 극솟값: $\frac{4}{3}\pi-\sqrt{3}$

0733 (1) $f'(x)=3x^2-6x-9$, $f''(x)=6x-6$

(2) $f'(x)=0$에서 $\quad 3x^2-6x-9=0$

$x^2-2x-3=0, \quad (x+1)(x-3)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=3$

$\therefore f''(-1)=-12<0,\ f''(3)=12>0$

(3) $f(x)$의 극댓값은 $f(-1)=10$, 극솟값은 $f(3)=-22$이다.

답 (1) $f'(x)=3x^2-6x-9$, $f''(x)=6x-6$

(2) $f''(-1)<0$, $f''(3)>0$

(3) 극댓값: 10, 극솟값: -22

0734 $f'(x)=4-\frac{1}{x^2}$이므로 $\quad f''(x)=\frac{2}{x^3}$

$f'(x)=0$에서 $\quad \frac{1}{x^2}=4, \quad x^2=\frac{1}{4}$

$\therefore x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=\frac{1}{2}$

이때 $f''\left(-\frac{1}{2}\right)=-16<0$, $f''\left(\frac{1}{2}\right)=16>0$이므로 $f(x)$의 극댓값은 $f\left(-\frac{1}{2}\right)=-4$, 극솟값은 $f\left(\frac{1}{2}\right)=4$이다.

답 극댓값: -4, 극솟값: 4

0735 $f'(x)=\frac{2-2x}{2\sqrt{2x-x^2}}=\frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}$이므로

$$f''(x)=\frac{-1\cdot\sqrt{2x-x^2}-(1-x)\cdot\frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}}{(\sqrt{2x-x^2})^2}$$
$$=\frac{1}{(x^2-2x)\sqrt{2x-x^2}}$$

$f'(x)=0$에서 $\quad 1-x=0 \quad \therefore x=1$

이때 $f''(1)=-1<0$이므로 $f(x)$의 극댓값은 $f(1)=1$이다.

답 극댓값: 1

0736 $f'(x)=(2x+1)e^x+(x^2+x+1)e^x$
$=(x^2+3x+2)e^x$

이므로

$$f''(x)=(2x+3)e^x+(x^2+3x+2)e^x$$
$$=(x^2+5x+5)e^x$$

$f'(x)=0$에서 $\quad x^2+3x+2=0\ (\because e^x>0)$

$(x+2)(x+1)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=-1$

이때 $f''(-2)=-\frac{1}{e^2}<0$, $f''(-1)=\frac{1}{e}>0$이므로 $f(x)$의 극댓값은 $f(-2)=\frac{3}{e^2}$, 극솟값은 $f(-1)=\frac{1}{e}$이다.

답 극댓값: $\frac{3}{e^2}$, 극솟값: $\frac{1}{e}$

0737 $f(x)=x^2\ln x$에서 $x>0$이고

$$f'(x)=2x\ln x+x^2\cdot\frac{1}{x}=x(2\ln x+1)$$

$$\therefore f''(x)=2\ln x+1+x\cdot\frac{2}{x}=2\ln x+3$$

$f'(x)=0$에서 $\quad 2\ln x+1=0$

$\ln x=-\frac{1}{2} \quad \therefore x=e^{-\frac{1}{2}}$

이때 $f''(e^{-\frac{1}{2}})=2>0$이므로 $f(x)$의 극솟값은 $f(e^{-\frac{1}{2}})=-\frac{1}{2e}$이다.

답 극솟값: $-\frac{1}{2e}$

0738 $f'(x)=-\sin x-\cos x$이므로

$f''(x)=-\cos x+\sin x$

$f'(x)=0$에서 $\quad \sin x=-\cos x$

$\therefore\ x=\frac{3}{4}\pi\ (\because\ 0<x<\pi)$

이때 $f''\left(\frac{3}{4}\pi\right)=\sqrt{2}>0$이므로 $f(x)$의 극솟값은 $f\left(\frac{3}{4}\pi\right)=-\sqrt{2}$이다.

답 극솟값: $-\sqrt{2}$

유형 01 접선의 방정식: 접점의 좌표가 주어진 경우 본책 110쪽

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a,\ b)$가 주어지면 접선의 방정식은 다음과 같은 순서로 구한다.
(i) 접선의 기울기 $f'(a)$를 구한다.
(ii) $y-b=f'(a)(x-a)$에 대입하여 접선의 방정식을 구한다.

0739 $f(x)=\sqrt{2x^2-1}$이라 하면

$$f'(x)=\frac{4x}{2\sqrt{2x^2-1}}=\frac{2x}{\sqrt{2x^2-1}}$$

점 $(-1,\ 1)$에서의 접선의 기울기가 $f'(-1)=-2$이므로 접선의 방정식은

$y-1=-2(x+1) \qquad \therefore\ y=-2x-1$

따라서 $a=-2,\ b=-1$이므로

$a+b=-3$

답 ②

0740 $f(x)=xe^x-1$이라 하면 $\qquad f'(x)=e^x+xe^x$

점 $(0,\ -1)$에서의 접선의 기울기가 $f'(0)=1$이므로 구하는 접선의 방정식은

$y+1=x \qquad \therefore\ y=x-1$

답 $y=x-1$

0741 $f'(x)=\sqrt{3}\cos x-3\sin x$이므로 점 $\left(\frac{\pi}{3},\ 3\right)$에서의 접선의 기울기는

$$f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{2}=-\sqrt{3} \qquad \cdots\ ❶$$

따라서 접선의 방정식은

$$y-3=-\sqrt{3}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\therefore\ y=-\sqrt{3}x+\frac{\sqrt{3}}{3}\pi+3 \qquad \cdots\ ❷$$

$y=0$을 대입하면

$$0=-\sqrt{3}x+\frac{\sqrt{3}}{3}\pi+3 \qquad \therefore\ x=\frac{\pi}{3}+\sqrt{3}$$

즉 구하는 x절편은 $\frac{\pi}{3}+\sqrt{3}$이다. $\cdots$ ❸

답 $\frac{\pi}{3}+\sqrt{3}$

채점 기준	비율
❶ 접선의 기울기를 구할 수 있다.	30 %
❷ 접선의 방정식을 구할 수 있다.	40 %
❸ 접선의 x절편을 구할 수 있다.	30 %

0742 $f(x)=4x-x\ln x$라 하면

$$f'(x)=4-\left(\ln x+x\cdot\frac{1}{x}\right)=3-\ln x$$

x좌표가 e인 점에서의 접선의 기울기는

$f'(e)=3-\ln e=2$

이때 $f(e)=3e$이므로 점 $(e,\ 3e)$에서의 접선의 방정식은

$y-3e=2(x-e) \qquad \therefore\ y=2x+e$

이 직선이 점 $(k,\ 5e)$를 지나므로

$5e=2k+e \qquad \therefore\ k=2e$

답 $2e$

0743 $f(x)=e^{x^3}$이라 하면

$f'(x)=3x^2e^{x^3}$

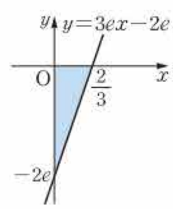
점 $(1,\ e)$에서의 접선의 기울기가 $f'(1)=3e$이므로 접선의 방정식은

$y-e=3e(x-1) \qquad \therefore\ y=3ex-2e$

접선의 x절편과 y절편이 각각 $\frac{2}{3},\ -2e$이므로 오른쪽 그림에서 구하는 도형의 넓이는

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot 2e=\frac{2}{3}e$$

답 ③



0744 $f(x)=e^{2x}+\sin x$라 하면

$f'(x)=2e^{2x}+\cos x$

점 $(0,\ 1)$에서의 접선의 기울기가 $f'(0)=3$이므로 접선의 방정식은

$y-1=3x \qquad \therefore\ 3x-y+1=0$

직선 $3x-y+1=0$이 원 $(x-3)^2+y^2=r^2$과 접하면 직선 $3x-y+1=0$과 원의 중심 $(3,\ 0)$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이인 $|r|$와 같으므로

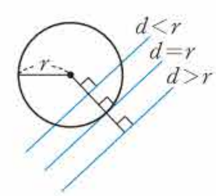
$$|r|=\frac{|3\cdot 3+1|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\sqrt{10} \qquad \therefore\ r^2=10$$

답 10

SSEN 특강 원과 직선의 위치 관계

원의 중심과 직선 사이의 거리를 d, 원의 반지름의 길이를 r라 하면 원과 직선의 위치 관계는

① $d<r$
⇒ 서로 다른 두 점에서 만난다.
② $d=r$
⇒ 한 점에서 만난다. (접한다.)
③ $d>r$ ⇒ 만나지 않는다.



유형 02 접선과 수직인 직선의 방정식 본책 110쪽

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a,\ f(a))$를 지나고 이 점에서의 접선과 수직인 직선의 방정식은

$$y-f(a)=-\frac{1}{f'(a)}(x-a)\ (\text{단, } f'(a)\neq 0)$$

0745 $f(x)=x-\cos x$라 하면

$f'(x)=1+\sin x$

점 $\left(\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$에서의 접선의 기울기는 $\quad f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=2$

따라서 이 점에서의 접선과 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{2}$이므로 직선의 방정식은

$y-\frac{\pi}{2}=-\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$

$\therefore 2x+4y-3\pi=0$

따라서 $a=2$, $b=4$이므로 $\quad ab=8$ 답 ④

0746 $f(x)=\frac{x}{x-1}$라 하면

$a=f(2)=\frac{2}{2-1}=2$ ⋯ ❶

$f'(x)=\frac{(x-1)-x}{(x-1)^2}=-\frac{1}{(x-1)^2}$이므로 점 $(2,\ 2)$에서의 접선의 기울기는 $\quad f'(2)=-1$

따라서 이 점에서의 접선과 수직인 직선의 기울기는 1이므로 직선의 방정식은

$y-2=x-2 \quad \therefore y=x$ ⋯ ❷

이 직선이 점 $(b,\ -3)$을 지나므로 $\quad b=-3$ ⋯ ❸

$\therefore a^2+b^2=13$ ⋯ ❹

답 13

채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	20 %
❷ 접선과 수직인 직선의 방정식을 구할 수 있다.	50 %
❸ b의 값을 구할 수 있다.	20 %
❹ a^2+b^2의 값을 구할 수 있다.	10 %

0747 $f(x)=ke^x-2$, $g(x)=x^2-3x+1$이라 하고 교점의 x좌표를 t라 하면 $f(t)=g(t)$에서

$ke^t-2=t^2-3t+1$

$\therefore ke^t=t^2-3t+3$ ⋯⋯ ㉠

$f'(x)=ke^x$, $g'(x)=2x-3$이고 교점에서 두 곡선에 각각 그은 두 접선이 서로 수직이므로 $f'(t)g'(t)=-1$에서

$ke^t(2t-3)=-1$ ⋯⋯ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$(t^2-3t+3)(2t-3)=-1$

$2t^3-9t^2+15t-8=0$

$(t-1)(2t^2-7t+8)=0$

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 2 & -9 & 15 & -8 \\ & & 2 & -7 & 8 \\ \hline & 2 & -7 & 8 & 0 \end{array}$$

$\therefore t=1\ (\because 2t^2-7t+8>0)$

$t=1$을 ㉠에 대입하면

$ke=1 \quad \therefore k=\frac{1}{e}$ 답 ④

0748 $f(x)=\ln ex$라 하면

$f'(x)=\frac{e}{ex}=\frac{1}{x}$

점 $P(t,\ \ln et)$에서의 접선의 기울기는 $\quad f'(t)=\frac{1}{t}$

즉 점 P에서의 접선과 수직인 직선의 기울기는 $-t$이므로 직선의 방정식은

$y-\ln et=-t(x-t)$

$\therefore y=-tx+t^2+\ln et$

따라서 $Q(0,\ t^2+\ln et)$이므로

$\overline{PQ}=\sqrt{(-t)^2+(t^2+\ln et-\ln et)^2}=\sqrt{t^2+t^4}$

$\therefore \lim_{t\to\infty}\frac{\overline{PQ}}{t^2}=\lim_{t\to\infty}\frac{\sqrt{t^2+t^4}}{t^2}=\lim_{t\to\infty}\frac{\sqrt{\frac{1}{t^2}+1}}{1}=1$ 답 1

유형 03 접선의 방정식; 기울기가 주어진 경우 본책 111쪽

곡선 $y=f(x)$의 접선의 기울기 m이 주어지면 접선의 방정식은 다음과 같은 순서로 구한다.
(i) 접점의 좌표를 $(t,\ f(t))$로 놓는다.
(ii) $f'(t)=m$임을 이용하여 접점의 좌표를 구한다.
(iii) $y-f(t)=m(x-t)$에 대입하여 접선의 방정식을 구한다.

0749 $2x+y=0$에서 $y=-2x$이므로 이 직선과 수직인 직선의 기울기는 $\frac{1}{2}$이다.

$f(x)=x\ln x-x$라 하면

$f'(x)=\ln x+x\cdot\frac{1}{x}-1=\ln x$

접점의 좌표를 $(t,\ t\ln t-t)$라 하면 접선의 기울기가 $\frac{1}{2}$이므로

$f'(t)=\frac{1}{2}$에서

$\ln t=\frac{1}{2} \quad \therefore t=\sqrt{e}$

즉 접점의 좌표는 $\left(\sqrt{e},\ -\frac{\sqrt{e}}{2}\right)$이므로 접선의 방정식은

$y+\frac{\sqrt{e}}{2}=\frac{1}{2}(x-\sqrt{e}) \quad \therefore y=\frac{1}{2}x-\sqrt{e}$

따라서 구하는 y절편은 $-\sqrt{e}$이다. 답 ③

0750 $f(x)=\frac{2}{x-1}$라 하면 $\quad f'(x)=-\frac{2}{(x-1)^2}$

접점의 좌표를 $\left(t,\ \frac{2}{t-1}\right)$라 하면 접선의 기울기가 -2이므로
└ 주어진 두 직선의 기울기가 모두 -2이다.

$f'(t)=-2$에서

$-\frac{2}{(t-1)^2}=-2, \quad (t-1)^2=1$

$t-1=\pm1 \quad \therefore t=0$ 또는 $t=2$ ⋯ ❶

따라서 접점의 좌표는 $(0,\ -2)$, $(2,\ 2)$이므로 접선의 방정식은

$y+2=-2x$, $y-2=-2(x-2)$

$\therefore y=-2x-2$, $y=-2x+6$ ⋯ ❷

이때 $a>b$이므로 $\quad a=6$, $b=-2$

$\therefore a-b=8$ ⋯ ❸

답 8

채점 기준	비율
❶ 접점의 x좌표를 구할 수 있다.	50 %
❷ 접선의 방정식을 구할 수 있다.	30 %
❸ $a-b$의 값을 구할 수 있다.	20 %

다른 풀이 곡선 $y=\frac{2}{x-1}$의 접선의 방정식을 $y=-2x+k$라 하면

$-2x+k=\frac{2}{x-1}$, $\quad (-2x+k)(x-1)=2$

$\therefore 2x^2-(k+2)x+k+2=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=\{-(k+2)\}^2-4\cdot2\cdot(k+2)=0$

$k^2-4k-12=0$, $\quad (k+2)(k-6)=0$

$\therefore k=-2$ 또는 $k=6$

따라서 $a=6$, $b=-2$이므로

$a-b=8$

0751 직선 $y=ex$를 y축의 방향으로 a만큼 평행이동한 직선의 방정식은 $y=ex+a$이므로 접선의 기울기는 e이다.

$f(x)=\ln\left(x+\frac{1}{e}\right)$이라 하면

$f'(x)=\frac{1}{x+\frac{1}{e}}=\frac{e}{ex+1}$

접점의 좌표를 $\left(t,\ \ln\left(t+\frac{1}{e}\right)\right)$이라 하면 $f'(t)=e$에서

$\frac{e}{et+1}=e$, $\quad et+1=1$

$\therefore t=0$

즉 접점의 좌표는 $(0,\ -1)$이므로 접선의 방정식은

$y+1=ex$ $\quad \therefore y=ex-1$

$\therefore a=-1$

답 -1

0752 함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 점 $(t,\ 0)$에서 접한다고 하면 $f(t)=0$에서

$e^{2t}+at=0$ …… ㉠

$f'(x)=2e^{2x}+a$이고, 점 $(t,\ 0)$에서의 접선의 기울기가 0이므로
└접선이 x축이므로 기울기가 0이다.

$f'(t)=0$에서

$2e^{2t}+a=0$ $\quad \therefore a=-2e^{2t}$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $\quad e^{2t}-2e^{2t}\cdot t=0$

$e^{2t}(1-2t)=0$ $\quad \therefore t=\frac{1}{2}\ (\because e^{2t}>0)$

$t=\frac{1}{2}$을 ㉡에 대입하면

$a=-2e$

답 ①

0753 $f'(x)=\cos x-\sin x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{3}{4}\pi\right)$

접점의 좌표를 $(t,\ \sin t+\cos t)$라 하면 접선의 기울기가 $\tan 45°=1$이므로 $f'(t)=1$에서

$\sqrt{2}\sin\left(t+\frac{3}{4}\pi\right)=1$

$\therefore \sin\left(t+\frac{3}{4}\pi\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$

이때 $0<t<2\pi$에서 $\frac{3}{4}\pi<t+\frac{3}{4}\pi<\frac{11}{4}\pi$이므로

$t+\frac{3}{4}\pi=\frac{9}{4}\pi$ $\quad \therefore t=\frac{3}{2}\pi$

따라서 접점의 좌표가 $\left(\frac{3}{2}\pi,\ -1\right)$이므로 접선의 방정식은

$y+1=x-\frac{3}{2}\pi$

$\therefore y=x-\frac{3}{2}\pi-1$

$y=0$을 대입하면

$0=x-\frac{3}{2}\pi-1$ $\quad \therefore x=\frac{3}{2}\pi+1$

즉 구하는 x절편은 $\frac{3}{2}\pi+1$이다.

답 ④

참고 $f'(x)=-\sin x+\cos x$에서 $\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}$이므로

$f'(x)=\sqrt{2}\left\{\sin x\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\cos x\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$

$=\sqrt{2}\left(\sin x\cos\frac{3}{4}\pi+\cos x\sin\frac{3}{4}\pi\right)$

$=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{3}{4}\pi\right)$

0754 $\triangle$PQR의 밑변을 $\overline{PQ}$로 생각하면 높이는 점 R와 직선 PQ 사이의 거리와 같으므로 곡선 $y=\ln x^2$ 위의 점 $R(t,\ \ln t^2)$에서의 접선이 직선 PQ와 평행할 때 $\triangle$PQR의 넓이가 최대가 된다.

$f(x)=\ln x^2$이라 하면

$f'(x)=\frac{2x}{x^2}=\frac{2}{x}$

두 점 $P(1,\ 0)$, $Q(e,\ 2)$를 지나는 직선의 기울기는 $\frac{2}{e-1}$이므로

$f'(t)=\frac{2}{e-1}$에서

$\frac{2}{t}=\frac{2}{e-1}$ $\quad \therefore t=e-1$

답 $e-1$

유형 04 접선의 방정식 ; 곡선 밖의 한 점의 좌표가 주어진 경우 본책 112쪽

곡선 $y=f(x)$ 밖의 한 점 $(a,\ b)$에서 곡선에 그은 접선의 방정식은 다음과 같은 순서로 구한다.
(i) 접점의 좌표를 $(t,\ f(t))$로 놓는다.
(ii) $y-f(t)=f'(t)(x-t)$에 $x=a$, $y=b$를 대입하여 t의 값을 구한다.
(iii) $y-f(t)=f'(t)(x-t)$에 대입하여 접선의 방정식을 구한다.

0755 $f(x)=e^{-x-1}$이라 하면

$f'(x)=-e^{-x-1}$

접점의 좌표를 $(t,\ e^{-t-1})$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=-e^{-t-1}$이므로 접선의 방정식은

$y-e^{-t-1}=-e^{-t-1}(x-t)$ …… ㉠

직선 ㉠이 원점을 지나므로

$-e^{-t-1}=-e^{-t-1}\cdot(-t)$

$\therefore t=-1\ (\because e^{-t-1}>0)$

$t=-1$을 ㉠에 대입하면

$y-1=-(x+1)$ $\quad \therefore y=-x$

이 직선이 점 $(1,\ a)$를 지나므로

$a=-1$

답 ③

0756 $f(x)=\sqrt{x^2+3}$이라 하면

$$f'(x)=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+3}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+3}}$$

접점의 좌표를 $(t,\ \sqrt{t^2+3})$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=\frac{t}{\sqrt{t^2+3}}$이므로 접선의 방정식은

$$y-\sqrt{t^2+3}=\frac{t}{\sqrt{t^2+3}}(x-t) \quad \cdots\cdots ㉠$$

직선 ㉠이 점 $(3,\ 0)$을 지나므로

$$-\sqrt{t^2+3}=\frac{t}{\sqrt{t^2+3}}(3-t)$$

$$-(t^2+3)=3t-t^2$$

$$3t=-3 \qquad \therefore t=-1$$

$t=-1$을 ㉠에 대입하면

$$y-2=-\frac{1}{2}(x+1)$$

$$\therefore y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$$

따라서 구하는 y절편은 $\frac{3}{2}$이다.

답 ⑤

0757 $f(x)=xe^x$이라 하면

$$f'(x)=e^x+xe^x=(x+1)e^x$$

접점의 좌표를 $(t,\ te^t)$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=(t+1)e^t$이므로 접선의 방정식은

$$y-te^t=(t+1)e^t(x-t)$$

이 직선이 점 $(1,\ 0)$을 지나므로

$$-te^t=(t+1)(1-t)e^t, \qquad (t^2-t-1)e^t=0$$

$$\therefore t^2-t-1=0\ (\because e^t>0) \quad \cdots\cdots ㉠$$

이차방정식 ㉠의 두 근을 α, β라 하면 접선의 기울기는 각각 $(\alpha+1)e^\alpha$, $(\beta+1)e^\beta$이므로 두 접선의 기울기의 곱은

$$(\alpha+1)e^\alpha\cdot(\beta+1)e^\beta=(\alpha\beta+\alpha+\beta+1)e^{\alpha+\beta}$$

이때 이차방정식 ㉠에서 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=1,\ \alpha\beta=-1$$

이므로 구하는 기울기의 곱은

$$(-1+1+1)e=e$$

답 e

0758 $f(x)=\frac{x}{x+1}$라 하면

$$f'(x)=\frac{x+1-x}{(x+1)^2}=\frac{1}{(x+1)^2}$$

접점의 좌표를 $\left(t,\ \frac{t}{t+1}\right)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=\frac{1}{(t+1)^2}$이므로 접선의 방정식은

$$y-\frac{t}{t+1}=\frac{1}{(t+1)^2}(x-t) \quad \cdots\cdots ㉠$$

직선 ㉠이 점 $(3,\ 3)$을 지나므로

$$3-\frac{t}{t+1}=\frac{1}{(t+1)^2}(3-t)$$

$$3(t+1)^2-t(t+1)=3-t$$

$$2t^2+6t=0, \qquad t(t+3)=0$$

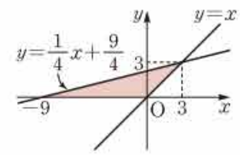
$$\therefore t=-3 \text{ 또는 } t=0$$

$t=-3$을 ㉠에 대입하면

$$y-\frac{3}{2}=\frac{1}{4}(x+3) \qquad \therefore y=\frac{1}{4}x+\frac{9}{4}$$

$t=0$을 ㉠에 대입하면 $\quad y=x$

두 접선의 교점의 좌표가 $(3,\ 3)$이고 각각의 x절편이 -9, 0이므로 오른쪽 그림에서 구하는 도형의 넓이는



$$\frac{1}{2}\cdot 9\cdot 3=\frac{27}{2}$$

답 ②

다른 풀이 점 $(3,\ 3)$에서 곡선에 그은 접선의 기울기를 m이라 하면 접선의 방정식은

$$y-3=m(x-3)$$

$$\therefore y=mx-3m+3$$

$mx-3m+3=\frac{x}{x+1}$에서

$$mx^2+(2-2m)x+3-3m=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(1-m)^2-m(3-3m)=0$$

$$4m^2-5m+1=0, \qquad (4m-1)(m-1)=0$$

$$\therefore m=\frac{1}{4} \text{ 또는 } m=1$$

따라서 접선의 방정식은

$$y=\frac{1}{4}x+\frac{9}{4},\ y=x$$

두 접선의 교점의 좌표가 $(3,\ 3)$이고 각각의 x절편이 -9, 0이므로 구하는 넓이는

$$\frac{1}{2}\cdot 9\cdot 3=\frac{27}{2}$$

0759 $f(x)=x\ln x$라 하면

$$f'(x)=\ln x+x\cdot\frac{1}{x}=\ln x+1$$

접점 B의 좌표를 $(t,\ t\ln t)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=\ln t+1$이므로 접선의 방정식은

$$y-t\ln t=(\ln t+1)(x-t)$$

$$\therefore y=(\ln t+1)x-t$$

이 직선이 점 $\mathrm{A}(0,\ -1)$을 지나므로

$$-1=-t \qquad \therefore t=1$$

즉 점 B의 좌표는 $(1,\ 0)$이고 접선의 기울기는 $f'(1)=1$이다. ⋯ ❶

이때 점 B에서의 접선과 수직인 직선의 기울기가 -1이므로 직선의 방정식은

$$y=-(x-1) \qquad \therefore y=-x+1 \quad \cdots ❷$$

따라서 점 C의 좌표는 $(0,\ 1)$이므로 △ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2}\cdot(1+1)\cdot 1=1 \quad \cdots ❸$$

답 1

채점 기준	비율
❶ 점 B의 좌표와 점 B에서의 접선의 기울기를 구할 수 있다.	40 %
❷ 점 B에서의 접선과 수직인 직선의 방정식을 구할 수 있다.	30 %
❸ △ABC의 넓이를 구할 수 있다.	30 %

0760 $f(x)=e^{3x}$, $g(x)=\ln x$라 하면

$f'(x)=3e^{3x}$, $g'(x)=\dfrac{1}{x}$

$y=f(x)$의 그래프 위의 접점의 좌표를 $(a,\ e^{3a})$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(a)=3e^{3a}$이므로 접선의 방정식은

$y-e^{3a}=3e^{3a}(x-a)$

이 직선이 원점을 지나므로

$-e^{3a}=-3ae^{3a}$ $\quad\therefore a=\dfrac{1}{3}$

$\therefore f'(a)=f'\left(\dfrac{1}{3}\right)=3e$

$y=g(x)$의 그래프 위의 접점의 좌표를 $(b,\ \ln b)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $g'(b)=\dfrac{1}{b}$이므로 접선의 방정식은

$y-\ln b=\dfrac{1}{b}(x-b)$

이 직선이 원점을 지나므로

$-\ln b=-1$ $\quad\therefore b=e$

$\therefore g'(b)=g'(e)=\dfrac{1}{e}$

두 접선이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α, $\beta(\alpha>\beta)$라 하면

$\tan\alpha=f'(a)=3e$, $\tan\beta=g'(b)=\dfrac{1}{e}$

따라서 $\theta=\alpha-\beta$이므로

$$\tan\theta=\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{3e-\frac{1}{e}}{1+3e\cdot\frac{1}{e}}=\frac{3}{4}e-\frac{1}{4e}$$

답 ④

유형 05 곡선 밖의 점에서 그은 접선의 개수 본책 113쪽

(i) 접점의 좌표를 $(t,\ f(t))$로 놓고 접선의 방정식을 세운다.
(ii) 곡선 밖의 점의 좌표를 접선의 방정식에 대입하여 t에 대한 방정식을 만든다.
(iii) t에 대한 방정식의 실근의 개수를 이용하여 접선의 개수를 구한다.

0761 $f(x)=xe^{x-1}$이라 하면

$f'(x)=e^{x-1}+xe^{x-1}=(x+1)e^{x-1}$

접점의 좌표를 $(t,\ te^{t-1})$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=(t+1)e^{t-1}$이므로 접선의 방정식은

$y-te^{t-1}=(t+1)e^{t-1}(x-t)$

이 직선이 점 $(a,\ 0)$을 지나므로

$-te^{t-1}=(t+1)(a-t)e^{t-1}$

$(t^2-at-a)e^{t-1}=0$

$\therefore t^2-at-a=0\ (\because e^{t-1}>0)$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

점 $(a,\ 0)$에서 곡선 $y=xe^{x-1}$에 그을 수 있는 접선이 두 개이므로 이차방정식 ㉠은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면

$D=a^2+4a>0$, $\quad a(a+4)>0$

$\therefore a<-4$ 또는 $a>0$ $\quad$ 답 $a<-4$ 또는 $a>0$

0762 $f(x)=\dfrac{x-1}{x}$이라 하면

$f'(x)=\dfrac{x-(x-1)}{x^2}=\dfrac{1}{x^2}$

접점의 좌표를 $\left(t,\ \dfrac{t-1}{t}\right)$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=\dfrac{1}{t^2}$이므로 접선의 방정식은

$y-\dfrac{t-1}{t}=\dfrac{1}{t^2}(x-t)$ $\quad\cdots$ ❶

이 직선이 점 $(3,\ 2)$를 지나므로

$2-\dfrac{t-1}{t}=\dfrac{1}{t^2}(3-t)$

$2t^2-t(t-1)=3-t$

$t^2+2t-3=0$, $\quad(t+3)(t-1)=0$

$\therefore t=-3$ 또는 $t=1$

따라서 접점의 개수가 2이므로 점 $(3,\ 2)$에서 곡선 $y=\dfrac{x-1}{x}$에 그을 수 있는 접선의 개수는 2이다. $\quad\cdots$ ❷

답 2

채점 기준	비율
❶ 접선의 방정식을 t에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	50 %
❷ 접선의 개수를 구할 수 있다.	50 %

참고 $t^2+2t-3=0$에서 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=1^2+3=4>0$

이므로 t의 값을 구해 보지 않아도 서로 다른 접점의 개수가 2임을 알 수 있다.

0763 $f(x)=(x+a)e^{-x}$이라 하면

$f'(x)=e^{-x}-(x+a)e^{-x}$
$=(1-x-a)e^{-x}$

접점의 좌표를 $(t,\ (t+a)e^{-t})$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=(1-t-a)e^{-t}$이므로 접선의 방정식은

$y-(t+a)e^{-t}=(1-t-a)e^{-t}(x-t)$

이 직선이 원점을 지나므로

$-(t+a)e^{-t}=(1-t-a)e^{-t}\cdot(-t)$

$(t^2+at+a)e^{-t}=0$

$\therefore t^2+at+a=0\ (\because e^{-t}>0)$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

원점에서 곡선 $y=(x+a)e^{-x}$에 오직 하나의 접선을 그을 수 있으려면 이차방정식 ㉠이 중근을 가져야 한다.

따라서 이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면

$D=a^2-4a=0$, $\quad a(a-4)=0$

$\therefore a=4\ (\because a\neq 0)$ $\quad$ 답 ④

유형 06 공통인 접선 본책 113쪽

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 $x=t$인 점에서 공통인 접선을 가지면
① $x=t$인 점에서 두 곡선이 만난다. ➡ $f(t)=g(t)$
② $x=t$인 점에서 두 곡선의 접선의 기울기가 같다.
➡ $f'(t)=g'(t)$

0764 $f(x)=\ln x$, $g(x)=ax+\dfrac{b}{x}$라 하면

$f'(x)=\dfrac{1}{x}$, $g'(x)=a-\dfrac{b}{x^2}$

$f(e^3)=g(e^3)$에서 $\quad 3=ae^3+\dfrac{b}{e^3}$

$\therefore 3e^3=ae^6+b$ ...... ㉠

$f'(e^3)=g'(e^3)$에서 $\quad \dfrac{1}{e^3}=a-\dfrac{b}{e^6}$

$\therefore e^3=ae^6-b$ ...... ㉡

㉠+㉡을 하면 $\quad 4e^3=2ae^6 \quad \therefore a=\dfrac{2}{e^3}$

㉠−㉡을 하면 $\quad 2e^3=2b \quad \therefore b=e^3$

$\therefore ab=2$

답 ③

0765 $f(x)=e^{x-1}$, $g(x)=\sqrt{2x+a}$라 하면

$f'(x)=e^{x-1}$, $g'(x)=\dfrac{2}{2\sqrt{2x+a}}=\dfrac{1}{\sqrt{2x+a}}$

$f(p)=g(p)$에서 $\quad e^{p-1}=\sqrt{2p+a}$ ...... ㉠

$f'(p)=g'(p)$에서 $\quad e^{p-1}=\dfrac{1}{\sqrt{2p+a}}$ ...... ㉡ ··· ❶

㉠, ㉡에서

$e^{p-1}=\dfrac{1}{e^{p-1}}$, $\quad (e^{p-1})^2=1$

$\therefore e^{p-1}=1\ (\because e^{p-1}>0)$

따라서 $p-1=0$이므로 $\quad p=1$

$p=1$을 ㉠에 대입하면

$1=\sqrt{2+a} \quad \therefore a=-1$

또 $q=f(1)=1$이므로 ··· ❷

$apq=-1$ ··· ❸

답 -1

채점 기준	비율
❶ a, p에 대한 두 방정식을 세울 수 있다.	50 %
❷ a, p, q의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ apq의 값을 구할 수 있다.	10 %

0766 두 함수의 그래프의 교점의 x좌표를 t라 하면

$f(t)=g(t)$에서 $\quad a+\sin t=\sin^2 t$

$\therefore a=\sin^2 t-\sin t$ ...... ㉠

$f'(x)=\cos x$, $g'(x)=2\sin x\cos x$이므로 $f'(t)=g'(t)$에서

$\cos t=2\sin t\cos t$, $\quad \cos t(2\sin t-1)=0$

$\therefore \cos t=0$ 또는 $\sin t=\dfrac{1}{2}$

(i) $\cos t=0$일 때,

$\sin t=\pm1$이므로 이를 ㉠에 대입하면

$a=2\ (\because a\neq0)$

(ii) $\sin t=\dfrac{1}{2}$일 때,

$\sin t=\dfrac{1}{2}$을 ㉠에 대입하면 $\quad a=-\dfrac{1}{4}$

(i), (ii)에서 모든 실수 a의 값의 합은

$2+\left(-\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{7}{4}$

답 $\dfrac{7}{4}$

유형 07 역함수의 그래프의 접선의 방정식

본책 114쪽

함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, 곡선 $y=g(x)$ 위의 $x=a$인 점에서의 접선의 방정식은 다음과 같은 순서로 구한다.

(i) $g(a)=k$라 하면 $f(k)=a$임을 이용하여 k의 값을 구한다.

(ii) $g'(a)=\dfrac{1}{f'(k)}$임을 이용하여 접선의 기울기를 구한다.

(iii) $y-k=g'(a)(x-a)$에 대입하여 접선의 방정식을 구한다.

0767 $g(1)=k$라 하면 $f(k)=1$이므로

$\tan k=1 \quad \therefore k=\dfrac{\pi}{4}\left(\because -\dfrac{\pi}{2}<k<\dfrac{\pi}{2}\right)$

$\therefore g'(1)=\dfrac{1}{f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)}$

이때 $f'(x)=\sec^2 x$이므로 $\quad f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=2$

$\therefore g'(1)=\dfrac{1}{2}$

따라서 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $\left(1, \dfrac{\pi}{4}\right)$에서의 접선의 기울기가 $\dfrac{1}{2}$이므로 접선의 방정식은

$y-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{1}{2}(x-1) \quad \therefore y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{2}$

$y=0$을 대입하면

$0=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{2} \quad \therefore x=1-\dfrac{\pi}{2}$

즉 구하는 x절편은 $1-\dfrac{\pi}{2}$이다.

답 $1-\dfrac{\pi}{2}$

0768 $g(1)=k$라 하면 $f(k)=1$이므로

$e^{2k-1}=1, \quad 2k-1=0 \quad \therefore k=\dfrac{1}{2}$

$\therefore g'(1)=\dfrac{1}{f'\left(\dfrac{1}{2}\right)}$

이때 $f'(x)=2e^{2x-1}$이므로 $\quad f'\left(\dfrac{1}{2}\right)=2$

$\therefore g'(1)=\dfrac{1}{2}$

따라서 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $\left(1, \dfrac{1}{2}\right)$에서의 접선의 기울기가 $\dfrac{1}{2}$이므로 접선의 방정식은

$y-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}(x-1) \quad \therefore y=\dfrac{1}{2}x$

답 ②

다른 풀이 $y=e^{2x-1}$이라 하면 $\quad \ln y=2x-1$

$x=\dfrac{1}{2}(\ln y+1)$

x와 y를 서로 바꾸면 $\quad y=\dfrac{1}{2}(\ln x+1)$

즉 $g(x)=\dfrac{1}{2}(\ln x+1)$이므로 $\quad g'(x)=\dfrac{1}{2x}$

따라서 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $\left(1, \dfrac{1}{2}\right)$을 지나고 기울기가 $g'(1)=\dfrac{1}{2}$인 접선의 방정식은

$y-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}(x-1) \quad \therefore y=\dfrac{1}{2}x$

0769 $g(0)=k$라 하면 $f(k)=0$이므로

$\ln(3k+4)=0, \quad 3k+4=1$

$\therefore k=-1$ ⋯ ❶

$\therefore g'(0)=\dfrac{1}{f'(-1)}$

이때 $f'(x)=\dfrac{3}{3x+4}$이므로 $\quad f'(-1)=3$

$\therefore g'(0)=\dfrac{1}{3}$ ⋯ ❷

따라서 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(0,\ -1)$에서의 접선의 기울기가 $\dfrac{1}{3}$이므로 접선의 방정식은

$y+1=\dfrac{1}{3}x \quad \therefore y=\dfrac{1}{3}x-1$ ⋯ ❸

이 직선이 점 $(12,\ a)$를 지나므로

$a=\dfrac{1}{3}\cdot 12-1=3$ ⋯ ❹

답 3

채점 기준	비율
❶ $g(0)$의 값을 구할 수 있다.	20 %
❷ $g'(0)$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ 접선의 방정식을 구할 수 있다.	30 %
❹ a의 값을 구할 수 있다.	20 %

유형 08 매개변수로 나타낸 곡선의 접선의 방정식

본책 114쪽

매개변수로 나타낸 곡선 $x=f(t)$, $y=g(t)$에서 $t=a$에 대응하는 점에서의 접선의 방정식은 다음과 같은 순서로 구한다.

(i) $t=a$에 대응하는 점의 좌표 $(f(a),\ g(a))$를 구한다.

(ii) $\dfrac{g'(t)}{f'(t)}$를 구한 후 $t=a$에 대응하는 점에서의 접선의 기울기 $\dfrac{g'(a)}{f'(a)}$의 값을 구한다.

(iii) $y-g(a)=\dfrac{g'(a)}{f'(a)}\{x-f(a)\}$에 대입하여 접선의 방정식을 구한다.

0770 $\theta=\dfrac{3}{2}\pi$에 대응하는 점의 좌표는 $\left(1,\ \dfrac{3}{2}\pi+1\right)$

$\dfrac{dx}{d\theta}=\sin\theta$, $\dfrac{dy}{d\theta}=1-\cos\theta$이므로

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\dfrac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\ (\sin\theta\neq 0)$

$\theta=\dfrac{3}{2}\pi$에 대응하는 점에서의 접선의 기울기는

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{-1}=-1$

이므로 접선의 방정식은 $\quad y-\left(\dfrac{3}{2}\pi+1\right)=-(x-1)$

$\therefore y=-x+\dfrac{3}{2}\pi+2$

따라서 접선의 y절편은 $\dfrac{3}{2}\pi+2$이므로

$a=\dfrac{3}{2},\ b=2 \quad \therefore ab=3$

답 3

0771 $t=\ln 2$일 때

$x=e^{\ln 2}+e^{-\ln 2}=2+\dfrac{1}{2}=\dfrac{5}{2}$,

$y=e^{\ln 2}-e^{-\ln 2}=2-\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$

이므로 $t=\ln 2$에 대응하는 점의 좌표는 $\left(\dfrac{5}{2},\ \dfrac{3}{2}\right)$

$\dfrac{dx}{dt}=e^t-e^{-t}$, $\dfrac{dy}{dt}=e^t+e^{-t}$이므로

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{e^t+e^{-t}}{e^t-e^{-t}}\ (t\neq 0)$

$e^t\neq e^{-t}$에서 $t\neq -t$ $\quad \therefore t\neq 0$

$t=\ln 2$에 대응하는 점에서의 접선의 기울기는

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{e^{\ln 2}+e^{-\ln 2}}{e^{\ln 2}-e^{-\ln 2}}=\dfrac{\frac{5}{2}}{\frac{3}{2}}=\dfrac{5}{3}$

이므로 접선의 방정식은 $\quad y-\dfrac{3}{2}=\dfrac{5}{3}\left(x-\dfrac{5}{2}\right)$

$\therefore y=\dfrac{5}{3}x-\dfrac{8}{3}$

이 직선이 점 $(a,\ 9)$를 지나므로

$9=\dfrac{5}{3}a-\dfrac{8}{3} \quad \therefore a=7$

답 ⑤

0772 $\dfrac{dx}{dt}=3t^2+2kt$, $\dfrac{dy}{dt}=2t$이므로

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{2t}{3t^2+2kt}=\dfrac{2}{3t+2k}\ (3t^2+2kt\neq 0)$ ⋯ ❶

$t=1$일 때 $\dfrac{dy}{dx}=-2$이므로

$\dfrac{2}{3+2k}=-2, \quad 3+2k=-1$

$\therefore k=-2$ ⋯ ❷

$t=1$에 대응하는 점의 좌표는 $(1^3-2\cdot 1^2,\ 1^2+1)$, 즉 $(-1,\ 2)$이므로 직선 l의 방정식은

$y-2=-2(x+1) \quad \therefore y=-2x$ ⋯ ❸

답 $y=-2x$

채점 기준	비율
❶ $\dfrac{dy}{dx}$를 구할 수 있다.	40 %
❷ k의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ 직선 l의 방정식을 구할 수 있다.	30 %

0773 $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{2t\cdot t-(1+t^2)}{t^2}=\dfrac{t^2-1}{t^2}$, $\dfrac{dy}{dt}=-\dfrac{1}{t^2}$이므로

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{-\frac{1}{t^2}}{\frac{t^2-1}{t^2}}=\dfrac{1}{1-t^2}\ (t\neq 1)$

이때 $\dfrac{1}{t}=\dfrac{1}{3}$에서 $t=3$이므로 점 P에서의 접선의 기울기는

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{1-3^2}=-\dfrac{1}{8}$

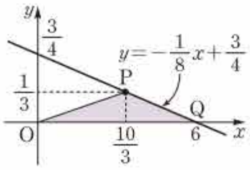
접선의 방정식은 $\quad y-\dfrac{1}{3}=-\dfrac{1}{8}\left(x-\dfrac{10}{3}\right)$

$\therefore\ y=-\frac{1}{8}x+\frac{3}{4}$

$y=0$을 대입하면

$0=-\frac{1}{8}x+\frac{3}{4}$, $\quad \frac{1}{8}x=\frac{3}{4}$ $\quad \therefore\ x=6$

따라서 Q(6, 0)이므로 오른쪽 그림에서 △OPQ의 넓이는



$\frac{1}{2}\cdot 6\cdot\frac{1}{3}=1$ 답 ④

0774 $\theta=\frac{\pi}{3}$에 대응하는 점의 좌표는 $\quad (2a, \sqrt{3}b)$

$\frac{dx}{d\theta}=a\sec\theta\tan\theta$, $\frac{dy}{d\theta}=b\sec^2\theta$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\frac{b\sec^2\theta}{a\sec\theta\tan\theta}=\frac{b\sec\theta}{a\tan\theta}=\frac{b}{a}\csc\theta\ (\tan\theta\neq 0)$$

$\theta=\frac{\pi}{3}$에 대응하는 점에서의 접선의 기울기는

$$\frac{dy}{dx}=\frac{b}{a}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}b}{3a}$$

이므로 접선의 방정식은 $\quad y-\sqrt{3}b=\frac{2\sqrt{3}b}{3a}(x-2a)$

$$\therefore\ y=\frac{2\sqrt{3}b}{3a}x-\frac{\sqrt{3}}{3}b$$

이 직선이 직선 $y=x-\sqrt{3}$과 일치하므로

$$\frac{2\sqrt{3}b}{3a}=1,\ -\frac{\sqrt{3}}{3}b=-\sqrt{3}$$

$\therefore\ a=2\sqrt{3},\ b=3$

$\therefore\ ab=6\sqrt{3}$ 답 $6\sqrt{3}$

유형 09 음함수로 나타낸 곡선의 접선의 방정식 본책 115쪽

곡선 $f(x, y)=0$ 위의 점 (a, b)에서의 접선의 방정식은 다음과 같은 순서로 구한다.

(i) 음함수의 미분법을 이용하여 $\frac{dy}{dx}$를 구한다.

(ii) $\frac{dy}{dx}$에 $x=a$, $y=b$를 대입하여 접선의 기울기 m을 구한다.

(iii) $y-b=m(x-a)$에 대입하여 접선의 방정식을 구한다.

0775 $x^3+y^3-9xy=0$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$3x^2+3y^2\frac{dy}{dx}-9y-9x\frac{dy}{dx}=0$$

$$(3x-y^2)\frac{dy}{dx}=x^2-3y$$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{x^2-3y}{3x-y^2}\ (3x\neq y^2)$$

점 (2, 4)에서의 접선의 기울기는

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2^2-3\cdot 4}{3\cdot 2-4^2}=\frac{4}{5}$$

이므로 접선의 방정식은

$y-4=\frac{4}{5}(x-2)$ $\quad \therefore\ y=\frac{4}{5}x+\frac{12}{5}$

이 직선이 점 $(0, a)$를 지나므로 $\quad a=\frac{12}{5}$

또 점 $\left(b, -\frac{8}{5}\right)$을 지나므로

$-\frac{8}{5}=\frac{4}{5}b+\frac{12}{5}$ $\quad \therefore\ b=-5$

$\therefore\ ab=-12$ 답 ④

0776 $y^2=\ln(5-x^2)+xy+8$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$2y\frac{dy}{dx}=\frac{-2x}{5-x^2}+y+x\frac{dy}{dx}$$

$$(x-2y)\frac{dy}{dx}=\frac{2x-5y+x^2y}{5-x^2}$$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{2x-5y+x^2y}{(x-2y)(5-x^2)}\ (x\neq 2y)$$

점 (2, −2)에서의 접선의 기울기는

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2\cdot 2-5\cdot(-2)+2^2\cdot(-2)}{\{2-2\cdot(-2)\}(5-2^2)}=1$$

이므로 접선의 방정식은

$y+2=x-2$ $\quad \therefore\ y=x-4$

따라서 $a=1$, $b=-4$이므로 $\quad a-b=5$ 답 ①

0777 $x^2y-2=0$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$2xy+x^2\frac{dy}{dx}=0$$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=-\frac{2y}{x}$$

점 (1, 2)에서의 접선의 기울기는

$$\frac{dy}{dx}=-4$$

이므로 접선 l의 방정식은

$y-2=-4(x-1)$ $\quad \therefore\ 4x+y-6=0$

따라서 원점과 직선 l 사이의 거리는

$$\frac{|-6|}{\sqrt{4^2+1^2}}=\frac{6\sqrt{17}}{17}$$ 답 ⑤

0778 $e^x-e^y=e-1$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$e^x-e^y\frac{dy}{dx}=0$$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{e^x}{e^y}=e^{x-y}$$ ⋯ ❶

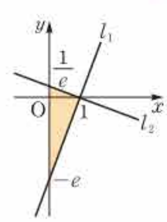
점 P(1, 0)에서의 접선의 기울기는 $\quad \frac{dy}{dx}=e$

직선 l_1의 방정식은 $\quad y=e(x-1)$ $\quad \therefore\ y=ex-e$

직선 l_2는 기울기가 $-\frac{1}{e}$이고 점 P(1, 0)을 지나므로 그 방정식은

$$y=-\frac{1}{e}(x-1)\quad \therefore\ y=-\frac{1}{e}x+\frac{1}{e}$$ ⋯ ❷

따라서 오른쪽 그림에서 구하는 도형의 넓이는



$$\frac{1}{2}\cdot\left(e+\frac{1}{e}\right)\cdot 1=\frac{e^2+1}{2e}$$ ⋯ ❸

답 $\frac{e^2+1}{2e}$

채점 기준	비율
❶ $\frac{dy}{dx}$를 구할 수 있다.	30 %
❷ 두 직선 l_1, l_2의 방정식을 구할 수 있다.	40 %
❸ 두 직선 l_1, l_2와 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.	30 %

0779 점 $(1, -1)$이 곡선 $\frac{a}{x}-\frac{b}{y}=x^2+8$ 위의 점이므로

$a+b=9$ …… ㉠

$\frac{a}{x}-\frac{b}{y}=x^2+8$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$-\frac{a}{x^2}+\frac{b}{y^2}\cdot\frac{dy}{dx}=2x$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{(2x^3+a)y^2}{bx^2}$$

점 $(1, -1)$에서의 접선의 기울기는

$$\frac{dy}{dx}=\frac{a+2}{b}$$

이므로 접선의 방정식은

$$y+1=\frac{a+2}{b}(x-1) \quad \therefore y=\frac{a+2}{b}(x-1)-1$$

이 직선이 원 $(x+5)^2+(y+6)^2=1$의 넓이를 이등분하므로 원의 중심 $(-5, -6)$을 지난다.

즉 $-6=\frac{a+2}{b}\cdot(-6)-1$에서 $\quad -5b=-6a-12$

$\therefore 6a-5b=-12$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad a=3, b=6$

$\therefore ab=18$

답 18

유형 10 함수의 증가와 감소 본책 116쪽

미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 어떤 구간에서
① $f'(x)>0$ ➡ $f(x)$는 이 구간에서 증가한다.
② $f'(x)<0$ ➡ $f(x)$는 이 구간에서 감소한다.

0780 $f'(x)=\frac{x^2+5-(x-2)\cdot 2x}{(x^2+5)^2}=\frac{-x^2+4x+5}{(x^2+5)^2}$

$$=\frac{-(x+1)(x-5)}{(x^2+5)^2}$$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-1$ 또는 $x=5$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	5	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘		↗		↘

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $[-1, 5]$에서 증가하므로 구하는 x의 값의 범위는

$-1\le x\le 5$

답 ②

0781 $f'(x)=2x-\frac{2x}{x^2}=2x-\frac{2}{x}$

$$=\frac{2(x^2-1)}{x}=\frac{2(x+1)(x-1)}{x}$$ ···➊

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-1\ (\because x<0)$ ···➋

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0
$f'(x)$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	↘		↗	

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty, -1]$에서 감소하고, 구간 $[-1, 0)$에서 증가하므로

$a=-1$ ···➌

답 -1

채점 기준	비율
➊ $f'(x)$를 구할 수 있다.	50 %
➋ $f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값을 구할 수 있다.	20 %
➌ a의 값을 구할 수 있다.	30 %

0782 $f(x)=2x+\sqrt{10-x^2}$에서 $0<x\le\sqrt{10}$이고

$10-x^2\ge 0$에서 $x^2\le 10$
$\therefore 0<x\le\sqrt{10}\ (\because x>0)$

$$f'(x)=2+\frac{-2x}{2\sqrt{10-x^2}}=\frac{2\sqrt{10-x^2}-x}{\sqrt{10-x^2}}$$

$f'(x)=0$에서 $\quad 2\sqrt{10-x^2}=x$

양변을 제곱하면

$4(10-x^2)=x^2, \quad x^2=8$

$\therefore x=2\sqrt{2}\ (\because 0<x\le\sqrt{10})$

x	0	$\cdots$	$2\sqrt{2}$	$\cdots$	$\sqrt{10}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗		↘	

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(0, 2\sqrt{2}\,]$에서 증가하므로 이 구간에 속하는 모든 정수 x의 값의 합은

$1+2=3$

답 3

0783 $f'(x)=(4x+a)e^x+(2x^2+ax)e^x$

$$=\{2x^2+(a+4)x+a\}e^x$$

$f'(x)=0$에서

$2x^2+(a+4)x+a=0\ (\because e^x>0)$ …… ㉠

함수 $f(x)$가 감소하는 x의 값의 범위가 $b\le x\le 1$이므로 이차방정식 ㉠의 두 근은 b, 1이다.

$x=1$을 ㉠에 대입하면

$2+a+4+a=0, \quad 2a=-6$

$\therefore a=-3$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$b\cdot 1=\frac{a}{2} \quad \therefore b=-\frac{3}{2}$

$\therefore a+b=-\frac{9}{2}$

답 ②

유형 11~12 함수가 증가 또는 감소하기 위한 조건 본책 116쪽

어떤 구간에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 이 구간에서
① 증가하면 ➡ $f'(x)\ge 0$
② 감소하면 ➡ $f'(x)\le 0$

0784 $f'(x)=(2x+a)e^{-x}-(x^2+ax+2)e^{-x}$

$$=\{-x^2+(2-a)x+a-2\}e^{-x}$$

함수 $f(x)$가 구간 $(-\infty, \infty)$에서 감소하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\le 0$이어야 하므로

$-x^2+(2-a)x+a-2\le 0\ (\because e^{-x}>0)$

$\therefore x^2+(a-2)x-a+2\ge 0$

이차방정식 $x^2+(a-2)x-a+2=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(a-2)^2+4a-8\le 0$

$a^2-4\le 0, \quad (a+2)(a-2)\le 0$

$\therefore\ -2\le a\le 2$

따라서 정수 a는 -2, -1, 0, 1, 2의 5개이다. 답 ⑤

SSEN 특강 이차부등식이 항상 성립할 조건

모든 실수 x에 대하여 이차부등식이 항상 성립할 조건은 다음과 같다. (단, $D=b^2-4ac$)

① $ax^2+bx+c>0 \Rightarrow a>0,\ D<0$

② $ax^2+bx+c\ge 0 \Rightarrow a>0,\ D\le 0$

③ $ax^2+bx+c<0 \Rightarrow a<0,\ D<0$

④ $ax^2+bx+c\le 0 \Rightarrow a<0,\ D\le 0$

0785 $f'(x)=a-2\sin 2x$

함수 $f(x)$가 구간 $(-\infty,\ \infty)$에서 감소하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\le 0$이어야 한다.

이때 $-1\le \sin 2x\le 1$이므로 $-2\le -2\sin 2x\le 2$

$\therefore\ a-2\le a-2\sin 2x\le a+2$, 즉 $a-2\le f'(x)\le a+2$

따라서 $a+2\le 0$이어야 하므로 $a\le -2$

즉 실수 a의 최댓값은 -2이다. 답 -2

0786 $f'(x)=1-\dfrac{2x}{x^2+a}=\dfrac{x^2-2x+a}{x^2+a}$ ⋯ ❶

함수 $f(x)$가 실수 전체의 구간에서 증가하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\ge 0$이어야 하므로

$x^2-2x+a\ge 0\ (\because\ x^2+a>0)$ ⋯ ❷

이차방정식 $x^2-2x+a=0$의 판별식을 D라 하면

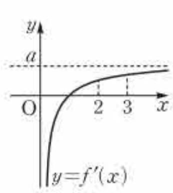
$\dfrac{D}{4}=1-a\le 0 \qquad \therefore\ a\ge 1$ ⋯ ❸

답 $a\ge 1$

채점 기준	비율
❶ $f'(x)$를 구할 수 있다.	20 %
❷ x에 대한 부등식을 세울 수 있다.	40 %
❸ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %

0787 $f'(x)=a-\dfrac{1}{x}$

함수 $f(x)$가 구간 $(2,\ 3)$에서 증가하려면 $2<x<3$일 때 $f'(x)\ge 0$이어야 하므로 오른쪽 그림에서



$f'(2)=a-\dfrac{1}{2}\ge 0 \qquad \therefore\ a\ge \dfrac{1}{2}$

따라서 실수 a의 최솟값은 $\dfrac{1}{2}$이다.

답 ①

0788 $f'(x)=a+\cos x$ ⋯ ❶

함수 $f(x)$가 구간 $\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$에서 감소하려면 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$일 때 $f'(x)\le 0$이어야 한다.

이때 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$에서 $0<\cos x<1$이므로

$a<a+\cos x<a+1$, 즉 $a<f'(x)<a+1$ ⋯ ❷

따라서 $a+1\le 0$이어야 하므로

$a\le -1$ ⋯ ❸

답 $a\le -1$

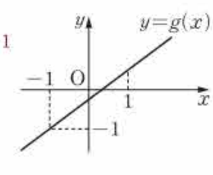
채점 기준	비율
❶ $f'(x)$를 구할 수 있다.	20 %
❷ $0<x<\frac{\pi}{2}$일 때, $f'(x)$의 값의 범위를 구할 수 있다.	50 %
❸ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	30 %

0789 $f'(x)=\dfrac{ae^{ax}(x+1)-e^{ax}}{(x+1)^2}=\dfrac{(ax+a-1)e^{ax}}{(x+1)^2}$

함수 $f(x)$가 구간 $(1,\ \infty)$에서 증가하려면 $x>1$일 때 $f'(x)\ge 0$이어야 하므로

$ax+a-1\ge 0\ (\because\ (x+1)^2>0,\ e^{ax}>0)$

$g(x)=\underbrace{ax+a-1}_{a(x+1)-1}$이라 하면 직선 $y=g(x)$는 a의 값에 관계없이 점 $(-1,\ -1)$을 지난다.



$x>1$일 때 $g(x)\ge 0$이려면 오른쪽 그림에서

$a>0,\ g(1)\ge 0$

이어야 하므로 $a>0,\ 2a-1\ge 0$

$\therefore\ a\ge \dfrac{1}{2}$

따라서 실수 a의 최솟값은 $\dfrac{1}{2}$이다. 답 ②

유형 13~17 함수의 극대·극소

본책 117~119쪽

(1) 미분가능한 함수 $f(x)$의 극값은 다음과 같은 순서로 구한다.

(i) $f'(x)$를 구한다.

(ii) $f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값 a를 구한다.

(iii) $x=a$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호를 조사한다.

양 → 음 ⇒ $f(x)$는 $x=a$에서 극대 ⇒ 극댓값은 $f(a)$

음 → 양 ⇒ $f(x)$는 $x=a$에서 극소 ⇒ 극솟값은 $f(a)$

(2) 미분가능한 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극값 b를 가지면

⇒ $f(a)=b,\ f'(a)=0$

0790 $f'(x)=\dfrac{4(x^2+5)-4x\cdot 2x}{(x^2+5)^2}=\dfrac{-4(x^2-5)}{(x^2+5)^2}$

$f'(x)=0$에서

$x^2-5=0 \qquad \therefore\ x=\pm\sqrt{5}$

x	⋯	$-\sqrt{5}$	⋯	$\sqrt{5}$	⋯
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

따라서 $f(x)$는 $x=\sqrt{5}$에서 극대이고, $x=-\sqrt{5}$에서 극소이므로

$\alpha=\sqrt{5},\ \beta=-\sqrt{5}$

$\therefore\ 2\alpha+\beta=\sqrt{5}$ 답 $\sqrt{5}$

0791 ㄱ. $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2+3}$에서 $x^2+3>0$이므로 함수 $f(x)$의 정의역은 실수 전체의 집합이다.

ㄴ. $f'(x)=\dfrac{x^2+3-(x-1)\cdot 2x}{(x^2+3)^2}=\dfrac{-x^2+2x+3}{(x^2+3)^2}$

$=-\dfrac{(x+1)(x-3)}{(x^2+3)^2}$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=3$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

따라서 $f(x)$의 극댓값은 $f(3)=\dfrac{1}{6}$

ㄷ. ㄴ의 증감표에 의하여 $0<x<2$에서 함수 $f(x)$는 증가한다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ②

0792 $f(x)=\dfrac{x^2-5x+2}{x+2}$에서 $x\neq-2$이고

$f'(x)=\dfrac{(2x-5)(x+2)-(x^2-5x+2)}{(x+2)^2}$

$=\dfrac{x^2+4x-12}{(x+2)^2}$

$=\dfrac{(x+6)(x-2)}{(x+2)^2}$

$f'(x)=0$에서 $x=-6$ 또는 $x=2$ ⋯ ❶

x	$\cdots$	-6	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘		↘	극소	↗

즉 $f(x)$의 극댓값은 $f(-6)=\dfrac{68}{-4}=-17$, 극솟값은

$f(2)=\dfrac{-4}{4}=-1$이다. ⋯ ❷

따라서 구하는 차는 $-1-(-17)=16$ ⋯ ❸

답 16

채점 기준	비율
❶ $f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ $f(x)$의 극댓값과 극솟값을 구할 수 있다.	50 %
❸ 극댓값과 극솟값의 차를 구할 수 있다.	10 %

0793 $f'(x)=\dfrac{(2ax-3)(x^2-1)-(ax^2-3x+b)\cdot 2x}{(x^2-1)^2}$

$=\dfrac{3x^2-2(a+b)x+3}{(x^2-1)^2}$

$f(x)$가 $x=3$에서 극솟값 $\dfrac{3}{2}$을 가지므로

$f(3)=\dfrac{3}{2}$, $f'(3)=0$

$\dfrac{9a-9+b}{8}=\dfrac{3}{2}$, $\dfrac{30-6a-6b}{64}=0$

$\therefore 9a+b=21,\ a+b=5$

두 식을 연립하여 풀면 $a=2,\ b=3$

$\therefore a-b=-1$ 답 ②

0794 $f(x)=x+\sqrt{1-x^2}$에서 $0<x\leq1$이고

$f'(x)=1+\dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}=\dfrac{\sqrt{1-x^2}-x}{\sqrt{1-x^2}}$

$f'(x)=0$에서 $\sqrt{1-x^2}=x$

양변을 제곱하면 $1-x^2=x^2$, $x^2=\dfrac{1}{2}$

$\therefore x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ($\because 0<x\leq1$)

x	0	$\cdots$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\cdots$	1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	극대	↘	1

따라서 $f(x)$의 극댓값은

$f\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\sqrt{\dfrac{1}{2}}=\sqrt{2}$ 답 ③

0795 $f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{4-x}$에서 $0\leq x\leq4$이고

$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}-\dfrac{1}{2\sqrt{4-x}}=\dfrac{\sqrt{4-x}-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\sqrt{4-x}}$

$f'(x)=0$에서 $\sqrt{4-x}=\sqrt{x}$

양변을 제곱하면 $4-x=x$ $\therefore x=2$

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$	4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	2	↗	극대	↘	2

따라서 $f(x)$는 $x=2$에서 극댓값 $f(2)=\sqrt{2}+\sqrt{2}=2\sqrt{2}$를 가지므로

$a=2,\ b=2\sqrt{2}$ $\therefore ab=4\sqrt{2}$ 답 $4\sqrt{2}$

0796 $f(x)=\dfrac{1}{x+\sqrt{2-x}}$에서 $0<x\leq2$이고

$f'(x)=-\dfrac{1+\dfrac{-1}{2\sqrt{2-x}}}{(x+\sqrt{2-x})^2}=\dfrac{1-2\sqrt{2-x}}{2\sqrt{2-x}(x+\sqrt{2-x})^2}$

$f'(x)=0$에서 $2\sqrt{2-x}=1$, $\sqrt{2-x}=\dfrac{1}{2}$

양변을 제곱하면 $2-x=\dfrac{1}{4}$ $\therefore x=\dfrac{7}{4}$ ⋯ ❶

x	0	$\cdots$	$\dfrac{7}{4}$	$\cdots$	2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	극소	↗	$\dfrac{1}{2}$

따라서 $f(x)$의 극솟값은

$f\left(\dfrac{7}{4}\right)=\dfrac{1}{\dfrac{7}{4}+\dfrac{1}{2}}=\dfrac{4}{9}$ ⋯ ❷

답 $\dfrac{4}{9}$

채점 기준	비율
❶ $f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값을 구할 수 있다.	50 %
❷ $f(x)$의 극솟값을 구할 수 있다.	50 %

0797 $f'(x)=(2x+2)e^{-x}-(x^2+2x)e^{-x}$

$=(2-x^2)e^{-x}$

$f'(x)=0$에서 $x^2=2$ ($\because e^{-x}>0$) $\therefore x=\pm\sqrt{2}$

x	$\cdots$	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

따라서 $f(x)$의 극댓값은 $f(\sqrt{2})=(2+2\sqrt{2})e^{-\sqrt{2}}$, 극솟값은 $f(-\sqrt{2})=(2-2\sqrt{2})e^{\sqrt{2}}$이므로 구하는 곱은

$(2+2\sqrt{2})e^{-\sqrt{2}}\cdot(2-2\sqrt{2})e^{\sqrt{2}}=-4$ 답 ①

다른 풀이 $f'(x)=(2-x^2)e^{-x}$이므로

$f''(x)=(-2x)e^{-x}-(2-x^2)e^{-x}=(x^2-2x-2)e^{-x}$

$f'(x)=0$에서 $x=\pm\sqrt{2}$

이때 $f''(-\sqrt{2})=2\sqrt{2}e^{\sqrt{2}}>0$, $f''(\sqrt{2})=-2\sqrt{2}e^{-\sqrt{2}}<0$이므로 $f(x)$의 극댓값은 $f(\sqrt{2})=(2+2\sqrt{2})e^{-\sqrt{2}}$, 극솟값은 $f(-\sqrt{2})=(2-2\sqrt{2})e^{\sqrt{2}}$이다.

따라서 구하는 곱은 -4이다.

0798 $f'(x)=2\cdot3^{2x}\cdot\ln3\cdot2-8\cdot3^{x+1}\cdot\ln3$

$=4\cdot3^x(3^x-6)\ln3$

$f'(x)=0$에서 $3^x=6$ ($\because 3^x>0$) $\therefore x=\log_3 6$

따라서 $f(x)$의 극솟값은

x	$\cdots$	$\log_3 6$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗

$f(\log_3 6)$

$=2\cdot3^{2\log_3 6}-8\cdot3^{\log_3 6+1}$

$=2\cdot3^{\log_3 36}-8\cdot3^{\log_3 6+\log_3 3}$

$=2\cdot36-8\cdot18$

$=-72$ 답 -72

0799 $f(2)=-4e$이므로

$(4+a)e=-4e$, $4+a=-4$

$\therefore a=-8$ ⋯ ❶

$f(x)=(x^2-8)e^{x-1}$에서

$f'(x)=2xe^{x-1}+(x^2-8)e^{x-1}=(x^2+2x-8)e^{x-1}$

$f'(x)=0$에서 $x^2+2x-8=0$ ($\because e^{x-1}>0$)

$(x+4)(x-2)=0$ $\therefore x=-4$ 또는 $x=2$ ⋯ ❷

x	$\cdots$	-4	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 $f(x)$의 극댓값은

$f(-4)=8\cdot e^{-5}=\frac{8}{e^5}$ ⋯ ❸

답 $\frac{8}{e^5}$

채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷ $f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $f(x)$의 극댓값을 구할 수 있다.	30 %

0800 $f'(x)=e^x-ke^{-x}=(e^{2x}-k)e^{-x}$

$f'(x)=0$에서 $e^{2x}=k$ ($\because e^{-x}>0$), $e^x=\sqrt{k}$

$\therefore x=\ln\sqrt{k}$

ㄱ. 함수 $f(x)$는 극솟값만 갖는다.

x	$\cdots$	$\ln\sqrt{k}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗

ㄴ. $f(x)$의 극솟값은

$f(\ln\sqrt{k})$

$=e^{\ln\sqrt{k}}+ke^{-\ln\sqrt{k}}$

$=\sqrt{k}+\frac{k}{\sqrt{k}}=2\sqrt{k}$

ㄷ. $\ln\sqrt{k}=1$에서 $\sqrt{k}=e$

$\therefore k=e^2$

이상에서 옳은 것은 ㄷ뿐이다. 답 ③

0801 $f(x)=x^2-\ln x$에서 $x>0$이고

$f'(x)=2x-\frac{1}{x}=\frac{2x^2-1}{x}$

$f'(x)=0$에서

$2x^2-1=0$

$\therefore x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ($\because x>0$)

x	0	$\cdots$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	극소	↗

따라서 $f(x)$의 극솟값은

$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{1}{2}-\ln\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{2}-\ln 2^{-\frac{1}{2}}$

$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ln2=\frac{1}{2}(1+\ln2)$ 답 ⑤

다른 풀이 $f'(x)=2x-\frac{1}{x}$이므로 $f''(x)=2+\frac{1}{x^2}$

$f'(x)=0$에서 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ($\because x>0$)

이때 $f''\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=4>0$이므로 $f(x)$의 극솟값은

$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{1}{2}(1+\ln2)$

0802 $f'(x)=2ax+1+\frac{b}{x}$

$f(x)$가 $x=1$, $x=2$에서 극값을 가지므로

$f'(1)=0$, $f'(2)=0$

$2a+1+b=0$, $4a+1+\frac{b}{2}=0$

$\therefore 2a+b=-1$, $8a+b=-2$

두 식을 연립하여 풀면 $a=-\frac{1}{6}$, $b=-\frac{2}{3}$

$\therefore a+b=-\frac{5}{6}$ 답 $-\frac{5}{6}$

0803 $f(x)=x(\ln x)^2$에서 $x>0$이고

$f'(x)=(\ln x)^2+x\cdot2\ln x\cdot\frac{1}{x}=(\ln x+2)\ln x$

$f'(x)=0$에서 $\ln x=-2$ 또는 $\ln x=0$

$\therefore x=\frac{1}{e^2}$ 또는 $x=1$

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{e^2}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$		↗	극대	↘	극소	↗

따라서 $f(x)$의 극댓값은 $f\left(\frac{1}{e^2}\right)=\frac{1}{e^2}\cdot(-2)^2=\frac{4}{e^2}$, 극솟값은 $f(1)=0$이므로 구하는 합은 $\frac{4}{e^2}$이다. 답 ②

0804 $f(x)=\frac{x}{2\ln x}$에서 $0<x<1$ 또는 $x>1$이고

$$f'(x)=\frac{2\ln x-x\cdot\frac{2}{x}}{(2\ln x)^2}=\frac{2(\ln x-1)}{(2\ln x)^2}$$

$f'(x)=0$에서 $\ln x=1$ $\therefore x=e$ ⋯ ❶

x	0	⋯	1	⋯	e	⋯
$f'(x)$		$-$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘		↘	극소	↗

따라서 $f(x)$는 $x=e$에서 극솟값 $f(e)=\frac{e}{2}$를 가지므로

$a=e,\ b=\frac{e}{2}$ ⋯ ❷

$\therefore a+b=\frac{3}{2}e$ ⋯ ❸

답 $\frac{3}{2}e$

채점 기준	비율
❶ $f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	10 %

0805 $f'(x)=2\cdot2\cos x\cdot(-\sin x)+2\sin x$
$=-2\sin x(2\cos x-1)$

$f'(x)=0$에서 $\cos x=\frac{1}{2}$ ($\because 0<x<\pi$) $\therefore x=\frac{\pi}{3}$

x	0	⋯	$\frac{\pi}{3}$	⋯	π
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	극소	↗	

따라서 $f(x)$는 $x=\frac{\pi}{3}$에서 극솟값

$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2-2\cdot\frac{1}{2}-1=-\frac{3}{2}$을 가지므로

$a=\frac{\pi}{3},\ b=-\frac{3}{2}$ $\therefore ab=-\frac{\pi}{2}$ 답 $-\frac{\pi}{2}$

0806 $f'(x)=4-3\sec^2 x$

$f'(x)=0$에서 $\sec^2 x=\frac{4}{3}$

$\cos^2 x=\frac{3}{4}$, $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\because -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\right)$

$\therefore x=-\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{\pi}{6}$

x	$-\frac{\pi}{2}$	⋯	$-\frac{\pi}{6}$	⋯	$\frac{\pi}{6}$	⋯	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		↘	극소	↗	극대	↘	

따라서 $f(x)$의

극댓값은 $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{2}{3}\pi-3\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{2}{3}\pi-\sqrt{3}$,

극솟값은 $f\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{2}{3}\pi-3\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=-\frac{2}{3}\pi+\sqrt{3}$

이므로

$a=\frac{2}{3}\pi-\sqrt{3},\ b=-\frac{2}{3}\pi+\sqrt{3}$

$\therefore a-b=\frac{4}{3}\pi-2\sqrt{3}$ 답 ①

0807 $f'(x)=a\cos x+b\sin x$ ⋯ ❶

$f(x)$가 $x=\frac{2}{3}\pi$에서 극솟값 -1을 가지므로

$f\left(\frac{2}{3}\pi\right)=-1,\ f'\left(\frac{2}{3}\pi\right)=0$

$\frac{\sqrt{3}}{2}a+\frac{1}{2}b=-1,\ -\frac{1}{2}a+\frac{\sqrt{3}}{2}b=0$

$\therefore \sqrt{3}a+b=-2,\ a-\sqrt{3}b=0$ ⋯ ❷

두 식을 연립하여 풀면 $a=-\frac{\sqrt{3}}{2},\ b=-\frac{1}{2}$

$\therefore ab=\frac{\sqrt{3}}{4}$ ⋯ ❸

답 $\frac{\sqrt{3}}{4}$

채점 기준	비율
❶ $f'(x)$를 구할 수 있다.	20 %
❷ a, b에 대한 두 방정식을 세울 수 있다.	50 %
❸ ab의 값을 구할 수 있다.	30 %

0808 $f'(x)=(\pi x-a)\sec^2\left(\frac{\pi}{2}x^2-ax\right)$

$f(x)$가 $x=2$에서 극솟값을 가지므로 $f'(2)=0$에서

$(2\pi-a)\sec^2(2\pi-2a)=0$

$2\pi-a=0$ ($\because \sec^2(2\pi-2a)\neq0$)

$\therefore a=2\pi$

따라서 $f(x)=\tan\left(\frac{\pi}{2}x^2-2\pi x\right)$이므로

$b=f(2)=\tan(2\pi-4\pi)=\tan(-2\pi)=0$

$\therefore a+b=2\pi$ 답 2π

0809 $\frac{dx}{d\theta}=1-\cos\theta,\ \frac{dy}{d\theta}=\sin\theta$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}$$

$\frac{dy}{dx}=0$에서 $\sin\theta=0$ $\therefore \theta=\pi$ ($\because 0<\theta<2\pi$)

또 $0<\theta<\pi$일 때 $\frac{dy}{dx}>0$, $\pi<\theta<2\pi$일 때 $\frac{dy}{dx}<0$이므로 주어진 함수는 $\theta=\pi$에서 극댓값을 갖는다.

따라서 구하는 극댓값은

$1-\cos\pi=2$ 답 ④

0810 $f'(x)=3\sin^2 2x\cdot\cos 2x\cdot2=6\sin^2 2x\cos 2x$

$f'(x)=0$에서 $\sin 2x=0$ 또는 $\cos 2x=0$

$0<x<\pi$에서 $0<2x<2\pi$이므로

$$2x=\frac{\pi}{2} \text{ 또는 } 2x=\pi \text{ 또는 } 2x=\frac{3}{2}\pi$$

$$\therefore x=\frac{\pi}{4} \text{ 또는 } x=\frac{\pi}{2} \text{ 또는 } x=\frac{3}{4}\pi$$

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{3}{4}\pi$	$\cdots$	π
$f'(x)$		+	0	−	0	−	0	+	
$f(x)$		↗	극대	↘		↘	극소	↗	

따라서 $f(x)$는 $0<x<\pi$에서 2개의 극값을 갖는다. 답 2

참고 $f(x)$는 $x=\frac{\pi}{4}$에서 극댓값 $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$, $x=\frac{3}{4}\pi$에서 극솟값 $f\left(\frac{3}{4}\pi\right)=-1$을 갖는다.

유형 18 극값을 가질 조건; 판별식을 이용하는 경우

본책 120쪽

미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=\frac{h(x)}{g(x)}$ $(g(x)>0)$이고 $h(x)$가 이차식일 때 $h(x)=0$의 판별식을 D라 하면
① $f(x)$가 극값을 갖는다.
➡ $h(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 갖는다. ➡ $D>0$
② $f(x)$가 극값을 갖지 않는다.
➡ $h(x)=0$이 중근 또는 허근을 갖는다. ➡ $D\le 0$

0811 $f(x)=\frac{a}{x}+\ln x^3-x$에서 $x>0$이고

$$f'(x)=-\frac{a}{x^2}+\frac{3}{x}-1=\frac{-x^2+3x-a}{x^2}$$

$f(x)$가 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 이차방정식 $-x^2+3x-a=0$, 즉 $x^2-3x+a=0$이 $x>0$에서 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

(i) 이차방정식 $x^2-3x+a=0$의 판별식을 D라 하면

$$D=9-4a>0 \qquad \therefore a<\frac{9}{4}$$

(ii) (두 근의 합)$=3>0$

(iii) (두 근의 곱)$=a>0$

이상에서 $0<a<\frac{9}{4}$

따라서 모든 정수 a의 값의 합은

$1+2=3$ 답 ②

0812 $f'(x)=\frac{3(x^2-1)-(3x+k)\cdot 2x}{(x^2-1)^2}$

$$=\frac{-3x^2-2kx-3}{(x^2-1)^2}$$

$f(x)$가 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 이차방정식 $-3x^2-2kx-3=0$, 즉 $3x^2+2kx+3=0$이 $x\ne\pm1$인 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로

$f(x)$의 정의역은 $x\ne\pm1$인 모든 실수이다.

$3+2k+3\ne0$, $3-2k+3\ne0$

$\therefore k\ne\pm3$

이차방정식 $3x^2+2kx+3=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=k^2-9>0 \qquad \therefore k<-3 \text{ 또는 } k>3$$

따라서 $\alpha=-3$, $\beta=3$이므로 $\alpha\beta=-9$ 답 −9

0813 $f'(x)=(2x+2a)e^x+(x^2+2ax+2)e^x$
$=\{x^2+2(a+1)x+2a+2\}e^x$ ⋯ ❶

$f(x)$가 극값을 갖지 않으려면 이차방정식 $x^2+2(a+1)x+2a+2=0$이 중근 또는 허근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(a+1)^2-(2a+2)\le0$ ⋯ ❷

$a^2\le1 \qquad \therefore -1\le a\le1$ ⋯ ❸

답 $-1\le a\le1$

채점 기준	비율
❶ $f'(x)$를 구할 수 있다.	40 %
❷ a에 대한 부등식을 세울 수 있다.	40 %
❸ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	20 %

유형 19 극값을 가질 조건 ; 판별식을 이용하지 않는 경우

본책 120쪽

상수함수가 아닌 $f(x)$가 미분가능할 때
① $f(x)$가 극값을 갖는다.
➡ $f'(x)=0$의 실근의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀐다.
② $f(x)$가 극값을 갖지 않는다.
➡ 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\le0$ 또는 $f'(x)\ge0$이다.

0814 $f'(x)=k+2\cos x$

$f(x)$가 극값을 갖지 않으려면 모든 실수 x에 대하여

$f'(x)\le0$ 또는 $f'(x)\ge0$

이어야 한다.

이때 $-1\le\cos x\le1$이므로 $-2\le2\cos x\le2$

$\therefore k-2\le k+2\cos x\le k+2$, 즉 $k-2\le f'(x)\le k+2$

따라서 $k+2\le0$ 또는 $k-2\ge0$이어야 하므로

$k\le-2$ 또는 $k\ge2$

따라서 자연수 k의 최솟값은 2이다. 답 ②

0815 $f'(x)=(3x^2+6x)e^{-x}-(x^3+3x^2+a)e^{-x}$
$=-(x^3-6x+a)e^{-x}$

$f(x)$가 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 삼차방정식 $x^3-6x+a=0$이 서로 다른 세 실근을 가져야 한다. ⋯ ❶

$g(x)=x^3-6x+a$라 하면 $g'(x)=3x^2-6$

$g'(x)=0$에서 $x^2=2$

$\therefore x=-\sqrt{2}$ 또는 $x=\sqrt{2}$

$g(x)$는 $x=-\sqrt{2}$, $x=\sqrt{2}$에서 극값을 가지므로

$g(-\sqrt{2})g(\sqrt{2})<0$, $(a+4\sqrt{2})(a-4\sqrt{2})<0$

$\therefore -4\sqrt{2}<a<4\sqrt{2}$ ⋯ ❷

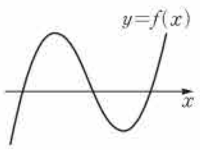
따라서 정수 a는 $-5, -4, \cdots, 4, 5$의 11개이다. ⋯ ❸

답 11

채점 기준	비율
❶ $f(x)$가 극댓값과 극솟값을 모두 가질 조건을 알 수 있다.	30 %
❷ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	50 %
❸ 정수 a의 개수를 구할 수 있다.	20 %

SSEN 특강 삼차방정식의 근의 판별

삼차함수 $f(x)$가 극값을 가질 때, (극댓값)×(극솟값)<0이면 오른쪽 그림과 같이 함수 $y=f(x)$의 그래프는 x축과 서로 다른 세 점에서 만나므로 방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 세 실근을 갖는다.



0816 $f'(x)=k-8\sin x+2\cos 2x$

$$=k-8\sin x+2(1-2\sin^2 x)$$
$$=-4\sin^2 x-8\sin x+k+2$$
$$=-4(\sin x+1)^2+k+6$$

$f(x)$가 극값을 가지려면 $f'(x)=0$의 실근이 존재해야 한다.

$-1\le\sin x\le 1$이므로 $\quad 0\le\sin x+1\le 2$

$$0\le(\sin x+1)^2\le 4$$
$$-16\le -4(\sin x+1)^2\le 0$$
$$\therefore k-10\le -4(\sin x+1)^2+k+6\le k+6,$$
즉 $k-10\le f'(x)\le k+6$

따라서 $k-10<0<k+6$이어야 하므로

$-6<k<10$ 　　답 $-6<k<10$

0817 (1st) $f(1)$의 값을 구하고 $f'(1)$을 k에 대한 식으로 나타낸다.

$\lim_{x\to 1}\dfrac{f(x)-\frac{\pi}{6}}{x-1}=k$에서 $x\longrightarrow 1$일 때 극한값이 존재하고

(분모) $\longrightarrow 0$이므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉 $\lim_{x\to 1}\left\{f(x)-\dfrac{\pi}{6}\right\}=0$에서 $\quad f(1)=\dfrac{\pi}{6}$

$\lim_{x\to 1}\dfrac{f(x)-\frac{\pi}{6}}{x-1}=\lim_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$이므로

$$f'(1)=k$$

(2nd) $h(x)=(g\circ f)(x)$로 놓고 $h(1)$의 값을 구한다.

$h(x)=(g\circ f)(x)$라 하면 접점의 y좌표는

$$h(1)=(g\circ f)(1)=g(f(1))$$
$$=g\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$$

(3rd) 접선의 방정식을 구한다.

$h'(x)=g'(f(x))f'(x)$, $g'(x)=\cos x$이므로 곡선 $y=h(x)$ 위의 점 $\left(1,\ \dfrac{1}{2}\right)$에서의 접선의 기울기는

$$h'(1)=g'(f(1))f'(1)=g'\left(\frac{\pi}{6}\right)\cdot k=\frac{\sqrt{3}}{2}k$$

따라서 곡선 $y=h(x)$ 위의 점 $\left(1,\ \dfrac{1}{2}\right)$에서의 접선의 방정식은

$$y-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}k(x-1)$$

(4th) $30k^2$의 값을 구한다.

이 직선이 원점을 지나므로

$-\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}k\cdot(-1) \qquad \therefore k=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$\therefore 30k^2=30\cdot\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^2=10$ 　　답 10

0818 (1st) a를 t에 대한 삼각함수로 나타낸다.

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 교점 A의 x좌표가 t이므로

$f(t)=g(t)$에서 $\quad \sin t=a\cos t$

$$a=\frac{\sin t}{\cos t}=\tan t \qquad \cdots\cdots \text{㉠}$$

(2nd) 점 B의 좌표를 a, t에 대한 식으로 나타낸다.

$f'(x)=\cos x$이므로 점 $\mathrm{A}(t,\ a\cos t)$에서의 접선의 기울기는

$$f'(t)=\cos t$$

따라서 접선의 방정식은

$$y-a\cos t=\cos t\cdot(x-t)$$

$y=0$을 대입하면

$$-a\cos t=\cos t\cdot(x-t)$$
$$-a=x-t\ (\because \cos t\neq 0)$$
$$\therefore x=t-a$$
$$\therefore \mathrm{B}(t-a,\ 0)$$

(3rd) 점 C의 좌표를 a, t에 대한 식으로 나타낸다.

$g'(x)=-a\sin x$이므로 점 $\mathrm{A}(t,\ \sin t)$에서의 접선의 기울기는

$$g'(t)=-a\sin t$$

따라서 접선의 방정식은

$$y-\sin t=-a\sin t\cdot(x-t)$$

$y=0$을 대입하면

$$-\sin t=-a\sin t\cdot(x-t)$$
$$1=a(x-t)\ (\because \sin t\neq 0)$$
$$x-t=\frac{1}{a} \qquad \therefore x=t+\frac{1}{a}$$
$$\therefore \mathrm{C}\left(t+\frac{1}{a},\ 0\right)$$

(4th) a^2의 값을 구한다.

$$\overline{\mathrm{BC}}=t+\frac{1}{a}-(t-a)=\frac{1}{a}+a=\frac{a^2+1}{a}$$

이때 삼각형 ABC의 넓이가 1이므로

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{a^2+1}{a}\cdot a\cos t=1, \qquad (a^2+1)\cos t=2$$
$$(\tan^2 t+1)\cos t=2\ (\because \text{㉠}), \qquad \sec^2 t\cos t=2$$
$$\therefore \sec t=2$$

$\therefore a^2=\tan^2 t=\sec^2 t-1=2^2-1=3$ 　　답 ②

0819 (1st) 접선과 수직인 직선의 방정식을 세운다.

$f(x)=(x-3)\sqrt{x}$라 하면

$$f'(x)=\sqrt{x}+(x-3)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{3(x-1)}{2\sqrt{x}}$$

접점의 좌표를 $(t,\ (t-3)\sqrt{t}\,)(t>0)$라 하면 접선의 기울기가

$f'(t)=\dfrac{3(t-1)}{2\sqrt{t}}$이므로 접선에 수직인 직선의 방정식은

$$y-(t-3)\sqrt{t}=-\frac{2\sqrt{t}}{3(t-1)}(x-t)\ (t\neq 1)$$

(2nd) a를 t에 대한 식으로 나타낸다.

이 직선이 점 $(a,\ 0)$을 지나므로

$$-(t-3)\sqrt{t}=-\frac{2\sqrt{t}}{3(t-1)}(a-t)$$
$$3(t-1)(t-3)=2(a-t)\ (\because t-1\neq 0,\ t>0)$$

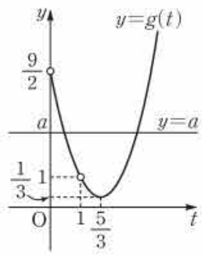
$2a=3t^2-10t+9$

$\therefore\ a=\dfrac{3}{2}t^2-5t+\dfrac{9}{2}$

3rd 정수 a의 최댓값을 구한다.

$g(t)=\dfrac{3}{2}t^2-5t+\dfrac{9}{2}$라 하면

$g(t)=\dfrac{3}{2}\left(t-\dfrac{5}{3}\right)^2+\dfrac{1}{3}$



이때 $t>0$, $t\neq1$이므로 $g(t)=a$를 만족시키는 t의 값이 2개가 되기 위한 a의 값의 범위는 오른쪽 그림에서

$\dfrac{1}{3}<a<1$ 또는 $1<a<\dfrac{9}{2}$

따라서 정수 a의 최댓값은 4이다.

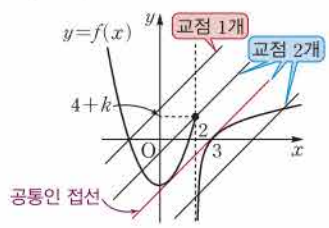
답 4

0820

1st 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x+t$의 위치 관계를 파악한다.

함수 $g(t)$가 불연속인 t의 값이 한 개이려면 직선 $y=x+t$와 함수 $y=f(x)$의 그래프의 교점의 개수가 바뀌는 t의 값이 한 개만 존재해야 한다.

이를 만족시키려면 다음 그림과 같이 직선 $y=x+t$가 두 곡선 $y=x^2+k$, $y=\ln(x-2)$에 동시에 접해야 한다.



2nd k의 값을 구한다.

$y=\ln(x-2)$에서 $y'=\dfrac{1}{x-2}$이므로

$\dfrac{1}{x-2}=1\qquad\therefore\ x=3$

따라서 곡선 $y=\ln(x-2)$와 직선 $y=x+t$의 접점의 좌표는 $(3, 0)$이므로 $\quad 0=3+t\qquad\therefore\ t=-3$

곡선 $y=x^2+k$와 직선 $y=x-3$이 접해야 하므로 이차방정식

$x^2+k=x-3$, 즉 $x^2-x+k+3=0$

이 중근을 가져야 한다.

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(-1)^2-4(k+3)=0,\qquad -4k-11=0$

$\therefore\ k=-\dfrac{11}{4}$

답 ④

참고 직선 $y=x+t$가 점 $(2, 4+k)$를 지날 때 t의 값은

$4+k=2+t\qquad\therefore\ t=k+2$

따라서 함수 $g(t)$가 $t=a$에서 불연속인 a의 값이 한 개일 때의 함수 $g(t)$는 다음과 같다.

$g(t)=\begin{cases}2 & (t\leq k+2)\\ 1 & (t>k+2)\end{cases}$

0821

1st $\dfrac{dy}{dx}$를 구한다.

$\dfrac{dx}{d\theta}=-\cos\theta$, $\dfrac{dy}{d\theta}=-2\sin\theta$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\frac{-2\sin\theta}{-\cos\theta}=2\tan\theta\ (\cos\theta\neq0)$$

2nd 접선의 방정식을 구한다.

따라서 점 $\mathrm{P}(-\sin\theta, 2\cos\theta)$에서의 접선의 방정식은

$y-2\cos\theta=2\tan\theta(x+\sin\theta)$

$\therefore\ y=2x\tan\theta+2\tan\theta\sin\theta+2\cos\theta$

$=2x\tan\theta+2\cdot\dfrac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\cos\theta}$

$=2x\tan\theta+2\sec\theta$

3rd $\triangle$OAB의 넓이의 최솟값을 구한다.

따라서 $\mathrm{A}(-\csc\theta, 0)$, $\mathrm{B}(0, 2\sec\theta)$이므로

$0=2x\tan\theta+2\sec\theta$에서 $x=-\dfrac{\sec\theta}{\tan\theta}=-\dfrac{1}{\cos\theta}\cdot\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}=-\csc\theta$

$\triangle\mathrm{OAB}=\dfrac{1}{2}\cdot|\csc\theta|\cdot|2\sec\theta|$

$=\dfrac{1}{|\sin\theta\cos\theta|}=\dfrac{1}{\left|\frac{\sin2\theta}{2}\right|}$

$=\dfrac{2}{|\sin2\theta|}$

이때 $-1\leq\sin2\theta\leq1$에서

$0\leq|\sin2\theta|\leq1,\qquad \dfrac{1}{|\sin2\theta|}\geq1$

$\therefore\ \dfrac{2}{|\sin2\theta|}\geq2$

즉 $\triangle$OAB의 넓이의 최솟값은 2이다.

답 2

0822

1st 접선의 방정식을 구한다.

점 $\mathrm{A}_n(x_n, y_n)$이 곡선 $xy=5$ 위에 있으므로

$x_ny_n=5\qquad\therefore\ y_n=\dfrac{5}{x_n}$

$xy=5$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$y+x\dfrac{dy}{dx}=0$

$\therefore\ \dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{y}{x}$

점 $\mathrm{A}_n\left(x_n, \dfrac{5}{x_n}\right)$에서의 접선의 기울기는

$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{\frac{5}{x_n}}{x_n}=-\dfrac{5}{x_n^2}$

이므로 접선의 방정식은

$y-\dfrac{5}{x_n}=-\dfrac{5}{x_n^2}(x-x_n)$

$\therefore\ y=-\dfrac{5}{x_n^2}x+\dfrac{10}{x_n}$

2nd x_{n+1}, x_n 사이의 관계식과 y_{n+1}, y_n 사이의 관계식을 구한다.

$y=0$을 대입하면

$0=-\dfrac{5}{x_n^2}x+\dfrac{10}{x_n},\qquad \dfrac{5}{x_n^2}x=\dfrac{10}{x_n}$

$\therefore\ x=2x_n$

즉 점 A_n에서의 접선의 x절편은 $2x_n$이므로

$\mathrm{B}_{n+1}(2x_n, 0)$

$\therefore\ x_{n+1}=2x_n$

$\therefore\ y_{n+1}=\dfrac{5}{x_{n+1}}=\dfrac{5}{2x_n}=\dfrac{1}{2}y_n$

$x_ny_n=5$에서 $\dfrac{5}{x_n}=y_n$

3rd $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$의 값을 구한다.

따라서 수열 $\{y_n\}$은 첫째항이 5이고 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열이므로

$\underbrace{}_{A_1(1,\ 5)\text{에서 } y_1=5}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} y_n = \frac{5}{1-\frac{1}{2}} = 10$$

답 10

SSEN 특강 등비급수의 합

첫째항이 a이고 공비가 $r\,(-1<r<1)$인 등비급수의 합은

$$\frac{a}{1-r}$$

0823 1st 두 곡선이 만나는 점의 x좌표를 p로 놓고 등식을 세운다.

$g(x)=t^3\ln(x-t)$, $h(x)=2e^{x-a}$이라 하자.

두 곡선 $y=g(x)$, $y=h(x)$가 오직 한 점에서 만나려면 두 곡선이 접해야 하므로 두 곡선이 접하는 점의 x좌표를 $p\ (p>t)$라 하면 $g(p)=h(p)$에서

함수 $y=g(x)$의 정의역은 $\{x|x>t\}$이다.

$$t^3\ln(p-t)=2e^{p-a} \quad \cdots\cdots ㉠$$

$g'(x)=\frac{t^3}{x-t}$, $h'(x)=2e^{x-a}$이므로 $g'(p)=h'(p)$에서

$$\frac{t^3}{p-t}=2e^{p-a} \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서

$$t^3\ln(p-t)=\frac{t^3}{p-t}$$

$$\therefore \ln(p-t)=\frac{1}{p-t}\ (\because t>0) \quad \cdots\cdots ㉢$$

2nd $f'(t)$를 p, t에 대한 식으로 나타낸다.

㉡에서 $\frac{t^3}{p-t}=\frac{2e^p}{e^a}$이므로

$$e^a=\frac{2e^p(p-t)}{t^3}$$

$$\therefore a=\ln\frac{2e^p(p-t)}{t^3}=\ln2+p+\ln(p-t)-3\ln t$$

$$\therefore f(t)=\ln2+p+\ln(p-t)-3\ln t$$

양변을 t에 대하여 미분하면

$$f'(t)=\frac{dp}{dt}+\frac{\frac{dp}{dt}-1}{p-t}-\frac{3}{t} \quad \cdots\cdots ㉣$$

p는 t의 값에 따라 변하는 변수이므로 음함수의 미분법을 이용한다.

3rd $\frac{dp}{dt}$의 값을 구한다.

㉢의 양변을 t에 대하여 미분하면

$$\frac{\frac{dp}{dt}-1}{p-t}=-\frac{\frac{dp}{dt}-1}{(p-t)^2}$$

$$(p-t)\left(\frac{dp}{dt}-1\right)+\left(\frac{dp}{dt}-1\right)=0$$

$$\left(\frac{dp}{dt}-1\right)(p-t+1)=0$$

$$\therefore \frac{dp}{dt}=1\ (\because p>t,\ 즉\ p-t+1>1)$$

4th $\left\{f'\left(\frac{1}{3}\right)\right\}^2$의 값을 구한다.

㉣에서 $f'(t)=1-\frac{3}{t}$이므로

$$\left\{f'\left(\frac{1}{3}\right)\right\}^2=(1-9)^2=64$$

답 64

0824 1st ㄱ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄱ. $y'=e^x$이므로 점 $\mathrm{P}(t,\ e^t)$에서의 접선 l의 기울기는 e^t이다.

따라서 접선 l의 방정식은

$$y-e^t=e^t(x-t) \qquad \therefore y=e^tx-te^t+e^t$$

이때 $t=1$이면 $y=ex$이므로 접선 l은 원점을 지난다.

2nd ㄴ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄴ. 접선 l의 기울기가 $\tan f(t)=e^t$이므로

$$\sec^2 f(t)=\tan^2 f(t)+1=e^{2t}+1$$

따라서 $\cos^2 f(t)=\frac{1}{e^{2t}+1}$이므로

$$\cos f(t)=\frac{1}{\sqrt{e^{2t}+1}}\ (\because \cos f(t)>0)$$

3rd ㄷ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄷ. $\tan f(t)=e^t$의 양변을 t에 대하여 미분하면

$$\sec^2 f(t)\cdot f'(t)=e^t$$

$$\therefore f'(t)=e^t\cdot\cos^2 f(t)=e^t\cdot\frac{1}{e^{2t}+1}\ (\because ㄴ)$$

$$=\frac{e^t}{e^{2t}+1}$$

점 P는 제1사분면 위의 점이므로 $t>0$이다.

따라서 $t>0$에서 $f'(t)>0$이므로 함수 $f(t)$는 $t>0$에서 증가한다. 즉 극값이 존재하지 않는다.

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

0825 1st 주어진 조건의 의미를 파악한다.

보기의 함수는 모두 닫힌구간 $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$에서 연속이고 열린구간 $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(x_1)$인 x_1이 구간 $(a,\ b)$에 적어도 하나 존재하고, $\frac{f(c)-f(b)}{c-b}=f'(x_2)$인 x_2가 구간 $(b,\ c)$에 적어도 하나 존재한다.

$0<x_1<x_2<\frac{\pi}{2}$인 x_1, x_2에 대하여 $f'(x_1)<f'(x_2)$를 항상 만족시키려면 $0<x<\frac{\pi}{2}$에서 $f'(x)$가 증가해야 한다. ⋯⋯ ㉠

2nd ㄱ의 함수가 ㉠을 만족시키는지 확인한다.

ㄱ. $f'(x)=1-\sin x$에서

$$f''(x)=-\cos x$$

$0<x<\frac{\pi}{2}$에서 $f''(x)<0$이므로 $f'(x)$는 감소한다.

3rd ㄴ의 함수가 ㉠을 만족시키는지 확인한다.

ㄴ. $f'(x)=e^x-1$에서

$$f''(x)=e^x$$

$0<x<\frac{\pi}{2}$에서 $f''(x)>0$이므로 $f'(x)$는 증가한다.

4th ㄷ의 함수가 ㉠을 만족시키는지 확인한다.

ㄷ. $f'(x)=(x+1)\cdot\left\{-\frac{1}{(x+1)^2}\right\}=-\frac{1}{x+1}$에서

$$f''(x)=\frac{1}{(x+1)^2}$$

$0<x<\frac{\pi}{2}$에서 $f''(x)>0$이므로 $f'(x)$는 증가한다.

이상에서 조건을 만족시키는 함수는 ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

06 도함수의 활용 (1)

0826 1st $r(t)$를 구한다.

$h(x)=\ln x$라 하면 $\quad h'(x)=\frac{1}{x}$

점 $\mathrm{P}(t,\ \ln t)$에서의 접선의 기울기는 $h'(t)=\frac{1}{t}$이므로 접선의 방정식은

$$y-\ln t=\frac{1}{t}(x-t) \qquad \therefore y=\frac{1}{t}x+\ln t-1$$

$y=0$을 대입하면 $\quad 0=\frac{1}{t}x+\ln t-1$

$$x=t-t\ln t \qquad \therefore r(t)=t-t\ln t$$

2nd $s(t)$를 구한다.

점 $\mathrm{Q}(2t,\ \ln 2t)$에서의 접선의 기울기는 $h'(2t)=\frac{1}{2t}$이므로 접선의 방정식은

$$y-\ln 2t=\frac{1}{2t}(x-2t) \qquad \therefore y=\frac{1}{2t}x+\ln 2t-1$$

$y=0$을 대입하면 $\quad 0=\frac{1}{2t}x+\ln 2t-1$

$$x=2t-2t\ln 2t \qquad \therefore s(t)=2t-2t\ln 2t$$

3rd $f(t)$의 극솟값을 구한다.

$$\begin{aligned}f(t)&=t-t\ln t-(2t-2t\ln 2t)\\&=t-t\ln t-2t+2t(\ln 2+\ln t)\\&=(2\ln 2-1)t+t\ln t\end{aligned}$$

이므로

$$f'(t)=2\ln 2-1+\ln t+t\cdot\frac{1}{t}=\ln t+2\ln 2$$

$f'(t)=0$에서

$\ln t=-2\ln 2$

$\therefore t=\frac{1}{4}$

t	0	$\cdots$	$\frac{1}{4}$	$\cdots$
$f'(t)$		$-$	0	$+$
$f(t)$		↘	극소	↗

따라서 함수 $f(t)$의 극솟값은

$$\begin{aligned}f\left(\frac{1}{4}\right)&=(2\ln 2-1)\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\ln\frac{1}{4}\\&=\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\ln 2=-\frac{1}{4}\end{aligned}$$

답 ③

0827 1st 극값을 갖는 점의 좌표를 구한다.

$f'(x)=\cos(\pi\sin x)\cdot\pi\cos x$

$f'(x)=0$에서

$\cos(\pi\sin x)=0$ 또는 $\cos x=0$

(i) $\cos(\pi\sin x)=0$에서

$\pi\sin x=-\frac{\pi}{2}$ 또는 $\pi\sin x=\frac{\pi}{2}\ (\because -\pi\le\pi\sin x\le\pi)$

$\sin x=-\frac{1}{2}$ 또는 $\sin x=\frac{1}{2}$

$\therefore x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{5}{6}\pi$ 또는 $x=\frac{7}{6}\pi$ 또는 $x=\frac{11}{6}\pi$

$(\because 0<x<2\pi)$

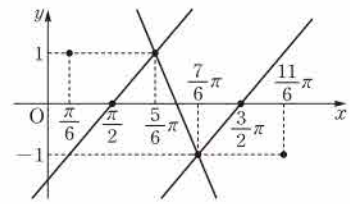
(ii) $\cos x=0$에서 $\quad x=\frac{\pi}{2}$ 또는 $x=\frac{3}{2}\pi\ (\because 0<x<2\pi)$

(i), (ii)에서 극값을 갖는 점의 좌표는

$\left(\frac{\pi}{6},\ 1\right), \left(\frac{\pi}{2},\ 0\right), \left(\frac{5}{6}\pi,\ 1\right), \left(\frac{7}{6}\pi,\ -1\right), \left(\frac{3}{2}\pi,\ 0\right),$

$\left(\frac{11}{6}\pi,\ -1\right)$

2nd $M-m$의 값을 구한다.



위의 그림과 같이 직선이 두 점 $\left(\frac{\pi}{2},\ 0\right), \left(\frac{5}{6}\pi,\ 1\right)$ 또는 두 점 $\left(\frac{7}{6}\pi,\ -1\right), \left(\frac{3}{2}\pi,\ 0\right)$을 지날 때 기울기가 최대이므로

$$M=\frac{1}{\frac{\pi}{3}}=\frac{3}{\pi}$$

또 직선이 두 점 $\left(\frac{5}{6}\pi,\ 1\right), \left(\frac{7}{6}\pi,\ -1\right)$을 지날 때 기울기가 최소이므로

$$m=\frac{-2}{\frac{\pi}{3}}=-\frac{6}{\pi}$$

$$\therefore M-m=\frac{9}{\pi}$$

답 $\frac{9}{\pi}$

0828 전략 $a>0$, $b>0$일 때, $a+b\ge 2\sqrt{ab}$ (등호는 $a=b$일 때 성립)임을 이용한다.

풀이 $f(x)=\sqrt{x}$라 하면 $\quad f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

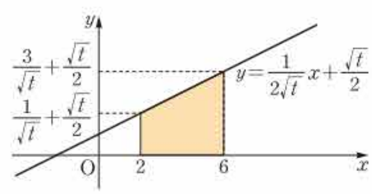
점 P의 좌표를 $(t,\ \sqrt{t})\ (t>0)$라 하면 점 P에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=\frac{1}{2\sqrt{t}}$이므로 접선의 방정식은

$$y-\sqrt{t}=\frac{1}{2\sqrt{t}}(x-t)$$

$$\therefore y=\frac{1}{2\sqrt{t}}x+\frac{\sqrt{t}}{2} \qquad \cdots\cdots ㉠ \qquad \cdots ❶$$

$x=2$를 ㉠에 대입하면 $\quad y=\frac{1}{\sqrt{t}}+\frac{\sqrt{t}}{2}$

$x=6$을 ㉠에 대입하면 $\quad y=\frac{3}{\sqrt{t}}+\frac{\sqrt{t}}{2}$



따라서 위의 그림에서 도형의 넓이는

$$\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{t}}+\frac{\sqrt{t}}{2}+\frac{3}{\sqrt{t}}+\frac{\sqrt{t}}{2}\right)\cdot(6-2)$$

$$=2\left(\frac{4}{\sqrt{t}}+\sqrt{t}\right) \qquad \cdots ❷$$

이때 $\frac{4}{\sqrt{t}}>0$, $\sqrt{t}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{4}{\sqrt{t}}+\sqrt{t}\ge 2\sqrt{\frac{4}{\sqrt{t}}\cdot\sqrt{t}}=4 \text{ (단, 등호는 } t=4\text{일 때 성립)}$$

$\frac{4}{\sqrt{t}}=\sqrt{t}$에서 $t=4$

따라서 구하는 넓이의 최솟값은

$2\cdot 4=8 \qquad \cdots ❸$

답 8

채점 기준	비율
❶ 접선의 방정식을 t에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30 %
❷ 도형의 넓이를 t에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40 %
❸ 도형의 넓이의 최솟값을 구할 수 있다.	30 %

0829 전략 접점의 좌표를 $(t,\ \ln t+1)$로 놓고 접선이 점 $(0,\ n\ln 2)$를 지남을 이용한다.

풀이 $f(x)=\ln x+1$이라 하면 $\quad f'(x)=\dfrac{1}{x}$

접점의 좌표를 $(t,\ \ln t+1)$이라 하면 접선의 기울기는 $f'(t)=\dfrac{1}{t}$이므로 접선의 방정식은

$$y-(\ln t+1)=\frac{1}{t}(x-t)$$

$$\therefore\ y=\frac{1}{t}x+\ln t \quad \cdots ❶$$

이 직선이 점 $(0,\ n\ln 2)$를 지나므로

$$n\ln 2=\ln t, \qquad \ln t=\ln 2^n$$

$$\therefore\ t=2^n,\ \text{즉}\ a_n=2^n \quad \cdots ❷$$

$$\therefore\ \sum_{k=1}^{5}a_{2k-1}=\sum_{k=1}^{5}2^{2k-1}=\sum_{k=1}^{5}\left(\frac{1}{2}\cdot 4^k\right)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{5}4^k$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{4(4^5-1)}{4-1}$$

$$=\frac{2}{3}\cdot 1023=682 \quad \cdots ❸$$

답 682

채점 기준	비율
❶ 접선의 방정식을 t에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40 %
❷ a_n을 구할 수 있다.	30 %
❸ $\sum_{k=1}^{3}a_{2k-1}$의 값을 구할 수 있다.	30 %

0830 전략 이차방정식 $f(x)=0$에서 (판별식)<0이면 $f(x)=0$의 실근이 존재하지 않음을 이용한다.

풀이 $f(x)=\dfrac{x-a}{e^x}=(x-a)e^{-x}$이라 하면

$$f'(x)=e^{-x}-(x-a)e^{-x}=-(x-a-1)e^{-x}$$

곡선 위의 한 점 $(t,\ (t-a)e^{-t})$에서의 접선의 기울기가 $f'(t)=-(t-a-1)e^{-t}$이므로 접선의 방정식은

$$y-(t-a)e^{-t}=-(t-a-1)e^{-t}(x-t) \quad \cdots ❶$$

이 직선이 원점을 지나면

$$-(t-a)e^{-t}=-(t-a-1)e^{-t}\cdot(-t)$$

$$t-a=-t(t-a-1)\ (\because\ e^{-t}>0)$$

$$\therefore\ t^2-at-a=0 \quad \cdots\cdots ㉠$$

이때 원점에서 주어진 곡선에 접선을 그을 수 없으려면 ㉠을 만족시키는 실수 t가 존재하지 않아야 한다.

즉 이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면

$$D=a^2+4a<0, \qquad a(a+4)<0$$

$$\therefore\ -4<a<0 \quad \cdots ❷$$

따라서 모든 정수 a의 값의 합은

$$-3+(-2)+(-1)=-6 \quad \cdots ❸$$

답 -6

채점 기준	비율
❶ 접선의 방정식을 t에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40 %
❷ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❸ 모든 정수 a의 값의 합을 구할 수 있다.	20 %

0831 전략 □PABQ의 넓이와 △OPQ의 넓이의 관계를 이용한다.

풀이 $\square\text{PABQ}=\triangle\text{OAB}-\triangle\text{OPQ}=\dfrac{1}{2}-\triangle\text{OPQ}$이므로

△OPQ의 넓이가 최대일 때 □PABQ의 넓이가 최소이다. ⋯ ❶

$\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2\sqrt{y}}\cdot\frac{dy}{dx}=0$$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=-\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}\ (x\neq 0)$$

$\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$에서 $x=t$일 때 $y=(1-\sqrt{t})^2$이므로 곡선 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ 위의 점 $(t,\ (1-\sqrt{t})^2)$에서의 접선의 방정식은

$$y-(1-\sqrt{t})^2=\frac{\sqrt{t}-1}{\sqrt{t}}(x-t)$$

$$\therefore\ y=\frac{\sqrt{t}-1}{\sqrt{t}}x+1-\sqrt{t} \quad \cdots ❷$$

따라서 $\text{P}(\sqrt{t},\ 0)$, $\text{Q}(0,\ 1-\sqrt{t})$이므로 △OPQ의 넓이는

$0=\dfrac{\sqrt{t}-1}{\sqrt{t}}x+1-\sqrt{t}$에서 $x=(\sqrt{t}-1)\cdot\dfrac{\sqrt{t}}{\sqrt{t}-1}=\sqrt{t}$

$$\frac{1}{2}\sqrt{t}(1-\sqrt{t})=-\frac{1}{2}(t-\sqrt{t})$$

$$=-\frac{1}{2}\left(\sqrt{t}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{8}$$

△OPQ의 넓이는 $\sqrt{t}=\dfrac{1}{2}$, 즉 $t=\dfrac{1}{4}$일 때 최댓값 $\dfrac{1}{8}$을 가지므로 □PABQ의 넓이의 최솟값은

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{8}=\frac{3}{8} \quad \cdots ❸$$

답 $\dfrac{3}{8}$

채점 기준	비율
❶ △OPQ의 넓이가 최대일 때 □PABQ의 넓이가 최소임을 알 수 있다.	20 %
❷ 접선의 방정식을 t에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40 %
❸ □PABQ의 넓이의 최솟값을 구할 수 있다.	40 %

0832 전략 함수 $f(x)$의 역함수가 존재하려면 $f(x)$는 일대일대응이어야 함을 이용한다.

풀이 $f(x)$의 역함수가 존재하려면 $f(x)$는 일대일대응이어야 하므로 실수 전체의 구간에서 증가하거나 감소해야 한다.

즉 모든 실수 x에 대하여

$$f'(x)=10+a\cos ax\geq 0\ \text{또는}\ f'(x)=10+a\cos ax\leq 0$$

이어야 한다. ⋯ ❶

(i) a가 음의 정수일 때,

$10+a\leq 10+a\cos ax\leq 10-a$이므로

$$10+a\leq f'(x)\leq 10-a$$

$f'(x)\geq 0$이려면 $10+a\geq 0$이어야 하므로 $\quad a\geq -10$

$f'(x)\leq 0$이려면 $10-a\leq 0$이어야 하므로 $\quad a\geq 10$

이때 a는 음의 정수이므로 $-10,\ -9,\ \cdots,\ -2,\ -1$의 10개이다.

(ii) $a=0$일 때,

$f'(x)=10>0$이므로 $f(x)$의 역함수가 존재한다.

(iii) a가 양의 정수일 때,

$10-a\le 10+a\cos ax\le 10+a$이므로

$10-a\le f'(x)\le 10+a$

$f'(x)\ge 0$이려면 $10-a\ge 0$이어야 하므로 $a\le 10$

$f'(x)\le 0$이려면 $10+a\le 0$이어야 하므로 $a\le -10$

이때 a는 양의 정수이므로 1, 2, ⋯, 9, 10의 10개이다.

이상에서 정수 a의 개수는

$10+1+10=21$ ⋯ ❷

답 21

채점 기준	비율
❶ $f(x)$의 역함수가 존재할 조건을 알 수 있다.	30 %
❷ 정수 a의 개수를 구할 수 있다.	70 %

0833 전략 이계도함수를 이용하여 극대·극소를 판정한다.

풀이 $f'(x)=-e^{-x}(\sin x+\cos x)+e^{-x}(\cos x-\sin x)$

$=-2e^{-x}\sin x$

$f''(x)=2e^{-x}\sin x-2e^{-x}\cos x$

$=2e^{-x}(\sin x-\cos x)$ ⋯ ❶

$f'(x)=0$에서 $\sin x=0\ (\because e^{-x}>0)$

$\therefore x=n\pi$ (n은 자연수)

(i) $x=(2m-1)\pi$ (m은 자연수)일 때,

$\sin(2m-1)\pi=0$, $\cos(2m-1)\pi=-1$이므로

$f''((2m-1)\pi)=2e^{-(2m-1)\pi}>0$

따라서 $f(x)$는 극솟값을 갖는다.

(ii) $x=2m\pi$ (m은 자연수)일 때,

$\sin 2m\pi=0$, $\cos 2m\pi=1$이므로

$f''(2m\pi)=-2e^{-2m\pi}<0$

따라서 $f(x)$는 극댓값을 갖는다.

(i), (ii)에서 $f(x)$가 극대일 때의 x의 값은

2π, 4π, 6π, ⋯, $2m\pi$, ⋯

$\therefore x_m=2m\pi$ (m은 자연수) ⋯ ❷

따라서 $x_{10}=20\pi$, $x_{20}=40\pi$이므로

$x_{20}-x_{10}=20\pi$

$\therefore k=20$ ⋯ ❸

답 20

채점 기준	비율
❶ $f'(x)$, $f''(x)$를 구할 수 있다.	20 %
❷ $f(x)$가 극대일 때의 x의 값을 자연수 m에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	60 %
❸ k의 값을 구할 수 있다.	20 %

07 도함수의 활용 (2)

0834 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2$이라 하면

$f'(x)=x^2-4x$, $f''(x)=2x-4=2(x-2)$

$f''(x)=0$에서 $x=2$

따라서 곡선 $y=f(x)$는 구간 $(-\infty, 2)$에서 $f''(x)<0$이므로 위로 볼록하고, 구간 $(2, \infty)$에서 $f''(x)>0$이므로 아래로 볼록하다.

답 풀이 참조

0835 $f(x)=-x^4+x^3+3x^2+x-2$라 하면

$f'(x)=-4x^3+3x^2+6x+1$,

$f''(x)=-12x^2+6x+6=-6(2x+1)(x-1)$

$f''(x)=0$에서 $x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=1$

따라서 곡선 $y=f(x)$는 구간 $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$ 또는 구간 $(1, \infty)$에서 $f''(x)<0$이므로 위로 볼록하고, 구간 $\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$에서 $f''(x)>0$이므로 아래로 볼록하다.

답 풀이 참조

0836 $f(x)=\frac{2}{x^2+2}$라 하면

$f'(x)=\frac{-4x}{(x^2+2)^2}$,

$f''(x)=\frac{-4(x^2+2)^2+4x\cdot 2(x^2+2)\cdot 2x}{(x^2+2)^4}=\frac{4(3x^2-2)}{(x^2+2)^3}$

$f''(x)=0$에서 $3x^2-2=0$, $x^2=\frac{2}{3}$

$\therefore x=-\frac{\sqrt{6}}{3}$ 또는 $x=\frac{\sqrt{6}}{3}$

따라서 곡선 $y=f(x)$는 구간 $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$ 또는 구간 $\left(\frac{\sqrt{6}}{3}, \infty\right)$에서 $f''(x)>0$이므로 아래로 볼록하고, 구간 $\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$에서 $f''(x)<0$이므로 위로 볼록하다.

답 풀이 참조

0837 $f(x)=xe^{2x}$이라 하면

$f'(x)=e^{2x}+2xe^{2x}=(1+2x)e^{2x}$,

$f''(x)=2e^{2x}+(1+2x)\cdot 2e^{2x}=4(x+1)e^{2x}$

$f''(x)=0$에서 $x=-1\ (\because e^{2x}>0)$

따라서 곡선 $y=f(x)$는 구간 $(-\infty, -1)$에서 $f''(x)<0$이므로 위로 볼록하고, 구간 $(-1, \infty)$에서 $f''(x)>0$이므로 아래로 볼록하다.

답 풀이 참조

0838 $f(x)=x-\ln x$라 하면 $x>0$이고

$f'(x)=1-\frac{1}{x}$, $f''(x)=\frac{1}{x^2}$

따라서 곡선 $y=f(x)$는 구간 $(0, \infty)$에서 $f''(x)>0$이므로 아래로 볼록하다.

답 풀이 참조

0839 $f(x)=x-\cos x$라 하면

$f'(x)=1+\sin x$, $f''(x)=\cos x$

$f''(x)=0$에서 $x=\frac{\pi}{2}$ ($\because 0<x<\pi$)

따라서 곡선 $y=f(x)$는 구간 $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$에서 $f''(x)>0$이므로 아래로 볼록하고, 구간 $\left(\frac{\pi}{2},\ \pi\right)$에서 $f''(x)<0$이므로 위로 볼록하다.

답 풀이 참조

0840 $f(x)=x^3-3x^2+2$라 하면

$f'(x)=3x^2-6x$, $f''(x)=6x-6=6(x-1)$

$f''(x)=0$에서 $x=1$

$x<1$일 때 $f''(x)<0$,

$x>1$일 때 $f''(x)>0$

따라서 $x=1$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 변곡점의 좌표는 $(1,\ 0)$이다.

$f(1)=1-3+2=0$

답 $(1,\ 0)$

0841 $f(x)=-x^4+6x^2+3x$라 하면

$f'(x)=-4x^3+12x+3$,

$f''(x)=-12x^2+12=-12(x+1)(x-1)$

$f''(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

$x<-1$ 또는 $x>1$일 때 $f''(x)<0$,

$-1<x<1$일 때 $f''(x)>0$

따라서 $x=-1$, $x=1$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 변곡점의 좌표는 $(-1,\ 2)$, $(1,\ 8)$이다.

답 $(-1,\ 2)$, $(1,\ 8)$

0842 $f(x)=x^2+\frac{1}{x}$이라 하면 $x\neq0$이고

$f'(x)=2x-\frac{1}{x^2}$,

$f''(x)=2+\frac{2}{x^3}=\frac{2x^3+2}{x^3}=\frac{2(x+1)(x^2-x+1)}{x^3}$

$f''(x)=0$에서 $x=-1$ ($\because x^2-x+1>0$)

$x<-1$일 때 $f''(x)>0$,

$-1<x<0$일 때 $f''(x)<0$

따라서 $x=-1$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 변곡점의 좌표는 $(-1,\ 0)$이다.

답 $(-1,\ 0)$

0843 $f(x)=xe^x$이라 하면

$f'(x)=e^x+xe^x=(1+x)e^x$,

$f''(x)=e^x+(1+x)e^x=(2+x)e^x$

$f''(x)=0$에서 $x=-2$ ($\because e^x>0$)

$x<-2$일 때 $f''(x)<0$,

$x>-2$일 때 $f''(x)>0$

따라서 $x=-2$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 변곡점의 좌표는 $\left(-2,\ -\frac{2}{e^2}\right)$이다.

답 $\left(-2,\ -\frac{2}{e^2}\right)$

0844 $f(x)=\ln(x^2+1)$이라 하면

$f'(x)=\frac{2x}{x^2+1}$,

$f''(x)=\frac{2(x^2+1)-2x\cdot2x}{(x^2+1)^2}=\frac{-2(x^2-1)}{(x^2+1)^2}$

$=\frac{-2(x+1)(x-1)}{(x^2+1)^2}$

$f''(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

$x<-1$ 또는 $x>1$일 때 $f''(x)<0$,

$-1<x<1$일 때 $f''(x)>0$

따라서 $x=-1$, $x=1$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 변곡점의 좌표는 $(-1,\ \ln2)$, $(1,\ \ln2)$이다.

답 $(-1,\ \ln2)$, $(1,\ \ln2)$

0845 $f(x)=\sin2x$라 하면

$f'(x)=2\cos2x$, $f''(x)=-4\sin2x$

$f''(x)=0$에서 $x=\frac{\pi}{2}$ ($\because 0<x<\pi$)

$0<x<\frac{\pi}{2}$일 때 $f''(x)<0$,

$\frac{\pi}{2}<x<\pi$일 때 $f''(x)>0$

따라서 $x=\frac{\pi}{2}$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 변곡점의 좌표는 $\left(\frac{\pi}{2},\ 0\right)$이다.

답 $\left(\frac{\pi}{2},\ 0\right)$

0846 $f(x)=x^2+4\cos x$라 하면

$f'(x)=2x-4\sin x$,

$f''(x)=2-4\cos x=2(1-2\cos x)$

$f''(x)=0$에서 $\cos x=\frac{1}{2}$ $\therefore x=\frac{\pi}{3}$ ($\because 0<x<\pi$)

$0<x<\frac{\pi}{3}$일 때 $f''(x)<0$,

$\frac{\pi}{3}<x<\pi$일 때 $f''(x)>0$

따라서 $x=\frac{\pi}{3}$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 변곡점의 좌표는 $\left(\frac{\pi}{3},\ \frac{\pi^2}{9}+2\right)$이다.

답 $\left(\frac{\pi}{3},\ \frac{\pi^2}{9}+2\right)$

0847 $f'(x)=4x^3-12x+8=4(x^3-3x+2)$

$=4(x-1)^2(x+2)$,

$f''(x)=12x^2-12=12(x+1)(x-1)$

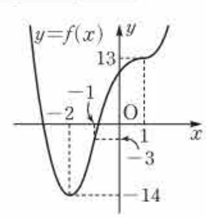
$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=1$

$f''(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$+$
$f''(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-14	↗	-3	↗	13	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

답 풀이 참조



0848 $f(x)=x+\frac{1}{x}$에서 $x\neq 0$이고

$$f'(x)=1-\frac{1}{x^2}=\frac{x^2-1}{x^2}=\frac{(x+1)(x-1)}{x^2},$$

$$f''(x)=\frac{2}{x^3}$$

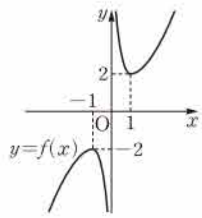
$f'(x)=0$에서 $\quad x=-1$ 또는 $x=1$

$f''(x)=0$을 만족시키는 x의 값이 존재하지 않으므로 변곡점은 없다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$		$+$	$+$	$+$
$f(x)$	↗	-2	↘		↘	2	↗

$\lim_{x\to 0+}f(x)=\infty$, $\lim_{x\to 0-}f(x)=-\infty$이므로 점근선은 y축이다.

또 $\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$, $\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



풀이 참조

0849 $f'(x)=\frac{3(x^2+1)-3x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{-3x^2+3}{(x^2+1)^2}$

$$=\frac{-3(x+1)(x-1)}{(x^2+1)^2},$$

$$f''(x)=\frac{-6x(x^2+1)^2-(-3x^2+3)\cdot 2(x^2+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^4}$$

$$=\frac{6x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$$

$$=\frac{6x(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})}{(x^2+1)^3}$$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-1$ 또는 $x=1$

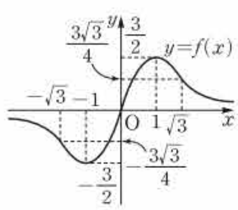
$f''(x)=0$에서

$\quad x=-\sqrt{3}$ 또는 $x=0$ 또는 $x=\sqrt{3}$

x	$\cdots$	$-\sqrt{3}$	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$-\frac{3\sqrt{3}}{4}$	↘	$-\frac{3}{2}$	↗	0	↗	$\frac{3}{2}$	↘	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	↘

또 $\lim_{x\to\infty}f(x)=0$, $\lim_{x\to-\infty}f(x)=0$이므로 점근선은 x축이다.

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



풀이 참조

0850 $f(x)=x\sqrt{x+4}$에서 $x\geq -4$이고

$$f'(x)=\sqrt{x+4}+x\cdot\frac{1}{2\sqrt{x+4}}=\frac{2(x+4)+x}{2\sqrt{x+4}}$$

$$=\frac{3x+8}{2\sqrt{x+4}},$$

$$f''(x)=\frac{3\cdot 2\sqrt{x+4}-(3x+8)\cdot\frac{1}{\sqrt{x+4}}}{(2\sqrt{x+4})^2}$$

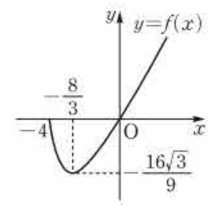
$$=\frac{6(x+4)-(3x+8)}{4(x+4)\sqrt{x+4}}=\frac{3x+16}{4(x+4)\sqrt{x+4}}$$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-\frac{8}{3}$

$x\geq -4$에서 $f''(x)=0$을 만족시키는 x의 값이 존재하지 않으므로 변곡점은 없다.

x	-4	$\cdots$	$-\frac{8}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f''(x)$		$+$	$+$	$+$
$f(x)$	0	↘	$-\frac{16\sqrt{3}}{9}$	↗

또 $\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



풀이 참조

0851 $f'(x)=2e^{-x}-2xe^{-x}=2(1-x)e^{-x}$,

$f''(x)=-2e^{-x}-2(1-x)e^{-x}=2(x-2)e^{-x}$

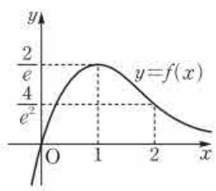
$f'(x)=0$에서 $\quad x=1\ (\because e^{-x}>0)$

$f''(x)=0$에서 $\quad x=2\ (\because e^{-x}>0)$

x	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$\frac{2}{e}$	↘	$\frac{4}{e^2}$	↘

$\lim_{x\to\infty}f(x)=0$이므로 점근선은 x축이다.

또 $\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



풀이 참조

0852 $f(x)=2x\ln x$에서 $x>0$이고

$$f'(x)=2\ln x+2x\cdot\frac{1}{x}=2\ln x+2=2(\ln x+1),$$

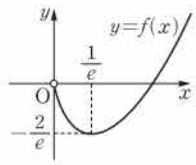
$$f''(x)=\frac{2}{x}$$

$f'(x)=0$에서 $\quad \ln x=-1 \quad \therefore x=\frac{1}{e}$

$f''(x)=0$을 만족시키는 x의 값이 존재하지 않으므로 변곡점은 없다.

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{e}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f''(x)$		$+$	$+$	$+$
$f(x)$		↘	$-\frac{2}{e}$	↗

또 $\lim_{x\to0+}f(x)=0$, $\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



답 풀이 참조

참고 $\lim_{x\to0+}2x\ln x$에서 $\frac{1}{x}=h$로 놓으면 $x\to0+$일 때 $h\to\infty$이므로

$$\lim_{x\to0+}2x\ln x=2\lim_{h\to\infty}\frac{\ln\frac{1}{h}}{h}=2\lim_{h\to\infty}\frac{-\ln h}{h}=0$$

0853 $f'(x)=1+\cos x$, $f''(x)=-\sin x$

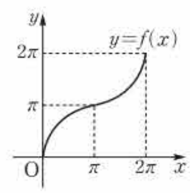
$f'(x)=0$에서 $\quad\cos x=-1\quad\therefore x=\pi\ (\because 0\le x\le2\pi)$

$f''(x)=0$에서 $\quad\sin x=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=\pi$ 또는 $x=2\pi\ (\because 0\le x\le2\pi)$

x	0	$\cdots$	π	$\cdots$	2π
$f'(x)$		+	0	+	
$f''(x)$		−	0	+	
$f(x)$	0	↷	π	⤴	2π

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



답 풀이 참조

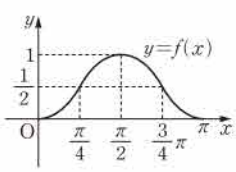
0854 $f'(x)=2\sin x\cos x=\sin2x$, $f''(x)=2\cos2x$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=0$ 또는 $x=\frac{\pi}{2}$ 또는 $x=\pi\ (\because 0\le x\le\pi)$

$f''(x)=0$에서 $\quad x=\frac{\pi}{4}$ 또는 $x=\frac{3}{4}\pi\ (\because 0\le x\le\pi)$

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{3}{4}\pi$	$\cdots$	π
$f'(x)$		+	+	+	0	−	−	−	
$f''(x)$		+	0	−	−	−	0	+	
$f(x)$	0	⤴	$\frac{1}{2}$	↷	1	⤵	$\frac{1}{2}$	↘	0

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



답 풀이 참조

0855 $f'(x)=\frac{(2x+3)(x-3)-(x^2+3x+7)}{(x-3)^2}$

$$=\frac{x^2-6x-16}{(x-3)^2}=\frac{(x+2)(x-8)}{(x-3)^2}$$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=8\ (\because 4\le x\le9)$

x	4	$\cdots$	8	$\cdots$	9
$f'(x)$		−	0	+	
$f(x)$	35	↘	19	↗	$\frac{115}{6}$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=4$에서 최댓값 35, $x=8$에서 최솟값 19를 갖는다.

답 최댓값: 35, 최솟값: 19

0856 $f'(x)=\frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}}=-\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=0$

x	−2	$\cdots$	0	$\cdots$	2
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	0	↗	2	↘	0

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 최댓값 2, $x=-2$ 또는 $x=2$에서 최솟값 0을 갖는다.

답 최댓값: 2, 최솟값: 0

0857 $f'(x)=e^x+xe^x=(1+x)e^x$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-1\ (\because e^x>0)$

x	−3	$\cdots$	−1	$\cdots$	1
$f'(x)$		−	0	+	
$f(x)$	$-\frac{3}{e^3}$	↘	$-\frac{1}{e}$	↗	e

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 최댓값 e, $x=-1$에서 최솟값 $-\frac{1}{e}$을 갖는다.

답 최댓값: e, 최솟값: $-\frac{1}{e}$

0858 $f'(x)=\ln x+x\cdot\frac{1}{x}=\ln x+1$

$f'(x)=0$에서 $\quad\ln x=-1\quad\therefore x=\frac{1}{e}$

x	$\frac{1}{e^2}$	$\cdots$	$\frac{1}{e}$	$\cdots$	e^4
$f'(x)$		−	0	+	
$f(x)$	$-\frac{2}{e^2}$	↘	$-\frac{1}{e}$	↗	$4e^4$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=e^4$에서 최댓값 $4e^4$, $x=\frac{1}{e}$에서 최솟값 $-\frac{1}{e}$을 갖는다.

답 최댓값: $4e^4$, 최솟값: $-\frac{1}{e}$

0859 $f'(x)=\sin x+x\cos x-\sin x=x\cos x$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=0$ 또는 $\cos x=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=\frac{\pi}{2}$ 또는 $x=\frac{3}{2}\pi\ (\because 0\le x\le2\pi)$

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{3}{2}\pi$	$\cdots$	2π
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$	1	↗	$\frac{\pi}{2}$	↘	$-\frac{3}{2}\pi$	↗	1

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\frac{\pi}{2}$에서 최댓값 $\frac{\pi}{2}$, $x=\frac{3}{2}\pi$에서 최솟값 $-\frac{3}{2}\pi$를 갖는다.

답 최댓값: $\frac{\pi}{2}$, 최솟값: $-\frac{3}{2}\pi$

0860 $f'(x)=2\cos x+2\cos2x=2\cos x+2(2\cos^2x-1)$

$$=2(2\cos^2x+\cos x-1)$$
$$=2(\cos x+1)(2\cos x-1)$$

$f'(x)=0$에서 $\quad\cos x=-1$ 또는 $\cos x=\frac{1}{2}$

$\therefore x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\pi\ \left(\because \frac{\pi}{4}\le x\le\pi\right)$

x	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\sqrt{2}+1$	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	0

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\frac{\pi}{3}$에서 최댓값 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$, $x=\pi$에서 최솟값 0을 갖는다.

답 최댓값: $\frac{3\sqrt{3}}{2}$, 최솟값: 0

0861 $f(x)=x-\sqrt{x+1}+1$이라 하면 $x\ge-1$이고

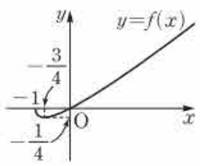
$$f'(x)=1-\frac{1}{2\sqrt{x+1}}=\frac{2\sqrt{x+1}-1}{2\sqrt{x+1}}$$

$f'(x)=0$에서 $\quad 2\sqrt{x+1}=1,\quad \sqrt{x+1}=\frac{1}{2}$

$x+1=\frac{1}{4}\qquad \therefore x=-\frac{3}{4}$

x	-1	$\cdots$	$-\frac{3}{4}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$

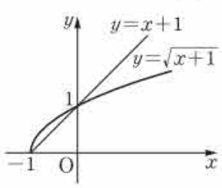
또 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 x축과 서로 다른 두 점에서 만나므로 주어진 방정식은 서로 다른 두 개의 실근을 갖는다.

답 2

다른 풀이 방정식 $x-\sqrt{x+1}+1=0$, 즉 $x+1=\sqrt{x+1}$의 서로 다른 실근의 개수는 $x\ge-1$에서 두 함수 $y=x+1$, $y=\sqrt{x+1}$의 그래프의 교점의 개수와 같다.



따라서 위의 그림에서 두 함수 $y=x+1$, $y=\sqrt{x+1}$의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나므로 주어진 방정식은 서로 다른 두 개의 실근을 갖는다.

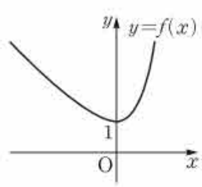
0862 $f(x)=e^x-x$라 하면

$$f'(x)=e^x-1$$

$f'(x)=0$에서 $\quad e^x=1\qquad \therefore x=0$

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	1	$\nearrow$

또 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\infty$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 x축과 만나지 않으므로 주어진 방정식은 실근을 갖지 않는다.

답 0

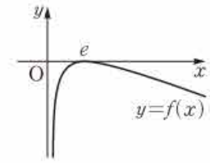
0863 $f(x)=\ln x-\frac{x}{e}$라 하면 $x>0$이고

$$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{e}$$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=e$

x	0	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		$\nearrow$	0	$\searrow$

또 $\lim\limits_{x\to0+}f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=-\infty$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 x축과 접하므로 주어진 방정식은 한 개의 실근을 갖는다.

답 1

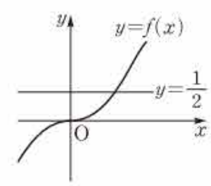
0864 방정식 $x-\sin x=\frac{1}{2}$의 서로 다른 실근의 개수는 곡선 $y=x-\sin x$와 직선 $y=\frac{1}{2}$의 교점의 개수와 같다.

$f(x)=x-\sin x$라 하면

$$f'(x)=1-\cos x$$

$f'(x)\ge0$이므로 함수 $f(x)$는 실수 전체의 구간에서 증가한다.

또 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{2}$은 한 점에서 만나므로 주어진 방정식은 한 개의 실근을 갖는다.

답 1

0865 $f(x)=e^{-x}+x-1$이라 하면 $\quad f'(x)=\boxed{-e^{-x}+1}$

$f'(x)=0$에서 $\quad e^{-x}=1\qquad \therefore x=\boxed{0}$

이때 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\infty$이므로 $f(x)$의 최솟값은 $f(0)=\boxed{0}$이다.

x	$\cdots$	$\boxed{0}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$\boxed{0}$	$\nearrow$

즉 $f(x)\ge0$이므로

$$e^{-x}+x-1\ge0$$

따라서 모든 실수 x에 대하여 부등식 $e^{-x}\ge1-x$가 성립한다.

$\therefore$ (가) $-e^{-x}+1$ (나) 0 (다) 0

답 (가) $-e^{-x}+1$ (나) 0 (다) 0

0866 $f(x)=x-1-\ln x$라 하면

$$f'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$$

$x>1$일 때 $f'(x)>0$이므로 함수 $f(x)$는 증가한다.

그런데 $f(1)=0$이므로 $x>1$일 때

$$f(x)>0,\ 즉\ x-1-\ln x>0$$

따라서 $x>1$일 때, 부등식 $x-1>\ln x$가 성립한다.

답 풀이 참조

SSEN 특강 $x>a$에서 성립하는 부등식의 증명

$x>a$에서 부등식 $f(x)>0$이 성립함을 다음과 같이 증명할 수 있다.
① 함수 $f(x)$의 극값이 존재할 때
➡ $x>a$에서 ($f(x)$의 최솟값)>0임을 보인다.
② 함수 $f(x)$의 극값이 존재하지 않을 때
➡ $x>a$에서 함수 $\underbrace{f(x)\text{가 증가하고}}_{f'(x)>0}$ $f(a)\geq0$임을 보인다.

0867 점 P의 시각 t에서의 속도와 가속도를 각각 v, a라 하면
$$v=f'(t)=2e^{-2t},\ a=f''(t)=-4e^{-2t}$$
이므로 $t=1$에서의 점 P의 속도와 가속도는
$$v=2e^{-2}=\frac{2}{e^2},\ a=-4e^{-2}=-\frac{4}{e^2}$$
답 속도: $\frac{2}{e^2}$, 가속도: $-\frac{4}{e^2}$

0868 점 P의 시각 t에서의 속도와 가속도를 각각 v, a라 하면
$$v=f'(t)=2t-2\sin t,\ a=f''(t)=2-2\cos t$$
이므로 $t=\frac{\pi}{2}$에서의 점 P의 속도와 가속도는
$$v=2\cdot\frac{\pi}{2}-2\sin\frac{\pi}{2}=\pi-2,\ a=2-2\cos\frac{\pi}{2}=2$$
답 속도: $\pi-2$, 가속도: 2

0869 $\frac{dx}{dt}=9t^2-4t$, $\frac{dy}{dt}=4t^3+1$이므로 점 P의 시각 t에서의 속도는 $(9t^2-4t,\ 4t^3+1)$
따라서 $t=1$에서의 점 P의 속도는 $(5,\ 5)$
$\frac{d^2x}{dt^2}=18t-4$, $\frac{d^2y}{dt^2}=12t^2$이므로 점 P의 시각 t에서의 가속도는
$(18t-4,\ 12t^2)$
따라서 $t=1$에서의 점 P의 가속도는 $(14,\ 12)$
답 속도: $(5,\ 5)$, 가속도: $(14,\ 12)$

0870 $\frac{dx}{dt}=1-e^t$, $\frac{dy}{dt}=1+e^t$이므로 점 P의 시각 t에서의 속도는 $(1-e^t,\ 1+e^t)$
따라서 $t=2$에서의 점 P의 속도는 $(1-e^2,\ 1+e^2)$
$\frac{d^2x}{dt^2}=-e^t$, $\frac{d^2y}{dt^2}=e^t$이므로 점 P의 시각 t에서의 가속도는
$(-e^t,\ e^t)$
따라서 $t=2$에서의 점 P의 가속도는 $(-e^2,\ e^2)$
답 속도: $(1-e^2,\ 1+e^2)$, 가속도: $(-e^2,\ e^2)$

0871 $\frac{dx}{dt}=-\sin t$, $\frac{dy}{dt}=\cos t$이므로 점 P의 시각 t에서의 속도는 $(-\sin t,\ \cos t)$
따라서 $t=\frac{\pi}{3}$에서의 점 P의 속도는 $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2}\right)$
$\frac{d^2x}{dt^2}=-\cos t$, $\frac{d^2y}{dt^2}=-\sin t$이므로 점 P의 시각 t에서의 가속도는 $(-\cos t,\ -\sin t)$
따라서 $t=\frac{\pi}{3}$에서의 점 P의 가속도는 $\left(-\frac{1}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
답 속도: $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2}\right)$, 가속도: $\left(-\frac{1}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

유형 01 곡선의 오목과 볼록
본책 128쪽

함수 $f(x)$가 어떤 구간에서
① $f''(x)>0$ ➡ 곡선 $y=f(x)$는 이 구간에서 아래로 볼록
② $f''(x)<0$ ➡ 곡선 $y=f(x)$는 이 구간에서 위로 볼록

0872 $f(x)=x+2\sin x$라 하면
$$f'(x)=1+2\cos x,\ f''(x)=-2\sin x$$
곡선 $y=f(x)$가 아래로 볼록하려면 $f''(x)>0$이어야 하므로
$$-2\sin x>0,\qquad \sin x<0$$
$$\therefore \pi<x<2\pi\ (\because 0<x<2\pi)$$
따라서 곡선 $y=f(x)$가 아래로 볼록한 구간은 $(\pi,\ 2\pi)$이다.
답 ⑤

0873 $f(x)=x^2(\ln x-2)$라 하면 $x>0$이고
$$f'(x)=2x(\ln x-2)+x^2\cdot\frac{1}{x}=x(2\ln x-3),$$
$$f''(x)=2\ln x-3+x\cdot\frac{2}{x}=2\ln x-1$$
곡선 $y=f(x)$가 위로 볼록하려면 $f''(x)<0$이어야 하므로
$$2\ln x-1<0,\qquad \ln x<\frac{1}{2}\qquad \therefore x<\sqrt{e}$$
그런데 $x>0$이므로 $0<x<\sqrt{e}$
따라서 곡선 $y=f(x)$가 위로 볼록한 구간은 $(0,\ \sqrt{e})$이므로 이 구간에 속하지 않는 것은 ⑤이다.
답 ⑤

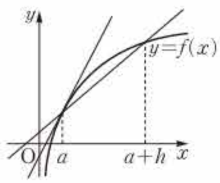
0874 $f(x)=(ax^2+1)e^x$이라 하면
$$f'(x)=2axe^x+(ax^2+1)e^x=(ax^2+2ax+1)e^x,$$
$$f''(x)=(2ax+2a)e^x+(ax^2+2ax+1)e^x$$
$$=(ax^2+4ax+2a+1)e^x \quad \cdots ❶$$
곡선 $y=f(x)$가 실수 전체의 구간에서 아래로 볼록하려면 모든 실수 x에 대하여 $f''(x)\geq0$이어야 한다.
이때 $e^x>0$이므로 부등식
$$ax^2+4ax+2a+1\geq0 \quad \cdots\cdots ㉠$$
이 항상 성립해야 한다. ⋯ ❷
(i) $a=0$일 때, $1>0$이므로 부등식 ㉠이 성립한다.
(ii) $a\neq0$일 때, 부등식 ㉠이 항상 성립해야 하므로 $a>0$
이차방정식 $ax^2+4ax+2a+1=0$의 판별식을 D라 하면
$$\frac{D}{4}=4a^2-a(2a+1)\leq0$$
$$2a^2-a\leq0,\qquad a(2a-1)\leq0\qquad \therefore 0\leq a\leq\frac{1}{2}$$
그런데 $a>0$이므로 $0<a\leq\frac{1}{2}$
(i), (ii)에서 $0\leq a\leq\frac{1}{2}$이므로 a의 최댓값은 $\frac{1}{2}$이다. ⋯ ❸
답 $\frac{1}{2}$

채점 기준	비율
❶ $f''(x)$를 구할 수 있다.	20 %
❷ 부등식 $ax^2+4ax+2a+1\ge 0$이 항상 성립해야 함을 알 수 있다.	40 %
❸ a의 최댓값을 구할 수 있다.	40 %

0875 $f(a+h)-f(a)<f'(a)h$에서 $h>0$이므로

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}<f'(a)$$

이때 $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$의 값은 함수 $f(x)$에서 x의 값이 a에서 $a+h$까지 변할 때의 평균변화율이고, $f'(a)$의 값은 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a,\ f(a))$에서의 접선의 기울기이므로 주어진 부등식을 만족시키는 함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$는 오른쪽 그림과 같이 $x>0$에서 위로 볼록하다.



① $f'(x)=2x,\ f''(x)=2$

$x>0$에서 $f''(x)>0$이므로 곡선 $y=f(x)$는 $x>0$에서 아래로 볼록하다.

② $f'(x)=3x^2,\ f''(x)=6x$

$x>0$에서 $f''(x)>0$이므로 곡선 $y=f(x)$는 $x>0$에서 아래로 볼록하다.

③ $f'(x)=-\frac{2}{x^2},\ f''(x)=\frac{4}{x^3}$

$x>0$에서 $f''(x)>0$이므로 곡선 $y=f(x)$는 $x>0$에서 아래로 볼록하다.

④ $f'(x)=4^x\ln 4,\ f''(x)=4^x(\ln 4)^2$

$x>0$에서 $f''(x)>0$이므로 곡선 $y=f(x)$는 $x>0$에서 아래로 볼록하다.

⑤ $f'(x)=\frac{1}{x\ln 10},\ f''(x)=-\frac{1}{x^2\ln 10}$

$x>0$에서 $f''(x)<0$이므로 곡선 $y=f(x)$는 $x>0$에서 위로 볼록하다.

답 ⑤

유형 02 변곡점 본책 128쪽

함수 $f(x)$에서
(i) $f''(a)=0$
(ii) $x=a$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀐다.
➡ 점 $(a,\ f(a))$는 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이다.

0876 $f(x)=\ln(x^2+3)^2$이라 하면

$$f'(x)=\frac{2(x^2+3)\cdot 2x}{(x^2+3)^2}=\frac{4x}{x^2+3},$$

$$f''(x)=\frac{4(x^2+3)-4x\cdot 2x}{(x^2+3)^2}=\frac{-4(x^2-3)}{(x^2+3)^2}$$

$$=\frac{-4(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})}{(x^2+3)^2}$$

$f''(x)=0$에서 $\quad x=-\sqrt{3}$ 또는 $x=\sqrt{3}$

$x=-\sqrt{3},\ x=\sqrt{3}$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 두 변곡점의 좌표는 $\quad (-\sqrt{3},\ 2\ln 6),\ (\sqrt{3},\ 2\ln 6)$

따라서 두 변곡점 사이의 거리는

$$\sqrt{3}-(-\sqrt{3})=2\sqrt{3}$$

답 $2\sqrt{3}$

0877 $f(x)=\sin^2 x$라 하면

$$f'(x)=2\sin x\cos x=\sin 2x,\ f''(x)=2\cos 2x$$

$f''(x)=0$에서

$$x=\frac{\pi}{4} \text{ 또는 } x=\frac{3}{4}\pi \text{ 또는 } x=\frac{5}{4}\pi \text{ 또는 } x=\frac{7}{4}\pi$$

$(\because 0<x<2\pi)$

$x=\frac{\pi}{4},\ x=\frac{3}{4}\pi,\ x=\frac{5}{4}\pi,\ x=\frac{7}{4}\pi$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 변곡점의 개수는 4이다.

답 4

0878 $f(x)=\frac{x^2}{e^x}=x^2e^{-x}$이라 하면

$$f'(x)=2xe^{-x}-x^2e^{-x}=(2x-x^2)e^{-x},$$

$$f''(x)=(2-2x)e^{-x}-(2x-x^2)e^{-x}$$

$$=(x^2-4x+2)e^{-x}$$

$f''(x)=0$에서 $\quad x^2-4x+2=0\ (\because e^{-x}>0)$

$\therefore x=2\pm\sqrt{2}$

$x=2-\sqrt{2},\ x=2+\sqrt{2}$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 모든 변곡점의 x좌표의 합은

$$(2-\sqrt{2})+(2+\sqrt{2})=4$$

답 ④

0879 $f(x)=\ln(x^2+2)$라 하면

$$f'(x)=\frac{2x}{x^2+2},$$

$$f''(x)=\frac{2(x^2+2)-2x\cdot 2x}{(x^2+2)^2}=\frac{-2(x^2-2)}{(x^2+2)^2}$$

$$=\frac{-2(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})}{(x^2+2)^2}$$

$f''(x)=0$에서 $\quad x=-\sqrt{2}$ 또는 $x=\sqrt{2}$

$x=-\sqrt{2},\ x=\sqrt{2}$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 두 변곡점의 좌표는 $\quad (-\sqrt{2},\ \ln 4),\ (\sqrt{2},\ \ln 4)$

따라서 두 변곡점에서의 접선의 기울기는

$$f'(-\sqrt{2})=\frac{-2\sqrt{2}}{2+2}=-\frac{\sqrt{2}}{2},\ f'(\sqrt{2})=\frac{2\sqrt{2}}{2+2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

이므로 구하는 곱은

$$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=-\frac{1}{2}$$

답 ④

0880 $f'(x)=-\frac{2x}{(x^2+1)^2},$

$$f''(x)=-\frac{2(x^2+1)^2-2x\cdot 2(x^2+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^4}$$

$$=\frac{2(3x^2-1)}{(x^2+1)^3}$$ ⋯ ❶

$f'(x)=0$에서 $\quad x=0$

$x=0$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌므로 $f(x)$는 $x=0$에서 극값을 갖는다.

$\therefore \mathrm{P}(0,\ 1)$ ⋯ ❷

$f''(x)=0$에서 $\quad 3x^2-1=0, \quad x^2=\dfrac{1}{3}$

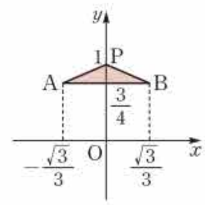
$\therefore x=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 또는 $x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$x=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, $x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 두 변곡점 A, B의 좌표는

$\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3},\ \dfrac{3}{4}\right), \left(\dfrac{\sqrt{3}}{3},\ \dfrac{3}{4}\right)$ ⋯ ❸

따라서 오른쪽 그림에서 △PAB의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\cdot\underbrace{\dfrac{1}{4}}_{1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}}=\dfrac{\sqrt{3}}{12}$ ⋯ ❹



답 $\dfrac{\sqrt{3}}{12}$

채점 기준	비율
❶ $f'(x)$, $f''(x)$를 구할 수 있다.	30 %
❷ 점 P의 좌표를 구할 수 있다.	20 %
❸ 두 점 A, B의 좌표를 구할 수 있다.	30 %
❹ △PAB의 넓이를 구할 수 있다.	20 %

유형 03 변곡점을 이용한 미정계수의 결정 본책 129쪽

미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여

① $f(x)$가 $x=a$에서 극값 b를 갖는다.
⇒ $f(a)=b$, $f'(a)=0$

② 점 $(a,\ b)$가 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이다.
⇒ $f(a)=b$, $f''(a)=0$

0881 $f'(x)=a\cos x-b\sin x+c$,

$f''(x)=-a\sin x-b\cos x$

$x=\dfrac{4}{3}\pi$에서 극대이므로 $f'\left(\dfrac{4}{3}\pi\right)=0$에서

$-\dfrac{1}{2}a+\dfrac{\sqrt{3}}{2}b+c=0$ ⋯⋯ ㉠

변곡점의 좌표가 $(\pi,\ -\pi)$이므로

$f''(\pi)=0$에서 $\quad b=0$

$f(\pi)=-\pi$에서 $\quad -b+c\pi=-\pi \quad \therefore c=-1$

$b=0$, $c=-1$을 ㉠에 대입하면

$-\dfrac{1}{2}a-1=0 \quad \therefore a=-2$

$\therefore a+b+c=-3$

답 -3

0882 $f'(x)=3ax^2+2bx+5$, $f''(x)=6ax+2b$

점 $(3,\ f(3))$에서의 접선의 기울기가 -4이므로 $f'(3)=-4$에서

$27a+6b+5=-4 \quad \therefore 9a+2b=-3$ ⋯⋯ ㉠

변곡점의 좌표가 $(2,\ f(2))$이므로 $f''(2)=0$에서

$12a+2b=0$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad a=1,\ b=-6$

$\therefore a-b=7$

답 7

0883 $f(x)=(\ln ax)^2$이라 하면 $x>0$이고

$f'(x)=2\ln ax\cdot\dfrac{1}{x}=\dfrac{2\ln ax}{x}$,

$f''(x)=\dfrac{\dfrac{2}{x}\cdot x-2\ln ax}{x^2}=\dfrac{2(1-\ln ax)}{x^2}$ ⋯ ❶

$f''(x)=0$에서 $\quad \ln ax=1, \quad ax=e$

$\therefore x=\dfrac{e}{a}$

$x=\dfrac{e}{a}$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 변곡점의 좌표는

$\left(\dfrac{e}{a},\ 1\right)$ ⋯ ❷

이때 변곡점이 직선 $y=2x-1$ 위에 있으므로

$1=\dfrac{2e}{a}-1, \quad \dfrac{2e}{a}=2 \quad \therefore a=e$ ⋯ ❸

답 e

채점 기준	비율
❶ $f''(x)$를 구할 수 있다.	40 %
❷ 변곡점의 좌표를 a를 이용하여 나타낼 수 있다.	40 %
❸ a의 값을 구할 수 있다.	20 %

0884 $f(x)=ax^2+bx-\ln x$에서 $x>0$이고

$f'(x)=2ax+b-\dfrac{1}{x}$,

$f''(x)=2a+\dfrac{1}{x^2}$

$x=\dfrac{1}{2}$에서 극소이므로 $f'\left(\dfrac{1}{2}\right)=0$에서

$a+b-2=0$ ⋯⋯ ㉠

변곡점의 x좌표가 1이므로 $f''(1)=0$에서

$2a+1=0 \quad \therefore a=-\dfrac{1}{2}$

$a=-\dfrac{1}{2}$을 ㉠에 대입하면

$-\dfrac{1}{2}+b-2=0 \quad \therefore b=\dfrac{5}{2}$

$\therefore f(x)=-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{5}{2}x-\ln x$,

$f'(x)=-x+\dfrac{5}{2}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{-2x^2+5x-2}{2x}$

$=-\dfrac{(2x-1)(x-2)}{2x}$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=\dfrac{1}{2}$ 또는 $x=2$

x	0	⋯	$\frac{1}{2}$	⋯	2	⋯
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$		↘	극소	↗	극대	↘

따라서 $f(x)$의 극댓값은

$f(2)=3-\ln 2$

답 ④

0885 $f(x)=\dfrac{1}{2}ax^2+3\sin x+x$라 하면

$f'(x)=ax+3\cos x+1$, $f''(x)=a-3\sin x$

07 도함수의 활용 (2)

곡선 $y=f(x)$가 변곡점을 가지려면 방정식 $f''(x)=0$이 실근을 갖고, 이 실근의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌어야 한다.

$f''(x)=0$에서 $\quad a-3\sin x=0 \qquad \therefore \sin x=\frac{a}{3}$

이때 $-1\le\sin x\le1$이므로

$-1\le\frac{a}{3}\le1 \qquad \therefore -3\le a\le3$

$a=-3$이면 $\quad f''(x)=-3-3\sin x\le0$

$a=3$이면 $\quad f''(x)=3-3\sin x\ge0$

즉 $a=-3$ 또는 $a=3$이면 $f''(x)=0$을 만족시키는 x의 값의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌지 않으므로 변곡점이 될 수 없다.

따라서 a의 값의 범위는 $\quad -3<a<3$ 답 ③

다른 풀이 곡선 $y=f(x)$가 변곡점을 가지려면

($f''(x)$의 최솟값)$<0<$($f''(x)$의 최댓값)

이어야 한다.

이때 $-1\le\sin x\le1$이므로 $\quad -3\le-3\sin x\le3$

$\therefore a-3\le a-3\sin x\le a+3$, 즉 $a-3\le f''(x)\le a+3$

따라서 $a-3<0$, $a+3>0$이어야 하므로

$-3<a<3$

유형 04 도함수의 그래프를 이용한 함수의 해석 본책 130쪽

함수 $f'(x)$의 도함수 $f''(x)$의 부호

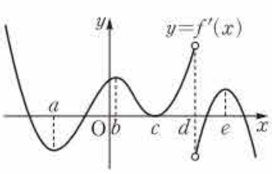
➡ $y=f'(x)$의 그래프 위의 점에서의 접선의 기울기를 조사한다.

0886 구간 $[a, f]$에서 $f''(x)$의 부호를 조사하면 다음과 같다.

x	a	$\cdots$	b	$\cdots$	c	$\cdots$	d	$\cdots$	e	$\cdots$	f
$f''(x)$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$

곡선 $y=f(x)$가 위로 볼록하려면 $f''(x)<0$이어야 하므로 구하는 구간은 (b, d)이다. 답 ③

0887 오른쪽 그림과 같이 a, b, c, d, e를 정하고 $f''(x)$의 부호를 조사하면 다음과 같다.



x	$\cdots$	a	$\cdots$	b	$\cdots$	c	$\cdots$	d	$\cdots$	e	$\cdots$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$

$x=a$, $x=b$, $x=c$, $x=e$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 변곡점의 개수는 4이다. 답 4

0888 ㄱ. $f'(c)=0$이고, $x=c$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 $f(x)$는 $x=c$에서 극대이다.

또 $f'(e)=0$이고, $x=e$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 $f(x)$는 $x=e$에서 극소이다.

따라서 함수 $f(x)$는 서로 다른 두 점에서 극값을 갖는다.

ㄴ. $f''(x)$의 부호를 조사하면 다음과 같다.

x	$\cdots$	a	$\cdots$	b	$\cdots$	c	$\cdots$	d	$\cdots$	e	$\cdots$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$

구간 (a, b)에서 $f''(x)>0$이므로 이 구간에서 곡선 $y=f(x)$는 아래로 볼록하다.

ㄷ. $x=a$, $x=b$, $x=d$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 변곡점은 3개이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ②

유형 05 함수의 그래프의 성질 본책 130쪽

함수 $f(x)$에 대하여

① 정의역과 치역

② 좌표축과의 교점

③ 증가와 감소, 극대와 극소

④ 곡선의 오목과 볼록, 변곡점

⑤ $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$, 점근선

등을 조사하면 $y=f(x)$의 그래프의 성질을 파악할 수 있다.

0889 $f'(x)=\frac{x^2+1-x\cdot2x}{(x^2+1)^2}=\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$

$=\frac{(1+x)(1-x)}{(x^2+1)^2}$,

$f''(x)=\frac{-2x(x^2+1)^2-(1-x^2)\cdot2(x^2+1)\cdot2x}{(x^2+1)^4}$

$=\frac{2x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}=\frac{2x(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})}{(x^2+1)^3}$

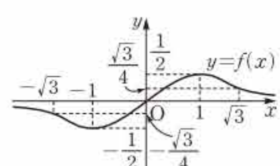
$f'(x)=0$에서 $\quad x=-1$ 또는 $x=1$

$f''(x)=0$에서 $\quad x=-\sqrt{3}$ 또는 $x=0$ 또는 $x=\sqrt{3}$

x	$\cdots$	$-\sqrt{3}$	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$-\frac{\sqrt{3}}{4}$	↘	$-\frac{1}{2}$	↗	0	↗	$\frac{1}{2}$	↘	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	↘

또 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



① $f(x)$의 극솟값은

$f(-1)=-\frac{1}{2}$이다.

② $y=f(x)$의 치역은 $\left\{y \,\middle|\, -\frac{1}{2}\le y\le\frac{1}{2}\right\}$이다.

③ 모든 실수 x에 대하여

$f(-x)=\frac{-x}{(-x)^2+1}=-\frac{x}{x^2+1}=-f(x)$

이므로 $y=f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

④ 구간 $(2, 4)$에서 $f''(x)>0$이므로 이 구간에서 $y=f(x)$의 그래프는 아래로 볼록하다.

⑤ 변곡점은 점 $\left(-\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$, 점 $(0, 0)$, 점 $\left(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$의 3개이다.

답 ②

SSEN 특강 그래프의 대칭성

함수 $y=f(x)$의 그래프는
① $f(-x)=f(x)$ ➡ y축에 대하여 대칭이다.
② $f(-x)=-f(x)$ ➡ 원점에 대하여 대칭이다.

0890 $f'(x)=-4xe^{-2x^2}$,

$f''(x)=-4e^{-2x^2}-4x\cdot(-4xe^{-2x^2})$

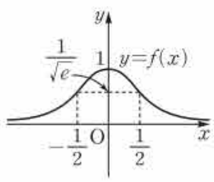
$\quad=4(4x^2-1)e^{-2x^2}=4(2x+1)(2x-1)e^{-2x^2}$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=0\ (\because e^{-2x^2}>0)$

$f''(x)=0$에서 $\quad x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=\frac{1}{2}\ (\because e^{-2x^2}>0)$

x	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	⤴	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	↗	1	↘	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	⤷

또 $\lim_{x\to\infty}f(x)=0$, $\lim_{x\to-\infty}f(x)=0$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



ㄱ. 모든 실수 x에 대하여

$\quad f(-x)=e^{-2(-x)^2}=e^{-2x^2}$

$\quad\quad=f(x)$

이므로 $y=f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.

ㄷ. 변곡점의 좌표는 $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$, $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ③

0891 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$에서 $x>0$이고

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2},$$

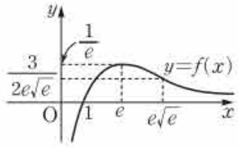
$$f''(x)=\frac{-\frac{1}{x}\cdot x^2-(1-\ln x)\cdot 2x}{x^4}=\frac{2\ln x-3}{x^3}$$

$f'(x)=0$에서 $\quad \ln x=1 \quad \therefore x=e$

$f''(x)=0$에서 $\quad \ln x=\frac{3}{2} \quad \therefore x=e\sqrt{e}$

x	0	$\cdots$	e	$\cdots$	$e\sqrt{e}$	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$		$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$		↗	$\frac{1}{e}$	↘	$\frac{3}{2e\sqrt{e}}$	⤷

또 $\lim_{x\to0+}f(x)=-\infty$, $\lim_{x\to\infty}f(x)=0$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



ㄴ. 점근선은 x축, y축, 즉 직선 $y=0$, 직선 $x=0$이다.

ㄷ. $f(1)=0$, $f(e)=\frac{1}{e}$이므로 두 점 A, B는 $y=f(x)$의 그래프 위의 점이다.

구간 $(1, e)$에서 $f''(x)<0$이므로 이 구간에서 $y=f(x)$의 그래프는 위로 볼록하다.

따라서 $\overline{AB}$는 $y=f(x)$의 그래프보다 아래쪽에 있다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ③

유형 06~10 함수의 최대·최소

본책 131~133쪽

(1) 구간 $[a, b]$에서 연속인 함수 $f(x)$에 대하여
구간 (a, b)에서의 함수 $f(x)$의 극값,
양 끝 점의 함숫값 $f(a)$, $f(b)$
중에서 가장 큰 값이 최댓값이고, 가장 작은 값이 최솟값이다.
(2) 미정계수를 포함한 함수 $f(x)$에 대하여 $f(x)$의 최댓값 또는 최솟값이 주어진 경우에는 최댓값 또는 최솟값을 미정계수를 이용하여 나타낸 후 주어진 값과 비교한다.

0892 $f'(x)=\frac{3x^2(x-1)-x^3}{(x-1)^2}=\frac{x^2(2x-3)}{(x-1)^2}$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=\frac{3}{2}\ (\because x>1)$

x	1	$\cdots$	$\frac{3}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	$\frac{27}{4}$	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\frac{3}{2}$에서 최솟값 $\frac{27}{4}$을 가지므로

$a=\frac{3}{2}$, $m=\frac{27}{4}$ $\quad \therefore \frac{a}{m}=\frac{2}{9}$ 답 $\frac{2}{9}$

0893 $f'(x)=\frac{x^2-2x+4-x(2x-2)}{(x^2-2x+4)^2}=\frac{4-x^2}{(x^2-2x+4)^2}$

$\quad=\frac{(2+x)(2-x)}{(x^2-2x+4)^2}$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-2$ 또는 $x=2$

x	-3	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\frac{3}{19}$	↘	$-\frac{1}{6}$	↗	$\frac{1}{2}$	↘	$\frac{3}{7}$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 최댓값 $\frac{1}{2}$, $x=-2$에서 최솟값 $-\frac{1}{6}$을 가지므로 구하는 합은

$\frac{1}{2}+\left(-\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{3}$ 답 ①

0894 $f'(x)=\frac{a(x^2+x+1)-(ax+b)(2x+1)}{(x^2+x+1)^2}$

$\quad=\frac{-ax^2-2bx+a-b}{(x^2+x+1)^2}$ ⋯ ❶

$\lim_{x\to-\infty}f(x)=0$, $\lim_{x\to\infty}f(x)=0$이므로 미분가능한 함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 극소이면서 최소이다.

$f'(-2)=0$에서 $\quad \frac{-4a+4b+a-b}{9}=0$

$-3a+3b=0 \quad \therefore a-b=0$ ⋯⋯ ㉠

$f(-2)=-4$에서 $\dfrac{-2a+b}{3}=-4$

$\therefore 2a-b=12$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=b=12$ ⋯ ❷

$\therefore a+b=24$ ⋯ ❸

답 24

채점 기준	비율
❶ $f'(x)$를 a, b를 이용하여 나타낼 수 있다.	30 %
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	60 %
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	10 %

0895 $f(x)=x\sqrt{9-x^2}$에서 $-3\le x\le 3$이고

$9-x^2\ge 0$에서 $x^2\le 9$ $\therefore -3\le x\le 3$

$f'(x)=\sqrt{9-x^2}+x\cdot\dfrac{-2x}{2\sqrt{9-x^2}}=\dfrac{9-2x^2}{\sqrt{9-x^2}}$

$f'(x)=0$에서 $x^2=\dfrac{9}{2}$

$\therefore x=-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ 또는 $x=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

x	-3	$\cdots$	$-\frac{3\sqrt{2}}{2}$	$\cdots$	$\frac{3\sqrt{2}}{2}$	$\cdots$	3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↘	$-\frac{9}{2}$	↗	$\frac{9}{2}$	↘	0

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$에서 최댓값 $\dfrac{9}{2}$, $x=-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$에서 최솟값 $-\dfrac{9}{2}$를 가지므로

$M=\dfrac{9}{2}$, $m=-\dfrac{9}{2}$

$\therefore M-m=9$

답 ③

0896 $f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{5-x}$에서 $0\le x\le 5$이고

$\sqrt{x}$에서 $x\ge 0$
$\sqrt{5-x}$에서 $x\le 5$
$\therefore 0\le x\le 5$

$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+\dfrac{-1}{2\sqrt{5-x}}=\dfrac{\sqrt{5-x}-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\sqrt{5-x}}$ ⋯ ❶

$f'(x)=0$에서 $\sqrt{5-x}=\sqrt{x}$

$5-x=x$ $\therefore x=\dfrac{5}{2}$

x	0	$\cdots$	$\frac{5}{2}$	$\cdots$	5
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\sqrt{5}$	↗	$\sqrt{10}$	↘	$\sqrt{5}$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\dfrac{5}{2}$에서 최댓값 $\sqrt{10}$, $x=0$ 또는 $x=5$에서 최솟값 $\sqrt{5}$를 가지므로

$M=\sqrt{10}$, $m=\sqrt{5}$ ⋯ ❷

$\therefore M^2+m^2=15$ ⋯ ❸

답 15

채점 기준	비율
❶ $f'(x)$를 구할 수 있다.	30 %
❷ M, m의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ M^2+m^2의 값을 구할 수 있다.	20 %

0897 $f'(x)=\sqrt{x+a}+x\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x+a}}=\dfrac{2(x+a)+x}{2\sqrt{x+a}}$

$=\dfrac{3x+2a}{2\sqrt{x+a}}$

$f'(x)=0$에서 $3x+2a=0$ $\therefore x=-\dfrac{2a}{3}$

x	$-a$	$\cdots$	$-\frac{2}{3}a$	$\cdots$	a
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↘	$-\frac{2}{3}a\cdot\sqrt{\frac{a}{3}}$	↗	$a\cdot\sqrt{2a}$

이때 함수 $f(x)$는 $x=-\dfrac{2}{3}a$에서 최솟값 -2를 가지므로

$-\dfrac{2}{3}a\cdot\sqrt{\dfrac{a}{3}}=-2$, $\dfrac{a}{3}\sqrt{\dfrac{a}{3}}=1$

$\dfrac{a^3}{27}=1$, $a^3=27$ $\therefore a=3$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 최댓값 $3\sqrt{6}$을 갖는다. 답 $3\sqrt{6}$

0898 $f(x)=(x^2-2)e^{-2x}$이라 하면

$f'(x)=2xe^{-2x}-2(x^2-2)e^{-2x}=-2(x^2-x-2)e^{-2x}$

$=-2(x+1)(x-2)e^{-2x}$

$f'(x)=0$에서 $x=2$ ($\because 0\le x\le 3$)

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	-2	↗	$\frac{2}{e^4}$	↘	$\frac{7}{e^6}$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 최댓값 $\dfrac{2}{e^4}$, $x=0$에서 최솟값 -2를 가지므로 구하는 곱은

$\dfrac{2}{e^4}\cdot(-2)=-\dfrac{4}{e^4}$

답 ②

0899 $f(x)=\dfrac{x^2}{e^{x+1}}=x^2e^{-x-1}$이므로

$f'(x)=2xe^{-x-1}-x^2e^{-x-1}=x(2-x)e^{-x-1}$ ⋯ ❶

$f'(x)=0$에서 $x=2$ ($\because x>0$)

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		↗	$\frac{4}{e^3}$	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 최댓값 $\dfrac{4}{e^3}$를 가지므로

$a=2$, $M=\dfrac{4}{e^3}$ ⋯ ❷

$\therefore aM=\dfrac{8}{e^3}$ ⋯ ❸

답 $\dfrac{8}{e^3}$

채점 기준	비율
❶ $f'(x)$를 구할 수 있다.	30 %
❷ a, M의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ aM의 값을 구할 수 있다.	20 %

0900 $f'(x)=3ax^2e^{-x}-ax^3e^{-x}=ax^2(3-x)e^{-x}$

$f'(x)=0$에서 $x=0\ (\because -1\le x\le 2)$

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	2
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-ae$	↗	0	↗	$\frac{8a}{e^2}$

이때 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 최댓값 $\frac{8a}{e^2}$, $x=-1$에서 최솟값 $-ae$를 갖고, 최댓값과 최솟값의 곱이 $-\frac{32}{e}$이므로

$\frac{8a}{e^2}\cdot(-ae)=-\frac{32}{e},\quad -\frac{8a^2}{e}=-\frac{32}{e}$

$a^2=4\quad \therefore a=2\ (\because a>0)$

답 ②

0901 $f'(x)=3-\left(\ln x+x\cdot\frac{1}{x}\right)=2-\ln x$

$f'(x)=0$에서 $\ln x=2\quad \therefore x=e^2$

x	1	$\cdots$	e^2	$\cdots$	e^3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	3	↗	e^2	↘	0

따라서 함수 $f(x)$는 $x=e^2$에서 최댓값을 갖고, $x=e^3$에서 최솟값을 가지므로 $\alpha=e^2,\ \beta=e^3$

$\therefore \alpha\beta=e^5$

답 ⑤

0902 $f(x)=\frac{\ln x}{x^2}$에서 $x>0$이고

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot x^2-\ln x\cdot 2x}{x^4}=\frac{1-2\ln x}{x^3}$$

$f'(x)=0$에서 $\ln x=\frac{1}{2}\quad \therefore x=\sqrt{e}$

x	0	$\cdots$	$\sqrt{e}$	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		↗	$\frac{1}{2e}$	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\sqrt{e}$에서 최댓값 $\frac{1}{2e}$을 갖는다.

답 ①

0903 $f(x)=\log_2(x+4)+\log_4(2-x)$에서 $-4<x<2$이고

$x+4>0$에서 $x>-4$
$2-x>0$에서 $x<2$
$\therefore -4<x<2$

$$f'(x)=\frac{1}{(x+4)\ln 2}-\frac{1}{(2-x)\ln 4}$$
$$=\frac{1}{(x+4)\ln 2}-\frac{1}{2(2-x)\ln 2}$$
$$=\frac{2(2-x)-(x+4)}{2(x+4)(2-x)\ln 2}$$
$$=\frac{-3x}{2(x+4)(2-x)\ln 2}$$

$f'(x)=0$에서 $x=0$

x	-4	$\cdots$	0	$\cdots$	2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	$\frac{5}{2}$	↘	

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 최댓값 $\frac{5}{2}$를 갖는다.

답 $\frac{5}{2}$

다른 풀이 $f(x)=\log_2(x+4)+\log_4(2-x)$

$=\log_4(x+4)^2+\log_4(2-x)$

$=\log_4(x+4)^2(2-x)$

이므로 $g(x)=(x+4)^2(2-x)$라 하면 $g(x)$가 최대일 때 $f(x)$도 최대이다. 이때

$g'(x)=2(x+4)(2-x)-(x+4)^2=-3x(x+4)$

$g'(x)=0$에서 $x=0\ (\because -4<x<2)$

x	-4	$\cdots$	0	$\cdots$	2
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$		↗	32	↘	

따라서 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 최댓값 32를 가지므로 함수 $f(x)$의 최댓값은 $\log_4 32=\log_{2^2}2^5=\frac{5}{2}$

SSEN 특강 로그함수의 최대·최소

로그함수 $y=\log_a f(x)$는

① $a>1$ ➡ $f(x)$가 최대일 때 최댓값, $f(x)$가 최소일 때 최솟값을 갖는다.

② $0<a<1$ ➡ $f(x)$가 최대일 때 최솟값, $f(x)$가 최소일 때 최댓값을 갖는다.

0904 $f(x)=\ln x+\frac{e}{x}+a$에서 $x>0$이고

$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{e}{x^2}=\frac{x-e}{x^2}$ ⋯ ❶

$f'(x)=0$에서 $x=e$

x	0	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	$2+a$	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=e$에서 최솟값 0을 가지므로

$2+a=0\quad \therefore a=-2$ ⋯ ❷

답 -2

채점 기준	비율
❶ $f'(x)$를 구할 수 있다.	40 %
❷ a의 값을 구할 수 있다.	60 %

0905 $f'(x)=(-\sin x)\sin x+(1+\cos x)\cos x$

$=-\sin^2 x+\cos x+\cos^2 x$

$=-(1-\cos^2 x)+\cos x+\cos^2 x$

$=2\cos^2 x+\cos x-1$

$=(2\cos x-1)(\cos x+1)$

$f'(x)=0$에서 $\cos x=\frac{1}{2}$ 또는 $\cos x=-1$

$\therefore x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\pi\ (\because 0\le x\le\pi)$

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	↘	0

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\frac{\pi}{3}$에서 최댓값 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$을 갖는다.

답 ③

0906 $f'(x)=2\cos x-1$

$f'(x)=0$에서 $\quad \cos x=\frac{1}{2}$

$\therefore x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\frac{5}{3}\pi$ ($\because 0\le x\le 2\pi$)

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\frac{5}{3}\pi$	$\cdots$	2π
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$	0	↗	$\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$	↘	$-\sqrt{3}-\frac{5}{3}\pi$	↗	-2π

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\frac{\pi}{3}$에서 최댓값 $\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$를 가지므로

$a=\frac{\pi}{3},\ b=\sqrt{3}-\frac{\pi}{3} \qquad \therefore a+b=\sqrt{3}$

답 ③

0907 $f'(x)=\frac{-\sin x(\sin x+2)-\cos x\cdot\cos x}{(\sin x+2)^2}$

$=\frac{-(\sin^2 x+\cos^2 x)-2\sin x}{(\sin x+2)^2}$

$=-\frac{2\sin x+1}{(\sin x+2)^2}$ ⋯ ❶

$f'(x)=0$에서 $\quad \sin x=-\frac{1}{2}$

$\therefore x=\frac{7}{6}\pi$ 또는 $x=\frac{11}{6}\pi$ ($\because \pi\le x\le 2\pi$)

x	π	$\cdots$	$\frac{7}{6}\pi$	$\cdots$	$\frac{11}{6}\pi$	$\cdots$	2π
$f'(x)$		−	0	+	0	−	
$f(x)$	$-\frac{1}{2}$	↘	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	↗	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	↘	$\frac{1}{2}$

따라서 함수 $f(x)$는

$x=\frac{11}{6}\pi$에서 최댓값 $\frac{\sqrt{3}}{3}$,

$x=\frac{7}{6}\pi$에서 최솟값 $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ ⋯ ❷

을 가지므로 구하는 곱은

$\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=-\frac{1}{3}$ ⋯ ❸

답 $-\frac{1}{3}$

채점 기준	비율
❶ $f'(x)$를 구할 수 있다.	30 %
❷ 최댓값과 최솟값을 구할 수 있다.	50 %
❸ 최댓값과 최솟값의 곱을 구할 수 있다.	20 %

0908 $f'(x)=a-2a\sin 2x=a(1-2\sin 2x)$

$f'(x)=0$에서 $\quad \sin 2x=\frac{1}{2}, \qquad 2x=\frac{\pi}{6}\left(\because 0\le 2x\le\frac{\pi}{2}\right)$

$\therefore x=\frac{\pi}{12}$

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{12}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	a	↗	$\frac{a}{12}\pi+\frac{\sqrt{3}}{2}a$	↘	$\frac{a}{4}\pi$

이때 함수 $f(x)$는 $x=\frac{\pi}{4}$에서 최솟값 $\frac{\pi}{2}$를 가지므로

$\frac{a}{4}\pi=\frac{\pi}{2} \qquad \therefore a=2$ $\quad \frac{\pi}{4}<1$에서 $\frac{a}{4}\pi<a$

따라서 함수 $f(x)$의 최댓값은

$f\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{2}{12}\pi+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 2=\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}$

답 $\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}$

유형 11 치환을 이용한 함수의 최대·최소

본책 133쪽

함수 $f(x)$의 식에 공통부분이 있을 때에는 다음과 같은 순서로 최대·최소를 구한다.

(i) 공통부분을 t로 치환하여 t의 값의 범위를 구한다.
(ii) 함수 $f(x)$를 t에 대한 함수 $g(t)$로 나타낸다.
(iii) $g(t)$의 최댓값, 최솟값을 구한다.

0909 $f(x)=\sin^3 x-3\cos^2 x+2$

$=\sin^3 x-3(1-\sin^2 x)+2$

$=\sin^3 x+3\sin^2 x-1$

$\sin x=t$로 놓으면 $-1\le t\le 1$이고, 함수 $f(x)$를 t에 대한 함수 $g(t)$로 나타내면

$g(t)=t^3+3t^2-1$

$\therefore g'(t)=3t^2+6t=3t(t+2)$

$g'(t)=0$에서 $\quad t=0$ ($\because -1\le t\le 1$)

t	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$g'(t)$		−	0	+	
$g(t)$	1	↘	-1	↗	3

따라서 함수 $g(t)$는 $t=1$에서 최댓값 3, $t=0$에서 최솟값 -1을 가지므로

$M=3,\ m=-1$

$\therefore M+m=2$

답 2

0910 $f(x)=8^x+4^x-2^x=(2^x)^3+(2^x)^2-2^x$

$2^x=t$로 놓으면 $t>0$이고, 함수 $f(x)$를 t에 대한 함수 $g(t)$로 나타내면

$g(t)=t^3+t^2-t$

$\therefore g'(t)=3t^2+2t-1=(t+1)(3t-1)$

$g'(t)=0$에서 $\quad t=\frac{1}{3}$ ($\because t>0$)

t	0	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$
$g'(t)$		−	0	+
$g(t)$		↘	$-\frac{5}{27}$	↗

따라서 함수 $g(t)$는 $t=\frac{1}{3}$에서 최솟값 $-\frac{5}{27}$를 갖는다.

답 ③

0911 $f(x)=(\log_2 x)^3+3(\log_2 x)^2-\log_2 x^9$

$=(\log_2 x)^3+3(\log_2 x)^2-9\log_2 x$

$\log_2 x=t$로 놓으면 $\frac{1}{16}\le x\le 4$에서 $\qquad -4\le t\le 2$ ⋯ ❶

함수 $f(x)$를 t에 대한 함수 $g(t)$로 나타내면

$$g(t)=t^3+3t^2-9t$$

$$\therefore g'(t)=3t^2+6t-9=3(t+3)(t-1)$$

$g'(t)=0$에서 $\quad t=-3$ 또는 $t=1$

t	-4	$\cdots$	-3	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$g'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(t)$	20	$\nearrow$	27	$\searrow$	-5	$\nearrow$	2

따라서 함수 $g(t)$는 $t=-3$에서 최댓값 27을 갖는다. ···· ❷

즉 함수 $f(x)$는 $\log_2 x=-3$일 때 최댓값 27을 가지므로

$$a=2^{-3}=\frac{1}{8},\ b=27$$ ···· ❸

$$\therefore \frac{b}{a}=216$$ ···· ❹

답 216

채점 기준	비율
❶ $\log_2 x=t$로 놓고 t의 값의 범위를 구할 수 있다.	20 %
❷ $g(t)$의 최댓값을 구할 수 있다.	40 %
❸ a, b의 값을 구할 수 있다.	30 %
❹ $\frac{b}{a}$의 값을 구할 수 있다.	10 %

0912 $g(x)=\sin x+\sqrt{3}\cos x=2\left(\sin x\cdot\frac{1}{2}+\cos x\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$$=2\left(\sin x\cos\frac{\pi}{3}+\cos x\sin\frac{\pi}{3}\right)=2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$$

이므로 $g(x)=t$로 놓으면 $-2\le t\le 2$이고

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(t)=t^3-3t^2+10$$

$$\therefore f'(t)=3t^2-6t=3t(t-2)$$

$f'(t)=0$에서 $\quad t=0$ 또는 $t=2$

t	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	2
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	-10	$\nearrow$	10	$\searrow$	6

따라서 함수 $f(t)$는 $t=0$에서 최댓값 10, $t=-2$에서 최솟값 -10을 가지므로 구하는 합은

$$10+(-10)=0$$

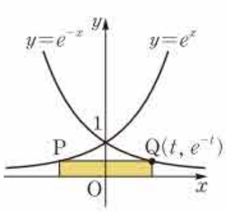
답 ①

유형 12 최대·최소의 활용 본책 134쪽

① 평면도형의 길이, 넓이 구하는 공식
② 입체도형의 부피 구하는 공식
③ 피타고라스 정리
등을 이용하여 도형의 길이, 넓이, 부피를 한 문자에 대한 함수로 나타낸 다음 도함수를 이용하여 최댓값, 최솟값을 구한다.

0913 오른쪽 그림과 같이 점 Q의 좌표를 $(t,\ e^{-t})$ $(t>0)$이라 하면 직사각형의 가로의 길이는 $2t$, 세로의 길이는 e^{-t}이다.

└ 주어진 두 곡선은 y축에 대하여 대칭이므로 $\mathrm{P}(-t,\ e^{-t})$



직사각형의 넓이를 $S(t)$라 하면

$$S(t)=2te^{-t}$$

$$\therefore S'(t)=2e^{-t}-2te^{-t}=2(1-t)e^{-t}$$

$S'(t)=0$에서 $\quad t=1\ (\because e^{-t}>0)$

t	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$S'(t)$		$+$	0	$-$
$S(t)$		$\nearrow$	$\frac{2}{e}$	$\searrow$

따라서 $S(t)$는 $t=1$에서 최댓값 $\frac{2}{e}$를 가지므로 직사각형의 넓이의 최댓값은 $\frac{2}{e}$이다.

답 $\frac{2}{e}$

0914 두 곡선 $y=e^x$과 $y=\ln x$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이고 선분 PQ가 직선 $y=x$에 수직이므로 점 P와 점 Q는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

즉 점 P의 좌표를 $(t,\ e^t)$이라 하면 $\mathrm{Q}(e^t,\ t)$이므로

$$\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{(e^t-t)^2+(t-e^t)^2}=\sqrt{2(e^t-t)^2}$$

$$=\sqrt{2}\,(e^t-t)\ (\because e^t>t)$$

$f(t)=\sqrt{2}\,(e^t-t)$라 하면 $\quad f'(t)=\sqrt{2}\,(e^t-1)$

$f'(t)=0$에서

$$e^t=1 \qquad \therefore t=0$$

t	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(t)$	$-$	0	$+$
$f(t)$	$\searrow$	$\sqrt{2}$	$\nearrow$

따라서 $f(t)$는 $t=0$에서 최솟값 $\sqrt{2}$를 가지므로 선분 PQ의 길이의 최솟값은 $\sqrt{2}$이다.

답 ②

다른 풀이 점 P와 점 Q는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 점 Q의 좌표를 $(k,\ \ln k)\ (k>0)$라 하면 $\mathrm{P}(\ln k,\ k)$이다.

$$\therefore \overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{(k-\ln k)^2+(\ln k-k)^2}$$

$$=\sqrt{2(k-\ln k)^2}$$

$$=\sqrt{2}\,(k-\ln k)\ (\because k>\ln k)$$

$g(k)=\sqrt{2}\,(k-\ln k)$라 하면 $\quad g'(k)=\sqrt{2}\left(1-\frac{1}{k}\right)$

$g'(k)=0$에서 $\quad k=1$

k	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$g'(k)$		$-$	0	$+$
$g(k)$		$\searrow$	$\sqrt{2}$	$\nearrow$

따라서 $g(k)$는 $k=1$에서 최솟값 $\sqrt{2}$를 가지므로 선분 PQ의 길이의 최솟값은 $\sqrt{2}$이다.

0915 원점과 곡선 위의 점 $(e^{2t},\ \sqrt{2}e^{-t})$ 사이의 거리를 $f(t)$라 하면

$$f(t)=\sqrt{(e^{2t})^2+(\sqrt{2}\,e^{-t})^2}=\sqrt{e^{4t}+2e^{-2t}}$$

$$\therefore f'(t)=\frac{4e^{4t}-4e^{-2t}}{2\sqrt{e^{4t}+2e^{-2t}}}=\frac{2(e^{4t}-e^{-2t})}{\sqrt{e^{4t}+2e^{-2t}}}$$

$f'(t)=0$에서 $\quad e^{4t}-e^{-2t}=0$

$$e^{4t}=\frac{1}{e^{2t}}, \qquad e^{6t}=1$$

$$\therefore t=0$$

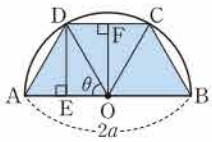
t	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(t)$	$-$	0	$+$
$f(t)$	$\searrow$	$\sqrt{3}$	$\nearrow$

따라서 $f(t)$는 $t=0$에서 최솟값 $\sqrt{3}$을 가지므로 $\quad m=\sqrt{3}$

$$\therefore m^2=3$$

답 ①

0916 오른쪽 그림과 같이 점 D에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 E라 하면 직각삼각형 ODE에서



$\overline{DE}=a\sin\theta$, $\overline{OE}=a\cos\theta$

$\overline{OC}$를 긋고 점 O에서 $\overline{CD}$에 내린 수선의 발을 F라 하면 $\triangle OCD$는 $\overline{OD}=\overline{OC}$인 이등변삼각형이므로

$\overline{CD}=2\overline{DF}=2\overline{OE}=2a\cos\theta$

사다리꼴 ABCD의 넓이를 $S(\theta)$라 하면

$$S(\theta)=\frac{1}{2}(\overline{AB}+\overline{CD})\cdot\overline{DE}$$
$$=\frac{1}{2}(2a+2a\cos\theta)\cdot a\sin\theta$$
$$=a^2\sin\theta(1+\cos\theta)\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right) \quad \cdots ❶$$
$$\therefore S'(\theta)=a^2\cos\theta(1+\cos\theta)+a^2\sin\theta(-\sin\theta)$$
$$=a^2(\cos\theta+\cos^2\theta-\sin^2\theta)$$
$$=a^2\{\cos\theta+\cos^2\theta-(1-\cos^2\theta)\}$$
$$=a^2(2\cos^2\theta+\cos\theta-1)$$
$$=a^2(\cos\theta+1)(2\cos\theta-1) \quad \cdots ❷$$

$S'(\theta)=0$에서 $\cos\theta=\frac{1}{2}\left(\because 0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$

$\therefore \theta=\frac{\pi}{3}$

θ	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$S'(\theta)$		$+$	0	$-$	
$S(\theta)$		↗	$\frac{3\sqrt{3}}{4}a^2$	↘	

따라서 $S(\theta)$는 $\theta=\frac{\pi}{3}$에서 최댓값 $\frac{3\sqrt{3}}{4}a^2$을 가지므로

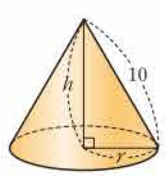
$k=\frac{1}{3}$, $l=\frac{3\sqrt{3}}{4}$ $\cdots$ ❸

$\therefore kl=\frac{\sqrt{3}}{4}$ $\cdots$ ❹

답 $\frac{\sqrt{3}}{4}$

채점 기준	비율
❶ $S(\theta)$를 구할 수 있다.	30 %
❷ $S'(\theta)$를 구할 수 있다.	30 %
❸ k, l의 값을 구할 수 있다.	30 %
❹ kl의 값을 구할 수 있다.	10 %

0917 오른쪽 그림과 같이 잘라 낸 부채꼴로 원뿔을 만들었을 때, 밑면의 반지름의 길이를 $r\,(0<r<10)$이라 하면



$10\theta=2\pi r$

$\therefore \theta=\frac{\pi r}{5}$ $\cdots\cdots$ ㉠

원뿔의 높이를 h라 하면 $h=\sqrt{100-r^2}$이므로 원뿔의 부피를 $V(r)$라 하면

$$V(r)=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi r^2\sqrt{100-r^2}$$
$$\therefore V'(r)=\frac{1}{3}\pi\left(2r\sqrt{100-r^2}+r^2\cdot\frac{-2r}{2\sqrt{100-r^2}}\right)$$
$$=\frac{1}{3}\pi\cdot\frac{2r(100-r^2)-r^3}{\sqrt{100-r^2}}=\frac{\pi r(200-3r^2)}{3\sqrt{100-r^2}}$$

$V'(r)=0$에서 $r^2=\frac{200}{3}$

$\therefore r=\frac{10\sqrt{6}}{3}$ $(\because 0<r<10)$

r	0	$\cdots$	$\frac{10\sqrt{6}}{3}$	$\cdots$	10
$V'(r)$		$+$	0	$-$	
$V(r)$		↗	극대	↘	

따라서 $V(r)$는 $r=\frac{10\sqrt{6}}{3}$일 때 최대이므로 이것을 ㉠에 대입하면

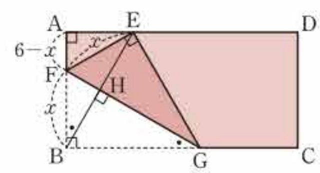
$\theta=\frac{\pi}{5}\cdot\frac{10\sqrt{6}}{3}=\frac{2\sqrt{6}}{3}\pi$

답 $\frac{10\sqrt{6}}{3}$, $\frac{2\sqrt{6}}{3}\pi$

SSEN 특강 부채꼴의 호의 길이

반지름의 길이가 r, 중심각의 크기가 θ(라디안)인 부채꼴의 호의 길이 l은 $l=r\theta$

0918 오른쪽 그림과 같이 $\overline{BF}=\overline{EF}=x\,(0<x\leq 6)$라 하면



$\overline{AF}=6-x$,

$\overline{AE}=\sqrt{x^2-(6-x)^2}$

$=\sqrt{12(x-3)}$

한편 $\triangle ABE$와 $\triangle BGF$에서

$\angle BAE=\angle GBF=90°$, $\angle ABE=\angle BGF$

└ $\overline{BE}$와 $\overline{FG}$의 교점을 H라 하면 $\overline{BH}\perp\overline{FG}$ $\therefore \angle FBH=90°-\angle HBG=\angle BGH$

이므로 $\triangle ABE\backsim\triangle BGF$ (AA 닮음)

따라서 $\overline{AB}:\overline{BG}=\overline{AE}:\overline{BF}$이므로

$6:\overline{BG}=\sqrt{12(x-3)}:x$

$\therefore \overline{BG}=\frac{6x}{\sqrt{12(x-3)}}$ $(3<x\leq 6)$

$\triangle EFG$의 넓이를 $S(x)$라 하면

$$S(x)=\frac{1}{2}\cdot\overline{EF}\cdot\overline{EG}=\frac{1}{2}\cdot\overline{BF}\cdot\overline{BG}$$
$$=\frac{1}{2}x\cdot\frac{6x}{\sqrt{12(x-3)}}=\frac{3x^2}{\sqrt{12(x-3)}}$$
$$\therefore S'(x)=\frac{6x\sqrt{12(x-3)}-3x^2\cdot\frac{12}{2\sqrt{12(x-3)}}}{12(x-3)}$$
$$=\frac{9x(x-4)}{2(x-3)\sqrt{12(x-3)}}$$

$S'(x)=0$에서 $x=4$ $(\because 3<x\leq 6)$

x	3	$\cdots$	4	$\cdots$	6
$S'(x)$		$-$	0	$+$	
$S(x)$		↘	$8\sqrt{3}$	↗	

따라서 $S(x)$는 $x=4$에서 최솟값 $8\sqrt{3}$을 가지므로 $\triangle EFG$의 넓이의 최솟값은 $8\sqrt{3}$이다.

답 ④

유형 13 방정식 $f(x)=k$의 실근의 개수

본책 135쪽

방정식 $f(x)=k$의 서로 다른 실근의 개수
⇒ 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 개수와 같다.

0919 $x+2\sin x-k=0$에서

$$x+2\sin x=k$$

위의 방정식이 $0\le x\le 2\pi$에서 서로 다른 세 실근을 가지려면 곡선 $y=x+2\sin x$와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나야 한다.

$f(x)=x+2\sin x$라 하면

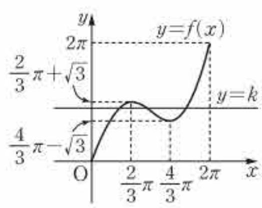
$$f'(x)=1+2\cos x$$

$f'(x)=0$에서 $\quad \cos x=-\dfrac{1}{2}$

$$\therefore x=\frac{2}{3}\pi \text{ 또는 } x=\frac{4}{3}\pi \ (\because 0\le x\le 2\pi)$$

x	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}\pi$	$\cdots$	$\frac{4}{3}\pi$	$\cdots$	2π
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$	0	↗	$\frac{2}{3}\pi+\sqrt{3}$	↘	$\frac{4}{3}\pi-\sqrt{3}$	↗	2π

이때 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나려면



$$\frac{4}{3}\pi-\sqrt{3}<k<\frac{2}{3}\pi+\sqrt{3}$$

따라서 $\alpha=\frac{4}{3}\pi-\sqrt{3}$, $\beta=\frac{2}{3}\pi+\sqrt{3}$이므로

$$\alpha+\beta=2\pi$$

답 ④

0920 방정식 $e^x+e^{-x}=k$가 오직 한 개의 실근을 가지려면 곡선 $y=e^x+e^{-x}$과 직선 $y=k$가 한 점에서 만나야 한다. ⋯ ❶

$f(x)=e^x+e^{-x}$이라 하면

$$f'(x)=e^x-e^{-x}$$

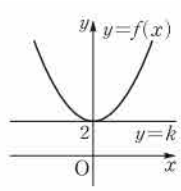
$f'(x)=0$에서

$$e^x=e^{-x}, \qquad x=-x$$

$$\therefore x=0$$

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	−	0	+
$f(x)$	↘	2	↗

또 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\infty$이므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. ⋯ ❷



따라서 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 한 점에서 만나려면

$$k=2$$

⋯ ❸

답 2

채점 기준	비율
❶ 곡선 $y=e^x+e^{-x}$과 직선 $y=k$가 한 점에서 만나야 함을 알 수 있다.	20 %
❷ $y=f(x)$의 그래프를 그릴 수 있다.	50 %
❸ k의 값을 구할 수 있다.	30 %

0921 $\ln x-x+15-n=0$에서

$$\ln x-x+15=n$$

위의 방정식이 서로 다른 두 실근을 가지려면 곡선 $y=\ln x-x+15$와 직선 $y=n$이 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.

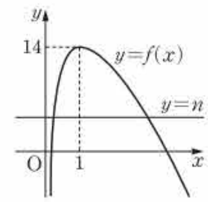
$f(x)=\ln x-x+15$라 하면 $x>0$이고

$$f'(x)=\frac{1}{x}-1$$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=1$

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		+	0	−
$f(x)$		↗	14	↘

또 $\lim\limits_{x\to0+}f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=-\infty$이므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=n$이 서로 다른 두 점에서 만나려면

$$n<14$$

이므로 자연수 n은 1, 2, 3, ⋯, 13의 13개이다.

답 ③

0922 $x=1$을 주어진 방정식에 대입하면 성립하지 않으므로 $x=1$은 주어진 방정식의 해가 아니다.

$x\ne1$일 때 $x^3=k(x-1)^2$에서

$$\frac{x^3}{(x-1)^2}=k$$

주어진 방정식이 서로 다른 세 실근을 가지려면 곡선 $y=\dfrac{x^3}{(x-1)^2}$과 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나야 한다.

$f(x)=\dfrac{x^3}{(x-1)^2}$이라 하면

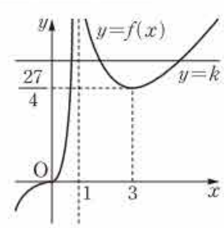
$$f'(x)=\frac{3x^2(x-1)^2-x^3\cdot2(x-1)}{(x-1)^4}=\frac{x^3-3x^2}{(x-1)^3}$$

$$=\frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}$$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=0$ 또는 $x=3$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	+		−	0	+
$f(x)$	↗	0	↗		↘	$\frac{27}{4}$	↗

또 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to1+}f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to1-}f(x)=\infty$이므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나려면

$$k>\frac{27}{4}$$

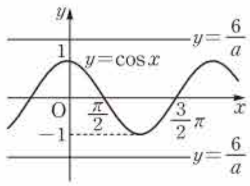
답 $k>\dfrac{27}{4}$

0923 곡선 $y=f(x)$가 변곡점을 갖지 않으려면 방정식 $f''(x)=0$이 실근을 갖지 않거나 $f''(x)=0$을 만족시키는 x의 값의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌지 않아야 한다.

$f'(x)=6x-a\sin x$, $f''(x)=6-a\cos x$

$f''(x)=0$에서 $\quad 6-a\cos x=0 \quad \therefore \cos x=\dfrac{6}{a}$

(i) 위의 방정식이 실근을 갖지 않으려면 오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=\cos x$와 직선 $y=\dfrac{6}{a}$이 만나지 않아야 하므로



$\dfrac{6}{a}<-1$ 또는 $\dfrac{6}{a}>1$

$\therefore -6<a<0$ 또는 $0<a<6$

(ii) $a=-6$ 또는 $a=6$이면

$f''(x)=6(1+\cos x)$ 또는 $f''(x)=6(1-\cos x)$

$\therefore f''(x)\geq 0$

따라서 $f''(x)=0$을 만족시키는 x의 값의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌지 않으므로 곡선 $y=f(x)$가 변곡점을 갖지 않는다.

(i), (ii)에서 $\quad -6\leq a<0$ 또는 $0<a\leq 6$

따라서 정수 a는 $-6, -5, \cdots, -1, 1, \cdots, 5, 6$의 12개이다.

답 12

유형 14 방정식 $f(x)=g(x)$의 실근의 개수 본책 135쪽

방정식 $f(x)=g(x)$의 실근의 개수는 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 교점의 개수와 같다.

0924 방정식 $\ln x=ax^2$의 실근의 개수는 두 곡선 $y=\ln x$, $y=ax^2$의 교점의 개수와 같다.

$f(x)=\ln x$, $g(x)=ax^2$이라 하면

$f'(x)=\dfrac{1}{x}$, $g'(x)=2ax$

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 접할 때의 접점의 x좌표를 t라 하면

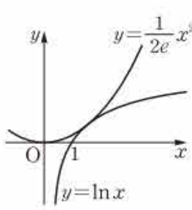
$f(t)=g(t)$에서 $\quad \ln t=at^2 \quad \cdots\cdots$ ㉠

$f'(t)=g'(t)$에서 $\quad \dfrac{1}{t}=2at \quad \therefore a=\dfrac{1}{2t^2} \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $\quad \ln t=\dfrac{1}{2} \quad \therefore t=\sqrt{e}$

$t=\sqrt{e}$를 ㉡에 대입하면 $\quad a=\dfrac{1}{2e}$

따라서 $a>0$에서 방정식 $\ln x=ax^2$의 실근은



$0<a<\dfrac{1}{2e}$일 때 2개,

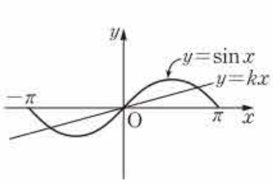
$a=\dfrac{1}{2e}$일 때 1개,

$a>\dfrac{1}{2e}$일 때 0개

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

0925 $-\pi\leq x\leq\pi$에서 방정식 $\sin x=kx$가 서로 다른 세 실근을 가지려면 오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=\sin x$와 직선 $y=kx$가 서로 다른 세 점에서 만나야 한다.



$y=\sin x$에서 $\quad y'=\cos x$

곡선 $y=\sin x$ 위의 점 $(0, 0)$에서의 접선의 기울기는 $\cos 0=1$이므로 접선의 방정식은

$y=x$

따라서 곡선 $y=\sin x$와 직선 $y=kx$가 서로 다른 세 점에서 만나려면

$0\leq k<1 \quad \therefore \alpha=1$

답 ①

0926 주어진 두 방정식이 모두 실근을 갖지 않으려면 직선 $y=kx$가 두 곡선 $y=e^x$, $y=\ln x$와 모두 만나지 않아야 한다.

(i) 직선 $y=kx$가 곡선 $y=e^x$과 접할 때,

$y=e^x$에서 $\quad y'=e^x$

접점의 좌표를 (t, e^t)이라 하면 접선의 기울기는 e^t이므로 접선의 방정식은

$y-e^t=e^t(x-t)$

이 직선이 원점을 지나므로 $\quad -e^t=e^t\cdot(-t)$

$\therefore t=1\ (\because e^t>0)$

따라서 접선의 방정식이 $y=ex$이므로 $\quad k=e$ ··· ❶

(ii) 직선 $y=kx$가 곡선 $y=\ln x$와 접할 때,

$y=\ln x$에서 $\quad y'=\dfrac{1}{x}$

접점의 좌표를 $(s, \ln s)$라 하면 접선의 기울기는 $\dfrac{1}{s}$이므로 접선의 방정식은

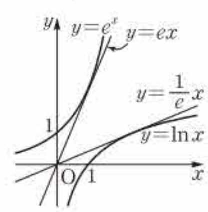
$y-\ln s=\dfrac{1}{s}(x-s)$

이 직선이 원점을 지나므로 $\quad -\ln s=\dfrac{1}{s}\cdot(-s)$

$\therefore s=e$

따라서 접선의 방정식이 $y=\dfrac{1}{e}x$이므로 $\quad k=\dfrac{1}{e}$ ··· ❷

(i), (ii)에서 직선 $y=kx$가 두 곡선 $y=e^x$, $y=\ln x$와 모두 만나지 않으려면



$\dfrac{1}{e}<k<e$ ··· ❸

답 $\dfrac{1}{e}<k<e$

채점 기준	비율
❶ 직선 $y=kx$가 곡선 $y=e^x$과 접할 때의 k의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ 직선 $y=kx$가 곡선 $y=\ln x$와 접할 때의 k의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ k의 값의 범위를 구할 수 있다.	20 %

유형 15 부등식이 성립하도록 하는 미정계수의 결정 ; $f(x)\geq a$ 꼴 본책 136쪽

① 어떤 구간에서 부등식 $f(x)\geq a$가 성립함을 보이려면
➡ 그 구간에서 ($f(x)$의 최솟값)$\geq a$임을 보인다.
② 어떤 구간에서 부등식 $f(x)\leq a$가 성립함을 보이려면
➡ 그 구간에서 ($f(x)$의 최댓값)$\leq a$임을 보인다.

0927 $x\ln x-3x+2+k\leq 0$에서

$3x-x\ln x-2\geq k$

$f(x)=3x-x\ln x-2$라 하면

$$f'(x)=3-\left(\ln x+x\cdot\frac{1}{x}\right)=2-\ln x$$

$f'(x)=0$에서 $\quad \ln x=2 \quad \therefore x=e^2$

x	e	$\cdots$	e^2	$\cdots$	e^3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$2e-2$	↗	e^2-2	↘	-2

따라서 $e\le x\le e^3$에서 $f(x)$의 최솟값은 -2이므로 부등식 $f(x)\ge k$가 성립하려면 $\quad k\le -2$

답 $k\le -2$

0928 $f(x)=x^2-\cos x$라 하면

$$f'(x)=2x+\sin x,\ f''(x)=2+\cos x$$

$x>0$에서 $f''(x)>0$이므로 함수 $f'(x)$는 증가하고, $f'(0)=0$이므로

$$f'(x)>0$$

또 $x>0$에서 $f'(x)>0$이므로 함수 $f(x)$는 증가하고, $f(0)=-1$이므로

$$f(x)>-1$$

따라서 $x>0$에서 부등식 $f(x)>k$가 성립하려면

$$k\le -1$$

이어야 하므로 k의 최댓값은 -1이다.

답 ④

0929 $f(x)=\sin 2x-2\sin x$라 하면 $f(x)$는 주기가 2π인 주기함수이므로 $0\le x\le 2\pi$에서 부등식 $f(x)\le a$가 성립하도록 하는 a의 값의 범위를 구하면 된다.

$$\begin{aligned}f'(x)&=2\cos 2x-2\cos x=2(2\cos^2 x-1)-2\cos x\\&=2(2\cos^2 x-\cos x-1)\\&=2(2\cos x+1)(\cos x-1)\end{aligned}$$

$f'(x)=0$에서 $\quad \cos x=-\frac{1}{2}$ 또는 $\cos x=1$

$\therefore x=0$ 또는 $x=\frac{2}{3}\pi$ 또는 $x=\frac{4}{3}\pi$ 또는 $x=2\pi$

$(\because 0\le x\le 2\pi)$

x	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}\pi$	$\cdots$	$\frac{4}{3}\pi$	$\cdots$	2π
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↘	$-\frac{3\sqrt{3}}{2}$	↗	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	↘	0

따라서 $f(x)$의 최댓값은 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$이므로 부등식 $f(x)\le a$가 성립하려면 $\quad a\ge\frac{3\sqrt{3}}{2}$

답 $a\ge\frac{3\sqrt{3}}{2}$

0930 $f(x)=e^x-3x$라 하면 $\quad f'(x)=e^x-3$

$f'(x)=0$에서 $\quad e^x=3$

$\therefore x=\ln 3$

x	$\cdots$	$\ln 3$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$3-3\ln 3$	↗

$f(x)$의 최솟값은 $3-3\ln 3$이므로 부등식 $f(x)\ge k$가 성립하려면

$$k\le 3-3\ln 3$$ ⋯ ❶

따라서 k의 최댓값은 $3-3\ln 3$이다. ⋯ ❷

답 $3-3\ln 3$

채점 기준	비율
❶ k의 값의 범위를 구할 수 있다.	70 %
❷ k의 최댓값을 구할 수 있다.	30 %

0931 $\alpha x\le \ln x\le \beta x$에서 $\quad \alpha\le\frac{\ln x}{x}\le\beta$

$f(x)=\frac{\ln x}{x}$라 하면

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x\cdot 1}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}$$

$f'(x)=0$에서 $\quad \ln x=1$

$\therefore x=e$

x	e	$\cdots$	e^2
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	$\frac{1}{e}$	↘	$\frac{2}{e^2}$

$e\le x\le e^2$에서 $f(x)$의 최댓값은 $\frac{1}{e}$, 최솟값은 $\frac{2}{e^2}$이므로

$$\frac{2}{e^2}\le f(x)\le\frac{1}{e}$$

즉 $\frac{2}{e^2}\le\frac{\ln x}{x}\le\frac{1}{e}$에서 $\frac{2}{e^2}x\le\ln x\le\frac{1}{e}x$이므로

$$\alpha\le\frac{2}{e^2},\ \beta\ge\frac{1}{e}$$

따라서 $\frac{\alpha}{\beta}$의 최댓값은

$$\frac{2}{e^2}\cdot e=\frac{2}{e}$$

$\frac{\alpha}{\beta}$의 값이 최대일 때는 α의 값이 가장 크고 β의 값이 가장 작을 때이다.

답 ③

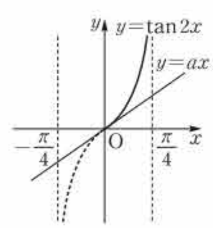
유형 16 부등식이 성립하도록 하는 미정계수의 결정 ; $f(x)\ge g(x)$ 꼴

본책 136쪽

구간 (a, b)에서 부등식 $f(x)\ge g(x)$가 성립하려면

➡ 구간 (a, b)에서 $y=f(x)$의 그래프가 $y=g(x)$의 그래프보다 항상 위쪽에 있거나 두 그래프가 접해야 한다.

0932 $0<x<\frac{\pi}{4}$에서 부등식 $\tan 2x>ax$가 성립하려면 오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=\tan 2x$가 직선 $y=ax$보다 위쪽에 있어야 한다.



$f(x)=\tan 2x$라 하면

$$f'(x)=2\sec^2 2x$$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0, 0)$에서의 접선의 기울기는 $2\sec^2 0=2$이므로 접선의 방정식은

$$y=2x$$

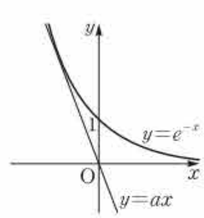
따라서 주어진 부등식이 성립하려면

$$a\le 2$$

이어야 하므로 a의 최댓값은 2이다.

답 ④

0933 부등식 $e^{-x}\ge ax$가 항상 성립하려면 오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=e^{-x}$이 직선 $y=ax$보다 위쪽에 있거나 곡선과 직선이 접해야 한다. ⋯ ❶



$f(x)=e^{-x}$, $g(x)=ax$라 하면

$f'(x)=-e^{-x},\ g'(x)=a$

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=g(x)$가 접할 때의 접점의 x좌표를 t라 하면

$f(t)=g(t)$에서 $e^{-t}=at$ ...... ㉠

$f'(t)=g'(t)$에서 $-e^{-t}=a$ ...... ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $e^{-t}=-te^{-t}$ $\therefore t=-1\ (\because e^{-t}>0)$

$t=-1$을 ㉡에 대입하면 $a=-e$ ⋯ ❷

따라서 주어진 부등식이 항상 성립하려면

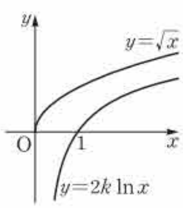
$-e\le a\le 0$

이어야 하므로 정수 a는 -2, -1, 0의 3개이다. ⋯ ❸

답 3

채점 기준	비율
❶ 곡선 $y=e^{-x}$과 직선 $y=ax$의 위치 관계를 파악할 수 있다.	20 %
❷ 곡선 $y=e^{-x}$과 직선 $y=ax$가 접할 때의 a의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ 정수 a의 개수를 구할 수 있다.	40 %

0934 $x>0$에서 부등식 $\sqrt{x}\ge 2k\ln x$가 성립하려면 오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=\sqrt{x}$가 곡선 $y=2k\ln x$보다 위쪽에 있거나 두 곡선이 접해야 한다.



$f(x)=\sqrt{x}$, $g(x)=2k\ln x$라 하면

$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}},\ g'(x)=\dfrac{2k}{x}$

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 접할 때의 접점의 x좌표를 $t\ (t>0)$라 하면

$f(t)=g(t)$에서 $\sqrt{t}=2k\ln t$ ...... ㉠

$f'(t)=g'(t)$에서 $\dfrac{1}{2\sqrt{t}}=\dfrac{2k}{t}$

$\therefore k=\dfrac{\sqrt{t}}{4}$ ...... ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $\sqrt{t}=\dfrac{\sqrt{t}}{2}\ln t$

$\ln t=2$ $\therefore t=e^2$

$t=e^2$을 ㉡에 대입하면 $k=\dfrac{e}{4}$

따라서 $x>0$에서 주어진 부등식이 성립하려면

$0<k\le\dfrac{e}{4}$

이어야 하므로 k의 최댓값은 $\dfrac{e}{4}$이다.

답 ①

유형 17 직선 운동에서의 속도와 가속도

본책 137쪽

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 x가 $x=f(t)$일 때, 점 P의 시각 t에서의 속도 v와 가속도 a는

① $v=\dfrac{dx}{dt}=f'(t)$ ② $a=\dfrac{dv}{dt}=f''(t)$

0935 점 P의 시각 t에서의 속도를 v라 하면

$v=f'(t)=-\pi a\sin\left(\pi t-\dfrac{\pi}{6}\right)$

$t=4$에서의 점 P의 속도가 $2\sqrt{3}$이므로

$-\pi a\sin\left(4\pi-\dfrac{\pi}{6}\right)=2\sqrt{3}$

$-\pi a\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)=2\sqrt{3}$ $\therefore a=\dfrac{4\sqrt{3}}{\pi}$

따라서 $f(t)=\dfrac{4\sqrt{3}}{\pi}\cos\left(\pi t-\dfrac{\pi}{6}\right)$이므로 $t=4$에서의 점 P의 위치는

$f(4)=\dfrac{4\sqrt{3}}{\pi}\cos\left(4\pi-\dfrac{\pi}{6}\right)$

$=\dfrac{4\sqrt{3}}{\pi}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{6}{\pi}$

답 $\dfrac{6}{\pi}$

0936 점 P의 시각 t에서의 속도를 v라 하면

$v=f'(t)=\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{3}\cos\dfrac{t}{3}$

$t=a$에서의 점 P의 속력을 0이라 하면

$\left|\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{3}\cos\dfrac{a}{3}\right|=0$, $\cos\dfrac{a}{3}=-\dfrac{1}{2}$

$a\ge 0$이므로

$\dfrac{a}{3}=\dfrac{2}{3}\pi,\ \dfrac{4}{3}\pi,\ \dfrac{8}{3}\pi,\ \dfrac{10}{3}\pi,\ \cdots$

$\therefore a=2\pi,\ 4\pi,\ 8\pi,\ 10\pi,\ \cdots$

따라서 점 P의 속력이 처음으로 0이 되는 시각은 2π이다.

답 ⑤

0937 점 P의 시각 t에서의 속도를 v, 가속도를 a라 하면

$v=f'(t)=2pt+\dfrac{q}{t}$,

$a=f''(t)=2p-\dfrac{q}{t^2}$ ⋯ ❶

$t=2$에서의 점 P의 속도가 $\dfrac{3}{2}$이므로

$4p+\dfrac{q}{2}=\dfrac{3}{2}$ $\therefore 8p+q=3$ ...... ㉠

$t=2$에서의 점 P의 가속도가 $\dfrac{5}{4}$이므로

$2p-\dfrac{q}{4}=\dfrac{5}{4}$ $\therefore 8p-q=5$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $p=\dfrac{1}{2},\ q=-1$ ⋯ ❷

$\therefore pq=-\dfrac{1}{2}$ ⋯ ❸

답 $-\dfrac{1}{2}$

채점 기준	비율
❶ 점 P의 시각 t에서의 속도와 가속도를 구할 수 있다.	40 %
❷ p, q의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ pq의 값을 구할 수 있다.	20 %

0938 물체의 시각 t에서의 속도를 v라 하면

$v=\dfrac{dh}{dt}=8e^t-2te^t-t^2e^t=-(t^2+2t-8)e^t$

$=-(t-2)(t+4)e^t$

$v=0$에서 $t=2\ (\because t\ge 0)$

t	0	$\cdots$	2	$\cdots$
v		+	0	−
h	50	↗	$42+4e^2$	↘

따라서 $t=2$일 때 물체가 최고 높이에 도달하므로 구하는 거리는

$$42+4e^2-50=4(e^2-2)(\mathrm{m})$$

답 ④

유형 18 평면 운동에서의 속도 본책 137쪽

좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 (x, y)가 $x=f(t)$, $y=g(t)$일 때, 점 P의 시각 t에서의 속도와 속력은
① 속도 ➡ $(f'(t), g'(t))$
② 속력 ➡ $\sqrt{\{f'(t)\}^2+\{g'(t)\}^2}$

0939 $\frac{dx}{dt}=6$, $\frac{dy}{dt}=6-6t$이므로 점 P의 시각 t에서의 속도는

$$(6,\ 6-6t)$$

점 P의 시각 t에서의 속력은

$$\sqrt{6^2+(6-6t)^2}=6\sqrt{(t-1)^2+1}$$

따라서 점 P의 속력은 $t=1$일 때 최솟값 6을 갖는다. 답 ②

0940 $\frac{dx}{dt}=2e^{4(t-1)}-a$, $\frac{dy}{dt}=be^{t-1}$이므로 점 P의 시각 t에서의 속도는

$$(2e^{4(t-1)}-a,\ be^{t-1})$$ ➊

$t=1$에서의 점 P의 속도가 $(-1, 3)$이므로

$$2-a=-1,\ b=3$$

$$\therefore a=3,\ b=3$$ ➋

$$\therefore a+b=6$$ ➌

답 6

채점 기준	비율
➊ 점 P의 시각 t에서의 속도를 구할 수 있다.	60 %
➋ a, b의 값을 구할 수 있다.	30 %
➌ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	10 %

0941 $\frac{dx}{dt}=1-\cos^2 t+\sin^2 t=2\sin^2 t$, $\frac{dy}{dt}=-\csc^2 t$
이므로 점 P의 시각 t에서의 속도는

$$(2\sin^2 t,\ -\csc^2 t)$$

점 P의 시각 t에서의 속력은

$$\sqrt{(2\sin^2 t)^2+(-\csc^2 t)^2}=\sqrt{4\sin^4 t+\csc^4 t}$$

$$=\sqrt{4\sin^4 t+\frac{1}{\sin^4 t}} \quad \cdots\cdots ㉠$$

이때 $0<t<\frac{\pi}{2}$에서 $0<\sin t<1$이므로

$$0<4\sin^4 t<4,\ \frac{1}{\sin^4 t}>1$$

산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$4\sin^4 t+\frac{1}{\sin^4 t}\geq 2\sqrt{4\sin^4 t\cdot\frac{1}{\sin^4 t}}=2\cdot 2=4$$

$$\left(단, 등호는\ 4\sin^4 t=\frac{1}{\sin^4 t}일\ 때\ 성립\right)$$

따라서 ㉠에서

$$\sqrt{4\sin^4 t+\frac{1}{\sin^4 t}}\geq\sqrt{4}=2$$

이므로 점 P의 속력의 최솟값은 2이다. 답 2

0942 $\frac{dx}{dt}=a-\cos t$, $\frac{dy}{dt}=\sin t$이므로 점 P의 시각 t에서의 속도는

$$(a-\cos t,\ \sin t)$$

따라서 $t=\frac{\pi}{3}$에서의 점 P의 속도는 $\left(a-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$이므로 속력은

$$\sqrt{\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

즉 $\sqrt{\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=1$이므로

$$a^2-a+1=1, \qquad a(a-1)=0$$

$$\therefore a=1\ (\because a\neq 0)$$

답 ①

유형 19 평면 운동에서의 가속도 본책 138쪽

좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 (x, y)가 $x=f(t)$, $y=g(t)$일 때, 점 P의 시각 t에서의 가속도와 가속도의 크기는
① 가속도 ➡ $(f''(t), g''(t))$
② 가속도의 크기 ➡ $\sqrt{\{f''(t)\}^2+\{g''(t)\}^2}$

0943 $\frac{dx}{dt}=\sqrt{15}$, $\frac{dy}{dt}=3t^2-5$이므로 점 P의 시각 t에서의 속도는

$$(\sqrt{15},\ 3t^2-5)$$

점 P의 속력이 8이므로

$$\sqrt{(\sqrt{15})^2+(3t^2-5)^2}=8$$

$$(3t^2-5)^2=49, \qquad 3t^2-5=7 \quad 3t^2-5\geq -5$$

$$t^2=4 \qquad \therefore t=2\ (\because t\geq 0)$$

$\frac{d^2x}{dt^2}=0$, $\frac{d^2y}{dt^2}=6t$이므로 점 P의 시각 t에서의 가속도는

$$(0,\ 6t)$$

따라서 $t=2$에서의 점 P의 가속도는 $(0, 12)$이므로 가속도의 크기는

$$\sqrt{0^2+12^2}=12$$

답 ③

0944 $t-\frac{4}{t}=0$에서 $\quad t^2-4=0$

$$t^2=4 \qquad \therefore t=2\ (\because t>0)$$

즉 점 P의 위치가 $(0, 5)$일 때의 시각은 2이다.

$\frac{dx}{dt}=1+\frac{4}{t^2}$, $\frac{dy}{dt}=2-\frac{2}{t^2}$에서

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{8}{t^3},\ \frac{d^2y}{dt^2}=\frac{4}{t^3}$$

이므로 점 P의 시각 t에서의 가속도는

$$\left(-\frac{8}{t^3},\ \frac{4}{t^3}\right)$$

따라서 $t=2$에서의 점 P의 가속도는 $\left(-1,\ \frac{1}{2}\right)$이므로 가속도의 크기는

$$\sqrt{(-1)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}$$

답 $\frac{\sqrt{5}}{2}$

참고 $2t+\frac{2}{t}=5$에서 $2t^2-5t+2=0$

$(2t-1)(t-2)=0 \quad \therefore t=\frac{1}{2}$ 또는 $t=2$

이때 $t-\frac{4}{t}=0$의 값도 만족시키는 t의 값은 2이다.

0945 $\frac{dx}{dt}=2at-a\cos t,\ \frac{dy}{dt}=1+a\sin t$에서

$$\frac{d^2x}{dt^2}=2a+a\sin t,\ \frac{d^2y}{dt^2}=a\cos t$$

이므로 점 P의 시각 t에서의 가속도는

$(2a+a\sin t,\ a\cos t)$ ··· ❶

따라서 $t=\pi$에서의 점 P의 가속도는 $(2a,\ -a)$이므로 가속도의 크기는

$\sqrt{(2a)^2+(-a)^2}=\sqrt{5}a\ (\because a>0)$ ··· ❷

즉 $\sqrt{5}a=5$이므로

$a=\sqrt{5}$ ··· ❸

답 $\sqrt{5}$

채점 기준	비율
❶ 점 P의 시각 t에서의 가속도를 구할 수 있다.	50 %
❷ $t=\pi$에서의 점 P의 가속도의 크기를 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30 %
❸ a의 값을 구할 수 있다.	20 %

0946 $\frac{dx}{dt}=3\sin 3t,\ \frac{dy}{dt}=\cos 3t$이므로 점 P의 시각 t에서의 속도는

$(3\sin 3t,\ \cos 3t)$

점 P의 시각 t에서의 속력은

$$\begin{aligned}\sqrt{(3\sin 3t)^2+(\cos 3t)^2}&=\sqrt{9\sin^2 3t+\cos^2 3t}\\&=\sqrt{9\sin^2 3t+(1-\sin^2 3t)}\\&=\sqrt{8\sin^2 3t+1}\end{aligned}$$

이때 $-1\le\sin 3t\le 1$에서 $0\le\sin^2 3t\le 1$이므로 점 P의 속력은 $\sin^2 3t=1$일 때 최대이다.

한편 $\frac{d^2x}{dt^2}=9\cos 3t,\ \frac{d^2y}{dt^2}=-3\sin 3t$이므로 점 P의 시각 t에서의 가속도는

$(9\cos 3t,\ -3\sin 3t)$

점 P의 시각 t에서의 가속도의 크기는

$$\begin{aligned}\sqrt{(9\cos 3t)^2+(-3\sin 3t)^2}&=\sqrt{81\cos^2 3t+9\sin^2 3t}\\&=\sqrt{81(1-\sin^2 3t)+9\sin^2 3t}\\&=\sqrt{81-72\sin^2 3t}\end{aligned}$$

따라서 $\sin^2 3t=1$일 때 가속도의 크기는

$\sqrt{81-72\cdot 1}=3$

답 ④

0947 1st $h'(x)=f'(x)-g'(x)$임을 이용하여 ㄱ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄱ. 직선 $y=g(x)$가 곡선 $y=f(x)$와 점 $B(b,\ f(b))$에서 접하므로

$g'(b)=f'(b),\ g(b)=f(b)$ ······ ㉠

$h'(x)=f'(x)-g'(x)$이므로

$h'(b)=f'(b)-g'(b)=0$

2nd ㄴ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄴ. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $A(a,\ f(a))$에서의 접선이 $y=g(x)$이므로

$f'(a)=g'(a),\ f(a)=g(a)$ ······ ㉡

㉠, ㉡에서

$h(a)=f(a)-g(a)=0,\ h(b)=f(b)-g(b)=0$

함수 $y=h(x)$가 구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 구간 $(a,\ b)$에서 미분가능할 때, $h(a)=h(b)$이면 롤의 정리에 의하여 $h'(c)=0$인 c가 a와 b 사이에 적어도 하나 존재한다.

또 $h'(b)=0$이고, ㉡에서

$h'(a)=f'(a)-g'(a)=0$

이므로 방정식 $h'(x)=0$은 $\underbrace{3개}_{a,\ b,\ c}$ 이상의 실근을 갖는다.

3rd ㄷ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄷ. $y=g(x)$는 직선의 방정식이므로 $g''(x)=0$

$\therefore h''(x)=f''(x)-g''(x)=f''(x)$

점 $A(a,\ f(a))$가 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이므로 $f''(a)=0$이고 $x=a$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀐다.

따라서 $h''(a)=0$이고 $x=a$의 좌우에서 $h''(x)$의 부호도 바뀌므로 점 $(a,\ h(a))$는 곡선 $y=h(x)$의 변곡점이다.

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

0948 1st 조건 (가)를 이용하여 a, b에 대한 식을 세운다.

$f'(x)=3ae^{3x}+be^x,\ f''(x)=9ae^{3x}+be^x$

조건 (가)에서 $f''(x_1)f''(x_2)<0$이므로 $f''(x_1)$과 $f''(x_2)$의 부호가 서로 다르다. 즉 $x=\ln\frac{2}{3}$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 곡선 $y=f(x)$는 $x=\ln\frac{2}{3}$에서 변곡점을 갖는다.

즉 $f''\left(\ln\frac{2}{3}\right)=0$이므로

$9ae^{3\ln\frac{2}{3}}+be^{\ln\frac{2}{3}}=0,\quad 9a\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3+b\cdot\frac{2}{3}=0$

$\frac{8}{3}a+\frac{2}{3}b=0 \quad \therefore b=-4a$

2nd 구간 $[k,\ \infty)$에서 함수 $f(x)$의 역함수가 존재함을 이용하여 m의 값을 구한다.

$f'(x)=3ae^{3x}-4ae^x=ae^x(3e^{2x}-4)$

$f'(x)=0$에서

$3e^{2x}-4=0\ (\because e^x>0)$

$e^{2x}=\frac{4}{3}$

$\therefore x=\frac{1}{2}\ln\frac{4}{3}$

x	$\cdots$	$\frac{1}{2}\ln\frac{4}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗

조건 (나)에서 구간 $[k,\ \infty)$에서 함수 $f(x)$의 역함수가 존재하려면 이 구간에서 $f(x)$는 항상 증가하거나 감소해야 한다.

이때 구간 $\left[\frac{1}{2}\ln\frac{4}{3},\ \infty\right)$에서 $f(x)$는 증가하므로

$k \geq \frac{1}{2}\ln\frac{4}{3}$ $\quad\therefore m=\frac{1}{2}\ln\frac{4}{3}$

(3rd) $f(2m)=-\frac{80}{9}$임을 이용하여 a의 값을 구한다.

$f(x)=ae^{3x}-4ae^{x}$에서

$$f(2m)=f\left(\ln\frac{4}{3}\right)=ae^{3\ln\frac{4}{3}}-4ae^{\ln\frac{4}{3}}$$

$$=a\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^3-4a\cdot\frac{4}{3}=-\frac{80}{27}a$$

즉 $-\frac{80}{27}a=-\frac{80}{9}$이므로

$a=3$

(4th) $f(0)$의 값을 구한다.

$f(x)=3e^{3x}-12e^{x}$이므로

$f(0)=3-12=-9$

답 ③

0949 (1st) $f''(x)$를 구한다.

$f'(x)=3k\cos kx+12x^2$, $f''(x)=-3k^2\sin kx+24x$

(2nd) $y=f(x)$의 그래프가 오직 하나의 변곡점을 가지도록 하는 조건을 찾는다.

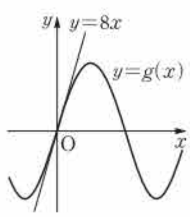
함수 $y=f(x)$의 그래프가 변곡점을 가지려면 방정식 $f''(x)=0$이 실근을 갖고, 이 실근의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌어야 한다.

$f''(x)=0$에서 $\quad -3k^2\sin kx+24x=0$

$\therefore k^2\sin kx=8x$

이 방정식이 실근을 가지려면 $g(x)=k^2\sin kx$라 할 때 곡선 $y=g(x)$와 직선 $y=8x$가 만나야 한다.

곡선 $y=g(x)$와 직선 $y=8x$는 모두 원점을 지나고 원점에 대하여 대칭이므로 $x=0$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀐다. 즉 곡선 $y=f(x)$는 $x=0$에서 변곡점을 갖는다.



이때 오직 하나의 변곡점을 가져야 하므로 $k>0$일 때 곡선 $y=g(x)$와 직선 $y=8x$는 오른쪽 그림과 같이 원점에서만 만나야 한다.

└ k의 최댓값을 구하므로 $k>0$인 경우에서 생각한다.

즉 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(0,\ 0)$에서의 접선의 기울기가 직선 $y=8x$의 기울기보다 작거나 같아야 한다.

└ 접선의 기울기가 직선 $y=8x$의 기울기보다 크면 곡선 $y=g(x)$는 직선 $y=8x$와 적어도 서로 다른 세 점에서 만난다.

(3rd) 실수 k의 최댓값을 구한다.

$g'(x)=k^3\cos kx$이므로 점 $(0,\ 0)$에서의 접선의 기울기는

$g'(0)=k^3$

즉 $k^3\leq 8$에서 $\quad (k-2)(k^2+2k+4)\leq 0$

$\therefore k\leq 2$ ($\because k^2+2k+4>0$)

$\therefore 0<k\leq 2$

따라서 실수 k의 최댓값은 2이다.

답 2

0950 (1st) $f'(x)$를 구하여 ①의 참, 거짓을 판별한다.

① $f(x)=e^{\frac{1}{x}}-x$에서 $x\neq 0$이고

$$f'(x)=e^{\frac{1}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)-1=-\frac{e^{\frac{1}{x}}+x^2}{x^2}$$

$f'(x)<0$이므로 함수 $f(x)$의 극값은 존재하지 않는다.

(2nd) 함수 $y=f(x)$의 그래프를 그리고 ②~⑤의 참, 거짓을 판별한다.

② $f''(x)=e^{\frac{1}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)^2+e^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{2}{x^3}=e^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{1+2x}{x^4}$

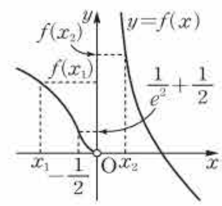
$f''(x)=0$에서 $\quad 1+2x=0$ ($\because e^{\frac{1}{x}}>0$) $\quad\therefore x=-\frac{1}{2}$

x	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$		$-$
$f''(x)$	$-$	0	$+$		$+$
$f(x)$	↘	$\frac{1}{e^2}+\frac{1}{2}$	↘		↘

이때 $\lim_{x\to\infty}f(x)=-\infty$,

$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\infty$, $\lim_{x\to 0+}f(x)=\infty$,

$\lim_{x\to 0-}f(x)=0$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 함수 $f(x)$의 치역은 실수 전체의 집합이다.

③ 오른쪽 그래프에서 $x_1<x_2$이지만 $f(x_1)<f(x_2)$이다.

④ $x>0$에서 $f''(x)>0$이므로 $y=f(x)$의 그래프는 아래로 볼록하다.

⑤ 변곡점의 좌표는 $\left(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{e^2}+\frac{1}{2}\right)$이므로

$a=-\frac{1}{2}$, $b=\frac{1}{e^2}+\frac{1}{2}$

$\therefore a+b=\frac{1}{e^2}$

답 ③

0951 (1st) 접선의 방정식을 t에 대한 식으로 나타낸다.

$f'(x)=-\frac{2x}{(x^2+3)^2}$

점 P의 좌표를 $\left(t,\ \frac{1}{t^2+3}\right)$이라 하면 접선의 기울기는

$f'(t)=-\frac{2t}{(t^2+3)^2}$이므로 접선의 방정식은

$$y-\frac{1}{t^2+3}=-\frac{2t}{(t^2+3)^2}(x-t)$$

$$\therefore y=-\frac{2t}{(t^2+3)^2}x+\frac{3t^2+3}{(t^2+3)^2}$$

(2nd) 접선의 y절편의 최댓값을 구한다.

접선의 y절편을 $g(t)$라 하면 $g(t)=\frac{3t^2+3}{(t^2+3)^2}$이므로

$$g'(t)=\frac{6t(t^2+3)^2-(3t^2+3)\cdot 2(t^2+3)\cdot 2t}{(t^2+3)^4}$$

$$=\frac{-6t^3+6t}{(t^2+3)^3}$$

$$=\frac{-6t(t+1)(t-1)}{(t^2+3)^3}$$

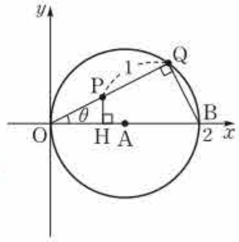
$g'(t)=0$에서 $\quad t=0$ 또는 $t=1$ ($\because t\geq 0$)

t	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$g'(t)$		$+$	0	$-$
$g(t)$	$\frac{1}{3}$	↗	$\frac{3}{8}$	↘

따라서 $g(t)$는 $t=1$에서 최댓값 $\frac{3}{8}$을 가지므로 y절편의 최댓값은 $\frac{3}{8}$이다.

답 $\frac{3}{8}$

0952 1st 점 P의 y좌표를 θ에 대한 함수로 나타낸다.



오른쪽 그림과 같이 점 A를 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원과 x축의 교점 중 원점이 아닌 점을 B라 하자.

직각삼각형 QOB에서 (OB가 원의 지름이므로 $\angle OQB=\frac{\pi}{2}$)

$$\overline{OQ}=\overline{OB}\cos\theta$$
$$=2\cos\theta$$
$$\therefore \overline{OP}=\overline{OQ}-\overline{PQ}$$
$$=2\cos\theta-1$$

또 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하고 점 P의 y좌표를 $f(\theta)$라 하면 직각삼각형 POH에서

$$f(\theta)=\overline{PH}=\overline{OP}\sin\theta$$
$$=(2\cos\theta-1)\sin\theta$$

2nd 점 P의 y좌표가 최대가 되도록 하는 θ의 값을 조사한다.

$$f'(\theta)=-2\sin^2\theta+(2\cos\theta-1)\cos\theta$$
$$=-2\sin^2\theta+2\cos^2\theta-\cos\theta$$
$$=-2(1-\cos^2\theta)+2\cos^2\theta-\cos\theta$$
$$=4\cos^2\theta-\cos\theta-2$$

$f'(\theta)=0$에서 $\cos\theta=\frac{1\pm\sqrt{33}}{8}$ ($4\cos^2\theta-\cos\theta-2=0$을 $\cos\theta$에 대한 이차방정식으로 생각하고 근의 공식을 이용한다.)

이때 $0<\theta<\frac{\pi}{3}$에서 $\frac{1}{2}<\cos\theta<1$이므로

$$\cos\theta=\frac{1+\sqrt{33}}{8}$$

$0<\theta<\frac{\pi}{3}$에서 $\cos\theta=\frac{1+\sqrt{33}}{8}$을 만족시키는 θ의 값을 θ_1이라 하면 $\theta=\theta_1$의 좌우에서 $f'(\theta)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 $f(\theta)$는 $\theta=\theta_1$에서 극대이면서 최대이다.

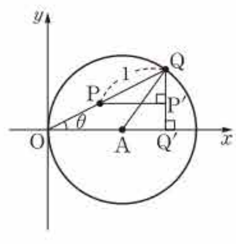
3rd $a+b$의 값을 구한다.

점 P의 y좌표가 최대가 될 때 $\cos\theta=\frac{1+\sqrt{33}}{8}$이므로

$$a=1,\ b=33$$
$$\therefore a+b=34$$

답 34

다른 풀이 오른쪽 그림과 같이 점 Q에서 x축에 내린 수선의 발을 Q′, 점 P에서 선분 QQ′에 내린 수선의 발을 P′이라 하고, 선분 QA를 그으면



$$\angle QAQ'=2\angle QOA=2\theta$$

$\overline{PP'} /\!/ \overline{OQ'}$이므로 $\angle QPP'=\theta$

$\triangle QAQ'$에서

$$\overline{QQ'}=\overline{AQ}\sin2\theta=\sin2\theta$$

$\triangle QPP'$에서

$$\overline{QP'}=\overline{PQ}\sin\theta=\sin\theta$$

점 P의 y좌표를 $f(\theta)$라 하면

$$f(\theta)=\overline{QQ'}-\overline{QP'}=\sin2\theta-\sin\theta$$
$$\therefore f'(\theta)=2\cos2\theta-\cos\theta=2(2\cos^2\theta-1)-\cos\theta$$
$$=4\cos^2\theta-\cos\theta-2$$

0953 1st ㄱ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄱ. $f'(x)=-e^{-x}+x$에서 $f''(x)=e^{-x}+1$

$f''(x)>0$이므로 곡선 $y=f(x)$는 실수 전체의 집합에서 아래로 볼록하다.

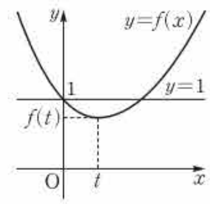
따라서 함수 $f(x)$의 극댓값은 존재하지 않는다.

2nd ㄴ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄴ. $f'(0)=-1<0$, $f'(1)=-\frac{1}{e}+1>0$이므로 $f'(t)=0$을 만족시키는 t의 값의 범위는

$$0<t<1$$

3rd ㄷ의 참, 거짓을 판별한다.



ㄷ. ㄱ, ㄴ에 의하여 함수 $f(x)$는 $x=t$ $(0<t<1)$에서 극소이면서 최소이고 $y=f(x)$는 아래로 볼록한 곡선이다.

이때 $f(0)=1$이므로 $f(t)<1$

따라서 오른쪽 그림에서 방정식 $f(x)=1$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ④

0954 1st 함수 $y=f(x)$의 그래프를 그린다.

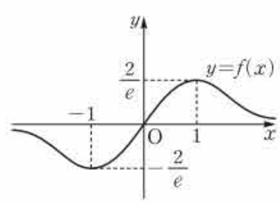
$$f'(x)=(3x^2+1)e^{-x^2}+(x^3+x)\cdot(-2x)e^{-x^2}$$
$$=(-2x^4+x^2+1)e^{-x^2}$$
$$=-(2x^2+1)(x+1)(x-1)e^{-x^2}$$

$f'(x)=0$에서

$$x=-1 \text{ 또는 } x=1\ (\because 2x^2+1>0,\ e^{-x^2}>0)$$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	$-\frac{2}{e}$	↗	$\frac{2}{e}$	↘

또 $\lim_{x\to\infty}f(x)=0$, $\lim_{x\to-\infty}f(x)=0$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



2nd 함수 $y=g(x)$의 그래프를 그려 방정식 $f(x)=g(x)$의 서로 다른 실근의 개수를 구한다.

$$g'(x)=-xe^{-x^2}-\frac{x^2+2}{2}\cdot(-2x)e^{-x^2}$$
$$=(x^3+x)e^{-x^2}=x(x^2+1)e^{-x^2}$$

$g'(x)=0$에서

$$x=0\ (\because x^2+1>0,\ e^{-x^2}>0)$$

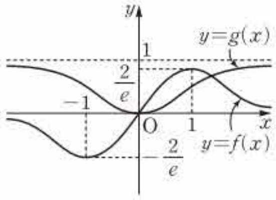
x	$\cdots$	0	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	↘	0	↗

또 $\lim_{x\to\infty}g(x)=1$, $\lim_{x\to-\infty}g(x)=1$이고

$$f(1)-g(1)=\frac{2}{e}-\left(1-\frac{3}{2e}\right)$$
$$=\frac{7}{2e}-1>0$$

이므로 $f(1)>g(1)$

따라서 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 방정식 $f(x)=g(x)$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.



답 2

0955 (1st) $y=\dfrac{e^{2x}+e^{-x}}{2}$의 증가, 감소를 조사한다.

$f(x)=\dfrac{e^{2x}+e^{-x}}{2}$이라 하면

$$f'(x)=\frac{2e^{2x}-e^{-x}}{2}$$

$f'(x)=0$에서 $\quad 2e^{2x}=\dfrac{1}{e^x}$

$$e^{3x}=\frac{1}{2}$$

$$\therefore x=-\frac{1}{3}\ln 2$$

x	$\cdots$	$-\frac{1}{3}\ln 2$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗

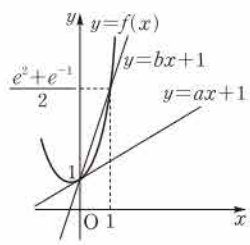
(2nd) M의 값을 구한다.

따라서 $0\le x\le 1$에서 $f'(x)>0$이므로 $f(x)$는 증가하고

$$f(0)=1,\ f(1)=\frac{e^2+e^{-1}}{2}$$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

한편 두 직선 $y=ax+1$, $y=bx+1$은 모두 점 $(0, 1)$을 지나므로 부등식 $f(x)\ge ax+1$이 성립하도록 하는 a의 값은 직선 $y=ax+1$이 곡선 $y=f(x)$와 점 $(0, 1)$에서 접할 때 최대이다.



$$\therefore M=f'(0)=\frac{2-1}{2}=\frac{1}{2}$$

(3rd) m의 값을 구한다.

부등식 $f(x)\le bx+1$이 성립하도록 하는 b의 값은 직선 $y=bx+1$이 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\left(1, \dfrac{e^2+e^{-1}}{2}\right)$을 지날 때 최소이므로

$$\frac{e^2+e^{-1}}{2}=m+1 \qquad \therefore m=\frac{e^2+e^{-1}-2}{2}$$

(4th) $M+m$의 값을 구한다.

$$M+m=\frac{e^2+e^{-1}-1}{2}$$

답 ③

0956 (1st) 두 점 P, Q의 속도를 구한다.

두 점 P, Q의 시각 t에서의 속도는 각각

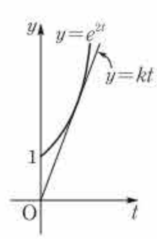
$$f'(t)=2e^{2t},\ g'(t)=2kt$$

(2nd) 두 점 P, Q의 속도가 같은 시각이 한 번뿐일 조건을 구한다.

$f'(t)=g'(t)$에서

$$2e^{2t}=2kt \qquad \therefore e^{2t}=kt$$

두 점 P, Q의 속도가 같은 시각이 한 번뿐이려면 $t>0$에서 위의 방정식이 오직 하나의 실근을 가져야 하므로 오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=e^{2t}$과 직선 $y=kt$가 접해야 한다.



(3rd) k의 값을 구한다.

$F(t)=e^{2t}$, $G(t)=kt$라 하면

$$F'(t)=2e^{2t},\ G'(t)=k$$

곡선 $y=F(t)$와 직선 $y=G(t)$의 접점의 t좌표를 a라 하면

$F(a)=G(a)$에서 $\quad e^{2a}=ka \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$F'(a)=G'(a)$에서 $\quad 2e^{2a}=k \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$$e^{2a}=2ae^{2a} \qquad \therefore a=\frac{1}{2}\ (\because e^{2a}>0)$$

$a=\dfrac{1}{2}$을 ㉡에 대입하면 $\quad k=2e$

답 $2e$

0957 (1st) t초 후의 점 Q의 좌표를 구한다.

점 P는 점 A에서 출발하여 호 AB를 따라 매초 1의 일정한 속력으로 움직이므로 t초 후 호 AP의 길이는 t이다.

이때 부채꼴 POA의 반지름의 길이가 1이므로 중심각의 크기는 t이다.

따라서 직선 OP의 방정식은 $\quad y=(\tan t)x$

또 직선 AB의 방정식은 $\quad y=-x+1$

점 Q는 두 직선 $y=(\tan t)x$와 $y=-x+1$의 교점이므로 점 Q의 x좌표는 $(\tan t)x=-x+1$에서

$$(1+\tan t)x=1 \qquad \therefore x=\frac{1}{1+\tan t}$$

$$\therefore Q\left(\frac{1}{1+\tan t},\ \frac{\tan t}{1+\tan t}\right)$$

(2nd) t초 후의 점 Q의 속도를 구한다.

$x=\dfrac{1}{1+\tan t}$에서 $\quad \dfrac{dx}{dt}=\dfrac{-\sec^2 t}{(1+\tan t)^2}$

$y=\dfrac{\tan t}{1+\tan t}$에서

$$\frac{dy}{dt}=\frac{\sec^2 t(1+\tan t)-\tan t\cdot\sec^2 t}{(1+\tan t)^2}=\frac{\sec^2 t}{(1+\tan t)^2}$$

t초 후의 점 Q의 속도는

$$\left(-\frac{\sec^2 t}{(1+\tan t)^2},\ \frac{\sec^2 t}{(1+\tan t)^2}\right) \qquad \cdots\cdots ㉠$$

(3rd) 점 P의 x좌표가 $\dfrac{4}{5}$일 때 $\tan t$, $\sec^2 t$의 값을 구한다.

점 P는 원 $x^2+y^2=1$ 위의 점이므로 점 P의 x좌표가 $\dfrac{4}{5}$일 때,

점 P의 y좌표는 $\quad \sqrt{1-\left(\dfrac{4}{5}\right)^2}=\dfrac{3}{5}$

$$\therefore P\left(\frac{4}{5},\ \frac{3}{5}\right)$$

즉 직선 OP의 기울기는 $\dfrac{3}{4}$이므로

$$\tan t=\frac{3}{4}$$

$$\therefore \sec^2 t=\tan^2 t+1=\left(\frac{3}{4}\right)^2+1=\frac{25}{16}$$

(4th) 점 P의 x좌표가 $\dfrac{4}{5}$인 순간 점 Q의 속도를 구한다.

점 P의 x좌표가 $\dfrac{4}{5}$인 순간 점 Q의 속도는 ㉠에서

$$\left(-\frac{\frac{25}{16}}{\left(1+\frac{3}{4}\right)^2},\ \frac{\frac{25}{16}}{\left(1+\frac{3}{4}\right)^2}\right),\ 즉\ \left(-\frac{25}{49},\ \frac{25}{49}\right)$$

5th $b-a$의 값을 구한다.

$a=-\frac{25}{49}$, $b=\frac{25}{49}$이므로 $\quad b-a=\frac{50}{49}$ 　　　답 ⑤

0958 전략 (시간)$=\frac{(\text{거리})}{(\text{속력})}$임을 이용한다.

풀이 $\overline{AC}=\sqrt{16+x^2}$ (m)이므로 [방법 1]을 이용할 때 걸리는 시간은 $\quad \sqrt{16+x^2}$ (초)

$\overline{AB}+\overline{BC}=4+x$ (m)이므로 [방법 2]를 이용할 때 걸리는 시간은

$\frac{4+x}{2}=2+\frac{x}{2}$ (초)

따라서 걸리는 시간의 차를 $f(x)$초라 하면

$$f(x)=\sqrt{16+x^2}-2-\frac{x}{2}\ (x>0) \quad \cdots ❶$$

$$\therefore f'(x)=\frac{2x}{2\sqrt{16+x^2}}-\frac{1}{2}=\frac{2x-\sqrt{16+x^2}}{2\sqrt{16+x^2}} \quad \cdots ❷$$

$f'(x)=0$에서 $\quad 2x=\sqrt{16+x^2}$

$4x^2=16+x^2, \quad x^2=\frac{16}{3}$

$\therefore x=\frac{4\sqrt{3}}{3}$ $(\because x>0)$

x	0	$\cdots$	$\frac{4\sqrt{3}}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	극소	↗

따라서 $f(x)$는 $x=\frac{4\sqrt{3}}{3}$에서 극소이면서 최소이므로 시간의 차가 최소가 되도록 하는 x의 값은 $\frac{4\sqrt{3}}{3}$이다. $\cdots$ ❸

답 $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

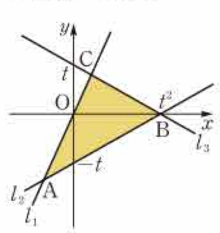
채점 기준	비율
❶ 시간의 차를 x에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30 %
❷ $f'(x)$를 구할 수 있다.	30 %
❸ x의 값을 구할 수 있다.	40 %

0959 전략 두 직선의 교점의 좌표를 이용하여 $S(t)$를 구한다.

풀이 l_1: $y=tx$,

l_2: $y=\frac{1}{t}x-t$,

l_3: $y=-\frac{1}{t}x+t$



이므로 오른쪽 그림과 같이 두 직선 l_1, l_2의 교점을 A, l_2, l_3의 교점을 B, l_3, l_1의 교점을 C라 하자.

$tx=\frac{1}{t}x-t$에서 $\quad (t^2-1)x=-t^2 \quad \therefore x=-\frac{t^2}{t^2-1}$

$\therefore A\left(-\frac{t^2}{t^2-1}, -\frac{t^3}{t^2-1}\right)$

$\frac{1}{t}x-t=-\frac{1}{t}x+t$에서 $\quad \frac{2}{t}x=2t \quad \therefore x=t^2$

$\therefore B(t^2, 0)$

$tx=-\frac{1}{t}x+t$에서 $\quad (t^2+1)x=t^2 \quad \therefore x=\frac{t^2}{t^2+1}$

$\therefore C\left(\frac{t^2}{t^2+1}, \frac{t^3}{t^2+1}\right)$

$\triangle ABC$의 넓이는 $\triangle OAB$와 $\triangle OBC$의 넓이의 합과 같으므로

$$S(t)=\triangle OAB+\triangle OBC=\frac{1}{2}\cdot t^2\cdot\frac{t^3}{t^2-1}+\frac{1}{2}\cdot t^2\cdot\frac{t^3}{t^2+1}=\frac{t^7}{t^4-1} \quad \cdots ❶$$

$$\therefore S'(t)=\frac{7t^6(t^4-1)-t^7\cdot 4t^3}{(t^4-1)^2}=\frac{t^6(3t^4-7)}{(t^4-1)^2} \quad \cdots ❷$$

$S'(t)=0$에서 $\quad 3t^4-7=0$ $(\because t>1)$ $\quad \therefore t=\left(\frac{7}{3}\right)^{\frac{1}{4}}$

t	1	$\cdots$	$\left(\frac{7}{3}\right)^{\frac{1}{4}}$	$\cdots$
$S'(t)$		$-$	0	$+$
$S(t)$		↘	극소	↗

따라서 함수 $S(t)$는 $t=\left(\frac{7}{3}\right)^{\frac{1}{4}}$에서 극소이면서 최소이므로

$$a=\left(\frac{7}{3}\right)^{\frac{1}{4}},\ b=\frac{\left(\frac{7}{3}\right)^{\frac{7}{4}}}{\frac{7}{3}-1}=\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{7}{3}\right)^{\frac{7}{4}} \quad \cdots ❸$$

$$\therefore ab=\left(\frac{7}{3}\right)^{\frac{1}{4}}\cdot\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{7}{3}\right)^{\frac{7}{4}}=\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{7}{3}\right)^2=\frac{49}{12} \quad \cdots ❹$$

답 $\frac{49}{12}$

채점 기준	비율
❶ $S(t)$를 구할 수 있다.	40 %
❷ $S'(t)$를 구할 수 있다.	20 %
❸ a, b의 값을 구할 수 있다.	30 %
❹ ab의 값을 구할 수 있다.	10 %

0960 전략 $f(k)$는 곡선 $y=\ln(2\sin x+4)$와 직선 $y=k$의 교점의 개수와 같음을 이용한다.

풀이 $g(x)=\ln(2\sin x+4)$라 하면

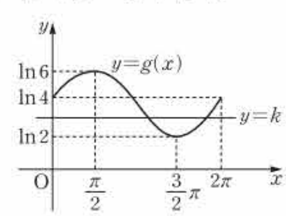
$$g'(x)=\frac{2\cos x}{2\sin x+4}$$

$g'(x)=0$에서 $\quad \cos x=0$

$\therefore x=\frac{\pi}{2}$ 또는 $x=\frac{3}{2}\pi$ $(\because 0\le x\le 2\pi)$

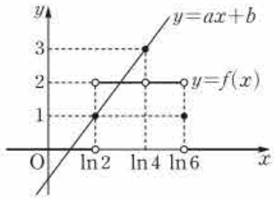
x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{3}{2}\pi$	$\cdots$	2π
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$\ln 4$	↗	$\ln 6$	↘	$\ln 2$	↗	$\ln 4$

$y=g(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



$$\therefore f(k)=\begin{cases} 0 & (k<\ln 2 \text{ 또는 } k>\ln 6) \\ 1 & (k=\ln 2 \text{ 또는 } k=\ln 6) \\ 2 & (\ln 2<k<\ln 4 \text{ 또는 } \ln 4<k<\ln 6) \\ 3 & (k=\ln 4) \end{cases}$$ ··· ❶

즉 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=ax+b\,(a>0)$가 서로 다른 네 점에서 만나려면 오른쪽 그림과 같이 직선 $y=ax+b$가 두 점 $(\ln 2,\ 1)$, $(\ln 4,\ 3)$을 지나야 한다.



이때 두 점 $(\ln 2,\ 1)$, $(\ln 4,\ 3)$을 지나는 직선의 방정식은

$$y-1=\frac{3-1}{\ln 4-\ln 2}(x-\ln 2)$$

$$\therefore y=\frac{2}{\ln 2}x-1$$ ··· ❷

따라서 $a=\dfrac{2}{\ln 2}$, $b=-1$이므로

$$ab=-\frac{2}{\ln 2}$$ ··· ❸

답 $-\dfrac{2}{\ln 2}$

채점 기준	비율
❶ $f(k)$를 구할 수 있다.	50 %
❷ $y=f(x)$의 그래프와 서로 다른 네 점에서 만나는 직선의 방정식을 구할 수 있다.	40 %
❸ ab의 값을 구할 수 있다	10 %

0961 전략 $f(x)$의 최솟값과 $g(x)$의 최댓값의 대소를 비교한다.

풀이 임의의 실수 x_1, x_2에 대하여 부등식 $f(x_1)\ge g(x_2)$가 성립하려면 $f(x)$의 최솟값이 $g(x)$의 최댓값보다 크거나 같아야 한다.

$f(x)=xe^x$에서

$$f'(x)=e^x+xe^x=(x+1)e^x$$

$f'(x)=0$에서

$$x=-1\ (\because e^x>0)$$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$-\frac{1}{e}$	↗

이므로 $f(x)$의 최솟값은

$$f(-1)=-\frac{1}{e}$$ ··· ❶

한편 $g(x)=-x^2+k$의 최댓값은 $g(0)=k$ ··· ❷

따라서 $k\le-\dfrac{1}{e}$이므로 k의 최댓값은 $-\dfrac{1}{e}$이다. ··· ❸

답 $-\dfrac{1}{e}$

채점 기준	비율
❶ $f(x)$의 최솟값을 구할 수 있다.	60 %
❷ $g(x)$의 최댓값을 구할 수 있다.	20 %
❸ k의 최댓값을 구할 수 있다.	20 %

0962 전략 삼각함수의 합성과 배각의 공식을 이용하여 주어진 식을 변형한다.

풀이 $\dfrac{dx}{dt}=\cos t-\sqrt{3}\sin t$, $\dfrac{dy}{dt}=2\cos^2 t-2\sin^2 t=2\cos 2t$

이므로 점 P의 시각 t에서의 속도는

$$(\cos t-\sqrt{3}\sin t,\ 2\cos 2t)$$ ··· ❶

$$x=\sin t+\sqrt{3}\cos t$$
$$=2\left(\sin t\cdot\frac{1}{2}+\cos t\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$=2\left(\sin t\cos\frac{\pi}{3}+\cos t\sin\frac{\pi}{3}\right)$$
$$=2\sin\left(t+\frac{\pi}{3}\right)$$

이고, $0\le t<\pi$에서 $\dfrac{\pi}{3}\le t+\dfrac{\pi}{3}<\dfrac{4}{3}\pi$이므로 x는 $t+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{2}$일 때, 즉 $t=\dfrac{\pi}{6}$일 때 최대이다.

$t=\dfrac{\pi}{6}$에서의 점 P의 속도는 $(0,\ 1)$이므로 속력은

$$\alpha=\sqrt{0^2+1^2}=1$$ ··· ❷

$$y=2\sin t\cos t+1=\sin 2t+1$$

이고, $0\le t<\pi$에서 $0\le 2t<2\pi$이므로 y는 $2t=\dfrac{3}{2}\pi$일 때, 즉 $t=\dfrac{3}{4}\pi$일 때 최소이다.

$t=\dfrac{3}{4}\pi$에서의 점 P의 속도는 $\left(\dfrac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2},\ 0\right)$이므로 속력은

$$\beta=\sqrt{\left(\frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}\right)^2+0^2}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$$ ··· ❸

$$\therefore \alpha\beta=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$$ ··· ❹

답 $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$

채점 기준	비율
❶ 점 P의 시각 t에서의 속도를 구할 수 있다.	30 %
❷ α의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ β의 값을 구할 수 있다.	30 %
❹ $\alpha\beta$의 값을 구할 수 있다.	10 %

08 여러 가지 적분법

0963 $\int \frac{6}{x}dx=6\int \frac{1}{x}dx=6\ln|x|+C$

답 $6\ln|x|+C$

0964 $\int \frac{1}{x^2}dx=\int x^{-2}dx=-x^{-1}+C=-\frac{1}{x}+C$

답 $-\frac{1}{x}+C$

0965 $\int \sqrt[3]{x^2}dx=\int x^{\frac{2}{3}}dx=\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}+C=\frac{3}{5}x\sqrt[3]{x^2}+C$

답 $\frac{3}{5}x\sqrt[3]{x^2}+C$

0966 $\int \left(x^2\sqrt{x}-\frac{2}{x^3}\right)dx=\int (x^{\frac{5}{2}}-2x^{-3})dx$

$=\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}+x^{-2}+C$

$=\frac{2}{7}x^3\sqrt{x}+\frac{1}{x^2}+C$

답 $\frac{2}{7}x^3\sqrt{x}+\frac{1}{x^2}+C$

SSEN 특강 함수의 실수배, 합, 차의 부정적분

두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여

① $\int kf(x)dx=k\int f(x)dx$ (단, k는 0이 아닌 실수)

② $\int \{f(x)\pm g(x)\}dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx$ (복호동순)

0967 $\int \left(x-3+\frac{4}{x^5}\right)dx=\int (x-3+4x^{-5})dx$

$=\frac{1}{2}x^2-3x-x^{-4}+C$

$=\frac{1}{2}x^2-3x-\frac{1}{x^4}+C$

답 $\frac{1}{2}x^2-3x-\frac{1}{x^4}+C$

0968 $\int \frac{x^3-x^2-2x}{x^3}dx=\int \left(1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)dx$

$=\int \left(1-\frac{1}{x}-2x^{-2}\right)dx$

$=x-\ln|x|+2x^{-1}+C$

$=x-\ln|x|+\frac{2}{x}+C$

답 $x-\ln|x|+\frac{2}{x}+C$

0969 $\int \frac{\sqrt{x}+1}{x}dx=\int \left(x^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{x}\right)dx$

$=2x^{\frac{1}{2}}+\ln|x|+C$

$=2\sqrt{x}+\ln|x|+C$

답 $2\sqrt{x}+\ln|x|+C$

0970 $\int \left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2dx=\int \left(x-2+\frac{1}{x}\right)dx$

$=\frac{1}{2}x^2-2x+\ln|x|+C$

답 $\frac{1}{2}x^2-2x+\ln|x|+C$

0971 $\int \frac{(x+1)^2}{\sqrt{x}}dx=\int \frac{x^2+2x+1}{\sqrt{x}}dx$

$=\int (x^{\frac{3}{2}}+2x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})dx$

$=\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}+2x^{\frac{1}{2}}+C$

$=\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}+\frac{4}{3}x\sqrt{x}+2\sqrt{x}+C$

답 $\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}+\frac{4}{3}x\sqrt{x}+2\sqrt{x}+C$

0972 $\int (3e^x+2^x)dx=3\int e^xdx+\int 2^xdx$

$=3e^x+\frac{2^x}{\ln 2}+C$ 답 $3e^x+\frac{2^x}{\ln 2}+C$

0973 $\int (e^{x+2}-5^{x+1})dx=\int e^x\cdot e^2dx-\int 5^x\cdot 5dx$

$=e^2\int e^xdx-5\int 5^xdx$

$=e^2\cdot e^x-5\cdot\frac{5^x}{\ln 5}+C$

$=e^{x+2}-\frac{5^{x+1}}{\ln 5}+C$

답 $e^{x+2}-\frac{5^{x+1}}{\ln 5}+C$

0974 $\int (3^x+1)^2dx=\int (9^x+2\cdot 3^x+1)dx$

$=\int 9^xdx+2\int 3^xdx+\int 1dx$

$=\frac{9^x}{\ln 9}+\frac{2\cdot 3^x}{\ln 3}+x+C$

답 $\frac{9^x}{\ln 9}+\frac{2\cdot 3^x}{\ln 3}+x+C$

0975 $\int \frac{xe^x-2}{x}dx=\int \left(e^x-\frac{2}{x}\right)dx$

$=\int e^xdx-2\int \frac{1}{x}dx$

$=e^x-2\ln|x|+C$

답 $e^x-2\ln|x|+C$

0976 $\int (2\sin x+4\cos x)dx=-2\cos x+4\sin x+C$

답 $-2\cos x+4\sin x+C$

0977 $\int \frac{2-\cos^2 x}{\cos^2 x}dx=\int (2\sec^2 x-1)dx$

$=2\tan x-x+C$

답 $2\tan x-x+C$

0978 $\int \frac{\sin^2 x+3}{\sin^2 x}dx=\int(1+3\csc^2 x)dx$

$=x-3\cot x+C$

답 $x-3\cot x+C$

0979 $\int \sec x(\cos x+\tan x)dx=\int(1+\sec x\tan x)dx$

$=x+\sec x+C$

답 $x+\sec x+C$

0980 $\int \csc x(\csc x+\cot x)dx=\int(\csc^2 x+\csc x\cot x)dx$

$=-\cot x-\csc x+C$

답 $-\cot x-\csc x+C$

0981 $\tan^2 x+1=\sec^2 x$이므로 $\tan^2 x=\sec^2 x-1$

$\therefore \int \tan^2 x\,dx=\int(\sec^2 x-1)dx$

$=\tan x-x+C$ 답 $\tan x-x+C$

0982 $1+\cot^2 x=\csc^2 x$이므로 $\cot^2 x=\csc^2 x-1$

$\therefore \int(\cot^2 x-1)dx=\int(\csc^2 x-2)dx$

$=-\cot x-2x+C$

답 $-\cot x-2x+C$

0983 $4x-1=t$로 놓으면 $x=\frac{t+1}{4}$, $\frac{dx}{dt}=\frac{1}{4}$이므로

$\int(4x-1)^3dx=\int t^3\cdot\frac{1}{4}dt=\frac{1}{16}t^4+C$

$=\frac{1}{16}(4x-1)^4+C$

답 $\frac{1}{16}(4x-1)^4+C$

0984 $5x+1=t$로 놓으면 $x=\frac{t-1}{5}$, $\frac{dx}{dt}=\frac{1}{5}$이므로

$\int\frac{1}{(5x+1)^2}dx=\int\frac{1}{t^2}\cdot\frac{1}{5}dt=\frac{1}{5}\int t^{-2}dt$

$=-\frac{1}{5}t^{-1}+C=-\frac{1}{5t}+C$

$=-\frac{1}{5(5x+1)}+C$

답 $-\frac{1}{5(5x+1)}+C$

0985 $3-x=t$로 놓으면 $x=3-t$, $\frac{dx}{dt}=-1$이므로

$\int\sqrt{3-x}\,dx=\int\sqrt{t}\cdot(-1)dt=-\int t^{\frac{1}{2}}dt$

$=-\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}+C=-\frac{2}{3}t\sqrt{t}+C$

$=-\frac{2}{3}(3-x)\sqrt{3-x}+C$

답 $-\frac{2}{3}(3-x)\sqrt{3-x}+C$

0986 $-2x+3=t$로 놓으면 $x=\frac{3-t}{2}$, $\frac{dx}{dt}=-\frac{1}{2}$이므로

$\int e^{-2x+3}dx=\int e^t\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)dt=-\frac{1}{2}e^t+C$

$=-\frac{1}{2}e^{-2x+3}+C$ 답 $-\frac{1}{2}e^{-2x+3}+C$

0987 $2x-1=t$로 놓으면 $x=\frac{t+1}{2}$, $\frac{dx}{dt}=\frac{1}{2}$이므로

$\int\cos(2x-1)dx=\int\cos t\cdot\frac{1}{2}dt=\frac{1}{2}\sin t+C$

$=\frac{1}{2}\sin(2x-1)+C$

답 $\frac{1}{2}\sin(2x-1)+C$

0988 $x^2+1=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=2x$이므로

$dt=2\cdot xdx$이므로 $xdx=\frac{1}{2}dt$

$\int x(x^2+1)^3dx=\int(x^2+1)^3\cdot x\,dx$

$=\int t^3\cdot\frac{1}{2}dt=\frac{1}{8}t^4+C$

$=\frac{1}{8}(x^2+1)^4+C$

답 $\frac{1}{8}(x^2+1)^4+C$

0989 $x^3-1=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=3x^2$이므로

$\int\frac{3x^2}{\sqrt{x^3-1}}dx=\int\frac{1}{\sqrt{x^3-1}}\cdot 3x^2dx$

$=\int\frac{1}{\sqrt{t}}dt=\int t^{-\frac{1}{2}}dt$

$=2t^{\frac{1}{2}}+C=2\sqrt{t}+C$

$=2\sqrt{x^3-1}+C$ 답 $2\sqrt{x^3-1}+C$

0990 $x^2=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=2x$이므로

$\int 2xe^{x^2}dx=\int e^{x^2}\cdot 2x\,dx$

$=\int e^t dt=e^t+C$

$=e^{x^2}+C$ 답 $e^{x^2}+C$

0991 $\ln x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}$이므로

$\int\frac{\ln x}{x}dx=\int\ln x\cdot\frac{1}{x}dx$

$=\int t\,dt=\frac{1}{2}t^2+C$

$=\frac{1}{2}(\ln x)^2+C$ 답 $\frac{1}{2}(\ln x)^2+C$

0992 $\sin x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=\cos x$이므로

$\int\sin^2 x\cos x\,dx=\int t^2dt=\frac{1}{3}t^3+C$

$=\frac{1}{3}\sin^3 x+C$ 답 $\frac{1}{3}\sin^3 x+C$

0993 $(x^2+3)'=2x$이므로

$$\int \frac{x}{x^2+3}dx=\frac{1}{2}\int \frac{(x^2+3)'}{x^2+3}dx$$
$$=\frac{1}{2}\ln(x^2+3)+C\ (\because x^2+3>0)$$

답 $\frac{1}{2}\ln(x^2+3)+C$

0994 $(x^2-x+2)'=2x-1$이므로

$$\int \frac{2x-1}{x^2-x+2}dx=\int \frac{(x^2-x+2)'}{x^2-x+2}dx$$
$$=\ln(x^2-x+2)+C\ (\because x^2-x+2>0)$$

답 $\ln(x^2-x+2)+C$

0995 $(e^x-1)'=e^x$이므로

$$\int \frac{e^x}{e^x-1}dx=\int \frac{(e^x-1)'}{e^x-1}dx$$
$$=\ln|e^x-1|+C$$

답 $\ln|e^x-1|+C$

0996 $(\cot x)'=-\csc^2 x$이므로

$$\int \frac{\csc^2 x}{\cot x}dx=-\int \frac{(\cot x)'}{\cot x}dx$$
$$=-\ln|\cot x|+C$$

답 $-\ln|\cot x|+C$

0997 $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$이고 $(\cos x)'=-\sin x$이므로

$$\int \tan x\,dx=\int \frac{\sin x}{\cos x}dx=-\int \frac{(\cos x)'}{\cos x}dx$$
$$=-\ln|\cos x|+C$$

답 $-\ln|\cos x|+C$

0998 $\frac{x^2+4}{x-1}=x+1+\frac{5}{x-1}$이므로

$$\int \frac{x^2+4}{x-1}dx=\int\left(x+1+\frac{5}{x-1}\right)dx$$
$$=\frac{1}{2}x^2+x+5\ln|x-1|+C$$

답 $\frac{1}{2}x^2+x+5\ln|x-1|+C$

0999 $\frac{1}{x^2+2x}=\frac{1}{x(x+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+2}\right)$이므로

$$\int \frac{1}{x^2+2x}dx=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+2}\right)dx$$
$$=\frac{1}{2}(\ln|x|-\ln|x+2|)+C$$
$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x}{x+2}\right|+C$$

답 $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x}{x+2}\right|+C$

1000 $\frac{x-3}{x^2-1}=\frac{x-3}{(x+1)(x-1)}=\frac{a}{x+1}+\frac{b}{x-1}$로 놓으면

$\frac{a}{x+1}+\frac{b}{x-1}=\frac{(a+b)x-a+b}{(x+1)(x-1)}$이므로

$x-3=(a+b)x-a+b$

위의 등식은 x에 대한 항등식이므로

$a+b=1,\ -a+b=-3$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=2,\ b=-1$

따라서 $\frac{x-3}{x^2-1}=\frac{2}{x+1}-\frac{1}{x-1}$이므로

$$\int \frac{x-3}{x^2-1}dx=\int\left(\frac{2}{x+1}-\frac{1}{x-1}\right)dx$$
$$=2\ln|x+1|-\ln|x-1|+C$$
$$=\ln\frac{(x+1)^2}{|x-1|}+C$$

답 $\ln\frac{(x+1)^2}{|x-1|}+C$

1001 $f(x)=x,\ g'(x)=e^{-x}$으로 놓으면

$f'(x)=1,\ g(x)=-e^{-x}$

$$\therefore \int xe^{-x}dx=x\cdot(-e^{-x})-\int 1\cdot(-e^{-x})dx$$
$$=-xe^{-x}+\int e^{-x}dx$$
$$=-xe^{-x}-e^{-x}+C$$

답 $-xe^{-x}-e^{-x}+C$

1002 $f(x)=\ln x,\ g'(x)=1$로 놓으면

$f'(x)=\frac{1}{x},\ g(x)=x$

$$\therefore \int \ln x\,dx=\ln x\cdot x-\int\frac{1}{x}\cdot x\,dx=x\ln x-\int 1\,dx$$
$$=x\ln x-x+C$$

답 $x\ln x-x+C$

1003 $f(x)=x,\ g'(x)=\cos x$로 놓으면

$f'(x)=1,\ g(x)=\sin x$

$$\therefore \int x\cos x\,dx=x\sin x-\int 1\cdot\sin x\,dx$$
$$=x\sin x+\cos x+C$$

답 $x\sin x+\cos x+C$

1004 $f(x)=x+1,\ g'(x)=\sin x$로 놓으면

$f'(x)=1,\ g(x)=-\cos x$

$$\therefore \int (x+1)\sin x\,dx=(x+1)(-\cos x)-\int 1\cdot(-\cos x)dx$$
$$=-(x+1)\cos x+\int\cos x\,dx$$
$$=-(x+1)\cos x+\sin x+C$$

답 $-(x+1)\cos x+\sin x+C$

유형 01 함수 $y=x^n$의 부정적분

본책 148쪽

피적분함수가 $\frac{1}{x^p}$ (p는 실수) 또는 $\sqrt[r]{x^q}$ (r는 2 이상의 자연수, q는 실수) 꼴을 포함한 경우에는

$$\frac{1}{x^p}=x^{-p},\ \sqrt[r]{x^q}=x^{\frac{q}{r}}$$

임을 이용하여 피적분함수를 변형한 후 다음을 이용하여 부정적분을 구한다.

① $n\neq-1$일 때, $\int x^n dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C$

② $n=-1$일 때, $\int x^{-1}dx=\int\frac{1}{x}dx=\ln|x|+C$

1005 $f(x)=\int\frac{1-x^2}{x}dx=\int\left(\frac{1}{x}-x\right)dx$

$=\ln|x|-\frac{1}{2}x^2+C$

$f(e)=-\frac{1}{2}e^2$이므로

$1-\frac{1}{2}e^2+C=-\frac{1}{2}e^2 \qquad \therefore C=-1$

따라서 $f(x)=\ln|x|-\frac{1}{2}x^2-1$이므로

$f(1)=-\frac{1}{2}-1=-\frac{3}{2}$

답 ②

1006 $F(x)=\int(x\sqrt{x}-x-2)dx=\int(x^{\frac{3}{2}}-x-2)dx$

$=\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}-\frac{1}{2}x^2-2x+C$

$=\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}-\frac{1}{2}x^2-2x+C$

$F(1)=-1$이므로

$\frac{2}{5}-\frac{1}{2}-2+C=-1 \qquad \therefore C=\frac{11}{10}$

$\therefore F(x)=\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}-\frac{1}{2}x^2-2x+\frac{11}{10}$

답 $F(x)=\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}-\frac{1}{2}x^2-2x+\frac{11}{10}$

1007 $f'(x)=\frac{4}{x^3}$이므로

$f(x)=\int\frac{4}{x^3}dx=\int 4x^{-3}dx=-2x^{-2}+C_1$

$f(1)=1$이므로 $\quad -2+C_1=1 \qquad \therefore C_1=3$

$\therefore f(x)=-2x^{-2}+3$

따라서 $f(x)$의 부정적분은

$\int(-2x^{-2}+3)dx=2x^{-1}+3x+C$

$=\frac{2}{x}+3x+C$

답 $\frac{2}{x}+3x+C$

1008 $f'(x)=\frac{1}{x}\left(1+\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^2=\frac{1}{x}\left(1+\frac{4}{\sqrt{x}}+\frac{4}{x}\right)$

$=\frac{1}{x}+\frac{4}{x\sqrt{x}}+\frac{4}{x^2}$

이므로

$f(x)=\int\left(\frac{1}{x}+\frac{4}{x\sqrt{x}}+\frac{4}{x^2}\right)dx$

$=\int\left(\frac{1}{x}+4x^{-\frac{3}{2}}+4x^{-2}\right)dx$

$=\ln x-8x^{-\frac{1}{2}}-4x^{-1}+C \ (\because x>0)$

$=\ln x-\frac{8}{\sqrt{x}}-\frac{4}{x}+C$ ⋯ ❶

$f(1)=-2$이므로

$-8-4+C=-2 \qquad \therefore C=10$

따라서 $f(x)=\ln x-\frac{8}{\sqrt{x}}-\frac{4}{x}+10$이므로 ⋯ ❷

$f(4)=\ln 4-4-1+10=5+\ln 4$ ⋯ ❸

답 $5+\ln 4$

채점 기준	비율
❶ $f'(x)$의 부정적분을 구할 수 있다.	50 %
❷ $f(x)$를 구할 수 있다.	30 %
❸ $f(4)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

1009 $F(x)=xf(x)-x-\ln x$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=f(x)+xf'(x)-1-\frac{1}{x}$

$\therefore f'(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}$

$\therefore f(x)=\int\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)dx=\int\left(\frac{1}{x}+x^{-2}\right)dx$

$=\ln x-x^{-1}+C \ (\because x>0)$

$=\ln x-\frac{1}{x}+C$

$f(1)=-1$이므로

$-1+C=-1 \qquad \therefore C=0$

따라서 $f(x)=\ln x-\frac{1}{x}$이므로

$f(e^2)=2-\frac{1}{e^2}$

답 ⑤

유형 02~03 지수함수의 부정적분

본책 148, 149쪽

피적분함수가 지수함수를 포함한 경우에는 지수법칙과 인수분해를 이용하여 피적분함수를 적분하기 쉬운 형태로 변형한 후 다음을 이용하여 부정적분을 구한다.

① $\int e^x dx=e^x+C$

② $\int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+C$ (단, $a>0$, $a\neq1$)

1010 $f(x)=\int\frac{1-e^{2x}}{1+e^x}dx=\int\frac{(1+e^x)(1-e^x)}{1+e^x}dx$

$=\int(1-e^x)dx$

$=x-e^x+C$

$f(0)=1$이므로

$-1+C=1 \qquad \therefore C=2$

따라서 $f(x)=x-e^x+2$이므로

$f(1)=1-e+2=3-e$

답 ③

1011 $y=\ln x+1$로 놓으면

$y-1=\ln x, \quad x=e^{y-1}$

x와 y를 서로 바꾸면 $\quad y=e^{x-1}$

따라서 $g(x)=e^{x-1}$이므로

$$\int g(x)dx=\int e^{x-1}dx=\int e^{x}\cdot e^{-1}dx$$
$$=e^{-1}\int e^{x}dx$$
$$=e^{-1}\cdot e^{x}+C=e^{x-1}+C$$

답 $e^{x-1}+C$

1012 조건 ㈎, ㈏의 두 식을 연립하여 풀면

$f'(x)=e^{x}+e^{-x},\ g'(x)=-e^{x}+e^{-x}$

$$\therefore f(x)=\int(e^{x}+e^{-x})dx=e^{x}-e^{-x}+C_1$$
$$g(x)=\int(-e^{x}+e^{-x})dx=-e^{x}-e^{-x}+C_2 \quad \cdots ❶$$

조건 ㈐에서 $f(0)=0$이므로

$1-1+C_1=0 \quad \therefore C_1=0$

또 $g(0)=-2$이므로

$-1-1+C_2=-2 \quad \therefore C_2=0$

따라서 $f(x)=e^{x}-e^{-x},\ g(x)=-e^{x}-e^{-x}$이므로 $\cdots$ ❷

$$f(2)g(2)=(e^{2}-e^{-2})(-e^{2}-e^{-2})$$
$$=-e^{4}+e^{-4}=-e^{4}+\frac{1}{e^{4}} \quad \cdots ❸$$

답 $-e^{4}+\frac{1}{e^{4}}$

채점 기준	비율
❶ $f'(x)$, $g'(x)$의 부정적분을 구할 수 있다.	50 %
❷ $f(x)$, $g(x)$를 구할 수 있다.	30 %
❸ $f(2)g(2)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

1013 $\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)$이므로

$$f'(x)=\frac{4-xe^{x}}{x}$$
$$\therefore f(x)=\int\frac{4-xe^{x}}{x}dx=\int\left(\frac{4}{x}-e^{x}\right)dx$$
$$=4\ln|x|-e^{x}+C$$

$f(1)=e^{2}-e$이므로

$-e+C=e^{2}-e \quad \therefore C=e^{2}$

따라서 $f(x)=4\ln|x|-e^{x}+e^{2}$이므로

$f(2)=4\ln2-e^{2}+e^{2}=4\ln2$

답 ③

1014 $$f(x)=\int\frac{8^{x}-1}{2^{x}-1}dx=\int\frac{(2^{x}-1)(4^{x}+2^{x}+1)}{2^{x}-1}dx$$
$$=\int(4^{x}+2^{x}+1)dx$$
$$=\frac{4^{x}}{\ln4}+\frac{2^{x}}{\ln2}+x+C$$

$f(1)=\frac{4}{\ln2}$이므로 $\quad \frac{4}{\ln4}+\frac{2}{\ln2}+1+C=\frac{4}{\ln2}$

$\frac{2}{\ln2}+\frac{2}{\ln2}+1+C=\frac{4}{\ln2}$

$\therefore C=-1$

$f(x)=\frac{4^{x}}{\ln4}+\frac{2^{x}}{\ln2}+x-1$이므로

$$f(2)=\frac{16}{\ln4}+\frac{4}{\ln2}+1$$
$$=\frac{8}{\ln2}+\frac{4}{\ln2}+1=\frac{12}{\ln2}+1$$

따라서 $a=12,\ b=1$이므로

$a+b=13$

답 13

1015 $f'(x)=(2\cdot5^{2x}-5^{x})\ln5=5^{2x}\ln5^{2}-5^{x}\ln5$

$=25^{x}\ln25-5^{x}\ln5$

이므로

$$f(x)=\int(25^{x}\ln25-5^{x}\ln5)dx$$
$$=25^{x}-5^{x}+C$$

$f(0)=0$이므로 $\quad 1-1+C=0 \quad \therefore C=0$

따라서 $f(x)=25^{x}-5^{x}$이므로

$f(1)=25-5=20$

답 ④

1016 $$f(x)=\int(10^{x}-1)^{2}dx=\int(100^{x}-2\cdot10^{x}+1)dx$$
$$=\frac{100^{x}}{2\ln10}-\frac{2\cdot10^{x}}{\ln10}+x+C$$

$f(0)=\frac{1}{2\ln10}$이므로 $\quad \frac{1}{2\ln10}-\frac{2}{\ln10}+C=\frac{1}{2\ln10}$

$\therefore C=\frac{2}{\ln10}$

따라서 $f(x)=\frac{100^{x}}{2\ln10}-\frac{2\cdot10^{x}}{\ln10}+x+\frac{2}{\ln10}$이므로

$$f(n)-n=\frac{100^{n}}{2\ln10}-\frac{2\cdot10^{n}}{\ln10}+\frac{2}{\ln10}$$
$$=\frac{100^{n}-4\cdot10^{n}+4}{2\ln10}$$
$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{f(n)-n}{100^{n}+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{100^{n}-4\cdot10^{n}+4}{2\ln10(100^{n}+1)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1-4\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^{n}+\frac{4}{100^{n}}}{2\ln10\left\{1+\left(\frac{1}{100}\right)^{n}\right\}}$$
$$=\frac{1}{2\ln10}$$

답 ③

1017 $f'(x)=\begin{cases}3^{x} & (x>0)\\ x+1 & (x<0)\end{cases}$에서

$$f(x)=\begin{cases}\frac{3^{x}}{\ln3}+C_1 & (x>0)\\ \frac{1}{2}x^{2}+x+C_2 & (x<0)\end{cases}$$

$f(-1)=\frac{1}{2}$이므로 $\quad \frac{1}{2}-1+C_2=\frac{1}{2} \quad \therefore C_2=1$

$\therefore f(x)=\frac{1}{2}x^{2}+x+1\ (x<0) \quad \cdots ❶$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이면 $x=0$에서 연속이므로

$$f(0)=\lim_{x\to0+}\left(\frac{3^{x}}{\ln3}+C_1\right)=\lim_{x\to0-}\left(\frac{1}{2}x^{2}+x+1\right)$$

$\frac{1}{\ln3}+C_1=1 \quad \therefore C_1=1-\frac{1}{\ln3}$

$\therefore f(x)=\dfrac{3^x-1}{\ln 3}+1\,(x\ge 0)$ ⋯ ❷

따라서 $f(1)=\dfrac{2}{\ln 3}+1$, $f(-2)=2-2+1=1$이므로

$f(1)-f(-2)=\dfrac{2}{\ln 3}$

즉 $\dfrac{k}{\ln 3}=\dfrac{2}{\ln 3}$이므로 $k=2$ ⋯ ❸

답 2

채점 기준	비율
❶ $x<0$일 때 $f(x)$를 구할 수 있다.	30 %
❷ $x\ge 0$일 때 $f(x)$를 구할 수 있다.	40 %
❸ k의 값을 구할 수 있다.	30 %

유형 04 삼각함수의 부정적분

본책 150쪽

피적분함수가 삼각함수를 포함하는 경우에는 삼각함수 사이의 관계, 배각의 공식 등을 이용하여 피적분함수를 적분하기 쉬운 형태로 변형한 후 다음을 이용하여 부정적분을 구한다.

① $\int \sin x\,dx=-\cos x+C$ ② $\int \cos x\,dx=\sin x+C$

③ $\int \sec^2 x\,dx=\tan x+C$ ④ $\int \csc^2 x\,dx=-\cot x+C$

⑤ $\int \sec x\tan x\,dx=\sec x+C$

⑥ $\int \csc x\cot x\,dx=-\csc x+C$

1018 $f(x)=\int \dfrac{\cos^2 x}{1+\sin x}dx=\int \dfrac{1-\sin^2 x}{1+\sin x}dx$

$=\int \dfrac{(1+\sin x)(1-\sin x)}{1+\sin x}dx$

$=\int (1-\sin x)dx=x+\cos x+C$

$f(0)=1$이므로

$1+C=1$ $\therefore C=0$

따라서 $f(x)=x+\cos x$이므로

$f(2\pi)=2\pi+1$

답 ④

1019 $f'(x)=\dfrac{1}{2}\cos x\tan x=\dfrac{1}{2}\cos x\cdot\dfrac{\sin x}{\cos x}=\dfrac{1}{2}\sin x$

이므로 $f(x)=\int \dfrac{1}{2}\sin x\,dx=-\dfrac{1}{2}\cos x+C$

함수 $y=f(x)$의 그래프가 원점을 지나므로 $f(0)=0$에서

$-\dfrac{1}{2}+C=0$ $\therefore C=\dfrac{1}{2}$

따라서 $f(x)=-\dfrac{1}{2}\cos x+\dfrac{1}{2}$이므로

$f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{1}{4}$

답 ②

1020 ㄱ. $\int (\csc x+\cot x)\sin x\,dx$

$=\int \left(\dfrac{1}{\sin x}\cdot\sin x+\dfrac{\cos x}{\sin x}\cdot\sin x\right)dx$

$=\int (1+\cos x)\,dx$

$=x+\sin x+C$

ㄴ. $\int \dfrac{1}{1+\cos x}dx=\int \dfrac{1-\cos x}{(1+\cos x)(1-\cos x)}dx$

$=\int \dfrac{1-\cos x}{\sin^2 x}dx$

$=\int \left(\dfrac{1}{\sin^2 x}-\dfrac{1}{\sin x}\cdot\dfrac{\cos x}{\sin x}\right)dx$

$=\int (\csc^2 x-\csc x\cot x)dx$

$=-\cot x+\csc x+C$

ㄷ. $\int \dfrac{1}{1+\cos 2x}dx=\int \dfrac{1}{1+(2\cos^2 x-1)}dx$

$=\int \dfrac{1}{2\cos^2 x}dx$

$=\dfrac{1}{2}\int \sec^2 x\,dx$

$=\dfrac{1}{2}\tan x+C$

이상에서 옳은 것은 ㄷ뿐이다.

답 ㄷ

SSEN 특강 배각의 공식

① $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$

② $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$

③ $\tan 2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

1021 $\int \dfrac{\sin x(\sin x-1)}{\cos^2 x}dx$

$=\int \dfrac{\sin^2 x-\sin x}{\cos^2 x}dx$

$=\int \left\{\left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)^2-\dfrac{1}{\cos x}\cdot\dfrac{\sin x}{\cos x}\right\}dx$

$=\int (\tan^2 x-\sec x\tan x)dx$

$=\int (\sec^2 x-1-\sec x\tan x)dx$

$=\tan x-\sec x-x+C$

따라서 $p=1$, $q=-1$, $r=-1$이므로

$pqr=1$

답 1

1022 $f'(x)=\left(\sin\dfrac{x}{2}+\cos\dfrac{x}{2}\right)^2$

$=\sin^2\dfrac{x}{2}+\cos^2\dfrac{x}{2}+2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}$

$=1+\sin x$

$2\sin\alpha\cos\alpha=\sin 2\alpha$임을 이용한다.

$\therefore f(x)=\int (1+\sin x)dx=x-\cos x+C$ ⋯ ❶

$f(0)=-2$이므로 $-1+C=-2$ $\therefore C=-1$

따라서 $f(x)=x-\cos x-1$이므로 ⋯ ❷

$f(\pi)=\pi+1-1=\pi$ ⋯ ❸

답 π

채점 기준	비율
❶ $f'(x)$의 부정적분을 구할 수 있다.	50 %
❷ $f(x)$를 구할 수 있다.	30 %
❸ $f(\pi)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

1023 $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+2h)-f(x-h)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+2h)-f(x)-\{f(x-h)-f(x)\}}{h}$

$=2\lim_{h\to 0}\frac{f(x+2h)-f(x)}{2h}+\lim_{h\to 0}\frac{f(x-h)-f(x)}{-h}$

$=2f'(x)+f'(x)$

$=3f'(x)$

즉 $3f'(x)=\tan^2 x$이므로 $\quad f'(x)=\frac{1}{3}\tan^2 x$

$\therefore f(x)=\int\frac{1}{3}\tan^2 x\,dx$

$=\frac{1}{3}\int(\sec^2 x-1)dx$

$=\frac{1}{3}(\tan x-x)+C$

$\therefore f\left(\frac{5}{4}\pi\right)-f\left(\frac{\pi}{4}\right)$

$=\left\{\frac{1}{3}\cdot\left(1-\frac{5}{4}\pi\right)+C\right\}-\left\{\frac{1}{3}\cdot\left(1-\frac{\pi}{4}\right)+C\right\}$

$=-\frac{\pi}{3}$

답 ①

유형 05 치환적분법; 유리함수

본책 151쪽

피적분함수가 $f'(x)\{f(x)\}^n$ 꼴인 경우

➡ $f(x)=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=f'(x)$이므로

$$\int f'(x)\{f(x)\}^n dx=\int t^n dt=\frac{1}{n+1}t^{n+1}+C$$
$$=\frac{1}{n+1}\{f(x)\}^{n+1}+C$$

1024 $3x+2=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=3$이므로

$\int(3x+2)^6 dx=\int t^6\cdot\frac{1}{3}dt=\frac{1}{21}t^7+C$

$=\frac{1}{21}(3x+2)^7+C$

따라서 $a=21$, $b=7$이므로

$a-b=14$

답 ②

1025 $x^2+x-1=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=2x+1$이므로

$f(x)=\int(2x+1)(x^2+x-1)^5 dx$

$=\int t^5 dt=\frac{1}{6}t^6+C$

$=\frac{1}{6}(x^2+x-1)^6+C$ ··· ❶

$f(0)=1$이므로

$\frac{1}{6}+C=1 \quad \therefore C=\frac{5}{6}$

따라서 $f(x)=\frac{1}{6}(x^2+x-1)^6+\frac{5}{6}$이므로 ··· ❷

$f(1)=\frac{1}{6}+\frac{5}{6}=1$ ··· ❸

답 1

채점 기준	비율
❶ 부정적분을 구할 수 있다.	50 %
❷ $f(x)$를 구할 수 있다.	30 %
❸ $f(1)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

1026 $mx-2=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=m$이므로

$f(x)=\int(mx-2)^8 dx=\int t^8\cdot\frac{1}{m}dt$

$=\frac{1}{9m}t^9+C=\frac{1}{9m}(mx-2)^9+C$

$f(x)$의 최고차항의 계수가 9이고 $m>0$이므로

$\frac{1}{9m}\cdot m^9=9, \quad m^8=81$

$\therefore m=(3^4)^{\frac{1}{8}}=3^{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$

답 $\sqrt{3}$

1027 $x-1=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=1$이므로

$f(x)=\int\frac{x-3}{(x-1)^3}dx=\int\frac{t-2}{t^3}dt$

$=\int\left(\frac{1}{t^2}-\frac{2}{t^3}\right)dt=\int(t^{-2}-2t^{-3})dt$

$=-t^{-1}+t^{-2}+C=-\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}+C$

$=-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}+C$

$f(0)=3$이므로 $\quad 1+1+C=3 \quad \therefore C=1$

따라서 $f(x)=-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}+1$이므로

$f(2)=-1+1+1=1$

답 1

유형 06 치환적분법; 무리함수

본책 151쪽

피적분함수가 $f'(x)\sqrt{f(x)}$ 또는 $\frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}$ 꼴인 경우

➡ $f(x)=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=f'(x)$이므로

$$\int f'(x)\sqrt{f(x)}\,dx=\int\sqrt{t}\,dt=\frac{2}{3}t\sqrt{t}+C$$
$$=\frac{2}{3}f(x)\sqrt{f(x)}+C$$
$$\int\frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}dx=\int\frac{1}{\sqrt{t}}dt=2\sqrt{t}+C=2\sqrt{f(x)}+C$$

1028 $x^2+2x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=2x+2=2(x+1)$이므로

$\int(x+1)\sqrt{x^2+2x}\,dx=\int\sqrt{t}\cdot\frac{1}{2}dt=\frac{1}{2}\int t^{\frac{1}{2}}dt$

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}+C=\frac{1}{3}t\sqrt{t}+C$

$=\frac{1}{3}(x^2+2x)\sqrt{x^2+2x}+C$

$\therefore a=\frac{1}{3}$

답 ①

1029 $1-x^2=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=-2x$이므로

$$f(x)=\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int \frac{1}{\sqrt{t}}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)dt=-\frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}dt$$
$$=-\frac{1}{2}\cdot 2t^{\frac{1}{2}}+C=-\sqrt{t}+C$$
$$=-\sqrt{1-x^2}+C$$

$f(0)=-1$이므로 $\quad -1+C=-1 \quad \therefore C=0$

따라서 $f(x)=-\sqrt{1-x^2}$ 이므로

$$f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}=-\sqrt{3}$$ 답 ②

1030 $x+1=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=1$이므로

$$f(x)=\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx=\int \frac{t-1}{\sqrt{t}}dt=\int (t^{\frac{1}{2}}-t^{-\frac{1}{2}})dt$$
$$=\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}-2t^{\frac{1}{2}}+C=\frac{2}{3}t\sqrt{t}-2\sqrt{t}+C$$
$$=\frac{2}{3}(x+1)\sqrt{x+1}-2\sqrt{x+1}+C$$ ···➊

$f(0)=\frac{2}{3}$이므로 $\quad \frac{2}{3}-2+C=\frac{2}{3} \quad \therefore C=2$

따라서 $f(x)=\frac{2}{3}(x+1)\sqrt{x+1}-2\sqrt{x+1}+2$이므로 ···➋

$$f(3)=\frac{2}{3}\cdot 4\cdot 2-2\cdot 2+2=\frac{10}{3}$$ ···➌

답 $\frac{10}{3}$

채점 기준	비율
➊ $f'(x)$의 부정적분을 구할 수 있다.	50 %
➋ $f(x)$를 구할 수 있다.	30 %
➌ $f(3)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

유형 07 치환적분법; 지수함수

본책 152쪽

(1) 피적분함수가 $f'(x)e^{f(x)}$ 꼴인 경우

➡ $f(x)=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=f'(x)$이므로

$$\int f'(x)e^{f(x)}dx=\int e^t dt=e^t+C=e^{f(x)}+C$$

(2) 피적분함수가 $e^x f(e^x)$ 꼴인 경우

➡ $e^x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=e^x$이므로

$$\int e^x f(e^x)dx=\int f(t)dt$$

1031 $e^x+1=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=e^x$이므로

$$f(x)=\frac{3}{2}\int e^x(e^x+1)^5dx=\frac{3}{2}\int t^5 dt$$
$$=\frac{1}{4}t^6+C=\frac{1}{4}(e^x+1)^6+C$$

$f(0)=16$이므로 $\quad \frac{1}{4}\cdot 2^6+C=16 \quad \therefore C=0$

따라서 $f(x)=\frac{1}{4}(e^x+1)^6$이므로

$$\sqrt{f(\ln 3)}=\sqrt{\frac{1}{4}\cdot 4^6}=\sqrt{2^{10}}=2^5=32$$ 답 ④

1032 $-\frac{t}{2}=x$로 놓으면 $\frac{dx}{dt}=-\frac{1}{2}$이므로

$$V(t)=\int(-25e^{-\frac{t}{2}})dt=\int 50e^x dx=50e^x+C$$
$$=50e^{-\frac{t}{2}}+C$$

$V(0)=50$이므로 $\quad 50+C=50 \quad \therefore C=0$

따라서 $V(t)=50e^{-\frac{t}{2}}$이므로

$$V(10)=50e^{-5}=\frac{50}{e^5}$$ 답 $\frac{50}{e^5}$ dB

1033 $e^x+3=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=e^x$이므로

$$f(x)=\int \frac{e^x}{\sqrt{e^x+3}}dx=\int \frac{1}{\sqrt{t}}dt=\int t^{-\frac{1}{2}}dt$$
$$=2t^{\frac{1}{2}}+C=2\sqrt{t}+C$$
$$=2\sqrt{e^x+3}+C$$

$f(0)=2$이므로 $\quad 4+C=2 \quad \therefore C=-2$

따라서 $f(x)=2\sqrt{e^x+3}-2$이므로 $f(x)=4$에서

$2\sqrt{e^x+3}-2=4,\quad \sqrt{e^x+3}=3$

$e^x=6 \quad \therefore x=\ln 6$ 답 ⑤

1034 $e^x+5=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=e^x$이므로

$$f(x)=\int e^x\sqrt{e^x+5}\,dx=\int \sqrt{t}\,dt=\int t^{\frac{1}{2}}dt$$
$$=\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}+C=\frac{2}{3}t\sqrt{t}+C$$
$$=\frac{2}{3}(e^x+5)\sqrt{e^x+5}+C$$ ···➊

$f(0)=4\sqrt{6}$이므로 $\quad \frac{2}{3}\cdot 6\sqrt{6}+C=4\sqrt{6} \quad \therefore C=0$

$\therefore f(x)=\frac{2}{3}(e^x+5)\sqrt{e^x+5}$ ···➋

한편 $f'(x)>0$이므로 $0\le x\le \ln 4$에서 함수 $f(x)$는 증가한다.

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\ln 4$에서 최대이므로 구하는 최댓값은

$$f(\ln 4)=\frac{2}{3}\cdot 9\sqrt{9}=18$$ ···➌

답 18

채점 기준	비율
➊ $f'(x)$의 부정적분을 구할 수 있다.	50 %
➋ $f(x)$를 구할 수 있다.	20 %
➌ 최댓값을 구할 수 있다.	30 %

1035 (i) $x>0$일 때, $x^2=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=2x$이므로

$$f(x)=\int xe^{x^2}dx=\int e^t\cdot\frac{1}{2}dt$$
$$=\frac{1}{2}e^t+C_1=\frac{1}{2}e^{x^2}+C_1$$

(ii) $x<0$일 때, $x^4+1=s$로 놓으면 $\frac{ds}{dx}=4x^3$이므로

$$f(x)=\int 4x^3(x^4+1)^3dx=\int s^3 ds$$
$$=\frac{1}{4}s^4+C_2=\frac{1}{4}(x^4+1)^4+C_2$$

이때 $f(-1)=3$이므로 $\quad \frac{1}{4}\cdot 2^4+C_2=3$

$\therefore C_2=-1$

(i), (ii)에서 $\quad f(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}e^{x^2}+C_1 & (x>0) \\ \frac{1}{4}(x^4+1)^4-1 & (x<0) \end{cases}$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이면 $x=0$에서 연속이므로

$$f(0)=\lim_{x\to 0+}\left(\frac{1}{2}e^{x^2}+C_1\right)=\lim_{x\to 0-}\left\{\frac{1}{4}(x^4+1)^4-1\right\}$$

$\frac{1}{2}+C_1=-\frac{3}{4} \qquad \therefore C_1=-\frac{5}{4}$

따라서 $x>0$에서 $f(x)=\frac{1}{2}e^{x^2}-\frac{5}{4}$이므로

$f(1)=\frac{2e-5}{4}$ 답 ①

유형 08 치환적분법; 로그함수 본책 153쪽

피적분함수가 $\frac{f(\ln x)}{x}$ 꼴인 경우

➡ $\ln x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}$이므로

$$\int \frac{f(\ln x)}{x}dx=\int f(t)\,dt$$

1036 $F(x)=\int f(x)dx=\int \frac{3}{x(\ln x)^2}dx$

$\ln x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}$이므로

$$F(x)=\int \frac{3}{x(\ln x)^2}dx=\int \frac{3}{t^2}dt=3\int t^{-2}dt$$
$$=-\frac{3}{t}+C=-\frac{3}{\ln x}+C$$

$F(e)=0$이므로 $\quad -3+C=0 \qquad \therefore C=3$

따라서 $F(x)=-\frac{3}{\ln x}+3$이므로

$F\left(\frac{1}{e}\right)=3+3=6$ 답 ④

1037 $f'(x)=\frac{1}{x\sqrt{\ln x+5}}$

$\ln x+5=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}$이므로

$$f(x)=\int \frac{1}{x\sqrt{\ln x+5}}dx=\int \frac{1}{\sqrt{t}}dt=\int t^{-\frac{1}{2}}dt$$
$$=2t^{\frac{1}{2}}+C=2\sqrt{t}+C$$
$$=2\sqrt{\ln x+5}+C \quad \cdots ❶$$

함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $\left(\frac{1}{e}, 1\right)$을 지나므로 $f\left(\frac{1}{e}\right)=1$에서

$2\sqrt{-1+5}+C=1 \qquad \therefore C=-3$

따라서 $f(x)=2\sqrt{\ln x+5}-3$이므로 $\cdots$ ❷

$f(e^4)=2\sqrt{4+5}-3=3$ $\cdots$ ❸

답 3

채점 기준	비율
❶ 부정적분을 구할 수 있다.	50 %
❷ $f(x)$를 구할 수 있다.	30 %
❸ $f(e^4)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

1038 $F(x)=xf(x)-2x\ln x$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f(x)=f(x)+xf'(x)-2\ln x-2x\cdot\frac{1}{x}$$
$$xf'(x)=2\ln x+2$$
$$\therefore f'(x)=\frac{2\ln x+2}{x}$$

$\ln x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}$이므로

$$f(x)=\int \frac{2\ln x+2}{x}dx=\int (2t+2)\,dt$$
$$=t^2+2t+C$$
$$=(\ln x)^2+2\ln x+C$$

$f(e)=1$이므로

$1+2+C=1 \qquad \therefore C=-2$

따라서 $f(x)=(\ln x)^2+2\ln x-2$이므로 $f(x)=6$에서

$(\ln x)^2+2\ln x-8=0, \qquad (\ln x+4)(\ln x-2)=0$

$\ln x=-4$ 또는 $\ln x=2$

$\therefore x=e^{-4}$ 또는 $x=e^2$

따라서 모든 x의 값의 곱은

$e^{-4}\cdot e^2=e^{-2}=\frac{1}{e^2}$ 답 ②

1039 $(x^2+1)f'(x)=6x\ln(x^2+1)$에서

$$f'(x)=\frac{6x\ln(x^2+1)}{x^2+1}$$

$\ln(x^2+1)=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=\frac{2x}{x^2+1}$이므로

$$f(x)=\int \frac{6x\ln(x^2+1)}{x^2+1}dx=\int t\cdot 3\,dt$$
$$=\frac{3}{2}t^2+C=\frac{3}{2}\{\ln(x^2+1)\}^2+C$$

$f(0)=-2$이므로 $\qquad C=-2$

$\therefore f(x)=\frac{3}{2}\{\ln(x^2+1)\}^2-2$

답 $f(x)=\frac{3}{2}\{\ln(x^2+1)\}^2-2$

유형 09 치환적분법; $\sin ax$, $\cos ax$ 꼴 본책 153쪽

0이 아닌 실수 a에 대하여 피적분함수가 $\sin ax$ 또는 $\cos ax$ 꼴인 경우

➡ $ax=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=a$이므로

$$\int \sin ax\,dx=\frac{1}{a}\int \sin t\,dt=-\frac{1}{a}\cos t+C$$
$$=-\frac{1}{a}\cos ax+C$$
$$\int \cos ax\,dx=\frac{1}{a}\int \cos t\,dt=\frac{1}{a}\sin t+C$$
$$=\frac{1}{a}\sin ax+C$$

1040 $\int(3-2\sin^2 x)dx=\int\{(1-2\sin^2 x)+2\}dx$

$=\int(\cos 2x+2)dx$

$=\frac{1}{2}\sin 2x+2x+C$

따라서 $a=\frac{1}{2}$, $b=2$이므로 $a+b=\frac{5}{2}$

답 $\frac{5}{2}$

1041 $f(x)=\int\sin 2x\cos^2 x\,dx+\int 2\sin^3 x\cos x\,dx$

$=\int\sin 2x\cos^2 x\,dx+\int\underbrace{\sin 2x\sin^2 x}_{2\sin x\cos x\cdot\sin^2 x}dx$

$=\int\sin 2x(\cos^2 x+\sin^2 x)dx$

$=\int\sin 2x\,dx=-\frac{1}{2}\cos 2x+C$

$f(\pi)=-\frac{1}{2}$이므로 $-\frac{1}{2}+C=-\frac{1}{2}$ $\therefore C=0$

따라서 $f(x)=-\frac{1}{2}\cos 2x$이므로

$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$

답 $\frac{1}{4}$

1042 $f(x)=\int(\sin 2x-\cos x)dx$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=\sin 2x-\cos x$

$=2\sin x\cos x-\cos x$

$=\cos x(2\sin x-1)$

$f'(x)=0$에서 $\cos x=0$ 또는 $\sin x=\frac{1}{2}$

$\therefore x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{\pi}{2}$ 또는 $x=\frac{5}{6}\pi$ ($\because 0<x<\pi$)

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{5}{6}\pi$	$\cdots$	π
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗	

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{5}{6}\pi$에서 극솟값을 갖고, $x=\frac{\pi}{2}$에서 극댓값을 갖는다. ⋯ ❶

한편

$f(x)=\int(\sin 2x-\cos x)dx$

$=-\frac{1}{2}\cos 2x-\sin x+C$

이고 극솟값이 $\frac{1}{4}$이므로 $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=f\left(\frac{5}{6}\pi\right)=\frac{1}{4}$에서

$-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+C=\frac{1}{4}$ $\therefore C=1$

$\therefore f(x)=-\frac{1}{2}\cos 2x-\sin x+1$ ⋯ ❷

따라서 $f(x)$의 극댓값은

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}-1+1=\frac{1}{2}$ ⋯ ❸

답 $\frac{1}{2}$

채점 기준	비율
❶ $f(x)$가 극값을 갖는 x의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ $f(x)$를 구할 수 있다.	40 %
❸ 극댓값을 구할 수 있다.	20 %

1043 $\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{f(x)}{x-\frac{\pi}{3}}=2a+3$에서 $x\to\frac{\pi}{3}$일 때 (분모) $\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to 0$이다.

즉 $\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}f(x)=0$이므로 $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=0$

$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{f(x)}{x-\frac{\pi}{3}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{3}\right)}{x-\frac{\pi}{3}}=f'\left(\frac{\pi}{3}\right)$이므로

$f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=2a+3$

$f'(x)=a\sin\frac{x}{2}$에서 $f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}a$이므로

$2a+3=\frac{1}{2}a$, $\frac{3}{2}a=-3$

$\therefore a=-2$

즉 $f'(x)=-2\sin\frac{x}{2}$이므로

$f(x)=\int\left(-2\sin\frac{x}{2}\right)dx=4\cos\frac{x}{2}+C$

$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=0$이므로

$2\sqrt{3}+C=0$ $\therefore C=-2\sqrt{3}$

따라서 $f(x)=4\cos\frac{x}{2}-2\sqrt{3}$이므로

$f(\pi)=-2\sqrt{3}$

답 ①

유형 10 치환적분법; 삼각함수

본책 154쪽

피적분함수가 $f(\sin x)\cos x$ 꼴인 경우

➡ $\sin x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=\cos x$이므로

$\int f(\sin x)\cos x\,dx=\int f(t)dt$

1044 $\int\frac{\sin^3 x}{1+\cos x}dx=\int\frac{\sin^2 x\cdot\sin x}{1+\cos x}dx$

$=\int\frac{(1-\cos^2 x)\sin x}{1+\cos x}dx$

$=\int\frac{(1+\cos x)(1-\cos x)\sin x}{1+\cos x}dx$

$=\int(1-\cos x)\sin x\,dx$

$1-\cos x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=\sin x$이므로

$\int(1-\cos x)\sin x\,dx=\int t\,dt=\frac{1}{2}t^2+C$

$=\frac{1}{2}(1-\cos x)^2+C$

답 ④

참고 치환적분법을 이용하지 않고 배각의 공식을 이용하여 다음과 같이 적분할 수도 있다.

$$\int(1-\cos x)\sin x\,dx=\int(\sin x-\sin x\cos x)dx$$
$$=\int\left(\sin x-\frac{1}{2}\sin 2x\right)dx$$
$$=-\cos x+\frac{1}{4}\cos 2x+C_1$$

이때 선택지에 위와 같은 $2x$의 삼각함수를 포함하는 식이 주어지지 않았으므로 다음과 같이 변형하면 답을 찾을 수 있다.

$$-\cos x+\frac{1}{4}\cos 2x+C_1=-\cos x+\frac{1}{4}(2\cos^2 x-1)+C_1$$
$$=\frac{1}{2}\cos^2 x-\cos x-\frac{1}{4}+C_1$$
$$=\frac{1}{2}(\cos x-1)^2-\underbrace{\frac{3}{4}+C_1}_{\text{하나의 적분상수 } C\text{로 나타낼 수 있다.}}$$
$$=\frac{1}{2}(1-\cos x)^2+C$$

문제에 선택지가 주어진 경우에는 답을 찾을 수 있는 방법으로 적분하는 것이 편리하다.

1045 $\tan x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=\sec^2 x$이므로

$$f(x)=\int\sec^2 x\tan x\,dx=\int t\,dt$$
$$=\frac{1}{2}t^2+C=\frac{1}{2}\tan^2 x+C$$

$f(0)=\frac{1}{2}$이므로 $\quad C=\frac{1}{2}$

따라서 $f(x)=\frac{1}{2}\tan^2 x+\frac{1}{2}$이므로

$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}\cdot(\sqrt{3})^2+\frac{1}{2}=2$ 답 ⑤

1046 $f(x)=\int\cos^3 x\,dx=\int\cos^2 x\cdot\cos x\,dx$

$$=\int(1-\sin^2 x)\cos x\,dx$$

$\sin x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=\cos x$이므로

$$f(x)=\int(1-\sin^2 x)\cos x\,dx=\int(1-t^2)dt$$
$$=t-\frac{1}{3}t^3+C=\sin x-\frac{1}{3}\sin^3 x+C$$

$f(\pi)=1$이므로 $\quad C=1$

따라서 $f(x)=\sin x-\frac{1}{3}\sin^3 x+1$이므로

$f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-1+\frac{1}{3}+1=\frac{1}{3}$ 답 $\frac{1}{3}$

1047 $f(x)=-\int\cot x\sqrt{\csc x}\,dx$

$$=-\int\frac{\csc x\cot x}{\sqrt{\csc x}}dx$$

$\csc x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=-\csc x\cot x$이므로

$$f(x)=-\int\frac{\csc x\cot x}{\sqrt{\csc x}}dx=\int\frac{1}{\sqrt{t}}dt=\int t^{-\frac{1}{2}}dt$$
$$=2t^{\frac{1}{2}}+C=2\sqrt{\csc x}+C \quad \cdots ❶$$

함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $\left(\frac{\pi}{2},\,2\right)$를 지나므로 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=2$에서

$2+C=2 \quad \therefore C=0$

따라서 $f(x)=2\sqrt{\csc x}$이므로 $\cdots$ ❷

$k=f\left(\frac{\pi}{6}\right)=2\sqrt{2}$ $\cdots$ ❸

답 $2\sqrt{2}$

채점 기준	비율
❶ 부정적분을 구할 수 있다.	50 %
❷ $f(x)$를 구할 수 있다.	30 %
❸ k의 값을 구할 수 있다.	20 %

유형 11 $\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx$ 꼴의 부정적분

본책 155쪽

$$\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\ln|f(x)|+C$$

1048 $(x^2+x+1)'=2x+1$이므로

$$f(x)=\int\frac{2x+1}{x^2+x+1}dx=\int\frac{(x^2+x+1)'}{x^2+x+1}dx$$
$$=\ln(x^2+x+1)+C \ (\because x^2+x+1>0)$$

$f(-1)=2$이므로 $\quad C=2$

따라서 $f(x)=\ln(x^2+x+1)+2$이므로

$f(1)=2+\ln 3$ 답 ③

1049 $(2-\cos x)'=\sin x$이므로

$$f(x)=\int\frac{\sin x}{2-\cos x}dx=\int\frac{(2-\cos x)'}{2-\cos x}dx$$
$$=\ln(2-\cos x)+C \ (\because 2-\cos x>0)$$

$f(0)=0$이므로 $\quad \ln(2-1)+C=0 \quad \therefore C=0$

따라서 $f(x)=\ln(2-\cos x)$이므로

$f(\pi)=\ln\{2-(-1)\}=\ln 3$ 답 $\ln 3$

1050 $\int\frac{2e^x}{e^x+1}dx$에서 $(e^x+1)'=e^x$이므로

$$\int\frac{2e^x}{e^x+1}dx=2\int\frac{(e^x+1)'}{e^x+1}dx$$
$$=2\ln(e^x+1)+C_1 \ (\because e^x+1>0)$$

$\int\frac{3^x\ln 3}{3^x+1}dx$에서 $(3^x+1)'=3^x\ln 3$이므로

$$\int\frac{3^x\ln 3}{3^x+1}dx=\int\frac{(3^x+1)'}{3^x+1}dx$$
$$=\ln(3^x+1)+C_2 \ (\because 3^x+1>0)$$

$\therefore f(x)=2\ln(e^x+1)+\ln(3^x+1)+C$ $\cdots$ ❶

$f(0)=\ln 2$이므로 $\quad 2\ln 2+\ln 2+C=\ln 2 \quad \therefore C=-2\ln 2$

따라서 $f(x)=2\ln(e^x+1)+\ln(3^x+1)-2\ln 2$이므로 $\cdots$ ❷

$f(1)=2\ln(e+1)+\underbrace{\ln 4}_{2\ln 2}-2\ln 2=2\ln(e+1)$

$\therefore a=2$ $\cdots$ ❸

답 2

채점 기준	비율
❶ 부정적분을 구할 수 있다.	60 %
❷ $f(x)$를 구할 수 있다.	20 %
❸ a의 값을 구할 수 있다.	20 %

1051 $f'(x)=2f(x)$에서 $\dfrac{f'(x)}{f(x)}=2$이므로

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx=\int 2\,dx$$

$$\ln f(x)=2x+C\ (\because f(x)>0)$$

$$\therefore f(x)=e^{2x+C}$$

또 $f'(x)=2f(x)$의 양변에 $x=0$을 대입하면

$$f'(0)=2f(0)$$

$$2=2f(0)\qquad \therefore f(0)=1$$

즉 $e^C=1$이므로 $\quad C=0$

따라서 $f(x)=e^{2x}$이므로 $\quad f(1)=e^2$

답 ⑤

1052 $g(x)$는 함수 $f(x)$의 역함수이므로

$$g'(f(x))=\frac{1}{f'(x)}\ (f'(x)\neq 0)$$

$g(f(x))=x$의 양변을 x에 대하여 미분하면 $g'(f(x))f'(x)=1$

조건 (가)에서

$$\frac{f(x)}{f'(x)}=\frac{1}{\sin x+2},\qquad \frac{f'(x)}{f(x)}=\sin x+2$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx=\int(\sin x+2)dx$$

$$\therefore \ln|f(x)|=-\cos x+2x+C$$

조건 (나)에서 $f(0)=1$이므로

$$0=-1+C\qquad \therefore C=1$$

따라서 $\ln|f(x)|=-\cos x+2x+1$이므로

$$|f(x)|=e^{-\cos x+2x+1}$$

$\therefore f(x)=e^{-\cos x+2x+1}$ 또는 $f(x)=-e^{-\cos x+2x+1}$

그런데 $f(0)=1$이므로 $\quad f(x)=e^{-\cos x+2x+1}$

$$\therefore f(\pi)=e^{2\pi+2}$$

답 ⑤

유형 12 유리함수의 부정적분 ; (분자의 차수) ≥ (분모의 차수)

본책 156쪽

피적분함수가 (분자의 차수) ≥ (분모의 차수)인 유리함수인 경우에는 분자를 분모로 나누어 몫과 나머지의 꼴로 나타낸 후 부정적분을 구한다.

1053 $f'(x)=\dfrac{2x^2+x+2}{x+1}=2x-1+\dfrac{3}{x+1}$이므로

$$f(x)=\int\left(2x-1+\frac{3}{x+1}\right)dx$$

$$=x^2-x+3\ln|x+1|+C$$

함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(0,\ 1)$을 지나므로 $f(0)=1$에서

$$C=1$$

따라서 $f(x)=x^2-x+3\ln|x+1|+1$이므로

$$f(1)=3\ln 2+1$$

답 ⑤

1054 $f'(x)=\dfrac{3x+11}{x+4}=3-\dfrac{1}{x+4}$이므로

$$f(x)=\int\left(3-\frac{1}{x+4}\right)dx$$

$$=3x-\ln|x+4|+C$$

$f(-3)=0$이므로

$$-9+C=0\qquad \therefore C=9$$

따라서 $f(x)=3x-\ln|x+4|+9$이므로

$$f(0)=9-\ln 4$$

답 $9-\ln 4$

1055 $y=\dfrac{1+x}{2-x}$로 놓으면 $\quad 2y-xy=1+x$

$$(y+1)x=2y-1,\qquad x=\frac{2y-1}{y+1}$$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$이므로

$$g(x)=\frac{2x-1}{x+1}\qquad \cdots ❶$$

$$\therefore \int g(x)\,dx=\int\frac{2x-1}{x+1}dx=\int\left(2-\frac{3}{x+1}\right)dx$$

$$=2x-3\ln|x+1|+C\qquad \cdots ❷$$

답 $2x-3\ln|x+1|+C$

채점 기준	비율
❶ $g(x)$를 구할 수 있다.	40 %
❷ $\int g(x)dx$를 구할 수 있다.	60 %

유형 13 유리함수의 부정적분 ; (분자의 차수) < (분모의 차수)

본책 156쪽

피적분함수가 (분자의 차수) < (분모의 차수)인 유리함수이고 분모가 인수분해되는 경우에는 피적분함수를 간단한 유리함수의 합 또는 차로 나타낸 후 부정적분을 구한다.

1056 $\dfrac{2x}{x^2+3x+2}=\dfrac{2x}{(x+1)(x+2)}=\dfrac{a}{x+1}+\dfrac{b}{x+2}$로 놓으면

$\dfrac{a}{x+1}+\dfrac{b}{x+2}=\dfrac{(a+b)x+2a+b}{(x+1)(x+2)}$이므로

$$2x=(a+b)x+2a+b$$

위의 등식은 x에 대한 항등식이므로

$$a+b=2,\ 2a+b=0$$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$$a=-2,\ b=4$$

$$\therefore \int\frac{2x}{x^2+3x+2}dx=\int\left(-\frac{2}{x+1}+\frac{4}{x+2}\right)dx$$

$$=-2\ln|x+1|+4\ln|x+2|+C$$

답 ④

1057 $f(x)=\displaystyle\int\frac{x-3}{x^2-x-2}dx+\int\frac{6-x}{x^2-x-2}dx$

$$=\int\left(\frac{x-3}{x^2-x-2}+\frac{6-x}{x^2-x-2}\right)dx$$

$$=\int\frac{3}{x^2-x-2}dx=\int\frac{3}{(x-2)(x+1)}dx$$

$$=\int\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+1}\right)dx$$

$$=\ln|x-2|-\ln|x+1|+C$$

$$=\ln\left|\frac{x-2}{x+1}\right|+C$$

$f\left(\frac{1}{2}\right)=0$이므로 $\quad C=0$

따라서 $f(x)=\ln\left|\frac{x-2}{x+1}\right|$이므로

$f(0)=\ln|-2|=\ln 2$ 답 $\ln 2$

1058 $f'(x)=\frac{1}{x^2+4x}$이므로

$$\begin{aligned}f(x)&=\int\frac{1}{x^2+4x}\,dx\\&=\int\frac{1}{x(x+4)}\,dx\\&=\frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+4}\right)dx\\&=\frac{1}{4}(\ln|x|-\ln|x+4|)+C\\&=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x}{x+4}\right|+C\end{aligned}$$

함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(-2,\ 1)$을 지나므로 $f(-2)=1$에서 $\quad 0+C=1 \quad \therefore C=1$

따라서 $f(x)=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x}{x+4}\right|+1$이므로

$a=f(-1)=\frac{1}{4}\ln\frac{1}{3}+1=1-\frac{1}{4}\ln 3$ 답 ②

1059 $$\begin{aligned}f(x)&=\int\frac{2}{4x^2-1}\,dx\\&=\int\frac{2}{(2x-1)(2x+1)}\,dx\\&=\int\left(\frac{1}{2x-1}-\frac{1}{2x+1}\right)dx\\&=\frac{1}{2}\int\left(\frac{2}{2x-1}-\frac{2}{2x+1}\right)dx\\&=\frac{1}{2}(\ln|2x-1|-\ln|2x+1|)+C\end{aligned}$$ ··· ❶

$f(0)=0$이므로 $\quad C=0$

따라서 $f(x)=\frac{1}{2}(\ln|2x-1|-\ln|2x+1|)$이므로 ··· ❷

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{15}f(k)&=\sum_{k=1}^{15}\frac{1}{2}(\ln|2k-1|-\ln|2k+1|)\\&=\frac{1}{2}\{(\ln 1-\ln 3)+(\ln 3-\ln 5)+(\ln 5-\ln 7)\\&\qquad+\cdots+(\ln 29-\ln 31)\}\\&=\frac{1}{2}(\ln 1-\ln 31)\\&=-\frac{1}{2}\ln 31\end{aligned}$$ ··· ❸

답 $-\frac{1}{2}\ln 31$

채점 기준	비율
❶ 부정적분을 구할 수 있다.	50 %
❷ $f(x)$를 구할 수 있다.	20 %
❸ $\sum_{k=1}^{15}f(k)$의 값을 구할 수 있다.	30 %

1060 $1-e^x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=-e^x=t-1$이므로

$$\begin{aligned}f(x)&=\int\frac{1}{1-e^x}\,dx=\int\frac{1}{t}\cdot\frac{1}{t-1}\,dt\\&=\int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t}\right)dt\\&=\ln|t-1|-\ln|t|+C\\&=\ln\left|\frac{t-1}{t}\right|+C=\ln\left|\frac{-e^x}{1-e^x}\right|+C\\&=\ln\left|\frac{e^x}{e^x-1}\right|+C\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore f(2)-f(1)&=\left(\ln\frac{e^2}{e^2-1}+C\right)-\left(\ln\frac{e}{e-1}+C\right)\\&=\ln\frac{e^2}{e^2-1}-\ln\frac{e}{e-1}=\ln\left(\frac{e^2}{e^2-1}\cdot\frac{e-1}{e}\right)\\&=\ln\frac{e}{e+1}\end{aligned}$$

답 ①

1061 $f(x)=\int\frac{1}{\sin x}\,dx=\int\frac{\sin x}{\sin^2 x}\,dx=\int\frac{\sin x}{1-\cos^2 x}\,dx$

$\cos x=t\,(-1<t<1)$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=-\sin x$이므로

$$\begin{aligned}f(x)&=\int\frac{\sin x}{1-\cos^2 x}\,dx=\int\frac{1}{t^2-1}\,dt\\&=\int\frac{1}{(t-1)(t+1)}\,dt=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)dt\\&=\frac{1}{2}(\underline{\ln|t-1|-\ln|t+1|})+C\end{aligned}$$

$-1<t<1$에서 $-2<t-1<0$, $0<t+1<2$

$$\begin{aligned}&=\frac{1}{2}\{\ln(1-t)-\ln(t+1)\}+C\\&=\frac{1}{2}\ln\frac{1-t}{1+t}+C\\&=\frac{1}{2}\ln\frac{1-\cos x}{1+\cos x}+C\end{aligned}$$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$이므로 $\quad C=0$

따라서 $f(x)=\frac{1}{2}\ln\frac{1-\cos x}{1+\cos x}$이므로

$f\left(\frac{2}{3}\pi\right)=\frac{1}{2}\ln\frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\ln 3$ 답 $\frac{1}{2}\ln 3$

다른 풀이 $$\begin{aligned}f(x)&=\int\frac{1}{\sin x}\,dx=\int\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}\,dx\\&=\int\frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}\cdot\frac{\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\,dx=\int\frac{\sec^2\frac{x}{2}}{2\tan\frac{x}{2}}\,dx\end{aligned}$$

$\left(\tan\frac{x}{2}\right)'=\frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}$이므로

$$\begin{aligned}f(x)&=\int\frac{\sec^2\frac{x}{2}}{2\tan\frac{x}{2}}\,dx=\int\frac{\left(\tan\frac{x}{2}\right)'}{\tan\frac{x}{2}}\,dx\\&=\ln\left(\tan\frac{x}{2}\right)+C\ \left(\because \underline{\tan\frac{x}{2}>0}\right)\end{aligned}$$

$0<x<\pi$에서 $0<\frac{x}{2}<\frac{\pi}{2}$이므로 $\tan\frac{x}{2}>0$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$이므로 $\quad C=0$

따라서 $f(x)=\ln\left(\tan\frac{x}{2}\right)$이므로

$f\left(\frac{2}{3}\pi\right)=\ln\sqrt{3}=\frac{1}{2}\ln 3$

유형 14 **부분적분법 (1)** 본책 157쪽

피적분함수가 두 함수의 곱의 꼴로 되어 있고 치환적분법을 이용할 수 없을 때, 미분하기 쉬운 것을 $f(x)$, 적분하기 쉬운 것을 $g'(x)$로 놓고 부분적분법을 이용한다.

$$\Rightarrow \int \underbrace{f(x)}_{\text{미분하기 쉬운 함수}}\overbrace{g'(x)}^{\text{적분하기 쉬운 함수}}dx=f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)\,dx$$

1062 $u(x)=x-1$, $v'(x)=e^x$으로 놓으면

$u'(x)=1$, $v(x)=e^x$

$\therefore f(x)=\int (x-1)e^x\,dx$

$=(x-1)e^x-\int e^x\,dx$

$=(x-1)e^x-e^x+C$

$=(x-2)e^x+C$

$f(0)=-2$이므로

$-2+C=-2$ $\quad\therefore C=0$

따라서 $f(x)=(x-2)e^x$이므로

$f(3)=e^3$

답 e^3

1063 $u(x)=\ln(x+1)$, $v'(x)=1$로 놓으면

$u'(x)=\frac{1}{x+1}$, $v(x)=x$

$\therefore \int \ln(x+1)dx=x\ln(x+1)-\int \frac{x}{x+1}\,dx$

$=x\ln(x+1)-\int\left(1-\frac{1}{x+1}\right)dx$

$=x\ln(x+1)-x+\ln\underbrace{(x+1)}_{x>-1\text{에서 } x+1>0}+C$

$=(x+1)\ln(x+1)-x+C$

따라서 $f(x)=x+1$이므로

$f(15)=16$

답 ③

1064 $\{e^{f(x)}\}'=x\sin x\cdot e^{f(x)}$에서

$e^{f(x)}\cdot f'(x)=x\sin x\cdot e^{f(x)}$

$\therefore\ f'(x)=x\sin x\ (\because\ e^{f(x)}>0)$ ······ ❶

$u(x)=x$, $v'(x)=\sin x$로 놓으면

$u'(x)=1$, $v(x)=-\cos x$

$\therefore f(x)=\int x\sin x\,dx=x\cdot(-\cos x)-\int(-\cos x)dx$

$=-x\cos x+\sin x+C$ ······ ❷

$f(0)=-1$이므로 $\quad C=-1$

따라서 $f(x)=-x\cos x+\sin x-1$이므로 ······ ❸

$f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-1-1=-2$ ······ ❹

답 -2

채점 기준	비율
❶ $f'(x)$를 구할 수 있다.	20 %
❷ $f'(x)$의 부정적분을 구할 수 있다.	40 %
❸ $f(x)$를 구할 수 있다.	20 %
❹ $f\left(-\frac{\pi}{2}\right)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

1065 $u(x)=\ln(\sin x)$, $v'(x)=\cos x$로 놓으면

$u'(x)=\frac{\cos x}{\sin x}$, $v(x)=\sin x$

$\therefore F(x)=\int \cos x\cdot\ln(\sin x)dx$

$=\ln(\sin x)\cdot\sin x-\int\frac{\cos x}{\sin x}\cdot\sin x\,dx$

$=\sin x\cdot\ln(\sin x)-\int\cos x\,dx$

$=\sin x\cdot\ln(\sin x)-\sin x+C$

$F\left(\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}\ln 2$이므로

$-\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{2}+C=-\frac{1}{2}\ln 2$ $\quad\therefore C=\frac{1}{2}$

따라서 $F(x)=\sin x\cdot\ln(\sin x)-\sin x+\frac{1}{2}$이므로

$F\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$

답 ②

다른 풀이 $\sin x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=\cos x$이므로

$F(x)=\int\ln t\,dt$

$u(t)=\ln t$, $v'(t)=1$로 놓으면

$u'(t)=\frac{1}{t}$, $v(t)=t$

$\therefore F(x)=\int\ln t\,dt=t\ln t-\int\frac{1}{t}\cdot t\,dt$

$=t\ln t-t+C$

$=\sin x\cdot\ln(\sin x)-\sin x+C$

1066 $u(t)=5t$, $v'(t)=e^{-\frac{t}{3}}$으로 놓으면

$u'(t)=5$, $v(t)=-3e^{-\frac{t}{3}}$

$\therefore D(t)=\int 5te^{-\frac{t}{3}}dt$

$=-15te^{-\frac{t}{3}}-\int 5\cdot(-3e^{-\frac{t}{3}})dt$

$=-15te^{-\frac{t}{3}}-45e^{-\frac{t}{3}}+C$

$=-15(t+3)e^{-\frac{t}{3}}+C$

$D(0)=5$이므로 $\quad -45+C=5$ $\quad\therefore C=50$

따라서 $D(t)=-15(t+3)e^{-\frac{t}{3}}+50$이므로

$D(3)=-\frac{90}{e}+50$

답 $\left(-\frac{90}{e}+50\right)\mu g/m^3$

1067 $\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=g'(x)$이므로 조건 (가)에서

$g'(x)=f(x)$

조건 (나)의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g'(x)=f(x)+xf'(x)-2x\ln x-x^2\cdot\frac{1}{x}$

$f(x)=f(x)+xf'(x)-2x\ln x-x$

$xf'(x)=2x\ln x+x$

$\therefore\ f'(x)=2\ln x+1\ (\because\ x>0)$ ······ ㉠

$u(x)=2\ln x+1$, $v'(x)=1$로 놓으면

$u'(x)=\frac{2}{x}$, $v(x)=x$

$\therefore f(x)=\int(2\ln x+1)dx$

$=x(2\ln x+1)-\int\frac{2}{x}\cdot x\,dx$

$=2x\ln x+x-2x+C$

$=2x\ln x-x+C$

이때 ㉠에서 $f'(1)=1$이므로 조건 (다)에서

$f(1)=2f'(1)=2$

$-1+C=2$ $\quad\therefore C=3$

따라서 $f(x)=2x\ln x-x+3$이므로 조건 (나)에 의하여

$g(e)=ef(e)-e^2$

$=e(e+3)-e^2=3e$

답 $3e$

유형 15 부분적분법 (2)

본책 158쪽

부분적분법을 한 번 적용하여 부정적분을 구할 수 없을 때에는 부분적분법을 한 번 더 적용한다.

1068 $g(x)=x^2$, $h'(x)=\sin x$로 놓으면

$g'(x)=2x$, $h(x)=-\cos x$

$\therefore f(x)=\int x^2\sin x\,dx$

$=-x^2\cos x+2\int x\cos x\,dx$ ...... ㉠

$\int x\cos x\,dx$에서 $u(x)=x$, $v'(x)=\cos x$로 놓으면

$u'(x)=1$, $v(x)=\sin x$

$\therefore \int x\cos x\,dx=x\sin x-\int\sin x\,dx$

$=x\sin x+\cos x+C_1$ ...... ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$f(x)=-x^2\cos x+2(x\sin x+\cos x+C_1)$

$=(2-x^2)\cos x+2x\sin x+C$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=2\pi$이므로 $\quad\pi+C=2\pi$ $\quad\therefore C=\pi$

따라서 $f(x)=(2-x^2)\cos x+2x\sin x+\pi$이므로

$f(0)=\pi+2$

답 ③

1069 $h(x)=\sin x$, $k'(x)=e^x$으로 놓으면

$h'(x)=\cos x$, $k(x)=e^x$

$\therefore f(x)=\int e^x\sin x\,dx$

$=e^x\sin x-\int e^x\cos x\,dx$ ...... ㉠

$\int e^x\cos x\,dx$에서 $u(x)=\cos x$, $v'(x)=e^x$으로 놓으면

$u'(x)=-\sin x$, $v(x)=e^x$

$\therefore \int e^x\cos x\,dx=e^x\cos x+\int e^x\sin x\,dx$

$=e^x\cos x+f(x)+C_1$ ...... ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$f(x)=e^x\sin x-\{e^x\cos x+f(x)+C_1\}$

$2f(x)=e^x(\sin x-\cos x)-C_1$

$\therefore f(x)=\frac{e^x}{2}(\sin x-\cos x)+C$

$f(0)=-\frac{1}{2}$이므로 $\quad -\frac{1}{2}+C=-\frac{1}{2}$ $\quad\therefore C=0$

$\therefore f(x)=\frac{e^x}{2}(\sin x-\cos x)$

따라서 $f(x)=\frac{e^x}{2}g(x)$에서 $g(x)=\sin x-\cos x$이므로

$g(\pi)=0-(-1)=1$

답 ③

1070 $f'(x)=e^{-x}\cos 2x$이므로 $g(x)=\cos 2x$, $h'(x)=e^{-x}$으로 놓으면

$g'(x)=-2\sin 2x$, $h(x)=-e^{-x}$

$\therefore f(x)=\int e^{-x}\cos 2x\,dx$

$=-e^{-x}\cos 2x-2\int e^{-x}\sin 2x\,dx$ ...... ㉠

$\int e^{-x}\sin 2x\,dx$에서 $u(x)=\sin 2x$, $v'(x)=e^{-x}$으로 놓으면

$u'(x)=2\cos 2x$, $v(x)=-e^{-x}$

$\therefore \int e^{-x}\sin 2x\,dx=-e^{-x}\sin 2x+2\int e^{-x}\cos 2x\,dx$

$=-e^{-x}\sin 2x+2f(x)+C_1$ ...... ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$f(x)=-e^{-x}\cos 2x-2\{-e^{-x}\sin 2x+2f(x)+C_1\}$

$5f(x)=e^{-x}(2\sin 2x-\cos 2x)-2C_1$

$\therefore f(x)=\frac{2\sin 2x-\cos 2x}{5e^x}+C$ ··· ❶

함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $\left(0,\ -\frac{1}{5}\right)$을 지나므로

$f(0)=-\frac{1}{5}$에서

$-\frac{1}{5}+C=-\frac{1}{5}$ $\quad\therefore C=0$

따라서 $f(x)=\frac{2\sin 2x-\cos 2x}{5e^x}$이므로 ··· ❷

$f(\pi)=-\frac{1}{5e^\pi}$ ··· ❸

답 $-\frac{1}{5e^\pi}$

채점 기준	비율
❶ 부정적분을 구할 수 있다.	50 %
❷ $f(x)$를 구할 수 있다.	30 %
❸ $f(\pi)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

1071 1st $f(x)$를 구한다.

$x>0$에서

$f(x)=\int\left(2-\frac{3}{x^2}\right)dx=\int(2-3x^{-2})\,dx=2x+\frac{3}{x}+C_1$

$f(1)=5$이므로 $\quad 2+3+C_1=5$ $\quad\therefore C_1=0$

$\therefore f(x)=2x+\frac{3}{x}$

2nd $g(x)$를 구한다.

$x<0$에서 조건 ㈎에 의하여

$$g'(x)=f'(-x)=2-\frac{3}{(-x)^2}=2-\frac{3}{x^2}$$

이므로

$$g(x)=\int\left(2-\frac{3}{x^2}\right)dx=\int(2-3x^{-2})\,dx$$
$$=2x+\frac{3}{x}+C_2$$

조건 ㈏에서 $f(2)+g(-2)=9$이므로

$$\left(4+\frac{3}{2}\right)+\left(-4-\frac{3}{2}+C_2\right)=9 \qquad \therefore C_2=9$$

$$\therefore g(x)=2x+\frac{3}{x}+9$$

3rd $g(-3)$의 값을 구한다.

$g(-3)=-6-1+9=2$ 답 ②

1072 1st $f_n(x)$를 구한다.

$f_1(x)=\int 3^{3x}\,dx=\frac{3^{3x}}{3\ln 3}+C_1$이고, $f_1(0)=\frac{1}{3\ln 3}$이므로

$$\frac{1}{3\ln 3}+C_1=\frac{1}{3\ln 3} \qquad \therefore C_1=0$$

$$\therefore f_1(x)=\frac{3^{3x}}{3\ln 3}$$

$f_2(x)=\int f_1(x)\,dx=\int\frac{3^{3x}}{3\ln 3}\,dx=\frac{3^{3x}}{(3\ln 3)^2}+C_2$이고,

$f_2(0)=\left(\frac{1}{3\ln 3}\right)^2$이므로

$$\frac{1}{(3\ln 3)^2}+C_2=\left(\frac{1}{3\ln 3}\right)^2 \qquad \therefore C_2=0$$

$$\therefore f_2(x)=\frac{3^{3x}}{(3\ln 3)^2}$$

$f_3(x)=\int f_2(x)dx=\int\frac{3^{3x}}{(3\ln 3)^2}\,dx=\frac{3^{3x}}{(3\ln 3)^3}+C_3$이고,

$f_3(0)=\left(\frac{1}{3\ln 3}\right)^3$이므로

$$\frac{1}{(3\ln 3)^3}+C_3=\left(\frac{1}{3\ln 3}\right)^3 \qquad \therefore C_3=0$$

$$\therefore f_3(x)=\frac{3^{3x}}{(3\ln 3)^3}$$

$$\vdots$$

$$\therefore f_n(x)=\frac{3^{3x}}{(3\ln 3)^n}$$

2nd $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(1)$의 값을 구한다.

$$\sum_{n=1}^{\infty}f_n(1)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{27}{(3\ln 3)^n}$$

첫째항이 $\frac{27}{3\ln 3}$, 공비가 $\frac{1}{3\ln 3}$인 등비급수

$$=\frac{\frac{27}{3\ln 3}}{1-\frac{1}{3\ln 3}}$$
$$=\frac{27}{3\ln 3-1}$$

3rd $a+b$의 값을 구한다.

$a=27$, $b=3$이므로

$a+b=30$ 답 30

1073 1st 조건 ㈎의 등식의 양변의 부정적분을 구하여 등식을 세운다.

조건 ㈎의 좌변에서 $f(x)=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=f'(x)$이므로

$$\int 2\{f(x)\}^2f'(x)dx=\int 2t^2\,dt=\frac{2}{3}t^3+C_1$$
$$=\frac{2}{3}\{f(x)\}^3+C_1$$

조건 ㈎의 우변에서 $f(2x+1)=s$로 놓으면 $\frac{ds}{dx}=2f'(2x+1)$

이므로

$$\int\{f(2x+1)\}^2f'(2x+1)dx=\int s^2\cdot\frac{1}{2}ds=\frac{1}{6}s^3+C_2$$
$$=\frac{1}{6}\{f(2x+1)\}^3+C_2$$

$\frac{2}{3}\{f(x)\}^3+C_1=\frac{1}{6}\{f(2x+1)\}^3+C_2$이므로

$$4\{f(x)\}^3=\{f(2x+1)\}^3+C \qquad \cdots\cdots ㉠$$

2nd C의 값을 구한다.

조건 ㈏에서 $f\left(-\frac{1}{8}\right)=1$이므로 $x=-\frac{1}{8}$을 ㉠의 양변에 대입하면

$$4\cdot 1^3=\left\{f\left(\frac{3}{4}\right)\right\}^3+C \qquad \therefore \left\{f\left(\frac{3}{4}\right)\right\}^3=4-C$$

$x=\frac{3}{4}$을 ㉠의 양변에 대입하면

$$4(4-C)=\left\{f\left(\frac{5}{2}\right)\right\}^3+C$$
$$\therefore \left\{f\left(\frac{5}{2}\right)\right\}^3=16-5C$$

$x=\frac{5}{2}$를 ㉠의 양변에 대입하면

$$4(16-5C)=\{f(6)\}^3+C$$

이때 조건 ㈏에서 $f(6)=2$이므로

$$64-20C=8+C, \qquad 21C=56$$
$$\therefore C=\frac{8}{3}$$

3rd $f(-1)$의 값을 구한다.

㉠에서 $4\{f(x)\}^3=\{f(2x+1)\}^3+\frac{8}{3}$이므로 $x=-1$을 양변에 대입하면

$$4\{f(-1)\}^3=\{f(-1)\}^3+\frac{8}{3}, \qquad \{f(-1)\}^3=\frac{8}{9}$$

$$\therefore f(-1)=\frac{2}{\sqrt[3]{3^2}}=\frac{2\sqrt[3]{3}}{3}$$ 답 ④

1074 1st $f(0)$, $f'(0)$의 값을 구한다.

조건 ㈎에서 $x\to 0$일 때 (분모) $\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to 0$이다.

즉 $\lim_{x\to 0}\left\{f(x)+e^3-\frac{1}{2}\right\}=0$이므로

$$f(0)=-e^3+\frac{1}{2}$$

$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+e^3-\frac{1}{2}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)$이므로

$$f'(0)=-1$$

2nd $f'(x)$의 부정적분을 구한다.

조건 (나)에서 $f'(0)=a$이므로 $a=-1$

$\therefore f'(x)=(x-1)e^{x^2-2x}$

$x^2-2x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=2x-2=2(x-1)$이므로

$$f(x)=\int(x-1)e^{x^2-2x}dx=\int\frac{1}{2}e^t\,dt$$

$$=\frac{1}{2}e^t+C=\frac{1}{2}e^{x^2-2x}+C$$

3rd $f(x)$를 구한다.

$f(0)=-e^3+\frac{1}{2}$이므로

$\frac{1}{2}+C=-e^3+\frac{1}{2}$ $\quad\therefore C=-e^3$

$\therefore f(x)=\frac{1}{2}e^{x^2-2x}-e^3$

4th $f(a)$의 값을 구한다.

$f(a)=f(-1)=\frac{1}{2}e^3-e^3=-\frac{1}{2}e^3$ 답 ②

1075 1st $f(x)$를 구한다.

$\ln x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}$이므로

$$f(x)=\int\frac{1}{x}\sin(\ln x)\,dx=\int\sin t\,dt$$

$$=-\cos t+C=-\cos(\ln x)+C$$

$f(e^\pi)=2$이므로

$-\cos\pi+C=2$ $\quad\therefore C=1$

$\therefore f(x)=-\cos(\ln x)+1$

2nd $a_1a_2a_3$의 값을 구한다.

방정식 $f(x)=0$, 즉 $-\cos(\ln x)+1=0$에서

$\cos(\ln x)=1$

이때 $x>1$에서 $\ln x>0$이므로

$\ln x=2n\pi$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ $\quad\therefore x=e^{2n\pi}$

따라서 $a_n=e^{2n\pi}$이므로

$a_1a_2a_3=e^{2\pi}\cdot e^{4\pi}\cdot e^{6\pi}=e^{12\pi}$ 답 $e^{12\pi}$

1076 1st $2x=t$로 놓고 $\frac{f'(t)}{f(t)}$를 구한다.

$2x^2f(2x)=\int(8x^2+3)f'(2x)\,dx$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$4xf(2x)+4x^2f'(2x)=(8x^2+3)f'(2x)$

$(4x^2+3)f'(2x)=4xf(2x)$

$2x=t$로 놓으면 $\quad(t^2+3)f'(t)=2tf(t)$

이때 $f(t)>0$이므로

$\frac{f'(t)}{f(t)}=\frac{2t}{t^2+3}$

2nd $f(3)$의 값을 구한다.

$\int\frac{f'(t)}{f(t)}dt=\int\frac{2t}{t^2+3}dt=\int\frac{(t^2+3)'}{t^2+3}dt$이므로

$\ln f(t)=\ln(t^2+3)+C$ $(\because t^2+3>0)$

$f(1)=8$이므로

$\ln 8=\ln 4+C$ $\quad\therefore C=\ln 2$

따라서 $\ln f(t)=\ln(t^2+3)+\ln 2=\ln(2t^2+6)$이므로

$\ln f(3)=\ln 24$ $\quad\therefore f(3)=24$ 답 ④

1077 1st $\frac{f'(x)+g'(x)}{f(x)+g(x)}$를 구한다.

$f'(x)-3f(x)=0$, $g'(x)-3g(x)=0$을 변끼리 더하면

$f'(x)+g'(x)-3\{f(x)+g(x)\}=0$

$\therefore f'(x)+g'(x)=3\{f(x)+g(x)\}$

이때 $f(x)+g(x)>0$이므로

$\frac{f'(x)+g'(x)}{f(x)+g(x)}=3$

2nd $f(x)+g(x)$를 구한다.

$\int\frac{f'(x)+g'(x)}{f(x)+g(x)}dx=\int 3\,dx$이므로

$\ln\{f(x)+g(x)\}=3x+C$

$f(0)=0$, $g(0)=e$이므로 $\quad C=1$

즉 $\ln\{f(x)+g(x)\}=3x+1$이므로

$f(x)+g(x)=e^{3x+1}$

3rd x의 값을 구한다.

따라서 $f(x)+g(x)=1$에서 $\quad e^{3x+1}=1$

$3x+1=0$ $\quad\therefore x=-\frac{1}{3}$ 답 $-\frac{1}{3}$

1078 1st 등식의 좌변의 부정적분을 구한다.

$$\int\frac{T'(t)}{T(t)-20}dt=\int\frac{\{T(t)-20\}'}{T(t)-20}dt$$

$$=\ln|T(t)-20|+C_1$$

이므로 주어진 등식은

$\ln|T(t)-20|+C_1=kt+C$

$\therefore \ln|T(t)-20|=kt+C_2$

2nd C_2의 값을 구한다.

$T(0)=100$이므로 양변에 $t=0$을 대입하면

$\ln|100-20|=C_2$ $\quad\therefore C_2=\ln 80$

3rd k의 값을 구한다.

$T(3)=60$이므로 $\ln|T(t)-20|=kt+\ln 80$의 양변에 $t=3$을 대입하면

$\ln|60-20|=3k+\ln 80,\quad 3k=\ln 40-\ln 80$

$\therefore k=\frac{1}{3}\ln\frac{1}{2}=-\frac{\ln 2}{3}$ 답 ①

1079 1st $\left\{\frac{f(x)}{x}\right\}'$의 부정적분을 구한다.

$x\neq 0$일 때, $\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=\left\{\frac{f(x)}{x}\right\}'$이므로 조건 (나)에서

$\left\{\frac{f(x)}{x}\right\}'=xe^x$

이때 $u(x)=x$, $v'(x)=e^x$으로 놓으면

$u'(x)=1$, $v(x)=e^x$

$$\therefore \frac{f(x)}{x}=\int xe^x\,dx=xe^x-\int e^x\,dx$$

$$=e^x(x-1)+C$$

2nd $f(x)$를 구한다.

조건 (가)에서 $f(1)=0$이므로 $x=1$을 양변에 대입하면

$$C=0$$

$$\therefore \frac{f(x)}{x}=e^x(x-1)$$

$$\therefore f(x)=xe^x(x-1)$$

3rd $f(3)\times f(-3)$의 값을 구한다.

$f(3)\times f(-3)=6e^3\cdot 12e^{-3}=72$ 답 72

1080 1st $f'(x)$를 변형한다.

$$f'(x)=\sqrt{2}e^x\sin\left(x+\frac{3}{4}\pi\right)$$
$$=\sqrt{2}e^x\left(\sin x\cos\frac{3}{4}\pi+\cos x\sin\frac{3}{4}\pi\right)$$
$$=\sqrt{2}e^x\left\{\sin x\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\cos x\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$$
$$=e^x(\cos x-\sin x)$$

2nd $f'(x)$의 부정적분을 구한다.

$$f(x)=\int e^x(\cos x-\sin x)dx$$
$$=\int e^x\cos x\,dx-\int e^x\sin x\,dx \quad \cdots\cdots ㉠$$

$\int e^x\cos x\,dx$에서 $u(x)=\cos x$, $v'(x)=e^x$으로 놓으면

$$u'(x)=-\sin x,\ v(x)=e^x$$

$$\therefore \int e^x\cos x\,dx=e^x\cos x+\int e^x\sin x\,dx \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$f(x)=e^x\cos x+\int e^x\sin x\,dx-\int e^x\sin x\,dx$$
$$=e^x\cos x+C$$

3rd $f(\pi)$의 값을 구한다.

함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(0,\ 2)$를 지나므로 $f(0)=2$에서

$1+C=2 \quad \therefore C=1$

따라서 $f(x)=e^x\cos x+1$이므로

$f(\pi)=e^\pi\cdot(-1)+1=1-e^\pi$ 답 ②

참고 ㉡을 ㉠에 대입할 때,

$$f(x)=e^x\cos x+\underbrace{\int e^x\sin x\,dx}_{①}-\underbrace{\int e^x\sin x\,dx}_{②}=e^x\cos x+C$$

임에 주의한다. ①, ②는 모두 $e^x\sin x$를 적분한 것임은 같지만 각각의 적분상수가 다를 수 있기 때문이다.

1081 1st 부정적분을 구한다.

$g(x)=\sin 2x$, $h'(x)=e^x$으로 놓으면

$$g'(x)=2\cos 2x,\ h(x)=e^x$$

$$\therefore f(x)=\int e^x\sin 2x\,dx$$
$$=e^x\sin 2x-2\int e^x\cos 2x\,dx \quad \cdots\cdots ㉠$$

$\int e^x\cos 2x\,dx$에서 $u(x)=\cos 2x$, $v'(x)=e^x$으로 놓으면

$$u'(x)=-2\sin 2x,\ v(x)=e^x$$

$$\therefore \int e^x\cos 2x\,dx=e^x\cos 2x+2\int e^x\sin 2x\,dx$$
$$=e^x\cos 2x+2f(x)+C_1 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$f(x)=e^x\sin 2x-2\{e^x\cos 2x+2f(x)+C_1\}$$
$$5f(x)=e^x(\sin 2x-2\cos 2x)-2C_1$$
$$\therefore f(x)=\frac{1}{5}e^x(\sin 2x-2\cos 2x)+C$$

2nd $f(x)$가 극값을 갖는 x의 값을 구한다.

$f(x)=\int e^x\sin 2x\,dx$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f'(x)=e^x\sin 2x$$

$f'(x)=0$에서 $\sin 2x=0$ ($\because e^x>0$)

$2x=\pi$ 또는 $2x=2\pi$ ($\because 0<2x<3\pi$)

$$\therefore x=\frac{\pi}{2} \text{ 또는 } x=\pi$$

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	π	$\cdots$	$\frac{3}{2}\pi$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	극대	↘	극소	↗	

따라서 $f(x)$는 $x=\frac{\pi}{2}$일 때 극댓값을 갖고, $x=\pi$일 때 극솟값을 갖는다.

3rd $M-m$의 값을 구한다.

$M=f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{2}{5}e^{\frac{\pi}{2}}+C$, $m=f(\pi)=-\frac{2}{5}e^\pi+C$이므로

$M-m=\frac{2}{5}(e^{\frac{\pi}{2}}+e^\pi)$ 답 $\frac{2}{5}(e^{\frac{\pi}{2}}+e^\pi)$

1082 1st $f(x)$를 구한다.

$g(x)=(\ln x)^2$, $h'(x)=1$로 놓으면

$$g'(x)=\frac{2\ln x}{x},\ h(x)=x$$

$$\therefore f(x)=\int(\ln x)^2dx$$
$$=x(\ln x)^2-2\int\ln x\,dx \quad \cdots\cdots ㉠$$

$\int\ln x\,dx$에서 $u(x)=\ln x$, $v'(x)=1$로 놓으면

$$u'(x)=\frac{1}{x},\ v(x)=x$$

$$\therefore \int\ln x\,dx=x\ln x-\int 1\,dx$$
$$=x\ln x-x+C_1 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$f(x)=x(\ln x)^2-2(x\ln x-x+C_1)$$
$$=x(\ln x)^2-2x\ln x+2x+C$$

$f(1)=2$이므로 $2+C=2 \quad \therefore C=0$

$$\therefore f(x)=x(\ln x)^2-2x\ln x+2x$$

2nd 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=2x$가 만나는 모든 점의 x좌표의 합을 구한다.

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=2x$가 만나는 점의 x좌표는 방정식

$$x(\ln x)^2-2x\ln x+2x=2x$$

의 실근이므로

$$x\ln x\cdot(\ln x-2)=0$$

$\ln x=0$ 또는 $\ln x=2$ ($\because x>0$)

$$\therefore x=1 \text{ 또는 } x=e^2$$

따라서 모든 x좌표의 합은

e^2+1 답 ③

1083 전략 먼저 $g(x)=e^{-x}f(x)$의 양변을 x에 대하여 미분한 후 주어진 조건을 이용하여 $g'(x)$를 구한다.

풀이 $g'(x)=-e^{-x}f(x)+e^{-x}f'(x)$

이때 조건 (나)에서 $f'(x)=f(x)+e^x\sin x$이므로

$$g'(x)=-e^{-x}f(x)+e^{-x}\{f(x)+e^x\sin x\}$$
$$=\sin x \quad \cdots ❶$$

$$\therefore g(x)=\int \sin x\,dx=-\cos x+C \quad \cdots\cdots ㉠$$

조건 (가)에서 $f(0)=1$이므로 $g(x)=e^{-x}f(x)$의 양변에 $x=0$을 대입하면

$g(0)=1$

㉠에서

$-1+C=1 \quad \therefore C=2$

따라서 $g(x)=-\cos x+2$이므로 ⋯ ❷

$g(2\pi)+g(4\pi)+g(6\pi)+\cdots+g(20\pi)$

$=1+1+1+\cdots+1=10$ ⋯ ❸

답 10

채점 기준	비율
❶ $g'(x)$를 구할 수 있다.	30 %
❷ $g(x)$를 구할 수 있다.	50 %
❸ $g(2\pi)+g(4\pi)+g(6\pi)+\cdots+g(20\pi)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

1084 전략 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속임을 이용하여 $f(x)$를 구한 후 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$를 그려 본다.

풀이 $f'(x)=\begin{cases} e^x-e^{-x} & (x>0) \\ \cos x & (x<0)\end{cases}$이므로

$$f(x)=\begin{cases} e^x+e^{-x}+C_1 & (x>0) \\ \sin x+C_2 & (x<0)\end{cases} \quad \cdots ❶$$

$f(\ln 2)=\frac{7}{2}$이므로

$2+\frac{1}{2}+C_1=\frac{7}{2} \quad \therefore C_1=1$

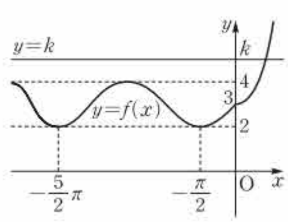
$f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이면 $x=0$에서 연속이므로

$f(0)=\lim_{x\to0+}(e^x+e^{-x}+1)=\lim_{x\to0-}(\sin x+C_2)$

$\therefore C_2=3$

$$\therefore f(x)=\begin{cases} e^x+e^{-x}+1 & (x\ge0) \\ \sin x+3 & (x<0)\end{cases} \quad \cdots ❷$$

따라서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 방정식 $f(x)=k$의 서로 다른 실근의 개수가 1이려면



$k>4$

즉 자연수 k의 최솟값은 5이므로

$m=5$ ⋯ ❸

한편 함수 $f(x)$가 최소가 되는 x의 값은 $-\frac{\pi}{2}$, $-\frac{5}{2}\pi$, $-\frac{9}{2}\pi$, ⋯이므로

$a_n=-2(n-1)\pi-\frac{\pi}{2}$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$

$\therefore a_5=-8\pi-\frac{\pi}{2}=-\frac{17}{2}\pi$ ⋯ ❹

답 $-\frac{17}{2}\pi$

채점 기준	비율
❶ $f'(x)$의 부정적분을 구할 수 있다.	20 %
❷ $f(x)$를 구할 수 있다.	30 %
❸ m의 값을 구할 수 있다.	20 %
❹ a_m의 값을 구할 수 있다.	30 %

참고 $x>0$에서 $f'(x)=e^x-e^{-x}=e^x-\frac{1}{e^x}>0$이므로 함수 $f(x)$는 증가한다.

1085 전략 $x^2+1=t$로 치환하여 부정적분을 구하고, $f'(x)$를 이용하여 주어진 구간에서 $f(x)$의 증가·감소를 파악하여 최댓값과 최솟값을 구한다.

풀이 $x^2+1=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=2x$이므로

$$f(x)=\int x\sqrt{x^2+1}\,dx=\int\sqrt{t}\cdot\frac{1}{2}dt=\frac{1}{2}\int t^{\frac{1}{2}}\,dt$$
$$=\frac{1}{3}t^{\frac{3}{2}}+C=\frac{1}{3}t\sqrt{t}+C$$
$$=\frac{1}{3}(x^2+1)\sqrt{x^2+1}+C \quad \cdots ❶$$

한편 $f(x)=\int x\sqrt{x^2+1}\,dx$에서

$f'(x)=x\sqrt{x^2+1}$

$0\le x\le 4\sqrt{3}$에서 $f'(x)\ge0$이므로 $f(x)$는 증가한다. ⋯ ❷

따라서 $f(x)$는 $x=4\sqrt{3}$에서 최댓값, $x=0$에서 최솟값을 가지므로

$$M=f(4\sqrt{3})=\frac{1}{3}\cdot49\cdot7+C=\frac{343}{3}+C$$
$$m=f(0)=\frac{1}{3}\cdot1\cdot1+C=\frac{1}{3}+C$$
$$\therefore M-m=\left(\frac{343}{3}+C\right)-\left(\frac{1}{3}+C\right)$$
$$=114 \quad \cdots ❸$$

답 114

채점 기준	비율
❶ 부정적분을 구할 수 있다.	40 %
❷ 주어진 범위에서 $f(x)$가 증가함을 알 수 있다.	20 %
❸ $M-m$의 값을 구할 수 있다.	40 %

1086 전략 주어진 등식의 양변을 각각 적분하여 $f(x)$를 구하고, $f'(x)$를 이용하여 $f(x)$의 극값을 파악한다.

풀이 $f'(x)e^{f(x)}=\cos x+\frac{1}{2}$에서

$$\int f'(x)e^{f(x)}\,dx=\int\left(\cos x+\frac{1}{2}\right)dx$$

$\int f'(x)e^{f(x)}\,dx$에서 $f(x)=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=f'(x)$이므로

$$\int f'(x)e^{f(x)}\,dx=\int e^t\,dt=e^t+C_1$$
$$=e^{f(x)}+C_1$$

또 $\int\left(\cos x+\frac{1}{2}\right)dx=\sin x+\frac{1}{2}x+C_2$이므로

$$e^{f(x)}+C_1=\sin x+\frac{1}{2}x+C_2$$

$$\therefore e^{f(x)}=\sin x+\frac{1}{2}x+C$$

$f(0)=1$이므로 양변에 $x=0$을 대입하면

$$C=e$$

$$\therefore e^{f(x)}=\sin x+\frac{1}{2}x+e \quad \cdots\cdots ㉠$$

이때 $0\le x\le\pi$일 때 $\sin x+\frac{1}{2}x+e>0$이므로

$$f(x)=\ln\left(\sin x+\frac{1}{2}x+e\right) \quad \cdots ❶$$

$f'(x)=\dfrac{\cos x+\frac{1}{2}}{\sin x+\frac{1}{2}x+e}$이므로 $f'(x)=0$에서

$$\cos x=-\frac{1}{2} \qquad \therefore x=\frac{2}{3}\pi\ (\because 0\le x\le\pi)$$

x	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}\pi$	$\cdots$	π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	극대	↘	

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\frac{2}{3}\pi$에서 극댓값을 가지므로

$$a=\frac{2}{3}\pi \quad \cdots ❷$$

$f\left(\frac{2}{3}\pi\right)=b$이므로 ㉠의 양변에 $x=\frac{2}{3}\pi$를 대입하면

$$e^b=\sin\frac{2}{3}\pi+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\pi+e=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{3}+e \quad \cdots ❸$$

$$\therefore a+e^b=\frac{2}{3}\pi+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{3}+e\right)$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}+\pi+e \quad \cdots ❹$$

답 $\frac{\sqrt{3}}{2}+\pi+e$

채점 기준	비율
❶ $f(x)$를 구할 수 있다.	40 %
❷ a의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ e^b의 값을 구할 수 있다.	20 %
❹ $a+e^b$의 값을 구할 수 있다.	10 %

1087 전략 접선 l의 기울기를 이용하여 $f'(x)$를 구한다.

풀이 $\angle\mathrm{PAB}=\theta$라 하면 직각삼각형 PAB에서

$$\tan\theta=\frac{\overline{\mathrm{PB}}}{\overline{\mathrm{PA}}}=\frac{2t}{t^2+1}$$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(t,\ f(t))$에서의 접선의 기울기는 $f'(t)$이고 $f'(t)=\tan\theta$이므로

$$f'(t)=\frac{2t}{t^2+1},\ 즉\ f'(x)=\frac{2x}{x^2+1}\ (x>0) \quad \cdots ❶$$

$$\therefore f(x)=\int\frac{2x}{x^2+1}dx=\int\frac{(x^2+1)'}{x^2+1}dx$$

$$=\ln(x^2+1)+C\ (\because x^2+1>0)$$

이때 $f(0)=2$이고 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to0+}f(x)=f(0)$$

$$\lim_{x\to0+}\{\ln(x^2+1)+C\}=2 \qquad \therefore C=2$$

따라서 $x\ge0$에서 $f(x)=\ln(x^2+1)+2$이므로 $\cdots$ ❷

$$f(3)=2+\ln10 \quad \cdots ❸$$

답 $2+\ln10$

채점 기준	비율
❶ $x>0$에서 $f'(x)$를 구할 수 있다.	40 %
❷ $x\ge0$에서 $f(x)$를 구할 수 있다.	50 %
❸ $f(3)$의 값을 구할 수 있다.	10 %

1088 전략 $f'(x)$가 주어진 접선의 기울기임을 이용하여 $f(x)$를 구한 후 접선의 y절편을 구한다.

풀이 $f'(x)=xe^x+2$이므로

$$f(x)=\int(xe^x+2)dx=\int xe^xdx+\int2dx$$

$$=\int xe^xdx+2x+C_1 \quad \cdots\cdots ㉠$$

$\int xe^xdx$에서 $u(x)=x,\ v'(x)=e^x$으로 놓으면

$$u'(x)=1,\ v(x)=e^x$$

$$\therefore \int xe^xdx=xe^x-\int e^xdx=xe^x-e^x+C_2$$

$$=(x-1)e^x+C_2 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$f(x)=(x-1)e^x+2x+C$$

곡선 $y=f(x)$가 점 $(1,\ 2)$를 지나므로 $f(1)=2$에서

$$2+C=2 \qquad \therefore C=0$$

$$\therefore f(x)=(x-1)e^x+2x \quad \cdots ❶$$

점 $(n,\ f(n))$에서의 접선의 방정식은

$$y-\{(n-1)e^n+2n\}=(ne^n+2)(x-n)$$

$$\therefore y=(ne^n+2)(x-n)+(n-1)e^n+2n$$

$$=(ne^n+2)x-(n^2-n+1)e^n$$

따라서 $a_n=-(n^2-n+1)e^n$이므로 $\cdots$ ❷

$$\sum_{n=1}^{10}\frac{a_n}{e^n}=\sum_{n=1}^{10}\frac{-(n^2-n+1)e^n}{e^n}=\sum_{n=1}^{10}(-n^2+n-1)$$

$$=-\frac{10\cdot11\cdot21}{6}+\frac{10\cdot11}{2}-10$$

$$=-340 \quad \cdots ❸$$

답 -340

채점 기준	비율
❶ $f(x)$를 구할 수 있다.	40 %
❷ a_n을 구할 수 있다.	30 %
❸ $\sum_{n=1}^{10}\frac{a_n}{e^n}$의 값을 구할 수 있다.	30 %

SSEN 특강 접선의 방정식

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능할 때, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(a,\ f(a))$에서의 접선의 방정식은

$$y-f(a)=f'(a)(x-a)$$

09 정적분

1089 $\int_0^9 \sqrt{x}\,dx = \int_0^9 x^{\frac{1}{2}}\,dx = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^9$
$=18-0=18$ 답 18

1090 $\int_1^2 \sqrt[3]{x}\,dx = \int_1^2 x^{\frac{1}{3}}\,dx = \left[\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}\right]_1^2$
$=\frac{3}{4}(2\sqrt[3]{2}-1)$ 답 $\frac{3}{4}(2\sqrt[3]{2}-1)$

1091 $\int_1^4 \frac{3}{x^2}\,dx = \int_1^4 3x^{-2}\,dx = \left[-3x^{-1}\right]_1^4$
$=-\frac{3}{4}+3=\frac{9}{4}$ 답 $\frac{9}{4}$

1092 $\int_1^{e^2} \frac{1}{x}\,dx = \left[\ln|x|\right]_1^{e^2} = \ln e^2 - \ln 1 = 2$ 답 2

1093 $\int_0^{\ln 2} e^{3x}\,dx = \left[\frac{1}{3}e^{3x}\right]_0^{\ln 2} = \frac{1}{3}e^{3\ln 2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}e^{\ln 8} - \frac{1}{3}$
$=\frac{8}{3}-\frac{1}{3}=\frac{7}{3}$ 답 $\frac{7}{3}$

1094 $\int_0^2 2^x\,dx = \left[\frac{2^x}{\ln 2}\right]_0^2 = \frac{4}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 2} = \frac{3}{\ln 2}$ 답 $\frac{3}{\ln 2}$

1095 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x\,dx = \left[-\frac{1}{2}\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$ 답 1

1096 $\int_{\frac{3}{4}\pi}^{\pi} \sec^2 x\,dx = \left[\tan x\right]_{\frac{3}{4}\pi}^{\pi} = 0+1=1$ 답 1

1097 $\int_{-1}^3 (e^x+2)\,dx + 2\int_{-1}^3 (e^x-1)\,dx$
$=\int_{-1}^3 \{e^x+2+2(e^x-1)\}\,dx$
$=\int_{-1}^3 3e^x\,dx = \left[3e^x\right]_{-1}^3$
$=3e^3-\frac{3}{e}$ 답 $3e^3-\frac{3}{e}$

1098 $\int_0^{\pi} (\sin x+1)^2\,dx + \int_{\pi}^0 (\sin x-1)^2\,dx$
$=\int_0^{\pi} (\sin x+1)^2\,dx - \int_0^{\pi} (\sin x-1)^2\,dx$
$=\int_0^{\pi} \{(\sin^2 x+2\sin x+1)-(\sin^2 x-2\sin x+1)\}\,dx$
$=\int_0^{\pi} 4\sin x\,dx = \left[-4\cos x\right]_0^{\pi}$
$=4+4=8$ 답 8

1099 $\int_1^2 (\sqrt{x}+1)\,dx + \int_2^4 (\sqrt{x}+1)\,dx$
$=\int_1^4 (\sqrt{x}+1)\,dx = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+x\right]_1^4$
$=\frac{28}{3}-\frac{5}{3}=\frac{23}{3}$ 답 $\frac{23}{3}$

1100 $\int_0^{\pi} (\cos x+1)\,dx + \int_{\pi}^{2\pi} (\cos y+1)\,dy$
$=\int_0^{\pi} (\cos x+1)\,dx + \int_{\pi}^{2\pi} (\cos x+1)\,dx$
$=\int_0^{2\pi} (\cos x+1)\,dx$
$=\left[\sin x+x\right]_0^{2\pi}=2\pi$ 답 2π

1101 $|\sin x| = \begin{cases} \sin x & (0\le x\le \pi) \\ -\sin x & (\pi \le x \le 2\pi) \end{cases}$이므로
$\int_0^{2\pi} |\sin x|\,dx = \int_0^{\pi} \sin x\,dx + \int_{\pi}^{2\pi} (-\sin x)\,dx$
$=\left[-\cos x\right]_0^{\pi} + \left[\cos x\right]_{\pi}^{2\pi}$
$=2+2=4$ 답 4

SSEN 특강 절댓값 기호를 포함한 함수의 정적분

(ⅰ) 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되도록 하는 x의 값을 경계로 적분 구간을 나눈다.
(ⅱ) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$임을 이용한다.

1102 $|e^x-1| = \begin{cases} e^x-1 & (x\ge 0) \\ -e^x+1 & (x\le 0) \end{cases}$이므로
$\int_{-1}^1 |e^x-1|\,dx = \int_{-1}^0 (-e^x+1)\,dx + \int_0^1 (e^x-1)\,dx$
$=\left[-e^x+x\right]_{-1}^0 + \left[e^x-x\right]_0^1$
$=\frac{1}{e}+e-2$ 답 $\frac{1}{e}+e-2$

1103 x^2은 우함수, $\sin 2x$는 기함수이므로
$\int_{-1}^1 (x^2+\sin 2x)\,dx = 2\int_0^1 x^2\,dx$
$=2\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1=\frac{2}{3}$ 답 $\frac{2}{3}$

1104 $\cos x$는 우함수, $\sin x$는 기함수이므로
$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos x+\sin x)\,dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx$
$=2\left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=2$ 답 2

1105 $f(x)=e^x+e^{-x}$이라 하면
$f(-x)=e^{-x}+e^x=f(x)$
따라서 e^x+e^{-x}은 우함수이므로
$\int_{-2}^2 (e^x+e^{-x})\,dx = 2\int_0^2 (e^x+e^{-x})\,dx$
$=2\left[e^x-e^{-x}\right]_0^2$
$=2\left(e^2-\frac{1}{e^2}\right)$ 답 $2\left(e^2-\frac{1}{e^2}\right)$

1106 $f(x+3)=f(x)$이므로

$$\int_1^4 f(x)dx=\int_4^7 f(x)dx=\int_7^{10} f(x)dx=2$$

$$\therefore \int_1^{10} f(x)dx=\int_1^4 f(x)dx+\int_4^7 f(x)dx+\int_7^{10} f(x)dx$$
$$=2+2+2=6$$

답 6

1107 $2x+3=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=2$

$x=0$일 때 $t=3$, $x=1$일 때 $t=5$이므로

$$\int_0^1 (2x+3)^3 dx=\int_3^5 t^3\cdot\frac{1}{2}dt=\left[\frac{1}{8}t^4\right]_3^5$$
$$=\frac{1}{8}(625-81)=68$$

답 68

다른 풀이 $\int_0^1 (2x+3)^3 dx=\int_0^1 (8x^3+36x^2+54x+27)dx$
$$=\left[2x^4+12x^3+27x^2+27x\right]_0^1$$
$$=2+12+27+27=68$$

1108 $x+5=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=1$

$x=-1$일 때 $t=4$, $x=4$일 때 $t=9$이므로

$$\int_{-1}^4 \sqrt{x+5}\,dx=\int_4^9 \sqrt{t}\,dt=\left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_4^9$$
$$=18-\frac{16}{3}=\frac{38}{3}$$

답 $\frac{38}{3}$

1109 $x^2-1=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=2x$

$x=1$일 때 $t=0$, $x=2$일 때 $t=3$이므로

$$\int_1^2 x(x^2-1)^2 dx=\int_0^3 t^2\cdot\frac{1}{2}dt=\left[\frac{1}{6}t^3\right]_0^3=\frac{9}{2}$$

답 $\frac{9}{2}$

1110 $3x^2+1=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=6x$

$x=0$일 때 $t=1$, $x=1$일 때 $t=4$이므로

$$\int_0^1 \frac{x}{3x^2+1}dx=\int_1^4 \frac{1}{t}\cdot\frac{1}{6}dt$$
$$=\left[\frac{1}{6}\ln|t|\right]_1^4=\frac{1}{3}\ln 2$$

답 $\frac{1}{3}\ln 2$

1111 $x^2=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=2x$

$x=0$일 때 $t=0$, $x=2$일 때 $t=4$이므로

$$\int_0^2 xe^{x^2}dx=\int_0^4 e^t\cdot\frac{1}{2}dt=\left[\frac{1}{2}e^t\right]_0^4=\frac{e^4-1}{2}$$

답 $\frac{e^4-1}{2}$

1112 $\ln x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}$

$x=1$일 때 $t=0$, $x=e$일 때 $t=1$이므로

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x}dx=\int_0^1 t\,dt=\left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^1=\frac{1}{2}$$

답 $\frac{1}{2}$

1113 $\cos x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=-\sin x$

$x=0$일 때 $t=1$, $x=\frac{\pi}{2}$일 때 $t=0$이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x\sin x\,dx=\int_1^0 t^3\cdot(-1)dt=\int_0^1 t^3\,dt$$
$$=\left[\frac{1}{4}t^4\right]_0^1=\frac{1}{4}$$

답 $\frac{1}{4}$

1114 $2+\sin x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=\cos x$

$x=0$일 때 $t=2$, $x=\frac{\pi}{2}$일 때 $t=3$이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{2+\sin x}dx=\int_2^3 \frac{1}{t}dt=\left[\ln|t|\right]_2^3$$
$$=\ln 3-\ln 2=\ln\frac{3}{2}$$

답 $\ln\frac{3}{2}$

1115 $x=\sin\theta\left(-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right)$로 놓으면

$$\frac{dx}{d\theta}=\boxed{\cos\theta}$$

$x=0$일 때 $\theta=0$, $x=1$일 때 $\theta=\frac{\pi}{2}$이므로

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2\theta}\cdot\cos\theta\,d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\,d\theta$$

이때 $\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1$에서 $\cos^2\theta=\frac{1}{2}(\cos 2\theta+1)$이므로 위의 식은

$$\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\boxed{\cos 2\theta}+1)d\theta=\frac{1}{2}\left[\boxed{\frac{1}{2}\sin 2\theta}+\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\boxed{\frac{\pi}{4}}$$

$\therefore$ (가) $\cos\theta$ (나) $\cos 2\theta$ (다) $\frac{1}{2}\sin 2\theta$ (라) $\frac{\pi}{4}$

답 풀이 참조

SSEN 특강 삼각함수 사이의 관계

① $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ ② $\tan^2\theta+1=\sec^2\theta$

③ $1+\cot^2\theta=\csc^2\theta$

1116 $x=2\sin\theta\left(-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right)$로 놓으면

$$\frac{dx}{d\theta}=2\cos\theta$$

$x=0$일 때 $\theta=0$, $x=1$일 때 $\theta=\frac{\pi}{6}$이므로

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\sqrt{4-4\sin^2\theta}}\cdot 2\cos\theta\,d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{2\cos\theta}{2\cos\theta}d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{6}} 1\,d\theta$$
$$=\left[\theta\right]_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{\pi}{6}$$

답 $\frac{\pi}{6}$

1117 $x=\tan\theta\left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$로 놓으면

$$\frac{dx}{d\theta}=\sec^2\theta$$

$x=0$일 때 $\theta=0$, $x=\sqrt{3}$일 때 $\theta=\frac{\pi}{3}$이므로

$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^2+1}dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\tan^2\theta+1}\cdot\sec^2\theta\, d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sec^2\theta}{\sec^2\theta}d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{3}} 1\, d\theta$$
$$=\Big[\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\pi}{3}$$

답 $\frac{\pi}{3}$

1118 $f(x)=\ln x$, $g'(x)=1$로 놓으면

$f'(x)=\frac{1}{x}$, $g(x)=x$

$$\therefore \int_1^e \ln x\, dx=\Big[x\ln x\Big]_1^e-\int_1^e \frac{1}{x}\cdot x\, dx$$
$$=e-\Big[x\Big]_1^e$$
$$=e-(e-1)$$
$$=1$$

답 1

1119 $f(x)=x$, $g'(x)=e^x$으로 놓으면

$f'(x)=1$, $g(x)=e^x$

$$\therefore \int_0^2 xe^x\, dx=\Big[xe^x\Big]_0^2-\int_0^2 e^x\, dx$$
$$=2e^2-\Big[e^x\Big]_0^2$$
$$=2e^2-(e^2-1)$$
$$=e^2+1$$

답 e^2+1

1120 주어진 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=\cos x$

답 $f(x)=\cos x$

1121 주어진 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=2e^{2x}-1$

답 $f(x)=2e^{2x}-1$

1122 주어진 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=\frac{1}{x}+2$

답 $f(x)=\frac{1}{x}+2$

1123 $F'(t)=t+\cos t$라 하면

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x (t+\cos t)dt=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x F'(t)\, dt$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{F(x)-F(0)}{x}$$
$$=F'(0)$$
$$=1$$

답 1

1124 $F'(t)=e^t+2$라 하면

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}\int_1^x (e^t+2)dt=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}\int_1^x F'(t)\, dt$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{F(x)-F(1)}{x-1}$$
$$=F'(1)$$
$$=e+2$$

답 $e+2$

유형 01~03 여러 가지 함수의 정적분

본책 166, 167쪽

$F'(x)=f(x)$일 때, 정적분 $\int_a^b f(x)dx$의 값은 다음과 같은 순서로 구한다.

(i) $f(x)$를 적분하여 $F(x)$를 구한다.
(ii) $F(b)$, $F(a)$의 값을 구한다.
(iii) $F(b)-F(a)$의 값을 구한다.

1125
$$\int_1^3 \frac{x-1}{x+1}dx=\int_1^3\left(1-\frac{2}{x+1}\right)dx$$
$$=\Big[x-2\ln|x+1|\Big]_1^3$$
$$=(3-2\ln 4)-(1-2\ln 2)$$
$$=3-4\ln 2-1+2\ln 2$$
$$=2-2\ln 2$$

답 ②

1126
$$\int_0^2 (5x+3)\sqrt{x}\, dx=\int_0^2 (5x^{\frac{3}{2}}+3x^{\frac{1}{2}})dx$$
$$=\Big[2x^{\frac{5}{2}}+2x^{\frac{3}{2}}\Big]_0^2$$
$$=8\sqrt{2}+4\sqrt{2}=12\sqrt{2}$$

답 $12\sqrt{2}$

1127
$$\int_0^1 \frac{1}{x^2+3x+2}dx=\int_0^1 \frac{1}{(x+1)(x+2)}dx$$
$$=\int_0^1\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right)dx$$
$$=\Big[\ln|x+1|-\ln|x+2|\Big]_0^1$$
$$=(\ln 2-\ln 3)-(-\ln 2)$$
$$=2\ln 2-\ln 3=\ln\frac{4}{3}$$

따라서 $\ln k=\ln\frac{4}{3}$이므로

$k=\frac{4}{3}$

답 $\frac{4}{3}$

1128
$$\int_1^3 \frac{(1+\sqrt{x})^2-1}{\sqrt{x}}dx=\int_1^3 \frac{2\sqrt{x}+x}{\sqrt{x}}dx$$
$$=\int_1^3 (2+\sqrt{x})dx=\int_1^3 (2+x^{\frac{1}{2}})dx$$
$$=\Big[2x+\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big]_1^3$$
$$=(6+2\sqrt{3})-\frac{8}{3}$$
$$=2\sqrt{3}+\frac{10}{3}$$ ··· ❶

따라서 $a=2$, $b=\frac{10}{3}$이므로

$\frac{a}{b}=2\cdot\frac{3}{10}=\frac{3}{5}$ ··· ❷

답 $\frac{3}{5}$

채점 기준	비율
❶ 정적분의 값을 구할 수 있다.	80 %
❷ $\frac{a}{b}$의 값을 구할 수 있다.	20 %

1129 $\int_0^3 f(x)dx-\int_5^3 f(y)dy-\int_1^5 f(z)dz$

$=\int_0^3 f(x)dx+\int_3^5 f(x)dx+\int_5^1 f(x)dx$

$=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 (x-\sqrt{x})^2 dx$

$=\int_0^1 (x^2-2x\sqrt{x}+x)dx=\int_0^1 (x^2-2x^{\frac{3}{2}}+x)dx$

$=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{4}{5}x^{\frac{5}{2}}+\frac{1}{2}x^2\right]_0^1$

$=\frac{1}{3}-\frac{4}{5}+\frac{1}{2}=\frac{1}{30}$ 답 $\frac{1}{30}$

1130 $\left|\frac{x-1}{x+3}\right|=\begin{cases}\frac{x-1}{x+3} & (x<-3 \text{ 또는 } x\geq 1) \\ -\frac{x-1}{x+3} & (-3<x\leq 1)\end{cases}$ 이므로

$\int_{-1}^3 \left|\frac{x-1}{x+3}\right|dx$

$=\int_{-1}^1 \left(-\frac{x-1}{x+3}\right)dx+\int_1^3 \frac{x-1}{x+3}dx$

$=\int_{-1}^1 \left(-1+\frac{4}{x+3}\right)dx+\int_1^3 \left(1-\frac{4}{x+3}\right)dx$

$=\Big[-x+4\ln|x+3|\Big]_{-1}^1+\Big[x-4\ln|x+3|\Big]_1^3$

$=\{(-1+4\ln 4)-(1+4\ln 2)\}+\{(3-4\ln 6)-(1-4\ln 4)\}$

$=(-2+4\ln 2)+(2+4\ln 2-4\ln 3)$

$=8\ln 2-4\ln 3$

따라서 $a=8$, $b=-4$이므로

$a-b=12$ 답 ⑤

1131 $\int_{-1}^0 \sqrt{e^{2x}+4e^x+4}\,dx=\int_{-1}^0 \sqrt{(e^x+2)^2}\,dx$

$=\int_{-1}^0 (e^x+2)dx$ ($\because e^x+2>0$)

$=\Big[e^x+2x\Big]_{-1}^0$

$=1-(e^{-1}-2)=3-\frac{1}{e}$ 답 ④

1132 $\int_0^{\ln 3} \frac{1}{e^x+1}dx+\int_{\ln 3}^0 \frac{e^{2t}}{e^t+1}dt$

$=\int_0^{\ln 3} \frac{1}{e^x+1}dx-\int_0^{\ln 3} \frac{e^{2x}}{e^x+1}dx$

$=\int_0^{\ln 3} \frac{1-e^{2x}}{e^x+1}dx=\int_0^{\ln 3} \frac{(1+e^x)(1-e^x)}{e^x+1}dx$

$=\int_0^{\ln 3} (1-e^x)dx=\Big[x-e^x\Big]_0^{\ln 3}$

$=(\ln 3-3)-(-1)=\ln 3-2$ 답 $\ln 3-2$

1133 $\int_0^1 (2^x+1)(4^x-2^x+1)dx=\int_0^1 (8^x+1)dx$

$=\left[\frac{8^x}{\ln 8}+x\right]_0^1$

$=\left(\frac{8}{\ln 8}+1\right)-\frac{1}{\ln 8}$

$=\frac{7}{3\ln 2}+1$ … ❶

따라서 $a=\frac{7}{3}$, $b=1$이므로

$a+b=\frac{10}{3}$ … ❷

답 $\frac{10}{3}$

채점 기준	비율
❶ 정적분의 값을 구할 수 있다.	80 %
❷ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	20 %

1134 $|e^x-2|=\begin{cases}e^x-2 & (x\geq \ln 2) \\ -e^x+2 & (x\leq \ln 2)\end{cases}$ 이므로

$\int_{-\ln 4}^{\ln 4} |e^x-2|dx=\int_{-\ln 4}^{\ln 2} (-e^x+2)dx+\int_{\ln 2}^{\ln 4} (e^x-2)dx$

$=\Big[-e^x+2x\Big]_{-\ln 4}^{\ln 2}+\Big[e^x-2x\Big]_{\ln 2}^{\ln 4}$

$=\left\{(-2+2\ln 2)-\left(-\frac{1}{4}-2\ln 4\right)\right\}$

$+\{(4-2\ln 4)-(2-2\ln 2)\}$

$=\left(-\frac{7}{4}+6\ln 2\right)+(2-2\ln 2)$

$=\frac{1}{4}+4\ln 2$ 답 ①

참고 $e^x-2=0$에서 $e^x=2$ $\therefore x=\ln 2$

따라서 $x\geq \ln 2$일 때 $e^x-2\geq 0$이고, $x\leq \ln 2$일 때 $e^x-2\leq 0$이다.

1135 $\int_0^\pi (\sin x+1)^2 dx+\int_0^\pi (\cos t-1)^2 dt$

$=\int_0^\pi (\sin x+1)^2 dx+\int_0^\pi (\cos x-1)^2 dx$

$=\int_0^\pi (\sin^2 x+2\sin x+1+\cos^2 x-2\cos x+1)dx$

$=\int_0^\pi (2\sin x-2\cos x+3)dx$

$=\Big[-2\cos x-2\sin x+3x\Big]_0^\pi$

$=(2+3\pi)-(-2)=3\pi+4$ 답 $3\pi+4$

1136 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2x+1}{2(\sin x+1)}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1-2\sin^2 x)+1}{2(\sin x+1)}dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin^2 x}{\sin x+1}dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1+\sin x)(1-\sin x)}{\sin x+1}dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin x)dx$

$=\Big[x+\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$=\frac{\pi}{2}-1$ 답 ①

1137 $\int_0^a \frac{1}{\sin^2 x-1}dx=\int_0^a \frac{1}{-\cos^2 x}dx=\int_0^a (-\sec^2 x)dx$

$=\Big[-\tan x\Big]_0^a$

$=-\tan a$ … ❶

즉 $-\tan a=-1$이므로

$\tan a=1 \qquad \therefore a=\frac{\pi}{4}\left(\because 0<a<\frac{\pi}{2}\right)$ ⋯ ❷

답 $\frac{\pi}{4}$

채점 기준	비율
❶ 정적분의 값을 a의 삼각함수로 나타낼 수 있다.	70 %
❷ a의 값을 구할 수 있다.	30 %

1138 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\cos^2 x-\sin^2 x|dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\cos 2x|dx$

$|\cos 2x|=\begin{cases}\cos 2x & \left(0\le x\le\frac{\pi}{4}\right)\\ -\cos 2x & \left(\frac{\pi}{4}\le x\le\frac{\pi}{2}\right)\end{cases}$이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\cos 2x|dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2x\,dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(-\cos 2x)dx$$
$$=\left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}+\left[-\frac{1}{2}\sin 2x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$

답 ④

1139 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 연속이면 $x=\frac{\pi}{2}$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+}\sin x=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-}(\cos x+k)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$\sin\frac{\pi}{2}=\cos\frac{\pi}{2}+k \qquad \therefore k=1$

따라서 $f(x)=\begin{cases}\sin x & \left(x\ge\frac{\pi}{2}\right)\\ \cos x+1 & \left(x\le\frac{\pi}{2}\right)\end{cases}$이므로

$$\int_0^{\pi}f(x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos x+1)dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin x\,dx$$
$$=\Big[\sin x+x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}+\Big[-\cos x\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$
$$=\left(1+\frac{\pi}{2}\right)+1=2+\frac{\pi}{2}$$

답 $2+\frac{\pi}{2}$

유형 04 우함수·기함수의 정적분

본책 168쪽

$\int_{-a}^{a}f(x)dx$ 꼴의 정적분의 계산은 먼저 $f(x)$가 우함수인지 기함수인지를 파악한 후 다음을 이용한다.

① $f(x)$가 우함수 ➡ $\int_{-a}^{a}f(x)dx=2\int_0^{a}f(x)dx$

② $f(x)$가 기함수 ➡ $\int_{-a}^{a}f(x)dx=0$

1140 x^2은 우함수, $\sin x$는 기함수이므로 $x^2\sin x$는 기함수이다.
또 $\cos 2x$는 우함수이므로

$$\int_{-\pi}^{\pi}(x^2\sin x+\cos 2x)dx=2\int_0^{\pi}\cos 2x\,dx$$
$$=2\left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\pi}$$
$$=0$$

답 ③

SSEN 특강 우함수, 기함수의 곱

① (우함수)×(우함수)=(우함수)
② (우함수)×(기함수)=(기함수)
③ (기함수)×(기함수)=(우함수)

1141 $f(x)=3^x+3^{-x}$이라 하면

$f(-x)=3^{-x}+3^x=f(x)$

이므로 3^x+3^{-x}은 우함수이다.
또 $g(x)=5^x-5^{-x}$이라 하면

$g(-x)=5^{-x}-5^x=-(5^x-5^{-x})=-g(x)$

이므로 5^x-5^{-x}은 기함수이다.

$$\therefore \int_{-1}^{1}(3^x+5^x+3^{-x}-5^{-x})dx$$
$$=2\int_0^{1}(3^x+3^{-x})dx=2\left[\frac{3^x}{\ln 3}-\frac{3^{-x}}{\ln 3}\right]_0^1$$
$$=2\cdot\left(\frac{3}{\ln 3}-\frac{1}{3\ln 3}\right)=\frac{16}{3\ln 3}$$

답 ⑤

1142 $\sin(-x)=-\sin x$, $\cos(-x)=\cos x$이므로
$f(x)=\cos(\sin x)$에서

$f(-x)=\cos\{\sin(-x)\}=\cos(-\sin x)=\cos(\sin x)$
$=f(x)$

이므로 $f(x)$는 우함수이다. ⋯ ❶

$$\therefore \int_{-1}^{2}f(x)dx=\int_{-1}^{0}f(x)dx+\int_0^{2}f(x)dx$$
$$=\int_0^{1}f(x)dx+\int_0^{2}f(x)dx$$
$$=a+b$$ ⋯ ❷

답 $a+b$

채점 기준	비율
❶ $f(x)$가 우함수임을 알 수 있다.	50 %
❷ $\int_{-1}^{2}f(x)dx$의 값을 a, b를 사용하여 나타낼 수 있다.	50 %

1143 ㄱ. $\sin f(-x)=\sin\{-f(x)\}=-\sin f(x)$이므로
$\sin f(x)$는 기함수이다.

$$\therefore \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin f(x)dx=0$$

ㄴ. $\cos f(-x)=\cos\{-f(x)\}=\cos f(x)$이므로 $\cos f(x)$는 우함수이다.

$$\therefore \int_{-\pi}^{\pi}\cos f(x)dx\ne 0$$

ㄷ. $f(-x)\sin(-x)=-f(x)\cdot(-\sin x)=f(x)\sin x$이므로
$f(x)\sin x$는 우함수이다.

$$\therefore \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f(x)\sin x\,dx\ne 0$$

ㄹ. $f(-x)\cos(-x)=-f(x)\cos x$이므로 $f(x)\cos x$는 기함수이다.

$$\therefore \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f(x)\cos x\,dx=0$$

이상에서 정적분의 값이 항상 0인 것은 ㄱ, ㄹ이다.

답 ③

유형 05 주기함수의 정적분 본책 168쪽

정의역에 속하는 임의의 실수 x에 대하여 $f(x+p)=f(x)$를 만족시키는 연속함수 $f(x)$의 정적분의 값은 다음을 이용하여 구한다.

① $\int_a^b f(x)dx=\int_{a+p}^{b+p} f(x)dx$

② $\int_a^{a+p} f(x)dx=\int_b^{b+p} f(x)dx$

1144 $y=|\sin 2x|$는 주기가 $\frac{\pi}{2}$인 주기함수이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\sin 2x|dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}|\sin 2x|dx=\int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi}|\sin 2x|dx=\int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi}|\sin 2x|dx$$

$$\therefore \int_0^{2\pi}|\sin 2x|dx=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2x\,dx=4\left[-\frac{1}{2}\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=4\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)=4$$

답 ④

SSEN 특강 삼각함수의 주기

① 함수 $y=a\sin bx+c$의 주기 ➡ $\frac{2\pi}{|b|}$

② 함수 $y=a\cos bx+c$의 주기 ➡ $\frac{2\pi}{|b|}$

③ 함수 $y=a\tan bx+c$의 주기 ➡ $\frac{\pi}{|b|}$

④ 함수 $y=|a\sin bx|+c$의 주기 ➡ $\frac{\pi}{|b|}$

⑤ 함수 $y=|a\cos bx|+c$의 주기 ➡ $\frac{\pi}{|b|}$

1145 $y=|\cos x|$는 주기가 π인 주기함수이므로

$$\int_a^{a+\pi}|\cos x|dx=\int_0^{\pi}|\cos x|dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(-\cos x)dx=\left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\left[-\sin x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=1+1=2$$

답 2

1146 $f(x+2)=f(x)$에서 $f(x)$는 주기함수이므로

$$\int_{-1}^1 f(x)dx=\int_1^3 f(x)dx=\int_3^5 f(x)dx=\int_5^7 f(x)dx$$

또 $f(-x)=e^{-x}+e^x=f(x)$이므로 $f(x)$는 우함수이다. ··· ❶

$$\therefore \int_{-1}^7 f(x)dx=4\int_{-1}^1 f(x)dx=8\int_0^1 f(x)dx=8\int_0^1(e^x+e^{-x})dx=8\left[e^x-e^{-x}\right]_0^1=8\left(e-\frac{1}{e}\right)$$ ··· ❷

$\therefore k=8$ ··· ❸

답 8

채점 기준	비율
❶ $f(x)$가 주기함수이고 우함수임을 알 수 있다.	40 %
❷ $\int_{-1}^7 f(x)dx$의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ k의 값을 구할 수 있다.	10 %

유형 06~09 치환적분법을 이용한 정적분 본책 169, 170쪽

$\int_a^{\beta} f(g(x))g'(x)dx$에서 $g(x)=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=g'(x)$이므로

$$\int_a^{\beta} f(g(x))g'(x)dx=\int_{g(a)}^{g(\beta)} f(t)dt$$

1147 $2x+1=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=2$

$x=-1$일 때 $t=-1$, $x=1$일 때 $t=3$이므로

$$\int_{-1}^1 f(2x+1)dx=\int_{-1}^3 f(t)\cdot\frac{1}{2}dt=\frac{1}{2}\int_{-1}^3 f(x)dx=\frac{k}{2}$$

답 ③

1148 $x+1=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=1$

$x=0$일 때 $t=1$, $x=2$일 때 $t=3$이므로

$$\int_0^2 e^x f(x+1)dx=\int_1^3 e^{t-1}f(t)dt$$

이때 $1\le t\le 3$에서 $f(t)=2$이므로

$$\int_1^3 e^{t-1}f(t)dt=\int_1^3 2e^{t-1}dt=\left[2e^{t-1}\right]_1^3=2(e^2-1)$$

답 ③

다른 풀이 $f(x)=\begin{cases}2x & (0\le x\le 1)\\ 2 & (1\le x\le 3)\end{cases}$에서

$$f(x+1)=\begin{cases}2x+2 & (-1\le x\le 0)\\ 2 & (0\le x\le 2)\end{cases}$$

$$\therefore \int_0^2 e^x f(x+1)dx=\int_0^2 2e^x dx=\left[2e^x\right]_0^2=2(e^2-1)$$

1149 $f(a+x)=f(a-x)$이므로 x 대신 $a-x$를 대입하면

$f(2a-x)=f(x)$

$$\therefore \int_0^a\{f(2x)+f(2a-x)\}dx=\int_0^a\{f(2x)+f(x)\}dx=\int_0^a f(2x)dx+\int_0^a f(x)dx=\int_0^a f(2x)dx+4$$ ······ ㉠ ··· ❶

$\int_0^a f(2x)dx$에서 $2x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=2$

$x=0$일 때 $t=0$, $x=a$일 때 $t=2a$이므로

$$\int_0^a f(2x)dx=\int_0^{2a} f(t)\cdot\frac{1}{2}dt=\frac{1}{2}\left\{\int_0^a f(t)dt+\int_a^{2a} f(t)dt\right\}$$

또 $f(a+x)=f(a-x)$이므로 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=a$에 대하여 대칭이다.

즉 $\int_a^{2a} f(t)dt=\int_0^a f(t)dt$이므로

$$\frac{1}{2}\left\{\int_0^a f(t)dt+\int_a^{2a} f(t)dt\right\}=\frac{1}{2}\cdot 2\int_0^a f(t)dt$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 4=4 \quad \cdots ❷$$

따라서 ㉠에서 구하는 값은

$4+4=8$ ⋯ ❸

답 8

채점 기준	비율
❶ $\int_0^a \{f(2x)+f(2a-x)\}dx$를 간단히 할 수 있다.	40 %
❷ $\int_0^a f(2x)dx$의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ $\int_0^a \{f(2x)+f(2a-x)\}dx$의 값을 구할 수 있다.	10 %

1150 $5-2x=t$로 놓으면 $\dfrac{dt}{dx}=-2$

$x=1$일 때 $t=3$, $x=2$일 때 $t=1$이므로

$$\int_1^2 \frac{1}{(5-2x)^2}dx=\int_3^1 \frac{1}{t^2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)dt=\int_1^3 \frac{1}{2}t^{-2}dt$$

$$=\left[-\frac{1}{2}t^{-1}\right]_1^3$$

$$=-\frac{1}{6}-\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{3}$$

답 ①

1151 $x^2+x+1=t$로 놓으면 $\dfrac{dt}{dx}=2x+1$

$x=0$일 때 $t=1$, $x=2$일 때 $t=7$이므로

$$\int_0^2 \frac{4x+2}{(x^2+x+1)^3}dx=\int_1^7 \frac{2}{t^3}dt=\int_1^7 2t^{-3}dt$$

$$=\left[-t^{-2}\right]_1^7$$

$$=-\frac{1}{49}-(-1)=\frac{48}{49}$$

답 ⑤

1152 $x>2$에서

$$f'(x)=\frac{3x-1}{\sqrt{x-2}}$$

$$\therefore f(6)-f(3)=\int_3^6 f'(x)dx$$

$$=\int_3^6 \frac{3x-1}{\sqrt{x-2}}dx \quad \cdots ❶$$

$x-2=t$로 놓으면 $\dfrac{dt}{dx}=1$

$x=3$일 때 $t=1$, $x=6$일 때 $t=4$이므로

$$\int_3^6 \frac{3x-1}{\sqrt{x-2}}dx=\int_1^4 \frac{3(t+2)-1}{\sqrt{t}}dt=\int_1^4 \frac{3t+5}{\sqrt{t}}dt$$

$$=\int_1^4 (3t^{\frac{1}{2}}+5t^{-\frac{1}{2}})dt$$

$$=\left[2t^{\frac{3}{2}}+10t^{\frac{1}{2}}\right]_1^4$$

$$=36-12=24 \quad \cdots ❷$$

답 24

채점 기준	비율
❶ $f(6)-f(3)$을 정적분으로 나타낼 수 있다.	40 %
❷ $f(6)-f(3)$의 값을 구할 수 있다.	60 %

1153 $\displaystyle\int_0^{\ln 3} \frac{e^x}{e^x+e^{-x}}dx=\int_0^{\ln 3} \frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}dx$

$e^{2x}+1=t$로 놓으면 $\dfrac{dt}{dx}=2e^{2x}$

$x=0$일 때 $t=2$, $x=\ln 3$일 때 $t=10$이므로

$e^{2\ln 3}+1=e^{\ln 9}+1=9+1=10$

$$\int_0^{\ln 3} \frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}dx=\int_2^{10} \frac{1}{t}\cdot\frac{1}{2}dt$$

$$=\left[\frac{1}{2}\ln|t|\right]_2^{10}$$

$$=\frac{1}{2}(\ln 10-\ln 2)$$

$$=\frac{1}{2}\ln 5$$

답 $\frac{1}{2}\ln 5$

1154 $\displaystyle\int_0^2 (x+1)^2e^{x^2}dx-\int_0^2 (x-1)^2e^{x^2}dx$

$$=\int_0^2 e^{x^2}\{(x^2+2x+1)-(x^2-2x+1)\}dx$$

$$=\int_0^2 4xe^{x^2}dx \quad \cdots ❶$$

$x^2=t$로 놓으면 $\dfrac{dt}{dx}=2x$

$x=0$일 때 $t=0$, $x=2$일 때 $t=4$이므로

$$\int_0^2 4xe^{x^2}dx=\int_0^4 2e^t dt=\left[2e^t\right]_0^4$$

$$=2(e^4-1) \quad \cdots ❷$$

답 $2(e^4-1)$

채점 기준	비율
❶ 주어진 식을 간단히 할 수 있다.	40 %
❷ 정적분의 값을 구할 수 있다.	60 %

1155 $\ln x-1=t$로 놓으면 $\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{1}{x}$

$x=\dfrac{1}{e}$일 때 $t=-2$, $x=1$일 때 $t=-1$이므로

$$\int_{\frac{1}{e}}^1 \frac{1}{x(\ln x-1)^3}dx=\int_{-2}^{-1} \frac{1}{t^3}dt=\int_{-2}^{-1} t^{-3}dt$$

$$=\left[-\frac{1}{2}t^{-2}\right]_{-2}^{-1}$$

$$=-\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{8}\right)=-\frac{3}{8}$$

답 ③

1156 $\ln x=t$로 놓으면 $\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{1}{x}$

$x=1$일 때 $t=0$, $x=k$일 때 $t=\ln k$이므로

$$f(k)=\int_1^k \frac{\sqrt{\ln x}}{x}dx=\int_0^{\ln k}\sqrt{t}\,dt$$

$$=\int_0^{\ln k} t^{\frac{1}{2}}dt=\left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_0^{\ln k}$$

$$=\frac{2}{3}\ln k\sqrt{\ln k}$$

$$\therefore f(k^{36})=\frac{2}{3}\ln k^{36}\sqrt{\ln k^{36}}$$
$$=\frac{2}{3}\cdot 36\ln k\cdot 6\sqrt{\ln k}$$
$$=216\cdot\frac{2}{3}\ln k\sqrt{\ln k}$$
$$=216f(k)$$

답 ⑤

1157 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\sin x\,dx$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^2 x)\sin x\,dx$$

$\cos x=t$로 놓으면 $\quad\frac{dt}{dx}=-\sin x$

$x=0$일 때 $t=1$, $x=\frac{\pi}{2}$일 때 $t=0$이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^2 x)\sin x\,dx=\int_1^0(1-t^2)\cdot(-1)dt$$
$$=\int_0^1(1-t^2)dt$$
$$=\left[t-\frac{1}{3}t^3\right]_0^1$$
$$=\frac{2}{3}$$

답 $\frac{2}{3}$

1158 $\int_e^{e^3}\frac{a+\ln x}{x}dx$에서 $\ln x=t$로 놓으면 $\quad\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}$

$x=e$일 때 $t=1$, $x=e^3$일 때 $t=3$이므로

$$\int_e^{e^3}\frac{a+\ln x}{x}dx=\int_1^3(a+t)dt=\left[at+\frac{1}{2}t^2\right]_1^3$$
$$=\left(3a+\frac{9}{2}\right)-\left(a+\frac{1}{2}\right)$$
$$=2a+4 \quad\cdots ❶$$

$8\int_0^{\frac{\pi}{6}}(1-\sin x)\cos x\,dx$에서 $1-\sin x=s$로 놓으면

$$\frac{ds}{dx}=-\cos x$$

$x=0$일 때 $s=1$, $x=\frac{\pi}{6}$일 때 $s=\frac{1}{2}$이므로

$$8\int_0^{\frac{\pi}{6}}(1-\sin x)\cos x\,dx=8\int_1^{\frac{1}{2}}s\cdot(-1)\,ds=8\int_{\frac{1}{2}}^1 s\,ds$$
$$=8\left[\frac{1}{2}s^2\right]_{\frac{1}{2}}^1$$
$$=8\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{8}\right)=3 \quad\cdots ❷$$

따라서 $2a+4=3$이므로 $\quad 2a=-1$

$$\therefore a=-\frac{1}{2} \quad\cdots ❸$$

답 $-\frac{1}{2}$

채점 기준	비율
❶ 좌변을 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40 %
❷ 우변의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ a의 값을 구할 수 있다.	20 %

1159 $\sin x=t$로 놓으면 $\quad\frac{dt}{dx}=\cos x$

$x=0$일 때 $t=0$, $x=\frac{\pi}{2}$일 때 $t=1$이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x)\cos x\,dx=\int_0^1 f(t)dt=\int_0^1(e^t+t^2)dt$$
$$=\left[e^t+\frac{1}{3}t^3\right]_0^1$$
$$=\left(e+\frac{1}{3}\right)-1=e-\frac{2}{3}$$

답 $e-\frac{2}{3}$

유형 10 삼각함수를 이용한 치환적분법

본책 171쪽

① 피적분함수가 $\sqrt{a^2-x^2}$ (a는 상수) 꼴일 때

$$x=a\sin\theta\left(-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right)$$

로 치환한 후 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$임을 이용한다.

② 피적분함수가 $\frac{1}{x^2+a^2}$ (a는 상수) 꼴일 때

$$x=a\tan\theta\left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$$

로 치환한 후 $\tan^2\theta+1=\sec^2\theta$임을 이용한다.

1160 $x=a\tan\theta\left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$로 놓으면

$$\frac{dx}{d\theta}=a\sec^2\theta$$

$x=0$일 때 $\theta=0$, $x=a$일 때 $\theta=\frac{\pi}{4}$이므로

$$\int_0^a\frac{1}{x^2+a^2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{a^2\tan^2\theta+a^2}\cdot a\sec^2\theta\,d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{a\sec^2\theta}{a^2\sec^2\theta}d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{a}d\theta$$
$$=\left[\frac{1}{a}\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4a}$$

따라서 $\frac{\pi}{4a}=\pi$이므로 $\quad a=\frac{1}{4}$

답 ①

1161 $x=4\sin\theta\left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$로 놓으면

$$\frac{dx}{d\theta}=4\cos\theta$$

$x=0$일 때 $\theta=0$, $x=2$일 때 $\theta=\frac{\pi}{6}$이므로

$$\int_0^2\frac{1-x}{\sqrt{16-x^2}}dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1-4\sin\theta}{\sqrt{16-16\sin^2\theta}}\cdot 4\cos\theta\,d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{(1-4\sin\theta)4\cos\theta}{4\cos\theta}d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{6}}(1-4\sin\theta)d\theta$$
$$=\left[\theta+4\cos\theta\right]_0^{\frac{\pi}{6}}$$
$$=\frac{\pi}{6}+2\sqrt{3}-4$$

답 $\frac{\pi}{6}+2\sqrt{3}-4$

1162 $x=2\sin\theta\left(-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right)$로 놓으면

$$\frac{dx}{d\theta}=2\cos\theta$$

$x=0$일 때 $\theta=0$, $x=2$일 때 $\theta=\frac{\pi}{2}$이므로

$$\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4-4\sin^2\theta}\cdot 2\cos\theta\,d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\cos^2\theta\,d\theta$$

이때 $\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1$에서 $\cos^2\theta=\frac{\cos 2\theta+1}{2}$이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\cos^2\theta\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2(\cos 2\theta+1)d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\cos 2\theta+2)d\theta$$
$$=\Big[\sin 2\theta+2\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\pi$$

따라서 반지름의 길이가 r인 원의 넓이가 π이므로

$\pi r^2=\pi$ $\therefore r=1$ ($\because r>0$)

답 ②

1163 $\cos x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=-\sin x$

$x=0$일 때 $t=1$, $x=\frac{\pi}{2}$일 때 $t=0$이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\cos^2 x+1}dx=\int_1^0 \frac{-1}{t^2+1}dt=\int_0^1 \frac{1}{t^2+1}dt \quad \cdots ❶$$

$t=\tan\theta\left(-\frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{\pi}{4}\right)$로 놓으면 $\frac{dt}{d\theta}=\sec^2\theta$

$t=0$일 때 $\theta=0$, $t=1$일 때 $\theta=\frac{\pi}{4}$이므로

$$\int_0^1 \frac{1}{t^2+1}dt=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2\theta}{\tan^2\theta+1}d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2\theta}{\sec^2\theta}d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}} 1\,d\theta=\Big[\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}$$
$$=\frac{\pi}{4} \quad \cdots ❷$$

답 $\frac{\pi}{4}$

채점 기준	비율
❶ $\cos x=t$로 치환하여 피적분함수를 변형할 수 있다.	40 %
❷ $t=\tan\theta$로 치환하여 정적분의 값을 구할 수 있다.	60 %

참고 $\cos x=t$에서 $-1\le t\le 1$이므로 $t=\tan\theta$에서

$-1\le\tan\theta\le 1$ $\therefore -\frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{\pi}{4}$

유형 11~12 부분적분법을 이용한 정적분

본책 171, 172쪽

피적분함수가 두 함수의 곱의 꼴로 되어 있고 치환적분법을 이용할 수 없을 때, 미분하기 쉬운 것을 $f(x)$, 적분하기 쉬운 것을 $g'(x)$로 놓고 부분적분법을 이용하여 정적분의 값을 구한다.

➡ $\int_a^b f(x)g'(x)\,dx=\Big[f(x)g(x)\Big]_a^b-\int_a^b f'(x)g(x)dx$

1164 $f(x)=x-1$, $g'(x)=e^{-x}$으로 놓으면

$f'(x)=1$, $g(x)=-e^{-x}$

$$\therefore \int_0^1 (x-1)e^{-x}\,dx=\Big[-(x-1)e^{-x}\Big]_0^1-\int_0^1(-e^{-x})dx$$
$$=-1-\Big[e^{-x}\Big]_0^1=-1-\left(\frac{1}{e}-1\right)$$
$$=-\frac{1}{e}$$

답 ②

1165 $f(x)=\ln x$, $g'(x)=x$로 놓으면

$f'(x)=\frac{1}{x}$, $g(x)=\frac{1}{2}x^2$

$$\therefore \int_1^e x\ln x\,dx=\Big[\frac{1}{2}x^2\ln x\Big]_1^e-\int_1^e \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{2}x^2\,dx$$
$$=\frac{1}{2}e^2-\Big[\frac{1}{4}x^2\Big]_1^e$$
$$=\frac{1}{2}e^2-\left(\frac{1}{4}e^2-\frac{1}{4}\right)$$
$$=\frac{1}{4}e^2+\frac{1}{4}$$

답 ②

1166 $$\int_0^1 f(x)\,dx-\int_\pi^1 f(x)\,dx=\int_0^1 f(x)\,dx+\int_1^\pi f(x)\,dx$$
$$=\int_0^\pi f(x)\,dx$$
$$=\int_0^\pi x\cos x\,dx \quad \cdots ❶$$

$u(x)=x$, $v'(x)=\cos x$로 놓으면

$u'(x)=1$, $v(x)=\sin x$

$$\therefore \int_0^\pi x\cos x\,dx=\Big[x\sin x\Big]_0^\pi-\int_0^\pi \sin x\,dx$$
$$=-\Big[-\cos x\Big]_0^\pi$$
$$=-(1+1)=-2 \quad \cdots ❷$$

답 -2

채점 기준	비율
❶ 주어진 식을 간단히 할 수 있다.	30 %
❷ 정적분의 값을 구할 수 있다.	70 %

1167 $\int_1^3 e^x f(x)\,dx$

$$=\int_1^2 (x-1)e^x\,dx+\int_2^3 (-x+3)e^x\,dx \quad \cdots\cdots ㉠$$

$\int_1^2 (x-1)e^x\,dx$에서 $u(x)=x-1$, $v'(x)=e^x$으로 놓으면

$u'(x)=1$, $v(x)=e^x$

$$\therefore \int_1^2 (x-1)e^x\,dx=\Big[(x-1)e^x\Big]_1^2-\int_1^2 e^x\,dx$$
$$=e^2-\Big[e^x\Big]_1^2$$
$$=e^2-(e^2-e)$$
$$=e \quad \cdots\cdots ㉡$$

$\int_2^3 (-x+3)e^x\,dx$에서 $s(x)=-x+3$, $t'(x)=e^x$으로 놓으면

$s'(x)=-1$, $t(x)=e^x$

$$\therefore \int_2^3 (-x+3)e^x\,dx=\Big[(-x+3)e^x\Big]_2^3-\int_2^3(-e^x)\,dx$$
$$=-e^2-\Big[-e^x\Big]_2^3$$
$$=-e^2-(-e^3+e^2)$$
$$=e^3-2e^2 \quad \cdots\cdots ㉢$$

㉡, ㉢을 ㉠에 대입하면

$\int_1^3 e^x f(x)\,dx=e^3-2e^2+e$

답 ⑤

1168 $\int_0^1 (e^x-ax)^2 dx=\int_0^1 (e^{2x}-2axe^x+a^2x^2)\,dx$

$$=\int_0^1 (e^{2x}+a^2x^2)\,dx-2a\int_0^1 xe^x\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{2}e^{2x}+\frac{a^2}{3}x^3\right]_0^1-2a\int_0^1 xe^x\,dx$$

$$=\frac{1}{2}e^2+\frac{a^2}{3}-\frac{1}{2}-2a\int_0^1 xe^x\,dx \quad \cdots\cdots ㉠$$

$\int_0^1 xe^x\,dx$에서 $f(x)=x$, $g'(x)=e^x$으로 놓으면

$f'(x)=1$, $g(x)=e^x$

$\therefore \int_0^1 xe^x\,dx=\left[xe^x\right]_0^1-\int_0^1 e^x\,dx=e-\left[e^x\right]_0^1$

$=e-(e-1)=1 \quad \cdots\cdots ㉡$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$\int_0^1 (e^x-ax)^2 dx=\frac{1}{2}e^2+\frac{a^2}{3}-\frac{1}{2}-2a$$

$$=\frac{1}{3}(a-3)^2+\frac{1}{2}e^2-\frac{7}{2}$$

따라서 $a=3$일 때 주어진 정적분의 값이 최소이다. 답 3

1169 $f(x)=\sin x$, $g'(x)=e^x$으로 놓으면

$f'(x)=\cos x$, $g(x)=e^x$

$$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\sin x\,dx=\left[e^x\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\cos x\,dx$$

$$=e^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\cos x\,dx \quad \cdots\cdots ㉠$$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\cos x\,dx$에서 $u(x)=\cos x$, $v'(x)=e^x$으로 놓으면

$u'(x)=-\sin x$, $v(x)=e^x$

$$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\cos x\,dx=\left[e^x\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}} (-e^x\sin x)\,dx$$

$$=-1+\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\sin x\,dx \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\sin x\,dx=e^{\frac{\pi}{2}}-\left(-1+\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\sin x\,dx\right)$$

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\sin x\,dx=e^{\frac{\pi}{2}}+1$$

$$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\sin x\,dx=\frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{2}$$

따라서 $a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{1}{2}$이므로

$a+b=1$ 답 1

1170 $f(x)=x^2$, $g'(x)=\cos x$로 놓으면

$f'(x)=2x$, $g(x)=\sin x$

$$\therefore \int_0^{\pi} x^2\cos x\,dx=\left[x^2\sin x\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi} 2x\sin x\,dx$$

$$=-2\int_0^{\pi} x\sin x\,dx \quad \cdots\cdots ㉠$$

$\int_0^{\pi} x\sin x\,dx$에서 $u(x)=x$, $v'(x)=\sin x$로 놓으면

$u'(x)=1$, $v(x)=-\cos x$

$$\therefore \int_0^{\pi} x\sin x\,dx=\left[-x\cos x\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi} (-\cos x)\,dx$$

$$=\pi+\int_0^{\pi} \cos x\,dx$$

$$=\pi+\left[\sin x\right]_0^{\pi}=\pi \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉡을 ㉠에 대입하면 $\int_0^{\pi} x^2\cos x\,dx=-2\pi$ 답 ①

1171 $f(x)=x^2$, $g'(x)=e^x$으로 놓으면

$f'(x)=2x$, $g(x)=e^x$

$$\therefore \int_0^{\ln 2} x^2e^x\,dx=\left[x^2e^x\right]_0^{\ln 2}-\int_0^{\ln 2} 2xe^x\,dx$$

$$=2(\ln 2)^2-2\int_0^{\ln 2} xe^x\,dx \quad \cdots\cdots ㉠$$

$\int_0^{\ln 2} xe^x\,dx$에서 $u(x)=x$, $v'(x)=e^x$으로 놓으면

$u'(x)=1$, $v(x)=e^x$

$$\therefore \int_0^{\ln 2} xe^x\,dx=\left[xe^x\right]_0^{\ln 2}-\int_0^{\ln 2} e^x\,dx$$

$$=2\ln 2-\left[e^x\right]_0^{\ln 2}$$

$$=2\ln 2-1 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$\int_0^{\ln 2} x^2e^x\,dx=2(\ln 2)^2-2(2\ln 2-1)$$

$$=2(\ln 2)^2-4\ln 2+2$$

답 ①

유형 13 정적분을 포함한 등식 ; 아래끝과 위끝이 상수일 때 본책 172쪽

$f(x)=g(x)+\int_a^b f(t)\,dt$ 꼴의 등식이 주어지면 $f(x)$는 다음과 같은 순서로 구한다.

(i) $\int_a^b f(t)dt=k$ (k는 상수)로 놓는다.

(ii) $f(x)=g(x)+k$를 (i)의 식에 대입하여 k의 값을 구한다.

(iii) k의 값을 $f(x)=g(x)+k$에 대입하여 $f(x)$를 구한다.

1172 $\int_0^2 f(t)dt=k$ (k는 상수) $\cdots\cdots ㉠$

로 놓으면 $f(x)=e^x+k$

이것을 ㉠에 대입하면

$\int_0^2 (e^t+k)dt=k$, $\left[e^t+kt\right]_0^2=k$

$e^2+2k-1=k \quad \therefore k=-e^2+1$

따라서 $f(x)=e^x-e^2+1$이므로

$f(2)=1$ 답 ①

1173 $\int_1^e f(t)dt=k$ (k는 상수) $\cdots\cdots ㉠$

로 놓으면 $f(x)=\ln x+k$

이것을 ㉠에 대입하면 $\int_1^e (\ln t+k)dt=k$

$\int_1^e (\ln t+k)dt$에서 $u(t)=\ln t+k$, $v'(t)=1$로 놓으면

$u'(t)=\frac{1}{t}$, $v(t)=t$

$\therefore \int_1^e (\ln t+k)dt=\left[t\ln t+kt\right]_1^e-\int_1^e \frac{1}{t}\cdot t\,dt$

$=e+ke-k-\int_1^e 1\,dt$

$=e+ke-k-\left[t\right]_1^e$

$=e+ke-k-(e-1)$

$=ke-k+1$

즉 $ke-k+1=k$이므로 $\quad (2-e)k=1 \quad \therefore k=\frac{1}{2-e}$

따라서 $f(x)=\ln x+\frac{1}{2-e}$이므로

$f(e)=1+\frac{1}{2-e}=\frac{3-e}{2-e}$ 답 ②

1174 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\cos t\,dt=k$ (k는 상수) ⋯⋯ ㉠

로 놓으면 $\quad f(x)=\sin x-k$ ⋯ ❶

이것을 ㉠에 대입하면

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t-k)\cos t\,dt=k$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t-k)\cos t\,dt$에서 $\sin t-k=\theta$로 놓으면

$\frac{d\theta}{dt}=\cos t$

$t=0$일 때 $\theta=-k$, $t=\frac{\pi}{2}$일 때 $\theta=1-k$이므로

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t-k)\cos t\,dt=\int_{-k}^{1-k}\theta\,d\theta=\left[\frac{1}{2}\theta^2\right]_{-k}^{1-k}$

$=\frac{1}{2}(1-k)^2-\frac{1}{2}(-k)^2$

$=\frac{1}{2}-k$

즉 $\frac{1}{2}-k=k$이므로 $\quad 2k=\frac{1}{2} \quad \therefore k=\frac{1}{4}$ ⋯ ❷

$\therefore f(x)=\sin x-\frac{1}{4}$ ⋯ ❸

답 $f(x)=\sin x-\frac{1}{4}$

채점 기준	비율
❶ 정적분을 k로 놓고 $f(x)$를 k를 이용하여 나타낼 수 있다.	30 %
❷ k의 값을 구할 수 있다.	60 %
❸ $f(x)$를 구할 수 있다.	10 %

유형 14 정적분을 포함한 등식 ; 아래끝 또는 위끝에 변수가 있을 때

본책 173쪽

$\int_a^x f(t)\,dt=g(x)$ 꼴의 등식이 주어지면 다음을 이용한다.

① 양변을 x에 대하여 미분 ➡ $f(x)=g'(x)$

② 양변에 $x=a$를 대입 ➡ $g(a)=0$

1175 $xf(x)=2x+\int_1^x f(t)\,dt$ ⋯⋯ ㉠

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)+xf'(x)=2+f(x)$

$xf'(x)=2 \quad \therefore f'(x)=\frac{2}{x}$ ($\because x\neq 0$)

$\therefore f(x)=\int \frac{2}{x}dx=2\ln|x|+C$

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면 $f(1)=2$이므로

$C=2$

따라서 $f(x)=2\ln|x|+2$이므로

$f(e)=2+2=4$ 답 4

1176 $\int_\pi^x f(t)\,dt=x\sin x+a\cos x+1$의 양변에 $x=\pi$를 대입하면

$0=-a+1 \quad \therefore a=1$

$\int_\pi^x f(t)\,dt=x\sin x+\cos x+1$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=\sin x+x\cos x-\sin x=x\cos x$

$\therefore f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\pi}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}$ 답 $\frac{\pi}{6}$

1177 $f(x)=\int_0^x \frac{1}{t^2+1}dt$ ⋯⋯ ㉠

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=\frac{1}{x^2+1}$ ⋯ ❶

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면 $\quad f(0)=0$ ⋯ ❷

$\int_0^a \frac{e^{f(x)}}{x^2+1}dx$에서 $f(x)=h$로 놓으면

$\frac{dh}{dx}=f'(x)=\frac{1}{x^2+1}$

$x=0$일 때 $h=f(0)=0$, $x=a$일 때 $h=f(a)=1$이므로

$\int_0^a \frac{e^{f(x)}}{x^2+1}dx=\int_0^1 e^h\,dh=\left[e^h\right]_0^1=e-1$ ⋯ ❸

답 $e-1$

채점 기준	비율
❶ $f'(x)$를 구할 수 있다.	30 %
❷ $f(0)$의 값을 구할 수 있다.	20 %
❸ $\int_0^a \frac{e^{f(x)}}{x^2+1}dx$의 값을 구할 수 있다.	50 %

1178 $\int_1^x f(t)dt=xf(x)-x^2e^{2x}$ ⋯⋯ ㉠

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=f(x)+xf'(x)-2xe^{2x}-2x^2e^{2x}$

$xf'(x)=2x(x+1)e^{2x}$

따라서 $f'(x)=2(x+1)e^{2x}$이므로

$f(x)=\int 2(x+1)e^{2x}dx$

$u(x)=x+1$, $v'(x)=2e^{2x}$으로 놓으면

$u'(x)=1$, $v(x)=e^{2x}$

$\therefore f(x)=(x+1)e^{2x}-\int e^{2x}dx$

$=(x+1)e^{2x}-\frac{1}{2}e^{2x}+C$

$=\left(x+\frac{1}{2}\right)e^{2x}+C$

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$0=f(1)-e^2 \qquad \therefore f(1)=e^2$

즉 $\frac{3}{2}e^2+C=e^2$이므로 $\qquad C=-\frac{1}{2}e^2$

따라서 $f(x)=\left(x+\frac{1}{2}\right)e^{2x}-\frac{1}{2}e^2$이므로

$f(0)=\frac{1-e^2}{2}$

답 ②

유형 15 정적분을 포함한 등식; 아래끝 또는 위끝과 피적분함수에 변수가 있을 때 본책 173쪽

$\int_a^x (x\pm t)f(t)\,dt=g(x)$ 꼴의 등식이 주어지면 다음을 이용한다.

① 좌변을

$\int_a^x (x\pm t)f(t)\,dt=x\int_a^x f(t)dt\pm\int_a^x tf(t)\,dt$ (복호동순)

와 같이 변형한 후 양변을 x에 대하여 미분한다.

② 양변에 $x=a$를 대입 ➡ $g(a)=0$

1179 $\int_\pi^x (x-t)f(t)dt=\sin x+ax-\pi$ …… ㉠

에서 $\quad x\int_\pi^x f(t)dt-\int_\pi^x tf(t)dt=\sin x+ax-\pi$

위의 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\int_\pi^x f(t)dt+xf(x)-xf(x)=\cos x+a$

$\therefore \int_\pi^x f(t)dt=\cos x+a$

위의 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=-\sin x \qquad \therefore b=f(2\pi)=0$

㉠의 양변에 $x=\pi$를 대입하면

$0=a\pi-\pi \qquad \therefore a=1$

$\therefore a+b=1$

답 1

1180 $\int_1^x (x+t)f(t)dt=(2x-1)e^x-ex$에서

$x\int_1^x f(t)dt+\int_1^x tf(t)dt=(2x-1)e^x-ex$

위의 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\int_1^x f(t)dt+xf(x)+xf(x)=2e^x+(2x-1)e^x-e$

$\therefore \int_1^x f(t)dt+2xf(x)=(2x+1)e^x-e$

위의 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$2f(1)=3e-e=2e \qquad \therefore f(1)=e$

답 ③

1181 $\int_0^x f(t)\,dt=\int_0^x (x-t)f(t)\,dt+e^2x$에서

$\int_0^x f(t)\,dt=x\int_0^x f(t)\,dt-\int_0^x tf(t)\,dt+e^2x$

위의 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=\int_0^x f(t)\,dt+xf(x)-xf(x)+e^2$

$\therefore \int_0^x f(t)\,dt=f(x)-e^2$ …… ㉠

㉠의 양변을 다시 x에 대하여 미분하면

$f(x)=f'(x), \qquad \frac{f'(x)}{f(x)}=1\ (\because f(x)>0)$

$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx=\int 1\,dx$이므로

$\ln f(x)=x+C$

$\therefore f(x)=e^{x+C}$

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면

$0=f(0)-e^2 \qquad \therefore f(0)=e^2$

즉 $e^C=e^2$이므로 $\qquad C=2$

따라서 $f(x)=e^{x+2}$이므로

$f(3)=e^5$

답 e^5

유형 16~17 정적분으로 정의된 함수의 극대·극소, 최대·최소 본책 174쪽

$f(x)=\int_a^x g(t)dt$와 같이 정의된 함수 $f(x)$의 극값과 최댓값 또는 최솟값은 다음과 같은 순서로 구한다.

(i) 양변을 x에 대하여 미분한다. ➡ $f'(x)=g(x)$

(ii) $f'(b)=0$을 만족시키는 b의 값을 구한다.

(iii) $x=b$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호를 조사한다.

- 양 → 음 ➡ $f(x)$는 $x=b$에서 극댓값 $f(b)$를 갖는다.
- 음 → 양 ➡ $f(x)$는 $x=b$에서 극솟값 $f(b)$를 갖는다.

(iv) 정의역에서 $f(x)$의 최댓값 또는 최솟값을 구한다.

1182 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=(1+2\sin x)\cos x$

$f'(x)=0$에서 $\qquad \sin x=-\frac{1}{2}$ 또는 $\cos x=0$

$\therefore x=\frac{\pi}{2}\ (\because 0<x<\pi)$

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	극대	↘	

따라서 $f(x)$는 $x=\frac{\pi}{2}$에서 극대이므로 극댓값은

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+2\sin t)\cos t\,dt$

$\sin t=s$로 놓으면 $\qquad \frac{ds}{dt}=\cos t$

$t=0$일 때 $s=0$, $t=\frac{\pi}{2}$일 때 $s=1$이므로

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\int_0^1(1+2s)ds=\left[s+s^2\right]_0^1=2$

답 ②

1183 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=x\sqrt{x}-x=x(\sqrt{x}-1)$

$f'(x)=0$에서 $\qquad x=1\ (\because x>0)$

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	극소	↗

따라서 $f(x)$는 $x=1$에서 극소이므로 극솟값은

$$f(1)=\int_0^1 (t\sqrt{t}-t)dt=\int_0^1 (t^{\frac{3}{2}}-t)dt$$
$$=\left[\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}-\frac{1}{2}t^2\right]_0^1=-\frac{1}{10}$$

답 ①

1184 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=(x-1)(e^x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 $f(x)$는 $x=0$에서 극대, $x=1$에서 극소이므로

$$a=f(0)=\int_2^0 (t-1)(e^t-1)dt$$

$u(t)=t-1$, $v'(t)=e^t-1$로 놓으면

$u'(t)=1$, $v(t)=e^t-t$

$$\therefore a=\Big[(t-1)(e^t-t)\Big]_2^0-\int_2^0 (e^t-t)dt$$
$$=1-e^2-\left[e^t-\frac{1}{2}t^2\right]_2^0$$
$$=1-e^2-(3-e^2)=-2$$ ➊

같은 방법으로 하면

$$b=f(1)=\int_2^1 (t-1)(e^t-1)dt$$
$$=\Big[(t-1)(e^t-t)\Big]_2^1-\int_2^1 (e^t-t)dt$$
$$=2-e^2-\left[e^t-\frac{1}{2}t^2\right]_2^1$$
$$=2-e^2-\left(-e^2+e+\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2}-e$$ ➋

$$\therefore a+4b=-2+4\left(\frac{1}{2}-e\right)=-4e$$ ➌

답 $-4e$

채점 기준	비율
➊ a의 값을 구할 수 있다.	50 %
➋ b의 값을 구할 수 있다.	40 %
➌ $a+4b$의 값을 구할 수 있다.	10 %

1185 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f'(x)=x+1+\frac{2}{x+1}-\left(x+\frac{2}{x}\right)=1+\frac{2}{x+1}-\frac{2}{x}$$
$$=\frac{x^2+x-2}{x(x+1)}=\frac{(x+2)(x-1)}{x(x+1)}$$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ ($\because x>0$)

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	극소	↗

따라서 $f(x)$는 $x=1$에서 극소이면서 최소이므로 최솟값은

$$f(1)=\int_1^2\left(t+\frac{2}{t}\right)dt=\left[\frac{1}{2}t^2+2\ln|t|\right]_1^2$$
$$=2+2\ln 2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}+2\ln 2$$

답 $\frac{3}{2}+2\ln 2$

1186 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=2-e^x$

$f'(x)=0$에서 $e^x=2$ $\therefore x=\ln 2$ ➊

x	$\cdots$	$\ln 2$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	극대	↘

따라서 $f(x)$는 $x=\ln 2$에서 극대이면서 최대이므로 최댓값은

$$f(\ln 2)=\int_1^{\ln 2}(2-e^t)dt=\Big[2t-e^t\Big]_1^{\ln 2}$$
$$=(2\ln 2-2)-(2-e)$$
$$=2\ln 2+e-4$$ ➋

즉 $a=\ln 2$, $b=2\ln 2+e-4$이므로

$b-2a=2\ln 2+e-4-2\ln 2=e-4$ ➌

답 $e-4$

채점 기준	비율
➊ $f'(x)=0$일 때의 x의 값을 구할 수 있다.	30 %
➋ $f(x)$의 최댓값을 구할 수 있다.	50 %
➌ $b-2a$의 값을 구할 수 있다.	20 %

1187 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=xe^{x^2-1}$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ ($\because e^{x^2-1}>0$)

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗

따라서 $f(x)$는 $x=0$에서 극소이면서 최소이므로 최솟값은

$$f(0)=\int_{-1}^0 te^{t^2-1}dt$$

$t^2-1=s$로 놓으면 $\frac{ds}{dt}=2t$

$t=-1$일 때 $s=0$, $t=0$일 때 $s=-1$이므로

$$f(0)=\int_0^{-1} e^s\cdot\frac{1}{2}ds=-\frac{1}{2}\int_{-1}^0 e^s ds$$
$$=-\frac{1}{2}\Big[e^s\Big]_{-1}^0=-\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{e}\right)$$
$$=\frac{1}{2e}-\frac{1}{2}$$

답 $\frac{1}{2e}-\frac{1}{2}$

1188 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=1-\ln x$

$f'(x)=0$에서 $\ln x=1$ $\therefore x=e$

x	0	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		↗	극대	↘

따라서 $f(x)$는 $x=e$에서 극대이면서 최대이므로 최댓값은

$$f(e)=\int_1^e (1-\ln t)dt$$

$u(t)=1-\ln t$, $v'(t)=1$로 놓으면

$u'(t)=-\frac{1}{t}$, $v(t)=t$

$$\therefore f(e)=\Big[t(1-\ln t)\Big]_1^e-\int_1^e\left(-\frac{1}{t}\right)\cdot t\,dt$$
$$=-1+\int_1^e 1\,dt$$
$$=-1+\Big[t\Big]_1^e=-1+(e-1)$$
$$=e-2$$

즉 $a=e$, $b=e-2$이므로

$a-b=2$ 답 ③

유형 18 정적분으로 정의된 함수의 극한 ; $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}\int_a^{x+a}f(t)dt$ 꼴 본책 175쪽

함수 $f(x)$의 부정적분을 $F(x)$라 할 때
$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\int_a^{x+a}f(t)dt=\lim_{x\to0}\frac{F(x+a)-F(a)}{x}=F'(a)=f(a)$$
임을 이용한다.

1189 $F'(t)=f(t)$라 하면

$$\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\int_{\frac{\pi}{2}-h}^{\frac{\pi}{2}+h}f(t)dt$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{F\left(\frac{\pi}{2}+h\right)-F\left(\frac{\pi}{2}-h\right)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{F\left(\frac{\pi}{2}+h\right)-F\left(\frac{\pi}{2}\right)-\left\{F\left(\frac{\pi}{2}-h\right)-F\left(\frac{\pi}{2}\right)\right\}}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{F\left(\frac{\pi}{2}+h\right)-F\left(\frac{\pi}{2}\right)}{h}+\lim_{h\to0}\frac{F\left(\frac{\pi}{2}-h\right)-F\left(\frac{\pi}{2}\right)}{-h}$$
$$=F'\left(\frac{\pi}{2}\right)+F'\left(\frac{\pi}{2}\right)=2F'\left(\frac{\pi}{2}\right)$$
$$=2f\left(\frac{\pi}{2}\right)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2t(\sin t+1)dt$$
$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\sin t\cos t(\sin t+1)dt$$

$\sin t=s$로 놓으면 $\frac{ds}{dt}=\cos t$

$t=0$일 때 $s=0$, $t=\frac{\pi}{2}$일 때 $s=1$이므로

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\sin t\cos t(\sin t+1)dt=4\int_0^1 s(s+1)ds$$
$$=4\int_0^1(s^2+s)ds$$
$$=4\left[\frac{1}{3}s^3+\frac{1}{2}s^2\right]_0^1$$
$$=4\cdot\frac{5}{6}=\frac{10}{3}$$

답 $\frac{10}{3}$

1190 $F'(t)=f(t)$라 하면

$$\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\int_{2e}^{2e+h}f(t)dt=\lim_{h\to0}\frac{F(2e+h)-F(2e)}{h}$$
$$=F'(2e)=f(2e)$$
$$=e^{2e}\cdot\ln\frac{2e}{2}=e^{2e}$$

답 ②

1191 $f(t)=1-\tan t$, $F'(t)=f(t)$라 하면

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\int_{-x}^{2x}(1-\tan t)dt$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\int_{-x}^{2x}f(t)dt=\lim_{x\to0}\frac{F(2x)-F(-x)}{x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{F(2x)-F(0)-\{F(-x)-F(0)\}}{x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{F(2x)-F(0)}{2x}\cdot2+\lim_{x\to0}\frac{F(-x)-F(0)}{-x}$$
$$=2F'(0)+F'(0)=3F'(0)$$
$$=3f(0)=3$$

답 ③

유형 19 정적분으로 정의된 함수의 극한 ; $\lim\limits_{x\to a}\frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)\,dt$ 꼴 본책 175쪽

함수 $f(x)$의 부정적분을 $F(x)$라 할 때
$$\lim_{x\to a}\frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)dt=\lim_{x\to a}\frac{F(x)-F(a)}{x-a}=F'(a)=f(a)$$
임을 이용한다.

1192 $f(t)=1+\cos^4 t$, $F'(t)=f(t)$라 하면

$$\lim_{x\to\pi}\frac{1}{\pi-x}\int_\pi^x(1+\cos^4 t)dt=\lim_{x\to\pi}\frac{-1}{x-\pi}\int_\pi^x f(t)dt$$
$$=-\lim_{x\to\pi}\frac{F(x)-F(\pi)}{x-\pi}$$
$$=-F'(\pi)=-f(\pi)$$
$$=-2$$

답 -2

1193 $F'(t)=f(t)$라 하면

$$\lim_{x\to1}\frac{1}{x^3-1}\int_1^x f(t)dt=\lim_{x\to1}\frac{F(x)-F(1)}{x^3-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{F(x)-F(1)}{x-1}\cdot\frac{1}{x^2+x+1}$$
$$=\frac{1}{3}F'(1)=\frac{1}{3}f(1)$$
$$=\frac{2}{3}$$

답 ②

1194 $f(t)=e^{t^2}$, $F'(t)=f(t)$라 하면

$$\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\int_1^{\sqrt{x}}e^{t^2}dt=\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\int_1^{\sqrt{x}}f(t)dt$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{F(\sqrt{x})-F(1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{F(\sqrt{x})-F(1)}{\sqrt{x}-1}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}+1}$$
$$=\frac{1}{2}F'(1)=\frac{1}{2}f(1) \quad \cdots ❶$$
$$=\frac{e}{2} \quad \cdots ❷$$

답 $\frac{e}{2}$

채점 기준	비율
❶ 주어진 식을 간단히 할 수 있다.	80 %
❷ 주어진 식의 값을 구할 수 있다.	20 %

1195 1st $f(x)$를 구한다.

$$2f(x)+\frac{1}{x^2}f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

㉠에 x 대신 $\frac{1}{x}$을 대입하면

$$2f\left(\frac{1}{x}\right)+x^2f(x)=x+x^2$$

양변을 $2x^2$으로 나누면

㉠에서 $\frac{1}{x^2}f\left(\frac{1}{x}\right)$을 소거하기 위해 같은 항이 나오도록 양변을 $2x^2$으로 나눈다.

$$\frac{1}{x^2}f\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{2}f(x)=\frac{1}{2x}+\frac{1}{2} \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠−㉡을 하면

$$\frac{3}{2}f(x)=\frac{1}{2x}+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{2}$$

$$\therefore f(x)=\frac{1}{3x}+\frac{2}{3x^2}-\frac{1}{3}$$

2nd 정적분의 값을 구한다.

$$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{2}}^{2}f(x)dx&=\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left(\frac{1}{3x}+\frac{2}{3x^2}-\frac{1}{3}\right)dx\\&=\frac{1}{3}\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}-1\right)dx\\&=\frac{1}{3}\left[\ln|x|-\frac{2}{x}-x\right]_{\frac{1}{2}}^{2}\\&=\frac{1}{3}\left\{(\ln 2-3)-\left(\ln\frac{1}{2}-\frac{9}{2}\right)\right\}\\&=\frac{2\ln 2}{3}+\frac{1}{2}\end{aligned}$$

$\ln\frac{1}{2}=-\ln 2$

답 ②

참고 함수 $f(x)$가 모든 양수 x에 대하여 주어진 등식을 만족시키므로 주어진 등식에 x 대신 $\frac{1}{x}$을 대입하면 $f(x)$와 $f\left(\frac{1}{x}\right)$에 대한 또 다른 등식을 얻을 수 있다.

다른 풀이 1 ㉠에서

$$f(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)-\frac{1}{2x^2}f\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\begin{aligned}\therefore &\int_{\frac{1}{2}}^{2}f(x)dx\\&=\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)dx-\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{1}{x^2}f\left(\frac{1}{x}\right)dx\\&=\frac{1}{2}\left[\ln|x|-\frac{1}{x}\right]_{\frac{1}{2}}^{2}-\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{1}{x^2}f\left(\frac{1}{x}\right)dx\\&=\ln 2+\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{1}{x^2}f\left(\frac{1}{x}\right)dx \qquad \cdots\cdots ㉢\end{aligned}$$

$\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{1}{x^2}f\left(\frac{1}{x}\right)dx$에서 $\frac{1}{x}=t$로 놓으면 $\quad \frac{dt}{dx}=-\frac{1}{x^2}$

$x=\frac{1}{2}$일 때 $t=2$, $x=2$일 때 $t=\frac{1}{2}$이므로

$$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{1}{x^2}f\left(\frac{1}{x}\right)dx&=\int_{2}^{\frac{1}{2}}f(t)\cdot(-1)\,dt\\&=\int_{\frac{1}{2}}^{2}f(t)dt=\int_{\frac{1}{2}}^{2}f(x)dx \qquad \cdots\cdots ㉣\end{aligned}$$

따라서 ㉣을 ㉢에 대입하면

$$\int_{\frac{1}{2}}^{2}f(x)dx=\ln 2+\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{2}f(x)dx$$

$$\frac{3}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{2}f(x)dx=\ln 2+\frac{3}{4}$$

$$\therefore \int_{\frac{1}{2}}^{2}f(x)dx=\frac{2\ln 2}{3}+\frac{1}{2}$$

다른 풀이 2 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면

$$\left\{2F(x)-F\left(\frac{1}{x}\right)\right\}'=2f(x)+\frac{1}{x^2}f\left(\frac{1}{x}\right)$$

이므로 ㉠의 양변을 적분하면

$$2F(x)-F\left(\frac{1}{x}\right)=\ln|x|-\frac{1}{x}+C$$

$x=2$를 양변에 대입하면

$$2F(2)-F\left(\frac{1}{2}\right)=\ln 2-\frac{1}{2}+C \qquad \cdots\cdots ㉤$$

또 $x=\frac{1}{2}$을 양변에 대입하면

$$2F\left(\frac{1}{2}\right)-F(2)=\ln\frac{1}{2}-2+C \qquad \cdots\cdots ㉥$$

㉤−㉥을 하면

$$3F(2)-3F\left(\frac{1}{2}\right)=2\ln 2+\frac{3}{2}$$

$$\begin{aligned}\therefore \int_{\frac{1}{2}}^{2}f(x)dx&=\Big[F(x)\Big]_{\frac{1}{2}}^{2}\\&=F(2)-F\left(\frac{1}{2}\right)\\&=\frac{2\ln 2}{3}+\frac{1}{2}\end{aligned}$$

1196 1st 주어진 식의 값이 최소일 때를 찾는다.

$$\begin{aligned}&\int_0^a f(x)dx+\int_a^8 g(x)dx\\&=\int_0^a f(x)dx+\int_0^8 g(x)dx-\int_0^a g(x)dx\\&=\int_0^a\{f(x)-g(x)\}dx+\int_0^8 g(x)dx\end{aligned}$$

이때 $\int_0^8 g(x)\,dx$는 상수이므로 주어진 식은 $\int_0^a\{f(x)-g(x)\}dx$의 값이 최소일 때 최솟값을 갖는다.

2nd $0\le x\le 8$에서 함수 $y=f(x)-g(x)$의 그래프의 개형을 그린다.

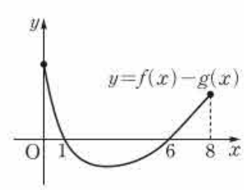
주어진 그래프에서 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가

$0\le x\le 1$일 때, $f(x)\ge g(x)$,

$1\le x\le 6$일 때, $f(x)\le g(x)$,

$6\le x\le 8$일 때, $f(x)\ge g(x)$

이므로 $0\le x\le 8$에서 함수 $y=f(x)-g(x)$의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다.



3rd $\int_0^a f(x)dx+\int_a^8 g(x)dx$의 최솟값을 구한다.

따라서 $\int_0^a\{f(x)-g(x)\}dx$의 값은 $a=6$일 때 최소이므로 구하는 최솟값은

$6\le x\le 8$일 때 $g(x)=\frac{4-(x-4)}{2}=4-\frac{x}{2}$

$\frac{5\cdot 2x}{x^2+4}=\frac{5(x^2+4)'}{x^2+4}$

$$\begin{aligned}&\int_0^6 f(x)dx+\int_6^8 g(x)dx\\&=\int_0^6\left(\frac{5}{2}-\frac{10x}{x^2+4}\right)dx+\int_6^8\left(4-\frac{x}{2}\right)dx\\&=\left[\frac{5}{2}x-5\ln(x^2+4)\right]_0^6+\left[4x-\frac{x^2}{4}\right]_6^8 \ (\because x^2+4>0)\\&=\{(15-5\ln 40)-(-5\ln 4)\}+(16-15)\\&=16-5\ln 10\end{aligned}$$

답 ④

1197 1st 피적분함수를 $f(x)$, $f'(x)$에 대한 식으로 나타낸다.

$f(x)$가 $g(x)$의 역함수이므로

$$f'(x)=\frac{1}{g'(f(x))}$$

$$\therefore \int_1^5 \frac{40}{g'(f(x))\{f(x)\}^2}dx$$

$$=40\int_1^5 \frac{f'(x)}{\{f(x)\}^2}dx \quad \cdots\cdots ㉠$$

(2nd) $f(x)=t$로 치환하여 적분 구간을 구한다.

$f(x)=t$로 놓으면 $\quad \frac{dt}{dx}=f'(x)$

$x=1$일 때 $t=f(1)$이고 $g(2)=1$에서 $f(1)=2$이므로

$t=2$

$x=5$일 때 $t=f(5)$이고 $g(5)=5$에서 $f(5)=5$이므로

$t=5$

(3rd) 정적분의 값을 구한다.

㉠에서

$$40\int_1^5 \frac{f'(x)}{\{f(x)\}^2}dx=40\int_2^5 \frac{1}{t^2}dt=40\left[-\frac{1}{t}\right]_2^5$$

$$=40\left(-\frac{1}{5}+\frac{1}{2}\right)=12$$

답 12

1198

(1st) $y=f(x)$의 그래프를 그린다.

$f(0)=0$, $f(1)=\sqrt{2}$이고 $0<x<1$에서

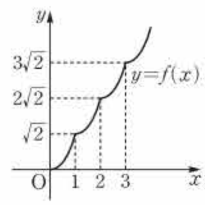
$$f'(x)=3x^2\sqrt{x^2+1}+x^3\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}>0$$

이므로 $f(x)$는 이 구간에서 증가한다.

또 모든 실수 x에 대하여

$f(x+1)=f(x)+\sqrt{2}$이므로 $y=f(x)$의

그래프는 오른쪽 그림과 같다.



(2nd) $\int_0^1 f(x)dx$의 값을 구한다.

$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 x^3\sqrt{x^2+1}\,dx$에서 $x^2+1=t$로 놓으면

$$\frac{dt}{dx}=2x$$

$x=0$일 때 $t=1$, $x=1$일 때 $t=2$이므로

$$\int_0^1 x^3\sqrt{x^2+1}\,dx=\int_0^1 \frac{1}{2}x^2\sqrt{x^2+1}\cdot 2x\,dx$$

$$=\int_1^2 \frac{1}{2}(t-1)\sqrt{t}\,dt=\int_1^2 \frac{1}{2}\left(t^{\frac{3}{2}}-t^{\frac{1}{2}}\right)dt$$

$$=\left[\frac{1}{5}t^{\frac{5}{2}}-\frac{1}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_1^2=\frac{2\sqrt{2}}{15}+\frac{2}{15}$$

(3rd) $\int_0^k f(x)dx$를 구한다.

$$\int_0^k f(x)dx$$

$$=\int_0^1 f(x)dx+\int_1^2 f(x)dx+\int_2^3 f(x)dx+\cdots+\int_{k-1}^k f(x)dx$$

$$=\int_0^1 f(x)dx+\underbrace{\int_0^1 f(x)dx+\int_0^1 \sqrt{2}\,dx}_{\int_1^2 f(x)dx}$$

$$+\underbrace{\int_0^1 f(x)dx+\int_0^1 2\sqrt{2}\,dx}_{\int_2^3 f(x)dx}+\cdots+\underbrace{\int_0^1 f(x)dx+\int_0^1 (k-1)\sqrt{2}\,dx}_{\int_{k-1}^k f(x)dx}$$

$$=k\left(\frac{2\sqrt{2}}{15}+\frac{2}{15}\right)+\{1+2+3+\cdots+(k-1)\}\cdot\sqrt{2}$$

$$=\left\{\frac{2}{15}k+\frac{k(k-1)}{2}\right\}\cdot\sqrt{2}+\frac{2}{15}k$$

(4th) $k+m+n$의 값을 구한다.

세 자연수 k, m, n에 대하여 등식

$$\left\{\frac{2}{15}k+\frac{k(k-1)}{2}\right\}\cdot\sqrt{2}+\frac{2}{15}k=m\sqrt{2}+n$$

이 성립하려면 k는 15의 배수이어야 하므로 k의 최솟값은 15이고 이때 m, n의 값은

$m=107$, $n=2$

$\therefore k+m+n=124$

답 ③

1199

(1st) $f(x)$를 구한다.

$$f(x)=\int_1^x \frac{\ln 2}{1+2^{-t}}dt=\int_1^x \frac{2^t\ln 2}{2^t+1}dt$$

분자, 분모에 각각 2^t을 곱하여 $\frac{g'(t)}{g(t)}$ 꼴로 만든다.

$2^t+1=s$로 놓으면 $\quad \frac{ds}{dt}=2^t\ln 2$

$t=1$일 때 $s=3$, $t=x$일 때 $s=2^x+1$이므로

$$f(x)=\int_3^{2^x+1}\frac{1}{s}ds=\Big[\ln|s|\Big]_3^{2^x+1}$$

$$=\ln(2^x+1)-\ln 3\ (\because 2^x+1>0)$$

$$=\ln\frac{2^x+1}{3}$$

(2nd) a의 값을 구한다.

$$e^{f(a)}=e^{\ln\frac{2^a+1}{3}}=\frac{2^a+1}{3}$$

즉 $\frac{2^a+1}{3}=2$이므로 $\quad 2^a+1=6$

$2^a=5 \quad \therefore a=\log_2 5$

답 ④

다른 풀이 $f(x)=\int_1^x \frac{\ln 2}{1+2^{-t}}dt \quad \cdots\cdots ㉠$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f'(x)=\frac{\ln 2}{1+2^{-x}}$$

$$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int\frac{\ln 2}{1+2^{-x}}dx$$

$$=\int\frac{2^x\ln 2}{2^x+1}dx=\int\frac{(2^x+1)'}{2^x+1}dx$$

$$=\ln(2^x+1)+C\ (\because 2^x+1>0)$$

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면 $f(1)=0$이므로

$\ln 3+C=0 \quad \therefore C=-\ln 3$

$$\therefore f(x)=\ln(2^x+1)-\ln 3=\ln\frac{2^x+1}{3}$$

1200

(1st) ㄱ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄱ. $g_1(x)=f_1(x)-f_0(x)$

$$=\sin x+2\int_0^{\frac{\pi}{4}}xf_0(x)dx-\sin x$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}x\sin x\,dx$$

이때 $u(x)=x$, $v'(x)=\sin x$로 놓으면

$u'(x)=1$, $v(x)=-\cos x$

$$\therefore g_1(x)=2\left\{\Big[-x\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}(-\cos x)dx\right\}$$

$$=2\left(-\frac{\sqrt{2}}{8}\pi-\Big[-\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}\right)$$

$$=2\left(-\frac{\sqrt{2}}{8}\pi+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{2}\left(1-\frac{\pi}{4}\right)$$

2nd ㄴ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄴ. $g_n(x)=f_n(x)-f_{n-1}(x)$

$=\left\{\sin x+2\int_0^{\frac{\pi}{4}} xf_{n-1}(x)\,dx\right\}$

$-\left\{\sin x+2\int_0^{\frac{\pi}{4}} xf_{n-2}(x)\,dx\right\}$

$=2\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\{f_{n-1}(x)-f_{n-2}(x)\}\,dx$

$=2\int_0^{\frac{\pi}{4}} xg_{n-1}(x)dx$ (단, $n\ge 2$)

3rd ㄷ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄷ. ㄴ에서 $g_n(x)=2\int_0^{\frac{\pi}{4}} xg_{n-1}(x)dx$이므로 $g_n(x)$는 상수함수이다.

$\therefore g_n(x)=2g_{n-1}(x)\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\,dx$ — $g_n(x)=a$ (a는 상수)이면 $g_{n-1}(x)=a$

$=2g_{n-1}(x)\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$

$=\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 g_{n-1}(x)$ (단, $n\ge 2$)

따라서 수열 $\{g_n(x)\}$는 공비가 $\left(\frac{\pi}{4}\right)^2$인 등비수열이다.

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

1201 1st 부분적분법을 이용하여 조건 (나)의 식을 변형한다.

조건 (나)의 좌변에서 $u(x)=\{f(x)\}^2$, $v'(x)=g'(x)$로 놓으면

$u'(x)=2f(x)f'(x)$, $v(x)=g(x)$

$\therefore \int_{-1}^1 \{f(x)\}^2 g'(x)dx$

$=\left[\{f(x)\}^2 g(x)\right]_{-1}^1-\int_{-1}^1 2f(x)f'(x)g(x)dx$

$=\{f(1)\}^2 g(1)-\{f(-1)\}^2 g(-1)$

$-2\int_{-1}^1 f(x)f'(x)g(x)dx$ ...... ㉠

이때 조건 (가)에서 $f(x)g(x)=x^4-1$이므로

$f(1)g(1)=0$, $f(-1)g(-1)=0$

㉠에서

$\int_{-1}^1 \{f(x)\}^2 g'(x)dx=-2\int_{-1}^1 (x^4-1)f'(x)dx$

즉 $-2\int_{-1}^1 (x^4-1)f'(x)dx=120$이므로

$\int_{-1}^1 (x^4-1)f'(x)dx=-60$

2nd 부분적분법을 한 번 더 이용하여 $\int_{-1}^1 x^3 f(x)dx$의 값을 구한다.

$\int_{-1}^1 (x^4-1)f'(x)dx$에서 $s(x)=x^4-1$, $t'(x)=f'(x)$로 놓으면 $s'(x)=4x^3$, $t(x)=f(x)$

$\therefore \int_{-1}^1 (x^4-1)f'(x)dx$

$=\left[(x^4-1)f(x)\right]_{-1}^1-\int_{-1}^1 4x^3 f(x)dx$

$=-4\int_{-1}^1 x^3 f(x)dx$

따라서 $-4\int_{-1}^1 x^3 f(x)dx=-60$이므로

$\int_{-1}^1 x^3 f(x)dx=15$ 답 ②

다른 풀이 $f(1)g(1)=0$, $f(-1)g(-1)=0$을 ㉠에 대입하면

$\int_{-1}^1 \{f(x)\}^2 g'(x)dx=-2\int_{-1}^1 f(x)f'(x)g(x)dx$

이므로 조건 (나)에 의하여

$-2\int_{-1}^1 f(x)f'(x)g(x)dx=120$

$\therefore \int_{-1}^1 f(x)f'(x)g(x)dx=-60$ ...... ㉡

한편 $f(x)g(x)=x^4-1$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)g(x)+f(x)g'(x)=4x^3$

$\therefore f'(x)g(x)=4x^3-f(x)g'(x)$

이 식을 ㉡에 대입하면

$\int_{-1}^1 f(x)\{4x^3-f(x)g'(x)\}dx=-60$

$4\int_{-1}^1 x^3 f(x)dx-\int_{-1}^1 \{f(x)\}^2 g'(x)dx=-60$

$4\int_{-1}^1 x^3 f(x)dx-120=-60$ ($\because$ 조건 (나))

$\therefore \int_{-1}^1 x^3 f(x)dx=15$

1202 1st $f(x)$를 구한다.

$\int_e^x tf(t)dt=\frac{x}{a}-\frac{\ln x}{x}$의 양변에 $x=e$를 대입하면

$0=\frac{e}{a}-\frac{1}{e}$, $\quad \frac{e}{a}=\frac{1}{e}$

$\therefore a=e^2$

$\int_e^x tf(t)dt=\frac{x}{e^2}-\frac{\ln x}{x}$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$xf(x)=\frac{1}{e^2}-\frac{1-\ln x}{x^2}$

$\therefore f(x)=\frac{1}{e^2 x}-\frac{1}{x^3}+\frac{\ln x}{x^3}$ ($\because x>0$)

2nd $\int_1^a f(x)dx$의 값을 구한다.

$\int_1^a f(x)dx=\int_1^{e^2}\left(\frac{1}{e^2 x}-\frac{1}{x^3}+\frac{\ln x}{x^3}\right)dx$

$=\left[\frac{1}{e^2}\ln x+\frac{1}{2x^2}\right]_1^{e^2}+\int_1^{e^2}\frac{\ln x}{x^3}dx$

$=\frac{2}{e^2}+\frac{1}{2e^4}-\frac{1}{2}+\int_1^{e^2}\frac{\ln x}{x^3}dx$ ...... ㉠

$\int_1^{e^2}\frac{\ln x}{x^3}dx$에서 $u(x)=\ln x$, $v'(x)=\frac{1}{x^3}$로 놓으면

$u'(x)=\frac{1}{x}$, $v(x)=-\frac{1}{2x^2}$

$\therefore \int_1^{e^2}\frac{\ln x}{x^3}dx=\left[\ln x\cdot\left(-\frac{1}{2x^2}\right)\right]_1^{e^2}-\int_1^{e^2}\frac{1}{x}\cdot\left(-\frac{1}{2x^2}\right)dx$

$=-\frac{1}{e^4}+\frac{1}{2}\int_1^{e^2}\frac{1}{x^3}dx$

$=-\frac{1}{e^4}+\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2x^2}\right]_1^{e^2}$

$=-\frac{1}{e^4}+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2e^4}+\frac{1}{2}\right)$

$=-\frac{5}{4e^4}+\frac{1}{4}$ ...... ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$$\int_1^a f(x)dx=\frac{2}{e^2}+\frac{1}{2e^4}-\frac{1}{2}-\frac{5}{4e^4}+\frac{1}{4}$$
$$=2e^{-2}-\frac{3}{4}e^{-4}-\frac{1}{4}$$

3rd $4(p+q)$의 값을 구한다.

따라서 $p=2,\ q=-\frac{3}{4}$이므로

$$4(p+q)=4\cdot\left(2-\frac{3}{4}\right)=5$$

답 5

1203 1st ㄱ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄱ. 조건 (나)의 등식의 좌변을 전개하여 정리하면

$$\ln f(x)+2x\int_0^x f(t)dt-2\int_0^x tf(t)dt=0$$

양변을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{f'(x)}{f(x)}+2\int_0^x f(t)dt+2xf(x)-2xf(x)=0$$
$$\frac{f'(x)}{f(x)}+2\int_0^x f(t)dt=0$$
$$\therefore f'(x)=-2f(x)\int_0^x f(t)dt \qquad \cdots\cdots ㉠$$

조건 (가)에서 $f(x)>0$이므로 $x>0$에서

$$\int_0^x f(t)dt>0$$

따라서 ㉠에 의하여 $x>0$에서 $f'(x)<0$이므로 $x>0$에서 함수 $f(x)$는 감소한다.

2nd ㄴ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄴ. $x<0$에서 $f(x)$의 증가, 감소를 알아보자.

㉠에서

$$f'(x)=-2f(x)\int_0^x f(t)dt$$
$$=2f(x)\int_x^0 f(t)dt \qquad \cdots\cdots ㉡$$

조건 (가)에서 $f(x)>0$이므로 $x<0$에서

$$\int_x^0 f(t)dt>0$$

따라서 ㉡에 의하여 $x<0$에서 $f'(x)>0$이므로 $x<0$에서 함수 $f(x)$는 증가한다.

즉 함수 $f(x)$는 $x<0$에서 증가하고 $x>0$에서 감소하므로 $x=0$에서 최댓값 $f(0)$을 갖는다.

조건 (나)의 등식의 양변에 $x=0$을 대입하면

$$\ln f(0)=0$$
$$\therefore f(0)=1 \qquad \cdots\cdots ㉢$$

따라서 함수 $f(x)$의 최댓값은 1이다.

3rd ㄷ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄷ. $F(x)=\int_0^x f(t)dt \qquad \cdots\cdots ㉣$

㉣의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$F'(x)=f(x) \qquad \cdots\cdots ㉤$$

㉣, ㉤을 ㉠에 대입하면

$$f'(x)=-2F'(x)F(x)=[-\{F(x)\}^2]'$$
$$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=-\{F(x)\}^2+C$$

이때 ㉣의 양변에 $x=0$을 대입하면 $F(0)=0$이므로

$$f(0)=C \qquad \therefore C=1\ (\because ㉢)$$

따라서 $f(x)=-\{F(x)\}^2+1$이므로

$$f(x)+\{F(x)\}^2=1$$ 모든 실수 x에 대하여 성립하는 등식이다.
$$\therefore f(1)+\{F(1)\}^2=1$$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

1204 전략 $\{f(g(x))\}'=f'(g(x))g'(x)$임을 이용한다.

풀이 함수 $f(x)$의 역함수가 $g(x)$이므로

$$g'(x)=\frac{1}{f'(g(x))}\ (f'(g(x))\neq0)$$

이때 $f'(x)=2f(x)+3$이므로

$$f'(g(x))=2f(g(x))+3=2x+3 \qquad \cdots ❶$$

따라서 $x\neq-\frac{3}{2}$일 때, $g'(x)=\frac{1}{2x+3}$이므로

$$\int_0^3 2g'(x)\,dx=\int_0^3\frac{2}{2x+3}dx$$
$$=\Big[\ln|2x+3|\Big]_0^3$$
$$=\ln9-\ln3=\ln3 \qquad \cdots ❷$$

답 $\ln 3$

채점 기준	비율
❶ $f'(g(x))$를 구할 수 있다.	40 %
❷ $\int_0^3 2g'(x)dx$의 값을 구할 수 있다.	60 %

1205 전략 조건 (나)에서 $2x+1$, $4x$를 각각 한 문자로 치환하여 적분한다.

풀이 $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(2x+1)dx=3$에서 $2x+1=t$로 놓으면

$$\frac{dt}{dx}=2$$

$x=-\frac{1}{2}$일 때 $t=0$, $x=\frac{1}{2}$일 때 $t=2$이므로

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(2x+1)dx=\int_0^2 f(t)\cdot\frac{1}{2}dt=\frac{1}{2}\int_0^2 f(x)dx$$

즉 $\frac{1}{2}\int_0^2 f(x)dx=3$이므로

$$\int_0^2 f(x)dx=6 \qquad \cdots\cdots ㉠ \qquad \cdots ❶$$

$\int_{\frac{1}{2}}^1 f(4x)dx=2$에서 $4x=s$로 놓으면

$$\frac{ds}{dx}=4$$

$x=\frac{1}{2}$일 때 $s=2$, $x=1$일 때 $s=4$이므로

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 f(4x)dx=\int_2^4 f(s)\cdot\frac{1}{4}ds=\frac{1}{4}\int_2^4 f(x)dx$$

즉 $\frac{1}{4}\int_2^4 f(x)dx=2$이므로

$$\int_2^4 f(x)dx=8 \qquad \cdots\cdots ㉡ \qquad \cdots ❷$$

한편 조건 (가)에서 $f(x+4)=f(x)$이므로 ㉠, ㉡에 의하여

$$\begin{aligned}\int_{10}^{20} f(x)dx&=\int_{6}^{16} f(x)dx=\int_{2}^{12} f(x)dx\\&=\int_{2}^{4} f(x)dx+\int_{4}^{8} f(x)dx+\int_{8}^{12} f(x)dx\\&=\int_{2}^{4} f(x)dx+2\int_{0}^{4} f(x)dx\\&=\int_{2}^{4} f(x)dx+2\left\{\int_{0}^{2} f(x)dx+\int_{2}^{4} f(x)dx\right\}\\&=8+2(6+8)=36\end{aligned}$$ ⋯ ❸

답 36

채점 기준	비율
❶ $\int_0^2 f(x)dx$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷ $\int_2^4 f(x)dx$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ $\int_{10}^{20} f(x)dx$의 값을 구할 수 있다.	40 %

1206 전략 치환적분법을 이용하여 구하는 식을 변형한다.

풀이 $\int_{-2}^{2} f(x)dx=\int_{-2}^{0} f(x)dx+\int_{0}^{2} f(x)dx$ ⋯⋯ ㉠

$\int_{-2}^{0} f(x)dx$에서 $-x=t$로 놓으면 $\dfrac{dt}{dx}=-1$

$x=-2$일 때 $t=2$, $x=0$일 때 $t=0$이므로

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{0} f(x)dx&=\int_{2}^{0} f(-t)\cdot(-1)dt=\int_{0}^{2} f(-t)dt\\&=\int_{0}^{2} f(-x)dx\end{aligned}$$ ⋯⋯ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{2} f(x)dx&=\int_{0}^{2} f(-x)dx+\int_{0}^{2} f(x)dx\\&=\int_{0}^{2}\{f(-x)+f(x)\}dx\\&=\int_{0}^{2}\frac{1}{e^{|x|}+2}dx=\int_{0}^{2}\frac{1}{e^{x}+2}dx\\&=\int_{0}^{2}\frac{e^{-x}}{1+2e^{-x}}dx\end{aligned}$$ ⋯ ❶

└ $0\le x\le 2$에서 $|x|=x$

이때 $(1+2e^{-x})'=-2e^{-x}$이므로

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{2} f(x)dx&=-\frac{1}{2}\int_{0}^{2}\frac{(1+2e^{-x})'}{1+2e^{-x}}dx\\&=-\frac{1}{2}\Big[\ln(1+2e^{-x})\Big]_{0}^{2}\ (\because 1+2e^{-x}>0)\\&=-\frac{1}{2}\left\{\ln\left(1+\frac{2}{e^2}\right)-\ln 3\right\}\\&=\frac{1}{2}\ln\frac{3e^2}{e^2+2}\end{aligned}$$ ⋯ ❷

따라서 $a=3$, $b=2$이므로

$a+b=5$ ⋯ ❸

답 5

채점 기준	비율
❶ $\int_{-2}^{2} f(x)dx$를 변형할 수 있다.	40 %
❷ $\int_{-2}^{2} f(x)dx$의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	10 %

1207 전략 점 P의 좌표를 이용하여 $f(a)$를 구한다.

풀이 점 P의 y좌표가 a이므로 $a=(x+1)^2-1$에서

$(x+1)^2=a+1,\quad x+1=\sqrt{a+1}$

$\therefore x=\sqrt{a+1}-1\ (\because x>0)$

따라서 점 P의 좌표가 $(\sqrt{a+1}-1,\ a)$이므로

$f(a)=\dfrac{a}{\sqrt{a+1}-1}$ ⋯ ❶

$$\begin{aligned}\therefore \int_{3}^{8} f(a)da&=\int_{3}^{8}\frac{a}{\sqrt{a+1}-1}da\\&=\int_{3}^{8}\frac{a(\sqrt{a+1}+1)}{(\sqrt{a+1}-1)(\sqrt{a+1}+1)}da\\&=\int_{3}^{8}(\sqrt{a+1}+1)da\end{aligned}$$

$a+1=t$로 놓으면 $\dfrac{dt}{da}=1$

$a=3$일 때 $t=4$, $a=8$일 때 $t=9$이므로

$$\begin{aligned}\int_{3}^{8} f(a)\,da&=\int_{4}^{9}(\sqrt{t}+1)dt=\int_{4}^{9}(t^{\frac{1}{2}}+1)dt\\&=\left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}+t\right]_{4}^{9}\\&=27-\frac{28}{3}=\frac{53}{3}\end{aligned}$$ ⋯ ❷

따라서 $p=3$, $q=53$이므로

$p+q=56$ ⋯ ❸

답 56

채점 기준	비율
❶ $f(a)$를 구할 수 있다.	30 %
❷ $\int_3^8 f(a)\,da$의 값을 구할 수 있다.	60 %
❸ $p+q$의 값을 구할 수 있다.	10 %

1208 전략 $\sqrt{x}=t$로 치환한 후 부분적분법을 이용한다.

풀이 $\int_{0}^{36} f'(\sqrt{x})dx$에서 $\sqrt{x}=t$로 놓으면

$\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=\dfrac{1}{2t}$

$x=0$일 때 $t=0$, $x=36$일 때 $t=6$이므로

$\int_{0}^{36} f'(\sqrt{x})dx=\int_{0}^{6} f'(t)\cdot 2t\,dt$ ⋯ ❶

$u(t)=2t$, $v'(t)=f'(t)$로 놓으면

$u'(t)=2$, $v(t)=f(t)$

$$\begin{aligned}\therefore \int_{0}^{6} f'(t)\cdot 2t\,dt&=\Big[2tf(t)\Big]_{0}^{6}-\int_{0}^{6}2f(t)dt\\&=12f(6)-2\int_{0}^{6}f(x)dx\\&=12\cdot 4-2\cdot 8=32\end{aligned}$$ ⋯ ❷

답 32

채점 기준	비율
❶ 치환하여 피적분함수를 변형할 수 있다.	40 %
❷ $\int_0^{36} f'(\sqrt{x})dx$의 값을 구할 수 있다.	60 %

1209 전략 주어진 식의 양변을 x에 대하여 미분한 후 $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ 꼴로 변형한다.

풀이 $(x^2+1)f(x)-4x=4\int_1^x \{tf(t)-1\}dt$ …… ㉠

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$2xf(x)+(x^2+1)f'(x)-4=4\{xf(x)-1\}$$

$$(x^2+1)f'(x)=2xf(x)$$

$$\therefore \frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{2x}{x^2+1} \ (\because f(x)>0)$$ ··· ❶

위의 등식의 양변을 x에 대하여 적분하면

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx=\int \frac{2x}{x^2+1}dx$$

$$\therefore \ln f(x)=\ln(x^2+1)+C \ (\because x^2+1>0)$$ …… ㉡

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$2f(1)-4=0 \qquad \therefore f(1)=2$

㉡의 양변에 $x=1$을 대입하면

$\ln f(1)=\ln 2+C$

즉 $\ln 2=\ln 2+C$이므로 $\quad C=0$

따라서 $\ln f(x)=\ln(x^2+1)$이므로

$f(x)=x^2+1$ ··· ❷

$\therefore f(5)=26$ ··· ❸

답 26

채점 기준	비율
❶ $\frac{f'(x)}{f(x)}$를 구할 수 있다.	30 %
❷ $f(x)$를 구할 수 있다.	60 %
❸ $f(5)$의 값을 구할 수 있다.	10 %

Ⅳ. 적분법

10 정적분의 활용

1210 S_n은 밑변의 길이가 $\frac{1}{n}$, 높이가 각각 $\left(\frac{1}{n}\right)^2, \left(\frac{2}{n}\right)^2, \left(\frac{3}{n}\right)^2$, …, $\left(\frac{n}{n}\right)^2$인 직사각형의 넓이의 합이므로

$$S_n=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{1}{n}\left(\frac{2}{n}\right)^2+\frac{1}{n}\left(\frac{3}{n}\right)^2+\cdots+\frac{1}{n}\left(\frac{n}{n}\right)^2$$

$$=\frac{1}{n^3}(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)$$

$$=\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}\boxed{k^2}=\frac{1}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$=\frac{1}{6}\left(1+\boxed{\frac{1}{n}}\right)\left(2+\boxed{\frac{1}{n}}\right)$$

$$\therefore S=\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{6}\cdot1\cdot2=\boxed{\frac{1}{3}}$$

$\therefore$ (가) k^2 (나) $\frac{1}{n}$ (다) $\frac{1}{3}$

답 (가) k^2 (나) $\frac{1}{n}$ (다) $\frac{1}{3}$

1211 $f(x)=x^2$, $a=0$, $b=1$로 놓으면

$$\Delta x=\frac{1}{n},\ x_k=\frac{k}{n}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{3k}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}=9\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}$$

$$=9\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\Delta x$$

$$=9\int_0^1 x^2dx$$

$$=9\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1=3$$

답 3

다른 풀이 $f(x)=x^2$, $a=0$, $b=3$으로 놓으면

$$\Delta x=\frac{3}{n},\ x_k=\frac{3k}{n}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{3k}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{3k}{n}\right)^2\cdot\frac{3}{n}$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\Delta x$$

$$=\frac{1}{3}\int_0^3 x^2dx$$

$$=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^3=3$$

1212 $f(x)=x$, $a=3$, $b=5$로 놓으면

$$\Delta x=\frac{2}{n},\ x_k=3+\frac{2k}{n}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(3+\frac{2k}{n}\right)\cdot\frac{2}{n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\Delta x$$

$$=\int_3^5 x\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{2}x^2\right]_3^5$$

$$=\frac{25}{2}-\frac{9}{2}=8$$

답 8

다른 풀이 $f(x)=3+x$, $a=0$, $b=2$로 놓으면

$$\Delta x=\frac{2}{n},\ x_k=\frac{2k}{n}$$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(3+\frac{2k}{n}\right)\cdot\frac{2}{n}&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\Delta x\\&=\int_0^2(3+x)\,dx\\&=\left[3x+\frac{1}{2}x^2\right]_0^2=8\end{aligned}$$

1213 $f(x)=e^x$, $a=0$, $b=1$로 놓으면

$$\Delta x=\frac{1}{n},\ x_k=\frac{k}{n}$$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}e^{\frac{k}{n}}\cdot\frac{1}{n}&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\Delta x\\&=\int_0^1 e^x\,dx\\&=\left[e^x\right]_0^1\\&=e-1\end{aligned}$$

답 $e-1$

1214 $$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^5}(1^4+2^4+3^4+\cdots+n^4)&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^5}\sum_{k=1}^{n}k^4\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^4\cdot\frac{1}{n}\end{aligned}$$

$f(x)=x^4$, $a=0$, $b=1$로 놓으면　　$\Delta x=\frac{1}{n}$, $x_k=\frac{k}{n}$

$$\begin{aligned}\therefore (\text{주어진 식})&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\Delta x\\&=\int_0^1 x^4\,dx\\&=\left[\frac{1}{5}x^5\right]_0^1\\&=\frac{1}{5}\end{aligned}$$

답 $\frac{1}{5}$

1215 $$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\sin\frac{3\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{n\pi}{n}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{n}=\frac{1}{\pi}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{n}\cdot\frac{\pi}{n}\end{aligned}$$

$f(x)=\sin x$, $a=0$, $b=\pi$로 놓으면　　$\Delta x=\frac{\pi}{n}$, $x_k=\frac{k\pi}{n}$

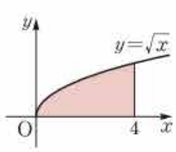
$$\begin{aligned}\therefore (\text{주어진 식})&=\frac{1}{\pi}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\Delta x\\&=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\,dx\\&=\frac{1}{\pi}\left[-\cos x\right]_0^{\pi}\\&=\frac{1}{\pi}\{1-(-1)\}=\frac{2}{\pi}\end{aligned}$$

답 $\frac{2}{\pi}$

1216 오른쪽 그림에서 구하는 넓이는

$$\int_0^4\sqrt{x}\,dx=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^4=\frac{16}{3}$$

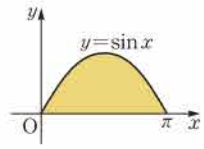
답 $\frac{16}{3}$



1217 곡선 $y=\sin x$와 x축의 교점의 x좌표는 $\sin x=0$에서

$x=0$ 또는 $x=\pi$ ($\because 0\le x\le\pi$)

따라서 오른쪽 그림에서 구하는 넓이는



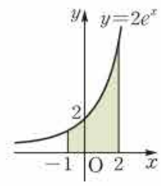
$$\int_0^{\pi}\sin x\,dx=\left[-\cos x\right]_0^{\pi}=1-(-1)=2$$

답 2

1218 오른쪽 그림에서 구하는 넓이는

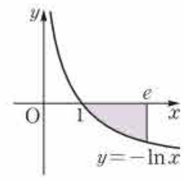
$$\int_{-1}^{2}2e^x\,dx=2\left[e^x\right]_{-1}^{2}=2\left(e^2-\frac{1}{e}\right)$$

답 $2\left(e^2-\frac{1}{e}\right)$



1219 오른쪽 그림에서 구하는 넓이는

$$\begin{aligned}\int_1^e|-\ln x|\,dx=\int_1^e\ln x\,dx&=\left[x\ln x\right]_1^e-\int_1^e 1\,dx\\&=e-\left[x\right]_1^e=e-(e-1)\\&=1\end{aligned}$$



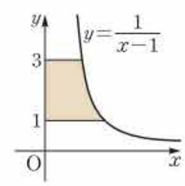
답 1

1220 $y=\frac{1}{x-1}$에서　　$\frac{1}{y}=x-1$

$\therefore x=1+\frac{1}{y}$

따라서 오른쪽 그림에서 구하는 넓이는

$$\begin{aligned}\int_1^3\left(1+\frac{1}{y}\right)dy&=\left[y+\ln|y|\right]_1^3\\&=(3+\ln 3)-1\\&=2+\ln 3\end{aligned}$$



답 $2+\ln 3$

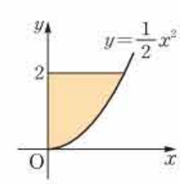
1221 $y=\frac{1}{2}x^2$에서　　$x^2=2y$

$\therefore x=\sqrt{2y}$ ($\because x\ge 0$)

따라서 오른쪽 그림에서 구하는 넓이는

$$\int_0^2\sqrt{2y}\,dy=\left[\frac{2\sqrt{2}}{3}y^{\frac{3}{2}}\right]_0^2=\frac{8}{3}$$

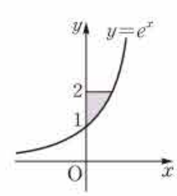
답 $\frac{8}{3}$



1222 $y=e^x$에서　　$x=\ln y$

따라서 오른쪽 그림에서 구하는 넓이는

$$\begin{aligned}\int_1^2\ln y\,dy&=\left[y\ln y\right]_1^2-\int_1^2 1\,dy\\&=2\ln 2-\left[y\right]_1^2\\&=2\ln 2-(2-1)\\&=2\ln 2-1\end{aligned}$$



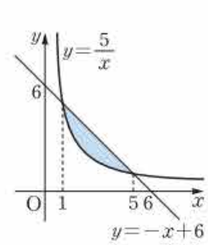
답 $2\ln 2-1$

1223 곡선 $y=\frac{5}{x}$와 직선 $y=-x+6$의 교점의 x좌표는 $\frac{5}{x}=-x+6$에서

$x^2-6x+5=0$

$(x-1)(x-5)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=5$

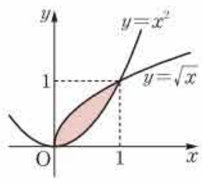


따라서 앞의 그림에서 구하는 넓이는

$$\int_1^5\left(-x+6-\frac{5}{x}\right)dx=\left[-\frac{1}{2}x^2+6x-5\ln|x|\right]_1^5$$
$$=\left(\frac{35}{2}-5\ln5\right)-\frac{11}{2}$$
$$=12-5\ln5$$

답 $12-5\ln5$

1224 두 곡선 $y=x^2$, $y=\sqrt{x}$의 교점의 x좌표는 $x^2=\sqrt{x}$에서



$x^4=x,\quad x(x^3-1)=0$

$x(x-1)(x^2+x+1)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=1$

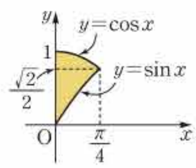
$(\because x^2+x+1>0)$

따라서 위의 그림에서 구하는 넓이는

$$\int_0^1(\sqrt{x}-x^2)dx=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}x^3\right]_0^1=\frac{1}{3}$$

답 $\frac{1}{3}$

1225 두 곡선 $y=\sin x$, $y=\cos x$의 교점의 x좌표는 $\sin x=\cos x$에서



$x=\frac{\pi}{4}\left(\because 0\le x\le\frac{\pi}{4}\right)$

따라서 오른쪽 그림에서 구하는 넓이는

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos x-\sin x)dx=\left[\sin x+\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$
$$=\sqrt{2}-1$$

답 $\sqrt{2}-1$

1226 $y=\ln x$에서 $\quad x=e^y$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_0^1(e^y-y)dy=\left[e^y-\frac{1}{2}y^2\right]_0^1=\left(e-\frac{1}{2}\right)-1$$
$$=e-\frac{3}{2}$$

답 $e-\frac{3}{2}$

1227 원뿔을 자른 단면의 반지름의 길이는 위에서부터 차례대로

$$\frac{r}{n},\ \frac{2r}{n},\ \frac{3r}{n},\ \cdots,\ \frac{(n-1)r}{n}$$

이고 각 단면을 밑면으로 하고 높이가 $\boxed{\frac{h}{n}}$인 $(n-1)$개의 원기둥의 부피의 합을 V_n이라 하면

$$V_n=\frac{h}{n}\left[\pi\left(\frac{r}{n}\right)^2+\pi\left(\frac{2r}{n}\right)^2+\pi\left(\frac{3r}{n}\right)^2+\cdots+\pi\left\{\frac{(n-1)r}{n}\right\}^2\right]$$
$$=\frac{\pi r^2h}{n^3}\{1^2+2^2+3^2+\cdots+(n-1)^2\}$$
$$=\frac{\pi r^2h}{n^3}\cdot\sum_{k=1}^{n-1}\boxed{k^2}=\frac{\pi r^2h}{n^3}\cdot\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$$
$$=\boxed{\frac{\pi r^2h}{6}}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)$$

$$\therefore V=\lim_{n\to\infty}V_n=\frac{\pi r^2h}{6}\cdot1\cdot2=\frac{\pi r^2h}{3}$$

$\therefore$ (가) $\frac{h}{n}$ (나) k^2 (다) $\frac{\pi r^2h}{6}$

답 (가) $\frac{h}{n}$ (나) k^2 (다) $\frac{\pi r^2h}{6}$

1228 밑면으로부터 x cm인 지점에서의 단면의 넓이가 $\sqrt{3-x}$ cm^2이므로 구하는 부피는

$$\int_0^3\sqrt{3-x}\,dx=\left[-\frac{2}{3}(3-x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^3$$
$$=-(-2\sqrt{3})=2\sqrt{3}\,(\text{cm}^3)$$

답 $2\sqrt{3}$ cm^3

1229 밑면으로부터 x cm인 지점에서의 단면의 넓이는

$(\sqrt{2x+9})^2=2x+9\,(\text{cm}^2)$

따라서 구하는 부피는

$$\int_0^4(2x+9)dx=\left[x^2+9x\right]_0^4$$
$$=52\,(\text{cm}^3)$$

답 52 cm^3

1230 $t=0$에서의 위치가 0이므로

(1) $\int_0^t\sqrt{t}\,dt=\left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_0^t=\frac{2}{3}t\sqrt{t}$

(2) $\int_0^4|\sqrt{t}|\,dt=\int_0^4\sqrt{t}\,dt=\left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_0^4=\frac{16}{3}$

답 (1) $\frac{2}{3}t\sqrt{t}$ (2) $\frac{16}{3}$

1231 $t=0$에서의 위치가 0이므로

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos t)dt=\left[t-\sin t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}-1$

(2) $\int_0^{\frac{3}{2}\pi}|1-\cos t|\,dt=\int_0^{\frac{3}{2}\pi}(1-\cos t)dt$

$$=\left[t-\sin t\right]_0^{\frac{3}{2}\pi}$$
$$=\frac{3}{2}\pi+1$$

답 (1) $\frac{\pi}{2}-1$ (2) $\frac{3}{2}\pi+1$

1232 $\frac{dx}{dt}=2t$, $\frac{dy}{dt}=4t$이므로 구하는 거리는

$$\int_0^1\sqrt{(2t)^2+(4t)^2}\,dt=\int_0^1\sqrt{20t^2}\,dt=\int_0^1 2\sqrt{5}t\,dt$$
$$=\left[\sqrt{5}t^2\right]_0^1=\sqrt{5}$$

답 $\sqrt{5}$

1233 $\frac{dx}{dt}=2\sqrt{2}t$, $\frac{dy}{dt}=t^2-2$이므로 구하는 거리는

$$\int_0^1\sqrt{(2\sqrt{2}t)^2+(t^2-2)^2}\,dt=\int_0^1\sqrt{t^4+4t^2+4}\,dt$$
$$=\int_0^1\sqrt{(t^2+2)^2}\,dt=\int_0^1(t^2+2)dt$$
$$=\left[\frac{1}{3}t^3+2t\right]_0^1=\frac{7}{3}$$

답 $\frac{7}{3}$

1234 $\frac{dx}{dt}=2\cos t$, $\frac{dy}{dt}=-2\sin t$이므로 구하는 거리는

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{(2\cos t)^2+(-2\sin t)^2}\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{4\cos^2t+4\sin^2t}\,dt$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\,dt$$
$$=\left[2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\pi$$

답 π

1235 $\dfrac{dx}{dt}=2\sqrt{6}t$, $\dfrac{dy}{dt}=3t^2-2$이므로 구하는 곡선의 길이는

$$\int_0^2\sqrt{(2\sqrt{6}t)^2+(3t^2-2)^2}\,dt=\int_0^2\sqrt{9t^4+12t^2+4}\,dt$$
$$=\int_0^2\sqrt{(3t^2+2)^2}\,dt$$
$$=\int_0^2(3t^2+2)dt$$
$$=\Big[t^3+2t\Big]_0^2=12$$

답 12

1236 $\dfrac{dx}{dt}=3\cos t$, $\dfrac{dy}{dt}=3\sin t$이므로 구하는 곡선의 길이는

$$\int_0^\pi\sqrt{(3\cos t)^2+(3\sin t)^2}\,dt=\int_0^\pi\sqrt{9\cos^2 t+9\sin^2 t}\,dt$$
$$=\int_0^\pi 3\,dt$$
$$=\Big[3t\Big]_0^\pi=3\pi$$

답 3π

1237 $y'=\dfrac{1}{2}\sqrt{x-4}$이므로 구하는 곡선의 길이는

$$\int_4^9\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}\sqrt{x-4}\right)^2}\,dx=\int_4^9\sqrt{1+\frac{1}{4}(x-4)}\,dx$$
$$=\int_4^9\frac{1}{2}\sqrt{x}\,dx=\left[\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_4^9$$
$$=9-\frac{8}{3}=\frac{19}{3}$$

답 $\dfrac{19}{3}$

1238 $y'=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$이므로 구하는 곡선의 길이는

$$\int_0^1\sqrt{1+\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2}\,dx=\int_0^1\sqrt{\frac{e^{2x}+2+e^{-2x}}{4}}\,dx$$
$$=\int_0^1\sqrt{\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2}\,dx$$
$$=\int_0^1\frac{e^x+e^{-x}}{2}\,dx$$
$$=\frac{1}{2}\Big[e^x-e^{-x}\Big]_0^1$$
$$=\frac{1}{2}\left(e-\frac{1}{e}\right)$$

답 $\dfrac{1}{2}\left(e-\dfrac{1}{e}\right)$

유형 01~02 정적분과 급수의 관계

본책 184쪽

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(a+\frac{p}{n}k\right)\cdot\frac{p}{n}$의 값을 구할 때에는 ( ) 안의 k의 계수인 $\dfrac{p}{n}$가 ( ) 밖에 곱해져 있도록 식을 변형한 후 다음을 이용한다.

① $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{p}{n}k\right)\cdot\frac{p}{n}=\int_0^p f(x)dx$

② $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(a+\frac{p}{n}k\right)\cdot\frac{p}{n}=\int_a^{a+p} f(x)dx=\int_0^p f(a+x)dx$

1239 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}f\left(\frac{k}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}$

$$=\int_0^1 xf(x)dx=\int_0^1(4x^3+3x^2)dx$$
$$=\Big[x^4+x^3\Big]_0^1=2$$

답 ②

1240 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(2+\frac{k}{n}\right)\cdot\frac{3}{n}=3\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(2+\frac{k}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}$

$$=3\int_2^3 f(x)dx$$
$$=3\int_0^1 f(2+x)dx$$

답 ④

참고 $a=2$, $b=3$으로 놓으면 $\Delta x=\dfrac{1}{n}$, $x_k=2+\dfrac{k}{n}$이므로

$$3\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(2+\frac{k}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}=3\int_2^3 f(x)dx$$

$a=0$, $b=1$로 놓으면 $\Delta x=\dfrac{1}{n}$, $x_k=\dfrac{k}{n}$이므로

$$3\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(2+\frac{k}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}=3\int_0^1 f(2+x)dx$$

1241 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\pi}{n}\sin\frac{k\pi}{2n}=2\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\sin\frac{\pi}{2n}k\right)\cdot\frac{\pi}{2n}$

$\dfrac{\pi}{2n}=\dfrac{\frac{\pi}{2}}{n}$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx \quad \cdots ❶$$
$$=2\Big[-\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=2 \quad \cdots ❷$$

답 2

채점 기준	비율
❶ 주어진 급수를 정적분을 이용한 식으로 변형할 수 있다.	60 %
❷ 정적분의 값을 구할 수 있다.	40 %

1242 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(1+\frac{pk}{n}\right)\cdot\frac{p}{n}=\int_1^{1+p}f(x)dx$

$$=\int_1^{1+p}\frac{(\ln x)^2}{x}\,dx$$

$\ln x=t$로 놓으면 $\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{1}{x}$

$x=1$일 때 $t=0$, $x=1+p$일 때 $t=\ln(1+p)$이므로

$$\int_1^{1+p}\frac{(\ln x)^2}{x}\,dx=\int_0^{\ln(1+p)}t^2\,dt$$
$$=\left[\frac{1}{3}t^3\right]_0^{\ln(1+p)}$$
$$=\frac{1}{3}\{\ln(1+p)\}^3$$

즉 $\dfrac{1}{3}\{\ln(1+p)\}^3=9$이므로 $\{\ln(1+p)\}^3=27$

$\ln(1+p)=3$, $1+p=e^3$

$\therefore p=e^3-1$

답 ④

1243 조건 (나)에서 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(-5+\frac{4k}{n}\right)\cdot\frac{2}{n}=-5$이므로

$$\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(-5+\frac{4k}{n}\right)\cdot\frac{4}{n}=-5$$
$$\frac{1}{2}\int_{-5}^{-1}f(x)dx=-5$$
$$\therefore \int_{-5}^{-1}f(x)dx=-10$$

조건 (가)에서 함수 $f(x)$는 원점에 대하여 대칭이므로

$$\int_1^5 f(x)dx=10$$

조건 (다)에서 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(-1+\frac{4k}{n}\right)\cdot\frac{4}{n}=3$이므로

$\int_{-1}^{3} f(x)dx=3$

조건 (가)에 의하여 $\int_{-1}^{1} f(x)dx=0$이므로

$\int_{1}^{3} f(x)dx=\int_{-1}^{3} f(x)dx-\int_{-1}^{1} f(x)dx=3$

$\therefore \int_{3}^{5} f(x)dx=\int_{1}^{5} f(x)dx-\int_{1}^{3} f(x)dx$

$=10-3=7$ 답 7

1244 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{\left(3+\frac{1}{n}\right)^3+\left(3+\frac{2}{n}\right)^3+\left(3+\frac{3}{n}\right)^3+\cdots+\left(3+\frac{n}{n}\right)^3\right\}$

$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(3+\frac{k}{n}\right)^3\cdot\frac{1}{n}$ ← $f(x)=x^3$, $a=3$, $b=4$로 놓으면 $\Delta x=\frac{1}{n}$, $x_k=3+\frac{k}{n}$

$=\int_{3}^{4} x^3dx=\left[\frac{1}{4}x^4\right]_3^4$

$=64-\frac{81}{4}=\frac{175}{4}$ 답 $\frac{175}{4}$

1245 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}+\frac{1}{1+\frac{3}{n}}+\cdots+\frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}\cdot\frac{1}{n}$

$=\int_{1}^{2}\frac{1}{x}dx=\left[\ln|x|\right]_1^2$

$=\ln 2$

따라서 $a=1$, $b=2$, $c=2$이므로

$a+b+c=5$ 답 ①

1246 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{\frac{k}{n}}}\cdot\frac{1}{n}$

$=\int_{0}^{1}\frac{1}{\sqrt{x}}dx=\int_{0}^{1}x^{-\frac{1}{2}}dx$

$=\left[2x^{\frac{1}{2}}\right]_0^1=2$ 답 2

1247 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{f\left(\frac{2}{n}\right)+f\left(\frac{4}{n}\right)+f\left(\frac{6}{n}\right)+\cdots+f\left(\frac{2n}{n}\right)\right\}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{2k}{n}\right)$

$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{2k}{n}\right)\cdot\frac{2}{n}$

$=\frac{1}{2}\int_{0}^{2}f(x)dx=\frac{1}{2}\int_{0}^{2}(e^x-a)dx$ ··· ❶

$=\frac{1}{2}\left[e^x-ax\right]_0^2$

$=\frac{e^2-2a-1}{2}$ ··· ❷

따라서 $\frac{e^2-2a-1}{2}=\frac{e^2-5}{2}$이므로 $-2a-1=-5$

$\therefore a=2$ ··· ❸

답 2

채점 기준	비율
❶ 등식의 좌변을 정적분을 이용한 식으로 변형할 수 있다.	40 %
❷ 정적분의 값을 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40 %
❸ a의 값을 구할 수 있다.	20 %

1248 $\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}\left(\left|2-\frac{3}{n}\right|+\left|2-\frac{6}{n}\right|+\left|2-\frac{9}{n}\right|+\cdots+\left|2-\frac{3n}{n}\right|\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left|2-\frac{3k}{n}\right|\cdot\frac{3}{n}=\int_{0}^{3}|2-x|dx$

$=\int_{0}^{2}(2-x)dx+\int_{2}^{3}(x-2)dx$

$=\left[2x-\frac{1}{2}x^2\right]_0^2+\left[\frac{1}{2}x^2-2x\right]_2^3$

$=2+\left\{-\frac{3}{2}-(-2)\right\}=\frac{5}{2}$ 답 ③

유형 03 정적분과 급수의 활용

본책 185쪽

여러 가지 도형의 성질을 이용하여 급수를 $\frac{k}{n}$를 포함한 식으로 나타낸 후 정적분으로 변형하여 그 값을 구한다.

1249 점 A_1, A_2, A_3, $\cdots$, A_{n-1}이 x축 위의 구간 $[0, 2]$를 n등분하였으므로 $A_k\left(\frac{2k}{n}, 0\right)$

따라서 $B_k\left(\frac{2k}{n}, \left(\frac{2k}{n}\right)^3\right)$이므로 $\overline{A_kB_k}=\left(\frac{2k}{n}\right)^3$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\overline{A_kB_k}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2k}{n}\right)^3$

$=8\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^3\cdot\frac{1}{n}$

$=8\int_{0}^{1}x^3dx$

$=8\left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^1=2$ 답 ②

1250 $\overline{BC}=\overline{CA}=1$이고 $\triangle AB_1C_1$, $\triangle AB_2C_2$, $\triangle AB_3C_3$, $\cdots$, $\triangle AB_kC_k$, $\cdots$는 모두 닮은 도형이므로

$\overline{B_1C_1}=\frac{1}{n}$, $\overline{B_2C_2}=\frac{2}{n}$, $\overline{B_3C_3}=\frac{3}{n}$, $\cdots$, $\overline{B_kC_k}=\frac{k}{n}$, $\cdots$

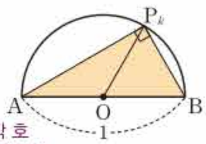
$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\overline{B_kC_k}^4=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^4$

$=3\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^4\cdot\frac{1}{n}$

$=3\int_{0}^{1}x^4dx$

$=3\left[\frac{1}{5}x^5\right]_0^1=\frac{3}{5}$ 답 $\frac{3}{5}$

1251 오른쪽 그림과 같이 반원의 중심을 O라 하면 $\angle \mathrm{AOP}_k=\frac{k\pi}{n}$이므로



$\angle \mathrm{ABP}_k=\frac{k\pi}{2n}$ ← $\angle \mathrm{AOP}_k$와 $\angle \mathrm{ABP}_k$는 각각 호 AP_k에 대한 중심각과 원주각이다.

$\triangle \mathrm{ABP}_k$는 $\angle \mathrm{AP}_k\mathrm{B}=90°$인 직각삼각형이므로

$$\overline{\mathrm{AP}_k}=\overline{\mathrm{AB}}\sin(\angle \mathrm{ABP}_k)=\sin\frac{k\pi}{2n}$$

$$\overline{\mathrm{BP}_k}=\overline{\mathrm{AB}}\cos(\angle \mathrm{ABP}_k)=\cos\frac{k\pi}{2n}$$

$$\therefore S_k=\frac{1}{2}\cdot\overline{\mathrm{AP}_k}\cdot\overline{\mathrm{BP}_k}=\frac{1}{2}\sin\frac{k\pi}{2n}\cos\frac{k\pi}{2n}$$
$$=\frac{1}{4}\sin\frac{k\pi}{n} \quad \cdots ❶$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}S_k=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{4}\sin\frac{k\pi}{n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}\cdot\frac{\pi}{n}$$
$$=\frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\sin x\,dx$$
$$=\frac{1}{4\pi}\Big[-\cos x\Big]_0^{\pi}$$
$$=\frac{1}{4\pi}\cdot\{1-(-1)\}=\frac{1}{2\pi} \quad \cdots ❷$$

답 $\frac{1}{2\pi}$

채점 기준	비율
❶ S_k를 구할 수 있다.	50 %
❷ $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}S_k$의 값을 구할 수 있다.	50 %

SSEN 특강 원주각의 성질

① (원주각의 크기)$=\frac{1}{2}\times$(중심각의 크기)

② 반원에 대한 원주각의 크기는 90°이다.

유형 04 곡선과 x축 사이의 넓이 (1) 본책 186쪽

연속함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이는 닫힌구간 $[a, b]$에서

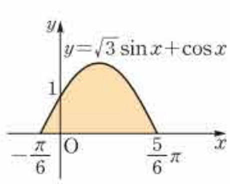
① $f(x)\ge 0$이면 $\int_a^b f(x)dx$

② $f(x)\le 0$이면 $\int_a^b\{-f(x)\}dx=-\int_a^b f(x)dx$

1252 $y=\sqrt{3}\sin x+\cos x$

$=2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$

이므로 오른쪽 그림에서 구하는 넓이는



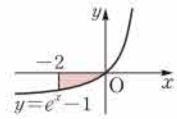
$$\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi}2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)dx$$
$$=\left[-2\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\right]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi}$$
$$=2-(-2)=4$$

답 ④

SSEN 특강 삼각함수의 합성

$$a\sin\theta+b\cos\theta=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$$
$$\left(\text{단, }\sin\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

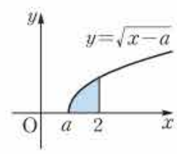
1253 오른쪽 그림에서 구하는 넓이는



$$\int_{-2}^{0}\{-(e^x-1)\}dx=\int_{-2}^{0}(1-e^x)dx$$
$$=\Big[x-e^x\Big]_{-2}^{0}$$
$$=-1-(-2-e^{-2})$$
$$=1+\frac{1}{e^2}$$

답 $1+\frac{1}{e^2}$

1254 오른쪽 그림에서 색칠한 부분의 넓이는



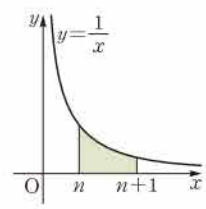
$$\int_a^2\sqrt{x-a}\,dx=\left[\frac{2}{3}(x-a)^{\frac{3}{2}}\right]_a^2$$
$$=\frac{2}{3}(2-a)^{\frac{3}{2}}$$

따라서 $\frac{2}{3}(2-a)^{\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}$이므로 $(2-a)^{\frac{3}{2}}=1$

$2-a=1 \quad \therefore a=1$

답 ④

1255 오른쪽 그림에서



$$S_n=\int_n^{n+1}\frac{1}{x}dx=\Big[\ln|x|\Big]_n^{n+1}$$
$$=\ln(n+1)-\ln n$$
$$=\ln\frac{n+1}{n} \quad \cdots ❶$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}nS_n=\lim_{n\to\infty}n\ln\frac{n+1}{n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$
$$=\ln e=1 \quad \cdots ❷$$

답 1

채점 기준	비율
❶ S_n을 구할 수 있다.	50 %
❷ $\lim_{n\to\infty}nS_n$의 값을 구할 수 있다.	50 %

SSEN 특강 무리수 e의 정의

$$e=\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$

1256 $S_1=\int_1^{e^a}\frac{\ln x}{x}dx$, $S_2=\int_{e^a}^{e^b}\frac{\ln x}{x}dx$

$\ln x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}$

$x=1$일 때 $t=0$, $x=e^a$일 때 $t=a$, $x=e^b$일 때 $t=b$이므로

$$S_1=\int_0^a t\,dt=\left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^a=\frac{a^2}{2},$$

$$S_2=\int_a^b t\,dt=\left[\frac{1}{2}t^2\right]_a^b=\frac{1}{2}(b^2-a^2)$$

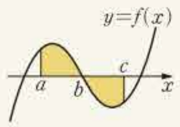
이때 $S_1=S_2$이므로 $\quad \dfrac{a^2}{2}=\dfrac{1}{2}(b^2-a^2)$

$b^2=2a^2 \qquad \therefore b=\sqrt{2}a\ (\because 0<a<b)$ 답 ①

유형 05 곡선과 x축 사이의 넓이 (2)

본책 186쪽

곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=c$로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 때, 오른쪽 그림과 같이 $f(x)$의 값이 양수인 경우와 음수인 경우가 모두 있을 때에는 $f(x)\geq 0$인 구간과 $f(x)\leq 0$인 구간으로 나누어 각 부분의 넓이의 합을 구한다.



➡ $\displaystyle\int_a^b f(x)dx+\int_b^c\{-f(x)\}dx$

1257 $\displaystyle\int_{-1}^0\left(-\frac{2x}{x^2+1}\right)dx+\int_0^2\frac{2x}{x^2+1}dx$ $\quad \dfrac{f'(x)}{f(x)}$ 꼴

$$=\Big[-\ln(x^2+1)\Big]_{-1}^0+\Big[\ln(x^2+1)\Big]_0^2$$

$=\ln 2+\ln 5=\ln 10$ 답 ③

1258 $\displaystyle\int_0^\pi x\sin x\,dx+\int_\pi^{2\pi}(-x\sin x)dx$

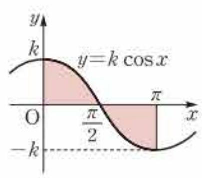
$$=\left\{\Big[-x\cos x\Big]_0^\pi-\int_0^\pi(-\cos x)dx\right\}$$

$$+\left(\Big[x\cos x\Big]_\pi^{2\pi}-\int_\pi^{2\pi}\cos x\,dx\right)$$

$$=\pi+\Big[\sin x\Big]_0^\pi+2\pi-(-\pi)-\Big[\sin x\Big]_\pi^{2\pi}$$

$=4\pi$ 답 4π

1259 오른쪽 그림에서



$$a_k=\int_0^{\frac{\pi}{2}}k\cos x\,dx$$

$$+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(-k\cos x)dx$$

$$=\Big[k\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}-\Big[k\sin x\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

$=k-(-k)=2k$ ··· ❶

$\displaystyle\therefore \sum_{k=1}^{10}a_k=\sum_{k=1}^{10}2k=2\cdot\frac{10\cdot 11}{2}=110$ ··· ❷

답 110

채점 기준	비율
❶ a_k를 구할 수 있다.	60 %
❷ $\sum_{k=1}^{10}a_k$의 값을 구할 수 있다.	40 %

1260 $1\leq x\leq 2$에서 $\quad (x-2)e^{x-1}\leq 0$ $\quad x-2\leq 0,\ e^{x-1}>0$

$2\leq x\leq 3$에서 $\quad (x-2)e^{x-1}\geq 0$ $\quad x-2\geq 0,\ e^{x-1}>0$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_1^2(2-x)e^{x-1}dx+\int_2^3(x-2)e^{x-1}dx \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$$\int_1^2(2-x)e^{x-1}dx=\Big[(2-x)e^{x-1}\Big]_1^2-\int_1^2(-e^{x-1})dx$$

$$=-1+\Big[e^{x-1}\Big]_1^2$$

$$=-1+(e-1)=e-2 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

$$\int_2^3(x-2)e^{x-1}dx=\Big[(x-2)e^{x-1}\Big]_2^3-\int_2^3e^{x-1}dx$$

$$=e^2-\Big[e^{x-1}\Big]_2^3$$

$$=e^2-(e^2-e)=e \qquad \cdots\cdots ㉢$$

㉡, ㉢을 ㉠에 대입하면 구하는 넓이는

$(e-2)+e=2e-2$ 답 ①

유형 06 곡선과 y축 사이의 넓이

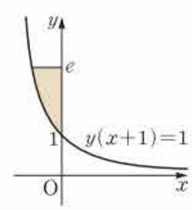
본책 187쪽

연속함수 $g(y)$에 대하여 곡선 $x=g(y)$와 y축 및 두 직선 $y=c$, $y=d$로 둘러싸인 도형의 넓이는 닫힌구간 $[c, d]$에서

① $g(y)\geq 0$이면 $\quad \displaystyle\int_c^d g(y)dy$

② $g(y)\leq 0$이면 $\quad \displaystyle\int_c^d\{-g(y)\}dy=-\int_c^d g(y)dy$

1261 $y(x+1)=1$에서 $\quad y=\dfrac{1}{x+1}$



$x+1=\dfrac{1}{y} \qquad \therefore x=\dfrac{1}{y}-1$

따라서 오른쪽 그림에서 구하는 넓이는

$$\int_1^e\left\{-\left(\frac{1}{y}-1\right)\right\}dy=\int_1^e\left(1-\frac{1}{y}\right)dy$$

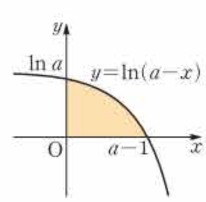
$$=\Big[y-\ln|y|\Big]_1^e$$

$=(e-1)-1$

$=e-2$

답 $e-2$

1262 $y=\ln(a-x)$에서



$a-x=e^y$

$\therefore x=a-e^y$

오른쪽 그림에서 색칠한 부분의 넓이는

$$\int_0^{\ln a}(a-e^y)dy=\Big[ay-e^y\Big]_0^{\ln a}$$

$=a\ln a-a+1$

따라서 $a\ln a-a+1=1$이므로

$a(\ln a-1)=0, \qquad \ln a-1=0\ (\because a>1)$

$\ln a=1 \qquad \therefore a=e$ 답 ②

다른 풀이 위의 그림에서 색칠한 부분의 넓이는

$$\int_0^{a-1}\ln(a-x)dx=\Big[x\ln(a-x)\Big]_0^{a-1}-\int_0^{a-1}\frac{-x}{a-x}dx$$

$$=-\int_0^{a-1}\left(1-\frac{a}{a-x}\right)dx$$

$$=-\Big[x+a\ln|a-x|\Big]_0^{a-1}$$

$=a\ln a-a+1$

따라서 $a\ln a-a+1=1$이므로

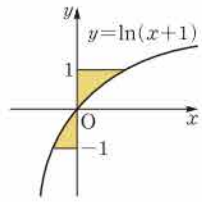
$a(\ln a-1)=0 \qquad \therefore a=e$

10 정적분의 활용

1263 $y=\ln(x+1)$에서

$x+1=e^y$

$\therefore x=e^y-1$



따라서 오른쪽 그림에서 구하는 넓이는

$$\int_{-1}^{0}\{-(e^y-1)\}dy+\int_0^1(e^y-1)dy$$

$$=\Big[-e^y+y\Big]_{-1}^{0}+\Big[e^y-y\Big]_0^1$$

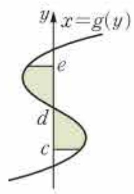
$$=\left\{-1-\left(-\frac{1}{e}-1\right)\right\}+(e-1-1)$$

$$=e+\frac{1}{e}-2$$

답 ①

SSEN 특강

곡선 $x=g(y)$와 y축 및 두 직선 $y=c$, $y=e$로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 때, 오른쪽 그림과 같이 $g(y)$의 값이 양수인 경우와 음수인 경우가 모두 있을 때에는 $g(y)\ge0$인 구간과 $g(y)\le0$인 구간으로 나누어 각 부분의 넓이의 합을 구한다.

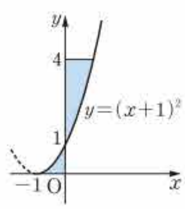


$\Rightarrow \int_c^d g(y)dy+\int_d^e\{-g(y)\}dy$

1264 $y=(x+1)^2$에서

$\sqrt{y}=x+1$ ($\because x\ge-1$)

$\therefore x=\sqrt{y}-1$ ❶



따라서 오른쪽 그림에서 구하는 넓이는

$$\int_0^1\{-(\sqrt{y}-1)\}dy+\int_1^4(\sqrt{y}-1)dy$$

$$=\left[-\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}+y\right]_0^1+\left[\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}-y\right]_1^4$$

$$=\frac{1}{3}+\left\{\frac{4}{3}-\left(-\frac{1}{3}\right)\right\}=2$$ ❷

답 2

채점 기준	비율
❶ x를 y의 식으로 나타낼 수 있다.	30 %
❷ 도형의 넓이를 구할 수 있다.	70 %

유형 07 곡선과 직선 사이의 넓이

본책 187쪽

(i) 곡선과 직선을 그려 위치 관계를 파악한다.
(ii) 곡선과 직선의 교점의 x좌표를 구하여 적분 구간을 정한다.
(iii) (ii)의 적분 구간에서 {(위쪽의 식)−(아래쪽의 식)}의 정적분의 값을 구한다.

1265 곡선 $y=-\dfrac{x}{x^2+1}$와 직선 $y=-\dfrac{1}{2}x$의 교점의 x좌표는

$-\dfrac{x}{x^2+1}=-\dfrac{1}{2}x$에서 $\quad x^3+x=2x$

$x^3-x=0,\quad x(x+1)(x-1)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-1}^{0}\left\{-\frac{x}{x^2+1}-\left(-\frac{1}{2}x\right)\right\}dx+\int_0^1\left\{-\frac{1}{2}x-\left(-\frac{x}{x^2+1}\right)\right\}dx$$

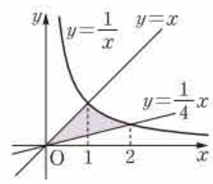
$$=\left[-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+\frac{1}{4}x^2\right]_{-1}^{0}+\left[-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}\ln(x^2+1)\right]_0^1$$

$$=-\left(-\frac{1}{2}\ln2+\frac{1}{4}\right)+\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\ln2\right)$$

$$=\ln2-\frac{1}{2}$$

답 ①

1266 곡선 $y=\dfrac{1}{x}$과 직선 $y=x$의 교점의 x좌표는 $\dfrac{1}{x}=x$에서



$x^2=1 \qquad \therefore x=1$ ($\because x>0$)

곡선 $y=\dfrac{1}{x}$과 직선 $y=\dfrac{1}{4}x$의 교점의 x좌표는 $\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{4}x$에서

$x^2=4 \qquad \therefore x=2$ ($\because x>0$) ❶

따라서 위의 그림에서 구하는 넓이는

$$\int_0^1\left(x-\frac{1}{4}x\right)dx+\int_1^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{4}x\right)dx$$

$$=\left[\frac{3}{8}x^2\right]_0^1+\left[\ln|x|-\frac{1}{8}x^2\right]_1^2$$

$$=\frac{3}{8}+\left\{\ln2-\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{8}\right)\right\}=\ln2$$ ❷

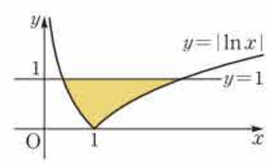
답 $\ln2$

채점 기준	비율
❶ 곡선과 두 직선의 교점의 x좌표를 각각 구할 수 있다.	40 %
❷ 곡선과 두 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.	60 %

1267 $0<x<1$에서

$y=|\ln x|=-\ln x$이므로

$x=e^{-y}$



$x\ge1$에서 $y=|\ln x|=\ln x$이므로

$x=e^y$

따라서 위의 그림에서 구하는 넓이는

$$\int_0^1(e^y-e^{-y})dy=\Big[e^y+e^{-y}\Big]_0^1$$

$$=e+\frac{1}{e}-2$$

답 ②

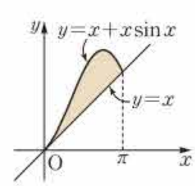
1268 곡선 $y=x+x\sin x$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표는

$x+x\sin x=x$에서

$x\sin x=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=\pi$ ($\because 0\le x\le\pi$)

따라서 오른쪽 그림에서 구하는 넓이는



$$\int_0^\pi(x+x\sin x-x)dx$$

$$=\int_0^\pi x\sin x\,dx$$

$$=\Big[-x\cos x\Big]_0^\pi-\int_0^\pi(-\cos x)dx$$

$$=\pi-\Big[-\sin x\Big]_0^\pi=\pi$$

답 π

참고 $0<x<\pi$일 때, $\sin x>0$이므로

$(x+x\sin x)-x=x\sin x>0$

즉 곡선 $y=x+x\sin x\,(0<x<\pi)$는 직선 $y=x$보다 항상 위쪽에 있다. 이와 같이 주어진 함수의 그래프를 정확히 그리기 어려울 때에는 두 함수의 대소를 비교하여 그래프가 위쪽에 있는 식과 아래쪽에 있는 식을 파악한 후 정적분의 값을 구한다.

유형 08 두 곡선 사이의 넓이 본책 188쪽

(i) 두 곡선을 그려 위치 관계를 파악한다.
(ii) 두 곡선의 교점의 x좌표를 구하여 적분 구간을 정한다.
(iii) (ii)의 적분 구간에서 {(위쪽의 식)−(아래쪽의 식)}의 정적분의 값을 구한다.

1269 두 곡선 $y=\cos x$, $y=\sin x$의 교점의 x좌표는

$\cos x=\sin x$에서

$$x=\frac{\pi}{4}\left(\because 0\le x\le \frac{\pi}{2}\right)$$

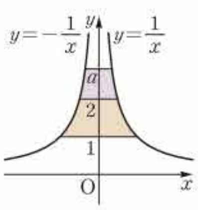
따라서 구하는 넓이는

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos x-\sin x)dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin x-\cos x)dx$$
$$=\Big[\sin x+\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}+\Big[-\cos x-\sin x\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=(\sqrt{2}-1)+(-1+\sqrt{2})$$
$$=2(\sqrt{2}-1)$$

답 ②

1270 $y=\dfrac{1}{x}$에서 $\quad x=\dfrac{1}{y}$

$y=-\dfrac{1}{x}$에서 $\quad x=-\dfrac{1}{y}$



따라서 오른쪽 그림에서

$$S_1=\int_1^2\left\{\frac{1}{y}-\left(-\frac{1}{y}\right)\right\}dy$$
$$=2\int_1^2\frac{1}{y}\,dy$$
$$=2\Big[\ln|y|\Big]_1^2$$
$$=2\ln 2$$ ··· ❶

$$S_2=\int_2^a\left\{\frac{1}{y}-\left(-\frac{1}{y}\right)\right\}dy$$
$$=2\int_2^a\frac{1}{y}\,dy$$
$$=2\Big[\ln|y|\Big]_2^a$$
$$=2\ln a-2\ln 2$$ ··· ❷

이때 $S_2=\dfrac{1}{2}S_1$이므로 $\quad 2\ln a-2\ln 2=\ln 2$

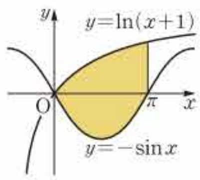
$$\ln a=\frac{3}{2}\ln 2=\ln 2^{\frac{3}{2}}$$

$$\therefore a=2^{\frac{3}{2}}=2\sqrt{2}$$ ··· ❸

답 $2\sqrt{2}$

채점 기준	비율
❶ S_1의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ S_2를 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40 %
❸ a의 값을 구할 수 있다.	20 %

1271 오른쪽 그림에서 구하는 넓이는



$$\int_0^{\pi}\{\ln(x+1)-(-\sin x)\}dx$$
$$=\int_0^{\pi}\{\ln(x+1)+\sin x\}dx$$
$$=\Big[x\ln(x+1)\Big]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\frac{x}{x+1}dx+\Big[-\cos x\Big]_0^{\pi}$$
$$=\pi\ln(\pi+1)-\int_0^{\pi}\left(1-\frac{1}{x+1}\right)dx+1-(-1)$$
$$=\pi\ln(\pi+1)-\Big[x-\ln|x+1|\Big]_0^{\pi}+2$$
$$=\pi\ln(\pi+1)-\{\pi-\ln(\pi+1)\}+2$$
$$=(\pi+1)\ln(\pi+1)-\pi+2$$

답 ⑤

1272 곡선 $y=\ln\dfrac{2x+e}{3}$와 x축의 교점의 x좌표는

$\ln\dfrac{2x+e}{3}=0$에서

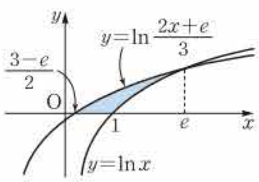
$$\frac{2x+e}{3}=1 \qquad \therefore x=\frac{3-e}{2}$$

두 곡선 $y=\ln x$, $y=\ln\dfrac{2x+e}{3}$의 교점의 x좌표는

$\ln x=\ln\dfrac{2x+e}{3}$에서

$$x=\frac{2x+e}{3} \qquad \therefore x=e$$

따라서 오른쪽 그림에서 구하는 넓이는



$$\int_{\frac{3-e}{2}}^{e}\ln\frac{2x+e}{3}\,dx-\int_1^e\ln x\,dx \quad \cdots\cdots ㉠$$

$\displaystyle\int_{\frac{3-e}{2}}^{e}\ln\frac{2x+e}{3}\,dx$에서 $\dfrac{2x+e}{3}=t$로 놓으면 $\quad\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{2}{3}$

$x=\dfrac{3-e}{2}$일 때 $t=1$, $x=e$일 때 $t=e$이므로 ㉠에서 구하는 넓이는

$$\frac{3}{2}\int_1^e\ln t\,dt-\int_1^e\ln x\,dx=\frac{3}{2}\int_1^e\ln x\,dx-\int_1^e\ln x\,dx$$
$$=\frac{1}{2}\int_1^e\ln x\,dx$$
$$=\frac{1}{2}\left(\Big[x\ln x\Big]_1^e-\int_1^e 1\,dx\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(e-\Big[x\Big]_1^e\right)$$
$$=\frac{1}{2}\{e-(e-1)\}=\frac{1}{2}$$

답 $\dfrac{1}{2}$

유형 09 곡선과 접선으로 둘러싸인 도형의 넓이 본책 189쪽

(i) 접선의 방정식을 구한다.
(ii) 곡선과 접선을 그려 위치 관계를 파악한다.
(iii) 적분 구간에서 {(위쪽의 식)−(아래쪽의 식)}의 정적분의 값을 구한다.

1273 $y=e^x$에서 $y'=e^x$이므로 곡선 위의 점 $(t,\ e^t)$에서의 접선의 기울기는 e^t이고 접선의 방정식은

$y-e^t=e^t(x-t)$

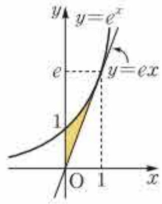
이 직선이 원점을 지나므로

$-e^t=-te^t \qquad \therefore t=1\ (\because e^t>0)$

곡선 $y=e^x$ 위의 점 $(1,\ e)$에서의 접선의 방정식은

$y-e=e(x-1) \qquad \therefore y=ex$

따라서 오른쪽 그림에서 구하는 넓이는



$$\int_0^1 (e^x-ex)dx=\left[e^x-\frac{e}{2}x^2\right]_0^1$$

$$=\frac{e}{2}-1$$

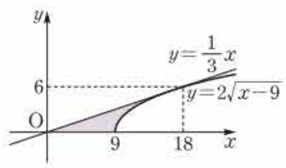
답 ①

1274 $y=2\sqrt{x-9}$에서

$y'=\dfrac{1}{\sqrt{x-9}}$

이므로 곡선 위의 점 $(18,\ 6)$에서의 접선의 기울기는 $\dfrac{1}{\sqrt{18-9}}=\dfrac{1}{3}$

이고 접선의 방정식은



$y-6=\dfrac{1}{3}(x-18) \qquad \therefore y=\dfrac{1}{3}x$

따라서 위의 그림에서 구하는 넓이는

$$\int_0^{18}\frac{1}{3}x\,dx-\int_9^{18}2\sqrt{x-9}\,dx=\left[\frac{1}{6}x^2\right]_0^{18}-\left[\frac{4}{3}(x-9)^{\frac{3}{2}}\right]_9^{18}$$

$$=54-36=18$$

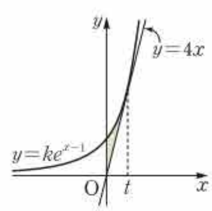
답 ⑤

참고 직선 $y=\frac{1}{3}x$와 x축 및 직선 $x=18$로 둘러싸인 부분의 넓이는 밑변의 길이가 18, 높이가 6인 직각삼각형의 넓이와 같음을 이용하여 $\frac{1}{2}\cdot18\cdot6=54$로 구할 수도 있다.

1275 $f(x)=ke^{x-1}$, $g(x)=4x$라 하면

$f'(x)=ke^{x-1}$, $g'(x)=4$

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=g(x)$의 접점의 x좌표를 t라 하면



$f(t)=g(t)$에서

$ke^{t-1}=4t$ …… ㉠

$f'(t)=g'(t)$에서 $\quad ke^{t-1}=4$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $\quad 4t=t \qquad \therefore t=1$

$t=1$을 ㉡에 대입하면 $\quad k=4$ ··· ❶

따라서 위의 그림에서 구하는 넓이는

$$\int_0^1(4e^{x-1}-4x)dx=\left[4e^{x-1}-2x^2\right]_0^1=2-\frac{4}{e}$$ ··· ❷

답 $2-\dfrac{4}{e}$

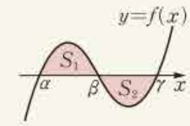
채점 기준	비율
❶ 접점의 x좌표와 k의 값을 구할 수 있다.	60 %
❷ 도형의 넓이를 구할 수 있다.	40 %

유형 10 두 도형의 넓이가 같을 조건

본책 189쪽

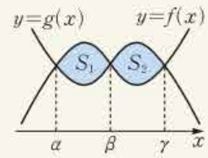
① 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 두 도형의 넓이를 각각 S_1, S_2라 할 때, $S_1=S_2$이면

$$\int_\alpha^\gamma f(x)dx=0$$



② 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$로 둘러싸인 두 도형의 넓이를 각각 S_1, S_2라 할 때, $S_1=S_2$이면

$$\int_\alpha^\gamma\{f(x)-g(x)\}dx=0$$



1276 $\displaystyle\int_0^k(\sqrt{x}-1)dx=0$이므로 $\quad \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-x\right]_0^k=0$

$\dfrac{2}{3}k^{\frac{3}{2}}-k=0, \qquad k\left(\dfrac{2}{3}\sqrt{k}-1\right)=0$

$\sqrt{k}=\dfrac{3}{2}\ (\because k>1) \qquad \therefore k=\dfrac{9}{4}$

답 ④

1277 $\displaystyle\int_0^2\left(\cos\frac{\pi}{4}x-k\right)dx=0$이므로

$\left[\dfrac{4}{\pi}\sin\dfrac{\pi}{4}x-kx\right]_0^2=0$

$\dfrac{4}{\pi}-2k=0 \qquad \therefore k=\dfrac{2}{\pi}$

답 $\dfrac{2}{\pi}$

1278 $\displaystyle\int_{\frac{1}{e}}^a\frac{\ln x}{x}dx=0$에서 $\ln x=t$로 놓으면 $\quad \dfrac{dt}{dx}=\dfrac{1}{x}$

$x=\dfrac{1}{e}$일 때 $t=-1$, $x=a$일 때 $t=\ln a$이므로

$\displaystyle\int_{-1}^{\ln a}t\,dt=0, \qquad \left[\frac{1}{2}t^2\right]_{-1}^{\ln a}=0$

$\dfrac{1}{2}\{(\ln a)^2-1\}=0, \qquad (\ln a)^2=1$

$\ln a=1\ (\because \underbrace{a>1}_{a>1\text{이면 } \ln a>0}) \qquad \therefore a=e$

답 e

1279 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x\cos^2x-ax)dx=0$이므로

$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cos^2x\,dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}}ax\,dx=0$ …… ㉠

$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cos^2x\,dx$에서 $\cos x=t$로 놓으면

$\dfrac{dt}{dx}=-\sin x$

$x=0$일 때 $t=1$, $x=\dfrac{\pi}{2}$일 때 $t=0$이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cos^2x\,dx=\int_1^0t^2\cdot(-1)dt=\int_0^1t^2\,dt$$

$$=\left[\frac{1}{3}t^3\right]_0^1=\frac{1}{3}$$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$\dfrac{1}{3}-\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}ax\,dx=0, \qquad \dfrac{1}{3}-\left[\dfrac{1}{2}ax^2\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=0$

$\dfrac{1}{3}-\dfrac{\pi^2}{8}a=0, \qquad \dfrac{\pi^2}{8}a=\dfrac{1}{3}$

$\therefore a=\dfrac{8}{3\pi^2}$

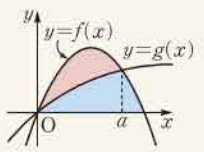
답 ④

유형 11 두 곡선 사이의 넓이의 활용; 이등분

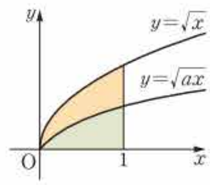
본책 190쪽

오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이 S가 곡선 $y=g(x)$에 의하여 이등분되면

$$\int_0^a |f(x)-g(x)|dx=\frac{1}{2}S$$



1280 오른쪽 그림에서 곡선 $y=\sqrt{x}$와 x축 및 직선 $x=1$로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_1이라 하면



$$S_1=\int_0^1 \sqrt{x}\,dx=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1=\frac{2}{3}$$

곡선 $y=\sqrt{ax}$와 x축 및 직선 $x=1$로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_2라 하면

$$S_2=\int_0^1 \sqrt{ax}\,dx=\left[\frac{2}{3}\cdot(ax)^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{1}{a}\right]_0^1=\frac{2}{3}\sqrt{a}$$

이때 $S_2=\frac{1}{2}S_1$이므로

$$\frac{2}{3}\sqrt{a}=\frac{1}{3},\qquad \sqrt{a}=\frac{1}{2}$$

$$\therefore a=\frac{1}{4}$$

답 ③

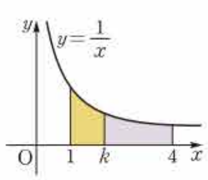
다른 풀이 $S_1=\int_0^1 \sqrt{x}\,dx$이므로

$$S_2=\int_0^1 \sqrt{ax}\,dx=\sqrt{a}\int_0^1 \sqrt{x}\,dx=\sqrt{a}\,S_1$$

이때 $S_2=\frac{1}{2}S_1$이므로

$$\sqrt{a}=\frac{1}{2}\qquad \therefore a=\frac{1}{4}$$

1281 오른쪽 그림에서 곡선 $y=\frac{1}{x}$과 x축 및 두 직선 $x=1$, $x=4$로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_1이라 하면



$$S_1=\int_1^4 \frac{1}{x}\,dx=\Big[\ln|x|\Big]_1^4$$
$$=2\ln 2$$ ···➊

곡선 $y=\frac{1}{x}$과 x축 및 두 직선 $x=1$, $x=k$로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_2라 하면

$$S_2=\int_1^k \frac{1}{x}\,dx=\Big[\ln|x|\Big]_1^k$$
$$=\ln k\ (\because 1<k<4)$$ ···➋

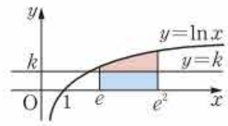
이때 $S_2=\frac{1}{2}S_1$이므로

$$\ln k=\ln 2\qquad \therefore k=2$$ ···➌

답 2

채점 기준	비율
➊ 곡선 $y=\frac{1}{x}$과 x축 및 두 직선 $x=1$, $x=4$로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.	40 %
➋ 곡선 $y=\frac{1}{x}$과 x축 및 두 직선 $x=1$, $x=k$로 둘러싸인 도형의 넓이를 k에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40 %
➌ k의 값을 구할 수 있다.	20 %

1282 오른쪽 그림에서 곡선 $y=\ln x$와 x축 및 두 직선 $x=e$, $x=e^2$으로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_1이라 하면



$$S_1=\int_e^{e^2} \ln x\,dx$$
$$=\Big[x\ln x\Big]_e^{e^2}-\int_e^{e^2} 1\,dx$$
$$=2e^2-e-\Big[x\Big]_e^{e^2}$$
$$=2e^2-e-(e^2-e)$$
$$=e^2$$

직선 $y=k$와 x축 및 두 직선 $x=e$, $x=e^2$으로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_2라 하면
└ 직사각형이다.

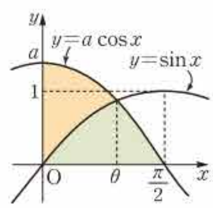
$$S_2=(e^2-e)k$$

이때 $S_2=\frac{1}{2}S_1$이므로 $\quad (e^2-e)k=\frac{1}{2}e^2$

$$\therefore k=\frac{e}{2(e-1)}$$

답 ③

1283 오른쪽 그림과 같이 두 곡선 $y=a\cos x$, $y=\sin x$의 교점의 x좌표를 $\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$라 하면 $a\cos\theta=\sin\theta$에서



$$a=\frac{\sin\theta}{\cos\theta},\ 즉\ a=\tan\theta \quad \cdots\cdots ㉠$$

$0\le x\le\frac{\pi}{2}$에서 곡선 $y=a\cos x$와 x축 및 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_1이라 하면

$$S_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}} a\cos x\,dx=\Big[a\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=a$$

$0\le x\le\theta$에서 두 곡선 $y=a\cos x$, $y=\sin x$와 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_2라 하면

$$S_2=\int_0^{\theta}(a\cos x-\sin x)\,dx=\Big[a\sin x+\cos x\Big]_0^{\theta}$$
$$=a\sin\theta+\cos\theta-1$$

이때 $S_2=\frac{1}{2}S_1$이므로 $\quad a\sin\theta+\cos\theta-1=\frac{a}{2}$

$$a\sin\theta+\cos\theta=\frac{a}{2}+1$$

양변을 $\cos\theta$로 나누면

$$a\cdot\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+1=\left(\frac{a}{2}+1\right)\frac{1}{\cos\theta}$$

$$\therefore a\tan\theta+1=\left(\frac{a}{2}+1\right)\sec\theta \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠에서 $\sec^2\theta=\tan^2\theta+1=a^2+1$이므로

$$\sec\theta=\sqrt{a^2+1}\ \left(\because 0<\theta<\frac{\pi}{2}\right) \quad \cdots\cdots ㉢$$

㉠, ㉢을 ㉡에 대입하면

$$a^2+1=\left(\frac{a}{2}+1\right)\sqrt{a^2+1}$$

$$\sqrt{a^2+1}=\frac{a}{2}+1,\qquad a^2+1=\frac{a^2}{4}+a+1$$

$$\frac{3}{4}a^2-a=0,\qquad a\left(\frac{3}{4}a-1\right)=0$$

$$\therefore a=\frac{4}{3}\ (\because a>0)$$

답 $\frac{4}{3}$

10 정적분의 활용

다른 풀이 $a=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$를 $a\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{a}{2}+1$에 대입하면

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\cdot\sin\theta+\cos\theta=\frac{\sin\theta}{2\cos\theta}+1$$

양변에 $2\cos\theta$를 곱하면

$$2\sin^2\theta+2\cos^2\theta=\sin\theta+2\cos\theta$$

$$\therefore\ 2=\sin\theta+2\cos\theta$$

$2-\sin\theta=2\cos\theta$의 양변을 제곱하면

$$4-4\sin\theta+\sin^2\theta=4\cos^2\theta$$

$$4-4\sin\theta+\sin^2\theta=4(1-\sin^2\theta)$$

$$5\sin^2\theta-4\sin\theta=0,\qquad \sin\theta(5\sin\theta-4)=0$$

$$\therefore\ \sin\theta=\frac{4}{5}\ \left(\because\ 0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$$

따라서 $\cos\theta=\sqrt{1-\left(\dfrac{4}{5}\right)^2}=\dfrac{3}{5}$이므로

$$a=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{4}{3}$$

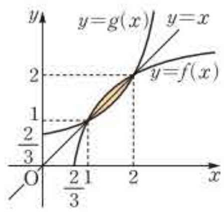
유형 12 함수와 그 역함수의 그래프로 둘러싸인 도형의 넓이

본책 190쪽

함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프로 둘러싸인 도형의 넓이는 두 그래프가 직선 $y=x$에 대하여 대칭임을 이용하여 구한다.

➡ 곡선 $y=f(x)$를 이용하여 곡선 $y=f^{-1}(x)$를 그린 후 그래프의 대칭성을 이용하여 넓이를 구한다.

1284 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 곡선의 교점의 x좌표는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표와 같다.



즉 $\sqrt{3x-2}=x$에서 $\qquad 3x-2=x^2$

$$x^2-3x+2=0$$

$$(x-1)(x-2)=0$$

$$\therefore\ x=1 \text{ 또는 } x=2$$

이때 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배와 같으므로 구하는 넓이는

$$2\int_1^2(\sqrt{3x-2}-x)dx=2\left[\frac{2}{9}(3x-2)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}x^2\right]_1^2$$

$$=2\cdot\left\{-\frac{2}{9}-\left(-\frac{5}{18}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{9}$$

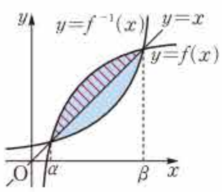
답 $\dfrac{1}{9}$

SSEN 특강

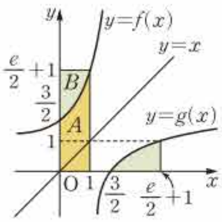
함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점의 x좌표가 α, β일 때, 두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이 S는

$$S=\int_\alpha^\beta|f(x)-f^{-1}(x)|dx$$

$$=2\int_\alpha^\beta|f(x)-x|dx$$



1285 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=f(x)$와 x축, y축 및 직선 $x=1$로 둘러싸인 도형의 넓이를 A, 곡선 $y=f(x)$와 y축 및 직선 $y=\dfrac{e}{2}+1$로 둘러싸인 도형의 넓이를 B라 하면



$$\int_0^1 f(x)dx+\int_{\frac{3}{2}}^{\frac{e}{2}+1}g(x)dx=A+B$$

$$=\left(\frac{e}{2}+1\right)\cdot1$$

$$=\frac{e}{2}+1$$

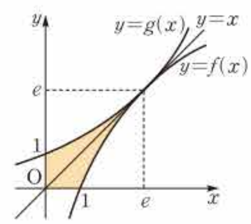
답 $\dfrac{e}{2}+1$

참고 $\displaystyle\int_{\frac{3}{2}}^{\frac{e}{2}+1}g(x)dx$는 곡선 $y=g(x)$와 x축 및 직선 $x=\dfrac{e}{2}+1$로 둘러싸인 도형의 넓이를 의미하고, 이 넓이는 B와 같다.

1286 $f(e)=e$이고, $f'(x)=\dfrac{e}{x}$에서 $f'(e)=1$이므로 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(e,\ e)$에서의 접선의 방정식은

$$y=x$$

또 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림과 같다. ⋯ ❶



이때 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$와 x축 및 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$ 및 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배와 같으므로 구하는 넓이는

$$2\left(\frac{1}{2}\cdot e\cdot e-\int_1^e e\ln x\,dx\right)=e^2-2e\left(\Big[x\ln x\Big]_1^e-\int_1^e 1\,dx\right)$$

$$=e^2-2e\left(e-\Big[x\Big]_1^e\right)$$

$$=e^2-2e\{e-(e-1)\}$$

$$=e^2-2e \qquad \cdots ❷$$

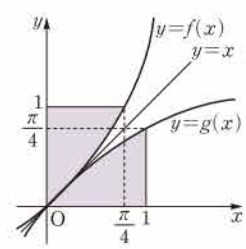
답 e^2-2e

채점 기준	비율
❶ 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$를 그릴 수 있다.	40 %
❷ 도형의 넓이를 구할 수 있다.	60 %

1287 $f(0)=0$이고, $f'(x)=\sec^2x$에서 $f'(0)=1$이므로 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0,\ 0)$에서의 접선의 방정식은

$$y=x$$

또 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림과 같다.



이때 $\displaystyle\int_0^1 g(x)dx$의 값은 곡선 $y=f(x)$와 y축 및 직선 $y=1$로 둘러싸인 도형의 넓이와 같으므로 구하는 넓이는

$$\frac{\pi}{4}\cdot 1-\int_0^{\frac{\pi}{4}}f(x)dx=\frac{\pi}{4}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x\,dx$$
$$=\frac{\pi}{4}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x}{\cos x}dx$$
$$=\frac{\pi}{4}+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{(\cos x)'}{\cos x}dx$$
$$=\frac{\pi}{4}+\Big[\ln|\cos x|\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}$$
$$=\frac{\pi}{4}+\ln\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}^{-1}$
$$=\frac{\pi}{4}-\ln\sqrt{2}$$
답 ④

유형 13 입체도형의 부피; 단면이 밑면과 평행한 경우 본책 191쪽

(i) 밑면으로부터의 높이가 x인 지점에서 밑면과 평행한 평면으로 자른 단면의 넓이 $S(x)$를 구한다.
(ii) 밑면으로부터의 높이가 a인 입체도형의 부피 V를 구한다.
➡ $V=\int_0^a S(x)dx$

1288 구하는 부피는

$$\int_0^{12}(\sqrt{2x+1}-1)dx=\left[\frac{1}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}}-x\right]_0^{12}$$
$$=\frac{89}{3}-\frac{1}{3}$$
$$=\frac{88}{3}\,(\mathrm{cm}^3)$$
답 $\frac{88}{3}\,\mathrm{cm}^3$

1289 단면인 직사각형의 가로의 길이가 $e^{-\frac{x}{2}}$일 때 세로의 길이는 $2e^{-\frac{x}{2}}$이므로 높이가 x일 때의 단면의 넓이를 $S(x)$라 하면

$$S(x)=e^{-\frac{x}{2}}\cdot 2e^{-\frac{x}{2}}=2e^{-x}$$

따라서 구하는 부피는

$$\int_0^5 2e^{-x}dx=\Big[-2e^{-x}\Big]_0^5=2-\frac{2}{e^5}$$
답 $2-\frac{2}{e^5}$

1290 주어진 입체도형의 부피는

$$\int_0^a x\ln(x^2+1)\,dx$$ ⋯ ❶

$x^2+1=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=2x$

$x=0$일 때 $t=1$, $x=a$일 때 $t=a^2+1$이므로

$$\int_0^a x\ln(x^2+1)dx=\int_1^{a^2+1}\frac{1}{2}\ln t\,dt$$
$$=\frac{1}{2}\left(\Big[t\ln t\Big]_1^{a^2+1}-\int_1^{a^2+1}1\,dt\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left\{(a^2+1)\ln(a^2+1)-\Big[t\Big]_1^{a^2+1}\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\{(a^2+1)\ln(a^2+1)-a^2\}$$ ⋯ ❷

따라서 $\frac{1}{2}\{(a^2+1)\ln(a^2+1)-a^2\}=\frac{5}{2}\ln 5-2$이므로

$$(a^2+1)\ln(a^2+1)-a^2=5\ln 5-4$$

이때 a는 유리수이므로

$a^2=4$ $\quad\therefore a=2\ (\because a>0)$ ⋯ ❸

답 2

채점 기준	비율
❶ 입체도형의 부피를 정적분을 이용하여 나타낼 수 있다.	20 %
❷ 입체도형의 부피를 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	50 %
❸ a의 값을 구할 수 있다.	30 %

1291 물의 깊이가 x일 때의 수면의 넓이를 $S(x)$라 하면

$$S(x)=\pi e^{2x}$$

물의 깊이가 $\ln 2$일 때의 그릇에 담긴 물의 부피 V는

$$V=\int_0^{\ln 2}S(x)dx=\int_0^{\ln 2}\pi e^{2x}dx$$
$$=\left[\frac{\pi}{2}e^{2x}\right]_0^{\ln 2}$$
$$=\frac{\pi}{2}\cdot 4-\frac{\pi}{2}=\frac{3}{2}\pi$$

따라서 물의 깊이가 $\ln 4$일 때의 그릇에 담긴 물의 부피는

$$\int_0^{\ln 4}S(x)dx=\int_0^{\ln 4}\pi e^{2x}dx=\left[\frac{\pi}{2}e^{2x}\right]_0^{\ln 4}$$
$$=\frac{\pi}{2}\cdot 16-\frac{\pi}{2}=\frac{15}{2}\pi$$
$$=5\cdot\frac{3}{2}\pi=5V$$
답 ④

유형 14 입체도형의 부피; 단면이 밑면과 수직인 경우 본책 192쪽

(i) 닫힌구간 $[a, b]$에서 x좌표가 x인 점을 지나고 x축에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이 $S(x)$를 구한다.
(ii) 입체도형의 부피 V를 구한다.
➡ $V=\int_a^b S(x)dx$

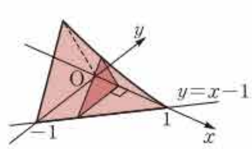
1292 점 $(x,\ 0)\left(\frac{\pi}{3}\le x\le\frac{2}{3}\pi\right)$을 지나고 x축에 수직인 평면으로 입체도형을 자른 단면의 넓이를 $S(x)$라 하면

$$S(x)=\{\sqrt{\sin x}-(-\sqrt{\sin x})\}^2=(2\sqrt{\sin x})^2$$
$$=4\sin x$$

따라서 구하는 부피는

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2}{3}\pi}S(x)dx=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2}{3}\pi}4\sin x\,dx=-4\Big[\cos x\Big]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2}{3}\pi}$$
$$=-4\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)=4$$
답 ②

1293 오른쪽 그림에서 점 $(x,\ 0)$ $(0\le x\le 1)$을 지나고 x축에 수직인 평면으로 입체도형을 자른 단면의 넓이를 $S(x)$라 하면



$$S(x)=\frac{\sqrt{3}}{4}(1-x)^2$$
$0\le x\le 1$에서 $x-1\le 0$이므로 $|x-1|=-(x-1)=1-x$
$$=\frac{\sqrt{3}}{4}(x^2-2x+1)$$

따라서 구하는 부피는

$$\int_0^1 S(x)dx=\int_0^1 \frac{\sqrt{3}}{4}(x^2-2x+1)dx$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\left[\frac{1}{3}x^3-x^2+x\right]_0^1$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{12}$$

답 ②

1294 점 $(x,\ 0)\ (0\le x\le 2)$을 지나고 x축에 수직인 평면으로 입체도형을 자른 단면의 넓이를 $S(x)$라 하면

$$S(x)=\frac{1}{2}(e^x+1)^2=\frac{1}{2}(e^{2x}+2e^x+1) \quad \cdots ❶$$

따라서 구하는 부피는

$$\int_0^2 S(x)\,dx=\int_0^2 \frac{1}{2}(e^{2x}+2e^x+1)dx$$
$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}e^{2x}+2e^x+x\right]_0^2$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{2}e^4+2e^2+2\right)-\frac{5}{2}\right\}$$
$$=\frac{1}{4}e^4+e^2-\frac{1}{4} \quad \cdots ❷$$

답 $\frac{1}{4}e^4+e^2-\frac{1}{4}$

채점 기준	비율
❶ 단면의 넓이를 x에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40 %
❷ 입체도형의 부피를 구할 수 있다.	60 %

1295 점 $(x,\ 0)(0\le x\le k)$을 지나고 x축에 수직인 평면으로 입체도형을 자른 단면의 넓이를 $S(x)$라 하면

$$S(x)=\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{e^x}{e^x+1}}\right)^2=\frac{\pi}{8}\cdot\frac{e^x}{e^x+1}$$

따라서 입체도형의 부피는

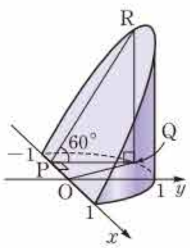
$$\int_0^k S(x)dx=\int_0^k \frac{\pi}{8}\cdot\frac{e^x}{e^x+1}dx \quad \frac{f'(x)}{f(x)} \text{ 꼴}$$
$$=\frac{\pi}{8}\Big[\ln(e^x+1)\Big]_0^k (\because e^x+1>0)$$
$$=\frac{\pi}{8}\{\ln(e^k+1)-\ln 2\}$$
$$=\frac{\pi}{8}\ln\frac{e^k+1}{2}$$

즉 $\frac{\pi}{8}\ln\frac{e^k+1}{2}=\frac{\pi}{4}\ln 3$이므로 $\quad \ln\frac{e^k+1}{2}=2\ln 3$

$\frac{e^k+1}{2}=9,\quad e^k=17\quad \therefore k=\ln 17$

답 $\ln 17$

1296 오른쪽 그림과 같이 입체도형을 밑면의 중심을 원점 O, 자른 평면과 밑면의 교선을 x축으로 하는 좌표평면 위에 놓고, x축 위의 점 $\mathrm{P}(x,\ 0)\ (-1\le x\le 1)$을 지나고 x축에 수직인 평면으로 입체도형을 자른 단면을 $\triangle$PQR라 하자.



이때 직각삼각형 POQ에서

$$\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{\overline{\mathrm{OQ}}^2-\overline{\mathrm{OP}}^2}=\sqrt{1-x^2}$$

또 직각삼각형 PQR에서

$$\overline{\mathrm{RQ}}=\overline{\mathrm{PQ}}\tan 60°=\sqrt{3}\sqrt{1-x^2}$$

$\triangle$PQR의 넓이를 $S(x)$라 하면

$$S(x)=\frac{1}{2}\cdot\overline{\mathrm{PQ}}\cdot\overline{\mathrm{RQ}}=\frac{\sqrt{3}}{2}(1-x^2)$$

따라서 구하는 부피는

$$\int_{-1}^1 S(x)dx=\int_{-1}^1 \frac{\sqrt{3}}{2}(1-x^2)dx$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\left[x-\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^1$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\left\{\frac{2}{3}-\left(-\frac{2}{3}\right)\right\}$$
$$=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

답 ③

유형 15 직선 위에서 움직인 거리

본책 192쪽

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도가 $v(t)$, $t=a$에서의 위치가 x_0일 때

① 시각 t에서의 점 P의 위치 x는 $\quad x=x_0+\int_a^t v(t)\,dt$

② 시각 $t=a$에서 $t=b$까지 점 P가 움직인 거리 s는

$$s=\int_a^b |v(t)|\,dt$$

1297 $t=0$에서의 점 P의 위치가 0이므로 $t=a\ (0<a\le 2\pi)$에서의 점 P의 위치는

$$0+\int_0^a \cos\pi t\,dt=\left[\frac{1}{\pi}\sin\pi t\right]_0^a=\frac{1}{\pi}\sin a\pi$$

점 P가 원점을 지나려면

$$\frac{1}{\pi}\sin a\pi=0,\qquad \sin a\pi=0$$
$$\therefore a=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\ (\because 0<a\le 2\pi)$$

따라서 점 P는 원점을 6번 지난다.

답 ⑤

1298 구슬의 중심 O가 4초 동안 움직인 거리가 x cm이므로

$$x=\int_0^4\left|(t+1)e^{\frac{t}{2}}\right|dt=\int_0^4(t+1)e^{\frac{t}{2}}dt$$
$$=\left[(t+1)\cdot 2e^{\frac{t}{2}}\right]_0^4-\int_0^4 2e^{\frac{t}{2}}dt$$
$$=10e^2-2-\left[4e^{\frac{t}{2}}\right]_0^4$$
$$=10e^2-2-(4e^2-4)$$
$$=6e^2+2$$

답 ③

1299 운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이므로 $v(t)=0$에서

$$2\sin 2\pi t=0,\qquad \sin 2\pi t=0$$
$$\therefore 2\pi t=\pi,\ 2\pi,\ 3\pi,\ \cdots$$
$$\therefore t=\frac{1}{2},\ 1,\ \frac{3}{2},\ \cdots$$

즉 두 번째로 운동 방향을 바꾸는 시각은 $\quad t=1 \quad \cdots ❶$

따라서 구하는 거리는

$$\int_0^1 |2\sin 2\pi t|\,dt=\int_0^{\frac{1}{2}} 2\sin 2\pi t\,dt+\int_{\frac{1}{2}}^1(-2\sin 2\pi t)dt$$
$$=\left[-\frac{1}{\pi}\cos 2\pi t\right]_0^{\frac{1}{2}}+\left[\frac{1}{\pi}\cos 2\pi t\right]_{\frac{1}{2}}^1$$
$$=\frac{2}{\pi}+\frac{2}{\pi}$$
$$=\frac{4}{\pi} \quad \cdots ❷$$

답 $\frac{4}{\pi}$

채점 기준	비율
❶ 두 번째로 운동 방향을 바꾸는 시각을 구할 수 있다.	40 %
❷ 움직인 거리를 구할 수 있다.	60 %

1300 $t=0$에서의 점 P의 위치가 0이므로 점 P의 시각 t에서의 위치를 x_1이라 하면

$$x_1=0+\int_0^t \cos 2t\,dt$$
$$=\left[\frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^t=\frac{1}{2}\sin 2t$$

$t=0$에서의 점 Q의 위치가 0이므로 점 Q의 시각 t에서의 위치를 x_2라 하면

$$x_2=0+\int_0^t \frac{1}{2}\cos t\,dt$$
$$=\left[\frac{1}{2}\sin t\right]_0^t=\frac{1}{2}\sin t$$

두 점 P, Q가 출발한 후 다시 만나려면

$$\frac{1}{2}\sin 2t=\frac{1}{2}\sin t, \qquad 2\sin t\cos t=\sin t$$
$$\sin t(2\cos t-1)=0 \qquad \therefore \sin t=0 \text{ 또는 } \cos t=\frac{1}{2}$$

$t>0$이므로

$\sin t=0$에서 $\quad t=\pi,\ 2\pi,\ 3\pi,\ \cdots$

$\cos t=\frac{1}{2}$에서 $\quad t=\frac{\pi}{3},\ \frac{5}{3}\pi,\ \frac{7}{3}\pi,\ \cdots$

$$\therefore t=\frac{\pi}{3},\ \pi,\ \frac{5}{3}\pi,\ \cdots$$

따라서 두 점 P, Q가 출발한 후 처음으로 다시 만나는 시각은 $t=\frac{\pi}{3}$이므로 구하는 점의 좌표는

$$\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}$$

답 $\frac{\sqrt{3}}{4}$

유형 16 좌표평면 위에서 움직인 거리 본책 193쪽

좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 $(x,\ y)$가 $x=f(t)$, $y=g(t)$일 때, 시각 $t=a$에서 $t=b$까지 점 P가 움직인 거리 s는

$$s=\int_a^b\sqrt{\{f'(t)\}^2+\{g'(t)\}^2}\,dt$$

1301 $\frac{dx}{dt}=\cos t-\sin t$, $\frac{dy}{dt}=-\sin t-\cos t$이므로 $t=0$에서 $t=\pi$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^\pi\sqrt{(\cos t-\sin t)^2+(-\sin t-\cos t)^2}\,dt$$
$$=\int_0^\pi\sqrt{2(\sin^2 t+\cos^2 t)}\,dt$$
$$=\int_0^\pi\sqrt{2}\,dt$$
$$=\left[\sqrt{2}t\right]_0^\pi=\sqrt{2}\pi$$

답 ②

1302 $\frac{dx}{dt}=t-2$, $\frac{dy}{dt}=\frac{4\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{3}{2}t^{\frac{1}{2}}=2\sqrt{2t}$이므로 $t=0$에서 $t=a$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^a\sqrt{(t-2)^2+(2\sqrt{2t})^2}\,dt=\int_0^a\sqrt{t^2+4t+4}\,dt$$
$$=\int_0^a\sqrt{\underbrace{(t+2)^2}_{t+2>0}}\,dt$$
$$=\int_0^a(t+2)dt$$
$$=\left[\frac{1}{2}t^2+2t\right]_0^a$$
$$=\frac{1}{2}a^2+2a$$

따라서 $\frac{1}{2}a^2+2a=6$이려면

$$a^2+4a-12=0, \qquad (a+6)(a-2)=0$$
$$\therefore a=2\ (\because a>0)$$

답 ①

1303 $\frac{dx}{dt}=-2\cos t\sin t=-\sin 2t$,

$\frac{dy}{dt}=2\sin t\cos t=\sin 2t$이므로 점 P의 시각 t에서의 속력은

$$\sqrt{(-\sin 2t)^2+(\sin 2t)^2}=\sqrt{2\sin^2 2t}$$
$$=\sqrt{2}\,|\sin 2t|$$

이때 점 P가 출발한 후 처음으로 속력이 0이 되는 때는 $t>0$에서 처음으로 $\sqrt{2}\,|\sin 2t|=0$, 즉 $|\sin 2t|=0$일 때이므로

$$2t=\pi \qquad \therefore t=\frac{\pi}{2}$$

따라서 $t=0$에서 $t=\frac{\pi}{2}$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2}\,|\sin 2t|\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2}\sin 2t\,dt$$
$$=\sqrt{2}\left[-\frac{1}{2}\cos 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=\sqrt{2}\left\{\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)\right\}$$
$$=\sqrt{2}$$

답 $\sqrt{2}$

1304 (1) $\frac{dx}{dt}=4$, $\frac{dy}{dt}=t-\frac{4}{t}$이므로 점 P의 시각 t에서의 속력은

$$\sqrt{4^2+\left(t-\frac{4}{t}\right)^2}=\sqrt{t^2+8+\frac{16}{t^2}}$$
$$=\sqrt{\left(t+\frac{4}{t}\right)^2}=t+\frac{4}{t}\ (\because t>0) \quad \cdots ❶$$

$t>0$, $\frac{4}{t}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$t+\frac{4}{t}\geq 2\sqrt{t\cdot\frac{4}{t}}=4$$

이때 등호는 $t=\frac{4}{t}$일 때 성립하므로 $\underbrace{t^2=4}_{t>0\text{이므로 } t=2}$, 즉 $t=2$일 때 점 P의 속력이 최소가 된다.

$\therefore a=2$ ⋯ ❷

(2) $t=1$에서 $t=2$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_1^2\left(t+\frac{4}{t}\right)dt=\left[\frac{1}{2}t^2+4\ln t\right]_1^2$$
$$=(2+4\ln 2)-\frac{1}{2}$$
$$=4\ln 2+\frac{3}{2}$$ ⋯ ❸

답 (1) 2 (2) $4\ln 2+\frac{3}{2}$

채점 기준	비율
❶ 점 P의 시각 t에서의 속력을 구할 수 있다.	30 %
❷ a의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ 시각 $t=1$에서 $t=a$까지 점 P가 움직인 거리를 구할 수 있다.	40 %

유형 17 곡선 $x=f(t)$, $y=g(t)$의 길이

본책 194쪽

곡선 $x=f(t)$, $y=g(t)$ $(a\le t\le b)$의 겹치는 부분이 없을 때, 곡선의 길이는 다음과 같은 순서로 구한다.

(i) $\frac{dx}{dt}=f'(t)$, $\frac{dy}{dt}=g'(t)$를 구한다.

(ii) $\int_a^b\sqrt{\{f'(t)\}^2+\{g'(t)\}^2}\,dt$의 값을 구한다.

1305 $\frac{dx}{dt}=e^t\sin t+e^t\cos t=e^t(\sin t+\cos t)$

$\frac{dy}{dt}=e^t\cos t-e^t\sin t=e^t(\cos t-\sin t)$

따라서 구하는 곡선의 길이는

$$\int_0^\pi\sqrt{e^{2t}(\sin t+\cos t)^2+e^{2t}(\cos t-\sin t)^2}\,dt$$
$$=\int_0^\pi\sqrt{2e^{2t}}\,dt=\int_0^\pi\sqrt{2}\,e^t\,dt\ (\because e^t>0)$$
$$=\sqrt{2}\left[e^t\right]_0^\pi=\sqrt{2}(e^\pi-1)$$

답 ①

1306 $\frac{dx}{dt}=6\cos^2 t\cdot(-\sin t)=-6\cos^2 t\sin t$

$\frac{dy}{dt}=6\sin^2 t\cos t$

따라서 구하는 곡선의 길이는

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{36\cos^4 t\sin^2 t+36\sin^4 t\cos^2 t}\,dt$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{36\sin^2 t\cos^2 t(\cos^2 t+\sin^2 t)}\,dt$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\underbrace{(6\sin t\cos t)^2}_{0\le t\le\frac{\pi}{2}\text{에서 }\sin t\cos t\ge 0}}\,dt$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}6\sin t\cos t\,dt$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}3\sin 2t\,dt=3\left[-\frac{1}{2}\cos 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=3\left\{\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)\right\}=3$$

답 3

1307 $\frac{dx}{dt}=\frac{1}{t}$

$\frac{dy}{dt}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{t^2}\right)$ ⋯ ❶

따라서 구하는 곡선의 길이는

$$\int_{\frac{1}{e}}^{e}\sqrt{\frac{1}{t^2}+\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{t^2}\right)^2}\,dt=\int_{\frac{1}{e}}^{e}\sqrt{\frac{1}{4}\left(1+\frac{2}{t^2}+\frac{1}{t^4}\right)}\,dt$$
$$=\int_{\frac{1}{e}}^{e}\sqrt{\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{t^2}\right)^2}\,dt$$
$$=\int_{\frac{1}{e}}^{e}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{t^2}\right)dt$$
$$=\frac{1}{2}\left[t-\frac{1}{t}\right]_{\frac{1}{e}}^{e}$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\left(e-\frac{1}{e}\right)-\left(\frac{1}{e}-e\right)\right\}$$
$$=e-\frac{1}{e}$$ ⋯ ❷

답 $e-\frac{1}{e}$

채점 기준	비율
❶ $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$를 구할 수 있다.	20 %
❷ 곡선의 길이를 구할 수 있다.	80 %

유형 18 곡선 $y=f(x)$의 길이

본책 194쪽

곡선 $y=f(x)$ $(a\le x\le b)$의 길이는 다음과 같은 순서로 구한다.

(i) $f'(x)$를 구한다.

(ii) $\int_a^b\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$의 값을 구한다.

1308 $y=\frac{1}{3}(x^2+2)\sqrt{x^2+2}$

$=\frac{1}{3}(x^2+2)^{\frac{3}{2}}$

이므로

$y'=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}(x^2+2)^{\frac{1}{2}}\cdot 2x$

$=x\sqrt{x^2+2}$

따라서 주어진 곡선의 길이는

$$\int_0^a\sqrt{1+(x\sqrt{x^2+2})^2}\,dx=\int_0^a\sqrt{x^4+2x^2+1}\,dx$$
$$=\int_0^a\sqrt{(x^2+1)^2}\,dx$$
$$=\int_0^a(x^2+1)dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3+x\right]_0^a$$
$$=\frac{1}{3}a^3+a$$

즉 $\frac{1}{3}a^3+a=\frac{14}{3}$이므로

$a^3+3a-14=0$

$(a-2)(a^2+2a+7)=0$

$\therefore a=2\ (\because a^2+2a+7>0)$

답 ②

1309 $y'=e^x-\frac{1}{4}e^{-x}$이므로 구하는 곡선의 길이는

$$\int_0^{\ln 3}\sqrt{1+\left(e^x-\frac{1}{4}e^{-x}\right)^2}\,dx=\int_0^{\ln 3}\sqrt{e^{2x}+\frac{1}{2}+\frac{1}{16}e^{-2x}}\,dx$$
$$=\int_0^{\ln 3}\sqrt{\left(e^x+\frac{1}{4}e^{-x}\right)^2}\,dx$$
$$=\int_0^{\ln 3}\left(e^x+\frac{1}{4}e^{-x}\right)dx$$
$$=\left[e^x-\frac{1}{4}e^{-x}\right]_0^{\ln 3}$$
$$=\frac{35}{12}-\frac{3}{4}=\frac{13}{6}$$

답 ④

1310 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0,\ 2)$에서 곡선 위의 임의의 점 $(x,\ y)$까지의 곡선의 길이가 e^x-y+1, 즉 $e^x-f(x)+1$이므로

$$\int_0^x\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx=e^x-f(x)+1$$

양변을 x에 대하여 미분하면

$$\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}=e^x-f'(x)$$

양변을 제곱하면

$$1+\{f'(x)\}^2=e^{2x}-2e^xf'(x)+\{f'(x)\}^2$$
$$\therefore\ f'(x)=\frac{e^{2x}-1}{2e^x}$$
$$\therefore\ f'(1)=\frac{e^2-1}{2e}=\frac{1}{2}\left(e-\frac{1}{e}\right)$$

답 ②

1311 1st 점 Q_k의 좌표를 구한다.

$y=\sqrt{x}$에서 $\quad y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

점 $\mathrm{P}_k(x_k,\ \sqrt{x_k})$에서의 접선의 기울기는 $\frac{1}{2\sqrt{x_k}}$이므로 접선의 방정식은

$$y-\sqrt{x_k}=\frac{1}{2\sqrt{x_k}}(x-x_k)$$
$$\therefore\ y=\frac{1}{2\sqrt{x_k}}x+\frac{1}{2}\sqrt{x_k}$$

위의 식에 $x=0$을 대입하면 $\quad y=\frac{1}{2}\sqrt{x_k}$

$$\therefore\ \mathrm{Q}_k\left(0,\ \frac{1}{2}\sqrt{x_k}\right)$$

2nd S_k를 구한다.

$$S_k=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{x_k}\cdot x_k=\frac{1}{4}x_k^{\frac{3}{2}}$$

이때 $x_k=1+\frac{3k}{n}$이므로 $\quad S_k=\frac{1}{4}\left(1+\frac{3k}{n}\right)^{\frac{3}{2}}$

3rd $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}S_k$의 값을 구한다.

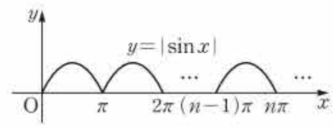
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}S_k=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4}\left(1+\frac{3k}{n}\right)^{\frac{3}{2}}$$
$$=\frac{1}{12}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{3k}{n}\right)^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{3}{n}$$
$$=\frac{1}{12}\int_1^4 x^{\frac{3}{2}}\,dx=\frac{1}{12}\left[\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\right]_1^4$$
$$=\frac{1}{12}\left(\frac{64}{5}-\frac{2}{5}\right)=\frac{31}{30}$$

답 ④

1312 1st S_n을 구한다.

$$S_n=\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}\left|\left(\frac{1}{2}\right)^n\sin x\right|dx=\left(\frac{1}{2}\right)^n\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}|\sin x|\,dx$$

이때 $y=|\sin x|$는 오른쪽 그림과 같이 주기가 π인 주기함수이므로



$$\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}|\sin x|\,dx=\int_0^{\pi}\sin x\,dx$$
$$=\Big[-\cos x\Big]_0^{\pi}$$
$$=1-(-1)=2$$
$$\therefore\ S_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}|\sin x|\,dx$$
$$=\left(\frac{1}{2}\right)^n\cdot 2=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

2nd $\sum\limits_{n=1}^{\infty}S_n$의 값을 구한다.

수열 $\{S_n\}$은 첫째항이 1, 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$$

답 2

다른 풀이 (i) n이 홀수일 때,

구간 $[(n-1)\pi,\ n\pi]$에서 $\sin x\geq 0$이므로

$$S_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}\sin x\,dx$$
$$=\left(\frac{1}{2}\right)^n\Big[-\cos x\Big]_{(n-1)\pi}^{n\pi}$$
$$=\left(\frac{1}{2}\right)^n\{1-(-1)\}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

(ii) n이 짝수일 때,

구간 $[(n-1)\pi,\ n\pi]$에서 $\sin x\leq 0$이므로

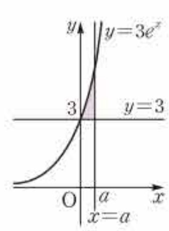
$$S_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}(-\sin x)\,dx$$
$$=\left(\frac{1}{2}\right)^n\Big[\cos x\Big]_{(n-1)\pi}^{n\pi}$$
$$=\left(\frac{1}{2}\right)^n\{1-(-1)\}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

(i), (ii)에서 $S_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$$

1313 1st 넓이를 a에 대한 식으로 나타낸다.

곡선 $y=3e^x$과 두 직선 $x=a$, $y=3$으로 둘러싸인 부분은 오른쪽 그림의 색칠한 부분과 같으므로 구하는 넓이는



$$\int_0^a(3e^x-3)\,dx=\Big[3e^x-3x\Big]_0^a$$
$$=3(e^a-a-1)\quad\cdots\cdots\ ㉠$$

2nd $f(x)$의 최댓값을 a에 대한 식으로 나타낸다.

$f(x)=\int_0^x(a-t)e^t\,dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f'(x)=(a-x)e^x$$

$f'(x)=0$에서

$x=a$ ($\because e^x>0$)

x	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	극대	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극대이면서 최대이므로 최댓값은

$$f(a)=\int_0^a (a-t)e^t dt$$
$$=\Big[(a-t)e^t\Big]_0^a-\int_0^a(-e^t)dt$$
$$=-a+\Big[e^t\Big]_0^a$$
$$=e^a-a-1$$

3rd 넓이를 구한다.

$e^a-a-1=32$이므로 ㉠에서 구하는 넓이는

$$\int_0^a(3e^x-3)dx=3\cdot 32=96$$

답 96

1314 1st 함수 $y=f(x)$의 그래프를 그린다.

조건 (가)에서

$$f'(x)=\frac{2x\cdot x^3-(x^2-1)\cdot 3x^2}{x^6}$$
$$=\frac{3-x^2}{x^4}$$

$f'(x)=0$에서

$x=\sqrt{3}$ ($\because x\geq 1$)

x	1	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$	0	↗	극대	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\sqrt{3}$에서 극대이고,

$f(1)=0$, $f(\sqrt{3})=\frac{2\sqrt{3}}{9}$이다.

조건 (나)에서

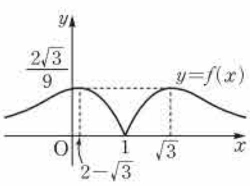
$f(x)=f(2-x)$

양변에 x 대신 $1-x$를 대입하면

$f(1-x)=f(1+x)$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=1$에 대하여 대칭이다.

또 $\lim_{x\to\infty}f(x)=0$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



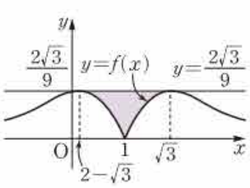
2nd k의 값을 구한다.

함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 서로 다른 두 점에서 만나려면

$$k=\frac{2\sqrt{3}}{9}$$

3rd 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=\frac{2\sqrt{3}}{9}$으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구한다.

함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=\frac{2\sqrt{3}}{9}$으로 둘러싸인 도형은 오른쪽 그림의 색칠한 부분과 같으므로 그 넓이는



$$2\int_1^{\sqrt{3}}\left(\frac{2\sqrt{3}}{9}-\frac{x^2-1}{x^3}\right)dx$$
$$=2\int_1^{\sqrt{3}}\left(\frac{2\sqrt{3}}{9}-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}\right)dx$$
$$=2\left[\frac{2\sqrt{3}}{9}x-\ln|x|-\frac{1}{2x^2}\right]_1^{\sqrt{3}}$$
$$=2\left\{\left(\frac{1}{2}-\ln\sqrt{3}\right)-\left(\frac{2\sqrt{3}}{9}-\frac{1}{2}\right)\right\}$$
$$=2\left(1-\frac{2\sqrt{3}}{9}-\ln\sqrt{3}\right)$$
$$=2-\frac{4\sqrt{3}}{9}-\ln 3$$

4th abc의 값을 구한다.

$a=2$, $b=-\frac{4}{9}$, $c=-1$이므로

$$abc=\frac{8}{9}$$

답 $\frac{8}{9}$

1315 1st 주어진 정적분을 $f(x)$에 대한 정적분으로 변형한다.

$$\int_0^2(2x+3)f'(x)\,dx=\Big[(2x+3)f(x)\Big]_0^2-\int_0^2 2f(x)\,dx$$
$$=7f(2)-3f(0)-2\int_0^2 f(x)\,dx$$
$$=7\cdot 1-3\cdot 0-2\int_0^2 f(x)\,dx$$
$$=7-2\int_0^2 f(x)\,dx \qquad \cdots\cdots ㉠$$

2nd $A=B$임을 이용하여 정적분의 값을 구한다.

$A=B$이므로

$$\int_0^2 f(x)\,dx=0$$

따라서 ㉠에서

$$\int_0^2(2x+3)f'(x)\,dx=7-2\cdot 0=7$$

답 7

1316 1st 접선의 방정식을 구하여 접선의 x절편을 구한다.

$f'(x)=\cos x$이므로 점 $\mathrm{P}(a, \sin a)$에서의 접선의 기울기는 $\cos a$이고 접선의 방정식은

$y-\sin a=\cos a\cdot(x-a)$

이 식에 $y=0$을 대입하면

$-\sin a=(x-a)\cos a$

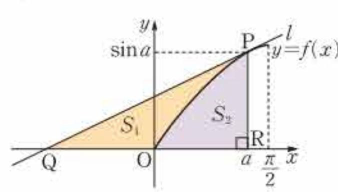
$x-a=-\frac{\sin a}{\cos a}$ $\left(\because 0<a<\frac{\pi}{2}\right)$

$0<a<\frac{\pi}{2}$에서 $\cos a>0$

$\therefore x=a-\frac{\sin a}{\cos a}$

2nd 두 부분의 넓이가 같음을 이용하여 $\cos a$의 값을 구한다.

오른쪽 그림과 같이 직선 l이 x축과 만나는 점을 Q, 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 R라 하면



$\mathrm{Q}\left(a-\frac{\sin a}{\cos a}, 0\right)$,

$\mathrm{R}(a, 0)$

곡선 $y=f(x)$와 x축 및 직선 l로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_1, 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 직선 $x=a$로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_2라 하면 $S_1+S_2=\triangle\mathrm{PQR}$이고 $S_1=S_2$이므로

$$S_2=\frac{1}{2}\triangle\mathrm{PQR}$$

이때

$$S_2=\int_0^a \sin x\,dx=\Big[-\cos x\Big]_0^a=-\cos a+1,$$

$$\triangle\mathrm{PQR}=\frac{1}{2}\cdot\left\{a-\left(a-\frac{\sin a}{\cos a}\right)\right\}\cdot\sin a$$
$$=\frac{\sin^2 a}{2\cos a}$$
$$=\frac{1-\cos^2 a}{2\cos a}$$

이므로 $\quad -\cos a+1=\dfrac{1-\cos^2 a}{4\cos a}$

$$-4\cos^2 a+4\cos a=1-\cos^2 a$$
$$3\cos^2 a-4\cos a+1=0$$
$$(3\cos a-1)(\cos a-1)=0$$
$$\therefore\ \cos a=\frac{1}{3}\ \left(\because\ 0<a<\frac{\pi}{2}\right)$$

답 ②

1317 1st $f(x)$를 구한다.

(i) $0\le x<1$일 때, $\lim\limits_{n\to\infty}x^n=\lim\limits_{n\to\infty}x^{n+2}=0$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{n+2}+\sin\frac{\pi}{2}x}{x^n+1}=\sin\frac{\pi}{2}x$$

(ii) $x=1$일 때,

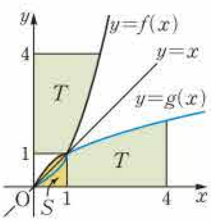
$$f(1)=\frac{1+1}{1+1}=1$$

(iii) $x>1$일 때, $\lim\limits_{n\to\infty}x^n=\infty$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{n+2}+\sin\frac{\pi}{2}x}{x^n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{x^2+\frac{\sin\frac{\pi}{2}x}{x^n}}{1+\frac{1}{x^n}}=x^2$$

2nd S의 값을 구한다.

이상에서 함수 $y=f(x)$와 역함수 $y=g(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$$S=\int_0^1 \sin\frac{\pi}{2}x\,dx$$
$$=\left[-\frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi}{2}x\right]_0^1=\frac{2}{\pi}$$

3rd T의 값을 구한다.

T는 곡선 $y=f(x)$와 y축 및 두 직선 $y=1$, $y=4$로 둘러싸인 도형의 넓이와 같다.

$y=x^2$에서 $\quad x=\sqrt{y}\ (\because\ x>1)$

$$\therefore\ T=\int_1^4\sqrt{y}\,dy=\left[\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}\right]_1^4=\frac{14}{3}$$

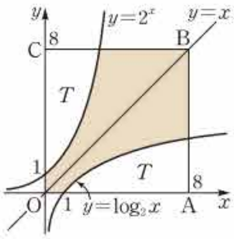
4th $\dfrac{T}{S}$의 값을 구한다.

$$\frac{T}{S}=\frac{14}{3}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{7}{3}\pi$$

답 $\dfrac{7}{3}\pi$

1318 1st 두 곡선 $y=2^x$과 $y=\log_2 x$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭임을 파악한다.

두 함수 $y=2^x$과 $y=\log_2 x$는 서로 역함수이므로 오른쪽 그림과 같이 두 함수의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.



2nd 곡선 $y=\log_2 x$와 x축 및 직선 $x=8$로 둘러싸인 부분의 넓이를 구한다.

$n=3$일 때, $\mathrm{A}(8,\ 0)$, $\mathrm{B}(8,\ 8)$, $\mathrm{C}(0,\ 8)$이므로 곡선 $y=\log_2 x$와 x축 및 직선 $x=8$로 둘러싸인 부분의 넓이를 T라 하면

$$T=\int_1^8 \log_2 x\,dx$$
$$=\frac{1}{\ln 2}\int_1^8 \ln x\,dx$$
$$=\frac{1}{\ln 2}\left(\Big[x\ln x\Big]_1^8-\int_1^8 1\,dx\right)$$
$$=\frac{1}{\ln 2}\left(8\ln 8-\Big[x\Big]_1^8\right)$$
$$=\frac{1}{\ln 2}(24\ln 2-7)$$
$$=24-\frac{7}{\ln 2}$$

3rd 색칠된 부분의 넓이를 구한다.

곡선 $y=2^x$과 y축 및 직선 $y=8$로 둘러싸인 부분의 넓이도 T이므로 구하는 넓이는

$$\square\mathrm{OABC}-2T=8^2-2T$$

└ □OABC는 한 변의 길이가 8인 정사각형이다.

$$=64-2\left(24-\frac{7}{\ln 2}\right)$$
$$=16+\frac{14}{\ln 2}$$

답 ②

1319 1st 곡선 $y=xe^x$과 x축 및 직선 $x=t$로 둘러싸인 도형의 넓이를 구한다.

곡선 $y=xe^x$과 x축 및 직선 $x=t\ (0\le t\le 1)$로 둘러싸인 도형의 넓이를 $S(t)$라 하면

$$S(t)=\int_0^t xe^x\,dx=\Big[xe^x\Big]_0^t-\int_0^t e^x\,dx$$
$$=te^t-\Big[e^x\Big]_0^t$$
$$=te^t-(e^t-1)$$
$$=(t-1)e^t+1$$

2nd 입체도형의 부피를 구한다.

주어진 입체도형을 점 P를 지나고 x축에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이는 $S(t)=(t-1)e^t+1$과 같으므로 구하는 부피는

└ 합동인 두 도형의 넓이는 같다.

$$\int_0^1 S(t)dt=\int_0^1\{(t-1)e^t+1\}dt$$
$$=\Big[(t-1)e^t\Big]_0^1-\int_0^1 e^t dt+\Big[t\Big]_0^1$$
$$=1-\Big[e^t\Big]_0^1+1$$
$$=3-e$$

답 ①

1320 (1st) 점 P의 위치를 삼각함수로 나타낸다.

$t=0$에서의 점 P의 위치가 0이므로 시각 $t=k\ (0\le k\le\pi)$에서의 점 P의 위치를 x라 하면

$$x=\int_0^k(\sin 2t-2\sin t)dt$$
$$=\left[-\frac{1}{2}\cos 2t+2\cos t\right]_0^k$$
$$=-\frac{1}{2}\cos 2k+2\cos k-\frac{3}{2}$$
$$=-\frac{1}{2}(2\cos^2 k-1)+2\cos k-\frac{3}{2}$$
$$=-\cos^2 k+2\cos k-1$$
$$=-(\cos k-1)^2$$

(2nd) 원점과 점 P 사이의 거리의 최댓값을 구한다.

$0\le k\le\pi$에서 $-1\le\cos k\le 1$이므로

$$-2\le\cos k-1\le 0$$
$$0\le(\cos k-1)^2\le 4$$
$$\therefore -4\le-(\cos k-1)^2\le 0$$

즉 $-4\le x\le 0$에서 $0\le \underbrace{|x|}_{\text{원점과 점 P 사이의 거리}}\le 4$이므로 원점과 점 P 사이의 거리의 최댓값은 4이다.

답 4

1321 (1st) $f'(t)$를 구한다.

$\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{2}{t}$, $\dfrac{dy}{dt}=f'(t)$이므로 점 P가 $t=1$에서 t까지 움직인 거리 s는

$$s=\int_1^t\sqrt{\left(\frac{2}{t}\right)^2+\{f'(t)\}^2}\,dt \quad\cdots\cdots ㉠$$

$t=\dfrac{s+\sqrt{s^2+4}}{2}$에서

$$2t-s=\sqrt{s^2+4}$$

양변을 제곱하면

$$4t^2-4ts+s^2=s^2+4$$
$$ts=t^2-1$$
$$\therefore s=t-\frac{1}{t}\ (\because t\ge 1) \quad\cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서

$$\int_1^t\sqrt{\left(\frac{2}{t}\right)^2+\{f'(t)\}^2}\,dt=t-\frac{1}{t}$$

양변을 t에 대하여 미분하면

$$\sqrt{\frac{4}{t^2}+\{f'(t)\}^2}=1+\frac{1}{t^2}$$

양변을 제곱하면

$$\frac{4}{t^2}+\{f'(t)\}^2=1+\frac{2}{t^2}+\frac{1}{t^4}$$
$$\{f'(t)\}^2=\left(1-\frac{1}{t^2}\right)^2 \quad\cdots\cdots ㉢$$

점 P의 시각 t에서의 속도는 $\left(\dfrac{2}{t},\ f'(t)\right)$이고, $t=2$일 때 점 P의 속도가 $\left(1,\ \dfrac{3}{4}\right)$이므로

$$f'(2)=\frac{3}{4}$$

즉 ㉢에서

$$f'(t)=1-\frac{1}{t^2}$$

(2nd) $60a$의 값을 구한다.

$\dfrac{d^2x}{dt^2}=-\dfrac{2}{t^2}$, $\dfrac{d^2y}{dt^2}=f''(t)=\dfrac{2}{t^3}$이므로 점 P의 시각 t에서의 가속도는

$$\left(-\frac{2}{t^2},\ \frac{2}{t^3}\right)$$

$t=2$일 때 점 P의 가속도가 $\left(-\dfrac{1}{2},\ a\right)$이므로

$$a=\frac{1}{4}$$
$$\therefore 60a=60\cdot\frac{1}{4}=15$$

답 15

1322 전략 $f(x)$를 정적분으로 나타낸 후 도함수를 이용하여 극대, 극소를 파악한다.

풀이
$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{kx}{n}\cos\frac{kx}{n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{kx}{n}\cos\underbrace{\frac{kx}{n}}_{x_k}\cdot\underbrace{\frac{x}{n}}_{\Delta x}$$
$$=\int_0^x t\cos t\,dt \quad\cdots ❶$$

양변을 x에 대하여 미분하면

$$f'(x)=x\cos x$$

$f'(x)=0$에서

$$x=0 \text{ 또는 } \cos x=0$$
$$\therefore x=\frac{\pi}{2} \text{ 또는 } x=\frac{3}{2}\pi\ (\because 0<x<2\pi)$$

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{3}{2}\pi$	$\cdots$	2π
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$		↗	극대	↘	극소	↗	

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\dfrac{3}{2}\pi$에서 극소이므로

$$\alpha=\frac{3}{2}\pi \quad\cdots ❷$$
$$\therefore \beta=f\left(\frac{3}{2}\pi\right)$$
$$=\int_0^{\frac{3}{2}\pi}t\cos t\,dt$$
$$=\Big[t\sin t\Big]_0^{\frac{3}{2}\pi}-\int_0^{\frac{3}{2}\pi}\sin t\,dt$$
$$=-\frac{3}{2}\pi-\Big[-\cos t\Big]_0^{\frac{3}{2}\pi}$$
$$=-\frac{3}{2}\pi-1 \quad\cdots ❸$$
$$\therefore \alpha+\beta=-1 \quad\cdots ❹$$

답 −1

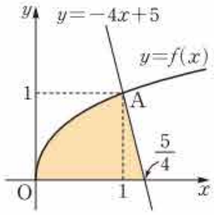
채점 기준	비율
❶ $f(x)$를 정적분으로 나타낼 수 있다.	40 %
❷ α의 값을 구할 수 있다.	20 %
❸ β의 값을 구할 수 있다.	30 %
❹ $\alpha+\beta$의 값을 구할 수 있다.	10 %

1323 전략 두 직선이 서로 수직이면 기울기의 곱이 -1임을 이용한다.

풀이 $f'(x)=\dfrac{\frac{1}{\sqrt{x}}(1+\sqrt{x})-2\sqrt{x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(1+\sqrt{x})^2}$

$=\dfrac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}$

이때 $x>0$이고 $f'(x)>0$이므로 함수 $f(x)$는 $x>0$에서 증가하고, $f(0)=0$이므로 곡선 $y=f(x)$는 오른쪽 그림과 같다.



한편 점 A(1, 1)에서의 접선의 기울기가 $f'(1)=\frac{1}{4}$이므로 직선 l의 방정식은

$y-1=-4(x-1)$

$\therefore y=-4x+5$ ····· ❶

따라서 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 직선 l로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_0^1 \frac{2\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,dx+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{5}{4}-1\right)\cdot 1=\int_0^1\frac{2\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,dx+\frac{1}{8}$$

$\sqrt{x}=t$로 놓으면 $\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=\dfrac{1}{2t}$

$x=0$일 때 $t=0$, $x=1$일 때 $t=1$이므로 구하는 넓이는

$$\int_0^1\frac{2t}{1+t}\cdot 2t\,dt+\frac{1}{8}=\int_0^1\frac{4t^2}{1+t}\,dt+\frac{1}{8}$$

$$=\int_0^1\left(4t-4+\frac{4}{1+t}\right)dt+\frac{1}{8}$$

$$=\Big[2t^2-4t+4\ln|1+t|\Big]_0^1+\frac{1}{8}$$

$$=4\ln 2-2+\frac{1}{8}$$

$$=4\ln 2-\frac{15}{8}$$ ····· ❷

답 $4\ln 2-\dfrac{15}{8}$

채점 기준	비율
❶ 직선 l의 방정식을 구할 수 있다.	40 %
❷ 도형의 넓이를 구할 수 있다.	60 %

1324 전략 먼저 S_1, S_2의 값을 구한 후 이를 이용하여 점 A의 y좌표를 찾는다.

풀이 $f(x)=x-2\sqrt{x}+1$이라 하면 $f(0)=f(4)=1$

즉 P(0, 1), Q(4, 1)이므로

$$S_1=\int_0^4\{1-(x-2\sqrt{x}+1)\}dx$$

$$=\int_0^4(2\sqrt{x}-x)dx=\left[\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}x^2\right]_0^4$$

$$=\frac{8}{3}$$

$\therefore S_2=\frac{1}{2}S_1=\frac{4}{3}$ ····· ❶

점 A의 y좌표를 a $(0<a<1)$라 하면 △PAQ에서

$\frac{1}{2}\cdot 4\cdot(1-a)=\frac{4}{3}$

$1-a=\frac{2}{3}$ $\quad\therefore a=\frac{1}{3}$ ····· ❷

따라서 △AOR의 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot 4\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$ ····· ❸

답 $\dfrac{2}{3}$

채점 기준	비율
❶ S_2의 값을 구할 수 있다.	50 %
❷ 점 A의 y좌표를 구할 수 있다.	30 %
❸ △AOR의 넓이를 구할 수 있다.	20 %

1325 전략 두 접선 l_1, l_2의 방정식을 구한 후 두 접선의 교점의 x좌표를 구한다.

풀이 $x+\frac{2}{x}-3=0$에서

$x^2-3x+2=0$, $\quad(x-1)(x-2)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=2$

$\therefore$ P(1, 0), Q(2, 0) ····· ❶

$f(x)=x+\frac{2}{x}-3$이라 하면

$f'(x)=1-\frac{2}{x^2}$

$f'(1)=-1$이므로 점 P에서의 접선 l_1의 방정식은

$y=-(x-1)$ $\quad\therefore y=-x+1$

$f'(2)=\frac{1}{2}$이므로 점 Q에서의 접선 l_2의 방정식은

$y=\frac{1}{2}(x-2)$ $\quad\therefore y=\frac{1}{2}x-1$

두 접선 l_1, l_2의 교점의 x좌표는 $-x+1=\frac{1}{2}x-1$에서

$\frac{3}{2}x=2$ $\quad\therefore x=\frac{4}{3}$ ····· ❷

따라서 구하는 넓이는

$$\int_1^{\frac{4}{3}}\left\{x+\frac{2}{x}-3-(-x+1)\right\}dx$$

$$+\int_{\frac{4}{3}}^2\left\{x+\frac{2}{x}-3-\left(\frac{1}{2}x-1\right)\right\}dx$$

$$=\int_1^{\frac{4}{3}}\left(2x+\frac{2}{x}-4\right)dx+\int_{\frac{4}{3}}^2\left(\frac{1}{2}x+\frac{2}{x}-2\right)dx$$

$$=\Big[x^2+2\ln|x|-4x\Big]_1^{\frac{4}{3}}+\left[\frac{1}{4}x^2+2\ln|x|-2x\right]_{\frac{4}{3}}^2$$

$$=\left\{\left(2\ln\frac{4}{3}-\frac{32}{9}\right)-(-3)\right\}$$

$$+\left\{(2\ln 2-3)-\left(2\ln\frac{4}{3}-\frac{20}{9}\right)\right\}$$

$$=2\ln 2-\frac{4}{3}$$ ····· ❸

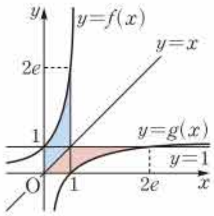
답 $2\ln 2-\dfrac{4}{3}$

채점 기준	비율
❶ 두 점 P, Q의 좌표를 구할 수 있다.	20 %
❷ 두 접선 l_1, l_2의 교점의 x좌표를 구할 수 있다.	40 %
❸ 도형의 넓이를 구할 수 있다.	40 %

1326 전략 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 직선 $y=x$에 대하여 대칭임을 이용한다.

풀이 $f'(x)=2xe^x+(x^2+1)e^x=(x^2+2x+1)e^x$
$=(x+1)^2e^x$

따라서 $f'(x)\geq 0$이므로 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가한다.
$f(0)=1$, $f(1)=2e$이고 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림과 같다. ⋯ ❶



따라서 곡선 $y=g(x)$와 세 직선 $y=x$, $y=1$, $y=0$으로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선 $y=f(x)$와 세 직선 $y=x$, $x=1$, $x=0$으로 둘러싸인 도형의 넓이와 같으므로 구하는 넓이는

$$\int_0^1\{(x^2+1)e^x-x\}dx \quad \cdots ❷$$

$$=\left[(x^2+1)e^x\right]_0^1-\int_0^1 2xe^x dx-\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1$$

$$=2e-1-\left(\left[2xe^x\right]_0^1-\int_0^1 2e^x dx\right)-\frac{1}{2}$$

$$=2e-1-\left(2e-\left[2e^x\right]_0^1\right)-\frac{1}{2}$$

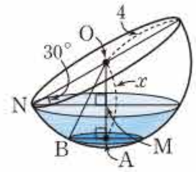
$$=2e-\frac{7}{2} \quad \cdots ❸$$

답 $2e-\frac{7}{2}$

채점 기준	비율
❶ $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프를 그릴 수 있다.	30 %
❷ 도형의 넓이를 정적분을 이용하여 나타낼 수 있다.	30 %
❸ 도형의 넓이를 구할 수 있다.	40 %

1327 전략 남아 있는 물의 수면과 평행한 평면으로 자른 단면의 넓이를 이용한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 반구의 밑면의 중심을 O, 수면의 중심을 M, 수면과 반구의 밑면이 만나는 점을 N이라 하면 직각삼각형 ONM에서



$\overline{OM}=\overline{ON}\sin 30°$

$=4\cdot\frac{1}{2}=2$ ⋯ ❶

점 O에서 x만큼 떨어진 지점에서 수면과 평행한 평면으로 자른 단면의 중심을 A라 하고 단면 위의 한 점을 B라 하면 직각삼각형 OBA에서 $\overline{AB}=\sqrt{\overline{OB}^2-\overline{OA}^2}=\sqrt{16-x^2}$

따라서 단면의 넓이를 $S(x)$라 하면

$S(x)=\pi\cdot(\sqrt{16-x^2})^2=(16-x^2)\pi$ ⋯ ❷

남아 있는 물의 부피는

$$\int_2^4(16-x^2)\pi\,dx=\pi\left[16x-\frac{1}{3}x^3\right]_2^4$$

$$=\pi\left(\frac{128}{3}-\frac{88}{3}\right)=\frac{40}{3}\pi \quad \cdots ❸$$

($\overline{OM}$의 길이)$\leq x\leq$(반구의 반지름의 길이)

답 $\frac{40}{3}\pi$

채점 기준	비율
❶ 반구의 밑면의 중심에서 수면까지의 거리를 구할 수 있다.	30 %
❷ 단면의 넓이를 구할 수 있다.	30 %
❸ 남아 있는 물의 부피를 구할 수 있다.	40 %

memo

memo