Solution

빠른 정답 찾기 **Lecture Book**

01 지수

8쪽 Lecture 01 1-1 (1) a^8 (2) a^6b^3 (3) $\frac{a^4}{b^8}$ (4) $\frac{1}{a^4}$

1-2 (1) a^4b^5 (2) a^5b^2 (3) $5a^2b^9$ (4) $-8ab^7$ 1-3 $p=11$, $q=2$

9쪽 Lecture 02 1-1 (1) -5, 5 (2) 1, $\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$, $\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$

1-2 (1) -3, 3 (2) -2 2-1 (1) 2 (2) 3 (3) $\frac{1}{3}$ (4) 2

2-2 (1) 3 (2) 5 (3) 5 (4) 2

10쪽 유형 Q+Q 01 ⑤ 02 ④ 03 ㄹ 04 -4
05 -1 06 ⑤ 07 1 08 ③ 09 1 10 ④
11 $\sqrt[4]{2\sqrt[3]{6}}$

12쪽 Lecture 03 1-1 (1) 1 (2) 1 (3) $\frac{1}{8}$ (4) -8

1-2 (1) $\frac{5}{4}$ (2) $\frac{82}{9}$ 2-1 (1) 25 (2) $\frac{1}{2}$ 2-2 (1) a^6 (2) $-\frac{a^9}{b^8}$

13쪽 Lecture 04 1-1 (1) $a^{\frac{1}{6}}$ (2) $a^{-\frac{3}{5}}$ 1-2 (1) $\sqrt[5]{10}$ (2) $\sqrt[3]{2}$
2-1 (1) 2 (2) 3 (3) 49 (4) 125 2-2 (1) 144 (2) 27 (3) 1 (4) 2

14쪽 유형 Q+Q 01 -20 02 ② 03 ⑤ 04 $\frac{14}{3}$
05 ③ 06 $-\frac{1}{6}$ 07 ㄴ, ㄹ 08 ④ 09 ④ 10 $\frac{2}{3}$
11 12 12 $6a+\frac{2}{a}$ 13 ① 14 14 15 $\frac{2}{3}$ 16 ⑤
17 ① 18 70 19 8배 20 6

17쪽 중단원 마무리 01 ④ 02 ⑤ 03 ① 04 5
05 ② 06 ② 07 2 08 $\sqrt{5}$ 09 ③ 10 10
11 64 12 ③ 13 ③ 14 ① 15 ⑤ 16 $3\sqrt{2}$
17 $\frac{13}{6}$ 18 4 19 ②

02 로그

20쪽 Lecture 05 1-1 (1) $4=\log_3 81$ (2) $-3=\log_2 \frac{1}{8}$
(3) $-2=\log_{\frac{1}{5}} 25$ (4) $0=\log_7 1$

1-2 (1) $2^4=16$ (2) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}=27$ (3) $10^{-2}=0.01$ (4) $(\sqrt{2})^6=8$

2-1 (1) $1<x<2$ 또는 $x>2$ (2) $x>3$ (3) $x<0$ 또는 $x>2$
(4) $2<x<3$ 또는 $3<x<5$

2-2 (1) 81 (2) $\frac{1}{7}$

21쪽 Lecture 06 1-1 (1) 0 (2) 1 (3) 2 (4) -2

1-2 (1) 3 (2) 3 (3) $\frac{1}{5}$ (4) 1 2-1 $3a+b$ 2-2 $b-a$

22쪽 Lecture 07 1-1 (1) 2 (2) 4 1-2 (1) 2 (2) 0
2-1 (1) 1 (2) -3 (3) 11 (4) $\sqrt{7}$ 2-2 27

23쪽 유형 Q+Q 01 ③ 02 8 03 1, 2, 3, 4
04 ④ 05 2 06 ① 07 1 08 ④ 09 ⑤
10 18 11 ③ 12 $\frac{a+3b}{a+b}$ 13 ⑤ 14 4 15 2
16 ② 17 16 18 ②

26쪽 Lecture 08 1-1 (1) 3 (2) -2 (3) $\frac{2}{5}$ (4) $\frac{3}{2}$

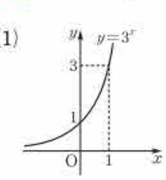
1-2 (1) -2 (2) 2 (3) 1 (4) 3 2-1 (1) 0.6274 (2) 0.6365
2-2 (1) 1.6385 (2) -1.3809

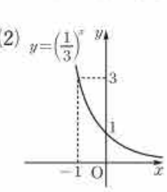
27쪽 유형 Q+Q 01 ④ 02 1.9542 03 3.1945 04 ③
05 62.7 06 7.6 07 ⑤ 08 (1) $A\left(1+\frac{a}{100}\right)^6$ (2) 12 %
09 ③

29쪽 중단원 마무리 01 ⑤ 02 4 03 ③ 04 ④
05 ② 06 10 07 ③ 08 ② 09 ② 10 $\frac{a+4b}{3a+2b}$
11 2 12 ① 13 ④ 14 ⑤ 15 2 16 3.8318
17 ③ 18 9.5

03 지수함수

32쪽 Lecture 09 1-1 ㄱ, ㄷ 1-2 (1) 8 (2) $\frac{1}{4}$ (3) 2

2-1 (1)


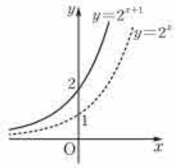
(2)


2-2 ㄴ

L 33쪽 Lecture 10 **1-1** (1) $y=\left(\frac{1}{5}\right)^{x-4}-3$ (2) $y=-\left(\frac{1}{5}\right)^{x}$ (3) $y=5^{x}$

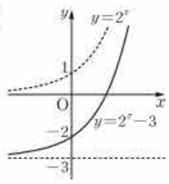
(4) $y=-5^{x}$

1-2 (1)



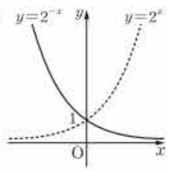
치역: $\{y|y>0\}$
점근선의 방정식: $y=0$

(2)



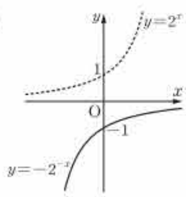
치역: $\{y|y>-3\}$
점근선의 방정식: $y=-3$

(3)



치역: $\{y|y>0\}$
점근선의 방정식: $y=0$

(4)



치역: $\{y|y<0\}$
점근선의 방정식: $y=0$

1-3 $y=3^{x-2}+6$

L 34쪽 Lecture 11 **1-1** (1) 최댓값: 32, 최솟값: 2

(2) 최댓값: 100, 최솟값: $\frac{1}{10}$

1-2 (1) 최댓값: 25, 최솟값: $\frac{1}{5}$ (2) 최댓값: 1, 최솟값: $\frac{8}{27}$

1-3 (1) 최댓값: 5, 최솟값: -2 (2) 최댓값: 28, 최솟값: $\frac{4}{3}$

L 35쪽 유형 Q+Q **01** 32 **02** ③ **03** ⑤ **04** ④
05 6 **06** -16 **07** -5 **08** 3 **09** ②
10 $\sqrt[3]{0.5}$, $\sqrt[4]{\frac{1}{32}}$ **11** 108 **12** ④ **13** 50 **14** ①
15 ③ **16** 17 **17** ④ **18** 27

L 38쪽 Lecture 12 **1-1** (1) $x=4$ (2) $x=-4$
2-1 t^2-t-6, 3, 3, 1 **2-2** (1) $x=0$ (2) $x=2$
3-1 (1) $x=-\frac{1}{2}$ (2) $x=2$ 또는 $x=4$

L 39쪽 Lecture 13 **1-1** (1) $x>2$ (2) $x\geq-4$
1-2 $-3<x\leq2$ **2-1** t^2-6t+5, 1, 1, -1, 0
2-2 (1) $x\geq1$ (2) $-2\leq x\leq0$

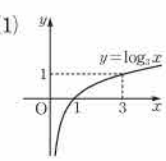
L 40쪽 유형 Q+Q **01** 16 **02** ④ **03** -3 **04** ①
05 ① **06** 10 **07** $x=1$ 또는 $x=5$ **08** -15 **09** ③
10 3 **11** ① **12** 10 **13** 4 **14** 5 **15** $1\leq x\leq2$
16 ① **17** $k>1$ **18** -5 **19** 7시간 **20** ③

L 43쪽 중단원 마무리 **01** ④ **02** ⑤ **03** ① **04** 60
05 2 **06** ④ **07** 32 **08** 8 **09** ③ **10** ③
11 ⑤ **12** 2 **13** ④ **14** $-2\leq x<1$ **15** ①
16 5 **17** -9 **18** ②

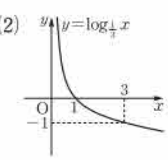
04 로그함수

L 46쪽 Lecture 14 **1-1** ㄱ, ㄷ **1-2** (1) 2 (2) -1 (3) 2

2-1 (1)



(2)

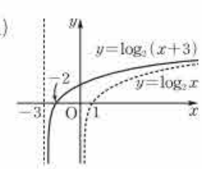


2-2 ㄴ

L 47쪽 Lecture 15 **1-1** (1) $y=\log_{\frac{1}{5}}(x-4)-1$ (2) $y=-\log_{\frac{1}{5}}x$

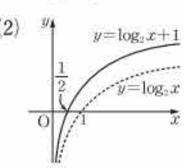
(3) $y=\log_{\frac{1}{5}}(-x)$ (4) $y=-\log_{\frac{1}{5}}(-x)$ (5) $y=\left(\frac{1}{5}\right)^{x}$

1-2 (1)



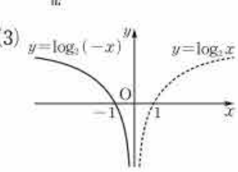
정의역: $\{x|x>-3\}$
점근선의 방정식: $x=-3$

(2)



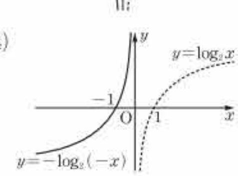
정의역: $\{x|x>0\}$
점근선의 방정식: $x=0$

(3)



정의역: $\{x|x<0\}$
점근선의 방정식: $x=0$

(4)



정의역: $\{x|x<0\}$
점근선의 방정식: $x=0$

1-3 $y=-\log_3(x+2)+3$

48쪽 **Lecture 16** **1-1** (1) 최댓값: 2, 최솟값: 0
(2) 최댓값: 3, 최솟값: -1
1-2 (1) 최댓값: 1, 최솟값: -1 (2) 최댓값: 2, 최솟값: -3
1-3 (1) 최댓값: 0, 최솟값: -2 (2) 최댓값: 1, 최솟값: 0

49쪽 **유형 Q+Q** **01** ③ **02** $\frac{1}{25}$ **03** ②, ⑤ **04** ③
05 -1 **06** 5 **07** (6, 2) **08** ⑤ **09** $y=\left(\frac{1}{6}\right)^{x-4}+1$
10 ③ **11** -2 **12** 1 **13** $\log_{\frac{1}{3}}10<-2<\log_{\frac{1}{3}}\sqrt{70}$
14 ④ **15** ② **16** -8 **17** 6 **18** ③ **19** 9
20 ① **21** $2\sqrt{3}$ **22** ②

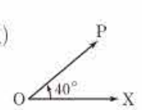
53쪽 **Lecture 17** **1-1** $x=\frac{1}{4}$ **2-1** $x=7$
3-1 $x=\frac{1}{3}$ 또는 $x=27$ **4-1** (1) $x=2$ (2) $x=3$ **5-1** 1, -1, $\frac{1}{2}$

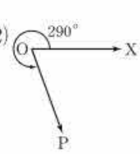
54쪽 **Lecture 18** **1-1** (1) $x>3$ (2) $x\geq\frac{2}{3}$ (3) $0<x\leq3$
(4) $\frac{5}{4}<x<2$
2-1 (1) $1\leq x\leq3$ (2) $4<x<16$
3-1 0, $\log x$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{10}$, 10, 0, $\frac{1}{10}$, 10

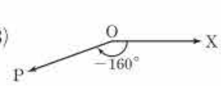
55쪽 **유형 Q+Q** **01** ⑤ **02** ② **03** ③ **04** 25
05 ② **06** 6 **07** 1000 **08** ③ **09** ④ **10** 8
11 73 **12** 36 **13** 1 **14** 2 **15** $\frac{1}{5}$ **16** ③
17 ⑤ **18** ⑤

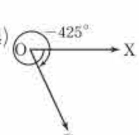
58쪽 **중단원 마무리** **01** 6 **02** ④ **03** ③ **04** ③
05 ④ **06** 3 **07** ③ **08** ② **09** 14 **10** ⑤
11 15 **12** $\frac{1}{5}$, 25 **13** ④ **14** ② **15** 33 **16** $\frac{1}{16}$
17 ④ **18** 125년

05 삼각함수

64쪽 **Lecture 19** **1-1** (1)


(2)


(3)


(4)


2-1 (1) $360°\times n+110°$ (2) $360°\times n+60°$
2-2 (1) $360°\times n+230°$ (2) $360°\times n+115°$ (3) $360°\times n+340°$
(4) $360°\times n+75°$

65쪽 **Lecture 20** **1-1** (1) 제1사분면 (2) 제2사분면 (3) 제4사분면
(4) 제3사분면
1-2 (1) 제3사분면 (2) 제1사분면 (3) 제2사분면 (4) 제4사분면
1-3 $-215°$, $1200°$

66쪽 **Lecture 21** **1-1** (1) $\frac{\pi}{3}$ (2) $-\frac{5}{6}\pi$
1-2 (1) $450°$ (2) $-240°$ **2-1** $l=\frac{2}{3}\pi$, $S=\frac{4}{3}\pi$
2-2 $r=8$, $S=8\pi$

67쪽 **유형 Q+Q** **01** ③ **02** ㄱ, ㄷ, ㄹ **03** ⑤
04 제1사분면 또는 제3사분면 **05** ③ **06** ② **07** ④
08 $\frac{5}{4}\pi$ **09** $\frac{3}{2}\pi$ **10** $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5}{6}\pi$ **11** ② **12** 10π **13** ⑤
14 $\frac{5}{6}\pi$ **15** ④ **16** ③

70쪽 **Lecture 22** **1-1** $\sin\theta=\frac{4}{5}$, $\cos\theta=\frac{3}{5}$, $\tan\theta=\frac{4}{3}$
1-2 (1) $\sin\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\theta=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\tan\theta=-1$
(2) $\sin\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\theta=\frac{1}{2}$, $\tan\theta=-\sqrt{3}$
2-1 (1) $\sin\theta>0$, $\cos\theta<0$, $\tan\theta<0$ (2) $\sin\theta<0$, $\cos\theta>0$, $\tan\theta<0$
2-2 (1) 제2사분면 (2) 제3사분면

71쪽 **Lecture 23** **1-1** $\sin\theta=-\frac{5}{13}$, $\tan\theta=-\frac{5}{12}$
1-2 $\cos\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\tan\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}$ **2-1** (1) 2 (2) $-\frac{1}{\sin\theta}$
2-2 (1) $-\frac{4}{9}$ (2) $\frac{17}{9}$

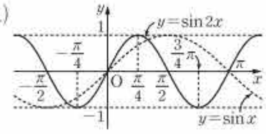
72쪽 **유형 Q+Q** **01** $\frac{17}{13}$ **02** $\frac{3}{10}$ **03** ③ **04** ②
05 $-2\tan\theta$ **06** 2 **07** ③ **08** ⑤ **09** $\frac{\sqrt{15}}{3}$
10 $\frac{11}{16}$ **11** ② **12** 3

74쪽 **중단원 마무리** **01** ③ **02** ④ **03** ④ **04** ②
05 $\frac{7}{6}\pi$ **06** 32 **07** ⑤ **08** $\frac{64}{3}\pi-16\sqrt{3}$ **09** $8\sqrt{3}$
10 ② **11** $-\frac{3\sqrt{5}}{5}$ **12** ⑤ **13** $-\sin\theta$ **14** ③ **15** ①
16 $\sqrt{2}$ **17** ① **18** ②

06 삼각함수의 그래프

78쪽 **Lecture 24** **1-1** -5 **1-2** 4

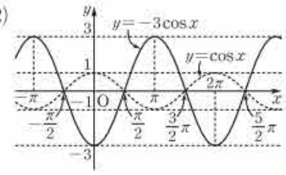
2-1 (1)



치역: $\{y\,|\,-1\le y\le 1\}$

주기: π

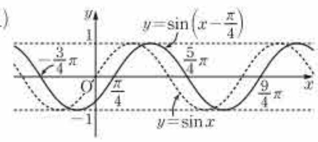
(2)



치역: $\{y\,|\,-3\le y\le 3\}$

주기: 2π

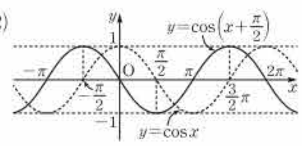
2-2 (1)



치역: $\{y\,|\,-1\le y\le 1\}$

주기: 2π

(2)

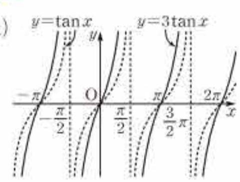


치역: $\{y\,|\,-1\le y\le 1\}$

주기: 2π

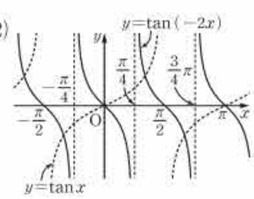
79쪽 **Lecture 25**

1-1 (1)



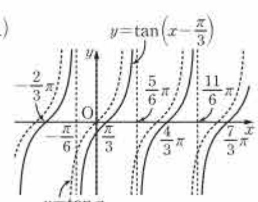
주기: π, 점근선의 방정식: $x=n\pi+\frac{\pi}{2}$ (n은 정수)

(2)



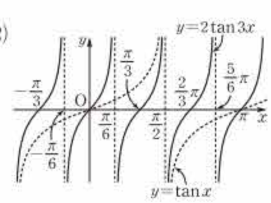
주기: $\frac{\pi}{2}$, 점근선의 방정식: $x=\frac{n}{2}\pi+\frac{\pi}{4}$ (n은 정수)

1-2 (1)



주기: π, 점근선의 방정식: $x=n\pi+\frac{5}{6}\pi$ (n은 정수)

(2)



주기: $\frac{\pi}{3}$, 점근선의 방정식: $x=\frac{n}{3}\pi+\frac{\pi}{6}$ (n은 정수)

2-1 (1) 최댓값: $\frac{1}{2}$, 최솟값: $-\frac{1}{2}$, 주기: $\frac{2}{3}\pi$

(2) 최댓값: 2, 최솟값: -4, 주기: π

2-2 (1) 주기: π, 점근선의 방정식: $x=n\pi+\frac{\pi}{4}$ (n은 정수)

(2) 주기: 2π, 점근선의 방정식: $x=2n\pi+\frac{4}{3}\pi$ (n은 정수)

80쪽 **유형 Q+Q** **01** ⑤ **02** -3 **03** ⑤ **04** ㄱ, ㄷ

05 17π **06** π **07** $-\frac{3}{2}$ **08** ㄴ, ㄹ **09** ㄴ **10** ②

11 4 **12** $2\sqrt{3}$ **13** 2π **14** ③ **15** ③ **16** ⑤

83쪽 **Lecture 26** **1-1** (1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (3) $-\sqrt{3}$ (4) $\frac{1}{2}$

1-2 (1) $\frac{1}{2}$ (2) -1 (3) $-\frac{1}{2}$ (4) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

1-3 (1) 0.8910 (2) -0.8988 (3) -0.4663

84쪽 **Lecture 27** **1-1** (가) $\frac{\pi}{6}$ (나) $\frac{5}{6}\pi$, $x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{5}{6}\pi$

1-2 (1) $x=\frac{\pi}{4}$ 또는 $x=\frac{7}{4}\pi$ (2) $x=\frac{2}{3}\pi$ 또는 $x=\frac{5}{3}\pi$

2-1 (가) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (나) $\frac{5}{6}\pi$ (다) $\frac{7}{6}\pi$

2-2 (1) $0\le x\le\frac{\pi}{4}$ 또는 $\frac{3}{4}\pi\le x<2\pi$ (2) $\frac{\pi}{6}<x<\frac{\pi}{2}$ 또는 $\frac{7}{6}\pi<x<\frac{3}{2}\pi$

85쪽 **유형 Q+Q** **01** $\frac{1}{5}$ **02** ㄷ **03** $-\frac{1}{4}$ **04** -1

05 ⑤ **06** 5 **07** $-\frac{4}{5}$ **08** ㄱ, ㄴ, ㄷ **09** 6

10 ⑤ **11** ② **12** $\frac{9}{2}$ **13** $\frac{15}{2}\pi$ **14** 4 **15** ③

16 $\sqrt{3}$ **17** $x=\frac{\pi}{2}$ **18** 3π **19** $-1\le a\le\frac{5}{4}$ **20** $\frac{2}{3}$

21 $\frac{5}{3}\pi$ **22** ⑤ **23** $0\le x\le\frac{\pi}{6}$ 또는 $\frac{5}{6}\pi\le x<2\pi$

24 $0\le x\le\frac{\pi}{3}$ **25** $\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{3}{2}\pi$ **26** ②

89쪽 **중단원** 마무리 **01** ③ **02** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **03** ③ **04** ①

05 $-\frac{5}{2}$ **06** ④ **07** ⑤ **08** 3 **09** ③ **10** ④

11 $\frac{3}{4}$ **12** 1 **13** -3 **14** 6 **15** $x=0$ 또는 $x=\pi$

16 ② **17** ③ **18** ③ **19** $-\frac{1}{2}$

07 삼각함수의 활용

92쪽 **Lecture 28** **1-1** $2\sqrt{6}$ **1-2** (1) $30°$ (2) $4\sqrt{3}$
1-3 (1) $3\sqrt{3}$ (2) $5\sqrt{2}$

93쪽 **Lecture 29** **1-1** $\sqrt{13}$ **1-2** (1) $\sqrt{5}$ (2) $\sqrt{7}$ **2-1** $\frac{5}{12}$
2-2 (1) $30°$ (2) $120°$

94쪽 **유형 Q+Q** **01** $\frac{13}{25}$ **02** $4\sqrt{2}$ **03** $\frac{3}{2}$ **04** ③
05 ① **06** 3 : 6 : 4 **07** ③ **08** $A=90°$인 직각삼각형
09 3 **10** $2\sqrt{7}$ **11** $\frac{2\sqrt{7}}{7}$ **12** ③ **13** ⑤ **14** ②
15 $\sqrt{7}$ **16** ③ **17** 400π m^2 **18** $20\sqrt{21}$ m

97쪽 **Lecture 30** **1-1** (1) 6 (2) $14\sqrt{3}$ **1-2** 6
2-1 (1) 20 (2) 30 **2-2** $5\sqrt{3}$

98쪽 **유형 Q+Q** **01** $45°$ **02** $3\sqrt{3}$ **03** ③ **04** $36\sqrt{3}$
05 14 **06** ⑤ **07** $60°$ **08** ② **09** $3\sqrt{15}$ **10** ④

100쪽 **중단원 마무리** **01** $60°$ **02** ① **03** ② **04** $\frac{4}{5}$
05 ⑤ **06** ③ **07** 1 **08** $4\sqrt{7}$ **09** ⑤
10 최솟값: $\frac{2\sqrt{6}}{7}$, $x=2\sqrt{6}$ **11** ④ **12** 25 **13** ②
14 $20\sqrt{19}$ m **15** $\frac{24\sqrt{3}}{7}$ **16** ③ **17** $(50\sqrt{14}+150)$ m^2
18 $4\sqrt{3}$

08 등차수열과 등비수열

106쪽 **Lecture 31** **1-1** (1) 4, 9, 14, 19, 24 (2) $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{6}$
1-2 (1) 6 (2) -65 **2-1** $a_n=\frac{1}{n^2}$
2-2 (1) $a_n=\frac{n}{n+2}$ (2) $a_n=n(n+1)$

107쪽 **Lecture 32** **1-1** (1) $a_n=-5n+8$ (2) $a_n=3n-7$
1-2 (1) $a_n=-2n+13$ (2) -1 **2-1** 9 **2-2** $x=2$, $y=10$

108쪽 **유형 Q+Q** **01** ③ **02** ③ **03** ④ **04** 11
05 제14항 **06** ② **07** $\frac{1}{3}$ **08** 7 **09** 63 **10** ②
11 $22-16\sqrt{2}$ **12** ② **13** -5

110쪽 **Lecture 33** **1-1** (1) 70 (2) -55 **1-2** 280
2-1 (1) $a_n=-4n+5$ (2) 8 (3) -104 **2-2** (1) 100 (2) -360

111쪽 **Lecture 34** **1-1** (1) 2 (2) 20 **1-2** (1) 1 (2) -9
2-1 $a_n=4n+1$ **2-2** $a_1=3$, $a_n=-2n+6$ $(n\ge 2)$

112쪽 **유형 Q+Q** **01** 1200 **02** ④ **03** ④ **04** 280
05 285 **06** ② **07** -252 **08** ③ **09** ③ **10** 908
11 ⑤ **12** 16 **13** 0

114쪽 **Lecture 35** **1-1** (1) $a_n=-3^{n-1}$ (2) $a_n=4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$
1-2 (1) $a_n=3\cdot(-2)^{n-1}$ (2) 48 **2-1** -15 또는 15
2-2 $x=2$, $y=4\sqrt{2}$

115쪽 **유형 Q+Q** **01** ④ **02** 제8항 **03** 8 **04** 제8항
05 ① **06** 192 **07** 6 **08** 2 **09** ② **10** ⑤
11 7 **12** $\frac{729}{4}$ **13** ④

117쪽 **Lecture 36** **1-1** (1) 682 (2) $\frac{31}{16}$ **1-2** (1) 1533 (2) $\frac{129}{4}$
2-1 (1) 18 (2) $a_n=2\cdot 3^{n-1}$ **2-2** $a_1=17$, $a_n=3\cdot 4^n$ $(n\ge 2)$

118쪽 **Lecture 37** **1-1** (1) (가) $a\times 1.02^4$ (나) $a\times 1.02$ (2) $5.1a$원
1-2 $\frac{103}{15}a$원 **2-1** (1) (가) $a\times 1.02^3$ (나) a (2) $5a$원 **2-2** $\frac{20}{3}a$원

119쪽 **유형 Q+Q** **01** -1023 **02** ① **03** 256 **04** ②
05 $\frac{9}{4}$배 **06** $\frac{1}{3}\left[1-\left(\frac{1}{4}\right)^{10}\right]$ **07** ③ **08** ② **09** -6
10 6000만 원 **11** ①

121쪽 **중단원 마무리** **01** ④ **02** 7 **03** 제17항 **04** ②
05 ③ **06** 12 **07** 480 **08** 10 **09** ④ **10** 12
11 ④ **12** 390 **13** ④ **14** 8 **15** ③ **16** 36
17 15 **18** ④ **19** 10 **20** ② **21** -50 **22** ⑤
23 ④ **24** $\frac{26}{9}$ m **25** 9 **26** 1.01배

09 수열의 합

126쪽 **Lecture 38** **1-1** (1) $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)$ (2) $\sum_{k=1}^{n}2^k$

1-2 (1) $1+4+9+\cdots+100$ (2) $-5+25-125+\cdots+(-5)^n$

2-1 (1) -7 (2) 16 **2-2** (1) -4 (2) 33

127쪽 **유형 Q+Q** **01** ③ **02** ⑤ **03** ① **04** 8

05 400 **06** ⑤

128쪽 **Lecture 39** **1-1** (1) 45 (2) 285 (3) 2025

1-2 (1) 70 (2) 168 (3) 44 (4) 570 **1-3** (1) 240 (2) 476

129쪽 **Lecture 40** **1-1** (1) $\frac{2}{5}$ (2) $\frac{36}{55}$ **1-2** (1) $\frac{9}{10}$ (2) $\frac{10}{21}$

2-1 (1) 3 (2) $6+4\sqrt{2}$ **2-2** 2

130쪽 **유형 Q+Q** **01** -320 **02** ⑤ **03** ⑤ **04** 5

05 ② **06** 2036 **07** 96 **08** ④ **09** ② **10** $\frac{11}{6}$

11 ② **12** 6 **13** 4 **14** ⑤ **15** ④ **16** 77

17 ③

133쪽 **중단원 마무리** **01** 41 **02** ④ **03** 500 **04** ⑤

05 ② **06** ④ **07** ② **08** ① **09** 2 **10** ②

11 $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$ **12** 15 **13** ① **14** ④ **15** ③

16 4 **17** $\frac{5}{13}$ **18** 1155

10 수학적 귀납법

136쪽 **Lecture 41** **1-1** (1) 2 (2) 17 **1-2** (1) 4 (2) 8

2-1 (1) $a_1=-1$, $a_{n+1}=a_n+4$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$

(2) $a_1=5$, $a_{n+1}=a_n-7$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$

2-2 (1) $a_n=3n-1$ (2) $a_n=14n-20$

137쪽 **Lecture 42** **1-1** (1) $a_1=3$, $a_{n+1}=2a_n$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$

(2) $a_1=4$, $a_{n+1}=-\frac{1}{5}a_n$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$

1-2 (1) $a_n=6^{n-1}$ (2) $a_n=-12\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

2-1 (1) 43 (2) 33 (3) 2^{45}

138쪽 **유형 Q+Q** **01** 16 **02** ① **03** ③ **04** 17

05 222 **06** 6 **07** ② **08** 36 **09** 4 **10** $\frac{7}{11}$

11 6 **12** ② **13** -56 **14** ②

15 $a_{n+1}=\frac{3}{5}a_n+30$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$

16 (1) $a_{n+1}=5a_n-15$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$ (2) 785

17 $a_{n+1}=a_n+3(n+1)$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$

141쪽 **Lecture 43** **1-1** $n=5$, $k+1$ **1-2** 1, $k+2$

142쪽 **유형 Q+Q** **01** ⑤ **02** ㄴ **03** ㈎ 1 ㈏ $2k+1$

04 풀이 94쪽 **05** ③ **06** ㈎ 5^{k-1} ㈏ 7^k+5^{k-1}

07 11 **08** ㈎ $1+h$ ㈏ $(k+1)h$

145쪽 **중단원 마무리** **01** 64 **02** ③ **03** 제11항 **04** 510

05 ② **06** ③ **07** ④ **08** 100 **09** ④ **10** ④

11 -17 **12** 9 **13** 33 **14** ⑤ **15** ㈎ $2a_n$ ㈏ 1

16 (1) $a_{n+1}=a_n+n$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$ (2) 190 **17** ③

01 지수

W 2쪽 **01 거듭제곱과 거듭제곱근**

01 (1) a^4b^3 (2) b^2 (3) $\frac{2a^2}{b}$ (4) $\frac{a^3}{3b^5}$

02 (1) 4 (2) 없다. (3) -5 (4) -4, 4

03 (1) 7 (2) $\frac{1}{10}$ (3) 3 (4) 8 **04** ③ **05** ② **06** ②

07 30 **08** ② **09** 4 **10** ⑤ **11** 8 **12** 2

13 ⑤ **14** ② **15** 17 **16** $A<C<B$ **17** ④

18 6

W 5쪽 **02 지수의 확장**

01 (1) 8 (2) 9 (3) $\frac{a}{b^3}$ (4) $\frac{b^5}{a^{12}}$ **02** (1) $\frac{1}{3}$ (2) 64 (3) 125 (4) 1

03 (1) a^4b (2) $\frac{a^8}{b^4}$ **04** ④ **05** 12 **06** ③ **07** $15\sqrt{3}$

08 23 **09** ② **10** ① **11** ④ **12** ④ **13** ⑤

14 ② **15** $\sqrt{2}$ **16** ③ **17** 4 **18** 4 **19** $\frac{7}{3}$

20 ④ **21** ③ **22** -2 **23** ⑤ **24** 6 **25** ③

26 16

02 로그

W 9쪽 **03 로그**

01 (1) $5=\log_2 32$ (2) $-3=\log_3 \frac{1}{27}$ (3) $\frac{1}{2}=\log_{36} 6$ (4) $2=\log_{\frac{3}{5}} \frac{9}{25}$

02 (1) 1 (2) 9 (3) $\frac{1}{4}$ (4) 7 **03** (1) 0 (2) -3 (3) 2 (4) 1

04 (1) 5 (2) 2 (3) $-\frac{1}{4}$ (4) $1+\sqrt{3}$ **05** ⑤ **06** $\frac{3}{2}$ **07** ⑤

08 ⑤ **09** $0<k<8$ **10** 9 **11** ④ **12** 5

13 ⑤ **14** $\frac{3}{2}$ **15** ④ **16** 2 **17** ④ **18** $\frac{5}{2}$

19 ⑤ **20** ⑤ **21** 2 **22** $\frac{c+2ab+abc}{c+abc}$ **23** -2

24 ③ **25** ② **26** $A<B<C$ **27** ② **28** 40

29 $\frac{1}{16}$ **30** ③ **31** 3

W 14쪽 **04 상용로그**

01 (1) -1 (2) $\frac{3}{4}$ (3) 3 (4) $\frac{1}{3}$

02 (1) 0.8785 (2) 1.8745 (3) -0.1146 (4) -1.1209 **03** ③

04 0.174 **05** ④ **06** ② **07** 3.9788 **08** ④ **09** 0.4

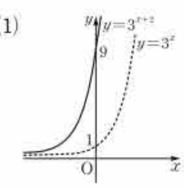
10 15 % **11** 2배 **12** ①

03 지수함수

W 16쪽 **05 지수함수**

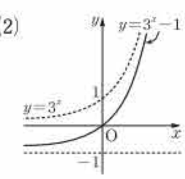
01 (1) $\frac{1}{25}$ (2) 5 (3) 25

02 (1)



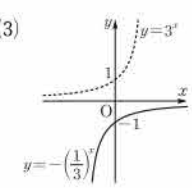
치역: $\{y\,|\,y>0\}$
점근선의 방정식: $y=0$

(2)



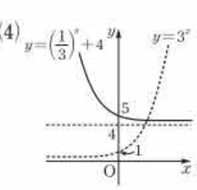
치역: $\{y\,|\,y>-1\}$
점근선의 방정식: $y=-1$

(3)



치역: $\{y\,|\,y<0\}$
점근선의 방정식: $y=0$

(4)



치역: $\{y\,|\,y>4\}$
점근선의 방정식: $y=4$

03 (1) 최댓값: 125, 최솟값: $\frac{1}{5}$ (2) 최댓값: 49, 최솟값: 1

(3) 최댓값: 11, 최솟값: -4

04 0 **05** ③ **06** ⑤ **07** ⑤ **08** ⑤

09 $a<1$ 또는 $a>3$ **10** 5 **11** ② **12** ㄱ, ㄷ, ㄹ

13 -4 **14** ④ **15** $\frac{9}{2}$ **16** ③ **17** $B<C<A$

18 4 **19** ② **20** ④ **21** $\frac{3}{5}$ **22** 1 **23** -12

24 ② **25** $\frac{1}{3}$ **26** ③ **27** 16 **28** ① **29** $\frac{1}{3}$

30 ④

W 21쪽 **06 지수함수의 활용**

01 (1) $x=5$ (2) $x=-1$ (3) $x=\frac{1}{3}$ (4) $x=1$ 또는 $x=2$

02 (1) $x\le-1$ (2) $x<16$ (3) $0\le x\le2$ (4) $x<1$ **03** 3 **04** ②

05 $\frac{5}{4}$ **06** ① **07** 29 **08** ② **09** 64 **10** 3

11 ④ **12** ③ **13** $x=0$ 또는 $x=2$ **14** ④

15 $3<k<4$ **16** $x<0$ 또는 $x>3$ **17** ③ **18** ①

19 $x\ge2$ **20** ⑤ **21** $1\le x<4$ **22** 34 **23** ③

24 10 **25** ④ **26** $k<\frac{2}{3}$ **27** ③ **28** 2시간 **29** ④

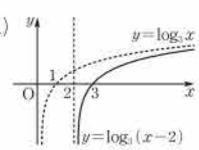
30 4시간

04 로그함수

W 26쪽 **07 로그함수**

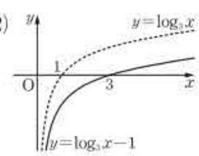
01 (1) -1 (2) 2 (3) -2

02 (1)



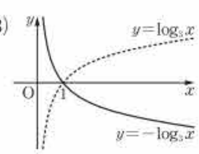
정의역: $\{x\,|\,x>2\}$
점근선의 방정식: $x=2$

(2)



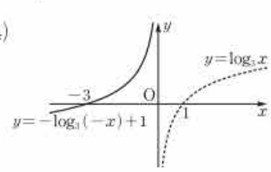
정의역: $\{x\,|\,x>0\}$
점근선의 방정식: $x=0$

(3)



정의역: $\{x\,|\,x>0\}$
점근선의 방정식: $x=0$

(4)



정의역: $\{x\,|\,x<0\}$
점근선의 방정식: $x=0$

03 (1) 최댓값: 3, 최솟값: 1 (2) 최댓값: 2, 최솟값: 0
(3) 최댓값: 7, 최솟값: 5

04 -1 **05** 27 **06** ⑤ **07** $\{x\,|\,-5<x<3\}$ **08** ①

09 ① **10** ④ **11** ㄱ, ㄷ, ㄹ **12** ③ **13** ③

14 ⑤ **15** 12 **16** $\frac{15}{4}$ **17** (1) $y=\log_6 x+5$ (2) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x+2}$

18 0 **19** ⑤ **20** ② **21** $\log_a\frac{3}{2}$ **22** $C<A<B$

23 ① **24** -3 **25** ③ **26** 10 **27** 18 **28** ①

29 ④ **30** $\frac{3}{4}$

W 31쪽 **08 로그함수의 활용**

01 (1) $x=7$ (2) $x=3$ (3) $x=3$ 또는 $x=27$ (4) $x=5$
(5) $x=1$ 또는 $x=10$

02 (1) $-1<x\le7$ (2) $-1<x<3$ (3) $0<x\le\frac{1}{8}$ 또는 $x\ge4$
(4) $\frac{1}{9}<x<9$

03 1 **04** ③ **05** $x=1$ **06** ④ **07** 90 **08** 625

09 ⑤ **10** ① **11** $x=3$ **12** ③ **13** ④ **14** $-\frac{10}{3}$

15 ② **16** 3 **17** $2<x<4$ **18** ④ **19** $\frac{1}{2}$

20 ③ **21** ④ **22** 4 **23** ③ **24** 10 **25** ④

26 $\frac{1}{1000}$기압 이상 $\frac{1}{10}$기압 이하 **27** 15년 **28** 10년 **29** ⑤

05 삼각함수

W 36쪽 **09 일반각과 호도법**

01 (1) $360°\times n+90°$ (2) $360°\times n+340°$

02 (1) 제2사분면 (2) 제1사분면 (3) 제3사분면 (4) 제4사분면

03 (1) $\frac{3}{5}\pi$ (2) $-\frac{5}{4}\pi$ (3) $135°$ (4) $-252°$ **04** $\theta=\frac{8}{5}\pi$, $l=8\pi$

05 ④ **06** ⑤ **07** ㄱ, ㄷ **08** 제3사분면 **09** ⑤

10 ③ **11** $\frac{7}{6}$ **12** $\frac{3}{2}\pi$ **13** $\frac{3}{5}\pi$ **14** ③ **15** ②

16 $\frac{4}{5}\pi$ **17** ⑤ **18** 5 **19** 6 **20** ④ **21** $2\pi-4$

22 ② **23** 8π **24** ④ **25** ③ **26** 5 **27** ④

W 40쪽 **10 삼각함수**

01 (1) $\sin\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\theta=-\frac{1}{2}$, $\tan\theta=\sqrt{3}$
(2) $\sin\theta=\frac{1}{2}$, $\cos\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\tan\theta=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

02 제1사분면 **03** $\cos\theta=-\frac{3}{5}$, $\tan\theta=-\frac{4}{3}$

04 $\pm\frac{\sqrt{6}}{2}$ **05** ④ **06** $\frac{8}{39}$ **07** ⑤ **08** $2\tan\theta$

09 제4사분면 **10** ③ **11** -2 **12** ④ **13** ④

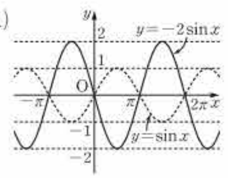
14 4 **15** $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$ **16** $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ **17** 0 **18** $-\frac{4}{3}$ **19** ③

20 ④ **21** $3x^2+8x+3=0$

06 삼각함수의 그래프

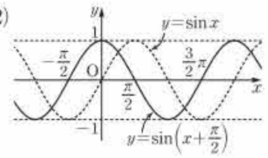
W 43쪽 **11 삼각함수의 그래프**

01 (1)



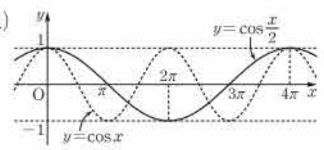
치역: $\{y \mid -2 \le y \le 2\}$
주기: 2π

(2)



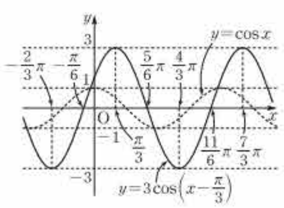
치역: $\{y \mid -1 \le y \le 1\}$
주기: 2π

02 (1)



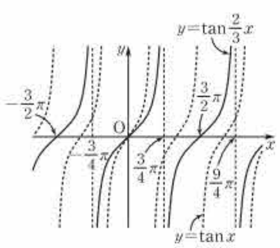
치역: $\{y \mid -1 \le y \le 1\}$
주기: 4π

(2)



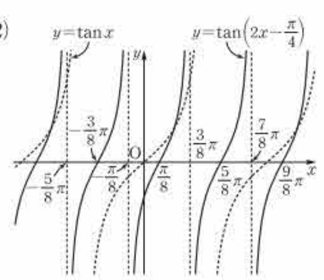
치역: $\{y \mid -3 \le y \le 3\}$
주기: 2π

03 (1)



주기: $\frac{3}{2}\pi$, 점근선의 방정식: $x=\frac{3}{2}n\pi+\frac{3}{4}\pi$ (n은 정수)

(2)



주기: $\frac{\pi}{2}$, 점근선의 방정식: $x=\frac{n}{2}\pi+\frac{3}{8}\pi$ (n은 정수)

04 5 **05** ② **06** ㄱ, ㄷ **07** ② **08** 3π **09** 0
10 3 **11** $\frac{1}{2}$ **12** ③ **13** ④ **14** ④ **15** ④
16 -8 **17** ㄱ, ㄷ **18** 19 **19** 4 **20** 2π **21** $\frac{3}{2}$
22 $\frac{\pi}{4}$ **23** ② **24** 3π **25** ③

W 47쪽 **12 삼각함수의 성질**

01 (1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (2) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (3) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ (4) $-\sqrt{3}$

02 (1) $x=\frac{7}{6}\pi$ 또는 $x=\frac{11}{6}\pi$ (2) $x=\frac{\pi}{4}$ 또는 $x=\frac{5}{4}\pi$

03 (1) $0\le x\le\frac{2}{3}\pi$ 또는 $\frac{4}{3}\pi\le x<2\pi$

(2) $0\le x<\frac{\pi}{3}$ 또는 $\frac{\pi}{2}<x<\frac{4}{3}\pi$ 또는 $\frac{3}{2}\pi<x<2\pi$

04 $\frac{11\sqrt{5}}{15}$ **05** 0 **06** -1.1133 **07** $\frac{7}{4}$ **08** ②
09 1 **10** ③ **11** ㄱ **12** ① **13** 8 **14** -4
15 ③ **16** ① **17** 1 **18** ② **19** 4 **20** 4
21 $x=\frac{2}{3}\pi$ **22** ④ **23** $\frac{11}{8}\pi$ **24** ③ **25** $x=0$ **26** ⑤
27 $\frac{\sqrt{7}}{4}$ **28** ④ **29** ③ **30** -2 **31** ①
32 $0\le x\le\frac{\pi}{4}$ 또는 $\frac{3}{4}\pi\le x<\pi$ **33** $0<x<\frac{2}{3}\pi$ 또는 $\frac{4}{3}\pi<x<2\pi$
34 ④ **35** $-\frac{7}{6}\pi$ **36** ④ **37** $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ 또는 $\frac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$
38 $\frac{4}{3}\pi$

07 삼각함수의 활용

W 53쪽 **13 사인법칙과 코사인법칙**

01 (1) $2\sqrt{3}$ (2) $60°$ 또는 $120°$ **02** 9 **03** (1) 1 (2) 7
04 $45°$ **05** ④ **06** 6 **07** 6 **08** 27π **09** $4\sqrt{3}$
10 ③ **11** 5 : 3 : 4 **12** 1 **13** ②
14 $C=90°$인 직각삼각형 **15** $3+\sqrt{15}$ **16** ④ **17** $\frac{6}{5}$
18 $\frac{3\sqrt{7}}{8}$ **19** $\sqrt{74}$ **20** ④ **21** $B=90°$인 직각삼각형
22 ③ **23** $\frac{49}{3}\pi$ **24** 6 **25** $15\sqrt{6}$ m **26** ⑤
27 $\frac{8\sqrt{15}}{15}$

W 57쪽 **14 삼각형의 넓이**

01 (1) $20\sqrt{2}$ (2) 15 **02** $21\sqrt{3}$ **03** $22\sqrt{2}$ **04** ② **05** 8
06 $48+16\sqrt{3}$ **07** ④ **08** ③ **09** $\frac{25\sqrt{3}}{2}$ **10** $\frac{21\sqrt{5}}{5}\pi$
11 $16\sqrt{3}$ **12** ④ **13** $7\sqrt{6}+8\sqrt{3}$ **14** $6\sqrt{2}$ **15** ②
16 ② **17** $\frac{81}{2}$ **18** ⑤

08 등차수열과 등비수열

W 60쪽 15 등차수열

01 (1) 3, 2, 1 (2) 9, 99, 999 (3) $\frac{7}{3}$, $\frac{7}{4}$, $\frac{7}{5}$

02 (1) $a_n=7n-11$ (2) $a_n=-2n+10$ (3) $a_n=4n-3$ (4) $a_n=-3n$

03 (1) -10 (2) 4 **04** 제8항 **05** ① **06** -2

07 $b_n=-4n+27$ **08** ④ **09** 제32항 **10** ② **11** 17

12 ③ **13** 75 **14** ⑤ **15** 55 **16** ③

17 (1) $f(1)=a+1$, $f(3)=9a-5$, $f(4)=16a-8$ (2) 3 **18** 140

19 ② **20** ②

W 63쪽 16 등차수열의 합

01 (1) 270 (2) 45 **02** (1) 148 (2) 104

03 (1) $a_n=2n-2$ (2) $a_1=-1$, $a_n=4n-6$ $(n\geq2)$ **04** ④

05 17 **06** ⑤ **07** 185 **08** ② **09** 10 **10** ③

11 319 **12** -6 **13** ① **14** -190 **15** 10 **16** 198

17 ② **18** ② **19** 1017 **20** ⑤ **21** ④ **22** 37

23 9 **24** ④

W 67쪽 17 등비수열

01 (1) $a_n=4\cdot(-1)^{n-1}$ (2) $a_n=\frac{1}{2}\cdot6^{n-1}$ (3) $a_n=2^n$ (4) $a_n=\left(-\frac{1}{5}\right)^{n-1}$

02 (1) -6 또는 6 (2) $-3\sqrt{3}$ 또는 $3\sqrt{3}$ **03** 첫째항: $\frac{2}{3}$, 공비: $\frac{1}{9}$

04 $\frac{9}{2}$ **05** ③ **06** ① **07** 제12항 **08** ③ **09** ④

10 400 **11** 204 **12** 9 **13** 27 **14** ② **15** -6

16 ⑤ **17** ① **18** 40 **19** 300 MB **20** $\frac{64}{27}$배

W 70쪽 18 등비수열의 합

01 (1) -315 (2) $\frac{728}{729}$ **02** $a_n=9\cdot10^{n-1}$

03 (1) 630만 원 (2) 600만 원 **04** ④ **05** $728(\sqrt{3}+1)$

06 ③ **07** -255 **08** ③ **09** $\frac{1}{3}$ **10** 4840 **11** 36 km

12 ① **13** 16 **14** ④ **15** 549 **16** 312만 원

17 1103만 3천 원 **18** ④

09 수열의 합

W 73쪽 19 기호 $\sum$의 뜻과 성질

01 (1) $\sum_{k=1}^{8}k^2$ (2) $\sum_{k=1}^{24}\frac{1}{k(k+1)}$ **02** (1) 44 (2) -23 **03** 4

04 78 **05** ② **06** ③ **07** ③ **08** 610 **09** 13

10 ② **11** ④ **12** 20

W 75쪽 20 여러 가지 수열의 합

01 (1) 27 (2) -5 **02** (1) $\frac{20}{21}$ (2) $6-\sqrt{2}$ **03** ⑤ **04** 5

05 ② **06** ① **07** 136 **08** ③ **09** ④ **10** ④

11 1540 **12** ① **13** ② **14** 19 **15** ① **16** 26

17 $\frac{382}{9}$ **18** ① **19** ① **20** ⑤ **21** $\log 51-2$

22 제33항 **23** ④ **24** 14

10 수학적 귀납법

W 79쪽 21 수열의 귀납적 정의

01 (1) $a_n=7n-9$ (2) $a_n=-2n+7$ **02** (1) $a_n=3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ (2) $a_n=4^n$

03 21 **04** ② **05** 161 **06** 12 **07** 96 **08** ③

09 $\frac{299}{100}$ **10** 14 **11** ② **12** ④ **13** 11 **14** ⑤

15 5 **16** ③ **17** ④ **18** $\frac{1}{2}$ **19** 121 **20** ②

21 431 **22** $a_{n+1}=\frac{3}{2}a_n-10$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$

23 $a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+3$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$

24 (1) $a_{n+1}=\frac{2}{3}a_n$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$ (2) $\frac{320}{27}$

W 83쪽 22 수학적 귀납법

01 2, 2, $2k$ **02** 1, $2k^2+7k+6$, $2k+3$ **03** 3

04 ⑤ **05** 30 **06** 풀이 159쪽 **07** 풀이 159쪽

08 ④ **09** ③ **10** ④ **11** 6 **12** 풀이 160쪽

01 지수

01 거듭제곱과 거듭제곱근

Lecture 01 거듭제곱 　 8쪽

1-1 (1) $a^5\times a^3=a^{5+3}=a^8$

(2) $(a^2b)^3=a^{2\times3}b^3=a^6b^3$

(3) $\left(\frac{a}{b^2}\right)^4=\frac{a^4}{b^{2\times4}}=\frac{a^4}{b^8}$

(4) $a^3\div a^7=\frac{1}{a^{7-3}}=\frac{1}{a^4}$

답 (1) a^8 (2) a^6b^3 (3) $\frac{a^4}{b^8}$ (4) $\frac{1}{a^4}$

1-2 (1) $ab^2\times(ab)^3=ab^2\times a^3b^3=a^{1+3}b^{2+3}=a^4b^5$

(2) $(a^2b)^4\div a^3b^2=a^8b^4\div a^3b^2=a^{8-3}b^{4-2}=a^5b^2$

(3) $5a^6b\times\left(\frac{b^2}{a}\right)^4=5a^6b\times\frac{b^8}{a^4}=5a^{6-4}b^{1+8}=5a^2b^9$

(4) $(-2ab^5)^3\div(ab^4)^2=-8a^3b^{15}\div a^2b^8$
$=-8a^{3-2}b^{15-8}=-8ab^7$

답 (1) a^4b^5 (2) a^5b^2 (3) $5a^2b^9$ (4) $-8ab^7$

1-3 $3ab^7\div\left(\frac{b}{a^2}\right)^5=3ab^7\div\frac{b^5}{a^{10}}=3ab^7\times\frac{a^{10}}{b^5}$
$=3a^{1+10}b^{7-5}=3a^{11}b^2$

$\therefore p=11,\ q=2$ 　 답 $p=11,\ q=2$

Lecture 02 거듭제곱근 　 9쪽

1-1 (1) 25의 제곱근을 x라 하면 $x^2=25$이므로

$x=\pm5$

따라서 25의 제곱근은 -5, 5이다.

> 실수 a의 n제곱근은 방정식 $x^n=a$를 세워서 구한다.

(2) 1의 세제곱근을 x라 하면 $x^3=1$이므로

$x^3-1=0$, 　 $(x-1)(x^2+x+1)=0$

> $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

$\therefore x=1$ 또는 $x=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

따라서 1의 세제곱근은 1, $\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$, $\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$이다.

답 (1) -5, 5 (2) 1, $\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$, $\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$

1-2 (1) 81의 네제곱근을 x라 하면 $x^4=81$이므로

$x^4-81=0$, 　 $(x^2+9)(x^2-9)=0$

$(x+3i)(x-3i)(x+3)(x-3)=0$

$\therefore x=\pm3i$ 또는 $x=\pm3$

따라서 81의 네제곱근 중 실수인 것은 -3, 3이다.

> $-\sqrt[4]{81}=-3$, $\sqrt[4]{81}=3$

(2) -8의 세제곱근을 x라 하면 $x^3=-8$이므로

$x^3+8=0$, 　 $(x+2)(x^2-2x+4)=0$

> $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=1\pm\sqrt{3}i$

따라서 -8의 세제곱근 중 실수인 것은 -2이다.

> $\sqrt[3]{-8}=-2$

답 (1) -3, 3 (2) -2

2-1 (1) $\sqrt[4]{2}\sqrt[4]{8}=\sqrt[4]{2\times8}=\sqrt[4]{16}=\sqrt[4]{2^4}=2$

(2) $\frac{\sqrt[3]{81}}{\sqrt[3]{3}}=\sqrt[3]{\frac{81}{3}}=\sqrt[3]{27}=\sqrt[3]{3^3}=3$

(3) $\left(\sqrt[6]{\frac{1}{9}}\right)^3=\sqrt[6]{\left(\frac{1}{9}\right)^3}=\sqrt[6]{\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^2\right\}^3}=\sqrt[6]{\left(\frac{1}{3}\right)^6}=\frac{1}{3}$

> $a>0$이고 m, n이 2 이상의 자연수일 때, $(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$

(4) $\sqrt{\sqrt[3]{64}}=\sqrt[6]{64}=\sqrt[6]{2^6}=2$

> $a>0$이고 m, n이 2 이상의 자연수일 때, $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}=\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$

답 (1) 2 (2) 3 (3) $\frac{1}{3}$ (4) 2

2-2 (1) $\sqrt{\sqrt{3}}\times\sqrt[4]{27}=\sqrt[4]{3}\times\sqrt[4]{3^3}=\sqrt[4]{3^4}=3$

(2) $(\sqrt[3]{5})^5\div\sqrt[9]{5^6}=\sqrt[3]{5^5}\div\sqrt[3]{5^2}=\sqrt[3]{\frac{5^5}{5^2}}=\sqrt[3]{5^3}=5$

(3) $\sqrt[4]{16}+\sqrt{\sqrt{81}}=\sqrt[4]{2^4}+\sqrt[4]{3^4}=2+3=5$

(4) $\sqrt{216}\div\sqrt[4]{36}-\frac{\sqrt[3]{256}}{\sqrt[3]{4}}=\sqrt{6^3}\div\sqrt[4]{6^2}-\sqrt[3]{\frac{256}{4}}$
$=\sqrt{6^3}\div\sqrt{6}-\sqrt[3]{64}$
$=\sqrt{\frac{6^3}{6}}-\sqrt[3]{4^3}$
$=\sqrt{6^2}-4=6-4=2$

답 (1) 3 (2) 5 (3) 5 (4) 2

기본+표준 유형 Q+Q 　 10쪽

01 ① $a\times a^3\times a^4=a^8$

② $(-a^2)^4=a^8$

③ $(a^3b^2)^5=a^{15}b^{10}$

④ $\left(-\frac{2}{a^4}\right)^3=-\frac{8}{a^{12}}$

⑤ $(a^2)^3\div a^6=a^6\div a^6=1$

답 ⑤

02 $2^6\div14^5\times7^6=(2\times7)^6\div14^5$
$=14^6\div14^5=14$

답 ④

03 ㄱ. 27의 세제곱근을 x라 하면 $x^3=27$이므로

$x^3-27=0$, 　 $(x-3)(x^2+3x+9)=0$

$\therefore x=3$ 또는 $x=\frac{-3\pm3\sqrt{3}i}{2}$

따라서 27의 세제곱근은 3, $\frac{-3-3\sqrt{3}i}{2}$, $\frac{-3+3\sqrt{3}i}{2}$이다.

ㄴ. -5의 세제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[3]{-5}$이다.

ㄷ. 16의 네제곱근을 x라 하면 $x^4=16$이므로

$x^4-16=0$, 　 $(x^2+4)(x^2-4)=0$

$(x+2i)(x-2i)(x+2)(x-2)=0$

$\therefore x=\pm 2i$ 또는 $x=\pm 2$

따라서 16의 네제곱근은 $-2i$, $2i$, -2, 2이다.

ㄹ. 네제곱근 16은 $\sqrt[4]{16}=2$이다.

이상에서 옳은 것은 ㄹ뿐이다. 답 ㄹ

04 $\sqrt{(-2)^2}+\sqrt[3]{(-3)^3}+\sqrt[4]{(-4)^4}+\cdots+\sqrt[9]{(-9)^9}$

$=2+(-3)+4+(-5)+\cdots+(-9)$

$=(-1)\times 4=-4$ 답 -4

쌤 한마디

$(-3)^3=-27$의 세제곱근 중 실수인 것은 -3이므로

$\sqrt[3]{(-3)^3}=\sqrt[3]{-27}=-3$

이와 같이 $a>0$이고 n이 3 이상의 홀수일 때,

$\sqrt[n]{(-a)^n}=\sqrt[n]{-a^n}=-a$

임을 알 수 있다.

05 -7의 다섯제곱근 중 실수인 것은 1개이고, 5의 네제곱근 중 실수인 것은 2개이므로

$m=1$, $n=2$

$\therefore m-n=-1$ 답 -1

$\sqrt[5]{-7}$

$-\sqrt[4]{5}$, $\sqrt[4]{5}$

쌤 한마디

실수 a의 n제곱근 중 실수인 것의 개수는 다음과 같다.

	$a>0$	$a=0$	$a<0$
n이 짝수	2	1	0
n이 홀수	1	1	1

06 ① $\sqrt[3]{5}\times\sqrt[3]{25}=\sqrt[3]{125}=\sqrt[3]{5^3}=5$

② $(\sqrt[4]{9})^2=(\sqrt[4]{3^2})^2=(\sqrt{3})^2=3$

③ $\dfrac{\sqrt[3]{-1}}{\sqrt[3]{-27}}=\dfrac{\sqrt[3]{(-1)^3}}{\sqrt[3]{(-3)^3}}=\dfrac{-1}{-3}=\dfrac{1}{3}$,

$\sqrt[3]{\dfrac{1}{27}}=\sqrt[3]{\left(\dfrac{1}{3}\right)^3}=\dfrac{1}{3}$

$\therefore \dfrac{\sqrt[3]{-1}}{\sqrt[3]{-27}}=\sqrt[3]{\dfrac{1}{27}}$

근호 안의 수가 음수이므로 거듭제곱근의 성질을 이용할 수 없다.

④ $\sqrt[3]{-\sqrt{64}}=\sqrt[3]{-8}=\sqrt[3]{(-2)^3}=-2$

⑤ $\sqrt[3]{3}\times\sqrt{\sqrt{3}}=\sqrt[3]{3}\times\sqrt[4]{3}=\sqrt[12]{3^4}\times\sqrt[12]{3^3}=\sqrt[12]{3^7}$

3, 4의 최소공배수가 12이므로 $\sqrt[12]{\blacksquare}$ 꼴로 변형한다.

답 ⑤

07 $\sqrt{\dfrac{\sqrt{8}}{4}}\times\sqrt[4]{\dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt[6]{8}}}=\dfrac{\sqrt{\sqrt{8}}}{\sqrt{4}}\times\dfrac{\sqrt[4]{\sqrt{8}}}{\sqrt[4]{\sqrt[6]{8}}}=\dfrac{\sqrt[4]{2^3}}{\sqrt{2^2}}\times\dfrac{\sqrt[8]{2^3}}{\sqrt[24]{2^3}}$

$=\dfrac{\sqrt[24]{2^{18}}}{2}\times\dfrac{\sqrt[24]{2^9}}{\sqrt[24]{2^3}}$

$=\dfrac{1}{2}\times\sqrt[24]{\dfrac{2^{18}\times 2^9}{2^3}}$

$=\dfrac{1}{2}\times\sqrt[24]{2^{24}}$

$=\dfrac{1}{2}\times 2=1$ 답 1

$a\neq 0$이고 n이 양의 정수일 때,

$a^0=1$, $a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$

08 $\sqrt[4]{a^5b^2}\times\sqrt[6]{a^2b}\div\sqrt[3]{a^4b}$

$=\sqrt[12]{a^{15}b^6}\times\sqrt[12]{a^4b^2}\div\sqrt[12]{a^{16}b^4}$

$=\sqrt[12]{\dfrac{a^{15}b^6\times a^4b^2}{a^{16}b^4}}$

$=\sqrt[12]{a^3b^4}$

따라서 $p=12$, $q=3$이므로

$p+q=15$ 답 ③

09 $\sqrt{\dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[8]{x}}}\times\sqrt[4]{\dfrac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt[3]{x}}}\times\sqrt[3]{\dfrac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}}}$

$=\dfrac{\sqrt{\sqrt[3]{x}}}{\sqrt{\sqrt[8]{x}}}\times\dfrac{\sqrt[4]{\sqrt[4]{x}}}{\sqrt[4]{\sqrt[3]{x}}}\times\dfrac{\sqrt[3]{\sqrt[4]{x}}}{\sqrt[3]{\sqrt{x}}}$

$=\dfrac{\sqrt[6]{x}}{\sqrt[16]{x}}\times\dfrac{\sqrt[16]{x}}{\sqrt[12]{x}}\times\dfrac{\sqrt[12]{x}}{\sqrt[6]{x}}=1$ 답 1

10 2, 3, 6의 최소공배수가 6이므로

$\sqrt{2}=\sqrt[6]{2^3}=\sqrt[6]{8}$, $\sqrt[3]{3}=\sqrt[6]{3^2}=\sqrt[6]{9}$

$\sqrt[6]{7}<\sqrt[6]{8}<\sqrt[6]{9}$이므로 $\sqrt[6]{7}<\sqrt{2}<\sqrt[3]{3}$ 답 ④

다른 풀이 세 수 $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[6]{7}$을 각각 여섯제곱하면

$(\sqrt{2})^6=\sqrt{2^6}=2^3=8$

$(\sqrt[3]{3})^6=\sqrt[3]{3^6}=3^2=9$

$(\sqrt[6]{7})^6=7$

$7<8<9$이므로 $\sqrt[6]{7}<\sqrt{2}<\sqrt[3]{3}$

쌤 한마디

거듭제곱근의 대소를 비교할 때에는 다음을 이용한다.

$A>0$, $B>0$이고 k는 2 이상의 자연수일 때

① $A<B$이면 $\sqrt[k]{A}<\sqrt[k]{B}$

② $(\sqrt[m]{A})^k<(\sqrt[n]{B})^k$이면 $\sqrt[m]{A}<\sqrt[n]{B}$

(단, m, n은 2 이상의 자연수)

11 $\sqrt[3]{\sqrt[4]{52}}=\sqrt[12]{52}$, $\sqrt[6]{5\sqrt{2}}=\sqrt[6]{\sqrt{5^2\times 2}}=\sqrt[12]{50}$,

$\sqrt[4]{2\sqrt[3]{6}}=\sqrt[4]{\sqrt[3]{2^3\times 6}}=\sqrt[12]{48}$에서

$\sqrt[12]{48}<\sqrt[12]{50}<\sqrt[12]{52}$

따라서 $\sqrt[4]{2\sqrt[3]{6}}<\sqrt[6]{5\sqrt{2}}<\sqrt[3]{\sqrt[4]{52}}$이므로 가장 작은 수는

$\sqrt[4]{2\sqrt[3]{6}}$ 답 $\sqrt[4]{2\sqrt[3]{6}}$

02 지수의 확장

Lecture 03 지수가 정수일 때의 지수법칙 12쪽

1-1 (3) $2^{-3}=\dfrac{1}{2^3}=\dfrac{1}{8}$

답 (1) 1 (2) 1 (3) $\dfrac{1}{8}$ (4) -8

1-2 (1) $(-4)^0+4^{-1}=1+\dfrac{1}{4}=\dfrac{5}{4}$

(2) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-2}+(-3)^{-2}=3^2+\dfrac{1}{(-3)^2}=9+\dfrac{1}{9}=\dfrac{82}{9}$

답 (1) $\dfrac{5}{4}$ (2) $\dfrac{82}{9}$

2-1 (1) $(-5)^8\div(-5)^4\times(-5)^{-2}=(-5)^{8-4-2}$
$=(-5)^2=25$

(2) $(2^{-2})^{-3}\div 2^7=2^6\div 2^7=2^{6-7}=2^{-1}=\dfrac{1}{2}$

답 (1) 25 (2) $\dfrac{1}{2}$

2-2 (1) $a^{-1}\times a^4\div a^{-3}=a^{-1+4-(-3)}=a^6$

(2) $(-ab^{-2})^5\div(a^2b)^{-2}=(-a^5b^{-10})\div a^{-4}b^{-2}$
$=-a^{5-(-4)}b^{-10-(-2)}$
$=-a^9b^{-8}=-\dfrac{a^9}{b^8}$

답 (1) a^6 (2) $-\dfrac{a^9}{b^8}$

Lecture 04 지수가 실수일 때의 지수법칙

Ⓛ 13쪽

1-1 답 (1) $a^{\frac{1}{6}}$ (2) $a^{-\frac{3}{5}}$

1-2 (1) $10^{0.2}=10^{\frac{1}{5}}=\sqrt[5]{10}$

(2) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-1}}=\sqrt[3]{2}$

답 (1) $\sqrt[5]{10}$ (2) $\sqrt[3]{2}$

2-1 (1) $2^{\frac{3}{4}}\div 2^{-\frac{1}{4}}=2^{\frac{3}{4}-\left(-\frac{1}{4}\right)}=2$

(2) $3^{\frac{\sqrt{7}}{2}}\times 3^{1-\frac{\sqrt{7}}{2}}=3^{\frac{\sqrt{7}}{2}+1-\frac{\sqrt{7}}{2}}=3$

(3) $(7^{\sqrt{3}-1})^{\sqrt{3}+1}=7^{(\sqrt{3}-1)\times(\sqrt{3}+1)}=7^2=49$

(4) $5^{\frac{1}{2}}\times(5^{\frac{5}{4}})^2=5^{\frac{1}{2}}\times 5^{\frac{5}{2}}=5^{\frac{1}{2}+\frac{5}{2}}=5^3=125$

답 (1) 2 (2) 3 (3) 49 (4) 125

2-2 (1) $(3^{\sqrt{2}}\times 2^{\sqrt{8}})^{\sqrt{2}}=3^2\times 2^4=9\times 16=144$

(2) $9^{\frac{4}{3}}\div(3^{-\frac{1}{6}})^2=(3^2)^{\frac{4}{3}}\div(3^{-\frac{1}{6}})^2$
$=3^{\frac{8}{3}}\div 3^{-\frac{1}{3}}=3^{\frac{8}{3}-\left(-\frac{1}{3}\right)}$
$=3^3=27$

(3) $2^{\sqrt{27}}\div 8^{\sqrt{3}}=2^{3\sqrt{3}}\div(2^3)^{\sqrt{3}}=2^{3\sqrt{3}-3\sqrt{3}}=2^0=1$

(4) $8^{\frac{1}{6}}\times 4^{\frac{3}{2}}\div 2^{\frac{5}{2}}=(2^3)^{\frac{1}{6}}\times(2^2)^{\frac{3}{2}}\div 2^{\frac{5}{2}}$
$=2^{\frac{1}{2}}\times 2^3\div 2^{\frac{5}{2}}$
$=2^{\frac{1}{2}+3-\frac{5}{2}}=2$

답 (1) 144 (2) 27 (3) 1 (4) 2

기본+표준 유형 Q+Q

Ⓛ 14쪽

01 $9^{-5}\div(9^{-4}\div 3^{-3})^{-2}=(3^2)^{-5}\div\{(3^2)^{-4}\div 3^{-3}\}^{-2}$
$=3^{-10}\div(3^{-8}\div 3^{-3})^{-2}$
$=3^{-10}\div(3^{-5})^{-2}$
$=3^{-10}\div 3^{10}=3^{-20}$

$\therefore n=-20$ 답 -20

Q BOX

02 $\dfrac{25^{-2}+5^{-3}}{6}\times\dfrac{5}{4^2+2^6}$

$=\dfrac{(5^2)^{-2}+5^{-3}}{6}\times\dfrac{5}{(2^2)^2+2^6}=\dfrac{5^{-4}+5^{-3}}{6}\times\dfrac{5}{2^4+2^6}$

$=\dfrac{5^{-4}(1+5)}{6}\times\dfrac{5}{2^4(1+2^2)}=5^{-4}\times 2^{-4}$

$=(5\times 2)^{-4}=10^{-4}$ 답 ②

Q쌤 한마디

밑이 같은 두 수의 합 또는 차는

$a^{-n}+a^{-n+1}=a^{-n}(1+a)$ ($a\neq 0$, n은 양의 정수)

임을 이용하여

$5^{-4}+5^{-3}=5^{-4}(1+5)=6\times 5^{-4}$

과 같이 지수가 작은 수로 묶어서 계산하면 편리하다.

03 ① $3^0\times 4^{\frac{1}{2}}=1\times(2^2)^{\frac{1}{2}}=2$

② $9^{-1}\times 9^{\frac{3}{2}}=9^{\frac{1}{2}}=(3^2)^{\frac{1}{2}}=3$

③ $4^{\frac{3}{2}}\times 27^{\frac{1}{3}}=(2^2)^{\frac{3}{2}}\times(3^3)^{\frac{1}{3}}=2^3\times 3=24$

④ $2^{\frac{1}{5}}\times 16^{\frac{6}{5}}=2^{\frac{1}{5}}\times(2^4)^{\frac{6}{5}}=2^{\frac{1}{5}}\times 2^{\frac{24}{5}}=2^5=32$

⑤ $\{(-7)^2\}^{\frac{1}{2}}=49^{\frac{1}{2}}=(7^2)^{\frac{1}{2}}=7$

지수가 정수가 아닌 유리수일 때, 밑이 음수이면 지수법칙을 이용할 수 없다.

답 ⑤

04 $\left\{\left(\dfrac{8}{27}\right)^{\frac{4}{9}}\right\}^{\frac{3}{4}}\times\left\{\left(\dfrac{1}{49}\right)^{\frac{5}{2}}\right\}^{-\frac{1}{5}}=\left(\dfrac{8}{27}\right)^{\frac{1}{3}}\times\left(\dfrac{1}{49}\right)^{-\frac{1}{2}}$

$\dfrac{1}{49}=\dfrac{1}{7^2}=7^{-2}$

$=\left\{\left(\dfrac{2}{3}\right)^3\right\}^{\frac{1}{3}}\times(7^{-2})^{-\frac{1}{2}}$

$=\dfrac{2}{3}\times 7=\dfrac{14}{3}$

답 $\dfrac{14}{3}$

05 $\sqrt{\sqrt{a^3}}\times\sqrt[3]{\sqrt{a^5}}=\sqrt[4]{a^3}\times\sqrt[6]{a^5}=a^{\frac{3}{4}}\times a^{\frac{5}{6}}$
$=a^{\frac{3}{4}+\frac{5}{6}}=a^{\frac{19}{12}}$ 답 ③

06 $\sqrt[3]{\dfrac{1}{3}}\times\sqrt[4]{\dfrac{1}{4}}\times\sqrt[6]{\dfrac{1}{6}}=3^{-\frac{1}{3}}\times 4^{-\frac{1}{4}}\times 6^{-\frac{1}{6}}$

$=3^{-\frac{1}{3}}\times(2^2)^{-\frac{1}{4}}\times(2\times 3)^{-\frac{1}{6}}$

$=3^{-\frac{1}{3}}\times 2^{-\frac{1}{2}}\times 2^{-\frac{1}{6}}\times 3^{-\frac{1}{6}}$

$=2^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{6}}\times 3^{-\frac{1}{3}-\frac{1}{6}}$

$=2^{-\frac{2}{3}}\times 3^{-\frac{1}{2}}$

따라서 $p=-\dfrac{2}{3}$, $q=-\dfrac{1}{2}$이므로

$p-q=-\dfrac{1}{6}$ 답 $-\dfrac{1}{6}$

07 ㄱ. $3^{\frac{1}{4}}\times 3^{\frac{5}{6}}=3^{\frac{1}{4}+\frac{5}{6}}=3^{\frac{13}{12}}=\sqrt[12]{3^{13}}$

ㄴ. $(4^{-\sqrt{5}})^{\frac{1}{2\sqrt{5}}}=4^{-\frac{1}{2}}=(2^2)^{-\frac{1}{2}}=2^{-1}=\dfrac{1}{2}$

ㄷ. $7^{\sqrt{18}}\div 7^{\sqrt{2}}=7^{3\sqrt{2}}\div 7^{\sqrt{2}}=7^{3\sqrt{2}-\sqrt{2}}=7^{2\sqrt{2}}$

ㄹ. $(\sqrt{2})^{6\sqrt{3}}=(2^{\frac{1}{2}})^{6\sqrt{3}}=2^{3\sqrt{3}}$, $(2\sqrt{2})^{2\sqrt{3}}=(2^{\frac{3}{2}})^{2\sqrt{3}}=2^{3\sqrt{3}}$

$\therefore(\sqrt{2})^{6\sqrt{3}}=(2\sqrt{2})^{2\sqrt{3}}$

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄹ이다. 답 ㄴ, ㄹ

08 $(a^{\sqrt{3}})^{3\sqrt{2}}\times(\sqrt[3]{a})^{3\sqrt{6}}\div a^{2\sqrt{6}}=a^{3\sqrt{6}}\times(a^{\frac{1}{3}})^{3\sqrt{6}}\div a^{2\sqrt{6}}$
$=a^{3\sqrt{6}}\times a^{\sqrt{6}}\div a^{2\sqrt{6}}$
$=a^{3\sqrt{6}+\sqrt{6}-2\sqrt{6}}=a^{2\sqrt{6}}$
$\therefore k=2\sqrt{6}$ 답 ④

09 $2^5=a$에서 $2=a^{\frac{1}{5}}$
$3^2=b$에서 $3=b^{\frac{1}{2}}$
$\therefore 6^{20}=(2\times3)^{20}=2^{20}\times3^{20}$
$=(a^{\frac{1}{5}})^{20}\times(b^{\frac{1}{2}})^{20}=a^4b^{10}$ 답 ④

10 $a=\sqrt[4]{3}$에서 $a^4=3$
$b=\sqrt[3]{5}$에서 $b^3=5$
$\therefore \sqrt[6]{45}=(3^2\times5)^{\frac{1}{6}}=3^{\frac{1}{3}}\times5^{\frac{1}{6}}$
$=(a^4)^{\frac{1}{3}}\times(b^3)^{\frac{1}{6}}=a^{\frac{4}{3}}b^{\frac{1}{2}}$
따라서 $p=\frac{4}{3}$, $q=\frac{1}{2}$이므로
$pq=\frac{2}{3}$ 답 $\frac{2}{3}$

11 $(5^{\frac{1}{2}}+5^{-\frac{1}{2}})(5^{\frac{1}{2}}-5^{-\frac{1}{2}})+(5^{\frac{1}{2}}+5^{-\frac{1}{2}})^2$
$=(5^{\frac{1}{2}})^2-(5^{-\frac{1}{2}})^2+(5^{\frac{1}{2}})^2+2\times5^{\frac{1}{2}}\times5^{-\frac{1}{2}}+(5^{-\frac{1}{2}})^2$
$=5-5^{-1}+5+2+5^{-1}$
$=12$ 답 12

다른 풀이 $(5^{\frac{1}{2}}+5^{-\frac{1}{2}})(5^{\frac{1}{2}}-5^{-\frac{1}{2}})+(5^{\frac{1}{2}}+5^{-\frac{1}{2}})^2$
$=(5^{\frac{1}{2}}+5^{-\frac{1}{2}})(5^{\frac{1}{2}}-5^{-\frac{1}{2}}+5^{\frac{1}{2}}+5^{-\frac{1}{2}})$
$=2\times5^{\frac{1}{2}}\times(5^{\frac{1}{2}}+5^{-\frac{1}{2}})$
$=2\times(5+1)=12$

12 $(a^{\frac{2}{3}}+a^{-\frac{1}{3}})^3-(a^{\frac{2}{3}}-a^{-\frac{1}{3}})^3$
$=(a^{\frac{2}{3}})^3+3(a^{\frac{2}{3}})^2a^{-\frac{1}{3}}+3a^{\frac{2}{3}}(a^{-\frac{1}{3}})^2+(a^{-\frac{1}{3}})^3$
$-\{(a^{\frac{2}{3}})^3-3(a^{\frac{2}{3}})^2a^{-\frac{1}{3}}+3a^{\frac{2}{3}}(a^{-\frac{1}{3}})^2-(a^{-\frac{1}{3}})^3\}$
$=a^2+3a+3+a^{-1}-(a^2-3a+3-a^{-1})$
$=6a+2a^{-1}=6a+\frac{2}{a}$ 답 $6a+\frac{2}{a}$

13 $x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}=\sqrt{7}$의 양변을 제곱하면
$(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})^2=(\sqrt{7})^2$
$x+x^{-1}+2=7$ $\therefore x+x^{-1}=5$
위의 식의 양변을 제곱하면
$x^2+x^{-2}+2=25$ $\therefore x^2+x^{-2}=23$ 답 ①

쌤 한마디

$x>0$일 때
① $(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})^2=x+x^{-1}+2$,
$(x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}})^2=x+x^{-1}-2$
② $(x^{\frac{1}{3}}+x^{-\frac{1}{3}})^3=x+x^{-1}+3(x^{\frac{1}{3}}+x^{-\frac{1}{3}})$,
$(x^{\frac{1}{3}}-x^{-\frac{1}{3}})^3=x-x^{-1}-3(x^{\frac{1}{3}}-x^{-\frac{1}{3}})$

Q BOX

$3^{3x}-3^{-3x}$
$=(3^3)^x-(3^3)^{-x}$
$=27^x-27^{-x}$

$2^5=a$에서
$(2^5)^{\frac{1}{5}}=a^{\frac{1}{5}}$
$\therefore 2=a^{\frac{1}{5}}$

분자, 분모를 각각 a^{-x}으로 묶는다.

$(a\pm b)^3$
$=a^3\pm3a^2b+3ab^2\pm b^3$
(복호동순)

14 $3^x-3^{-x}=2$의 양변을 세제곱하면
$(3^x-3^{-x})^3=2^3$
$3^{3x}-3^{-3x}-3(3^x-3^{-x})=8$
$\therefore 27^x-27^{-x}=8+3\times2=14$ 답 14

15 $\frac{a^x-a^{-x}}{a^x+a^{-x}}$의 분자, 분모에 a^x을 곱하면
$\frac{a^x-a^{-x}}{a^x+a^{-x}}=\frac{a^x(a^x-a^{-x})}{a^x(a^x+a^{-x})}=\frac{a^{2x}-1}{a^{2x}+1}$
$=\frac{5-1}{5+1}=\frac{2}{3}$ 답 $\frac{2}{3}$

다른 풀이 $\frac{a^x-a^{-x}}{a^x+a^{-x}}=\frac{a^{-x}(a^{2x}-1)}{a^{-x}(a^{2x}+1)}=\frac{a^{2x}-1}{a^{2x}+1}$
$=\frac{5-1}{5+1}=\frac{2}{3}$

16 $7^{\frac{1}{x}}=9$에서 $9^x=7$ $\therefore 3^{2x}=7$
$\frac{3^x+3^{-x}}{3^x-3^{-x}}$의 분자, 분모에 3^x을 곱하면
$\frac{3^x+3^{-x}}{3^x-3^{-x}}=\frac{3^x(3^x+3^{-x})}{3^x(3^x-3^{-x})}=\frac{3^{2x}+1}{3^{2x}-1}$
$=\frac{7+1}{7-1}=\frac{4}{3}$ 답 ⑤

17 $3^x=15$에서 $3=15^{\frac{1}{x}}$ …… ㉠
$5^y=15$에서 $5=15^{\frac{1}{y}}$ …… ㉡
㉠×㉡을 하면 $15=15^{\frac{1}{x}}\times15^{\frac{1}{y}}=15^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$
$\therefore \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1$ 답 ①

18 $10^x=4$에서
$10=4^{\frac{1}{x}}=(2^2)^{\frac{1}{x}}=2^{\frac{2}{x}}$ …… ㉠
$\left(\frac{1}{7}\right)^y=8$에서
$\frac{1}{7}=8^{\frac{1}{y}}=(2^3)^{\frac{1}{y}}=2^{\frac{3}{y}}$ …… ㉡
㉠÷㉡을 하면 $70=2^{\frac{2}{x}}\div2^{\frac{3}{y}}$
$\therefore 2^{\frac{2}{x}-\frac{3}{y}}=70$ 답 70

19 $I_k=I_0\times\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{k}{4}}$에서
$k=6$일 때, $I_6=I_0\times\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}$
$k=18$일 때, $I_{18}=I_0\times\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{9}{2}}$
$\therefore \frac{I_6}{I_{18}}=\frac{I_0\times\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}}{I_0\times\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{9}{2}}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}=8$
따라서 수심이 6 m인 곳에서의 빛의 세기는 수심이 18 m인 곳에서의 빛의 세기의 8배이다. 답 8배

20 $G=\frac{H-65}{14}\times1.054^T$에서
$H=85$, $T=24$일 때,
$G_1=\frac{85-65}{14}\times1.054^{24}=\frac{10}{7}\times1.054^{24}$

$H=70$, $T=16$일 때,

$$G_2=\frac{70-65}{14}\times1.054^{16}=\frac{5}{14}\times1.054^{16}$$

$$\therefore \frac{G_1}{G_2}=\frac{\frac{10}{7}\times1.054^{24}}{\frac{5}{14}\times1.054^{16}}=4\times1.054^8$$
$$=4\times1.5=6$$

답 6

중단원 마무리

L 17쪽

01 전략 n이 짝수일 때, 실수 a의 n제곱근 중 실수인 것은 $a>0$이면 2개, $a=0$이면 1개, $a<0$이면 없다.

풀이 ① 8의 세제곱근을 x라 하면 $x^3=8$이므로

$x^3-8=0$, $(x-2)(x^2+2x+4)=0$

$\therefore x=2$ 또는 $x=-1\pm\sqrt{3}i$

따라서 8의 세제곱근은 2, $-1-\sqrt{3}i$, $-1+\sqrt{3}i$이다.

② -7의 제곱근을 x라 하면 $x^2=-7$이므로

$x=\pm\sqrt{7}i$

따라서 -7의 제곱근은 $-\sqrt{7}i$, $\sqrt{7}i$이다.

③ 125의 네제곱근 중에서 실수인 것은 $-\sqrt[4]{125}$, $\sqrt[4]{125}$이다.

⑤ n이 홀수이고 $a<0$일 때, a의 n제곱근 중 실수인 것은 1개이다.

$\sqrt[n]{a}$의 1개

답 ④

02 전략 a의 n제곱근은 방정식 $x^n=a$의 해이다.

풀이 16의 네제곱근을 x라 하면 $x^4=16$이므로

$x^4-16=0$, $(x^2+4)(x^2-4)=0$

$(x+2i)(x-2i)(x+2)(x-2)=0$

$\therefore x=\pm2i$ 또는 $x=\pm2$

즉 16의 네제곱근 중 실수인 것은 -2, 2이므로

$a=-2$ 또는 $a=2$

-27의 세제곱근을 y라 하면 $y^3=-27$이므로

$y^3+27=0$, $(y+3)(y^2-3y+9)=0$

$\therefore y=-3$ 또는 $y=\dfrac{3\pm3\sqrt{3}i}{2}$

즉 -27의 세제곱근 중 실수인 것은 -3이므로

$b=-3$

따라서 $a-b$의 최댓값은 5이다.

답 ⑤

$a=-2$, $b=-3$일 때, $a-b=1$
$a=2$, $b=-3$일 때, $a-b=5$

03 전략 $-n^2+9n-18$의 부호에 따라 경우를 나누어 생각한다.

풀이 (i) $-n^2+9n-18>0$일 때,

$n^2-9n+18<0$, $(n-3)(n-6)<0$

$\therefore 3<n<6$

이때 $-n^2+9n-18$의 n제곱근 중에서 음의 실수가 존재하려면 n이 짝수이어야 하므로

$n=4$

(ii) $-n^2+9n-18=0$일 때,

$-n^2+9n-18$의 n제곱근은 항상 0이므로 음의 실수가 존재하지 않는다.

(iii) $-n^2+9n-18<0$일 때,

$n^2-9n+18>0$, $(n-3)(n-6)>0$

$\therefore n<3$ 또는 $n>6$

그런데 $2\le n\le11$이므로

$2\le n<3$ 또는 $6<n\le11$

이때 $-n^2+9n-18$의 n제곱근 중에서 음의 실수가 존재하려면 n이 홀수이어야 하므로

$n=7, 9, 11$

이상에서 모든 n의 값의 합은

$4+7+9+11=31$

답 ①

쌤 한마디

a의 n제곱근 중 음의 실수가 존재할 조건
실수 a와 2 이상의 자연수 n에 대하여 a의 n제곱근 중에서 음의 실수가 존재하려면 $a>0$일 때 n은 짝수, $a<0$일 때 n은 홀수이어야 한다.

04 전략 거듭제곱근의 성질과 곱셈 공식을 이용한다.

풀이 (주어진 식)

$=(\sqrt[3]{2})^3+1^3+\{(\sqrt[4]{5})^2-(\sqrt[4]{3})^2\}(\sqrt{5}+\sqrt{3})$

$=2+1+(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})$

$=3+(\sqrt{5})^2-(\sqrt{3})^2$

$=3+5-3=5$

답 5

05 전략 $R(a, n)$의 정의와 거듭제곱근의 성질을 이용하여 참, 거짓을 판별한다.

풀이 ㄱ. $R(3, 4)=\sqrt[4]{3}=\sqrt{\sqrt{3}}=R(\sqrt{3}, 2)$

ㄴ. $R(a, 2)R(a, 2)=\sqrt{a}\times\sqrt{a}=\sqrt{a^2}=R(a^2, 2)$

ㄷ. $R(R(a, 3), 3)=\sqrt[3]{\sqrt[3]{a}}=\sqrt[9]{a}$, $R(a, 6)=\sqrt[6]{a}$이므로

$R(R(a, 3), 3)\ne R(a, 6)$

$R(a, 3)=\sqrt[3]{a}$

이상에서 항상 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ②

06 전략 $P>0$, $Q>0$이고 k가 2 이상의 자연수일 때, $P<Q$이면 $\sqrt[k]{P}<\sqrt[k]{Q}$임을 이용한다.

풀이 $A=\sqrt[3]{\sqrt{10}}=\sqrt[6]{10}$, $B=\sqrt{5}=\sqrt[6]{5^3}=\sqrt[6]{125}$,

$C=\sqrt[3]{\sqrt{28}}=\sqrt[6]{28}$에서

$\sqrt[6]{10}<\sqrt[6]{28}<\sqrt[6]{125}$

$\therefore A<C<B$

답 ②

다른 풀이 세 수 $\sqrt[3]{\sqrt{10}}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{\sqrt{28}}$을 각각 여섯제곱하면

$(\sqrt[3]{\sqrt{10}})^6=(\sqrt[6]{10})^6=\sqrt[6]{10^6}=10$

$(\sqrt{5})^6=\sqrt{5^6}=5^3=125$

$(\sqrt[3]{\sqrt{28}})^6=(\sqrt[6]{28})^6=\sqrt[6]{28^6}=28$

$10<28<125$이므로 $\sqrt[3]{\sqrt{10}}<\sqrt[3]{\sqrt{28}}<\sqrt{5}$

$\therefore A<C<B$

07 전략 분자, 분모에 3의 거듭제곱을 적당히 곱하여 분모를 통일한다.

풀이 $\dfrac{1}{3^{-4}+1}+\dfrac{1}{3^{-2}+1}+\dfrac{1}{3^{2}+1}+\dfrac{1}{3^{4}+1}$

$=\dfrac{3^4}{1+3^4}+\dfrac{3^2}{1+3^2}+\dfrac{1}{3^2+1}+\dfrac{1}{3^4+1}$

$=\dfrac{3^4+1}{3^4+1}+\dfrac{3^2+1}{3^2+1}$

$=1+1=2$ 답 2

분자, 분모에 3^4을 곱한다.

분자, 분모에 3^2을 곱한다.

다른 풀이 $\dfrac{1}{3^{-4}+1}+\dfrac{1}{3^{-2}+1}+\dfrac{1}{3^{2}+1}+\dfrac{1}{3^{4}+1}$

$=\left(\dfrac{1}{3^{-4}+1}+\dfrac{1}{3^{4}+1}\right)+\left(\dfrac{1}{3^{-2}+1}+\dfrac{1}{3^{2}+1}\right)$

$=\dfrac{3^4+1+3^{-4}+1}{(3^{-4}+1)(3^4+1)}+\dfrac{3^2+1+3^{-2}+1}{(3^{-2}+1)(3^2+1)}$

$=\dfrac{3^4+3^{-4}+2}{1+3^{-4}+3^4+1}+\dfrac{3^2+3^{-2}+2}{1+3^{-2}+3^2+1}$

$=1+1=2$

08 전략 지수가 유리수일 때의 지수법칙을 이용하여 식의 값을 구한다.

풀이 $(25^{\frac{2}{5}}\times 2)^{\frac{5}{4}}\div(10^{\frac{1}{3}}\times 2^{\frac{1}{2}})^{\frac{3}{2}}$

$=25^{\frac{1}{2}}\times 2^{\frac{5}{4}}\div(10^{\frac{1}{2}}\times 2^{\frac{3}{4}})$

$=(5^2)^{\frac{1}{2}}\times 2^{\frac{5}{4}}\div\{(2\times 5)^{\frac{1}{2}}\times 2^{\frac{3}{4}}\}$

$=5\times 2^{\frac{5}{4}}\div(2^{\frac{1}{2}}\times 5^{\frac{1}{2}}\times 2^{\frac{3}{4}})$

$=5^{1-\frac{1}{2}}\times 2^{\frac{5}{4}-\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\right)}$

$=5^{\frac{1}{2}}\times 2^0=\sqrt{5}$ 답 $\sqrt{5}$

$a\neq 0$일 때, $a^0=1$

09 전략 두 자연수 a, n에 대하여 $a^{\frac{1}{n}}$이 자연수가 되려면 a는 어떤 자연수의 n제곱이어야 한다.

풀이 $(a^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{3}}$의 값이 자연수가 되려면 a는 어떤 자연수의 세제곱이어야 하므로 10 이하의 자연수 a의 값은

1^3, 2^3, 즉 1, 8

따라서 모든 a의 값의 합은

$1+8=9$ 답 ③

$a=1$일 때, $a^{\frac{1}{3}}=1^{\frac{1}{3}}=1$

$a=8$일 때, $a^{\frac{1}{3}}=8^{\frac{1}{3}}=(2^3)^{\frac{1}{3}}=2$

10 전략 $\sqrt[n]{a}=a^{\frac{1}{n}}$임을 이용하여 주어진 식을 변형한다.

풀이 $\sqrt[3]{a^2\sqrt{a}\sqrt[4]{a^3}}=\sqrt[3]{a^2}\times\sqrt[6]{a}\times\sqrt[12]{a^3}=a^{\frac{2}{3}}\times a^{\frac{1}{6}}\times a^{\frac{1}{4}}$

$=a^{\frac{2}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{4}}=a^{\frac{13}{12}}$ ...... ㉠ ⋯ ❶

$\sqrt[4]{a\sqrt[3]{a^k}}=\sqrt[4]{a}\times\sqrt[12]{a^k}=a^{\frac{1}{4}}\times a^{\frac{k}{12}}$

$=a^{\frac{1}{4}+\frac{k}{12}}=a^{\frac{k+3}{12}}$ ...... ㉡ ⋯ ❷

㉠, ㉡에서 $\dfrac{13}{12}=\dfrac{k+3}{12}$, $k+3=13$

$\therefore k=10$ ⋯ ❸

답 10

단계	채점 기준	비율
❶	좌변을 지수가 유리수인 식으로 나타낼 수 있다.	40 %
❷	우변을 지수가 유리수인 식으로 나타낼 수 있다.	40 %
❸	k의 값을 구할 수 있다.	20 %

Q BOX

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라 하면

$\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$,

$\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$

11 전략 이차방정식의 근과 계수의 관계와 거듭제곱근의 성질을 이용한다.

풀이 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=8$, $\alpha\beta=5$ ⋯ ❶

$\therefore \dfrac{(4^\alpha)^\beta}{\sqrt{2^\alpha}\times\sqrt{2^\beta}}=\dfrac{4^{\alpha\beta}}{2^{\frac{\alpha}{2}}\times 2^{\frac{\beta}{2}}}=\dfrac{2^{2\alpha\beta}}{2^{\frac{\alpha+\beta}{2}}}$

$=2^{2\alpha\beta-\frac{\alpha+\beta}{2}}=2^{10-4}$

$=2^6=64$ ⋯ ❷

답 64

단계	채점 기준	비율
❶	$\alpha+\beta$, $\alpha\beta$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷	주어진 식의 값을 구할 수 있다.	70 %

12 전략 $p>0$, $q>0$, $k\neq 0$일 때, $p^k=q$이면 $p=q^{\frac{1}{k}}$임을 이용한다.

풀이 $5^a=3$에서 $5=3^{\frac{1}{a}}$

$\therefore 25^{\frac{2}{3}a}=(5^2)^{\frac{2}{3}a}=5^{\frac{4}{3}a}$

$=(3^{\frac{1}{a}})^{\frac{4}{3}a}=3^{\frac{4}{3}}$

$=\sqrt[3]{3^4}=3\sqrt[3]{3}$ 답 ③

13 전략 $(x^{\frac{1}{3}}+x^{-\frac{1}{3}})^3=x+x^{-1}+3(x^{\frac{1}{3}}+x^{-\frac{1}{3}})$임을 이용한다.

풀이 $a=2^{\frac{1}{3}}+2^{-\frac{1}{3}}$에서

$a^3=(2^{\frac{1}{3}}+2^{-\frac{1}{3}})^3=2+2^{-1}+3(2^{\frac{1}{3}}+2^{-\frac{1}{3}})$

$=\dfrac{5}{2}+3a$

따라서 $a^3-3a=\dfrac{5}{2}$이므로

$a^3-3a+\dfrac{1}{2}=\dfrac{5}{2}+\dfrac{1}{2}=3$ 답 ③

14 전략 곱셈 공식을 이용하여 필요한 식의 값을 구한다.

풀이 $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$이므로 $15=21+2(ab+bc+ca)$

$\therefore ab+bc+ca=-3$

$\therefore (2^a)^{b+c}\times(2^b)^{c+a}\times(2^c)^{a+b}$

$=2^{ab+ac}\times 2^{bc+ba}\times 2^{ca+cb}$

$=2^{2(ab+bc+ca)}$

$=2^{-6}=\dfrac{1}{64}$ 답 ①

15 전략 구하는 식의 꼴이 나오도록 $2^{\frac{a}{2}}-2^{\frac{b}{2}}=3$의 양변을 제곱한다.

풀이 $2^{\frac{a}{2}}-2^{\frac{b}{2}}=3$의 양변을 제곱하면

$(2^{\frac{a}{2}}-2^{\frac{b}{2}})^2=3^2$

$2^a-2\times 2^{\frac{a}{2}}\times 2^{\frac{b}{2}}+2^b=9$

$2^a-2^{\frac{a+b+2}{2}}+2^b=9$

이때 $a+b=2$이므로

$2^a-2^2+2^b=9$, $2^a-4+2^b=9$

$\therefore 2^a+2^b=13$ 답 ⑤

16 전략 먼저 곱셈 공식을 이용하여 $(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})^2$의 값을 구한다.

풀이 $(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})^2=x+x^{-1}+2$

$=16+2=18$ ⋯ ❶

이때 $x>0$에서 $x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}>0$이므로

$x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}=3\sqrt{2}$ ⋯ ❷

답 $3\sqrt{2}$

단계	채점 기준	비율
❶	$(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})^2$의 값을 구할 수 있다.	50 %
❷	$x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}$의 값을 구할 수 있다.	50 %

17 전략 주어진 식의 분자, 분모에 a^{3x}을 곱하여 a^{2x}에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 $\dfrac{a^{3x}-a^{-3x}}{a^x+a^{-x}}=\dfrac{a^{3x}(a^{3x}-a^{-3x})}{a^{3x}(a^x+a^{-x})}=\dfrac{a^{6x}-1}{a^{4x}+a^{2x}}$

$=\dfrac{(a^{2x})^3-1}{(a^{2x})^2+a^{2x}}=\dfrac{3^3-1}{3^2+3}=\dfrac{13}{6}$

답 $\dfrac{13}{6}$

18 전략 $p>0$, $q>0$이고 k가 0이 아닌 실수일 때, $p^k=q$이면 $p=q^{\frac{1}{k}}$임을 이용한다.

풀이 $40^x=8$에서 $2^{\frac{3}{x}}=40$ ⋯⋯ ㉠

$5^y=2$에서 $2^{\frac{1}{y}}=5$ ⋯⋯ ㉡

$a^z=\dfrac{1}{4}$에서 $a^z=2^{-2}$ ∴ $2^{\frac{1}{z}}=a^{-\frac{1}{2}}$ ⋯⋯ ㉢

㉠÷㉡×㉢을 하면

$2^{\frac{3}{x}}\div2^{\frac{1}{y}}\times2^{\frac{1}{z}}=40\div5\times a^{-\frac{1}{2}}$

∴ $2^{\frac{3}{x}-\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}=\dfrac{8}{\sqrt{a}}$

이때 $\dfrac{3}{x}-\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=2$이므로

$2^2=\dfrac{8}{\sqrt{a}}$, $\sqrt{a}=2$

∴ $a=4$

답 4

19 전략 t, w의 값을 각각 대입하여 $Q_{\rm A}$, $Q_{\rm B}$의 값을 구한 후 지수법칙을 이용한다.

풀이 $t=20$, $w=8$일 때,

$Q_{\rm A}=0.01\times20^{1.25}\times8^{0.25}$,

$Q_{\rm B}=0.05\times20^{0.75}\times8^{0.30}$

∴ $\dfrac{Q_{\rm A}}{Q_{\rm B}}=\dfrac{0.01\times20^{1.25}\times8^{0.25}}{0.05\times20^{0.75}\times8^{0.30}}$

$=\dfrac{1}{5}\times20^{1.25-0.75}\times8^{0.25-0.3}$

$=5^{-1}\times(2^2\times5)^{0.5}\times(2^3)^{-0.05}$

$=5^{-1}\times2\times5^{0.5}\times2^{-0.15}$

$=2^{0.85}\times5^{-0.5}$

따라서 $a=0.85$, $b=-0.5$이므로

$a+b=0.35$

답 ②

02 로그

03 로그

Lecture 05 로그 20쪽

Q BOX: $a^x=N \Longleftrightarrow x=\log_a N$

1-1 답 (1) $4=\log_3 81$ (2) $-3=\log_2\dfrac{1}{8}$

(3) $-2=\log_{\frac{1}{5}}25$ (4) $0=\log_7 1$

1-2 답 (1) $2^4=16$ (2) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-3}=27$

(3) $10^{-2}=0.01$ (4) $(\sqrt{2})^6=8$

Q BOX: $\log_a N$이 정의되기 위한 조건은 $a>0$, $a\neq1$, $N>0$

2-1 (1) 밑의 조건에서 $x-1>0$, $x-1\neq1$

$x>1$, $x\neq2$ ∴ $1<x<2$ 또는 $x>2$

(2) 진수의 조건에서 $x-3>0$

∴ $x>3$

(3) 진수의 조건에서 $x^2-2x>0$

$x(x-2)>0$ ∴ $x<0$ 또는 $x>2$

(4) 밑의 조건에서 $x-2>0$, $x-2\neq1$

$x>2$, $x\neq3$

∴ $2<x<3$ 또는 $x>3$ ⋯⋯ ㉠

진수의 조건에서 $5-x>0$

∴ $x<5$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$2<x<3$ 또는 $3<x<5$

답 (1) $1<x<2$ 또는 $x>2$

(2) $x>3$ (3) $x<0$ 또는 $x>2$

(4) $2<x<3$ 또는 $3<x<5$

2-2 (1) $\log_{\sqrt{3}}x=8$에서

$x=(\sqrt{3})^8=(3^{\frac{1}{2}})^8=3^4=81$

Q BOX: 진수의 조건에서 $x>0$ / $x=81$이 이것을 만족시키므로 구하는 x의 값이다.

(2) $\log_x\dfrac{1}{49}=2$에서 $x^2=\dfrac{1}{49}$

∴ $x=\dfrac{1}{7}$ ($\because$ $x>0$, $x\neq1$)

Q BOX: 밑의 조건에서 $x>0$, $x\neq1$

답 (1) 81 (2) $\dfrac{1}{7}$

Lecture 06 로그의 성질 21쪽

1-1 (2) $\log_6 3+\log_6 2=\log_6(3\cdot2)=\log_6 6=1$

(3) $\log_5 75-\log_5 3=\log_5\dfrac{75}{3}=\log_5 25$

$=\log_5 5^2=2$

Q BOX: $\log_5 5^2=2\log_5 5=2$

(4) $\log_4\dfrac{1}{16}=\log_4 4^{-2}=-2$

답 (1) 0 (2) 1 (3) 2 (4) -2

1-2 (1) $\log_7 7+\log_3 9=1+\log_3 3^2=1+2=3$

(2) $\log_3 18-\log_3 \frac{2}{3}=\log_3\left(18\cdot\frac{3}{2}\right)=\log_3 27$
$=\log_3 3^3=3$

(3) $\log_6 \sqrt[5]{6}=\log_6 6^{\frac{1}{5}}=\frac{1}{5}$

(4) $\frac{1}{2}\log_8 2+\log_8 4\sqrt{2}=\log_8 2^{\frac{1}{2}}+\log_8 4\sqrt{2}$
$=\log_8 \sqrt{2}+\log_8 4\sqrt{2}$
$=\log_8(\sqrt{2}\cdot 4\sqrt{2})$
$=\log_8 8=1$

답 (1) 3 (2) 3 (3) $\frac{1}{5}$ (4) 1

2-1 $\log_5 24=\log_5(2^3\cdot 3)=\log_5 2^3+\log_5 3$
$=3\log_5 2+\log_5 3=3a+b$ 답 $3a+b$

24를 2, 3을 이용하여 나타낸다.

2-2 $\log_7 2=\log_7 \frac{6}{3}=\log_7 6-\log_7 3=b-a$ 답 $b-a$

Lecture 07 로그의 밑의 변환

Ⓛ 22쪽

1-1 (1) $\frac{\log_5 36}{\log_5 6}=\log_6 36=\log_6 6^2=2$

(2) $\frac{1}{\log_{81} 3}=\log_3 81=\log_3 3^4=4$

답 (1) 2 (2) 4

1-2 (1) $\log_8 2+\frac{1}{\log_{32} 8}=\log_8 2+\log_8 32=\log_8 64$
$=\log_8 8^2=2$

(2) $\frac{\log_{\sqrt{3}} 16}{\log_{\sqrt{3}} 2}-\frac{1}{\log_9 \sqrt{3}}=\log_2 16-\log_{\sqrt{3}} 9$
$=\log_2 2^4-\log_{\sqrt{3}}(\sqrt{3})^4$
$=4-4=0$

답 (1) 2 (2) 0

2-1 (2) $\log_{\frac{1}{10}} 1000=\log_{10^{-1}} 10^3=-3$

$\log_{10^{-1}} 10^3$
$=-3\log_{10} 10$
$=-3$

(3) $6^{\log_6 11}=11^{\log_6 6}=11$

(4) $3^{\log_9 7}=7^{\log_9 3}=7^{\log_{3^2} 3}=7^{\frac{1}{2}}=\sqrt{7}$

답 (1) 1 (2) -3 (3) 11 (4) $\sqrt{7}$

2-2 $\log_7 4\cdot\log_2 7+4^{\log_2 5}=\log_7 2^2\cdot\log_2 7+5^{\log_2 4}$
$=2\log_7 2\cdot\log_2 7+5^{\log_2 2^2}$
$=2\cdot 1+5^2=27$ 답 27

기본+표준 유형 Q+Q

Ⓛ 23쪽

01 $\log_a 3=5$에서 $a^5=3$ $\therefore a=\sqrt[5]{3}$
$\log_b 4=5$에서 $b^5=4$ $\therefore b=\sqrt[5]{4}$
$\therefore ab=\sqrt[5]{3}\cdot\sqrt[5]{4}=\sqrt[5]{12}$ 답 ③

$a>0$, $b>0$이고 n이 2 이상의 자연수일 때
① $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$
② $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$

02 $\log_4\{\log_3(\log_2 n)\}=0$에서
$\log_3(\log_2 n)=4^0=1$
$\log_2 n=3^1=3$
$\therefore n=2^3=8$ 답 8

03 밑의 조건에서 $x+1>0$, $x+1\neq 1$
$x>-1$, $x\neq 0$
$\therefore -1<x<0$ 또는 $x>0$ …… ㉠
진수의 조건에서 $-x^2+2x+15>0$
$x^2-2x-15<0$, $(x+3)(x-5)<0$
$\therefore -3<x<5$ …… ㉡
㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면
$-1<x<0$ 또는 $0<x<5$
따라서 정수 x는 1, 2, 3, 4이다. 답 1, 2, 3, 4

04 밑의 조건에서 $x>0$, $x\neq 1$
$\therefore 0<x<1$ 또는 $x>1$ …… ㉠
진수의 조건에서 $x^2-x-12>0$
$(x+3)(x-4)>0$
$\therefore x<-3$ 또는 $x>4$ …… ㉡
㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면
$x>4$
따라서 정수 x의 최솟값은 5이다. 답 ④

05 $\log_3 \frac{2}{5}+2\log_3\sqrt{30}-\log_3 \frac{4}{3}$
$=\log_3 \frac{2}{5}+\log_3(\sqrt{30})^2-\log_3 \frac{4}{3}$
$=\log_3 \frac{2}{5}+\log_3 30-\log_3 \frac{4}{3}$
$=\log_3\left(\frac{2}{5}\cdot 30\cdot\frac{3}{4}\right)=\log_3 9$
$=\log_3 3^2=2$ 답 2

06 $4\log_2 a+\log_2 \frac{a}{18}-6\log_2\sqrt{a}$
$=\log_2 a^4+\log_2 \frac{a}{18}-\log_2(\sqrt{a})^6$
$=\log_2 a^4+\log_2 \frac{a}{18}-\log_2 a^3$
$=\log_2\left(a^4\cdot\frac{a}{18}\cdot\frac{1}{a^3}\right)=\log_2 \frac{a^2}{18}$
따라서 $\log_2 \frac{a^2}{18}=1$이므로
$\frac{a^2}{18}=2$, $a^2=36$
$\therefore a=6$ ($\because a>0$) 답 ①

07 $\log_5 20+\frac{1}{\log_3 5}-\frac{\log_6 12}{\log_6 5}$
$=\log_5 20+\log_5 3-\log_5 12$
$=\log_5 \frac{20\cdot 3}{12}=\log_5 5=1$ 답 1

08 $\log_a x=\frac{1}{3}$에서 $\frac{1}{\log_x a}=\frac{1}{3}$
$\therefore \log_x a=3$

Ⓛ 02 로그

$\log_b x=\frac{1}{4}$에서 $\frac{1}{\log_x b}=\frac{1}{4}$

$\therefore \log_x b=4$

$\therefore \frac{1}{\log_{ab}x}=\log_x ab=\log_x a+\log_x b$

$=3+4=7$ 답 ④

09 $(6\log_9 2+10\log_3\sqrt{2})\cdot\log_4\sqrt{27}$

$=(6\log_{3^2}2+10\log_3 2^{\frac{1}{2}})\cdot\log_{2^2}3^{\frac{3}{2}}$

$=(3\log_3 2+5\log_3 2)\cdot\frac{3}{4}\log_2 3$

$=8\log_3 2\cdot\frac{3}{4}\log_2 3=6$ 답 ⑤

$8\log_3 2\cdot\frac{3}{4}\log_2 3$
$=8\cdot\frac{3}{4}\cdot\log_3 2\cdot\log_2 3$
$=6\cdot1=6$

10 $3\log_2 3-\log_2 15-\log_{\frac{1}{2}}10$

$=\log_2 3^3-\log_2 15-\log_{2^{-1}}10$

$=\log_2 27-\log_2 15+\log_2 10$

$=\log_2\frac{27\cdot10}{15}=\log_2 18$

∴ (주어진 식)$=2^{\log_2 18}=18$ 답 18

11 $\log_{\frac{1}{7}}18=\log_{7^{-1}}(2\cdot3^2)=-\log_7(2\cdot3^2)$

$=-(\log_7 2+\log_7 3^2)$

$=-(\log_7 2+2\log_7 3)$

$=-(a+2b)$

$=-a-2b$ 답 ③

12 $5^a=x$, $5^b=y$에서 $\log_5 x=a$, $\log_5 y=b$

$\therefore \log_{xy}xy^3=\frac{\log_5 xy^3}{\log_5 xy}=\frac{\log_5 x+3\log_5 y}{\log_5 x+\log_5 y}$

$=\frac{a+3b}{a+b}$ 답 $\frac{a+3b}{a+b}$

다른 풀이 $5^a=x$, $5^b=y$에서

$xy=5^a\cdot5^b=5^{a+b}$, $xy^3=5^a\cdot(5^b)^3=5^{a+3b}$

$\therefore \log_{xy}xy^3=\log_{5^{a+b}}5^{a+3b}=\frac{a+3b}{a+b}\log_5 5$

$=\frac{a+3b}{a+b}$

$a>0$이고 x, y가 실수일 때,
$a^xa^y=a^{x+y}$

13 $8^x=27^y=6$에서 $x=\log_8 6$, $y=\log_{27}6$

$\therefore \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{\log_8 6}+\frac{1}{\log_{27}6}$

$=\log_6 8+\log_6 27$

$=\log_6(2^3\cdot3^3)$

$=\log_6 6^3=3$ 답 ⑤

14 $\log_8 x^3+\log_2 y=1$에서 $\log_{2^3}x^3+\log_2 y=1$

$\therefore \log_2 x+\log_2 y=1$

$\therefore 2^{\log_{\sqrt{2}}x}\cdot4^{\log_2 y}=2^{\log_{2^{\frac{1}{2}}}x}\cdot(2^2)^{\log_2 y}$

$=2^{2\log_2 x}\cdot2^{2\log_2 y}$

$=2^{2\log_2 x+2\log_2 y}$

$=2^{2(\log_2 x+\log_2 y)}$

$=2^2=4$ 답 4

15 $\log_3 27<\log_3 54<\log_3 81$에서

$3<\log_3 54<4$

이므로

$a=\log_3 54-3=\log_3 54-\log_3 27=\log_3 2$

$\therefore 3^a=3^{\log_3 2}=2$ 답 2

$\log_3 54=3.\cdots$에서
$\log_3 54$의 정수 부분이
3이므로 소수 부분은
$\log_3 54-3$

16 $\log_5 5<\log_5 12<\log_5 25$에서

$1<\log_5 12<2$

이므로

$a=1$, $b=\log_5 12-1=\log_5 12-\log_5 5=\log_5\frac{12}{5}$

$\therefore 5(2^a+5^b)=5(2^1+5^{\log_5\frac{12}{5}})$

$=5\left(2+\frac{12}{5}\right)=22$ 답 ②

17 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\log_5 a+\log_5 b=6$, $\log_5 a\cdot\log_5 b=2$

$\therefore \log_a b+\log_b a$

$=\frac{\log_5 b}{\log_5 a}+\frac{\log_5 a}{\log_5 b}$

$=\frac{(\log_5 a)^2+(\log_5 b)^2}{\log_5 a\cdot\log_5 b}$

$=\frac{(\log_5 a+\log_5 b)^2-2\log_5 a\cdot\log_5 b}{\log_5 a\cdot\log_5 b}$

$=\frac{6^2-2\cdot2}{2}=16$ 답 16

이차방정식
$ax^2+bx+c=0$의 두 근
을 α, β라 하면
$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$,
$\alpha\beta=\frac{c}{a}$

18 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=9$, $\alpha\beta=1$

$\therefore \log_{\alpha+\beta}\alpha+\log_{\alpha+\beta}3\beta=\log_{\alpha+\beta}3\alpha\beta$

$=\log_9(3\cdot1)$

$=\log_{3^2}3=\frac{1}{2}$ 답 ②

04 상용로그

Lecture 08 상용로그

26쪽

1-1 (1) $\log 1000=\log 10^3=3$

(2) $\log\frac{1}{100}=\log 10^{-2}=-2$

(3) $\log\sqrt[5]{10^2}=\log 10^{\frac{2}{5}}=\frac{2}{5}$

(4) $\log 10\sqrt{10}=\log 10^{\frac{3}{2}}=\frac{3}{2}$

답 (1) 3 (2) -2 (3) $\frac{2}{5}$ (4) $\frac{3}{2}$

n이 실수일 때,
$\log 10^n=n$

$10\sqrt{10}=10\cdot10^{\frac{1}{2}}=10^{\frac{3}{2}}$

1-2 (1) $\log 10+\log 0.001=\log 10+\log 10^{-3}$

$=1-3=-2$

(2) $\log 600-\log 6=\log\frac{600}{6}=\log 100$

$=\log 10^2=2$

(3) $\log\sqrt[3]{10}-\log\frac{1}{\sqrt[3]{10^2}}=\log 10^{\frac{1}{3}}-\log 10^{-\frac{2}{3}}$

$=\frac{1}{3}-\left(-\frac{2}{3}\right)=1$

(4) $\log 100\sqrt{10}+\log\sqrt{10}=\log 10^{\frac{5}{2}}+\log 10^{\frac{1}{2}}$

$=\frac{5}{2}+\frac{1}{2}=3$

답 (1) -2 (2) 2 (3) 1 (4) 3

$100\sqrt{10}=10^2\cdot 10^{\frac{1}{2}}=10^{\frac{5}{2}}$

2-1 답 (1) 0.6274 (2) 0.6365

2-2 (1) $\log 43.5=\log(4.35\times 10)$
$=\log 4.35+\log 10$
$=0.6385+1$
$=1.6385$

(2) $\log 0.0416=\log(4.16\times 10^{-2})$
$=\log 4.16+\log 10^{-2}$
$=0.6191-2$
$=-1.3809$

답 (1) 1.6385 (2) -1.3809

쌤 한마디

$\log a=k$임을 이용하여 상용로그의 값을 구할 때에는 진수를 $a\times 10^n$ $(1\le a<10,\ n$은 정수$)$ 꼴로 변형한다.

$\log(a\times 10^n)=\log a+\log 10^n=k+n$

기본+표준 유형 Q+Q

27쪽

01 ① $\log 4=\log 2^2=2\log 2$
$=2\times 0.3010=0.6020$

② $\log\frac{1}{8}=\log 2^{-3}=-3\log 2$
$=-3\times 0.3010=-0.9030$

③ $\log 16=\log 2^4=4\log 2$
$=4\times 0.3010=1.2040$

④ $\log 40=\log(2^2\cdot 10)=2\log 2+\log 10$
$=2\times 0.3010+1=1.6020$

⑤ $\log 0.2=\log\frac{2}{10}=\log 2-\log 10$
$=0.3010-1=-0.6990$

답 ④

02 $\log 5+\log 18=\log(2\cdot 3^2\cdot 5)=\log(3^2\cdot 10)$
$=\log 3^2+\log 10=2\log 3+1$
$=2\times 0.4771+1$
$=1.9542$

답 1.9542

03 $\log 5290=\log(5.29\times 10^3)=\log 5.29+\log 10^3$
$=0.7235+3=3.7235$

이므로 $a=3.7235$

$\log b=-0.2765=-1+0.7235$
$=\log 10^{-1}+\log 5.29=\log(10^{-1}\times 5.29)$
$=\log 0.529$

이므로 $b=0.529$

$\therefore a-b=3.1945$

답 3.1945

04 $\log 2.72=0.4346$

$\log\sqrt{2.54}=\frac{1}{2}\log 2.54=\frac{1}{2}\times 0.4048=0.2024$

$\therefore \log 2.72+\log\sqrt{2.54}=0.4346+0.2024$
$=0.6370$

답 ③

05 $\log x=1.7973=1+0.7973$
$=\log 10+\log 6.27$
$=\log(10\times 6.27)$
$=\log 62.7$

$\therefore x=62.7$

답 62.7

06 $H=50$을 $M=\log H+5.9$에 대입하면

$M=\log 50+5.9$
$=\log(5\cdot 10)+5.9$
$=\log 5+\log 10+5.9$
$=0.7+1+5.9=7.6$

따라서 구하는 지진의 규모는 7.6이다.

답 7.6

07 $t=15$일 때 $P=P_1$이므로

$\log P_1=8.11-\frac{1750}{15+235}=1.11$

$\therefore P_1=10^{1.11}$

$t=45$일 때 $P=P_2$이므로

$\log P_2=8.11-\frac{1750}{45+235}=1.86$

$\therefore P_2=10^{1.86}$

따라서 $\frac{P_2}{P_1}=\frac{10^{1.86}}{10^{1.11}}=10^{0.75}=10^{\frac{3}{4}}$이므로

$k=\frac{3}{4}$

답 ⑤

$1.86-1.11=0.75$

08 (2) $A\left(1+\frac{a}{100}\right)^6=2A$이므로

$\left(1+\frac{a}{100}\right)^6=2$

양변에 상용로그를 취하면

$6\log\left(1+\frac{a}{100}\right)=\log 2$

$\log\left(1+\frac{a}{100}\right)=\frac{1}{6}\log 2=\frac{1}{6}\times 0.3=0.05$

이때 $\log 1.12=0.05$이므로

$1+\frac{a}{100}=1.12,\quad \frac{a}{100}=0.12$

$\therefore a=12$

따라서 생산량은 매년 12 %씩 증가하였다.

답 (1) $A\left(1+\frac{a}{100}\right)^6$ (2) 12 %

$\left(1+\frac{a}{100}\right)^6$을 직접 계산하기 어려우므로 양변에 상용로그를 취하여 지수 6을 없앤다.

09 처음 빛의 밝기를 A, 통과시킨 유리판의 장수를 n이라 하면

$A\left(1-\frac{1}{4}\right)^n=\frac{1}{9}A \qquad \therefore \left(\frac{3}{4}\right)^n=\frac{1}{9}$

양변에 상용로그를 취하면

$n\log\frac{3}{4}=\log\frac{1}{9}$

$n(\log 3-\log 4)=-\log 9$

$n(\log 3-2\log 2)=-2\log 3$

$n(0.48-2\times 0.3)=-2\times 0.48$

$\therefore n=\frac{-0.96}{-0.12}=8$

따라서 8장의 유리판을 통과시켜야 한다. 답 ③

중단원 마무리
29쪽

01 전략 로그의 정의를 이용하여 주어진 등식을 $a^x=N$ 꼴로 변형한다.

풀이 $\log_a 5=\frac{3}{2}$에서 $a^{\frac{3}{2}}=5$

$a^{\frac{3}{2}}=5$의 양변을 네제곱하면

$(a^{\frac{3}{2}})^4=5^4$ $\therefore a^6=625$ 답 ⑤

02 전략 (밑)>0, (밑)$\neq 1$, (진수)>0임을 이용한다.

풀이 밑의 조건에서 $a-1>0$, $a-1\neq 1$

$a>1$, $a\neq 2$

$\therefore 1<a<2$ 또는 $a>2$ …… ㉠ ··· ❶

진수의 조건에서

$ax^2+2ax+7>0$

모든 실수 x에 대하여 위의 부등식이 성립해야 하므로 이차방정식 $ax^2+2ax+7=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=a^2-7a<0$, $a(a-7)<0$

$\therefore 0<a<7$ …… ㉡ ··· ❷

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$1<a<2$ 또는 $2<a<7$

따라서 정수 a는 3, 4, 5, 6의 4개이다. ··· ❸

답 4

단계	채점 기준	비율
❶	밑의 조건을 만족시키는 a의 값의 범위를 구할 수 있다.	30 %
❷	진수의 조건을 만족시키는 a의 값의 범위를 구할 수 있다.	50 %
❸	정수 a의 개수를 구할 수 있다.	20 %

쌤 한마디

이차부등식이 항상 성립할 조건

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 D라 할 때, 모든 실수 x에 대하여

① $ax^2+bx+c>0$이 성립한다. ⇨ $a>0$, $D<0$

② $ax^2+bx+c\geq 0$이 성립한다. ⇨ $a>0$, $D\leq 0$

③ $ax^2+bx+c<0$이 성립한다. ⇨ $a<0$, $D<0$

④ $ax^2+bx+c\leq 0$이 성립한다. ⇨ $a<0$, $D\leq 0$

Q BOX

㉠에 의하여 $a\neq 0$이므로 이차부등식 $ax^2+2ax+7>0$이 항상 성립할 조건만 생각한다.

03 전략 로그의 정의를 이용하여 (가), (나)에 알맞은 것을 구한다.

풀이 $\log_a x=r$로 놓으면 로그의 정의에 의하여 $x=a^r$이므로

$x^n=(a^r)^n=\boxed{a^{nr}}$

따라서 $x^n=a^{nr}$에서 로그의 정의에 의하여

$\log_a x^n=\boxed{nr}$

이므로 $\log_a x^n=n\log_a x$

$\therefore$ (가) a^{nr} (나) nr 답 ③

04 전략 로그의 성질을 이용하여 a, b, c 사이의 관계식을 구한다.

풀이 $\log_b(a+c)+\log_b(a-c)=2$에서

$\log_b(a+c)(a-c)=2$

$\therefore \log_b(a^2-c^2)=2$

즉 $b^2=a^2-c^2$이므로 $a^2=b^2+c^2$

따라서 주어진 조건을 만족시키는 삼각형은 빗변의 길이가 a인 직각삼각형이다. 답 ④

05 전략 로그의 밑의 변환을 이용하여 로그의 밑을 통일한다.

풀이 $\frac{1}{\log_4 18}+\frac{2}{\log_9 18}=\log_{18}4+2\log_{18}9$

$=\log_{18}2^2+\log_{18}9^2$

$=\log_{18}(2\cdot 9)^2=\log_{18}18^2$

$=2\log_{18}18=2$ 답 ②

다른 풀이 $\frac{1}{\log_4 18}+\frac{2}{\log_9 18}=\frac{1}{\frac{\log 18}{\log 4}}+\frac{2}{\frac{\log 18}{\log 9}}$

$=\frac{\log 4}{\log 18}+\frac{2\log 9}{\log 18}$

$=\frac{2\log 2+2\log 9}{\log 18}$

$=\frac{2(\log 2+\log 9)}{\log 18}$

$=\frac{2\log 18}{\log 18}=2$

06 전략 $\log_b 16$을 밑이 a인 로그로 변형한다.

풀이 $\log_b 16=\frac{\log_a 16}{\log_a b}=\frac{\log_a 2^4}{\log_a b}=\frac{4\log_a 2}{\log_a b}$

즉 $\frac{4\cdot 6}{\log_a b}=-3$이므로

$\log_a b=-8$ ··· ❶

$\therefore \log_a 8b=\log_a 8+\log_a b$

$=\log_a 2^3+\log_a b$

$=3\log_a 2+\log_a b$

$=3\cdot 6+(-8)=10$ ··· ❷

답 10

단계	채점 기준	비율
❶	$\log_a b$의 값을 구할 수 있다.	60 %
❷	$\log_a 8b$의 값을 구할 수 있다.	40 %

07 전략 두 점을 지나는 직선이 원점을 지날 때, 두 점과 원점은 한 직선 위에 있음을 이용한다.

풀이 $A(0,\ 0)$, $B(2,\ \log_4 a)$, $C(3,\ \log_2 b)$라 하면 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으므로 직선 AB의 기울기와 직선 AC의 기울기가 같다.

즉 $\dfrac{\log_4 a}{2}=\dfrac{\log_2 b}{3}$이므로

$$\dfrac{\frac{1}{2}\log_2 a}{2}=\dfrac{\log_2 b}{3},\qquad \dfrac{1}{4}\log_2 a=\dfrac{1}{3}\log_2 b$$

$$\dfrac{\log_2 b}{\log_2 a}=\dfrac{3}{4}\qquad \therefore \log_a b=\dfrac{3}{4}$$

답 ③

다른 풀이 두 점 $(2,\ \log_4 a)$, $(3,\ \log_2 b)$를 지나는 직선의 방정식은

$$y-\log_2 b=\dfrac{\log_2 b-\log_4 a}{3-2}(x-3)$$

이 직선이 원점을 지나므로

$$-\log_2 b=(\log_2 b-\log_4 a)\cdot(-3)$$

$$3\log_4 a=2\log_2 b,\qquad \dfrac{3}{2}\log_2 a=2\log_2 b$$

$$\dfrac{\log_2 b}{\log_2 a}=\dfrac{3}{4}\qquad \therefore \log_a b=\dfrac{3}{4}$$

두 점 $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$를 지나는 직선의 방정식은

$$y-y_1=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

(단, $x_1\neq x_2$)

$x=0$, $y=0$을 대입한다.

쌤 한마디

세 점이 한 직선 위에 있을 조건

세 점 $A(x_1,\ y_1)$, $B(x_2,\ y_2)$, $C(x_3,\ y_3)$이 한 직선 위에 있다.

⇔ (직선 AB의 기울기)=(직선 BC의 기울기)
=(직선 CA의 기울기)

⇔ $\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y_3-y_2}{x_3-x_2}=\dfrac{y_1-y_3}{x_1-x_3}$
(단, $x_1\neq x_2$, $x_2\neq x_3$, $x_3\neq x_1$)

08 전략 로그의 여러 가지 성질을 이용한다.

풀이 ㄱ. $\log_2 5\cdot\log_5 3\cdot\log_3 8=\log_2 5\cdot\log_5 3\cdot\log_3 2^3$
$=\log_2 5\cdot\log_5 3\cdot 3\log_3 2$
$=3$

$\log_2 5\cdot\log_5 3\cdot 3\log_3 2$
$=3\cdot\log_2 5\cdot\log_5 3\cdot\log_3 2$
$=3\cdot 1$
$=3$

ㄴ. $(\log_3 72-\log_3 2)\cdot\log_6 27=\log_3\dfrac{72}{2}\cdot\log_6 27$
$=\log_3 36\cdot\log_6 27$
$=\log_3 6^2\cdot\log_6 3^3$
$=2\log_3 6\cdot 3\log_6 3=6$

ㄷ. $\log_5(\log_2 3)+\log_5(\log_3 2)=\log_5(\log_2 3\cdot\log_3 2)$
$=\log_5 1=0$

이상에서 옳은 것은 ㄴ뿐이다. 답 ②

09 전략 로그의 밑을 5로 통일한 후 로그의 성질을 이용한다.

풀이 $\log_2 5=a$에서

$$\dfrac{1}{\log_5 2}=a\qquad \therefore \log_5 2=\dfrac{1}{a}$$

$\therefore \log_5 12=\log_5(2^2\cdot 3)=\log_5 2^2+\log_5 3$
$=2\log_5 2+\log_5 3=\dfrac{2}{a}+b$

답 ②

10 전략 먼저 a, b를 각각 로그를 이용하여 나타낸다.

풀이 $7^a=4$에서 $\log_7 4=a$

$\log_7 2^2=a$, $2\log_7 2=a$

$\therefore \log_7 2=\dfrac{a}{2}$

$7^b=5$에서 $\log_7 5=b$

$\therefore \log_{40}50=\dfrac{\log_7 50}{\log_7 40}=\dfrac{\log_7(2\cdot 5^2)}{\log_7(2^3\cdot 5)}$
$=\dfrac{\log_7 2+\log_7 5^2}{\log_7 2^3+\log_7 5}=\dfrac{\log_7 2+2\log_7 5}{3\log_7 2+\log_7 5}$
$=\dfrac{\frac{a}{2}+2b}{3\cdot\frac{a}{2}+b}=\dfrac{a+4b}{3a+2b}$

$$\dfrac{\frac{a}{2}+2b}{3\cdot\frac{a}{2}+b}=\dfrac{\frac{a+4b}{2}}{\frac{3a+2b}{2}}=\dfrac{a+4b}{3a+2b}$$

답 $\dfrac{a+4b}{3a+2b}$

11 전략 로그의 성질을 이용하여 주어진 등식의 좌변을 정리한다.

풀이 $\log_a a^3b^4=\log_a a^3+\log_a b^4=3+4\log_a b$

이므로 $3+4\log_a b=5$

$4\log_a b=2\qquad \therefore \log_a b=\dfrac{1}{2}$

$\therefore \log_b a=\dfrac{1}{\log_a b}=2$

답 2

다른 풀이 $\log_a a^3b^4=5$에서 $a^3b^4=a^5$

$a^2=b^4\qquad \therefore a=b^2\ (\because a>1,\ b>1)$

$\therefore \log_b a=\log_b b^2=2$

12 전략 $\log_a b=\dfrac{\log_b c}{2}=\dfrac{\log_c a}{4}=k$로 놓고 로그의 여러 가지 성질을 이용하여 k의 값을 구한다.

풀이 $\log_a b=\dfrac{\log_b c}{2}=\dfrac{\log_c a}{4}=k$ (k는 실수)로 놓으면

$\log_a b=k$, $\log_b c=2k$, $\log_c a=4k$

이때 $\log_a b\cdot\log_b c\cdot\log_c a=1$이므로

$k\cdot 2k\cdot 4k=1$

$k^3=\dfrac{1}{8}\qquad \therefore k=\dfrac{1}{2}\ (\because k$는 실수)

$\therefore \log_a b+\log_b c+\log_c a=k+2k+4k=7k$
$=7\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{7}{2}$

답 ①

13 전략 정수 n에 대하여 $n<\log_a b<n+1$이면 $\log_a b$의 정수 부분은 n임을 이용한다.

풀이 $\log_2 32<\log_2 58<\log_2 64$에서

$5<\log_2 58<6$

이므로 $y=5$

$\log_2 58=5.\cdots$에서 $\log_2 58$의 정수 부분은 5이다.

$\therefore 2^x+2^y=2^{\log_2 58}+2^5$
$=58+32=90$

답 ④

14 전략 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 식의 값을 구한다.

풀이 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=18$, $\alpha\beta=6$

$\therefore \log_2(\alpha+\beta)-2\log_2\alpha\beta$

$=\log_2 18-2\log_2 6=\log_2 18-\log_2 6^2$

$=\log_2\frac{18}{36}=\log_2\frac{1}{2}=\log_2 2^{-1}=-1$ 　답 ⑤

15 전략 $\log A=k$일 때, $\log A^n=nk$임을 이용한다.

풀이 $\log x^3=0.9$에서

$3\log x=0.9$ 　$\therefore \log x=0.3$ ⋯ ❶

$\therefore \log\sqrt[3]{x^2}+\log x^6=\log x^{\frac{2}{3}}+\log x^6$

$=\frac{2}{3}\log x+6\log x$

$=\frac{20}{3}\log x$

$=\frac{20}{3}\times 0.3=2$ ⋯ ❷

답 2

단계	채점 기준	비율
❶	$\log x$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷	$\log\sqrt[3]{x^2}+\log x^6$의 값을 구할 수 있다.	70 %

16 전략 $\log A=k$일 때, $\log(A\times 10^n)=k+n$임을 이용한다.

풀이 $\log 82.4^2=2\log 82.4=2\log(8.24\times 10)$

$=2(0.9159+1)=3.8318$ 　답 3.8318

17 전략 P_A, P_B를 각각 E_A, E_B에 대한 식으로 나타낸 후 P_A-P_B의 값을 구한다.

풀이 원본 사진 A를 압축했을 때 최대 신호 대 잡음비가 P_A, 평균제곱오차가 E_A이므로

$P_A=20\log 255-10\log E_A$

원본 사진 B를 압축했을 때 최대 신호 대 잡음비가 P_B, 평균제곱오차가 E_B이므로

$P_B=20\log 255-10\log E_B$

이때 $E_B=100E_A$이므로

$P_A-P_B=(20\log 255-10\log E_A)$

$-(20\log 255-10\log E_B)$

$=-10\log E_A+10\log E_B$

$=10(\log E_B-\log E_A)$

$=10\log\frac{E_B}{E_A}=10\log\frac{100E_A}{E_A}$

$=10\log 10^2=20$ 　답 ③

18 전략 A가 1분마다 a배씩 증가할 때, n분 후에는 $A\cdot a^n$이 된다.

풀이 10마리의 세균을 5시간, 즉 300분 동안 배양하면 전체 세균은 $10\cdot 7^{10}$마리이다.

$300\div 30=10$

$10\cdot 7^{10}$에 상용로그를 취하면

$\log(10\cdot 7^{10})=\log 10+\log 7^{10}=1+10\log 7$

$=1+10\times 0.85=1+8.5=9.5$

$\therefore 10\cdot 7^{10}=10^{9.5}$

따라서 5시간 후 세균은 $10^{9.5}$마리이므로

$k=9.5$ 　답 9.5

QBOX

03 지수함수

05 지수함수

Lecture 09 지수함수 　32쪽

1-1 답 ㄱ, ㄷ

1-2 (1) $f(3)=2^3=8$

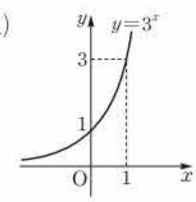
(2) $f(-2)=2^{-2}=\frac{1}{4}$

(3) $f(-5)f(6)=2^{-5}\cdot 2^6=2^1=2$

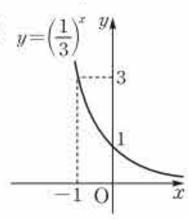
답 (1) 8 　(2) $\frac{1}{4}$ 　(3) 2

$a^0=1$, $a^1=a$이므로 지수함수 $y=a^x(a>0$, $a\neq 1)$의 그래프는 두 점 $(0, 1)$, $(1, a)$를 항상 지난다.

2-1 답 (1)



(2)



참고 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$의 그래프는 $y=3^x$의 그래프와 y축에 대하여 대칭이다.

2-2 ㄱ. 치역은 양의 실수 전체의 집합이다.

ㄷ. 그래프의 점근선의 방정식은 $y=0$이다.

이상에서 옳은 것은 ㄴ뿐이다. 　답 ㄴ

Lecture 10 지수함수의 그래프의 평행이동과 대칭이동 　33쪽

$y=\left(\frac{1}{5}\right)^x$에 x 대신 $x-4$, y 대신 $y+3$을 대입한다.

1-1 (1) $y+3=\left(\frac{1}{5}\right)^{x-4}$에서

$y=\left(\frac{1}{5}\right)^{x-4}-3$

(2) $-y=\left(\frac{1}{5}\right)^x$에서 　$y=-\left(\frac{1}{5}\right)^x$

(3) $y=\left(\frac{1}{5}\right)^{-x}$에서 　$y=(5^{-1})^{-x}$

$\therefore y=5^x$

(4) $-y=\left(\frac{1}{5}\right)^{-x}$에서 　$-y=(5^{-1})^{-x}$

$\therefore y=-5^x$

답 (1) $y=\left(\frac{1}{5}\right)^{x-4}-3$ 　(2) $y=-\left(\frac{1}{5}\right)^x$

(3) $y=5^x$ 　(4) $y=-5^x$

쌤 한마디

방정식 $f(x, y)=0$이 나타내는 도형을

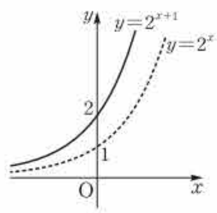
① x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 도형의 방정식
 ⇨ $f(x-m, y-n)=0$

② x축에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식
 ⇨ $f(x, -y)=0$

③ y축에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식
 ⇨ $f(-x, y)=0$

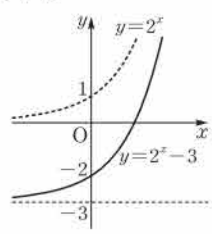
④ 원점에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식
 ⇨ $f(-x, -y)=0$

1-2 (1) $y=2^{x+1}$의 그래프는 $y=2^x$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



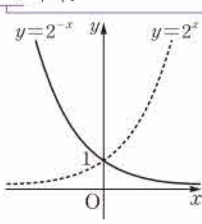
따라서 치역은 $\{y|y>0\}$이고, 점근선의 방정식은 $y=0$이다.

(2) $y=2^x-3$의 그래프는 $y=2^x$의 그래프를 y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



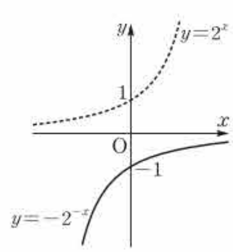
따라서 치역은 $\{y|y>-3\}$이고, 점근선의 방정식은 $y=-3$이다.

(3) $y=2^{-x}$의 그래프는 $y=2^x$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



따라서 치역은 $\{y|y>0\}$이고, 점근선의 방정식은 $y=0$이다.

(4) $y=-2^{-x}$의 그래프는 $y=2^x$의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



따라서 치역은 $\{y|y<0\}$이고, 점근선의 방정식은 $y=0$이다.

답 풀이 참조

1-3 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 6만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y=\left(\frac{1}{3}\right)^{x+2}+6$$

이 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$$y=\left(\frac{1}{3}\right)^{-x+2}+6 \qquad \therefore\ y=3^{x-2}+6$$

답 $y=3^{x-2}+6$

Q BOX

(밑)>1인 경우

0<(밑)<1인 경우

$y=2^x$의 그래프의 점근선의 방정식이 $y=0$이므로 직선 $y=0$을 y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$y+3=0$

$\therefore\ y=-3$

$\left(\frac{1}{3}\right)^{-x+2}=(3^{-1})^{-x+2}$

$=3^{x-2}$

Lecture 11 지수함수의 최대·최소

34쪽

1-1 (1) 함수 $y=2^x$은 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하므로 $1\le x\le 5$에서

$x=5$일 때 최대이고, 최댓값은

$2^5=32$

$x=1$일 때 최소이고, 최솟값은

$2^1=2$

(2) 함수 $y=10^x$은 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하므로 $-1\le x\le 2$에서

$x=2$일 때 최대이고, 최댓값은

$10^2=100$

$x=-1$일 때 최소이고, 최솟값은

$10^{-1}=\frac{1}{10}$

답 (1) 최댓값: 32, 최솟값: 2

(2) 최댓값: 100, 최솟값: $\frac{1}{10}$

1-2 (1) 함수 $y=\left(\frac{1}{5}\right)^x$은 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로 $-2\le x\le 1$에서

$x=-2$일 때 최대이고, 최댓값은

$\left(\frac{1}{5}\right)^{-2}=5^2=25$

$x=1$일 때 최소이고, 최솟값은

$\left(\frac{1}{5}\right)^1=\frac{1}{5}$

(2) 함수 $y=\left(\frac{2}{3}\right)^x$은 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로 $0\le x\le 3$에서

$x=0$일 때 최대이고, 최댓값은

$\left(\frac{2}{3}\right)^0=1$

$x=3$일 때 최소이고, 최솟값은

$\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{8}{27}$

답 (1) 최댓값: 25, 최솟값: $\frac{1}{5}$

(2) 최댓값: 1, 최솟값: $\frac{8}{27}$

1-3 (1) 함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x-3$은 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로 $-3\le x\le 0$에서

$x=-3$일 때 최대이고, 최댓값은

$\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}-3=8-3=5$

$x=0$일 때 최소이고, 최솟값은

$\left(\frac{1}{2}\right)^0-3=1-3=-2$

(2) 함수 $y=3^{x-5}+1$은 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하므로 $4\le x\le 8$에서

$x=8$일 때 최대이고, 최댓값은

$3^{8-5}+1=27+1=28$

$x=4$일 때 최소이고, 최솟값은

$$3^{4-5}+1=\frac{1}{3}+1=\frac{4}{3}$$

답 (1) 최댓값: 5, 최솟값: -2

(2) 최댓값: 28, 최솟값: $\frac{4}{3}$

기본+표준 유형 Q+Q

L 35쪽

01 $f(0)=\left(\frac{1}{2}\right)^k=4$이므로

$\left(\frac{1}{2}\right)^k=\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$ $\quad\therefore k=-2$

따라서 $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-2}$이므로

$f(-3)=\left(\frac{1}{2}\right)^{-3-2}=\left(\frac{1}{2}\right)^{-5}=32$

답 32

02 $f(0)=5^n=6$이므로 $f(2)=5^{2m+n}=24$에서

$6\cdot5^{2m}=24,\quad 5^{2m}=4=2^2$

$\therefore 5^m=2\ (\because 5^m>0)$

$\therefore f(-1)=5^{-m+n}=\frac{5^n}{5^m}=\frac{6}{2}=3$

답 ③

$5^{2m+n}=5^{2m}\cdot5^n$

03 ⑤ $y=\left(\frac{1}{6}\right)^x=6^{-x}$의 그래프는 $y=6^x$의 그래프와 y축에 대하여 대칭이다.

답 ⑤

04 주어진 조건을 만족시키는 함수는 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하는 함수이다. 이때

$f(x)=3^{-x}=\left(\frac{1}{3}\right)^x$, $f(x)=\left(\frac{1}{5}\right)^{-x}=5^x$,

$f(x)=\left(\frac{7}{2}\right)^{-x}=\left(\frac{2}{7}\right)^x$

이므로 주어진 조건을 만족시키는 함수는 ④이다.

답 ④

주어진 함수를 $y=a^x$ 꼴로 변형한 후 $a>1$인 함수를 찾는다.

05 $y=\frac{1}{9}\cdot3^x-4=3^{x-2}-4$의 그래프는 $y=3^x$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $m=2$, $n=-4$이므로

$m-n=6$

답 6

$\frac{1}{9}\cdot3^x=3^{-2}\cdot3^x=3^{x-2}$

06 $y=4^x$의 그래프를 x축의 방향으로 -5만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=4^{x+5}$

이 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$-y=4^{x+5}$ $\quad\therefore y=-4^{x+5}$

$y=-4^{x+5}$의 그래프가 점 $(-3,\ k)$를 지나므로

$k=-4^{-3+5}=-4^2=-16$

답 -16

평행이동과 대칭이동을 연이어 할 때 도형의 이동 순서에 주의한다.

Q BOX

07 $y=2^x$의 그래프는 점 $(0,\ 1)$을 지나므로

$a=1$

점 $(a,\ b)$를 지나므로

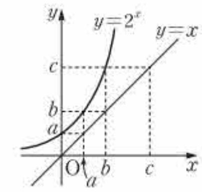
$b=2^a=2^1=2$

점 $(b,\ c)$를 지나므로

$c=2^b=2^2=4$

$\therefore a-b-c=-5$

답 -5



직선 $y=x$ 위의 점의 x좌표와 y좌표가 같음을 이용한다.

08 점 P의 좌표를 $(a,\ 4)$라 하면 점 P가 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$의 그래프 위의 점이므로

$\left(\frac{1}{2}\right)^a=4,\quad \left(\frac{1}{2}\right)^a=\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$ $\quad\therefore a=-2$

$\therefore P(-2,\ 4)$

점 Q의 좌표를 $(b,\ 4)$라 하면 점 Q가 $y=4^x$의 그래프 위의 점이므로

$4^b=4$ $\quad\therefore b=1$

$\therefore Q(1,\ 4)$

$\therefore \overline{PQ}=1-(-2)=3$

답 3

09 $A=\sqrt[4]{3^3}=3^{\frac{3}{4}}$, $B=\sqrt[3]{9}=3^{\frac{2}{3}}$, $C=\left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{4}{3}}=3^{\frac{4}{3}}$

이때 $\frac{2}{3}<\frac{3}{4}<\frac{4}{3}$이고 함수 $y=3^x$은 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하므로

$3^{\frac{2}{3}}<3^{\frac{3}{4}}<3^{\frac{4}{3}}$

$\therefore B<A<C$

답 ②

지수함수를 이용한 수의 대소 비교
① $a>1$일 때, $x_1<x_2$이면 $a^{x_1}<a^{x_2}$
② $0<a<1$일 때, $x_1<x_2$이면 $a^{x_1}>a^{x_2}$

10 $\sqrt[3]{0.5}=\sqrt[3]{\frac{1}{2}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$

$\sqrt[4]{\frac{1}{32}}=\sqrt[4]{\left(\frac{1}{2}\right)^5}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{5}{4}}$

$\sqrt[5]{0.25}=\sqrt[5]{\frac{1}{4}}=\sqrt[5]{\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{5}}$

이때 $\frac{1}{3}<\frac{2}{5}<\frac{5}{4}$이고 함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$은 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로

$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{5}{4}}<\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{5}}<\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$

$\therefore \sqrt[4]{\frac{1}{32}}<\sqrt[5]{0.25}<\sqrt[3]{0.5}$

따라서 가장 큰 수는 $\sqrt[3]{0.5}$, 가장 작은 수는 $\sqrt[4]{\frac{1}{32}}$이다.

답 $\sqrt[3]{0.5}$, $\sqrt[4]{\frac{1}{32}}$

11 함수 $y=5^{x+1}-9$는 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하므로 $-1\le x\le2$에서

$x=2$일 때 최대이고, 최댓값은

$5^{2+1}-9=125-9=116$

$x=-1$일 때 최소이고, 최솟값은

$5^{-1+1}-9=1-9=-8$

따라서 $M=116$, $m=-8$이므로

$M+m=108$ 　　답 108

12 함수 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{x+2}+k$는 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로 $-5\le x\le -1$에서 $x=-5$일 때 최대이고 $x=-1$일 때 최소이다.

즉 $\left(\frac{1}{3}\right)^{-5+2}+k=28$이므로

$27+k=28$ 　　$\therefore k=1$

따라서 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{x+2}+1$이므로 구하는 최솟값은

$\left(\frac{1}{3}\right)^{-1+2}+1=\frac{1}{3}+1=\frac{4}{3}$ 　　답 ④

13 $f(x)=x^2-2x+3$으로 놓으면

$f(x)=(x-1)^2+2$

함수 $y=7^{x^2-2x+3}=7^{f(x)}$은 $f(x)$의 값이 증가하면 y의 값도 증가하므로 $f(x)$가 최소일 때 y는 최솟값을 갖는다.

따라서 $y=7^{f(x)}$은 $f(x)=2$, 즉 $x=1$일 때 최솟값 $7^2=49$를 가지므로

$a=1$, $b=49$

$\therefore a+b=50$ 　　답 50

14 $f(x)=x^2+6x+2$로 놓으면

$f(x)=(x+3)^2-7$

$f(-3)=-7$, $f(1)=9$이므로 $-3\le x\le 1$에서

$-7\le f(x)\le 9$

함수 $y=\left(\frac{1}{4}\right)^{x^2+6x+2}=\left(\frac{1}{4}\right)^{f(x)}$은 $f(x)$의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로

$f(x)=-7$일 때 최대이고, 최댓값은 $\left(\frac{1}{4}\right)^{-7}$

$f(x)=9$일 때 최소이고, 최솟값은 $\left(\frac{1}{4}\right)^{9}$

따라서 구하는 곱은

$\left(\frac{1}{4}\right)^{-7}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{9}=\left(\frac{1}{4}\right)^{2}=\frac{1}{16}$ 　　답 ①

15 $y=9^x-6\cdot 3^x-1=(3^x)^2-6\cdot 3^x-1$

$3^x=t\ (t>0)$로 놓으면 주어진 함수는

$y=t^2-6t-1=(t-3)^2-10$

따라서 y는 $t=3$, 즉 $x=1$일 때 최솟값 -10을 가지므로

$a=1$, $b=-10$

$\therefore a-b=11$ 　　답 ③

Q BOX

$t=3$일 때, $3^x=3$
$\therefore x=1$

16 $y=\left(\frac{1}{4}\right)^{x}-\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}+5=\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{x}\right\}^2-2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{x}+5$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{x}=t$로 놓으면 주어진 함수는

$y=t^2-2t+5=(t-1)^2+4$

이때 $-2\le x\le 3$에서

$\left(\frac{1}{2}\right)^{3}\le\left(\frac{1}{2}\right)^{x}\le\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$ 　　$\therefore \frac{1}{8}\le t\le 4$

따라서 $\frac{1}{8}\le t\le 4$에서 함수 $y=(t-1)^2+4$는

$t=4$일 때 최대이고, 최댓값은

$(4-1)^2+4=13$

$t=1$일 때 최소이고, 최솟값은

$(1-1)^2+4=4$

즉 $M=13$, $m=4$이므로

$M+m=17$ 　　답 17

17 $5^{x+2}>0$, $4\cdot 5^{-x}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$y=5^{x+2}+4\cdot 5^{-x}$

$\ge 2\sqrt{5^{x+2}\cdot 4\cdot 5^{-x}}$

$=2\cdot 10=20$ $\left(\text{단, 등호는 } 5^x=\frac{2}{5}\text{일 때 성립}\right)$

따라서 주어진 함수의 최솟값은 20이다. 　　답 ④

Q BOX

$a>0$, $b>0$일 때,
$\frac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}$
(단, 등호는 $a=b$일 때 성립)

$5^{x+2}=4\cdot 5^{-x}$에서
$(5^x)^2=\frac{4}{25}$
$\therefore 5^x=\frac{2}{5}$
$(\because 5^x>0)$

18 $3^x+3^{-x}=t$로 놓으면 $3^x>0$, $3^{-x}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$t=3^x+3^{-x}\ge 2\sqrt{3^x\cdot 3^{-x}}=2\cdot 1=2$

(단, 등호는 $x=0$일 때 성립)

이때

$9^x+9^{-x}=(3^x+3^{-x})^2-2=t^2-2$

이므로 주어진 함수는

$y=10t-(t^2-2)=-t^2+10t+2$

$=-(t-5)^2+27\ (t\ge 2)$

따라서 주어진 함수는 $t=5$일 때 최댓값 27을 갖는다.

답 27

06 지수함수의 활용

Lecture 12 지수방정식 　　L 38쪽

1-1 (1) $2^x=16$에서 $2^x=2^4$이므로

$x=4$

(2) $25^x=\left(\frac{1}{5}\right)^{4-x}$에서 $5^{2x}=5^{x-4}$이므로

$2x=x-4$ 　　$\therefore x=-4$

답 (1) $x=4$ (2) $x=-4$

Q BOX

$25^x=\left(\frac{1}{5}\right)^{4-x}$에서
$(5^2)^x=(5^{-1})^{4-x}$
$\therefore 5^{2x}=5^{x-4}$

2-1 $3^x=t\ (t>0)$로 놓으면 주어진 방정식은

$\boxed{t^2-t-6}=0$, 　$(t+2)(t-3)=0$

$\therefore t=\boxed{3}\ (\because t>0)$

즉 $3^x=\boxed{3}$이므로 　$x=\boxed{1}$ 　　답 풀이 참조

2-2 (1) $\left(\frac{1}{7}\right)^{2x}-\left(\frac{1}{7}\right)^{x}=0$에서

$\left\{\left(\frac{1}{7}\right)^{x}\right\}^2-\left(\frac{1}{7}\right)^{x}=0$

$\left(\frac{1}{7}\right)^x=t\ (t>0)$로 놓으면

$t^2-t=0,\quad t(t-1)=0$

$\therefore t=1\ (\because t>0)$

즉 $\left(\frac{1}{7}\right)^x=1$이므로 $\left(\frac{1}{7}\right)^x=\left(\frac{1}{7}\right)^0$

$\therefore x=0$

(2) $4^x-3\cdot2^x-4=0$에서

$(2^x)^2-3\cdot2^x-4=0$

$2^x=t\ (t>0)$로 놓으면

$t^2-3t-4=0,\quad (t+1)(t-4)=0$

$\therefore t=4\ (\because t>0)$

즉 $2^x=4$이므로 $2^x=2^2$

$\therefore x=2$

답 (1) $x=0$ (2) $x=2$

3-1 (1) $5^{2x+1}=3^{2x+1}$에서 밑은 다르고 지수는 같으므로

$2x+1=0\quad \therefore x=-\frac{1}{2}$

(2) (i) $x=4$일 때, $4^2=4^2$이므로 등식이 성립한다.

(ii) $x\neq4$일 때, $x-2=0$에서 $x=2$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 근은

$x=2$ 또는 $x=4$

답 (1) $x=-\frac{1}{2}$ (2) $x=2$ 또는 $x=4$

밑이 같거나 지수가 0임을 이용한다.

Lecture 13 지수부등식

39쪽

1-1 (1) $3^x>9$에서 $3^x>3^2$

밑이 1보다 크므로 $x>2$

(2) $\left(\frac{1}{2}\right)^{5x}\le\left(\frac{1}{4}\right)^{x-6}$에서 $\left(\frac{1}{2}\right)^{5x}\le\left(\frac{1}{2}\right)^{2x-12}$

밑이 1보다 작으므로 $5x\ge2x-12$

$3x\ge-12\quad \therefore x\ge-4$

답 (1) $x>2$ (2) $x\ge-4$

$\left(\frac{1}{4}\right)^{x-6}=\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}^{x-6}$
$=\left(\frac{1}{2}\right)^{2x-12}$

1-2 $\frac{1}{64}<4^x\le16$에서 $4^{-3}<4^x\le4^2$

밑이 1보다 크므로 $-3<x\le2$ 답 $-3<x\le2$

2-1 $\left(\frac{1}{5}\right)^x=t\ (t>0)$로 놓으면 주어진 부등식은

$\boxed{t^2-6t+5}<0,\quad (t-1)(t-5)<0$

$\therefore \boxed{1}<t<5$

즉 $\boxed{1}<\left(\frac{1}{5}\right)^x<5$이므로 $\left(\frac{1}{5}\right)^0<\left(\frac{1}{5}\right)^x<\left(\frac{1}{5}\right)^{-1}$

밑이 1보다 작으므로 $\boxed{-1}<x<\boxed{0}$

답 풀이 참조

2-2 (1) $7^{2x}-5\cdot7^x-14\ge0$에서

$(7^x)^2-5\cdot7^x-14\ge0$

$7^x=t\ (t>0)$로 놓으면

$t^2-5t-14\ge0,\quad (t+2)(t-7)\ge0$

$\therefore t\le-2$ 또는 $t\ge7$

그런데 $t>0$이므로 $t\ge7$

즉 $7^x\ge7$에서 밑이 1보다 크므로 $x\ge1$

(2) $\left(\frac{1}{9}\right)^x-10\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^x+9\le0$에서

$\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^x\right\}^2-10\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^x+9\le0$

$\left(\frac{1}{3}\right)^x=t\ (t>0)$로 놓으면

$t^2-10t+9\le0,\quad (t-1)(t-9)\le0$

$\therefore 1\le t\le9$

즉 $1\le\left(\frac{1}{3}\right)^x\le9$에서 $\left(\frac{1}{3}\right)^0\le\left(\frac{1}{3}\right)^x\le\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$

밑이 1보다 작으므로 $-2\le x\le0$

답 (1) $x\ge1$ (2) $-2\le x\le0$

기본+표준 유형 Q+Q

40쪽

01 $3^{-2+x}=9^{x-5}$에서 $3^{-2+x}=3^{2x-10}$

$-2+x=2x-10\quad \therefore x=8$

따라서 $\alpha=8$이므로 $2\alpha=16$ 답 16

02 $(\sqrt{5})^{x^2}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{3x}=\frac{1}{25}$에서

$(5^{\frac{1}{2}})^{x^2}\cdot5^{-3x}=5^{-2},\quad 5^{\frac{1}{2}x^2-3x}=5^{-2}$

즉 $\frac{1}{2}x^2-3x=-2$이므로

$x^2-6x+4=0$

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 주어진 방정식의 모든 실근의 합은 6이다. 답 ④

이차방정식 $x^2-6x+4=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=(-3)^2-4$
$=5>0$
이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.

03 $2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^x-17\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^x+8=0$에서

$2\cdot\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^x\right\}^2-17\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^x+8=0$

$\left(\frac{1}{2}\right)^x=t\ (t>0)$로 놓으면

$2t^2-17t+8=0,\quad (2t-1)(t-8)=0$

$\therefore t=\frac{1}{2}$ 또는 $t=8$

즉 $\left(\frac{1}{2}\right)^x=\frac{1}{2}$ 또는 $\left(\frac{1}{2}\right)^x=8$이므로

$x=1$ 또는 $x=-3$

따라서 구하는 곱은

$1\cdot(-3)=-3$ 답 -3

$\left(\frac{1}{2}\right)^x=8$에서
$\left(\frac{1}{2}\right)^x=\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$
$\therefore x=-3$

04 $36^x-2\cdot6^{x+1}+6=0$에서

$(6^x)^2-12\cdot6^x+6=0$

$6^x=t\ (t>0)$로 놓으면

$t^2-12t+6=0$

이 이차방정식의 두 근은 6^α, 6^β이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$6^{\alpha}\cdot 6^{\beta}=6,\quad 6^{\alpha+\beta}=6$

$\therefore\ \alpha+\beta=1$ 답 ①

쌤 한마디

x에 대한 방정식 $(a^x)^2-pa^x+q=0$ (p, q는 상수)의 두 근이 α, β일 때, $a^x=t$ $(t>0)$로 놓으면 t에 대한 방정식 $t^2-pt+q=0$의 두 근은 a^{α}, a^{β}이다.

05 $5^x=X$, $2^y=Y$ $(X>0,\ Y>0)$로 놓으면 주어진 연립방정식은

$$\begin{cases} X+Y=9 \\ 3X-Y=11 \end{cases}$$

이 연립방정식을 풀면 $X=5,\ Y=4$

즉 $5^x=5$, $2^y=4$이므로 $x=1,\ y=2$

$\therefore\ \alpha\beta=2$ 답 ①

$$\begin{cases} X+Y=9 & \cdots\ ㉠ \\ 3X-Y=11 & \cdots\ ㉡ \end{cases}$$
㉠+㉡을 하면
$4X=20$
$\therefore\ X=5$
$X=5$를 ㉠에 대입하면
$Y=4$

06 $\begin{cases} \left(\frac{1}{3}\right)^x+\left(\frac{1}{3}\right)^y=30 \\ \left(\frac{1}{3}\right)^{x+y}=81 \end{cases}$ 에서 $\begin{cases} \left(\frac{1}{3}\right)^x+\left(\frac{1}{3}\right)^y=30 \\ \left(\frac{1}{3}\right)^x\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^y=81 \end{cases}$

$\left(\frac{1}{3}\right)^x=X$, $\left(\frac{1}{3}\right)^y=Y$ $(X>0,\ Y>0)$로 놓으면 주어진 연립방정식은

$$\begin{cases} X+Y=30 \\ XY=81 \end{cases}$$

이 연립방정식을 풀면

$X=3,\ Y=27$ 또는 $X=27,\ Y=3$

즉 $\left(\frac{1}{3}\right)^x=3$, $\left(\frac{1}{3}\right)^y=27$ 또는 $\left(\frac{1}{3}\right)^x=27$, $\left(\frac{1}{3}\right)^y=3$이므로

$x=-1,\ y=-3$ 또는 $x=-3,\ y=-1$

$\therefore\ \alpha^2+\beta^2=(-1)^2+(-3)^2=10$ 답 10

X, Y는 이차방정식 $t^2-30t+81=0$의 두 근이므로
$(t-3)(t-27)=0$
$\therefore\ t=3$ 또는 $t=27$
$\therefore\ X=3,\ Y=27$ 또는 $X=27,\ Y=3$

07 (i) $x=1$일 때, $1^{13}=1^1$이므로 등식이 성립한다.

(ii) $x\neq 1$일 때, $3x+10=x^2$에서

$x^2-3x-10=0,\quad (x+2)(x-5)=0$

$\therefore\ x=5\ (\because\ x>0)$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 근은

$x=1$ 또는 $x=5$ 답 $x=1$ 또는 $x=5$

08 (i) $x+5=0$, 즉 $x=-5$일 때, $2^0=10^0$이므로 등식이 성립한다.

(ii) $x+5\neq 0$일 때, $x+7=10$에서

$x=3$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 근은

$x=-5$ 또는 $x=3$

이므로 모든 근의 곱은

$-5\cdot 3=-15$ 답 -15

09 $25^x-2\cdot 5^x+k=0$에서

$(5^x)^2-2\cdot 5^x+k=0$

$5^x=t$ $(t>0)$로 놓으면

$t^2-2t+k=0$ …… ㉠

주어진 방정식이 서로 다른 두 실근을 가지려면 이차방정식 ㉠이 서로 다른 두 양의 실근을 가져야 한다.

(i) 이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-1)^2-k>0\quad \therefore\ k<1$

(ii) (두 근의 합)$=2>0$

(iii) (두 근의 곱)$=k>0$

이상에서 $0<k<1$ 답 ③

쌤 한마디

계수가 실수인 이차방정식의 판별식을 D, 두 실근을 α, β라 하면

① 두 근이 모두 양수 $\Longleftrightarrow D\geq 0,\ \alpha+\beta>0,\ \alpha\beta>0$

② 두 근이 모두 음수 $\Longleftrightarrow D\geq 0,\ \alpha+\beta<0,\ \alpha\beta>0$

③ 두 근이 서로 다른 부호 $\Longleftrightarrow \alpha\beta<0$

10 $6^{2x}-6^{x+1}+k=0$에서

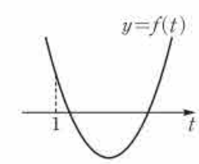
$(6^x)^2-6\cdot 6^x+k=0$

$6^x=t$ $(t>0)$로 놓으면

$t^2-6t+k=0$ …… ㉠

주어진 방정식이 서로 다른 두 개의 양의 실근을 가지려면 이차방정식 ㉠이 $t>1$에서 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

$f(t)=t^2-6t+k$라 하면 이차함수 $y=f(t)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



(i) 이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-3)^2-k>0\quad \therefore\ k<9$

(ii) $f(1)=1-6+k>0$에서

$k>5$

(iii) 이차함수 $y=f(t)$의 그래프의 축의 방정식은 $t=3$이고 $3>1$이다.

이상에서 $5<k<9$

따라서 자연수 k는 6, 7, 8의 3개이다. 답 3

쌤 한마디

이차방정식의 근의 분리

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ $(a>0)$의 판별식을 D라 하고, $f(x)=ax^2+bx+c$라 하면

① 두 근이 모두 p보다 크다.

$\Longleftrightarrow D\geq 0,\ f(p)>0,\ -\frac{b}{2a}>p$

② 두 근이 모두 p보다 작다.

$\Longleftrightarrow D\geq 0,\ f(p)>0,\ -\frac{b}{2a}<p$

③ 두 근 사이에 p가 있다.

$\Longleftrightarrow f(p)<0$

11 $\left(\frac{1}{27}\right)^{-x+2}<\left(\frac{1}{3}\right)^{7-2x}$에서

$\left(\frac{1}{3}\right)^{-3x+6}<\left(\frac{1}{3}\right)^{7-2x}$

밑이 1보다 작으므로 $\quad -3x+6>7-2x$

$\therefore x<-1$ 답 ①

12 $4^{2x-1}\ge\left(\frac{1}{2}\right)^{-x^2+x-2}$에서 $\quad 2^{4x-2}\ge 2^{x^2-x+2}$

밑이 1보다 크므로 $\quad 4x-2\ge x^2-x+2$

$x^2-5x+4\le 0,\quad (x-1)(x-4)\le 0$

$\therefore 1\le x\le 4$

따라서 정수 x는 1, 2, 3, 4이므로 구하는 합은

$1+2+3+4=10$ 답 10

13 $3^{2x+1}-28\cdot 3^x+9\le 0$에서

$3\cdot(3^x)^2-28\cdot 3^x+9\le 0$

$3^x=t\ (t>0)$로 놓으면

$3t^2-28t+9\le 0,\quad (3t-1)(t-9)\le 0$

$\therefore \frac{1}{3}\le t\le 9$

즉 $\frac{1}{3}\le 3^x\le 9$이므로 $\quad 3^{-1}\le 3^x\le 3^2$

밑이 1보다 크므로 $\quad -1\le x\le 2$

따라서 정수 x는 -1, 0, 1, 2의 4개이다. 답 4

14 $\left(\frac{1}{25}\right)^x-9\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^x+14<0$에서

$\left\{\left(\frac{1}{5}\right)^x\right\}^2-9\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^x+14<0$

$\left(\frac{1}{5}\right)^x=t\ (t>0)$로 놓으면

$t^2-9t+14<0,\quad (t-2)(t-7)<0$

$\therefore 2<t<7$

즉 $2<\left(\frac{1}{5}\right)^x<7$이고 밑이 1보다 작으므로

$\left(\frac{1}{5}\right)^\alpha=7,\ \left(\frac{1}{5}\right)^\beta=2$

$\therefore \left(\frac{1}{5}\right)^\alpha-\left(\frac{1}{5}\right)^\beta=5$ 답 5

밑이 1보다 작으므로 $\alpha<x<\beta$에서
$\left(\frac{1}{5}\right)^\beta<\left(\frac{1}{5}\right)^x<\left(\frac{1}{5}\right)^\alpha$
$\therefore \left(\frac{1}{5}\right)^\alpha=7,$
$\left(\frac{1}{5}\right)^\beta=2$

15 (i) $x=1$일 때, $1^7\ge 1^3$이므로 부등식이 성립한다.

(ii) $0<x<1$일 때, 밑이 1보다 작으므로

$-x+8\le 3x,\quad 4x\ge 8\quad \therefore x\ge 2$

그런데 $0<x<1$이므로 부등식을 만족시키는 x가 존재하지 않는다.

(iii) $x>1$일 때, 밑이 1보다 크므로

$-x+8\ge 3x,\quad 4x\le 8\quad \therefore x\le 2$

그런데 $x>1$이므로 $\quad 1<x\le 2$

이상에서 주어진 부등식의 해는

$1\le x\le 2$ 답 $1\le x\le 2$

16 (i) $x=1$일 때, $1^{-14}<1^2$이므로 부등식이 성립하지 않는다.

(ii) $0<x<1$일 때, 밑이 1보다 작으므로

$x^2-15>2x,\quad x^2-2x-15>0$

$(x+3)(x-5)>0\quad \therefore x<-3$ 또는 $x>5$

그런데 $0<x<1$이므로 부등식을 만족시키는 x가 존재하지 않는다.

(iii) $x>1$일 때, 밑이 1보다 크므로

$x^2-15<2x,\quad x^2-2x-15<0$

$(x+3)(x-5)<0\quad \therefore -3<x<5$

그런데 $x>1$이므로 $\quad 1<x<5$

이상에서 주어진 부등식의 해는

$1<x<5$

따라서 $\alpha=1,\ \beta=5$이므로

$\beta-\alpha=4$ 답 ①

17 $9^x-2\cdot 3^x+k>0$에서

$(3^x)^2-2\cdot 3^x+k>0$

$3^x=t\ (t>0)$로 놓으면 $\quad t^2-2t+k>0$

$\therefore (t-1)^2+k-1>0$

이 부등식이 $t>0$인 모든 실수 t에 대하여 성립하려면

$k-1>0\quad \therefore k>1$ 답 $k>1$

$t>0$에서 $(t-1)^2+k-1$은 $t=1$일 때 최솟값 $k-1$을 갖는다.

18 $16^x+4^{x+1}+k\ge 0$에서

$(4^x)^2+4\cdot 4^x+k\ge 0$

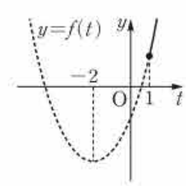
$4^x=t\ (t>0)$로 놓으면 $x\ge 0$일 때 $t\ge 1$이고

$t^2+4t+k\ge 0$

$f(t)=t^2+4t+k$라 하면

$f(t)=(t+2)^2+k-4$

$t\ge 1$에서 $f(t)\ge 0$이어야 하므로 $y=f(t)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 한다.



즉 $f(1)\ge 0$이어야 하므로

$1+4+k\ge 0$

$\therefore k\ge -5$

따라서 실수 k의 최솟값은 -5이다. 답 -5

$t\ge 1$에서 $f(t)$는 $t=1$일 때 최소이다.

19 15마리의 세균이 3시간 후 120마리가 되므로

$15a^3=120,\quad a^3=8$

$\therefore a=2$

따라서 15마리의 세균이 x시간 후 $15\cdot 2^x$마리가 되므로

$15\cdot 2^x=1920,\quad 2^x=128=2^7$

$\therefore x=7$

즉 15마리였던 세균은 처음으로부터 7시간 후에 1920마리가 된다. 답 7시간

20 이 사람의 눈이 어두워지기 직전에 지각한 빛의 세기를 a라 하면 0.25초마다 직전의 빛의 세기의 $\frac{2}{3}$가 줄어들므로 t초 후 지각한 빛의 세기는

$a\left(1-\frac{2}{3}\right)^{4t}=a\left(\frac{1}{3}\right)^{4t}$

0.25초 후의 빛의 세기는
$a\left(1-\frac{2}{3}\right)$
0.5초 후의 빛의 세기는
$a\left(1-\frac{2}{3}\right)^2$
1초 후의 빛의 세기는
$a\left(1-\frac{2}{3}\right)^4$
t초 후의 빛의 세기는
$a\left(1-\frac{2}{3}\right)^{4t}$

이 사람의 눈이 지각하는 빛의 세기가 어두워지기 직전에 지각한 빛의 세기의 $\frac{1}{729}$ 이하가 되려면

$a\left(\frac{1}{3}\right)^{4t} \le \frac{1}{729}a \quad \therefore \left(\frac{1}{3}\right)^{4t} \le \left(\frac{1}{3}\right)^6$

밑이 1보다 작으므로

$4t \ge 6 \quad \therefore t \ge \frac{3}{2}$

따라서 이 사람의 눈이 지각하는 빛의 세기가 어두워지기 직전에 지각한 빛의 세기의 $\frac{1}{729}$ 이하가 되는 것은 최소 $\frac{3}{2}$초, 즉 1.5초 후이다. 답 ③

중단원 마무리

L 43쪽

01 전략 함수 $f(x)=a^x$에 대하여 $f(p)=k$이면 $a^p=k$임을 이용한다.

풀이 $f(3)=m$에서 $a^3=m$ …… ㉠

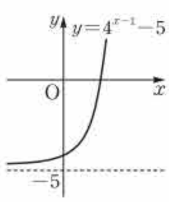
$f(7)=n$에서 $a^7=n$ …… ㉡

㉡÷㉠을 하면 $\frac{n}{m}=\frac{a^7}{a^3}=a^4$

$\therefore f(8)=a^8=(a^4)^2=\left(\frac{n}{m}\right)^2$ 답 ④

02 전략 $y=f(x)$의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은 $-y=f(-x)$임을 이용한다.

풀이 ④ $y=4^{x-1}-5$의 그래프는 $y=4^x$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -5만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $y=4^{x-1}-5$의 그래프는 제2사분면을 지나지 않는다.

⑤ $y=-\left(\frac{1}{4}\right)^{x-1}+5$의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$-y=-\left(\frac{1}{4}\right)^{-x-1}+5 \quad \therefore y=4^{x+1}-5$

답 ⑤

03 전략 대칭이동과 평행이동의 순서에 주의하여 이동한 그래프의 식을 구한다.

풀이 $y=a^x$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$y=a^{-x}$

이 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y-2=a^{-(x-3)} \quad \therefore y=a^{-x+3}+2$

$y-2=a^{-x-3}$으로 구하지 않도록 주의한다.

$y=a^{-x+3}+2$의 그래프가 점 (1, 4)를 지나므로

$4=a^2+2, \quad a^2=2$

$\therefore a=\sqrt{2}$ ($\because a>0$) 답 ①

다른 풀이 점 (1, 4)를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 점의 좌표는

$(1-3, 4-2)$, 즉 $(-2, 2)$

이 점을 y축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$(2, 2)$

따라서 함수 $y=a^x$의 그래프가 점 (2, 2)를 지나므로

$2=a^2 \quad \therefore a=\sqrt{2}$ ($\because a>0$)

04 전략 점근선의 방정식과 주어진 함숫값을 이용하여 p, q의 값을 구한다.

풀이 함수 $f(x)=2^{x+p}+q$의 그래프의 점근선의 방정식은

$y=q \quad \therefore q=-4$

함수 $y=a^{x-m}+n$ ($a>0$, $a\ne1$)의 그래프의 점근선의 방정식 ➡ $y=n$

즉 $f(x)=2^{x+p}-4$이므로 $f(0)=0$에서

$2^p-4=0, \quad 2^p=2^2$

$\therefore p=2$

따라서 $f(x)=2^{x+2}-4$이므로

$f(4)=2^6-4=64-4=60$ 답 60

05 전략 두 점 C, D의 x좌표를 a로 나타낸다.

풀이 점 A의 좌표가 $(a, 9^a)$이고, 두 점 A, C의 y좌표가 같으므로 점 C의 x좌표는 $3^x=9^a$에서

$3^x=3^{2a} \quad \therefore x=2a$

$\therefore \overline{AC}=2a-a=a$

점 B의 좌표가 $(a, 3^a)$이고, 두 점 B, D의 y좌표가 같으므로 점 D의 x좌표는 $9^x=3^a$에서

$3^{2x}=3^a, \quad 2x=a \quad \therefore x=\frac{a}{2}$

$\therefore \overline{BD}=a-\frac{a}{2}=\frac{a}{2}$

$\therefore \frac{\overline{AC}}{\overline{BD}}=\frac{a}{\frac{a}{2}}=2$ 답 2

06 전략 세 수 A, B, C를 밑이 $\frac{1}{5}$인 거듭제곱의 꼴로 나타낸 후 지수함수의 성질을 이용한다.

풀이 $A=\sqrt{\frac{1}{5}}=\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{2}}$, $B=\sqrt[3]{\frac{1}{25}}=\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{2}{3}}$,

$C=0.2^{\frac{3}{5}}=\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{3}{5}}$

이때 $\frac{1}{2}<\frac{3}{5}<\frac{2}{3}$이고 함수 $y=\left(\frac{1}{5}\right)^x$은 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로

$\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{2}{3}}<\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{3}{5}}<\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{2}}$

$\therefore B<C<A$ 답 ④

07 전략 함수 $y=a^x$에서 $a>1$이면 x가 최대일 때 y도 최대이고, $0<a<1$이면 x가 최소일 때 y가 최대임을 이용한다.

풀이 함수 $f(x)=2^x$은 x의 값이 증가하면 $f(x)$의 값도 증가한다.

따라서 $-1\le x\le 3$에서 함수 $f(x)$는 $x=3$일 때 최대이고, 최댓값은

$f(3)=2^3=8 \qquad \therefore a=8$

함수 $g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{2x}=\left(\frac{1}{4}\right)^x$은 x의 값이 증가하면 $g(x)$의 값은 감소한다.

따라서 $-1\le x\le 3$에서 함수 $g(x)$는 $x=-1$일 때 최대이고, 최댓값은

$g(-1)=\left(\frac{1}{4}\right)^{-1}=4 \qquad \therefore b=4$

$\therefore ab=32$ 답 32

08 전략 먼저 $x^2-3x+\frac{5}{4}$의 최솟값을 구한다.

풀이 $f(x)=x^2-3x+\frac{5}{4}$로 놓으면

$f(x)=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-1$

이므로 $f(x)$는 $x=\frac{3}{2}$에서 최솟값 -1을 갖는다. ···· ❶

이때 주어진 함수는

$y=a^{f(x)}$

이고 이 함수가 $f(x)\ge -1$에서 최솟값 $\frac{1}{8}$을 가지려면

$a>1$ ···· ❷

따라서 $y=a^{f(x)}$은 $f(x)=-1$에서 최소이므로

$a^{-1}=\frac{1}{8} \qquad \therefore a=8$ ···· ❸

답 8

단계	채점 기준	비율
❶	$f(x)$의 최솟값을 구할 수 있다.	30 %
❷	a의 값의 범위를 구할 수 있다.	30 %
❸	a의 값을 구할 수 있다.	40 %

쌤 한마디

$f(x)\ge -1$이므로 $0<a<1$이면

$a^{f(x)}\le a^{-1}$

즉 $y=a^{f(x)}$의 최솟값은 없다.

또 $a=1$이면 주어진 함수는 $y=1$이므로 최솟값이 $\frac{1}{8}$이 될 수 없다.

따라서 $y=a^{f(x)}$이 최솟값 $\frac{1}{8}$을 가지려면 $a>1$이어야 한다.

09 전략 $\left(\frac{1}{3}\right)^x=t\ (t>0)$로 놓고 주어진 함수를 t에 대한 이차함수로 나타낸다.

풀이 $y=1+2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{x-a}-\left(\frac{1}{9}\right)^x$

$=1+2\cdot 3^a\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^x-\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^x\right\}^2$

$\left(\frac{1}{3}\right)^x=t\ (t>0)$로 놓으면 주어진 함수는

$y=-t^2+2\cdot 3^a\cdot t+1=-(t-3^a)^2+3^{2a}+1$

따라서 y는 $t=3^a$일 때 최댓값 $3^{2a}+1$을 가지므로

QBOX

$f(x)$의 값이 증가할 때 y의 값도 증가해야 한다.

$\left(\frac{1}{8}\right)^{2-x}=(2^{-3})^{2-x}$
$=2^{3x-6}$

$3^{2a}+1=\frac{82}{81}, \qquad 3^{2a}=\frac{1}{81}=3^{-4}$

$2a=-4 \qquad \therefore a=-2$

$t=3^{-2}=\left(\frac{1}{3}\right)^2$일 때 $x=2$이므로 $\qquad k=2$

$\therefore a+k=0$ 답 ③

10 전략 $5^x+5^{-x}=t$로 놓고 주어진 함수를 t에 대한 이차함수로 나타낸다.

풀이 $5^x+5^{-x}=t$로 놓으면 $5^x>0$, $5^{-x}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$t=5^x+5^{-x}\ge 2\sqrt{5^x\cdot 5^{-x}}=2\cdot 1=2$

(단, 등호는 $x=0$일 때 성립)

이때

$25^x+25^{-x}=(5^x+5^{-x})^2-2=t^2-2$

이므로 주어진 함수는

$y=t^2-2-4t+k=(t-2)^2+k-6\ (t\ge 2)$

따라서 주어진 함수는 $t=2$일 때 최솟값 $k-6$을 가지므로

$k-6=3 \qquad \therefore k=9$ 답 ③

11 전략 밑을 같게 한 후 지수에 대한 방정식을 세운다.

풀이 $\left(\frac{1}{8}\right)^{2-x}=2^{x+4}$에서 $\qquad 2^{3x-6}=2^{x+4}$

$3x-6=x+4, \qquad 2x=10$

$\therefore x=5$ 답 ⑤

12 전략 $a^{f(x)}=a^{g(x)} \Longleftrightarrow a=1$ 또는 $f(x)=g(x)$

$a^{f(x)}=b^{f(x)} \Longleftrightarrow f(x)=0$ 또는 $a=b$

풀이 $x^{x^2-5}=x^{7-4x}$에서

(i) $x=1$일 때, $1^{-4}=1^3$이므로 등식이 성립한다.

(ii) $x\ne 1$일 때, $x^2-5=7-4x$에서

$x^2+4x-12=0, \qquad (x+6)(x-2)=0$

$\therefore x=2\ \left(\because x>\frac{1}{3}\right)$

(i), (ii)에서 $\qquad a=1+2=3$ ···· ❶

$(3x-1)^{2-x}=8^{2-x}$에서

(iii) $2-x=0$, 즉 $x=2$일 때, $5^0=8^0$이므로 등식이 성립한다.

(iv) $2-x\ne 0$일 때, $3x-1=8$에서

$3x=9 \qquad \therefore x=3$

(iii), (iv)에서 $\qquad b=2+3=5$ ···· ❷

$\therefore b-a=2$ ···· ❸

답 2

단계	채점 기준	비율
❶	a의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷	b의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸	$b-a$의 값을 구할 수 있다.	20 %

13 전략 $2^x=t\ (t>0)$로 놓고 주어진 방정식을 t에 대한 이차방정식으로 나타낸 후 이 방정식이 오직 하나의 양의 실근을 가짐을 이용한다.

풀이 $4^x-k\cdot 2^{x+1}+16=0$에서

$(2^x)^2-2k\cdot 2^x+16=0$

$2^x=t\ (t>0)$로 놓으면

$t^2-2kt+16=0$ …… ㉠

주어진 방정식이 오직 하나의 실근을 가지려면 이차방정식 ㉠은 $t>0$에서 오직 하나의 실근을 가져야 한다.
그런데 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 ㉠의 두 근의 곱이 $16>0$이므로 ㉠은 양수인 중근을 갖는다.

(i) 이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-k)^2-16=0,\qquad (k+4)(k-4)=0$

$\therefore k=-4$ 또는 $k=4$

(ii) (두 근의 합)$=2k>0 \qquad \therefore k>0$

(i), (ii)에서 $\quad k=4$

㉠에서 $t^2-8t+16=0$이므로

$(t-4)^2=0 \qquad \therefore t=4$

즉 $2^x=4$이므로 $\quad x=2 \qquad \therefore \alpha=2$

$\therefore k+\alpha=6$ 답 ④

Q 쌤 한마디

13번에서 주어진 방정식이 오직 하나의 실근을 가지는 경우를 t에 대한 이차방정식 ㉠이 양수인 중근만 갖는 경우뿐이라고 생각하기 쉬운데, $t=\alpha$, $t=\beta$ $(\alpha<0,\ \beta>0)$가 ㉠을 만족시키는 경우도 $t=\beta$만 ㉠의 근이 되므로 주어진 방정식이 오직 하나의 실근을 갖는다.
따라서 지수방정식에서 치환하여 얻은 이차방정식의 판별식을 이용할 때에는 이차방정식을 만족시키는 음수인 값이 존재하는지도 고려해야 한다.

14 **전략** 밑을 같게 한 후 지수에 대한 부등식을 세우고 각 부등식의 해의 공통 범위를 구한다.

풀이 $(\sqrt{3})^x\le 3^{x+1}$에서 $\quad 3^{\frac{1}{2}x}\le 3^{x+1}$

밑이 1보다 크므로 $\quad \frac{1}{2}x\le x+1$

$\frac{1}{2}x\ge -1 \qquad \therefore x\ge -2$ …… ㉠

$\left(\frac{2}{5}\right)^{x^2}>\left(\frac{5}{2}\right)^{2x-3}$에서 $\quad \left(\frac{2}{5}\right)^{x^2}>\left(\frac{2}{5}\right)^{3-2x}$

Q BOX: $\left(\frac{5}{2}\right)^{-x^2}>\left(\frac{5}{2}\right)^{2x-3}$으로 변형하여 풀 수도 있다.

밑이 1보다 작으므로 $\quad x^2<3-2x$

$x^2+2x-3<0,\qquad (x+3)(x-1)<0$

$\therefore -3<x<1$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$-2\le x<1$ 답 $-2\le x<1$

15 **전략** 해가 $\alpha\le x\le\beta$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은 $(x-\alpha)(x-\beta)\le 0$임을 이용한다.

풀이 $36^x+a\cdot 6^x+b\le 0$에서

$(6^x)^2+a\cdot 6^x+b\le 0$

$6^x=t\ (t>0)$로 놓으면

$t^2+at+b\le 0$ …… ㉠

이때 $1\le x\le 2$에서

$6^1\le 6^x\le 6^2 \qquad \therefore 6\le t\le 36$

해가 $6\le t\le 36$이고 t^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(t-6)(t-36)\le 0 \qquad \therefore t^2-42t+216\le 0$

이것이 ㉠과 일치하므로 $\quad a=-42,\ b=216$

$\therefore b-a=258$ 답 ①

16 **전략** $x=1$, $0<x<1$, $x>1$로 나누어 푼다.

풀이 (i) $x=1$일 때, $1^4>1^{-20}$이므로 부등식이 성립하지 않는다.

(ii) $0<x<1$일 때, 밑이 1보다 작으므로

$4x<x^2-21,\qquad x^2-4x-21>0$

$(x+3)(x-7)>0 \qquad \therefore x<-3$ 또는 $x>7$

그런데 $0<x<1$이므로 부등식을 만족시키는 x가 존재하지 않는다.

(iii) $x>1$일 때, 밑이 1보다 크므로

$4x>x^2-21,\qquad x^2-4x-21<0$

$(x+3)(x-7)<0 \qquad \therefore -3<x<7$

그런데 $x>1$이므로 $\quad 1<x<7$

이상에서 주어진 부등식의 해는 $1<x<7$이므로 정수 x는 2, 3, 4, 5, 6의 5개이다. 답 5

17 **전략** $\left(\frac{1}{7}\right)^x=t\ (t>0)$로 놓고 주어진 부등식을 t에 대한 이차부등식으로 나타낸 후 이 부등식이 항상 성립할 조건을 이용한다.

풀이 $\left(\frac{1}{49}\right)^x-8\cdot\left(\frac{1}{7}\right)^x-2k>0$에서

$\left\{\left(\frac{1}{7}\right)^x\right\}^2-8\cdot\left(\frac{1}{7}\right)^x-2k>0$

$\left(\frac{1}{7}\right)^x=t\ (t>0)$로 놓으면 $\quad t^2-8t-2k>0$

Q BOX: $t^2-8t-2k$
$=(t^2-8t+16)-2k-16$
$=(t-4)^2-2k-16$

$\therefore (t-4)^2-2k-16>0$

이 부등식이 $t>0$인 모든 실수 t에 대하여 성립하려면

$-2k-16>0 \qquad \therefore k<-8$

따라서 정수 k의 최댓값은 -9이다. 답 -9

18 **전략** 주어진 식에 $t=15$, $W_0=w_0$, $W=3w_0$을 대입하여 지수에 대한 방정식을 푼다.

풀이 $t=15$일 때, $W_0=w_0$, $W=3w_0$이므로

$3w_0=\frac{w_0}{2}10^{15a}(1+10^{15a})$

$\therefore (10^{15a})^2+10^{15a}-6=0$

$10^{15a}=X\ (X>0)$로 놓으면

$X^2+X-6=0,\qquad (X+3)(X-2)=0$

$\therefore X=2\ (\because X>0) \qquad \therefore 10^{15a}=2$

따라서 30년이 지난 시점에서의 기대자산은

Q BOX: 주어진 식에 $t=30$, $W_0=w_0$을 대입한다.

$\frac{w_0}{2}10^{30a}(1+10^{30a})=\frac{w_0}{2}(10^{15a})^2\{1+(10^{15a})^2\}$

$=\frac{w_0}{2}\cdot 2^2\cdot(1+2^2)$

$=10w_0$

$\therefore k=10$ 답 ②

04 로그함수

07 로그함수

Lecture 14 로그함수 Ⓛ 46쪽

1-1 답 ㄱ, ㄷ

ㄴ. 상수함수
ㄹ. 일차함수

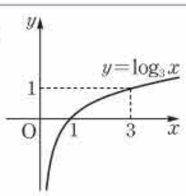
1-2 (1) $f(4)=\log_2 4=\log_2 2^2=2$

(2) $f\left(\frac{1}{2}\right)=\log_2 \frac{1}{2}=\log_2 2^{-1}=-1$

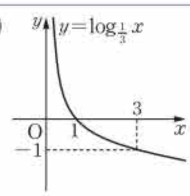
(3) $f(\sqrt{8})+f(\sqrt{2})=\log_2\sqrt{8}+\log_2\sqrt{2}$
$=\log_2(\sqrt{8}\cdot\sqrt{2})$
$=\log_2 4=\log_2 2^2=2$

답 (1) 2 (2) -1 (3) 2

2-1 답 (1)



(2)



$\log_a 1=0$, $\log_a a=1$이므로 로그함수
$y=\log_a x$
$(a>0,\ a\neq1)$
의 그래프는 두 점 $(1,\ 0)$, $(a,\ 1)$을 항상 지난다.

참고 $y=\log_3 x$의 그래프와 $y=\log_{\frac{1}{3}} x$의 그래프는 x축에 대하여 대칭이다.

2-2 ㄱ. 정의역은 양의 실수 전체의 집합이다.
ㄷ. 그래프의 점근선의 방정식은 $x=0$이다.
이상에서 옳은 것은 ㄴ뿐이다. 답 ㄴ

Lecture 15 로그함수의 그래프의 평행이동과 대칭이동 Ⓛ 47쪽

1-1 (1) $y+1=\log_{\frac{1}{5}}(x-4)$에서
$y=\log_{\frac{1}{5}}(x-4)-1$

$y=\log_{\frac{1}{5}} x$에 x 대신 $x-4$, y 대신 $y+1$을 대입한다.

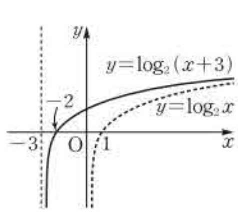
(2) $-y=\log_{\frac{1}{5}} x$에서 $y=-\log_{\frac{1}{5}} x$

(4) $-y=\log_{\frac{1}{5}}(-x)$에서 $y=-\log_{\frac{1}{5}}(-x)$

(5) $x=\log_{\frac{1}{5}} y$에서 $y=\left(\frac{1}{5}\right)^x$

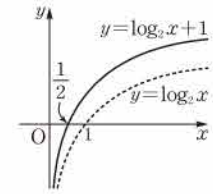
답 (1) $y=\log_{\frac{1}{5}}(x-4)-1$
(2) $y=-\log_{\frac{1}{5}} x$ (3) $y=\log_{\frac{1}{5}}(-x)$
(4) $y=-\log_{\frac{1}{5}}(-x)$ (5) $y=\left(\frac{1}{5}\right)^x$

1-2 (1) $y=\log_2(x+3)$의 그래프는 $y=\log_2 x$의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



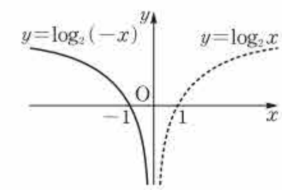
따라서 정의역은 $\{x\,|\,x>-3\}$이고, 점근선의 방정식은 $x=-3$이다.

(2) $y=\log_2 x+1$의 그래프는 $y=\log_2 x$의 그래프를 y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



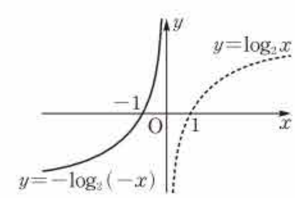
따라서 정의역은 $\{x\,|\,x>0\}$이고, 점근선의 방정식은 $x=0$이다.

(3) $y=\log_2(-x)$의 그래프는 $y=\log_2 x$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



따라서 정의역은 $\{x\,|\,x<0\}$이고, 점근선의 방정식은 $x=0$이다.

(4) $y=-\log_2(-x)$의 그래프는 $y=\log_2 x$의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



따라서 정의역은 $\{x\,|\,x<0\}$이고, 점근선의 방정식은 $x=0$이다.

답 풀이 참조

1-3 $y=\log_3 x$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 그래프의 식은
$y=\log_3(x+2)-3$
이 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은
$-y=\log_3(x+2)-3$
$\therefore\ y=-\log_3(x+2)+3$

답 $y=-\log_3(x+2)+3$

Lecture 16 로그함수의 최대·최소 Ⓛ 48쪽

1-1 (1) 함수 $y=\log_7 x$는 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하므로 $1\le x\le 49$에서

(밑)>1인 경우

$x=49$일 때 최대이고, 최댓값은
$\log_7 49=\log_7 7^2=2$
$x=1$일 때 최소이고, 최솟값은
$\log_7 1=0$

(2) 함수 $y=\log_{10} x$는 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하므로 $\frac{1}{10}\le x\le 1000$에서

$x=1000$일 때 최대이고, 최댓값은

$\log_{10}1000=\log_{10}10^3=3$

$x=\dfrac{1}{10}$일 때 최소이고, 최솟값은

$\log_{10}\dfrac{1}{10}=\log_{10}10^{-1}=-1$

답 (1) 최댓값: 2, 최솟값: 0
(2) 최댓값: 3, 최솟값: -1

1-2 (1) 함수 $y=\log_{\frac{1}{5}}x$는 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로 $\dfrac{1}{5}\le x\le 5$에서

0<(밑)<1인 경우

$x=\dfrac{1}{5}$일 때 최대이고, 최댓값은

$\log_{\frac{1}{5}}\dfrac{1}{5}=1$

$x=5$일 때 최소이고, 최솟값은

$\log_{\frac{1}{5}}5=\log_{\frac{1}{5}}\left(\dfrac{1}{5}\right)^{-1}=-1$

(2) 함수 $y=\log_{\frac{1}{3}}x$는 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로 $\dfrac{1}{9}\le x\le 27$에서

$x=\dfrac{1}{9}$일 때 최대이고, 최댓값은

$\log_{\frac{1}{3}}\dfrac{1}{9}=\log_{\frac{1}{3}}\left(\dfrac{1}{3}\right)^2=2$

$x=27$일 때 최소이고, 최솟값은

$\log_{\frac{1}{3}}27=\log_{\frac{1}{3}}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-3}=-3$

답 (1) 최댓값: 1, 최솟값: -1
(2) 최댓값: 2, 최솟값: -3

1-3 (1) 함수 $y=\log_{\frac{1}{2}}(x-3)$은 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로 $4\le x\le 7$에서

$x=4$일 때 최대이고, 최댓값은

$\log_{\frac{1}{2}}(4-3)=\log_{\frac{1}{2}}1=0$

$x=7$일 때 최소이고, 최솟값은

$\log_{\frac{1}{2}}(7-3)=\log_{\frac{1}{2}}4=\log_{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-2}=-2$

(2) 함수 $y=\log_3(x+5)-1$은 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하므로 $-2\le x\le 4$에서

$x=4$일 때 최대이고, 최댓값은

$\log_3(4+5)-1=\log_3 9-1=\log_3 3^2-1$
$=2-1=1$

$x=-2$일 때 최소이고, 최솟값은

$\log_3(-2+5)-1=\log_3 3-1=1-1=0$

답 (1) 최댓값: 0, 최솟값: -2
(2) 최댓값: 1, 최솟값: 0

기본+표준 유형 Q+Q

49쪽

01 $f(-1)=\log_a 2+7=6$이므로 $\log_a 2=-1$

$a^{-1}=2$ $\therefore a=\dfrac{1}{2}$

따라서 $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(x+3)+7$이므로

$f(5)=\log_{\frac{1}{2}}8+7=-3+7=4$ 답 ③

02 $f\left(\dfrac{1}{81}\right)=\dfrac{1}{2}\log_3\dfrac{1}{81}=\dfrac{1}{2}\cdot(-4)=-2$

$\therefore (f\circ f)\left(\dfrac{1}{81}\right)=f\left(f\left(\dfrac{1}{81}\right)\right)=f(-2)$
$=5^{-2}=\dfrac{1}{25}$ 답 $\dfrac{1}{25}$

03 ② 그래프는 점 $(1, 0)$을 지난다.

$\log_a 1=0$

⑤ $y=\log_{\frac{1}{a}}x=-\log_a x$이므로 $y=\log_a x$의 그래프는 $y=\log_{\frac{1}{a}}x$의 그래프와 x축에 대하여 대칭이다.

답 ②, ⑤

04 ㄱ. $y=-\log_2\dfrac{1}{x}=-\log_2 x^{-1}=\log_2 x$

ㄴ. $y=\log_{\frac{1}{2}}(-x)=-\log_2(-x)$

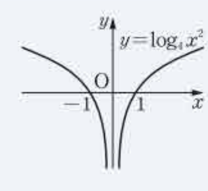
ㄷ. $y=\log_4 x^2=\log_{2^2}x^2=\log_2|x|$

ㄹ. $y=\dfrac{1}{3}\log_2 x^3=\dfrac{1}{3}\cdot 3\log_2 x=\log_2 x$

이상에서 함수 $y=\log_2 x$와 같은 함수인 것은 ㄱ, ㄹ이다. 답 ③

쌤 한마디

ㄷ에서 $y=\log_4 x^2$의 정의역은 $\{x|x\neq 0$인 실수$\}$이고 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
04번과 같이 서로 같은 함수를 찾을 때에는 함수의 정의역이 같은지 반드시 확인한다.



05 $y=\log_5(5x+10)=\log_5 5(x+2)$
$=1+\log_5(x+2)$

$a>0$, $a\neq 1$, $M>0$, $N>0$일 때, $\log_a MN=\log_a M+\log_a N$

$y=\log_5(x+2)+1$의 그래프는 $y=\log_5 x$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로

$m=-2$, $n=1$

$\therefore m+n=-1$ 답 -1

06 $y=\log_{\frac{1}{3}}x$의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

대칭이동과 평행이동을 연이어 할 때 도형의 이동 순서에 주의한다.

$-y=\log_{\frac{1}{3}}(-x)$ $\therefore y=-\log_{\frac{1}{3}}(-x)$

이 그래프를 x축의 방향으로 k만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=-\log_{\frac{1}{3}}\{-(x-k)\}$

$\therefore y=-\log_{\frac{1}{3}}(-x+k)$

$y=-\log_{\frac{1}{3}}(-x+k)$의 그래프가 점 $(2, 1)$을 지나므로

$1=-\log_{\frac{1}{3}}(-2+k)$

$\log_{\frac{1}{3}}(-2+k)=-1$, $-2+k=3$

$\log_{\frac{1}{3}}(-2+k)=-1$에서 로그의 정의에 의하여 $-2+k=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-1}=3$

$\therefore k=5$ 답 5

07 점 A의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면 정사각형 ABCD의 한 변의 길이가 2이므로

$b=2$

즉 $2=\log_2 a$에서 $a=2^2=4$

따라서 $A(4,\ 2)$이므로 점 D의 좌표는

$(6,\ 2)$ 답 $(6,\ 2)$

08 $\overline{OP}=\log_{\sqrt{5}} p$, $\overline{OQ}=\log_5 q$이므로

$\overline{OP} : \overline{OQ}=5 : 3$에서

$\log_{\sqrt{5}} p : \log_5 q=5 : 3$, $2\log_5 p : \log_5 q=5 : 3$

$6\log_5 p=5\log_5 q$, $\log_5 p^6=\log_5 q^5$

$\therefore p^6=q^5$ 답 ⑤

09 $y=\log_{\frac{1}{6}}(x-1)+4$에서

$\log_{\frac{1}{6}}(x-1)=y-4$

$x-1=\left(\frac{1}{6}\right)^{y-4}$ $\therefore x=\left(\frac{1}{6}\right)^{y-4}+1$

x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는

$y=\left(\frac{1}{6}\right)^{x-4}+1$ 답 $y=\left(\frac{1}{6}\right)^{x-4}+1$

쌤 한마디

일대일대응인 함수 $y=f(x)$의 역함수 $y=f^{-1}(x)$는 다음과 같은 순서로 구한다.

(i) $y=f(x)$에서 x를 y에 대한 식으로 나타낸다. 즉 $x=f^{-1}(y)$ 꼴로 나타낸다.

(ii) $x=f^{-1}(y)$의 x와 y를 서로 바꾸어 $y=f^{-1}(x)$ 꼴로 나타낸다.

10 $y=\log_3(x+a)-7$에서

$\log_3(x+a)=y+7$, $x+a=3^{y+7}$

$\therefore x=3^{y+7}-a$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=3^{x+7}-a$

따라서 $y=\log_3(x+a)-7$의 역함수는 $y=3^{x+7}-a$이고, 이것이 $y=3^{x+b}-5$와 일치해야 하므로

$a=5,\ b=7$ $\therefore b-a=2$ 답 ③

11 $g(-1)=k$라 하면 $f(k)=-1$이므로

$\log_4(k+3)-1=-1$, $\log_4(k+3)=0$

$k+3=1$ $\therefore k=-2$ 답 -2

다른 풀이 $y=\log_4(x+3)-1$에서

$\log_4(x+3)=y+1$, $x+3=4^{y+1}$

$\therefore x=4^{y+1}-3$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=4^{x+1}-3$

따라서 $g(x)=4^{x+1}-3$이므로

$g(-1)=4^{-1+1}-3=1-3=-2$

12 함수 $y=\log_6(x+k)+4$의 그래프와 그 역함수의 그래프의 교점은 $y=\log_6(x+k)+4$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다.

이때 교점의 x좌표가 5이므로 $y=\log_6(x+k)+4$의 그래프는 점 $(5,\ 5)$를 지난다.

즉 $5=\log_6(5+k)+4$에서 $\log_6(5+k)=1$

$5+k=6$ $\therefore k=1$ 답 1

13 $-2=\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}=\log_{\frac{1}{3}}9$

이때 $\sqrt{70}<9<10$이고 함수 $y=\log_{\frac{1}{3}}x$는 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로

$\log_{\frac{1}{3}}10<\log_{\frac{1}{3}}9<\log_{\frac{1}{3}}\sqrt{70}$

$\therefore \log_{\frac{1}{3}}10<-2<\log_{\frac{1}{3}}\sqrt{70}$

답 $\log_{\frac{1}{3}}10<-2<\log_{\frac{1}{3}}\sqrt{70}$

14 $A=3\log_5 2=\log_5 2^3=\log_5 8$

$B=2=\log_5 5^2=\log_5 25$

$C=\log_{25}45=\log_{5^2}45=\frac{1}{2}\log_5 45=\log_5\sqrt{45}$

이때 $\sqrt{45}<8<25$이고 함수 $y=\log_5 x$는 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하므로

$\log_5\sqrt{45}<\log_5 8<\log_5 25$

$\therefore C<A<B$ 답 ④

15 함수 $y=\log_2(x-2)+1$은 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하므로 $\frac{5}{2}\le x\le 18$에서

$x=18$일 때 최대이고, 최댓값은

$\log_2(18-2)+1=\log_2 16+1=4+1=5$

$x=\frac{5}{2}$일 때 최소이고, 최솟값은

$\log_2\left(\frac{5}{2}-2\right)+1=\log_2\frac{1}{2}+1=-1+1=0$

따라서 $M=5,\ m=0$이므로

$M+m=5$ 답 ②

16 함수 $y=\log_{\frac{1}{5}}(3x+4)+k$는 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로 $\frac{1}{3}\le x\le 7$에서 $x=7$일 때 최솟값을 갖는다.

즉 $\log_{\frac{1}{5}}(21+4)+k=-10$이므로

$\log_{\frac{1}{5}}25+k=-10$, $-2+k=-10$

$\therefore k=-8$ 답 -8

17 $f(x)=-x^2+6x$로 놓으면

$f(x)=-(x-3)^2+9$

함수 $y=\log_3(-x^2+6x)=\log_3 f(x)$는 $f(x)$의 값이 증가하면 y의 값도 증가하므로 $f(x)$가 최대일 때 y는 최댓값을 갖는다.

따라서 $y=\log_3 f(x)$는 $f(x)=9$, 즉 $x=3$일 때 최댓값 $\log_3 9=2$를 가지므로

$a=3,\ b=2$ $\therefore ab=6$ 답 6

Q BOX

점 $A(a,\ 2)$가 $y=\log_2 x$의 그래프 위의 점이다.

함수 $y=\log_{\frac{1}{6}}(x-1)+4$는 집합 $\{x\mid x>1\}$에서 실수 전체의 집합으로의 일대일대응이므로 역함수가 존재한다.

함수 $f(x)$의 역함수 $g(x)$의 식을 직접 구하여 $g(-1)$의 값을 구할 수도 있다.

$1\le x\le 5$에서 함수 $y=f(x)$는 $x=3$일 때 최댓값 9를 갖는다.

18 진수의 조건에서

$x+6>0$, $2-x>0$ $\quad\therefore -6<x<2$

$y=\log_{\frac{1}{4}}(x+6)+\log_{\frac{1}{4}}(2-x)=\log_{\frac{1}{4}}(-x^2-4x+12)$

이므로 $f(x)=-x^2-4x+12$로 놓으면

$f(x)=-(x+2)^2+16$

함수 $y=\log_{\frac{1}{4}}(x+6)+\log_{\frac{1}{4}}(2-x)=\log_{\frac{1}{4}}f(x)$는 $f(x)$의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로 $f(x)$가 최대일 때 y는 최솟값을 갖는다.

따라서 $y=\log_{\frac{1}{4}}f(x)$는 $f(x)=16$일 때 최소이고, 최솟값은

$\log_{\frac{1}{4}}16=-2$ 답 ③

19 $\log_2 x=t$로 놓으면 주어진 함수는

$y=t^2-8t+15=(t-4)^2-1$

이때 $2\le x\le 32$에서

$\log_2 2\le\log_2 x\le\log_2 32$ $\quad\therefore 1\le t\le 5$

따라서 $1\le t\le 5$에서 함수 $y=(t-4)^2-1$은

$t=1$일 때 최대이고, 최댓값은

$(1-4)^2-1=8$

$t=4$일 때 최소이고, 최솟값은

$(4-4)^2-1=-1$

따라서 $M=8$, $m=-1$이므로

$M-m=9$ 답 9

20 $y=\log_{\frac{1}{3}}x\cdot\log_{\frac{1}{3}}\frac{9}{x}$

$=\log_{\frac{1}{3}}x\cdot(\log_{\frac{1}{3}}9-\log_{\frac{1}{3}}x)$

$=\log_{\frac{1}{3}}x\cdot(-2-\log_{\frac{1}{3}}x)$

$=-(\log_{\frac{1}{3}}x)^2-2\log_{\frac{1}{3}}x$

$\log_{\frac{1}{3}}x=t$로 놓으면 주어진 함수는

$y=-t^2-2t=-(t+1)^2+1$

이므로 $t=-1$일 때 최댓값 1을 갖는다. 답 ①

21 $y=\log x+\log_x 1000=\log x+3\log_x 10$

$=\log x+\dfrac{3}{\log x}$

이때 $x>1$에서 $\log x>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\log x+\dfrac{3}{\log x}\ge 2\sqrt{\log x\cdot\dfrac{3}{\log x}}=2\sqrt{3}$

(단, 등호는 $\log x=\sqrt{3}$일 때 성립)

따라서 구하는 최솟값은 $2\sqrt{3}$이다. 답 $2\sqrt{3}$

22 $\log_2(4x+y)+\log_2\left(\dfrac{1}{4x}+\dfrac{1}{y}\right)$

$=\log_2(4x+y)\left(\dfrac{1}{4x}+\dfrac{1}{y}\right)$

$=\log_2\left(2+\dfrac{4x}{y}+\dfrac{y}{4x}\right)$

이때 $x>0$, $y>0$에서 $\dfrac{4x}{y}>0$, $\dfrac{y}{4x}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$2+\dfrac{4x}{y}+\dfrac{y}{4x}\ge 2+2\sqrt{\dfrac{4x}{y}\cdot\dfrac{y}{4x}}$

$=2+2\cdot 1=4$

(단, 등호는 $y=4x$일 때 성립)

따라서 구하는 최솟값은

$\log_2 4=2$ 답 ②

QBOX

$-6<x<2$에서 함수 $y=f(x)$는 $x=-2$일 때 최댓값 16을 갖는다.

$\log_{\frac{1}{3}}x=t$로 놓고 구한 t의 값에 관계없이 진수의 조건을 항상 만족시킨다.

$\log x=\dfrac{3}{\log x}$에서

$(\log x)^2=3$

$\therefore \log x=\sqrt{3}$

$(\because \log x>0)$

밑이 1보다 크므로 $\log_2\left(2+\dfrac{4x}{y}+\dfrac{y}{4x}\right)$는 $2+\dfrac{4x}{y}+\dfrac{y}{4x}$가 최소일 때 최솟값을 갖는다.

$\dfrac{4x}{y}=\dfrac{y}{4x}$에서

$y^2=(4x)^2$

$\therefore y=4x$

$(\because x>0,\ y>0)$

$x>-3$, $x\ne-2$, $x>0$, $x\ne\frac{1}{2}$이므로

$0<x<\frac{1}{2}$

또는 $x>\frac{1}{2}$

08 로그함수의 활용

Lecture 17 로그방정식

53쪽

1-1 밑의 조건에서 $\quad x>0$, $x\ne 1$ ...... ㉠

$\log_x 16=-2$에서 $\quad x^{-2}=16$

$x^2=\dfrac{1}{16}$ $\quad\therefore x=\pm\dfrac{1}{4}$

㉠에 의하여 주어진 방정식의 해는

$x=\dfrac{1}{4}$ 답 $x=\dfrac{1}{4}$

2-1 진수의 조건에서 $2x-7>0$, $x>0$이므로

$x>\dfrac{7}{2}$, $x>0$ $\quad\therefore x>\dfrac{7}{2}$ ...... ㉠

$\log_5(2x-7)=\log_5 x$에서

$2x-7=x$ $\quad\therefore x=7$

$x=7$은 ㉠을 만족시키므로 주어진 방정식의 해이다.

답 $x=7$

3-1 $\log_{\frac{1}{3}}x=t$로 놓으면 $\quad t^2+2t-3=0$

$(t+3)(t-1)=0$ $\quad\therefore t=-3$ 또는 $t=1$

즉 $\log_{\frac{1}{3}}x=-3$ 또는 $\log_{\frac{1}{3}}x=1$이므로

$x=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-3}=27$ 또는 $x=\dfrac{1}{3}$

답 $x=\dfrac{1}{3}$ 또는 $x=27$

4-1 (1) 진수의 조건에서 $x-1>0$이므로

$x>1$ ...... ㉠

$\log_4(x-1)=\log_7(x-1)$에서 진수가 같고 밑이 다르므로 $\quad x-1=1$ $\quad\therefore x=2$

$x=2$는 ㉠을 만족시키므로 주어진 방정식의 해이다.

(2) 밑의 조건에서 $x+3>0$, $x+3\ne 1$, $2x>0$, $2x\ne 1$이므로

$0<x<\dfrac{1}{2}$ 또는 $x>\dfrac{1}{2}$ ...... ㉠

$\log_{x+3}5=\log_{2x}5$에서 진수가 같으므로

$x+3=2x$ $\quad\therefore x=3$

$x=3$은 ㉠을 만족시키므로 주어진 방정식의 해이다.

답 (1) $x=2$ (2) $x=3$

5-1 $x^{\log_2 x}=2$의 양변에 밑이 2인 로그를 취하면

$\log_2 x^{\log_2 x}=\log_2 2,\quad \log_2 x\cdot\log_2 x=1$

$(\log_2 x)^2=\boxed{1},\quad \log_2 x=\boxed{-1}$ 또는 $\log_2 x=1$

$\therefore x=2^{-1}=\boxed{\frac{1}{2}}$ 또는 $x=2$ 　　답 $1,\ -1,\ \frac{1}{2}$

Lecture 18 로그부등식

Ⓛ 54쪽

1-1 (1) 진수의 조건에서 $3x+7>0$이므로

$x>-\frac{7}{3}$ …… ㉠

$\log_4(3x+7)>2$에서

2=$\log_4 4^2=\log_4 16$

$\log_4(3x+7)>\log_4 16$

밑이 1보다 크므로 $3x+7>16$

$3x>9\quad \therefore x>3$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $x>3$

(2) 진수의 조건에서 $2x-1>0$이므로

$x>\frac{1}{2}$ …… ㉠

$\log_{\frac{1}{3}}(2x-1)\le 1$에서

$\log_{\frac{1}{3}}(2x-1)\le\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{3}$

밑이 1보다 작으므로 $2x-1\ge\frac{1}{3}$

$2x\ge\frac{4}{3}\quad \therefore x\ge\frac{2}{3}$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $x\ge\frac{2}{3}$

(3) 진수의 조건에서 $x>0,\ 9-2x>0$이므로

$x>0,\ x<\frac{9}{2}\quad \therefore 0<x<\frac{9}{2}$ …… ㉠

$\log_{\frac{1}{2}}x\ge\log_{\frac{1}{2}}(9-2x)$에서 밑이 1보다 작으므로

$x\le 9-2x,\quad 3x\le 9$

$\therefore x\le 3$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $0<x\le 3$

(4) 진수의 조건에서 $4x-5>0,\ x+1>0$이므로

$x>\frac{5}{4},\ x>-1\quad \therefore x>\frac{5}{4}$ …… ㉠

$\log_5(4x-5)<\log_5(x+1)$에서 밑이 1보다 크므로

$4x-5<x+1,\quad 3x<6$

$\therefore x<2$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $\frac{5}{4}<x<2$

답 (1) $x>3$　(2) $x\ge\frac{2}{3}$　(3) $0<x\le 3$　(4) $\frac{5}{4}<x<2$

2-1 (1) 진수의 조건에서 $x>0$ …… ㉠

$\log_3 x=t$로 놓으면 $t^2-t\le 0$

$t(t-1)\le 0\quad \therefore 0\le t\le 1$

즉 $0\le\log_3 x\le 1$이므로

$\log_3 1\le\log_3 x\le\log_3 3$

밑이 1보다 크므로 $1\le x\le 3$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $1\le x\le 3$

(2) 진수의 조건에서 $x>0$ …… ㉠

$\log_{\frac{1}{4}}x=t$로 놓으면 $t^2+3t+2<0$

$(t+1)(t+2)<0\quad \therefore -2<t<-1$

즉 $-2<\log_{\frac{1}{4}}x<-1$이므로

$\log_{\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}<\log_{\frac{1}{4}}x<\log_{\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{4}\right)^{-1}$

밑이 1보다 작으므로 $4<x<16$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $4<x<16$

답 (1) $1\le x\le 3$　(2) $4<x<16$

3-1 진수의 조건에서 $x>\boxed{0}$ …… ㉠

$x^{\log x}>10$의 양변에 상용로그를 취하면

$\log x^{\log x}>\log 10,\quad \log x\cdot\log x>1$

$\therefore (\boxed{\log x})^2>1$

즉 $\log x<-1$ 또는 $\log x>1$이므로

$\log x<-1$에서
$\log x<\log 10^{-1}$
$\therefore \log x<\log\frac{1}{10}$

$\log x<\log\boxed{\frac{1}{10}}$ 또는 $\log x>\log 10$

밑이 1보다 크므로

$x<\boxed{\frac{1}{10}}$ 또는 $x>\boxed{10}$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$\boxed{0}<x<\boxed{\frac{1}{10}}$ 또는 $x>\boxed{10}$ 　　답 풀이 참조

기본+표준 유형 Q+Q

Ⓛ 55쪽

01 진수의 조건에서 $(x+1)^2>0,\ 4x+16>0$이므로

$x\ne -1,\ x>-4$

$\therefore -4<x<-1$ 또는 $x>-1$

$\log_{\frac{1}{5}}(x+1)^2=\log_{\frac{1}{5}}(4x+16)$에서

$(x+1)^2=4x+16,\quad x^2-2x-15=0$

$(x+3)(x-5)=0\quad \therefore x=-3$ 또는 $x=5$

진수의 조건을 만족시킨다.

따라서 모든 근의 합은

$-3+5=2$ 　　답 ⑤

02 진수의 조건에서 $x>0,\ x+6>0$이므로

$x>0,\ x>-6\quad \therefore x>0$ …… ㉠

$\log_3 x+\log_3(x+6)=3$에서

$\log_3 x(x+6)=\log_3 3^3$

$x(x+6)=27,\quad x^2+6x-27=0$

$(x+9)(x-3)=0\quad \therefore x=3\ (\because ㉠)$

따라서 $a=3$이므로

$2^a=2^3=8$ 　　답 ②

03 $\log_2 x=t$로 놓으면 $t^2-t-6=0$

$(t+2)(t-3)=0\quad \therefore t=-2$ 또는 $t=3$

즉 $\log_2 x=-2$ 또는 $\log_2 x=3$이므로

$x=2^{-2}=\frac{1}{4}$ 또는 $x=2^3=8$

따라서 $\alpha=\frac{1}{4}$, $\beta=8$이므로

$4\alpha+\beta=4\cdot\frac{1}{4}+8=9$ 답 ③

04 $\log x\cdot\log\frac{x}{25}=3$에서

$\log x\cdot(\log x-\log 25)=3$

$\therefore (\log x)^2-\log 25\cdot\log x-3=0$

$\log x=t$로 놓으면 $t^2-\log 25\cdot t-3=0$

이 방정식의 두 근이 $\log\alpha$, $\log\beta$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\log\alpha+\log\beta=\log 25$

$\log\alpha\beta=\log 25$ $\therefore \alpha\beta=25$ 답 25

쌤 한마디

x에 대한 방정식

$p(\log_a x)^2+q\log_a x+r=0$ (p, q, r는 상수)

의 두 근이 α, β일 때, $\log_a x=t$로 놓으면 t에 대한 방정식 $pt^2+qt+r=0$의 두 근은 $\log_a\alpha$, $\log_a\beta$이다.

05 밑의 조건에서 $x+12>0$, $x+12\neq 1$, $x^2>0$, $x^2\neq 1$이므로

$x^2>0$에서 $x\neq 0$

$x^2\neq 1$에서 $x\neq -1$, $x\neq 1$

$-12<x<-11$ 또는 $-11<x<-1$

또는 $-1<x<0$ 또는 $0<x<1$ 또는 $x>1$

$\log_{x+12}7=\log_{x^2}7$에서 진수가 같으므로

$x+12=x^2$, $x^2-x-12=0$

$(x+3)(x-4)=0$ $\therefore x=-3$ 또는 $x=4$

밑의 조건을 만족시킨다.

따라서 모든 근의 합은

$-3+4=1$ 답 ②

06 밑과 진수의 조건에서 $x+5>0$, $x+5\neq 1$, $2x-5>0$, $2x-5\neq 1$, $x-3>0$이므로

$x>3$ …… ㉠

(i) $x+5=2x-5$일 때, $x=10$

밑이 같은 경우

$x=10$은 ㉠을 만족시키므로 주어진 방정식의 해이다.

(ii) $x-3=1$일 때, $x=4$

진수가 1인 경우

$x=4$는 ㉠을 만족시키므로 주어진 방정식의 해이다.

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 해는

$x=4$ 또는 $x=10$

따라서 $\alpha=4$, $\beta=10$이므로

$\beta-\alpha=6$ 답 6

07 $x^{\log x}=x^3$의 양변에 상용로그를 취하면

$\log x^{\log x}=\log x^3$, $\log x\cdot\log x=3\log x$

$\therefore (\log x)^2-3\log x=0$

$\log x=t$로 놓으면 $t^2-3t=0$

$t(t-3)=0$ $\therefore t=0$ 또는 $t=3$

즉 $\log x=0$ 또는 $\log x=3$이므로

$x=1$ 또는 $x=10^3=1000$

따라서 모든 근의 곱은

$1\cdot 1000=1000$ 답 1000

08 $x^{\log_3 x}=9x^{-1}$의 양변에 밑이 3인 로그를 취하면

$\log_3 x^{\log_3 x}=\log_3 9x^{-1}$

$\log_3 9x^{-1}$
$=\log_3 9+\log_3 x^{-1}$
$=2-\log_3 x$

$\log_3 x\cdot\log_3 x=2-\log_3 x$

$\therefore (\log_3 x)^2+\log_3 x-2=0$

$\log_3 x=t$로 놓으면 $t^2+t-2=0$

$(t+2)(t-1)=0$ $\therefore t=-2$ 또는 $t=1$

즉 $\log_3 x=-2$ 또는 $\log_3 x=1$이므로

$x=3^{-2}=\frac{1}{9}$ 또는 $x=3$

따라서 모든 근의 합은

$\frac{1}{9}+3=\frac{28}{9}$ 답 ③

09 진수의 조건에서 $x+7>0$, $2-x>0$이므로

$x>-7$, $x<2$ $\therefore -7<x<2$ …… ㉠

$\log_5(x+7)>\log_5(2-x)+1$에서

$\log_5(x+7)>\log_5 5(2-x)$

밑이 1보다 크므로 $x+7>5(2-x)$

$x+7>10-5x$, $6x>3$

$\therefore x>\frac{1}{2}$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$\frac{1}{2}<x<2$ 답 ④

10 진수의 조건에서 $x-5>0$, $x+1>0$이므로

$x>5$, $x>-1$ $\therefore x>5$ …… ㉠

$\log_{\frac{1}{2}}(x-5)\leq\log_{\frac{1}{4}}(x+1)$에서

$\log_{\frac{1}{4}}(x-5)^2\leq\log_{\frac{1}{4}}(x+1)$

밑이 1보다 작으므로 $(x-5)^2\geq x+1$

$x^2-11x+24\geq 0$, $(x-3)(x-8)\geq 0$

$\therefore x\leq 3$ 또는 $x\geq 8$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$x\geq 8$

따라서 정수 x의 최솟값은 8이다. 답 8

11 진수의 조건에서 $x>0$, $x^6>0$이므로

$x>0$ …… ㉠

$(\log_3 x)^2-\log_3 x^6\leq -8$에서

$(\log_3 x)^2-6\log_3 x\leq -8$

$\therefore (\log_3 x)^2-6\log_3 x+8\leq 0$

$\log_3 x=t$로 놓으면 $t^2-6t+8\leq 0$

$(t-2)(t-4)\leq 0$ $\therefore 2\leq t\leq 4$

즉 $2 \le \log_3 x \le 4$이므로

$\log_3 3^2 \le \log_3 x \le \log_3 3^4$

밑이 1보다 크므로 $9 \le x \le 81$ ...... ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$9 \le x \le 81$

따라서 정수 x는 9, 10, 11, ⋯, 81의 73개이다.

답 73

$81-9+1=73$(개)

12 진수의 조건에서 $x>0$, $32x^4>0$이므로

$x>0$ ...... ㉠

$(\log_2 x)^2 - \log_2 32x^4 > 0$에서

$(\log_2 x)^2 - (\log_2 32 + 4\log_2 x) > 0$

$\therefore (\log_2 x)^2 - 4\log_2 x - 5 > 0$

$\log_2 x = t$로 놓으면 $t^2 - 4t - 5 > 0$

$(t+1)(t-5)>0$ $\therefore t<-1$ 또는 $t>5$

즉 $\log_2 x < -1$ 또는 $\log_2 x > 5$이므로

$\log_2 x < \log_2 2^{-1}$ 또는 $\log_2 x > \log_2 2^5$

밑이 1보다 크므로

$x < \frac{1}{2}$ 또는 $x>32$ ...... ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$0<x<\frac{1}{2}$ 또는 $x>32$

따라서 $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = 32$이므로

$8\alpha + \beta = 8 \cdot \frac{1}{2} + 32 = 36$

답 36

13 진수의 조건에서 $x>0$ ...... ㉠

$x^{\log x} \le 10000$의 양변에 상용로그를 취하면

$\log x^{\log x} \le \log 10000$, $\log x \cdot \log x \le \log 10^4$

$\therefore (\log x)^2 - 4 \le 0$

$\log x = t$로 놓으면 $t^2 - 4 \le 0$

$(t+2)(t-2) \le 0$ $\therefore -2 \le t \le 2$

즉 $-2 \le \log x \le 2$이므로

$\log 10^{-2} \le \log x \le \log 10^2$

밑이 1보다 크므로 $\frac{1}{100} \le x \le 100$ ...... ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$\frac{1}{100} \le x \le 100$

따라서 $\alpha = \frac{1}{100}$, $\beta = 100$이므로

$\alpha\beta = 1$

답 1

14 진수의 조건에서 $x>0$ ...... ㉠

$x^{\log_{\frac{1}{2}} x} > \frac{x}{64}$의 양변에 밑이 $\frac{1}{2}$인 로그를 취하면

$0<\frac{1}{2}<1$이므로 부등호의 방향이 바뀐다.

$\log_{\frac{1}{2}} x^{\log_{\frac{1}{2}} x} < \log_{\frac{1}{2}} \frac{x}{64}$

$\log_{\frac{1}{2}} x \cdot \log_{\frac{1}{2}} x < \log_{\frac{1}{2}} x - \log_{\frac{1}{2}} 64$

$\therefore (\log_{\frac{1}{2}} x)^2 - \log_{\frac{1}{2}} x - 6 < 0$

$\log_{\frac{1}{2}} x = t$로 놓으면 $t^2 - t - 6 < 0$

$(t+2)(t-3)<0$ $\therefore -2<t<3$

즉 $-2 < \log_{\frac{1}{2}} x < 3$이므로

$\log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} < \log_{\frac{1}{2}} x < \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^3$

밑이 1보다 작으므로

$\frac{1}{8} < x < 4$ ...... ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$\frac{1}{8} < x < 4$

따라서 $M=3$, $m=1$이므로

$M-m=2$

답 2

15 $(\log_5 x)^2 - \log_5 ax^2 \ge 0$에서

$(\log_5 x)^2 - (\log_5 a + 2\log_5 x) \ge 0$

$\therefore (\log_5 x)^2 - 2\log_5 x - \log_5 a \ge 0$

$\log_5 x = t$로 놓으면

$t^2 - 2t - \log_5 a \ge 0$

모든 양수 x에 대하여 주어진 부등식이 성립하려면 모든 실수 t에 대하여 위의 부등식이 성립해야 하므로 이차방정식 $t^2 - 2t - \log_5 a = 0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4} = (-1)^2 - (-\log_5 a) \le 0$

$\log_5 a \le -1$, $\log_5 a \le \log_5 5^{-1}$

밑이 1보다 크므로 $a \le \frac{1}{5}$

이때 $a>0$이므로 $0 < a \le \frac{1}{5}$

따라서 a의 최댓값은 $\frac{1}{5}$이다.

답 $\frac{1}{5}$

16 주어진 이차방정식의 판별식을 D라 하면

계수가 실수인 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$이 실근을 갖지 않으면 $b^2-4ac<0$

$D = (\log a)^2 - 4(3 - \log a) < 0$

$\therefore (\log a)^2 + 4\log a - 12 < 0$

$\log a = t$로 놓으면

$t^2 + 4t - 12 < 0$, $(t+6)(t-2)<0$

$\therefore -6 < t < 2$

즉 $-6 < \log a < 2$이므로

$\log 10^{-6} < \log a < \log 10^2$

밑이 1보다 크므로

$10^{-6} < a < 10^2$

따라서 $\alpha = 10^{-6}$, $\beta = 10^2$이므로

$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{10^2}{10^{-6}} = 10^8$

답 ③

17 카페 안의 소음의 크기가 80 dB일 때, 소음의 세기를 x W/m²라 하면

$80 = 10\log \frac{x}{10^{-12}}$, $\log \frac{x}{10^{-12}} = 8$

$\frac{x}{10^{-12}} = 10^8$ $\therefore x = 10^{20}$

따라서 카페 안의 소음의 크기가 80 dB일 때, 소음의 세기는 10^{20} W/m²이다.

답 ⑤

18 n년 후 휴대 전화의 가격은

$100\times(1-0.12)^n=0.88^n\times100$ (만 원)

n년 후 휴대 전화의 가격이 10만 원 이하가 된다고 하면

$0.88^n\times100\le10 \qquad \therefore 0.88^n\le\frac{1}{10}$

양변에 상용로그를 취하면

$n\log0.88\le\log\frac{1}{10}, \qquad n(\log8.8-1)\le-1$

$n(0.9445-1)\le-1, \qquad -0.0555n\le-1$

$\therefore n\ge18.\cdots$

따라서 19년 후인 2042년에 휴대 전화의 가격이 처음으로 10만 원 이하가 된다. 답 ⑤

Q BOX

$\log0.88$
$=\log(8.8\times10^{-1})$
$=\log8.8-1$

$2023+19=2042$ (년)

중단원 마무리

58쪽

01 전략 $(g\circ f)(x)=g(f(x))$임을 이용한다.

풀이 $f(-3)=9^{-3}=(3^2)^{-3}=3^{-6}$이므로

$(g\circ f)(-3)=g(f(-3))=g(3^{-6})$

$=\log_{\frac{1}{3}}3^{-6}=\log_{3^{-1}}3^{-6}$

$=6$ 답 6

02 전략 함수 $y=\log_a x$ $(a>0,\ a\neq1)$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 그래프의 식은 $y=\log_a(x-m)+n$임을 이용한다.

풀이 ① 함수 $y=f(x)$는 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하므로 $x_1<x_2$이면 $f(x_1)<f(x_2)$이다.

② 일대일함수이므로 $f(x_1)=f(x_2)$이면 $x_1=x_2$이다.

④ 그래프는 $y=\log_5 x$의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

⑤ $y=\log_5(x+3)-1$의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$-y=\log_5(-x+3)-1$

$\therefore y=-\log_5(-x+3)+1$

$=\log_{\frac{1}{5}}(-x+3)+1$

따라서 $y=\log_5(x+3)-1$의 그래프는 $y=\log_{\frac{1}{5}}(-x+3)+1$의 그래프와 원점에 대하여 대칭이다.

답 ④

함수 $f: X\longrightarrow Y$가 일대일함수이다.
➡ $x_1\neq x_2$이면 $f(x_1)\neq f(x_2)$ $(x_1,\ x_2\in X)$
➡ $f(x_1)=f(x_2)$이면 $x_1=x_2$ $(x_1,\ x_2\in X)$

03 전략 $\overline{PQ}$의 중점이 원 C의 중심과 일치함을 이용한다.

풀이 $\overline{PQ}$가 원 C의 지름이므로 $\overline{PQ}$의 중점은 원의 중심 $\left(\frac{5}{4},\ 0\right)$이다.

두 점 P, Q의 x좌표를 각각 $\alpha,\ \beta$ $(\alpha>\beta)$라 하면

$P(\alpha,\ \log_a\alpha),\ Q(\beta,\ \log_a\beta)$

이므로 $\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{5}{4}$에서

$\alpha+\beta=\frac{5}{2}$ …… ㉠

$\log_a\alpha+\log_a\beta=0$에서 $\qquad \log_a\alpha\beta=0$

$\therefore \alpha\beta=1$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$\alpha=2,\ \beta=\frac{1}{2}$ $(\because \alpha>\beta)$

$x=2$를 $\left(x-\frac{5}{4}\right)^2+y^2=\frac{13}{16}$에 대입하면

$\frac{9}{16}+y^2=\frac{13}{16}, \qquad y^2=\frac{1}{4} \qquad \therefore y=\pm\frac{1}{2}$

따라서 점 P의 좌표는 $\left(2,\ \frac{1}{2}\right)$이고, 점 P는 곡선 $y=\log_a x$ 위에 있으므로

$\frac{1}{2}=\log_a 2, \qquad a^{\frac{1}{2}}=2$

$\therefore a=4$ 답 ③

04 전략 두 함수의 그래프가 직선 $y=x$에 대하여 대칭이면 서로 역함수 관계임을 이용한다.

풀이 함수 $y=2^x+2$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=2^{x-m}+2$ …… ㉠

함수 $y=\log_2 8x$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=\log_2 8(x-2)$

$=\log_2 8+\log_2(x-2)$

$=\log_2(x-2)+3$ …… ㉡

㉠, ㉡의 그래프가 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 함수는 서로 역함수 관계이다.

㉡에서 $\qquad y-3=\log_2(x-2)$

$2^{y-3}=x-2 \qquad \therefore x=2^{y-3}+2$

x와 y를 서로 바꾸면 $\qquad y=2^{x-3}+2$ …… ㉢

따라서 ㉠, ㉢이 일치하므로

$m=3$ 답 ③

참고 ㉡의 그래프가 점 $(3,\ 3)$을 지나므로 ㉠의 그래프가 점 $(3,\ 3)$을 지남을 이용하여 m의 값을 구할 수도 있다.

05 전략 함수 $y=\log_a x$는 $a>1$일 때 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하고, $0<a<1$일 때 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소함을 이용한다.

로그의 대소 비교
① $a>1$일 때,
$x_1<x_2$이면
$\log_a x_1<\log_a x_2$
② $0<a<1$일 때,
$x_1<x_2$이면
$\log_a x_1>\log_a x_2$

풀이 ㄱ. $6>5$이고 함수 $y=\log_4 x$는 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하므로

$\log_4 6>\log_4 5$

ㄴ. $\log_{\frac{1}{9}}16=\log_{\left(\frac{1}{3}\right)^2}4^2=\log_{\frac{1}{3}}4$

이때 $5>4$이고 함수 $y=\log_{\frac{1}{3}}x$는 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로

$\log_{\frac{1}{3}}5<\log_{\frac{1}{3}}4 \qquad \therefore \log_{\frac{1}{3}}5<\log_{\frac{1}{9}}16$

ㄷ. $-1=\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}=\log_{\frac{1}{2}}2$

이때 $2<3$이고 함수 $y=\log_{\frac{1}{2}}x$는 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로

$\log_{\frac{1}{2}}2>\log_{\frac{1}{2}}3 \qquad \therefore -1>\log_{\frac{1}{2}}3$

ㄹ. $2\log_7 3=\log_7 3^2=\log_7 9$, $3\log_7 2=\log_7 2^3=\log_7 8$

이때 $9>8$이고 함수 $y=\log_7 x$는 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하므로

$\log_7 9>\log_7 8$ ∴ $2\log_7 3>3\log_7 2$

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄹ이다. 답 ④

06 **전략** 정의역이 $\{x|m\le x\le n\}$인 함수 $y=\log_a(x+p)+q$에서 $0<a<1$이면 $x=n$일 때 최솟값, $x=m$일 때 최댓값을 가짐을 이용한다.

풀이 함수 $y=\log_{\frac{1}{2}}(x-5)+b$는 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로 $x=37$일 때 최솟값을 갖는다.

즉 $\log_{\frac{1}{2}}(37-5)+b=-2$이므로

$\log_{\frac{1}{2}}32+b=-2$, $\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{-5}+b=-2$

$-5+b=-2$ ∴ $b=3$ ··· ❶

따라서 함수 $y=\log_{\frac{1}{2}}(x-5)+3$은 $x=a$일 때 최댓값을 가지므로

$\log_{\frac{1}{2}}(a-5)+3=3$, $\log_{\frac{1}{2}}(a-5)=0$

$a-5=1$ ∴ $a=6$ ··· ❷

∴ $a-b=3$ ··· ❸

답 3

단계	채점 기준	비율
❶	b의 값을 구할 수 있다.	50 %
❷	a의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸	$a-b$의 값을 구할 수 있다.	10 %

07 **전략** 함수 $y=\log_a f(x)$에서 $a>1$이면 $f(x)$가 최소일 때 y가 최소임을 이용한다.

풀이 $f(x)=x^2-4x+31$로 놓으면

$f(x)=(x-2)^2+27$

함수 $y=3+\log_3(x^2-4x+31)=3+\log_3 f(x)$는 $f(x)$의 값이 증가하면 y의 값도 증가하므로 $f(x)$가 최소일 때 y는 최솟값을 갖는다.

따라서 $y=3+\log_3 f(x)$는 $f(x)=27$일 때 최소이고, 최솟값은

$3+\log_3 27=3+3=6$ 답 ③

08 **전략** 산술평균과 기하평균의 관계를 이용한다.

풀이 $\log_4 x+\log_4 y=\log_4 xy$

Q BOX: 밑이 1보다 크므로 $\log_4 xy$는 xy의 값이 최대일 때 최댓값을 갖는다.

이때 $x>0$, $y>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$x+y\ge 2\sqrt{xy}$ (단, 등호는 $x=y$일 때 성립)

$x+y=8$이므로 $8\ge 2\sqrt{xy}$

$\sqrt{xy}\le 4$ ∴ $xy\le 16$

따라서 구하는 최댓값은 $\log_4 16=2$ 답 ②

09 **전략** 로그의 정의와 성질을 이용하여 방정식의 해를 구한다.

Q BOX: $\log_a f(x)=b \iff f(x)=a^b$

풀이 진수의 조건에서 $x>0$, $x-7>0$이므로

$x>7$ ······ ㉠

$\log_8 x-\log_8(x-7)=\frac{1}{3}$에서

$\log_8\frac{x}{x-7}=\frac{1}{3}$, $\log_8\frac{x}{x-7}=\log_8 8^{\frac{1}{3}}$

Q BOX: $8^{\frac{1}{3}}=(2^3)^{\frac{1}{3}}=2$

$\frac{x}{x-7}=2$, $x=2x-14$

∴ $x=14$

$x=14$는 ㉠을 만족시키므로 주어진 방정식의 해이다.

답 14

10 **전략** 로그의 성질을 이용하여 주어진 연립방정식을 x, y에 대한 간단한 연립방정식으로 바꾸어 푼다.

풀이 진수의 조건에서 $\log(x^2+y^2)>0$, $\sqrt{x}>0$, $y>0$이므로

$x^2+y^2>1$, $x>0$, $y>0$ ······ ㉠

$\log_7\{\log(x^2+y^2)\}=0$에서 $\log(x^2+y^2)=1$

∴ $x^2+y^2=10$ ······ ㉡

$\log_3\sqrt{x}+\log_9 y=\frac{1}{2}$에서

$\frac{1}{2}\log_3 x+\frac{1}{2}\log_3 y=\frac{1}{2}$

$\log_3 x+\log_3 y=1$, $\log_3 xy=\log_3 3$

∴ $xy=3$ ······ ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$x=\pm1$, $y=\pm3$ 또는 $x=\pm3$, $y=\pm1$ (복호동순)

Q BOX: $x\ne 0$이므로 ㉢에서

$y=\frac{3}{x}$

이것을 ㉡에 대입하면

$x^2+\frac{9}{x^2}=10$

$x^4-10x^2+9=0$

$(x^2-1)(x^2-9)=0$

$x^2=1$ 또는 $x^2=9$

∴ $x=\pm1$ 또는 $x=\pm3$

∴ $x=\pm1$, $y=\pm3$ 또는 $x=\pm3$, $y=\pm1$ (복호동순)

이때 ㉠에 의하여 주어진 연립방정식의 해는

$x=1$, $y=3$ 또는 $x=3$, $y=1$

$\alpha<\beta$이므로 $\alpha=1$, $\beta=3$

∴ $\alpha+3\beta=1+3\cdot3=10$ 답 ⑤

11 **전략** $\log_6 x=t$로 치환하여 주어진 방정식을 t에 대한 이차방정식으로 나타낸 후 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용한다.

풀이 $\log_6\frac{x}{3}\cdot\log_6\frac{x}{5}=1$에서

$(\log_6 x-\log_6 3)(\log_6 x-\log_6 5)=1$

$\log_6 x=t$로 놓으면

$(t-\log_6 3)(t-\log_6 5)=1$

$t^2-(\log_6 3+\log_6 5)t+\log_6 3\cdot\log_6 5-1=0$

∴ $t^2-\log_6 15\cdot t+\log_6 3\cdot\log_6 5-1=0$

이 방정식의 두 근이 $\log_6\alpha$, $\log_6\beta$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\log_6\alpha+\log_6\beta=\log_6 15$

$\log_6\alpha\beta=\log_6 15$ ∴ $\alpha\beta=15$ 답 15

12 **전략** 이차방정식이 중근을 가질 조건을 이용한다.

풀이 주어진 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\{-(\log_5 a-1)\}^2-(3-\log_5 a)=0$

∴ $(\log_5 a)^2-\log_5 a-2=0$ ··· ❶

$\log_5 a=t$로 놓으면 $t^2-t-2=0$

$(t+1)(t-2)=0$ ∴ $t=-1$ 또는 $t=2$

즉 $\log_5 a=-1$ 또는 $\log_5 a=2$이므로

$a=5^{-1}=\frac{1}{5}$ 또는 $a=5^2=25$ ⋯ ❷

답 $\frac{1}{5}$, 25

단계	채점 기준	비율
❶	a에 대한 로그방정식을 세울 수 있다.	40 %
❷	a의 값을 모두 구할 수 있다.	60 %

13 전략 양변에 밑이 4인 로그를 취하여 푼다.

풀이 $x^{\log_4 x}=64x^2$의 양변에 밑이 4인 로그를 취하면

$\log_4 x^{\log_4 x}=\log_4 64x^2$

$\log_4 x\cdot\log_4 x=\log_4 64+2\log_4 x$

$\therefore (\log_4 x)^2-2\log_4 x-3=0$

$\log_4 x=t$로 놓으면 $t^2-2t-3=0$

$(t+1)(t-3)=0$ $\therefore t=-1$ 또는 $t=3$

즉 $\log_4 x=-1$ 또는 $\log_4 x=3$이므로

$x=4^{-1}=\frac{1}{4}$ 또는 $x=4^3=64$

따라서 모든 근의 곱은

$\frac{1}{4}\cdot 64=16$ 답 ④

14 전략 부등식 $\log_a f(x)\le\log_a g(x)$에서 $a>1$이면 부등식의 해는 $f(x)>0$, $g(x)>0$, $f(x)\le g(x)$의 공통 범위이다.

풀이 진수의 조건에서 $|x-1|>0$

$\therefore x<1$ 또는 $x>1$ ⋯⋯ ㉠

$2\log_2|x-1|\le 1-\log_2\frac{1}{2}$에서

$2\log_2|x-1|\le 2$, $\log_2|x-1|\le\log_2 2$

밑이 1보다 크므로

$|x-1|\le 2$, $-2\le x-1\le 2$

$\therefore -1\le x\le 3$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$-1\le x<1$ 또는 $1<x\le 3$

따라서 정수 x는 -1, 0, 2, 3의 4개이다. 답 ②

15 전략 밑을 같게 통일한 후 진수에 대한 부등식을 세운다.

풀이 진수의 조건에서 $\log_2 x>0$이므로

$x>1$ ⋯⋯ ㉠

$\log_5(\log_2 x)<1$에서

$\log_5(\log_2 x)<\log_5 5$

밑이 1보다 크므로 $\log_2 x<5$

$\therefore \log_2 x<\log_2 32$

밑이 1보다 크므로 $x<32$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$1<x<32$

따라서 $\alpha=1$, $\beta=32$이므로

$\alpha+\beta=33$ 답 33

Q BOX

$\log_{\frac{1}{9}} x=\log_{(\frac{1}{3})^2} x$
$=\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}} x$

$\log_2\frac{1}{2}=\log_2 2^{-1}$
$=-1$

16 전략 $\log_{\frac{1}{3}} x=t$로 치환하여 나타낸 t에 대한 이차부등식이 항상 성립함을 이용한다.

풀이 $(\log_{\frac{1}{3}} x)^2-\log_{\frac{1}{9}} x+a\ge 0$에서

$(\log_{\frac{1}{3}} x)^2-\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}} x+a\ge 0$

$\therefore 2(\log_{\frac{1}{3}} x)^2-\log_{\frac{1}{3}} x+2a\ge 0$

$\log_{\frac{1}{3}} x=t$로 놓으면 $2t^2-t+2a\ge 0$

모든 양수 x에 대하여 주어진 부등식이 성립하려면 모든 실수 t에 대하여 위의 부등식이 성립해야 하므로 이차방정식 $2t^2-t+2a=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-1)^2-4\cdot 2\cdot 2a\le 0$

$1-16a\le 0$ $\therefore a\ge\frac{1}{16}$

따라서 a의 최솟값은 $\frac{1}{16}$이다. 답 $\frac{1}{16}$

17 전략 먼저 주어진 식에 $t=30$, $C=2$를 대입하여 k의 값을 구한다.

풀이 $t=30$, $C=2$를 주어진 식에 대입하면

$\log 8=1-30k$, $30k=1-\log 8$

$30k=\log\frac{5}{4}$ $\therefore k=\frac{1}{30}\log\frac{5}{4}$

$t=60$, $C=a$를 $\log(10-C)=1-\frac{t}{30}\log\frac{5}{4}$에 대입하면

$\log(10-a)=1-\frac{60}{30}\log\frac{5}{4}$

$\log(10-a)=1-\log\left(\frac{5}{4}\right)^2$

$\log(10-a)=\log\frac{10}{\left(\frac{5}{4}\right)^2}$

$\log(10-a)=\log\frac{32}{5}$, $10-a=\frac{32}{5}$

$\therefore a=\frac{18}{5}=3.6$ 답 ④

18 전략 주어진 조건에 맞게 부등식을 세운 후 양변에 상용로그를 취하여 푼다.

풀이 n년 후 물질 A가 처음으로 5 kg 이하가 된다고 하면

$50\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{n}{60}}\le 5$, $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{n}{60}}\le\frac{1}{10}$

양변에 상용로그를 취하면

$\frac{n}{60}\log\frac{1}{3}\le\log\frac{1}{10}$, $-\frac{n}{60}\log 3\le -1$

$\therefore n\ge\frac{60}{\log 3}=\frac{60}{0.48}=125$

따라서 대기 중에 남아 있는 물질 A의 양이 처음으로 5 kg 이하가 되는 것은 현재로부터 125년 후이다.

답 125년

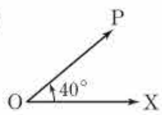
05 삼각함수

09 일반각과 호도법

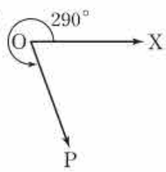
Lecture 19 일반각

64쪽

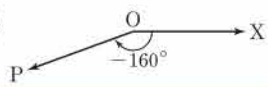
1-1 답 (1)



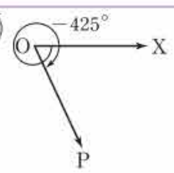
(2)



(3)



(4)



$-425°=-360°-65°$

2-1 (2) $-300°=360°\times(-1)+60°$이므로

$360°\times n+60°$

답 (1) $360°\times n+110°$ (2) $360°\times n+60°$

2-2 (2) $1195°=360°\times 3+115°$이므로

$360°\times n+115°$

(3) $-740°=360°\times(-3)+340°$이므로

$360°\times n+340°$

(4) $-645°=360°\times(-2)+75°$이므로

$360°\times n+75°$

답 (1) $360°\times n+230°$ (2) $360°\times n+115°$
(3) $360°\times n+340°$ (4) $360°\times n+75°$

Q BOX

Q쌤 한마디

각 θ를 나타내는 동경이 존재하는 사분면을 구할 때에는

$\theta=360°\times n+\alpha°$ (n은 정수, $0°\le\alpha°<360°$)

로 나타낸 후 다음을 이용한다.

① $0°<\alpha°<90°$ ➡ 제1사분면의 각
② $90°<\alpha°<180°$ ➡ 제2사분면의 각
③ $180°<\alpha°<270°$ ➡ 제3사분면의 각
④ $270°<\alpha°<360°$ ➡ 제4사분면의 각

1-2 (1) $600°=360°\times 1+240°$

따라서 $600°$는 제3사분면의 각이다.

(2) $1125°=360°\times 3+45°$

따라서 $1125°$는 제1사분면의 각이다.

(3) $-260°=360°\times(-1)+100°$

따라서 $-260°$는 제2사분면의 각이다.

(4) $-375°=360°\times(-2)+345°$

따라서 $-375°$는 제4사분면의 각이다.

답 (1) 제3사분면 (2) 제1사분면
(3) 제2사분면 (4) 제4사분면

1-3 $520°=360°\times 1+160°$이므로 $520°$는 제2사분면의 각이다.

$-490°=360°\times(-2)+230°$이므로 $-490°$는 제3사분면의 각이다.

$-215°=360°\times(-1)+145°$이므로 $-215°$는 제2사분면의 각이다.

$375°=360°\times 1+15°$이므로 $375°$는 제1사분면의 각이다.

$1015°=360°\times 2+295°$이므로 $1015°$는 제4사분면의 각이다.

$1200°=360°\times 3+120°$이므로 $1200°$는 제2사분면의 각이다.

따라서 $520°$와 같은 사분면의 각은 $-215°$, $1200°$이다.

답 $-215°$, $1200°$

Lecture 20 사분면의 각

65쪽

1-1 (1) $420°=360°\times 1+60°$

따라서 제1사분면에 존재한다.

(2) $1230°=360°\times 3+150°$

따라서 제2사분면에 존재한다.

(3) $-395°=360°\times(-2)+325°$

$270°<325°<360°$

따라서 제4사분면에 존재한다.

(4) $-1180°=360°\times(-4)+260°$

$180°<260°<270°$

따라서 제3사분면에 존재한다.

답 (1) 제1사분면 (2) 제2사분면
(3) 제4사분면 (4) 제3사분면

Lecture 21 호도법

66쪽

(호도법의 각) $=$ (육십분법의 각) $\times\dfrac{\pi}{180}$

1-1 (1) $60°=60\cdot\dfrac{\pi}{180}=\dfrac{\pi}{3}$

(2) $-150°=(-150)\cdot\dfrac{\pi}{180}=-\dfrac{5}{6}\pi$

답 (1) $\dfrac{\pi}{3}$ (2) $-\dfrac{5}{6}\pi$

(육십분법의 각) $=$ (호도법의 각) $\times\dfrac{180°}{\pi}$

1-2 (1) $\dfrac{5}{2}\pi=\dfrac{5}{2}\pi\cdot\dfrac{180°}{\pi}=450°$

(2) $-\dfrac{4}{3}\pi=\left(-\dfrac{4}{3}\pi\right)\cdot\dfrac{180°}{\pi}=-240°$

답 (1) $450°$ (2) $-240°$

2-1 $l=4\cdot\frac{\pi}{6}=\frac{2}{3}\pi$

$S=\frac{1}{2}\cdot4^2\cdot\frac{\pi}{6}=\frac{4}{3}\pi$ 답 $l=\frac{2}{3}\pi$, $S=\frac{4}{3}\pi$

다른 풀이 $S=\frac{1}{2}\cdot4\cdot\frac{2}{3}\pi=\frac{4}{3}\pi$

2-2 $r\cdot\frac{\pi}{4}=2\pi$이므로 $r=8$

$\therefore S=\frac{1}{2}\cdot8\cdot2\pi=8\pi$ 답 $r=8$, $S=8\pi$

(부채꼴의 호의 길이) $=r\times$(중심각의 크기) 임을 이용하여 먼저 반지름의 길이를 구한다.

기본+표준 유형 Q+Q

L 67쪽

01 ① $-1015°=360°\times(-3)+65°$

② $-655°=360°\times(-2)+65°$

③ $-305°=360°\times(-1)+55°$

④ $785°=360°\times2+65°$

⑤ $1145°=360°\times3+65°$

답 ③

Q 쌤 한마디

각의 크기가 주어지면 동경의 위치는 하나로 정해지지만 동경의 위치가 주어지면 그것이 나타내는 각의 크기는 하나로 정해지지 않는다.

02 ㄱ. $-950°=360°\times(-3)+130°$

ㄴ. $-690°=360°\times(-2)+30°$

ㄷ. $-230°=360°\times(-1)+130°$

ㄹ. $490°=360°\times1+130°$

ㅁ. $830°=360°\times2+110°$

이상에서 $130°$를 나타내는 동경과 일치하는 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다. 답 ㄱ, ㄷ, ㄹ

03 ① $-610°=360°\times(-2)+110°$ ➡ 제2사분면

② $-225°=360°\times(-1)+135°$ ➡ 제2사분면

③ $530°=360°\times1+170°$ ➡ 제2사분면

④ $815°=360°\times2+95°$ ➡ 제2사분면

⑤ $910°=360°\times2+190°$ ➡ 제3사분면

답 ⑤

04 θ가 제1사분면의 각이므로

$360°\times n<\theta<360°\times n+90°$ (n은 정수)

$\therefore 180°\times n<\frac{\theta}{2}<180°\times n+45°$

$0°<\theta<90°$로 놓지 않도록 주의한다.

$360°=180°\times2$이므로 $\frac{\theta}{2}$의 범위를 일반각으로 나타내려면 $n=2k$, $n=2k+1$ (k는 정수)로 나누어 생각한다.

(i) $n=2k$ (k는 정수)일 때,

$180°\times2k<\frac{\theta}{2}<180°\times2k+45°$

$\therefore 360°\times k<\frac{\theta}{2}<360°\times k+45°$

따라서 $\frac{\theta}{2}$는 제1사분면의 각이다.

(ii) $n=2k+1$ (k는 정수)일 때,

$180°\times(2k+1)<\frac{\theta}{2}<180°\times(2k+1)+45°$

$\therefore 360°\times k+180°<\frac{\theta}{2}<360°\times k+225°$

따라서 $\frac{\theta}{2}$는 제3사분면의 각이다.

(i), (ii)에서 $\frac{\theta}{2}$는 제1사분면 또는 제3사분면의 각이다.

답 제1사분면 또는 제3사분면

05 ① $15°=15\cdot\frac{\pi}{180}=\frac{\pi}{12}$

② $56°=56\cdot\frac{\pi}{180}=\frac{14}{45}\pi$

③ $165°=165\cdot\frac{\pi}{180}=\frac{11}{12}\pi$

④ $\frac{2}{5}\pi=\frac{2}{5}\pi\cdot\frac{180°}{\pi}=72°$

⑤ $\frac{7}{12}\pi=\frac{7}{12}\pi\cdot\frac{180°}{\pi}=105°$

답 ③

06 ㄱ. $50°=50\cdot\frac{\pi}{180}=\frac{5}{18}\pi$

ㄴ. $144°=144\cdot\frac{\pi}{180}=\frac{4}{5}\pi$

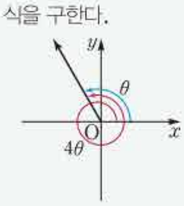
ㄷ. $\frac{7}{10}\pi=\frac{7}{10}\pi\cdot\frac{180°}{\pi}=126°$

ㄹ. $\frac{1}{6}=\frac{1}{6}\cdot\frac{180°}{\pi}=\frac{30°}{\pi}$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ②

07 각 θ를 나타내는 동경과 각 4θ를 나타내는 동경이 일치하므로

두 동경의 위치 관계를 다음과 같이 그림으로 나타내어 두 동경이 나타내는 각 사이의 관계식을 구한다.



$4\theta-\theta=2n\pi$ (n은 정수)

$3\theta=2n\pi$ $\quad\therefore \theta=\frac{2n}{3}\pi$ ...... ㉠

$0<\theta<\pi$에서 $0<\frac{2n}{3}\pi<\pi$이므로

$0<n<\frac{3}{2}$ $\quad\therefore n=1$

이것을 ㉠에 대입하면 $\theta=\frac{2}{3}\pi$ 답 ④

08 각 θ를 나타내는 동경과 각 5θ를 나타내는 동경이 원점에 대하여 대칭이므로

$5\theta-\theta=(2n+1)\pi$ (n은 정수)

$4\theta=(2n+1)\pi$ $\quad\therefore \theta=\frac{2n+1}{4}\pi$ ...... ㉠

$\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$에서 $\pi<\frac{2n+1}{4}\pi<\frac{3}{2}\pi$이므로

$4<2n+1<6$, $\quad\frac{3}{2}<n<\frac{5}{2}$

$\therefore n=2$

이것을 ㉠에 대입하면 $\theta=\frac{5}{4}\pi$ 답 $\frac{5}{4}\pi$

09 각 θ를 나타내는 동경과 각 3θ를 나타내는 동경이 x축에 대하여 대칭이므로

$\theta+3\theta=2n\pi$ (n은 정수)

$4\theta=2n\pi$ $\quad\therefore \theta=\frac{n}{2}\pi$ ...... ㉠

$\pi<\theta<2\pi$에서 $\pi<\frac{n}{2}\pi<2\pi$이므로

$2<n<4 \quad \therefore n=3$

이것을 ㉠에 대입하면

$\theta=\frac{3}{2}\pi$ 답 $\frac{3}{2}\pi$

10 각 θ를 나타내는 동경과 각 2θ를 나타내는 동경이 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로

$\theta+2\theta=2n\pi+\frac{\pi}{2}$ (n은 정수)

$3\theta=2n\pi+\frac{\pi}{2} \quad \therefore \theta=\frac{2n}{3}\pi+\frac{\pi}{6}$ ······ ㉠

$0<\theta<\pi$에서 $0<\frac{2n}{3}\pi+\frac{\pi}{6}<\pi$이므로

$-\frac{1}{6}<\frac{2n}{3}<\frac{5}{6}, \quad -\frac{1}{4}<n<\frac{5}{4}$

$\therefore n=0$ 또는 $n=1$

이것을 ㉠에 대입하면

$\theta=\frac{\pi}{6}$ 또는 $\theta=\frac{5}{6}\pi$ 답 $\frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi$

11 부채꼴의 반지름의 길이를 r, 중심각의 크기를 θ라 하면 부채꼴의 넓이가 9π이므로

$\frac{1}{2}\cdot r\cdot 3\pi=9\pi \quad \therefore r=6$

또 호의 길이가 3π이므로

$6\theta=3\pi \quad \therefore \theta=\frac{\pi}{2}$ 답 ②

12 부채꼴 AOB의 넓이는 $\frac{1}{2}\cdot 9\cdot 4\pi=18\pi$

부채꼴 AOB의 중심각의 크기를 θ라 하면

$9\theta=4\pi \quad \therefore \theta=\frac{4}{9}\pi$

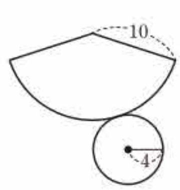
따라서 부채꼴 COD의 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot 6^2\cdot\frac{4}{9}\pi=8\pi$

이므로 색칠한 부분의 넓이는

$18\pi-8\pi=10\pi$ 답 10π

13 원뿔의 전개도는 오른쪽 그림과 같고, 부채꼴의 호의 길이는 밑면인 원의 둘레의 길이와 같으므로



$2\pi\cdot 4=8\pi$

따라서 옆면인 부채꼴의 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot 10\cdot 8\pi=40\pi$

이므로 원뿔의 겉넓이는

$40\pi+\pi\cdot 4^2=56\pi$ 답 ⑤

14 부채꼴의 호의 길이는 밑면인 원의 둘레의 길이와 같으므로

$12\theta=2\pi r \quad \therefore \theta=\frac{\pi}{6}r$

따라서 $a=\frac{\pi}{6}\cdot 2=\frac{\pi}{3}$, $b=\frac{\pi}{6}\cdot 3=\frac{\pi}{2}$이므로

$a+b=\frac{5}{6}\pi$ 답 $\frac{5}{6}\pi$

15 부채꼴의 반지름의 길이를 r, 호의 길이를 l이라 하면 둘레의 길이가 6이므로

$2r+l=6 \quad \therefore l=6-2r$

부채꼴의 넓이를 S라 하면

$S=\frac{1}{2}r(6-2r)=-r^2+3r$

$=-\left(r-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{9}{4}$ $(0<r<3)$

$6-2r>0$, $r>0$이므로 $0<r<3$

따라서 $r=\frac{3}{2}$일 때 S는 최대이므로 넓이가 최대인 부채꼴의 반지름의 길이는 $\frac{3}{2}$이다. 답 ④

16 부채꼴 모양의 화단의 반지름의 길이를 r m, 호의 길이를 l m라 하면 둘레의 길이가 120 m이므로

$2r+l=120 \quad \therefore l=120-2r$

화단의 넓이를 S m^2라 하면

$S=\frac{1}{2}r(120-2r)=-r^2+60r$

$=-(r-30)^2+900$ $(0<r<60)$

$120-2r>0$, $r>0$이므로 $0<r<60$

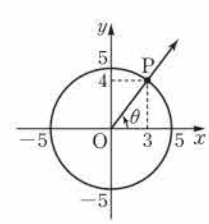
따라서 $r=30$일 때 S는 최댓값 900을 가지므로 화단의 넓이의 최댓값은 900 m^2이다. 답 ③

10 삼각함수

Lecture 22 삼각함수

70쪽

1-1 오른쪽 그림에서



$\overline{OP}=\sqrt{3^2+4^2}=5$

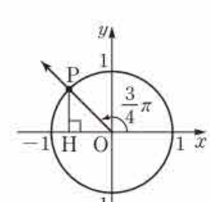
이므로

$\sin\theta=\frac{4}{5}$, $\cos\theta=\frac{3}{5}$,

$\tan\theta=\frac{4}{3}$

답 풀이 참조

1-2 (1) 오른쪽 그림과 같이 각 $\theta=\frac{3}{4}\pi$를 나타내는 동경과 원점 O를 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원의 교점을 P, 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하자.



$\overline{OP}=1$이고, $\angle POH=\frac{\pi}{4}$이므로

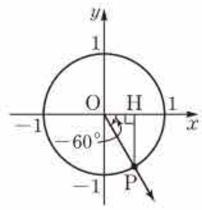
$\pi-\frac{3}{4}\pi=\frac{\pi}{4}$

$\text{P}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$\therefore \sin\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\theta=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\tan\theta=-1$

> $\overline{\text{PH}}=\overline{\text{OP}}\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$
> $\overline{\text{OH}}=\overline{\text{OP}}\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

(2) 오른쪽 그림과 같이 각 $\theta=-60°$를 나타내는 동경과 원점 O를 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원의 교점을 P, 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하자.



$\overline{\text{OP}}=1$이고, $\angle\text{POH}=60°$이므로

$\text{P}\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$\therefore \sin\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\theta=\frac{1}{2}$, $\tan\theta=-\sqrt{3}$

> $\overline{\text{PH}}=\overline{\text{OP}}\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{2}$
> $\overline{\text{OH}}=\overline{\text{OP}}\cos 60°=\frac{1}{2}$

답 풀이 참조

2-1 (1) $\theta=\frac{17}{6}\pi=2\pi\times1+\frac{5}{6}\pi$에서 θ는 제2사분면의 각이므로

> 각 θ가 제몇 사분면의 각인지 조사한다.

$\sin\theta>0$, $\cos\theta<0$, $\tan\theta<0$

(2) $\theta=-420°=360°\times(-2)+300°$에서 θ는 제4사분면의 각이므로

$\sin\theta<0$, $\cos\theta>0$, $\tan\theta<0$

답 (1) $\sin\theta>0$, $\cos\theta<0$, $\tan\theta<0$
(2) $\sin\theta<0$, $\cos\theta>0$, $\tan\theta<0$

쌤한마디

$2\pi=360°$이므로 동경이 나타내는 일반각을 호도법으로 나타내면 $2n\pi+\theta$ (n은 정수) 꼴이다. 이때 θ는 호도법으로 나타낸 각이고, 보통 $0\le\theta<2\pi$인 것을 택한다.

2-2 (1) $\sin\theta>0$이므로 θ는 제1사분면 또는 제2사분면의 각이고, $\cos\theta<0$이므로 θ는 제2사분면 또는 제3사분면의 각이다.
따라서 θ는 제2사분면의 각이다.

(2) $\sin\theta<0$이므로 θ는 제3사분면 또는 제4사분면의 각이고, $\tan\theta>0$이므로 θ는 제1사분면 또는 제3사분면의 각이다.
따라서 θ는 제3사분면의 각이다.

답 (1) 제2사분면 (2) 제3사분면

Lecture 23 삼각함수 사이의 관계 71쪽

1-1 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로

$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\left(\frac{12}{13}\right)^2=\frac{25}{169}$

이때 θ가 제4사분면의 각이므로 $\sin\theta<0$

$\therefore \sin\theta=-\frac{5}{13}$

또 $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$이므로 $\tan\theta=-\frac{5}{12}$

답 $\sin\theta=-\frac{5}{13}$, $\tan\theta=-\frac{5}{12}$

1-2 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로

$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-\left(-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{4}$

이때 $\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$이므로 $\cos\theta<0$

> θ는 제3사분면의 각이다.

$\therefore \cos\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

또 $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$이므로 $\tan\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}$

답 $\cos\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\tan\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}$

2-1 (1) $(\sin\theta+\cos\theta)^2+(\sin\theta-\cos\theta)^2$

$=\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$
$\quad+\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$
$=2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)=2$

(2) $\frac{\sin\theta}{\cos\theta-1}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{\sin^2\theta+\cos\theta(\cos\theta-1)}{(\cos\theta-1)\sin\theta}$

$=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta-\cos\theta}{(\cos\theta-1)\sin\theta}$

$=\frac{1-\cos\theta}{(\cos\theta-1)\sin\theta}$

$=-\frac{1}{\sin\theta}$

답 (1) 2 (2) $-\frac{1}{\sin\theta}$

2-2 (1) $\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{3}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{9}$

$1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{9}$

$\therefore \sin\theta\cos\theta=-\frac{4}{9}$

(2) $(\sin\theta-\cos\theta)^2=\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$

$=1-2\sin\theta\cos\theta$

$=1-2\cdot\left(-\frac{4}{9}\right)=\frac{17}{9}$

답 (1) $-\frac{4}{9}$ (2) $\frac{17}{9}$

기본+표준 유형 Q&Q 72쪽

01 $\overline{\text{OP}}=\sqrt{(-5)^2+12^2}=13$이므로

$\sin\theta=\frac{12}{13}$, $\cos\theta=-\frac{5}{13}$

$\therefore \sin\theta-\cos\theta=\frac{17}{13}$ 답 $\frac{17}{13}$

02 $\tan\theta=\dfrac{-\frac{3}{2}}{a}=-\dfrac{3}{2a}$이므로

$-\dfrac{3}{2a}=3 \qquad \therefore a=-\dfrac{1}{2}$

따라서 $\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(-\dfrac{3}{2}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$이므로

$\sin\theta=\dfrac{-\frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{10}}{2}}=-\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$

$\cos\theta=\dfrac{-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{10}}{2}}=-\dfrac{\sqrt{10}}{10}$

$\therefore \sin\theta\cos\theta=\dfrac{3}{10}$ 답 $\dfrac{3}{10}$

03 (i) $\sin\theta\cos\theta>0$일 때,

$\sin\theta>0,\ \cos\theta>0$ 또는 $\sin\theta<0,\ \cos\theta<0$

이므로 θ는 제1사분면 또는 제3사분면의 각이다.

(ii) $\cos\theta\tan\theta<0$일 때,

$\cos\theta<0,\ \tan\theta>0$ 또는 $\cos\theta>0,\ \tan\theta<0$

이므로 θ는 제3사분면 또는 제4사분면의 각이다.

(i), (ii)에서 θ는 제3사분면의 각이다. 답 ③

> 두 실수 A, B에 대하여
> ① $AB>0$이면
> $A>0,\ B>0$
> 또는 $A<0,\ B<0$
> ② $AB<0$이면
> $A<0,\ B>0$
> 또는 $A>0,\ B<0$

04 $\dfrac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$이므로

$\sin\theta<0,\ \cos\theta>0$

$\therefore \sqrt{\sin^2\theta}-|\cos\theta|+\sin\theta$

$=-\sin\theta-\cos\theta+\sin\theta$

$=-\cos\theta$ 답 ②

05 $\dfrac{\cos\theta}{1+\sin\theta}-\dfrac{\cos\theta}{1-\sin\theta}$

$=\dfrac{\cos\theta(1-\sin\theta)-\cos\theta(1+\sin\theta)}{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)}$

$=\dfrac{\cos\theta-\cos\theta\sin\theta-\cos\theta-\cos\theta\sin\theta}{1-\sin^2\theta}$

$=\dfrac{-2\cos\theta\sin\theta}{\cos^2\theta}=\dfrac{-2\sin\theta}{\cos\theta}$

$=-2\tan\theta$ 답 $-2\tan\theta$

06 $\cos^2\theta(1+\tan\theta)^2+\cos^2\theta(1-\tan\theta)^2$

$=\cos^2\theta\{(1+\tan\theta)^2+(1-\tan\theta)^2\}$

$=\cos^2\theta(1+2\tan\theta+\tan^2\theta+1-2\tan\theta+\tan^2\theta)$

$=\cos^2\theta(2+2\tan^2\theta)$

$=2\cos^2\theta\left(1+\dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}\right)$

$=2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)=2$ 답 2

07 $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{1}{5}$이므로 $\quad\cos\theta=5\sin\theta$

$\therefore \dfrac{\cos\theta+\sin\theta}{\cos\theta-\sin\theta}=\dfrac{5\sin\theta+\sin\theta}{5\sin\theta-\sin\theta}$

$=\dfrac{6\sin\theta}{4\sin\theta}=\dfrac{3}{2}$ 답 ③

08 $\dfrac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}=\dfrac{1}{4}$에서 $\quad 4+4\sin\theta=1-\sin\theta$

$5\sin\theta=-3 \qquad \therefore \sin\theta=-\dfrac{3}{5}$

$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-\left(-\dfrac{3}{5}\right)^2=\dfrac{16}{25}$이고 θ가 제3사분면의 각이므로

$\cos\theta=-\dfrac{4}{5}$ 답 ⑤

09 $(\sin\theta-\cos\theta)^2=\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$

$=1-2\cdot\left(-\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{5}{3}$

이때 $\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$이므로 $\quad\sin\theta-\cos\theta>0$

> θ는 제2사분면의 각이므로
> $\sin\theta>0,\ \cos\theta<0$

$\therefore \sin\theta-\cos\theta=\dfrac{\sqrt{15}}{3}$ 답 $\dfrac{\sqrt{15}}{3}$

10 $\sin\theta-\cos\theta=\dfrac{1}{2}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\dfrac{1}{4}$

$1-2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{4} \qquad \therefore \sin\theta\cos\theta=\dfrac{3}{8}$

$\therefore \sin^3\theta-\cos^3\theta$

> a^3-b^3
> $=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

$=(\sin\theta-\cos\theta)(\sin^2\theta+\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)$

$=\dfrac{1}{2}\cdot\left(1+\dfrac{3}{8}\right)=\dfrac{11}{16}$ 답 $\dfrac{11}{16}$

11 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

> 이차방정식
> $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라 하면
> $\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$,
> $\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$

$\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{5}$,

$\sin\theta\cos\theta=\dfrac{k}{5}$ ...... ㉠

$\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{5}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\dfrac{1}{25}$

$1+2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{25}$

$\therefore \sin\theta\cos\theta=-\dfrac{12}{25}$ ...... ㉡

㉠, ㉡에서 $\quad\dfrac{k}{5}=-\dfrac{12}{25} \qquad \therefore k=-\dfrac{12}{5}$ 답 ②

12 주어진 이차방정식의 계수가 유리수이므로 이차방정식의 한 근이 $2-\sqrt{6}$이면 다른 한 근은 $2+\sqrt{6}$이다.
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\tan\theta+\dfrac{1}{\tan\theta}=(2-\sqrt{6})+(2+\sqrt{6})=4$

이때

$\tan\theta+\dfrac{1}{\tan\theta}=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}+\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$

$=\dfrac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$

$=\dfrac{1}{\sin\theta\cos\theta}$

에서 $\dfrac{1}{\sin\theta\cos\theta}=4$이므로

$\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{4}$

$\therefore 12\sin\theta\cos\theta=3$ 답 3

쌤 한마디

a, b, c가 유리수일 때, 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 한 근이 $p+q\sqrt{m}$이면 다른 한 근은 $p-q\sqrt{m}$이다.
(단, p, q는 유리수, $q\neq0$, $\sqrt{m}$은 무리수이다.)

중단원 마무리

74쪽

01 전략 θ가 제2사분면의 각이면 $2n\pi+\frac{\pi}{2}<\theta<2n\pi+\pi$ (n은 정수)임을 이용한다.

풀이 θ가 제2사분면의 각이므로

$2n\pi+\frac{\pi}{2}<\theta<2n\pi+\pi$ (n은 정수)

$\therefore \frac{2n}{3}\pi+\frac{\pi}{6}<\frac{\theta}{3}<\frac{2n}{3}\pi+\frac{\pi}{3}$

(i) $n=3k$ (k는 정수)일 때,

$2k\pi+\frac{\pi}{6}<\frac{\theta}{3}<2k\pi+\frac{\pi}{3}$

따라서 $\frac{\theta}{3}$는 제1사분면의 각이다.

(ii) $n=3k+1$ (k는 정수)일 때,

$\frac{2(3k+1)}{3}\pi+\frac{\pi}{6}<\frac{\theta}{3}<\frac{2(3k+1)}{3}\pi+\frac{\pi}{3}$

$\therefore 2k\pi+\frac{5}{6}\pi<\frac{\theta}{3}<2k\pi+\pi$

따라서 $\frac{\theta}{3}$는 제2사분면의 각이다.

(iii) $n=3k+2$ (k는 정수)일 때,

$\frac{2(3k+2)}{3}\pi+\frac{\pi}{6}<\frac{\theta}{3}<\frac{2(3k+2)}{3}\pi+\frac{\pi}{3}$

$\therefore 2k\pi+\frac{3}{2}\pi<\frac{\theta}{3}<2k\pi+\frac{5}{3}\pi$

따라서 $\frac{\theta}{3}$는 제4사분면의 각이다.

이상에서 $\frac{\theta}{3}$는 제1사분면 또는 제2사분면 또는 제4사분면의 각이므로 각 $\frac{\theta}{3}$를 나타내는 동경이 존재할 수 없는 사분면은 제3사분면이다. 답 ③

02 전략 각 θ를 나타내는 동경이 존재하는 사분면을 구할 때에는 $\theta=360°\times n+\alpha°$ (n은 정수, $0°\le\alpha°<360°$) 꼴로 나타낸다.

풀이 ① $-1100°=360°\times(-4)+340°$
➡ 제4사분면

② $-780°=360°\times(-3)+300°$ ➡ 제4사분면

③ $690°=360°\times1+330°$ ➡ 제4사분면

④ $-\frac{26}{3}\pi=2\pi\times(-5)+\frac{4}{3}\pi$ ➡ 제3사분면

⑤ $\frac{15}{4}\pi=2\pi\times1+\frac{7}{4}\pi$ ➡ 제4사분면

답 ④

BOX

$-\frac{23}{4}\pi$, $\frac{9}{4}\pi$는 모두 $2n\pi+\frac{\pi}{4}$ (n은 정수) 꼴이므로 $\frac{\pi}{4}$를 나타내는 동경과 일치한다.

원점에 대하여 대칭이다.

$\frac{7}{15}\theta=\frac{7}{15}\cdot\frac{5}{7}\pi=\frac{\pi}{3}$

03 전략 호도법의 각을 육십분법의 각으로 나타내면 (호도법의 각)$\times\frac{180°}{\pi}$임을 이용한다.

풀이 ㄱ. $\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{180°}{\pi}=\frac{90°}{\pi}$

ㄴ. $-1610°=360°\times(-5)+190°$이므로 $-1610°$는 제3사분면의 각이다.

ㄷ. $-\frac{23}{4}\pi=2\pi\times(-3)+\frac{\pi}{4}$, $\frac{9}{4}\pi=2\pi\times1+\frac{\pi}{4}$이므로 $-\frac{23}{4}\pi$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{9}{4}\pi$를 나타내는 동경은 모두 일치한다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ④

04 전략 두 각 α, β를 나타내는 동경이 일직선 위에 있고 방향이 반대이면 $\alpha-\beta=(2n+1)\pi$ (n은 정수)임을 이용한다.

풀이 각 θ를 나타내는 동경과 각 8θ를 나타내는 동경이 일직선 위에 있고 방향이 반대이므로

$8\theta-\theta=(2n+1)\pi$ (n은 정수)

$7\theta=(2n+1)\pi$ $\quad\therefore \theta=\frac{2n+1}{7}\pi$ ...... ㉠

$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$에서 $\frac{\pi}{2}<\frac{2n+1}{7}\pi<\pi$이므로

$\frac{7}{2}<2n+1<7$, $\quad\frac{5}{4}<n<3$

$\therefore n=2$

이것을 ㉠에 대입하면 $\quad\theta=\frac{5}{7}\pi$

$\therefore \cos\frac{7}{15}\theta=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$ 답 ②

05 전략 두 각 α, β를 나타내는 동경이 y축에 대하여 대칭이면 $\alpha+\beta=(2n+1)\pi$ (n은 정수)임을 이용한다.

풀이 각 θ를 나타내는 동경과 각 5θ를 나타내는 동경이 y축에 대하여 대칭이므로

$\theta+5\theta=(2n+1)\pi$ (n은 정수)

$6\theta=(2n+1)\pi$

$\therefore \theta=\frac{2n+1}{6}\pi$ ...... ㉠ ··· ❶

$\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$에서 $\pi<\frac{2n+1}{6}\pi<\frac{3}{2}\pi$이므로

$6<2n+1<9$, $\quad\frac{5}{2}<n<4$

$\therefore n=3$ ··· ❷

이것을 ㉠에 대입하면 $\quad\theta=\frac{7}{6}\pi$ ··· ❸

답 $\frac{7}{6}\pi$

단계	채점 기준	비율
❶	θ를 n에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40 %
❷	n의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸	각 θ의 크기를 구할 수 있다.	20 %

06 전략 반지름의 길이가 r이고 중심각의 크기가 θ인 부채꼴의 호의 길이와 넓이는 각각 $r\theta$, $\frac{1}{2}r^2\theta$이다.

풀이 부채꼴의 반지름의 길이를 r, 호의 길이를 l이라 하면

$l=r\cdot 1=r$

이때 부채꼴의 둘레의 길이가 24이므로

$2r+r=24 \qquad \therefore r=8$

따라서 부채꼴의 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot 8^2\cdot 1=32$ 　　답 32

> 반지름의 길이가 r이고 중심각의 크기가 θ인 부채꼴의 둘레의 길이는
> $2\times$(반지름의 길이)
> $+$(호의 길이)
> $=2r+r\theta$

07 **전략** 반지름의 길이가 r이고 중심각의 크기가 θ인 부채꼴의 호의 길이는 $r\theta$이다.

풀이 작은 부채꼴은 반지름의 길이가 2, 중심각의 크기가 θ이므로 호의 길이는 　2θ

큰 부채꼴은 반지름의 길이가 5, 중심각의 크기가 θ이므로 호의 길이는 　5θ

색칠한 부분의 둘레의 길이가 12이므로

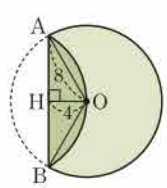
$2\theta+5\theta+2(5-2)=12$

> 색칠한 부분의 둘레에서 한 선분의 길이

$7\theta=6 \qquad \therefore \theta=\frac{6}{7}$ 　　답 ⑤

08 **전략** 접힌 부분에서 직각삼각형을 찾고 삼각비를 이용하여 호에 대한 중심각의 크기를 구한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 접힌 선분의 양 끝 점을 A, B라 하고 원의 중심 O에서 현 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\overline{OA}=8,\ \overline{OH}=\frac{1}{2}\cdot 8=4$

직각삼각형 OAH에서

$\cos(\angle AOH)=\frac{\overline{OH}}{\overline{OA}}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$

이므로 　$\angle AOH=\frac{\pi}{3}\ \left(\because 0<\angle AOH<\frac{\pi}{2}\right)$

$\therefore \angle AOB=2\angle AOH=\frac{2}{3}\pi$ 　　…❶

따라서 접힌 활꼴 부분의 넓이는

(부채꼴 AOB의 넓이)$-\triangle OAB$

> 두 변의 길이가 a, b이고 그 끼인각의 크기가 $\theta\left(\frac{\pi}{2}<\theta<\pi\right)$인 삼각형의 넓이는
> $\frac{1}{2}ab\sin(\pi-\theta)$

$=\frac{1}{2}\cdot 8^2\cdot\frac{2}{3}\pi-\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 8\cdot\sin\left(\pi-\frac{2}{3}\pi\right)$

$=\frac{64}{3}\pi-16\sqrt{3}$ 　　…❷

답 $\frac{64}{3}\pi-16\sqrt{3}$

단계	채점 기준	비율
❶	$\angle AOB$의 크기를 구할 수 있다.	50 %
❷	접힌 활꼴 부분의 넓이를 구할 수 있다.	50 %

09 **전략** 반지름의 길이가 r, 호의 길이가 l인 부채꼴의 넓이는 $\frac{1}{2}rl$이다.

풀이 부채꼴의 반지름의 길이를 r, 호의 길이를 l이라 하면 넓이가 12이므로

$\frac{1}{2}rl=12 \qquad \therefore l=\frac{24}{r}$

따라서 부채꼴의 둘레의 길이는

$2r+l=2r+\frac{24}{r}$

$2r>0,\ \frac{24}{r}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$2r+\frac{24}{r}\geq 2\sqrt{2r\cdot\frac{24}{r}}=2\cdot 4\sqrt{3}=8\sqrt{3}$

(단, 등호는 $r=2\sqrt{3}$일 때 성립)

> $2r=\frac{24}{r}$에서 　$r^2=12$
> $\therefore r=2\sqrt{3}$
> $(\because r>0)$

즉 부채꼴의 둘레의 길이의 최솟값은 $8\sqrt{3}$이다.

답 $8\sqrt{3}$

10 **전략** 먼저 원의 넓이를 이용하여 원의 반지름의 길이를 구한다.

풀이 원의 반지름의 길이를 r라 하면

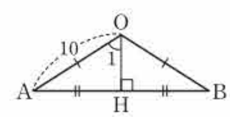
$\pi r^2=100\pi, \qquad r^2=100$

$\therefore r=10\ (\because r>0)$

$\widehat{AB}$의 길이가 반지름의 길이의 2배이므로

$10\theta=2\cdot 10 \qquad \therefore \theta=2$

$\triangle OAB$는 $\overline{OA}=\overline{OB}$인 이등변삼각형이므로 오른쪽 그림과 같이 점 O에서 $\overline{AB}$에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\triangle OAH$에서 $\angle AOH=1$이고

> $\angle AOH=\frac{1}{2}\angle AOB$
> $=\frac{\theta}{2}=1$

$\sin 1=\frac{\overline{AH}}{10} \qquad \therefore \overline{AH}=10\sin 1$

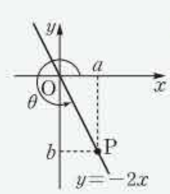
$\therefore \overline{AB}=2\overline{AH}=20\sin 1$ 　　답 ②

11 **전략** 삼각함수의 정의를 이용하여 $\sin\theta$, $\cos\theta$의 값을 구한다.

풀이 점 $P(a,\ b)$가 직선 $y=-2x$ 위의 점이므로

$b=-2a$

이때 $a>0$이므로 점 $P(a,\ b)$는 제4사분면 위에 있고

> 
>

$\overline{OP}=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{a^2+(-2a)^2}$

$=\sqrt{5a^2}=\sqrt{5}a$

따라서

$\sin\theta=\frac{b}{\sqrt{5}a}=\frac{-2a}{\sqrt{5}a}=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$,

$\cos\theta=\frac{a}{\sqrt{5}a}=\frac{\sqrt{5}}{5}$

이므로

$\sin\theta-\cos\theta=-\frac{3\sqrt{5}}{5}$ 　　답 $-\frac{3\sqrt{5}}{5}$

12 **전략** $\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$에서 각 삼각함수의 값의 부호를 조사한다.

풀이 $\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$이므로

> θ는 제3사분면의 각이다.

$\sin\theta<0,\ \cos\theta<0,\ \tan\theta>0$

ㄴ. $\cos\theta<0,\ \tan\theta>0$이므로 　$\tan\theta-\cos\theta>0$

ㄷ. $\sin\theta<0,\ \cos\theta<0$이므로 　$\sin\theta\cos\theta>0$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 　　답 ⑤

13 전략 $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\dfrac{a}{b}}$ $(ab\neq0)$이면 $a>0$, $b<0$임을 이용한다.

풀이 $\dfrac{\sqrt{\cos\theta}}{\sqrt{\sin\theta}}=-\sqrt{\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}}$에서

$\cos\theta>0$, $\sin\theta<0$

즉 θ는 제4사분면의 각이므로

$\tan\theta<0$

따라서 $\tan\theta+\sin\theta<0$이므로

$$\begin{aligned}&\sqrt{(\tan\theta+\sin\theta)^2}-|\tan\theta|\\&=-(\tan\theta+\sin\theta)-(-\tan\theta)\\&=-\tan\theta-\sin\theta+\tan\theta\\&=-\sin\theta\end{aligned}$$

답 $-\sin\theta$

14 전략 $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$, $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$임을 이용하여 각 등식의 좌변을 간단히 한다.

풀이 ① $\dfrac{\cos\theta}{1+\sin\theta}+\tan\theta=\dfrac{\cos\theta}{1+\sin\theta}+\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$$\begin{aligned}&=\frac{\cos^2\theta+\sin\theta+\sin^2\theta}{(1+\sin\theta)\cos\theta}\\&=\frac{1+\sin\theta}{(1+\sin\theta)\cos\theta}\\&=\frac{1}{\cos\theta}\end{aligned}$$

② $(1+\tan^2\theta)(1-\sin^2\theta)=\left(1+\dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}\right)\cos^2\theta$

$=\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$

③ $\sin^4\theta-\cos^4\theta=(\sin^2\theta+\cos^2\theta)(\sin^2\theta-\cos^2\theta)$

$$\begin{aligned}&=\sin^2\theta-\cos^2\theta\\&=\sin^2\theta-(1-\sin^2\theta)\\&=2\sin^2\theta-1\end{aligned}$$

④ $\dfrac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}=\dfrac{\dfrac{2\sin\theta}{\cos\theta}}{1+\dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}$

$$\begin{aligned}&=\frac{2\sin\theta\cos\theta}{\cos^2\theta+\sin^2\theta}\\&=2\sin\theta\cos\theta\end{aligned}$$

⑤ $\left(\dfrac{1}{\sin\theta}+1\right)\left(\dfrac{1}{\cos\theta}+1\right)\left(\dfrac{1}{\sin\theta}-1\right)\left(\dfrac{1}{\cos\theta}-1\right)$

$$\begin{aligned}&=\left(\frac{1}{\sin\theta}+1\right)\left(\frac{1}{\sin\theta}-1\right)\left(\frac{1}{\cos\theta}+1\right)\left(\frac{1}{\cos\theta}-1\right)\\&=\left(\frac{1}{\sin^2\theta}-1\right)\left(\frac{1}{\cos^2\theta}-1\right)\\&=\frac{1-\sin^2\theta}{\sin^2\theta}\cdot\frac{1-\cos^2\theta}{\cos^2\theta}\\&=\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}\cdot\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}=1\end{aligned}$$

답 ③

15 전략 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$임을 이용하여 $\cos\theta$의 값을 구한 후 $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$임을 이용한다.

풀이 $\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-\left(\dfrac{\sqrt{21}}{7}\right)^2=\dfrac{4}{7}$이므로

$\cos\theta=-\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$ $\left(\because \dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi\right)$

θ는 제2사분면의 각이므로
$\cos\theta<0$

$\therefore \tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{\dfrac{\sqrt{21}}{7}}{-\dfrac{2\sqrt{7}}{7}}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

답 ①

16 전략 주어진 조건과 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$임을 이용하여 먼저 $\sin^2\theta$의 값을 구한다.

풀이 $|\sin\theta|=|\cos\theta|$이고 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로

$|\sin\theta|=|\cos\theta|$에서
$|\sin\theta|^2=|\cos\theta|^2$
$\therefore \sin^2\theta=\cos^2\theta$

$2\sin^2\theta=1$ $\qquad\therefore \sin^2\theta=\dfrac{1}{2}$

이때 θ는 제4사분면의 각이므로

$\sin\theta<0$, $\cos\theta>0$

$\sin\theta=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore \cos\theta-\sin\theta=\sqrt{2}$

답 $\sqrt{2}$

17 전략 주어진 등식의 좌변을 통분하여 정리한 후 $\cos\theta$에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 $\dfrac{\sin\theta}{1-\sin\theta}-\dfrac{\sin\theta}{1+\sin\theta}$

$$\begin{aligned}&=\frac{\sin\theta(1+\sin\theta)-\sin\theta(1-\sin\theta)}{(1-\sin\theta)(1+\sin\theta)}\\&=\frac{\sin\theta+\sin^2\theta-\sin\theta+\sin^2\theta}{1-\sin^2\theta}\\&=\frac{2\sin^2\theta}{1-\sin^2\theta}\\&=\frac{2(1-\cos^2\theta)}{\cos^2\theta}\end{aligned}$$

따라서 $\dfrac{2(1-\cos^2\theta)}{\cos^2\theta}=4$이므로

$1-\cos^2\theta=2\cos^2\theta$, $\qquad\cos^2\theta=\dfrac{1}{3}$

$\therefore \cos\theta=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ $\left(\because \dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi\right)$

θ는 제2사분면의 각이므로
$\cos\theta<0$

답 ①

18 전략 $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$임을 이용하여 주어진 식을 $\sin\theta$, $\cos\theta$에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$이므로

$\dfrac{1+\tan\theta}{\sin\theta}=\dfrac{1+\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}}{\sin\theta}=\dfrac{\cos\theta+\sin\theta}{\sin\theta\cos\theta}$

$=\dfrac{1}{2\sin\theta\cos\theta}$ …… ㉠

$\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{2}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\dfrac{1}{4}$

$1+2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{4}$

$\therefore \sin\theta\cos\theta=-\dfrac{3}{8}$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$\dfrac{1+\tan\theta}{\sin\theta}=\dfrac{1}{2\cdot\left(-\dfrac{3}{8}\right)}=-\dfrac{4}{3}$

답 ②

06 삼각함수의 그래프

11 삼각함수의 그래프

Lecture 24 함수 $y=\sin x$, $y=\cos x$의 성질 78쪽

1-1 함수 $f(x)$의 주기가 3이므로

$f(x+3)=f(x)$

$\therefore f(11)=f(8)=f(5)=f(2)=-5$ 답 -5

주기가 p인 주기함수 f
➡ $f(x+p)=f(x)$

1-2 함수 $f(x)$의 주기가 4이므로

$f(x+4)=f(x)$

$\therefore f(13)=f(9)=f(5)=f(1)$

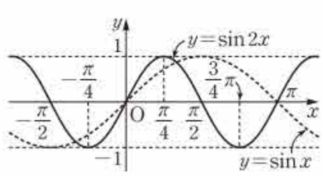
$0\le x<4$에서 $f(x)=x+3$이므로

$f(13)=f(1)=1+3=4$ 답 4

2-1 (1) $y=\sin 2x$의 그래프는 $y=\sin x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{1}{2}$배 한 것이다.

따라서 그래프는 다음 그림과 같고 치역은 $\{y\mid -1\le y\le 1\}$, 주기는 π이다.

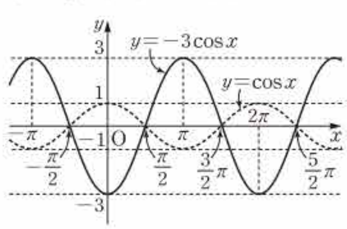
$y=\sin bx$의 그래프
➡ $y=\sin x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{1}{|b|}$배 하여 그린다.



(2) $y=-3\cos x$의 그래프는 $y=\cos x$의 그래프를 y축의 방향으로 3배 한 후 x축에 대하여 대칭이동한 것이다.

따라서 그래프는 다음 그림과 같고 치역은 $\{y\mid -3\le y\le 3\}$, 주기는 2π이다.

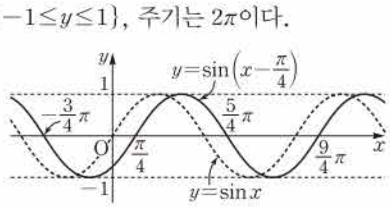
$y=a\cos x$의 그래프
➡ $y=\cos x$의 그래프를 y축의 방향으로 $|a|$배 하여 그린다.



답 풀이 참조

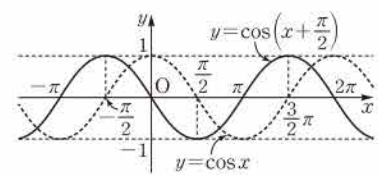
2-2 (1) $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$의 그래프는 $y=\sin x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{4}$만큼 평행이동한 것이다.

따라서 그래프는 다음 그림과 같고 치역은 $\{y\mid -1\le y\le 1\}$, 주기는 2π이다.



(2) $y=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$의 그래프는 $y=\cos x$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{\pi}{2}$만큼 평행이동한 것이다.

따라서 그래프는 다음 그림과 같고 치역은 $\{y\mid -1\le y\le 1\}$, 주기는 2π이다.



답 풀이 참조

쌤 한마디

삼각함수의 치역과 주기

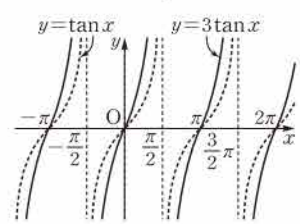
① 삼각함수의 그래프를 y축의 방향으로 확대하거나 축소하면 주기가 변하지 않고, x축의 방향으로 확대하거나 축소하면 치역이 변하지 않는다.

② 삼각함수의 그래프를 x축의 방향으로 평행이동하면 치역과 주기가 모두 변하지 않고, y축의 방향으로 평행이동하면 주기가 변하지 않는다.

Lecture 25 함수 $y=\tan x$의 성질 79쪽

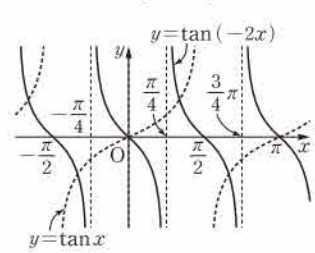
1-1 (1) $y=3\tan x$의 그래프는 $y=\tan x$의 그래프를 y축의 방향으로 3배 한 것이다.

따라서 그래프는 다음 그림과 같고 주기는 π, 점근선의 방정식은 $x=n\pi+\frac{\pi}{2}$ (n은 정수)이다.



(2) $y=\tan(-2x)$의 그래프는 $y=\tan x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{1}{2}$배 한 후 y축에 대하여 대칭이동한 것이다.

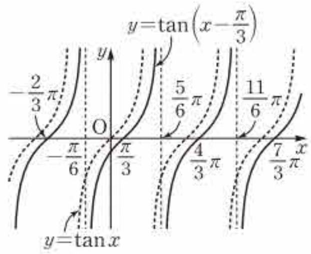
따라서 그래프는 다음 그림과 같고 주기는 $\frac{\pi}{2}$, 점근선의 방정식은 $x=\frac{n}{2}\pi+\frac{\pi}{4}$ (n은 정수)이다.



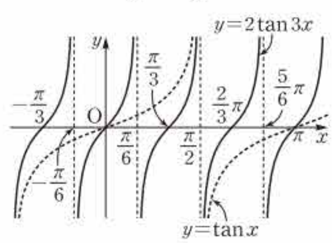
답 풀이 참조

1-2 (1) $y=\tan\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$의 그래프는 $y=\tan x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{3}$만큼 평행이동한 것이다.

따라서 그래프는 다음 그림과 같고 주기는 π, 점근선의 방정식은 $x=n\pi+\frac{5}{6}\pi$ (n은 정수)이다.



(2) $y=2\tan 3x$의 그래프는 $y=\tan x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{1}{3}$배, y축의 방향으로 2배 한 것이다.
따라서 그래프는 다음 그림과 같고 주기는 $\frac{\pi}{3}$, 점근선의 방정식은 $x=\frac{n}{3}\pi+\frac{\pi}{6}$ (n은 정수)이다.



답 풀이 참조

2-1 (1) $y=\frac{1}{2}\sin\left(3x+\frac{\pi}{2}\right)$의 최댓값은 $\frac{1}{2}$, 최솟값은 $-\frac{1}{2}$이고 주기는 $\frac{2}{3}\pi$이다.

(2) $y=3\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)-1$의 최댓값은 $3-1=2$, 최솟값은 $-3-1=-4$이고 주기는 $\frac{2\pi}{2}=\pi$이다.

답 (1) 최댓값: $\frac{1}{2}$, 최솟값: $-\frac{1}{2}$, 주기: $\frac{2}{3}\pi$
(2) 최댓값: 2, 최솟값: -4, 주기: π

2-2 (1) $y=\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+2$의 주기는 π이고 점근선의 방정식은 $x+\frac{\pi}{4}=n\pi+\frac{\pi}{2}$, 즉 $x=n\pi+\frac{\pi}{4}$ (n은 정수)이다.

(2) $y=-\tan\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)-3$의 주기는 $\frac{\pi}{\frac{1}{2}}=2\pi$이고 점근선의 방정식은 $\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}=n\pi+\frac{\pi}{2}$, 즉 $x=2n\pi+\frac{4}{3}\pi$ (n은 정수)이다.

QBOX
$\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}=n\pi+\frac{\pi}{2}$에서
$\frac{x}{2}=n\pi+\frac{2}{3}\pi$
$\therefore x=2n\pi+\frac{4}{3}\pi$

답 풀이 참조

기본+표준 유형 Q+Q 80쪽

01 함수 $f(x)$의 주기가 p이므로
$f(x+p)=f(x)$
$\therefore f(p)=f(0)=\sin 0+\cos 0=1$ 답 ⑤

02 조건 (가)에 의하여
$f(17)=f(14)=f(11)=\cdots=f(2)$
조건 (나)에 의하여
$f(2)=-2\cdot 2^2+5=-3$
$\therefore f(17)=f(2)=-3$ 답 -3

03 ⑤ $0<x<\frac{\pi}{2}$에서 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.

답 ⑤

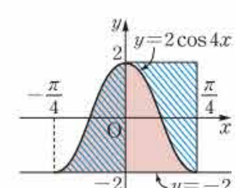
04 ㄴ. 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.
ㄷ. 주기가 π이므로
$f(x+\pi)=f(x)$
$\therefore f(3\pi)=f(2\pi)=f(\pi)$
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ㄱ, ㄷ

05 $y=\sin x$의 그래프에서
$\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{\pi}{2}$ $\therefore x_1+x_2=\pi$
$\frac{x_3+x_4}{2}=\frac{5}{2}\pi$ $\therefore x_3+x_4=5\pi$
$\frac{x_5+x_6}{2}=\frac{9}{2}\pi$ $\therefore x_5+x_6=9\pi$
$\frac{x_7+x_8}{2}=\frac{13}{2}\pi$ $\therefore x_7+x_8=13\pi$
$\frac{x_9+x_{10}}{2}=\frac{17}{2}\pi$ $\therefore x_9+x_{10}=17\pi$

QBOX
$y=\sin x\,(0\le x\le\pi)$의 그래프가 직선 $x=\frac{\pi}{2}$에 대하여 대칭이므로 이 그래프와 직선 $y=k$의 두 교점도 직선 $x=\frac{\pi}{2}$에 대하여 대칭이다.

답 17π

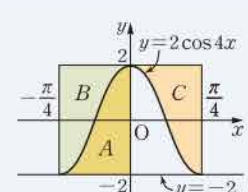
06 오른쪽 그림에서 빗금 친 두 부분의 넓이가 서로 같으므로 구하는 넓이는
$\frac{\pi}{4}\cdot\{2-(-2)\}=\pi$



답 π

쌤 한마디

$y=2\cos 4x\left(-\frac{\pi}{4}\le x\le 0\right)$의 그래프는 점 $\left(-\frac{\pi}{8}, 0\right)$에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림에서 A, B의 넓이는 같다.



이때 $y=2\cos 4x\left(-\frac{\pi}{4}\le x\le\frac{\pi}{4}\right)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이므로 B, C의 넓이가 같다.
따라서 A, C의 넓이가 같음을 알 수 있다.

07 $y=\tan\left(\frac{\pi}{2}x-\frac{\pi}{8}\right)-6=\tan\frac{\pi}{2}\left(x-\frac{1}{4}\right)-6$의 그래프는 $y=\tan\frac{\pi}{2}x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{1}{4}$만큼, y축의 방향으로 -6만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $m=\frac{1}{4}$, $n=-6$이므로

$mn=-\frac{3}{2}$ 답 $-\frac{3}{2}$

08 ㄱ. $y=2\cos 2x+1$의 그래프는 $y=\cos 2x$의 그래프를 y축의 방향으로 2배 한 후 y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

ㄴ. $y=-\cos 2x-4$의 그래프는 $y=\cos 2x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 후 y축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 것이다.

ㄷ. $y=\cos 4x-3$의 그래프는 $y=\cos 2x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{1}{2}$배 한 후 y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이다.

ㄹ. $y=\cos(2x-\pi)+5=\cos 2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+5$의 그래프는 $y=\cos 2x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{2}$만큼, y축의 방향으로 5만큼 평행이동한 것이다.

이상에서 $y=\cos 2x$의 그래프를 평행이동 또는 대칭이동하여 겹쳐질 수 있는 그래프의 식인 것은 ㄴ, ㄹ이다.

답 ㄴ, ㄹ

참고 ㄴ. $y=-\cos 2x-4$의 그래프는 $y=\cos 2x$의 그래프를 y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 후 x축에 대하여 대칭이동한 것으로 생각할 수도 있다.

09 ㄱ. $y=2\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+1$의 주기는 2π이고, $y=-\tan 2x-5$의 주기는 $\frac{\pi}{2}$이므로 두 함수의 주기는 다르다.

ㄴ. 최댓값은 $2+1=3$이다.

ㄷ. $x=\frac{\pi}{2}$일 때,

$y=2\cos\frac{\pi}{4}+1=\sqrt{2}+1$

$\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$이므로
$2\cos\frac{\pi}{4}+1$
$=2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+1$
$=\sqrt{2}+1$

따라서 그래프는 점 $\left(\frac{\pi}{2}, \sqrt{2}+1\right)$을 지난다.

이상에서 옳은 것은 ㄴ뿐이다. 답 ㄴ

10 $y=3\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)-2$의 최댓값은 $3-2=1$, 최솟값은 $-3-2=-5$이고 주기는 $\frac{2\pi}{2}=\pi$이므로

$a=1$, $b=-5$, $c=\pi$

$\therefore abc=-5\pi$ 답 ②

11 $f(x)=a\sin bx+c$의 최댓값이 6이고 $a>0$이므로

$a+c=6$ …… ㉠

주기가 π이고 $b>0$이므로

$\frac{2\pi}{b}=\pi \qquad \therefore b=2$

따라서 $f(x)=a\sin 2x+c$이고 $f\left(\frac{\pi}{12}\right)=4$이므로

$a\sin\frac{\pi}{6}+c=4$

$\therefore \frac{1}{2}a+c=4$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=4$, $c=2$

$\therefore a+b-c=4$ 답 4

12 $f(x)=a\tan bx-2$의 주기가 2π이고 $b>0$이므로

$\frac{\pi}{b}=2\pi \qquad \therefore b=\frac{1}{2}$

따라서 $f(x)=a\tan\frac{x}{2}-2$이고 $f\left(\frac{2}{3}\pi\right)=1$이므로

$a\tan\frac{\pi}{3}-2=1$

$\sqrt{3}a=3 \qquad \therefore a=\sqrt{3}$

$\therefore \frac{a}{b}=\sqrt{3}\cdot 2=2\sqrt{3}$ 답 $2\sqrt{3}$

13 주어진 함수의 최댓값이 2, 최솟값이 -2이고 $a>0$이므로

$a=2$

또 주기가 $\frac{5}{4}\pi-\frac{\pi}{4}=\pi$이고 $b>0$이므로

$\frac{2\pi}{b}=\pi \qquad \therefore b=2$

따라서 주어진 함수는 $y=2\sin(2x-c)$이고, 이 함수의 그래프가 점 $\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$을 지나므로

$0=2\sin\left(\frac{\pi}{2}-c\right), \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2}-c\right)=0$

이때 $-\frac{\pi}{2}<\frac{\pi}{2}-c<\frac{\pi}{2}$이므로

$0<c<\pi$에서
$-\pi<-c<0$
이므로
$-\frac{\pi}{2}<\frac{\pi}{2}-c<\frac{\pi}{2}$

$\frac{\pi}{2}-c=0 \qquad \therefore c=\frac{\pi}{2}$

$\therefore abc=2\pi$ 답 2π

14 주어진 함수의 최댓값이 3, 최솟값이 -1이고 $a>0$이므로

$a+c=3$, $-a+c=-1$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=2$, $c=1$

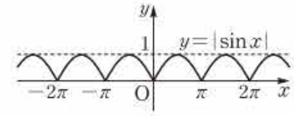
또 주기가 $2\pi-(-2\pi)=4\pi$이고 $b>0$이므로

$\frac{2\pi}{b}=4\pi \qquad \therefore b=\frac{1}{2}$

$\therefore abc=1$ 답 ③

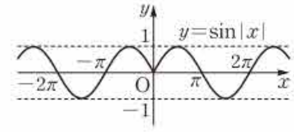
15 $y=|\sin x|$의 그래프는 다음 그림과 같다.

$y=\sin x$의 그래프에서 $y\geq 0$인 부분은 그대로 두고 $y<0$인 부분은 x축에 대하여 대칭이동한다.

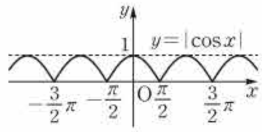


ㄱ. $y=\sin|x|$의 그래프는 다음 그림과 같다.

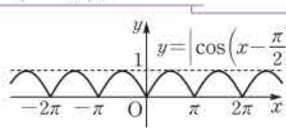
$y=\sin x$의 그래프에서 $x\geq 0$인 부분만 그린 후 $x\geq 0$인 부분을 y축에 대하여 대칭이동한다.



ㄴ. $y=|\cos x|$의 그래프는 다음 그림과 같다.



ㄷ. $y=\left|\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right|$의 그래프는 다음 그림과 같다.



$y=|\cos x|$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{2}$만큼 평행이동한 것이다.

이상에서 $y=|\sin x|$의 그래프와 일치하는 것은 ㄷ뿐이다. 답 ③

16 $y=|\cos ax|+b$의 주기가 $\frac{\pi}{2}$이고 $a>0$이므로

$\frac{\pi}{a}=\frac{\pi}{2}$

$\therefore a=2$

$0\le|\cos 2x|\le 1$이므로

$b\le|\cos 2x|+b\le 1+b$

이때 $y=|\cos ax|+b$의 최댓값이 3이므로

$1+b=3$

$\therefore b=2$

$\therefore a+b=4$ 답 ⑤

쌤 한마디

절댓값 기호를 포함한 삼각함수의 주기

① $y=|\sin x|$의 주기: π

➡ $y=|\sin bx|$의 주기: $\frac{\pi}{|b|}$

② $y=|\cos x|$의 주기: π

➡ $y=|\cos bx|$의 주기: $\frac{\pi}{|b|}$

③ $y=|\tan x|$의 주기: π

➡ $y=|\tan bx|$의 주기: $\frac{\pi}{|b|}$

12 삼각함수의 성질

Lecture 26 여러 가지 각에 대한 삼각함수의 성질 83쪽

1-1 (1) $\sin\frac{17}{4}\pi=\sin\left(4\pi+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

(2) $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

(3) $\tan\frac{2}{3}\pi=\tan\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=-\tan\frac{\pi}{3}=-\sqrt{3}$

(4) $\sin\frac{5}{6}\pi=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$

답 (1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (3) $-\sqrt{3}$ (4) $\frac{1}{2}$

다른 풀이 (3) $\tan\frac{2}{3}\pi=\tan\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{\tan\frac{\pi}{6}}$

$=-\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{3}}=-\sqrt{3}$

(4) $\sin\frac{5}{6}\pi=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$

쌤 한마디

삼각함수의 변형 방법

$\frac{n}{2}\pi\pm\theta$ 또는 $90°\times n\pm\theta$ (n은 정수) 꼴의 삼각함수의 값은 다음과 같은 순서로 구한다.

(i) n이 짝수일 때,

sin ➡ sin, cos ➡ cos, tan ➡ tan

n이 홀수일 때,

sin ➡ cos, cos ➡ sin, tan ➡ $\frac{1}{\tan}$

로 삼각함수를 정한다.

(ii) θ를 예각으로 생각하여 $\frac{n}{2}\pi\pm\theta$ 또는 $90°\times n\pm\theta$를 나타내는 동경이 존재하는 사분면에서 처음 주어진 삼각함수의 부호가 양이면 $+$, 음이면 $-$를 붙인다.

1-2 (1) $\cos\frac{7}{3}\pi=\cos\left(2\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$

(2) $\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-\tan\frac{\pi}{4}=-1$

(3) $\sin\frac{7}{6}\pi=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)=-\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{2}$

(4) $\cos\frac{3}{4}\pi=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=-\sin\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

답 (1) $\frac{1}{2}$ (2) -1 (3) $-\frac{1}{2}$ (4) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

1-3 (1) $\sin 117°=\sin(90°+27°)=\cos 27°$

삼각함수표에서 $\cos 27°=0.8910$이므로

$\sin 117°=0.8910$

(2) $\cos 154°=\cos(180°-26°)=-\cos 26°$

삼각함수표에서 $\cos 26°=0.8988$이므로

$\cos 154°=-0.8988$

(3) $\tan 335°=\tan(360°-25°)=-\tan 25°$

삼각함수표에서 $\tan 25°=0.4663$이므로

$\tan 335°=-0.4663$

답 (1) 0.8910 (2) -0.8988 (3) -0.4663

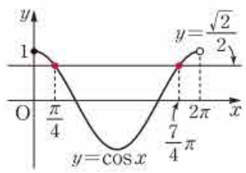
Lecture 27 삼각방정식과 삼각부등식 84쪽

1-1 답 (가) $\frac{\pi}{6}$ (나) $\frac{5}{6}\pi$, $x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{5}{6}\pi$

1-2 (1) $\sqrt{2}\cos x=1$에서

$$\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

오른쪽 그림과 같이 $0\le x<2\pi$에서 함수 $y=\cos x$의 그래프와 직선 $y=\frac{\sqrt{2}}{2}$의 교점의 x좌표가 $\frac{\pi}{4}$, $\frac{7}{4}\pi$이므로

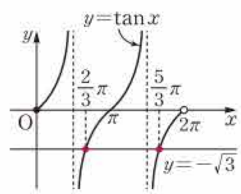


$$x=\frac{\pi}{4} \text{ 또는 } x=\frac{7}{4}\pi$$

(2) $\tan x+\sqrt{3}=0$에서

$$\tan x=-\sqrt{3}$$

오른쪽 그림과 같이 $0\le x<2\pi$에서 함수 $y=\tan x$의 그래프와 직선 $y=-\sqrt{3}$의 교점의 x좌표가 $\frac{2}{3}\pi$, $\frac{5}{3}\pi$이므로



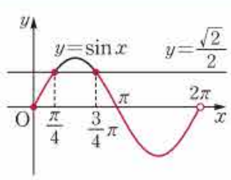
$$x=\frac{2}{3}\pi \text{ 또는 } x=\frac{5}{3}\pi$$

답 (1) $x=\frac{\pi}{4}$ 또는 $x=\frac{7}{4}\pi$

(2) $x=\frac{2}{3}\pi$ 또는 $x=\frac{5}{3}\pi$

2-1 답 (가) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (나) $\frac{5}{6}\pi$ (다) $\frac{7}{6}\pi$

2-2 (1) 부등식 $\sin x\le\frac{\sqrt{2}}{2}$의 해는 $0\le x<2\pi$에서 함수 $y=\sin x$의 그래프가 직선 $y=\frac{\sqrt{2}}{2}$와 만나는 부분 또는 직선보다 아래쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위이므로 위의 그림에서



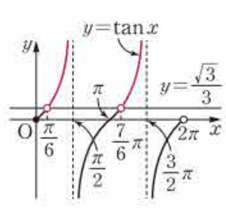
삼각부등식을 풀 때에는 부등호를 등호로 바꾸어 삼각방정식을 푼 후 그래프를 이용하여 부등식을 만족시키는 미지수의 값의 범위를 구한다.

$$0\le x\le\frac{\pi}{4} \text{ 또는 } \frac{3}{4}\pi\le x<2\pi$$

(2) $\sqrt{3}\tan x>1$에서

$$\tan x>\frac{\sqrt{3}}{3}$$

부등식 $\tan x>\frac{\sqrt{3}}{3}$의 해는 $0\le x<2\pi$에서 함수 $y=\tan x$의 그래프가 직선 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}$보다 위쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위이므로 위의 그림에서



$$\frac{\pi}{6}<x<\frac{\pi}{2} \text{ 또는 } \frac{7}{6}\pi<x<\frac{3}{2}\pi$$

답 (1) $0\le x\le\frac{\pi}{4}$ 또는 $\frac{3}{4}\pi\le x<2\pi$

(2) $\frac{\pi}{6}<x<\frac{\pi}{2}$ 또는 $\frac{7}{6}\pi<x<\frac{3}{2}\pi$

기본+표준 유형 Q+Q　85쪽

01 $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\cos\theta-\sin\theta$

$$=\frac{4}{5}-\frac{3}{5}$$

$$=\frac{1}{5}$$

답 $\frac{1}{5}$

02 $\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta$

ㄱ. $\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta$

ㄴ. $\cos(2\pi-\theta)=\cos\theta$

ㄷ. $\sin\left(\frac{3}{2}\pi+\theta\right)=-\cos\theta$

ㄹ. $\cos\left(\frac{3}{2}\pi+\theta\right)=\sin\theta$

이상에서 $\cos(\pi+\theta)$와 값이 같은 것은 ㄷ뿐이다.

답 ㄷ

03 $\cos\frac{7}{6}\pi=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)=-\cos\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin\frac{2}{3}\pi=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan\frac{13}{6}\pi=\tan\left(2\pi+\frac{\pi}{6}\right)=\tan\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore$ (주어진 식)$=-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$$=-\frac{3}{4}+\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}$$

답 $-\frac{1}{4}$

04 $\sin 330^\circ=\sin(360^\circ-30^\circ)=-\sin 30^\circ=-\frac{1}{2}$

$\tan 240^\circ=\tan(180^\circ+60^\circ)=\tan 60^\circ=\sqrt{3}$

$\cos 570^\circ=\cos(90^\circ\times 6+30^\circ)=-\cos 30^\circ=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan 495^\circ=\tan(90^\circ\times 5+45^\circ)=-\frac{1}{\tan 45^\circ}=-1$

$570^\circ=540^\circ+30^\circ$
$=90^\circ\times 6+30^\circ$

$495^\circ=450^\circ+45^\circ$
$=90^\circ\times 5+45^\circ$

$\therefore$ (주어진 식)$=-\frac{1}{2}+\sqrt{3}\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-(-1)$

$$=-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}+1=-1$$

답 -1

05 $\sin\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)=\sin\left\{\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)\right\}=\cos\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)$

이므로

$\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)+\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)$

$=\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)+\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)$

$=1$

답 ⑤

06 $\cos(90^\circ-\alpha^\circ)=\sin\alpha^\circ$이므로

$\cos^2(90^\circ-\alpha^\circ)+\cos^2\alpha^\circ=\sin^2\alpha^\circ+\cos^2\alpha^\circ$

$=\boxed{1}$

$\therefore \cos^2 10° + \cos^2 20° + \cos^2 30° + \cdots + \cos^2 90°$
$= (\cos^2 10° + \cos^2 80°) + (\cos^2 20° + \cos^2 70°)$
$+ (\cos^2 30° + \cos^2 60°)$
$+ (\cos^2 40° + \cos^2 50°) + \cos^2 90°$
$= 1+1+1+1+0 = \boxed{4}$

따라서 $a=1$, $b=4$이므로

$a+b=5$ 답 5

07 $A+B+C=\pi$이므로 $B+C=\pi-A$

$$\therefore \sin\frac{B+C-2\pi}{2} = \sin\frac{\pi-A-2\pi}{2} = \sin\frac{-\pi-A}{2} = -\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{A}{2}\right) = -\cos\frac{A}{2} = -\frac{4}{5}$$

답 $-\frac{4}{5}$

08 □ABCD가 원에 내접하므로

$A+C=\pi$, $B+D=\pi$

원에 내접하는 사각형에서 한 쌍의 대각의 크기의 합은 π이다.

ㄱ. $\sin A = \sin(\pi - C) = \sin C$

ㄴ. $A+B+C+D=2\pi$이므로

$A+B=2\pi-(C+D)$

$\therefore \cos(A+B) = \cos\{2\pi-(C+D)\} = \cos(C+D)$

ㄷ. $\tan(A+C) = \tan(B+D) = \tan\pi = 0$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

09 $y=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-2\sin x+3$

$= -\sin x - 2\sin x + 3$

$= -3\sin x + 3$

따라서 함수 $y=-3\sin x+3$의 최댓값은 $3+3=6$, 최솟값은 $-3+3=0$이므로 구하는 합은

$6+0=6$ 답 6

10 $-1 \le \cos 4x \le 1$이므로

$-3 \le \cos 4x - 2 \le -1$

$1 \le |\cos 4x - 2| \le 3$

$\therefore a+b \le a|\cos 4x-2|+b \le 3a+b$ ($\because a>0$)

따라서 주어진 함수의 최댓값이 $3a+b$, 최솟값이 $a+b$이므로

$3a+b=3$, $a+b=-1$

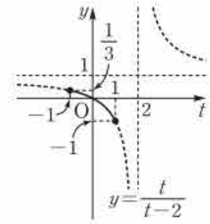
위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=-3$

$\therefore a-b=5$ 답 ⑤

11 $y=\dfrac{\sin x}{\sin x-2}$에서 $\sin x=t$로 놓으면 $-1\le t\le 1$이고

$$y=\frac{t}{t-2}=\frac{(t-2)+2}{t-2}=\frac{2}{t-2}+1$$

오른쪽 그림에서 $t=-1$일 때 최댓값은 $\frac{1}{3}$, $t=1$일 때 최솟값은 -1이므로



$M=\frac{1}{3}$, $m=-1$

$\therefore Mm=-\frac{1}{3}$ 답 ②

쌤 한마디

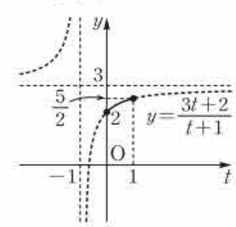
삼각함수를 포함한 함수의 최대·최소는 다음과 같은 순서로 구한다.

(i) 삼각함수의 각이 $\frac{\pi}{2}-x$, $\pi+x$ 등과 같이 여러 가지로 표현되어 있으면 각을 x로 통일한다.
(ii) 삼각함수가 두 종류 이상이면 삼각함수 사이의 관계를 이용하여 한 종류의 삼각함수로 통일한다.
(iii) (ii)의 삼각함수를 t로 놓고 주어진 함수를 t에 대한 함수로 변형한다. 이때 t의 값의 범위에 주의한다.
(iv) (iii)의 t에 대한 함수의 그래프를 그려서 최댓값과 최솟값을 구한다.

12 $y=\dfrac{3\tan x+2}{\tan x+1}$에서 $\tan x=t$로 놓으면 $0\le x\le\frac{\pi}{4}$에서 $0\le t\le 1$이고

$$y=\frac{3t+2}{t+1}=\frac{3(t+1)-1}{t+1}=-\frac{1}{t+1}+3$$

오른쪽 그림에서 $t=1$일 때 최댓값은 $\frac{5}{2}$, $t=0$일 때 최솟값은 2이므로 주어진 함수의 치역은



$\left\{y \,\middle|\, 2\le y\le\frac{5}{2}\right\}$

따라서 $a=2$, $b=\frac{5}{2}$이므로

$a+b=\frac{9}{2}$ 답 $\frac{9}{2}$

13 $y=\cos^2 x-4\sin x+1$

$\sin^2 x+\cos^2 x=1$임을 이용하여 먼저 한 종류의 삼각함수로 통일한다.

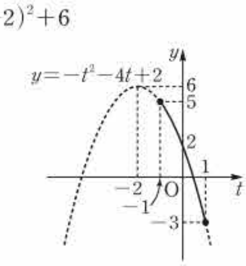
$=(1-\sin^2 x)-4\sin x+1$

$=-\sin^2 x-4\sin x+2$

$\sin x=t$로 놓으면 $-1\le t\le 1$이고

$y=-t^2-4t+2=-(t+2)^2+6$

오른쪽 그림에서 $t=-1$일 때 최댓값은 5이므로



$b=5$

또 $t=-1$, 즉 $\sin x=-1$에서

$x=\frac{3}{2}\pi$ ($\because 0\le x\le 2\pi$)

$t=-1$일 때 최댓값이 5이므로 $a=-1$, $b=5$로 착각하지 않도록 주의한다. $t=-1$일 때 x의 값을 구하면 $x=\frac{3}{2}\pi$이므로 $a=\frac{3}{2}\pi$이다.

따라서 $a=\frac{3}{2}\pi$이므로

$ab=\frac{15}{2}\pi$ 답 $\frac{15}{2}\pi$

14 $y=\sin^2\left(\frac{3}{2}\pi+x\right)+2\cos(2\pi-x)+3$

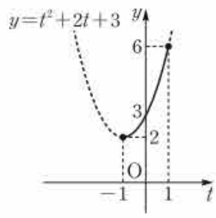
$\quad=(-\cos x)^2+2\cos x+3$

$\quad=\cos^2 x+2\cos x+3$

$\cos x=t$로 놓으면 $-1\le t\le 1$이고

$\quad y=t^2+2t+3=(t+1)^2+2$

오른쪽 그림에서 $t=1$일 때 최댓값은 6, $t=-1$일 때 최솟값은 2이므로



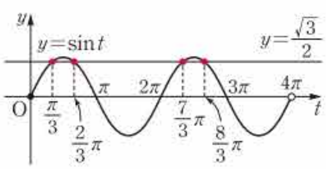
$\quad M=6,\ m=2$

$\quad\therefore M-m=4$ 답 4

Q BOX: 삼각함수의 각이 $\frac{3}{2}\pi+x$, $2\pi-x$이므로 먼저 각을 x로 통일한다.

15 $2x=t$로 놓으면 $0\le x<2\pi$에서 $0\le t<4\pi$이고 주어진 방정식은

$\quad\sin t=\frac{\sqrt{3}}{2}$



위의 그림과 같이 $0\le t<4\pi$에서 함수 $y=\sin t$의 그래프와 직선 $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$의 교점의 t좌표가 $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2}{3}\pi$, $\frac{7}{3}\pi$, $\frac{8}{3}\pi$이므로

$\quad 2x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $2x=\frac{2}{3}\pi$ 또는 $2x=\frac{7}{3}\pi$

$\quad$또는 $2x=\frac{8}{3}\pi$

$\quad\therefore x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\frac{7}{6}\pi$ 또는 $x=\frac{4}{3}\pi$

따라서 방정식 $\sin 2x=\frac{\sqrt{3}}{2}$의 근이 아닌 것은 ③이다.

답 ③

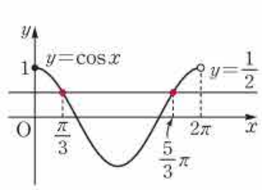
Q BOX: $y=\sin 2x$의 그래프와 직선 $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$의 교점의 x좌표를 구하여 방정식의 해를 구할 수 있다.

16 $3\cos x+\sin\left(\frac{3}{2}\pi-x\right)=1$에서

$\quad 3\cos x-\cos x=1$

$\quad\therefore \cos x=\frac{1}{2}$

오른쪽 그림과 같이 $0\le x<2\pi$에서 함수 $y=\cos x$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{2}$의 교점의 x좌표가 $\frac{\pi}{3}$, $\frac{5}{3}\pi$이므로



$\quad x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\frac{5}{3}\pi$

따라서 $\alpha=\frac{\pi}{3}$, $\beta=\frac{5}{3}\pi$이므로

$\quad\tan(\beta-\alpha)=\tan\frac{4}{3}\pi=\tan\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)$

$\qquad\qquad=\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$ 답 $\sqrt{3}$

17 $2\cos^2 x-\sin x+1=0$에서

$\quad 2(1-\sin^2 x)-\sin x+1=0$

$\quad 2\sin^2 x+\sin x-3=0$

$\quad(2\sin x+3)(\sin x-1)=0$

$\quad\therefore \sin x=-\frac{3}{2}$ 또는 $\sin x=1$

이때 $0\le x<\pi$에서 $0\le\sin x\le 1$이므로

$\quad\sin x=1$

$\quad\therefore x=\frac{\pi}{2}$ $(\because 0\le x<\pi)$ 답 $x=\frac{\pi}{2}$

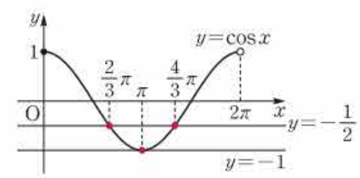
18 $2\sin^2 x+3\cos(\pi-x)-3=0$에서

$\quad 2(1-\cos^2 x)-3\cos x-3=0$

$\quad 2\cos^2 x+3\cos x+1=0$

$\quad(\cos x+1)(2\cos x+1)=0$

$\quad\therefore \cos x=-1$ 또는 $\cos x=-\frac{1}{2}$



(i) $\cos x=-1$일 때,

$\quad 0\le x<2\pi$이므로 $\quad x=\pi$

(ii) $\cos x=-\frac{1}{2}$일 때,

$\quad 0\le x<2\pi$이므로 $\quad x=\frac{2}{3}\pi$ 또는 $x=\frac{4}{3}\pi$

(i), (ii)에서 모든 실근의 합은

$\quad\pi+\frac{2}{3}\pi+\frac{4}{3}\pi=3\pi$ 답 3π

19 $\sin^2 x-\cos x-a=0$에서

$\quad(1-\cos^2 x)-\cos x-a=0$

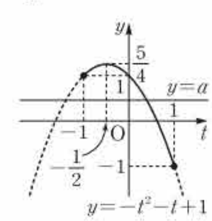
$\quad\therefore -\cos^2 x-\cos x+1=a$

이 방정식이 실근을 가지려면 함수 $y=-\cos^2 x-\cos x+1$의 그래프와 직선 $y=a$가 만나야 한다.

이때 $\cos x=t$로 놓으면 $-1\le t\le 1$이고

$\quad y=-t^2-t+1=-\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{4}$

오른쪽 그림에서 함수 $y=-t^2-t+1$의 그래프와 직선 $y=a$가 만나도록 하는 실수 a의 값의 범위는



$\quad -1\le a\le\frac{5}{4}$

답 $-1\le a\le\frac{5}{4}$

20 $a\tan x=2a-1$에서

$\quad a(\tan x-2)=-1$

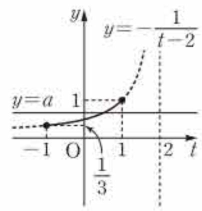
$\quad\therefore a=-\frac{1}{\tan x-2}$ $(\because \tan x\ne 2)$

Q BOX: $-\frac{\pi}{4}\le x\le\frac{\pi}{4}$에서 $-1\le\tan x\le 1$이므로 $\tan x\ne 2$

이 방정식이 실근을 가지려면 함수 $y=-\dfrac{1}{\tan x-2}$의 그래프와 직선 $y=a$가 만나야 한다.

$\tan x=t$로 놓으면 $-\dfrac{\pi}{4}\le x\le\dfrac{\pi}{4}$에서 $-1\le t\le 1$이고

$$y=-\frac{1}{t-2}$$



오른쪽 그림에서 함수 $y=-\dfrac{1}{t-2}$의 그래프와 직선 $y=a$가 만나도록 하는 실수 a의 값의 범위는

$$\frac{1}{3}\le a\le 1$$

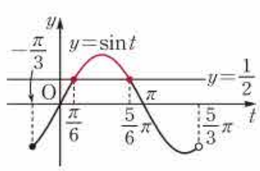
따라서 $M=1$, $m=\dfrac{1}{3}$이므로

$$M-m=\frac{2}{3}$$

답 $\dfrac{2}{3}$

21 $x-\dfrac{\pi}{3}=t$로 놓으면 $0\le x<2\pi$에서 $-\dfrac{\pi}{3}\le t<\dfrac{5}{3}\pi$이고 주어진 부등식은

$$\sin t\ge\frac{1}{2}$$



오른쪽 그림에서 부등식 $\sin t\ge\dfrac{1}{2}$의 해는

$\dfrac{\pi}{6}\le t\le\dfrac{5}{6}\pi$이므로

$$\frac{\pi}{6}\le x-\frac{\pi}{3}\le\frac{5}{6}\pi$$

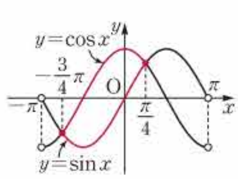
$$\therefore\ \frac{\pi}{2}\le x\le\frac{7}{6}\pi$$

따라서 $a=\dfrac{\pi}{2}$, $b=\dfrac{7}{6}\pi$이므로

$$a+b=\frac{5}{3}\pi$$

답 $\dfrac{5}{3}\pi$

22 부등식 $\sin x\le\cos x$의 해는 $y=\sin x$의 그래프가 $y=\cos x$의 그래프와 만나는 부분 또는 $y=\sin x$의 그래프가 $y=\cos x$의 그래프보다 아래쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위이므로 위의 그림에서



$$-\frac{3}{4}\pi\le x\le\frac{\pi}{4}$$

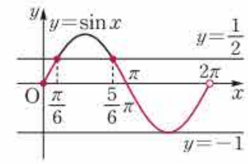
따라서 주어진 부등식을 만족시키는 x의 값이 아닌 것은 ⑤이다.

답 ⑤

$\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{\pi}{3}$

23 $2\cos^2 x-\sin x-1\ge 0$에서

$$2(1-\sin^2 x)-\sin x-1\ge 0$$
$$2\sin^2 x+\sin x-1\le 0$$
$$(\sin x+1)(2\sin x-1)\le 0$$
$$\therefore\ -1\le\sin x\le\frac{1}{2}$$



오른쪽 그림에서 부등식 $-1\le\sin x\le\dfrac{1}{2}$의 해는

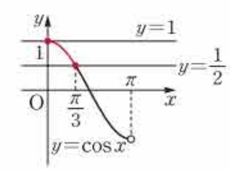
$$0\le x\le\frac{\pi}{6}$$

또는 $\dfrac{5}{6}\pi\le x<2\pi$

답 $0\le x\le\dfrac{\pi}{6}$ 또는 $\dfrac{5}{6}\pi\le x<2\pi$

24 $2\cos^2\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)\ge 3(1-\cos x)$에서

$$2(-\sin x)^2\ge 3-3\cos x$$
$$2\sin^2 x+3\cos x-3\ge 0$$
$$2(1-\cos^2 x)+3\cos x-3\ge 0$$
$$2\cos^2 x-3\cos x+1\le 0$$
$$(2\cos x-1)(\cos x-1)\le 0$$
$$\therefore\ \frac{1}{2}\le\cos x\le 1$$



오른쪽 그림에서 부등식 $\dfrac{1}{2}\le\cos x\le 1$의 해는

$$0\le x\le\frac{\pi}{3}$$

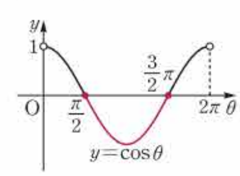
답 $0\le x\le\dfrac{\pi}{3}$

25 이차방정식 $x^2+4x\cos\theta+4\cos\theta=0$의 판별식을 D라 하면

계수가 실수인 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$이 실근을 가지면 $b^2-4ac\ge 0$

$$\frac{D}{4}=4\cos^2\theta-4\cos\theta\ge 0$$
$$4\cos\theta(\cos\theta-1)\ge 0$$

$0<\theta<2\pi$에서 $\cos\theta-1<0$이므로 $\cos\theta\le 0$

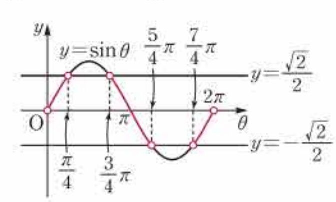


오른쪽 그림에서 θ의 값의 범위는 $\dfrac{\pi}{2}\le\theta\le\dfrac{3}{2}\pi$

답 $\dfrac{\pi}{2}\le\theta\le\dfrac{3}{2}\pi$

26 모든 실수 x에 대하여 주어진 부등식이 성립하려면 이차방정식 $x^2-2\sqrt{2}x\sin\theta+1=0$이 실근을 갖지 않아야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=2\sin^2\theta-1<0$$
$$(\sqrt{2}\sin\theta+1)(\sqrt{2}\sin\theta-1)<0$$
$$\therefore\ -\frac{\sqrt{2}}{2}<\sin\theta<\frac{\sqrt{2}}{2}$$



위의 그림에서 θ의 값의 범위는

$$0<\theta<\frac{\pi}{4}\ \text{또는}\ \frac{3}{4}\pi<\theta<\frac{5}{4}\pi\ \text{또는}\ \frac{7}{4}\pi<\theta<2\pi$$

$\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{\pi}{3}<\dfrac{3}{4}\pi$

따라서 조건을 만족시키지 않는 θ의 값은 ②이다.

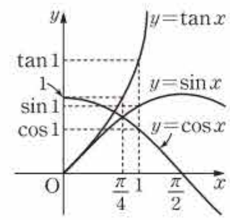
답 ②

중단원 마무리

89쪽

01 전략 삼각함수의 그래프를 그려서 대소를 비교한다.

풀이 $\frac{\pi}{4}<1<\frac{\pi}{2}$이므로 오른쪽 그림에서



$\cos 1<\sin 1<\tan 1$

$\therefore B<A<C$

답 ③

02 전략 함수 $f(x)$에 대하여 $f(x-p)=f(x+p)$이면 $f(x)=f(x+2p)$임을 이용한다.

풀이 조건 (가)의 식 $f(x-1)=f(x+1)$에 x 대신 $x+1$을 대입하면

$f(x)=f(x+2)$

$\therefore f\left(\frac{25}{4}\right)=f\left(\frac{17}{4}\right)=f\left(\frac{9}{4}\right)=f\left(\frac{1}{4}\right)$

조건 (나)에서 $-1\le x\le 1$일 때, $f(x)=\cos \pi x$이므로

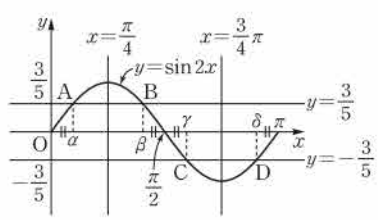
$f\left(\frac{25}{4}\right)=f\left(\frac{1}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

답 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

03 전략 삼각함수의 그래프의 대칭성을 이용하여 $\alpha+\beta$, $\beta+\gamma$, $\gamma+\delta$의 값을 구한다.

풀이 함수 $y=\sin 2x$의 주기는

$\frac{2\pi}{2}=\pi$



위의 그림에서 두 점 A, B는 직선 $x=\frac{\pi}{4}$에 대하여 대칭이므로

$\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{\pi}{4}$　　$\therefore \alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$　　…… ㉠

두 점 C, D는 직선 $x=\frac{3}{4}\pi$에 대하여 대칭이므로

$\frac{\gamma+\delta}{2}=\frac{3}{4}\pi$　　$\therefore \gamma+\delta=\frac{3}{2}\pi$　　…… ㉡

한편 두 점 B, C는 점 $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$에 대하여 대칭이므로

$\frac{\beta+\gamma}{2}=\frac{\pi}{2}$　　$\therefore \beta+\gamma=\pi$　　…… ㉢

㉠, ㉡, ㉢에서

$\alpha+2\beta+2\gamma+\delta=(\alpha+\beta)+(\beta+\gamma)+(\gamma+\delta)$

$=\frac{\pi}{2}+\pi+\frac{3}{2}\pi$

$=3\pi$

답 ③

다른 풀이 함수 $y=\sin 2x$의 주기가 π이므로

$\beta=\frac{\pi}{2}-\alpha$, $\gamma=\frac{\pi}{2}+\alpha$, $\delta=\pi-\alpha$

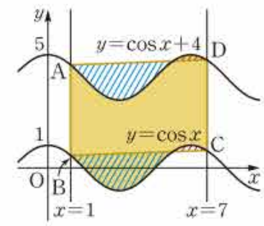
$\therefore \alpha+2\beta+2\gamma+\delta$

$=\alpha+2\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+2\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+(\pi-\alpha)$

$=\alpha+\pi-2\alpha+\pi+2\alpha+\pi-\alpha=3\pi$

04 전략 $y=\cos x+4$의 그래프는 $y=\cos x$의 그래프를 평행이동한 것임을 이용하여 넓이가 같은 부분을 찾는다.

풀이 $y=\cos x+4$의 그래프는 $y=\cos x$의 그래프를 y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림에서 빗금 친 부분의 넓이는 각각 서로 같다.



따라서 두 함수의 그래프와 두 직선 $x=1$, $x=7$로 둘러싸인 부분의 넓이는 평행사변형 ABCD의 넓이와 같으므로

$(5-1)\cdot(7-1)=24$

답 ①

> Q BOX
>
> 두 직선 $x=1$, $x=7$ 사이의 거리
>
> $A(1, \cos 1+4)$, $B(1, \cos 1)$이므로
> $\overline{AB}=\cos 1+4-\cos 1=4$

05 전략 대칭이동과 평행이동의 순서에 주의하여 $y=f(x)$를 구한다.

풀이 $y=\sin x+5$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$-y=\sin x+5$　　$\therefore y=-\sin x-5$

이 함수의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{2}$만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=-\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)-5+3$

따라서 $f(x)=-\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)-2$이므로　　…… ❶

$f\left(\frac{2}{3}\pi\right)=-\sin\left(\frac{2}{3}\pi-\frac{\pi}{2}\right)-2$

$=-\sin\frac{\pi}{6}-2$

$=-\frac{1}{2}-2=-\frac{5}{2}$　　…… ❷

답 $-\frac{5}{2}$

> Q BOX
>
> y 대신 $-y$를 대입한다.
>
> x 대신 $x-\frac{\pi}{2}$, y 대신 $y-3$을 대입한다.

단계	채점 기준	비율
❶	$f(x)$를 구할 수 있다.	70 %
❷	$f\left(\frac{2}{3}\pi\right)$의 값을 구할 수 있다.	30 %

참고 $\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=-\cos x$이므로

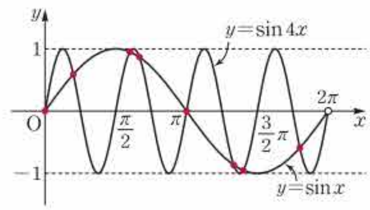
$f(x)=\cos x-2$

06 전략 $y=\sin bx$의 그래프는 $y=\sin x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{1}{|b|}$배 하여 그린다.

풀이 $y=\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$의 그래프는 $y=\sin x$의 그래프와 일치하고 $y=\sin 4x$의 그래프는 $y=\sin x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{1}{4}$배 한 것이다.

> Q BOX
>
> $y=\cos x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{2}$만큼 평행이동하면 $y=\sin x$의 그래프와 일치한다.

따라서 $0 \le x < 2\pi$에서 $y=\sin x$, $y=\sin 4x$의 그래프는 다음 그림과 같으므로 구하는 점의 개수는 8이다.



답 ④

07 전략 함수 $y=a\sin bx$, $y=a\cos bx$, $y=a\tan bx$의 주기는 각각 $\frac{2\pi}{|b|}$, $\frac{2\pi}{|b|}$, $\frac{\pi}{|b|}$이다.

풀이 각 함수의 주기를 구하면

① $\frac{2\pi}{\pi}=2$ ② $\frac{2\pi}{\pi}=2$ ③ $\frac{2\pi}{\pi}=2$

④ $\frac{\pi}{\frac{\pi}{2}}=2$ ⑤ $\frac{\pi}{\frac{1}{2}}=2\pi$

따라서 주기가 나머지 넷과 다른 하나는 ⑤이다.

답 ⑤

08 전략 $f(x+p)=f(x)$를 만족시키는 양수 p의 최솟값은 함수 $f(x)$의 주기임을 이용한다.

풀이 조건 (가)에서 함수 $f(x)$의 주기가 4π이고 $b>0$이므로

$\frac{2\pi}{b}=4\pi$ $\therefore b=\frac{1}{2}$ ··· ❶

조건 (나)에서 함수 $f(x)$의 최댓값이 5, 최솟값이 -1이고 $a>0$이므로

$a+c=5$, $-a+c=-1$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=3$, $c=2$ ··· ❷

$\therefore abc=3$ ··· ❸

답 3

단계	채점 기준	비율
❶	b의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷	a, c의 값을 구할 수 있다.	60 %
❸	abc의 값을 구할 수 있다.	10 %

09 전략 두 점 A, B의 좌표를 a, b를 이용하여 나타낸다.

풀이 $b>0$이므로 함수 $y=a\sin b\pi x$의 주기는

$\frac{2\pi}{b\pi}=\frac{2}{b}$

따라서 $A\left(\frac{1}{2b}, a\right)$, $B\left(\frac{5}{2b}, a\right)$이고 △OAB의 넓이가 5이므로

$\frac{1}{2}\cdot a\cdot\left(\frac{5}{2b}-\frac{1}{2b}\right)=5$, $\frac{a}{b}=5$

$\therefore a=5b$ ······ ㉠

또 직선 OA의 기울기와 직선 OB의 기울기의 곱이 $\frac{5}{4}$이므로

Q BOX

점 A의 x좌표는 주기의 $\frac{1}{4}$이므로

$\frac{2}{b}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{2b}$

점 B의 x좌표는 점 A의 x좌표보다 주기만큼 크므로

$\frac{1}{2b}+\frac{2}{b}=\frac{5}{2b}$

$\frac{a}{\frac{1}{2b}}\cdot\frac{a}{\frac{5}{2b}}=\frac{5}{4}$

$\frac{4a^2b^2}{5}=\frac{5}{4}$, $a^2b^2=\frac{25}{16}$

$\therefore ab=\frac{5}{4}$ ($\because a>0$, $b>0$) ······ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $5b^2=\frac{5}{4}$

$b^2=\frac{1}{4}$ $\therefore b=\frac{1}{2}$ ($\because b>0$)

$b=\frac{1}{2}$을 ㉠에 대입하면 $a=\frac{5}{2}$

$\therefore a+b=3$

답 ③

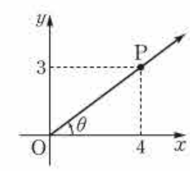
10 전략 여러 가지 각에 대한 삼각함수의 성질을 이용하여 주어진 식을 간단히 한다.

풀이 $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+2\sin(\pi-\theta)$

$=\sin\theta+2\sin\theta$

$=3\sin\theta$ ······ ㉠

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$이고 $\tan\theta=\frac{3}{4}$이므로 점 P의 좌표를 (4, 3)으로 놓고 동경 OP를 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $\overline{OP}=\sqrt{4^2+3^2}=5$이므로

$\sin\theta=\frac{3}{5}$

㉠에서 구하는 값은

$3\sin\theta=3\cdot\frac{3}{5}=\frac{9}{5}$

답 ④

다른 풀이 $\tan\theta=\frac{3}{4}$이므로 $\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{3}{4}$

$\therefore \cos\theta=\frac{4}{3}\sin\theta$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로

$\sin^2\theta+\left(\frac{4}{3}\sin\theta\right)^2=1$, $\frac{25}{9}\sin^2\theta=1$

$\therefore \sin^2\theta=\frac{9}{25}$

이때 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$에서 $\sin\theta>0$이므로

$\sin\theta=\frac{3}{5}$

11 전략 반원에 대한 원주각의 크기는 $\frac{\pi}{2}$임을 이용한다.

풀이 $\overline{AB}$가 원의 지름이므로 $\angle ACB=\frac{\pi}{2}$

$\therefore \alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$

△ABC에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{AB}=\sqrt{3^2+(\sqrt{7})^2}=4$

$\therefore \sin(2\alpha+\beta)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$

$=\cos\alpha$

$=\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}=\frac{3}{4}$

답 $\frac{3}{4}$

Q BOX

$2\alpha+\beta=(\alpha+\beta)+\alpha$

$=\frac{\pi}{2}+\alpha$

12 전략 $|\cos x|=t$로 놓고 함수 $y=\dfrac{t+2}{t-3}$의 최댓값과 최솟값을 구한다.

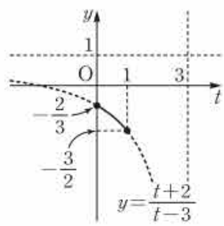
풀이 $y=\dfrac{|\cos x|+2}{|\cos x|-3}$에서 $|\cos x|=t$로 놓으면

$0\le t\le 1$이고

$-1\le \cos x\le 1$이므로
$0\le |\cos x|\le 1$
$\therefore 0\le t\le 1$

$$y=\frac{t+2}{t-3}=\frac{(t-3)+5}{t-3}=\frac{5}{t-3}+1$$

오른쪽 그림에서 $t=0$일 때 최댓값은 $-\dfrac{2}{3}$, $t=1$일 때 최솟값은 $-\dfrac{3}{2}$이므로 주어진 함수의 치역은



$$\left\{y \,\middle|\, -\frac{3}{2}\le y\le -\frac{2}{3}\right\}$$

따라서 $a=-\dfrac{3}{2}$, $b=-\dfrac{2}{3}$이므로

$ab=1$ 답 1

13 전략 여러 가지 각에 대한 삼각함수의 성질을 이용하여 주어진 함수를 간단히 한다.

풀이 $y=\sin^2 x+\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)-2$

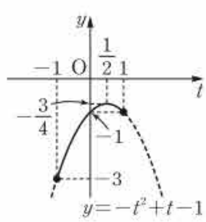
$=(1-\cos^2 x)+\cos x-2$

$=-\cos^2 x+\cos x-1$

$\cos x=t$로 놓으면 $-1\le t\le 1$이고

$$y=-t^2+t-1=-\left(t-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{3}{4}$$

오른쪽 그림에서 $t=\dfrac{1}{2}$일 때 최댓값은 $-\dfrac{3}{4}$이므로



$M=-\dfrac{3}{4}$

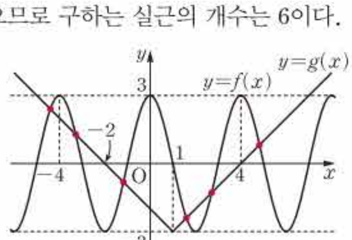
$\therefore 4M=-3$ 답 −3

14 전략 방정식 $f(x)=g(x)$의 서로 다른 실근의 개수는 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점의 개수와 같음을 이용한다.

풀이 방정식 $f(x)-g(x)=0$, 즉 $f(x)=g(x)$의 서로 다른 실근의 개수는 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점의 개수와 같다.

$y=f(x)$의 그래프는 $y=\cos x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\dfrac{2}{\pi}$배, y축의 방향으로 3배 한 것이다.

이때 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 다음 그림과 같으므로 구하는 실근의 개수는 6이다.



답 6

15 전략 $\sin^2 x+\cos^2 x=1$임을 이용하여 주어진 방정식을 한 종류의 삼각함수로 나타낸다.

풀이 $\sqrt{2\sin^2 x+2\sin x+\cos^2 x}=1$에서

$\sqrt{2\sin^2 x+2\sin x+(1-\sin^2 x)}=1$

$\sqrt{\sin^2 x+2\sin x+1}=1$

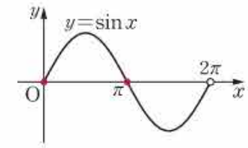
$\sqrt{(\sin x+1)^2}=1$

이때 $\sin x+1\ge 0$이므로 $\sin x+1=1$

$0\le x<2\pi$이므로
$-1\le \sin x\le 1$
$\therefore 0\le \sin x+1\le 2$

$\therefore \sin x=0$

오른쪽 그림에서 방정식 $\sin x=0$의 해는



$x=0$ 또는 $x=\pi$

답 $x=0$ 또는 $x=\pi$

16 전략 방정식의 해를 구하고, 부등식을 만족시키는 x가 어느 사분면의 각인지 찾는다.

풀이 $4\cos^2 x-1=0$에서

$\cos^2 x=\dfrac{1}{4}$

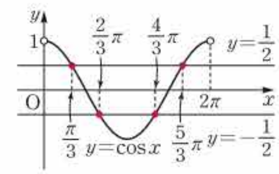
$\therefore \cos x=\dfrac{1}{2}$ 또는 $\cos x=-\dfrac{1}{2}$

(i) $\cos x=\dfrac{1}{2}$일 때,

$0<x<2\pi$이므로

$x=\dfrac{\pi}{3}$

또는 $x=\dfrac{5}{3}\pi$



(ii) $\cos x=-\dfrac{1}{2}$일 때,

$0<x<2\pi$이므로

$x=\dfrac{2}{3}\pi$ 또는 $x=\dfrac{4}{3}\pi$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 해는

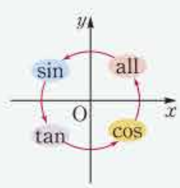
$x=\dfrac{\pi}{3}$ 또는 $x=\dfrac{2}{3}\pi$ 또는 $x=\dfrac{4}{3}\pi$ 또는 $x=\dfrac{5}{3}\pi$ ...... ㉠

한편 $\sin x\cos x<0$에서

$\sin x>0$, $\cos x<0$ 또는 $\sin x<0$, $\cos x>0$

이므로 x는 제2사분면 또는 제4사분면의 각이다.

각 사분면에서 양수인 값을 갖는 삼각함수는 다음과 같다.



$\therefore \dfrac{\pi}{2}<x<\pi$ 또는 $\dfrac{3}{2}\pi<x<2\pi$ ...... ㉡

따라서 ㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 x의 값은 $\dfrac{2}{3}\pi$, $\dfrac{5}{3}\pi$이므로 구하는 합은

$\dfrac{2}{3}\pi+\dfrac{5}{3}\pi=\dfrac{7}{3}\pi$ 답 ②

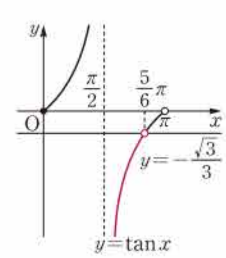
17 전략 삼각함수의 그래프를 이용하여 주어진 부등식의 해를 구한다.

풀이 $\sqrt{3}\tan x+1<0$에서

$\tan x<-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

오른쪽 그림에서 부등식 $\tan x<-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$의 해는

$\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{5}{6}\pi$



따라서 $\alpha=\frac{\pi}{2}$, $\beta=\frac{5}{6}\pi$이므로

$$\cos(\beta-\alpha)=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$$

답 ③

18 전략 주어진 포물선의 꼭짓점의 좌표를 구한 후 $y=2x$에 대입한다.

풀이 $y=x^2-2x\cos\theta-\sin^2\theta$
$=(x-\cos\theta)^2-\cos^2\theta-\sin^2\theta$
$=(x-\cos\theta)^2-1$

이므로 이 포물선의 꼭짓점의 좌표는

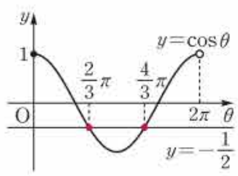
$(\cos\theta,\ -1)$

이 꼭짓점이 직선 $y=2x$ 위에 있으므로

$-1=2\cos\theta \qquad \therefore \cos\theta=-\frac{1}{2}$

오른쪽 그림에서

$\theta=\frac{2}{3}\pi$ 또는 $\theta=\frac{4}{3}\pi$



따라서 구하는 합은

$\frac{2}{3}\pi+\frac{4}{3}\pi=2\pi$

답 ③

19 전략 이차방정식의 판별식을 D, 두 근을 α, β라 할 때, 이차방정식이 서로 다른 두 양의 실근을 가지려면 $D>0$, $\alpha+\beta>0$, $\alpha\beta>0$이어야 함을 이용한다.

풀이 주어진 이차방정식의 판별식을 D, 두 근을 α, β라 하면

(i) $\frac{D}{4}=4\cos^2\theta-6\sin\theta>0$

$2\cos^2\theta-3\sin\theta>0$

$2(1-\sin^2\theta)-3\sin\theta>0$

$2\sin^2\theta+3\sin\theta-2<0$

$(\sin\theta+2)(2\sin\theta-1)<0$

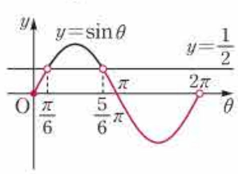
$0\le\theta<2\pi$에서 $\sin\theta+2>0$이므로

$2\sin\theta-1<0 \qquad \therefore \sin\theta<\frac{1}{2}$

오른쪽 그림에서 부등식 $\sin\theta<\frac{1}{2}$의 해는

$0\le\theta<\frac{\pi}{6}$

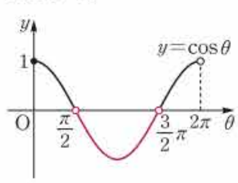
또는 $\frac{5}{6}\pi<\theta<2\pi$



(ii) $\alpha+\beta=-4\cos\theta>0 \qquad \therefore \cos\theta<0$

오른쪽 그림에서 부등식 $\cos\theta<0$의 해는

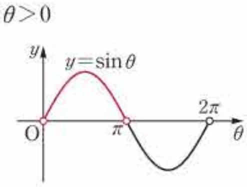
$\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{3}{2}\pi$



(iii) $\alpha\beta=6\sin\theta>0 \qquad \therefore \sin\theta>0$

오른쪽 그림에서 부등식 $\sin\theta>0$의 해는

$0<\theta<\pi$



Q BOX

$\sin\frac{5}{6}\pi=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)$
$=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$

이상에서 θ의 값의 범위는

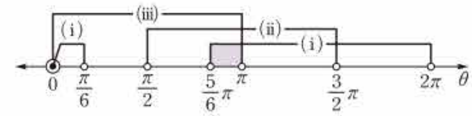
$\frac{5}{6}\pi<\theta<\pi$

따라서 $A=\frac{5}{6}\pi$, $B=\pi$이므로

$\sin A+\cos B=\sin\frac{5}{6}\pi+\cos\pi$
$=\frac{1}{2}+(-1)$
$=-\frac{1}{2}$

답 $-\frac{1}{2}$

참고 (i), (ii), (iii)을 만족시키는 θ의 값의 범위를 수직선 위에 나타내면 다음과 같다.



따라서 공통 범위를 구하면

$\frac{5}{6}\pi<\theta<\pi$

07 삼각함수의 활용

13 사인법칙과 코사인법칙

Lecture 28 사인법칙

92쪽

1-1 사인법칙에 의하여 $\dfrac{4}{\sin 45^\circ}=\dfrac{\overline{AB}}{\sin 60^\circ}$이므로

$4\sin 60^\circ=\overline{AB}\sin 45^\circ$

$\therefore \overline{AB}=4\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{2}{\sqrt{2}}=2\sqrt{6}$

답 $2\sqrt{6}$

1-2 (1) 사인법칙에 의하여 $\dfrac{2\sqrt{3}}{\sin 60^\circ}=\dfrac{2}{\sin B}$이므로

$2\sqrt{3}\sin B=2\sin 60^\circ$

$\therefore \sin B=2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{3}}=\dfrac{1}{2}$

이때 $0^\circ<B<120^\circ$이므로

$B=30^\circ$

(2) $A+B+C=180^\circ$이므로

$C=180^\circ-(120^\circ+30^\circ)=30^\circ$

사인법칙에 의하여 $\dfrac{12}{\sin 120^\circ}=\dfrac{c}{\sin 30^\circ}$이므로

$12\sin 30^\circ=c\sin 120^\circ$

$\therefore c=12\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{\sqrt{3}}=4\sqrt{3}$

답 (1) 30° (2) $4\sqrt{3}$

1-3 (1) 사인법칙에 의하여 $\dfrac{9}{\sin 60^\circ}=2R$

$\therefore R=\dfrac{9}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\cdot\dfrac{1}{2}=3\sqrt{3}$

(2) $A+B+C=180^\circ$이므로

$C=180^\circ-(35^\circ+100^\circ)=45^\circ$

사인법칙에 의하여 $\dfrac{10}{\sin 45^\circ}=2R$

$\therefore R=\dfrac{10}{\frac{\sqrt{2}}{2}}\cdot\dfrac{1}{2}=5\sqrt{2}$

답 (1) $3\sqrt{3}$ (2) $5\sqrt{2}$

Lecture 29 코사인법칙

93쪽

1-1 코사인법칙에 의하여

$\overline{AB}^2=3^2+4^2-2\cdot3\cdot4\cdot\cos 60^\circ$

$=9+16-2\cdot3\cdot4\cdot\dfrac{1}{2}=13$

$\overline{AB}>0$이므로 $\overline{AB}=\sqrt{13}$

답 $\sqrt{13}$

QBOX

$\cos 150^\circ$
$=\cos(180^\circ-30^\circ)$
$=-\cos 30^\circ$
$=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

삼각형의 세 내각의 크기의 합이 180°이고 $A=60^\circ$이므로 $0^\circ<B<120^\circ$

$\sin 120^\circ$
$=\sin(180^\circ-60^\circ)$
$=\sin 60^\circ$
$=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin^2 B+\cos^2 B=1$이므로
$\cos^2 B=1-\sin^2 B$

원에서 한 호에 대한 원주각의 크기는 모두 같다.

1-2 (1) 코사인법칙에 의하여

$a^2=3^2+(\sqrt{2})^2-2\cdot3\cdot\sqrt{2}\cos 45^\circ$

$=9+2-2\cdot3\cdot\sqrt{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}=5$

$a>0$이므로 $a=\sqrt{5}$

(2) 코사인법칙에 의하여

$b^2=1^2+(\sqrt{3})^2-2\cdot1\cdot\sqrt{3}\cdot\cos 150^\circ$

$=1+3-2\cdot1\cdot\sqrt{3}\cdot\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=7$

$b>0$이므로 $b=\sqrt{7}$

답 (1) $\sqrt{5}$ (2) $\sqrt{7}$

2-1 코사인법칙에 의하여

$\cos A=\dfrac{2^2+3^2-(2\sqrt{2})^2}{2\cdot2\cdot3}=\dfrac{5}{12}$

답 $\dfrac{5}{12}$

2-2 (1) 코사인법칙에 의하여

$\cos C=\dfrac{(\sqrt{3})^2+1^2-1^2}{2\cdot\sqrt{3}\cdot1}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

이때 $0^\circ<C<180^\circ$이므로

$C=30^\circ$

(2) 코사인법칙에 의하여

$\cos B=\dfrac{5^2+3^2-7^2}{2\cdot5\cdot3}=-\dfrac{1}{2}$

이때 $0^\circ<B<180^\circ$이므로

$B=120^\circ$

답 (1) 30° (2) 120°

기본+표준 유형 Q+Q

94쪽

01 사인법칙에 의하여 $\dfrac{5}{\sin 60^\circ}=\dfrac{4}{\sin B}$이므로

$5\sin B=4\sin 60^\circ$

$\therefore \sin B=4\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{1}{5}=\dfrac{2\sqrt{3}}{5}$

$\therefore \cos^2 B=1-\sin^2 B=1-\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{5}\right)^2=\dfrac{13}{25}$

답 $\dfrac{13}{25}$

02 $\overset{\frown}{BC}$에 대한 원주각의 크기가 같으므로

$\angle BAC=\angle BDC=45^\circ$

$\triangle ABC$에서 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{AB}}{\sin 30^\circ}=\dfrac{8}{\sin 45^\circ}$

$\overline{AB}\sin 45^\circ=8\sin 30^\circ$

$\therefore \overline{AB}=8\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{\sqrt{2}}=4\sqrt{2}$

답 $4\sqrt{2}$

03 $\triangle ABC$의 외접원의 반지름의 길이가 6이므로 사인법칙에 의하여

$$\sin A+\sin B+\sin C=\frac{a}{2\cdot 6}+\frac{b}{2\cdot 6}+\frac{c}{2\cdot 6}$$
$$=\frac{a+b+c}{12}$$
$$=\frac{18}{12}=\frac{3}{2}$$
답 $\frac{3}{2}$

04 $B+C=180°-A$이므로

$\sin(B+C)=\sin(180°-A)=\sin A$

즉 $5\sin A\sin(B+C)=1$에서

$5\sin A\cdot\sin A=1,\quad \sin^2 A=\frac{1}{5}$

$\therefore \sin A=\frac{\sqrt{5}}{5}$ ($\because 0°<A<180°$)

따라서 △ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$\frac{2}{\sin A}=2R$

$\therefore R=\frac{2}{\frac{\sqrt{5}}{5}}\cdot\frac{1}{2}=\sqrt{5}$ 답 ③

05 $A+B+C=180°$이고 $A:B:C=2:1:1$이므로

$A=180°\cdot\frac{2}{4}=90°$, $B=C=180°\cdot\frac{1}{4}=45°$

따라서 사인법칙에 의하여

$a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$

$=\sin 90°:\sin 45°:\sin 45°$

$=1:\frac{\sqrt{2}}{2}:\frac{\sqrt{2}}{2}$

$=\sqrt{2}:1:1$ 답 ①

06 사인법칙에 의하여

$a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$

$=2:3:4$

이므로 $a=2k$, $b=3k$, $c=4k$ $(k>0)$로 놓으면

$ab=2k\cdot 3k=6k^2$, $bc=3k\cdot 4k=12k^2$,

$ca=4k\cdot 2k=8k^2$

$\therefore ab:bc:ca=6k^2:12k^2:8k^2$

$=3:6:4$ 답 3 : 6 : 4

07 △ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$\sin A=\frac{a}{2R}$, $\sin C=\frac{c}{2R}$

이것을 주어진 등식에 대입하면

$a\cdot\frac{a}{2R}=c\cdot\frac{c}{2R}$

$\therefore a^2=c^2$

a, c는 양수이므로

$a=c$

따라서 △ABC는 $a=c$인 이등변삼각형이다.

답 ③

Q BOX

△ABC에서 $0°<A<180°$이므로 $\sin A>0$

$\frac{1}{2+1+1}=\frac{1}{4}$

원에 내접하는 사각형에서 한 쌍의 대각의 크기의 합은 180°이다.

Q 쌤 한마디

삼각형 ABC의 세 변의 길이 a, b, c에 대하여

① $a=b$ 또는 $b=c$ 또는 $c=a$

⇨ △ABC는 이등변삼각형이다.

② $a=b=c$ ⇨ △ABC는 정삼각형이다.

③ 가장 긴 변의 길이가 c일 때

(i) $a^2+b^2<c^2$

⇨ △ABC는 $C>90°$인 둔각삼각형이다.

(ii) $a^2+b^2=c^2$

⇨ △ABC는 $C=90°$인 직각삼각형이다.

(iii) $a^2+b^2>c^2$

⇨ △ABC는 예각삼각형이다.

08 △ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$\sin A=\frac{a}{2R}$, $\sin B=\frac{b}{2R}$, $\sin C=\frac{c}{2R}$

이것을 주어진 등식에 대입하면

$a\cdot\frac{a}{2R}=b\cdot\frac{b}{2R}+c\cdot\frac{c}{2R}$

$\therefore a^2=b^2+c^2$

따라서 △ABC는 $A=90°$인 직각삼각형이다.

답 $A=90°$인 직각삼각형

09 $\overline{AC}=x$라 하면 코사인법칙에 의하여

$7^2=5^2+x^2-2\cdot 5\cdot x\cdot\cos 120°$

$49=25+x^2-2\cdot 5\cdot x\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$

$x^2+5x-24=0,\quad (x+8)(x-3)=0$

$\therefore x=3$ ($\because x>0$)

$\therefore \overline{AC}=3$ 답 3

10 □ABCD가 원에 내접하므로

$B+D=180°$

즉 $D=180°-B$이므로

$\cos D=\cos(180°-B)=-\cos B=-\frac{1}{8}$

따라서 △ACD에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AC}^2=4^2+3^2-2\cdot 4\cdot 3\cdot\cos D$

$=16+9-2\cdot 4\cdot 3\cdot\left(-\frac{1}{8}\right)=28$

$\therefore \overline{AC}=2\sqrt{7}$ ($\because \overline{AC}>0$) 답 $2\sqrt{7}$

11 코사인법칙에 의하여

$\overline{AC}^2=(2\sqrt{3})^2+5^2-2\cdot 2\sqrt{3}\cdot 5\cdot\cos 30°$

$=12+25-2\cdot 2\sqrt{3}\cdot 5\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=7$

$\therefore \overline{AC}=\sqrt{7}$ ($\because \overline{AC}>0$)

$\therefore \cos C=\frac{5^2+(\sqrt{7})^2-(2\sqrt{3})^2}{2\cdot 5\cdot\sqrt{7}}$

$=\frac{2\sqrt{7}}{7}$ 답 $\frac{2\sqrt{7}}{7}$

12 가장 긴 변의 대각의 크기가 가장 크므로 그 크기를 θ라 하면 코사인법칙에 의하여

$$\cos\theta=\frac{7^2+8^2-13^2}{2\cdot7\cdot8}=-\frac{1}{2}$$

이때 $0^\circ<\theta<180^\circ$이므로

$\theta=120^\circ$ 답 ③

13 코사인법칙에 의하여

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},\ \cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$$

이것을 주어진 등식에 대입하면

$$b\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}-a\cdot\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}=c$$

$$b^2+c^2-a^2-(c^2+a^2-b^2)=2c^2$$

$$\therefore\ b^2=a^2+c^2$$

따라서 △ABC는 $B=90^\circ$인 직각삼각형이다.

답 ⑤

14 △ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$$\sin A=\frac{a}{2R},\ \sin B=\frac{b}{2R} \quad\cdots\cdots ㉠$$

코사인법칙에 의하여

$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} \quad\cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 주어진 등식에 대입하면

$$\frac{a}{2R}=2\cdot\frac{b}{2R}\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

$$a^2=a^2+b^2-c^2$$

$$\therefore\ b^2=c^2$$

b, c는 양수이므로

$b=c$

따라서 △ABC는 $\overline{AB}=\overline{CA}$인 이등변삼각형이다.

답 ②

15 코사인법칙에 의하여

$$\overline{BC}^2=5^2+4^2-2\cdot5\cdot4\cdot\cos60^\circ$$

$$=25+16-2\cdot5\cdot4\cdot\frac{1}{2}=21$$

$$\therefore\ \overline{BC}=\sqrt{21}\ (\because\ \overline{BC}>0)$$

△ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$$\frac{\sqrt{21}}{\sin60^\circ}=2R$$

$$\therefore\ R=\frac{\sqrt{21}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\cdot\frac{1}{2}=\sqrt{7}$$ 답 $\sqrt{7}$

16 사인법칙에 의하여

$$a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$$

$$=1:2:\sqrt{2}$$

따라서 $a=k$, $b=2k$, $c=\sqrt{2}k\ (k>0)$로 놓으면 코사인법칙에 의하여

$$\cos B=\frac{k^2+(\sqrt{2}k)^2-(2k)^2}{2\cdot k\cdot\sqrt{2}k}$$

$$=-\frac{k^2}{2\sqrt{2}k^2}=-\frac{\sqrt{2}}{4}$$ 답 ③

17 △ABC에서

$$C=180^\circ-(75^\circ+45^\circ)=60^\circ$$

△ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R m라 하면 사인법칙에 의하여

$$\frac{20\sqrt{3}}{\sin60^\circ}=2R$$

$$\therefore\ R=\frac{20\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\cdot\frac{1}{2}=20$$

따라서 잔디밭의 넓이는

$\pi\cdot20^2=400\pi\ (\mathrm{m}^2)$ 답 $400\pi\ \mathrm{m}^2$

18 $\angle BDC=180^\circ-(60^\circ+30^\circ)=90^\circ$이므로 직각삼각형 BCD에서

$$\overline{CD}=\overline{BC}\sin30^\circ=120\cdot\frac{1}{2}=60\ (\mathrm{m})$$

직각삼각형 ABC에서

$$\overline{AC}=\frac{\overline{BC}}{\cos30^\circ}=\frac{120}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=80\sqrt{3}\ (\mathrm{m})$$

따라서 △ACD에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AD}^2=(80\sqrt{3})^2+60^2-2\cdot80\sqrt{3}\cdot60\cdot\cos30^\circ$$

$$=19200+3600-2\cdot80\sqrt{3}\cdot60\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$=8400$$

$$\therefore\ \overline{AD}=20\sqrt{21}\ (\mathrm{m})\ (\because\ \overline{AD}>0)$$

따라서 두 지점 A, D 사이의 거리는 $20\sqrt{21}$ m이다.

답 $20\sqrt{21}$ m

14 삼각형의 넓이

Lecture 30 삼각형과 사각형의 넓이 97쪽

1-1 (1) $\triangle ABC=\frac{1}{2}\cdot6\cdot4\cdot\sin30^\circ$

$$=\frac{1}{2}\cdot6\cdot4\cdot\frac{1}{2}=6$$

(2) $\triangle ABC=\frac{1}{2}\cdot8\cdot7\cdot\sin120^\circ$

$$=\frac{1}{2}\cdot8\cdot7\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=14\sqrt{3}$$

답 (1) 6 (2) $14\sqrt{3}$

1-2 $\frac{6\cdot2\sqrt{5}\cdot2\sqrt{2}}{4\cdot\sqrt{10}}=6$ 답 6

Q BOX

$7<8<13$이므로 가장 긴 변의 길이는 13이다.

직각삼각형 BCD에서 $\overline{CD}=\overline{BC}\cos60^\circ$임을 이용하여 구할 수도 있다.

△ABC의 외접원의 반지름의 길이가 R일 때, $\triangle ABC=\frac{abc}{4R}$

2-1 (1) $\square ABCD=5\cdot 4\sqrt{2}\cdot \sin 45^\circ$

$$=5\cdot 4\sqrt{2}\cdot \frac{\sqrt{2}}{2}=20$$

(2) $\square ABCD=6\cdot 10\cdot \sin 150^\circ$

$$=6\cdot 10\cdot \frac{1}{2}=30$$

답 (1) 20 (2) 30

2-2 $\square ABCD=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 5\cdot \sin 120^\circ$

$$=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 5\cdot \frac{\sqrt{3}}{2}=5\sqrt{3}$$

답 $5\sqrt{3}$

기본+표준 유형 Q+Q

98쪽

01 △ABC의 넓이가 6이므로

$$\frac{1}{2}\cdot 3\sqrt{2}\cdot 4\cdot \sin A=6$$

$$\therefore \sin A=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

이때 $0^\circ<A<90^\circ$이므로

$A=45^\circ$

답 45°

02 $\overline{AB}=x$라 하면 코사인법칙에 의하여

$$(\sqrt{13})^2=3^2+x^2-2\cdot 3\cdot x\cdot \cos 60^\circ$$

$$13=9+x^2-2\cdot 3\cdot x\cdot \frac{1}{2}$$

$$x^2-3x-4=0, \quad (x+1)(x-4)=0$$

$$\therefore x=4\ (\because x>0)$$

$$\therefore \triangle ABC=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 3\cdot \sin 60^\circ$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 3\cdot \frac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$$

답 $3\sqrt{3}$

03 △ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 △ABC의 넓이가 $15\sqrt{3}$이므로

$$15\sqrt{3}=\frac{6\cdot 10\cdot 14}{4R}, \qquad 15\sqrt{3}=\frac{210}{R}$$

$$\therefore R=\frac{14\sqrt{3}}{3}$$

답 ③

04 $A=180^\circ-(30^\circ+30^\circ)=120^\circ$이고 △ABC의 외접원의 반지름의 길이가 12이므로

$$\triangle ABC=2\cdot 12^2\cdot \sin 120^\circ\cdot \sin 30^\circ\cdot \sin 30^\circ$$

$$=2\cdot 144\cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot \frac{1}{2}\cdot \frac{1}{2}$$

$$=36\sqrt{3}$$

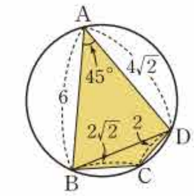
답 $36\sqrt{3}$

Q BOX: △ABC의 외접원의 반지름의 길이가 R일 때, $\triangle ABC=2R^2\sin A\sin B\sin C$

05 □ABCD가 원에 내접하므로

$C=180^\circ-A=135^\circ$

오른쪽 그림과 같이 $\overline{BD}$를 그으면



$\square ABCD$

$=\triangle ABD+\triangle BCD$

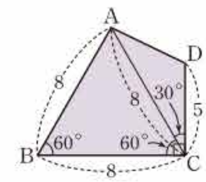
$$=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 4\sqrt{2}\cdot \sin 45^\circ+\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{2}\cdot 2\cdot \sin 135^\circ$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 4\sqrt{2}\cdot \frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{2}\cdot 2\cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$=12+2=14$

답 14

06 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AC}$를 그으면 △ABC는 $\overline{AB}=\overline{BC}$인 이등변삼각형이므로



$$\angle ACB=\frac{1}{2}(180^\circ-60^\circ)=60^\circ$$

따라서 △ABC는 정삼각형이고

$\angle ACD=90^\circ-60^\circ=30^\circ$

이므로

$\square ABCD=\triangle ABC+\triangle ACD$

$$=\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 8\cdot \sin 60^\circ+\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 5\cdot \sin 30^\circ$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 8\cdot \frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 5\cdot \frac{1}{2}$$

$=16\sqrt{3}+10$

답 ⑤

Q BOX: △ABC는 한 변의 길이가 8인 정삼각형이므로 $\triangle ABC=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 8^2=16\sqrt{3}$ 과 같이 구할 수도 있다.

07 $\overline{AD}=\overline{BC}=6\sqrt{2}$, $\overline{DC}=\overline{AB}=5$이고 □ABCD의 넓이가 $15\sqrt{6}$이므로

$$6\sqrt{2}\cdot 5\cdot \sin D=15\sqrt{6} \qquad \therefore \sin D=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

이때 $0^\circ<D<90^\circ$이므로

$D=60^\circ$

답 60°

08 △ACD에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos D=\frac{8^2+7^2-13^2}{2\cdot 8\cdot 7}=-\frac{1}{2}$$

이때 $90^\circ<D<180^\circ$이므로

$D=120^\circ$

$$\therefore \square ABCD=8\cdot 7\cdot \sin 120^\circ$$

$$=8\cdot 7\cdot \frac{\sqrt{3}}{2}=28\sqrt{3}$$

답 ②

09 $0^\circ<\theta<180^\circ$이므로

$$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$\therefore \square ABCD=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 4\cdot \sin\theta$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 4\cdot \frac{\sqrt{15}}{4}=3\sqrt{15}$$

답 $3\sqrt{15}$

10 $\overline{AC}=\overline{BD}=x$라 하면 □ABCD의 넓이가 $3\sqrt{2}$이므로

$$\frac{1}{2}\cdot x^2\cdot \sin 45^\circ=3\sqrt{2}$$

Q BOX: 등변사다리꼴의 두 대각선의 길이는 같다.

$\frac{1}{2}\cdot x^2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=3\sqrt{2}$, $x^2=12$

$\therefore x=2\sqrt{3}$ ($\because x>0$)

$\therefore \overline{AC}=2\sqrt{3}$ 답 ④

중단원 마무리

100쪽

01 전략 사인법칙을 이용하여 $\sin C$의 값을 구한다.

풀이 사인법칙에 의하여 $\frac{3}{\sin 30°}=\frac{3\sqrt{3}}{\sin C}$이므로

$3\sin C=3\sqrt{3}\sin 30°$

$\therefore \sin C=3\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

이때 $0°<C<90°$이므로

$C=60°$ 답 $60°$

02 전략 먼저 B를 구하고 $A+B+C=180°$임을 이용하여 C를 구한다.

풀이 사인법칙에 의하여 $\frac{4\sqrt{2}}{\sin 30°}=\frac{8}{\sin B}$이므로

$4\sqrt{2}\sin B=8\sin 30°$

$\therefore \sin B=8\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

이때 $0°<B<150°$이므로

삼각형의 세 내각의 크기의 합이 180°이고 $A=30°$이므로 $0°<B<150°$

$B=45°$ 또는 $B=135°$

△ABC에서 $A+B+C=180°$이므로

$B=45°$일 때,

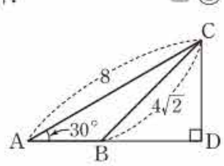
$C=180°-(30°+45°)=105°$

$B=135°$일 때,

$C=180°-(30°+135°)=15°$

따라서 예각 C의 크기는 $15°$이다. 답 ①

다른 풀이 오른쪽 그림과 같이 점 C에서 $\overline{AB}$의 연장선에 내린 수선의 발을 D라 하면



$\overline{CD}=8\sin 30°$

$=8\cdot\frac{1}{2}=4$

직각삼각형 BDC에서

$\overline{BD}=\sqrt{(4\sqrt{2})^2-4^2}=4$

따라서 △BDC는 $\overline{BD}=\overline{CD}$인 이등변삼각형이므로

$\angle CBD=\frac{1}{2}(180°-90°)=45°$

즉 △ABC에서

$\angle ACB=45°-30°=15°$

삼각형의 한 외각의 크기는 그와 이웃하지 않는 두 내각의 크기의 합과 같으므로 $30°+\angle ACB=45°$

03 전략 한 원에서 원주각의 크기는 호의 길이에 정비례함을 이용하여 A, B를 구한다.

풀이 $A+B+C=180°$이고

$\widehat{AB}:\widehat{BC}:\widehat{CA}=7:3:2$이므로

$A=180°\cdot\frac{3}{12}=45°$, $B=180°\cdot\frac{2}{12}=30°$

사인법칙에 의하여 $\frac{6}{\sin 30°}=\frac{\overline{BC}}{\sin 45°}$이므로

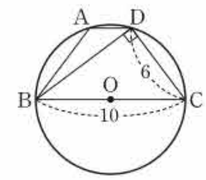
$6\sin 45°=\overline{BC}\sin 30°$

$\therefore \overline{BC}=6\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 2=6\sqrt{2}$ 답 ②

04 전략 먼저 □ABCD의 대각선 BD의 길이를 구한 후 사인법칙을 이용한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 $\overline{BD}$를 그으면 $\angle BDC=90°$이므로 직각삼각형 BCD에서

반원에 대한 원주각의 크기는 90°이다.



$\overline{BD}=\sqrt{10^2-6^2}=8$

이때 △ABD의 외접원의 지름의 길이가 10이므로 사인법칙에 의하여

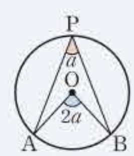
$\frac{8}{\sin A}=10$

$\therefore \sin A=\frac{8}{10}=\frac{4}{5}$ 답 $\frac{4}{5}$

쌤 한마디

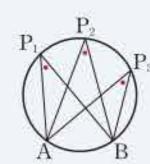
다음과 같은 원주각의 성질은 도형 문제에서 자주 이용된다.

① 원에서 한 호에 대한 원주각의 크기는 그 호에 대한 중심각의 크기의 $\frac{1}{2}$이다.



→ $\angle APB=\frac{1}{2}\angle AOB$

② 원에서 한 호에 대한 원주각의 크기는 모두 같다.



→ $\angle AP_1B=\angle AP_2B$
$=\angle AP_3B$

③ 한 원에서 호의 길이는 그 호에 대한 원주각의 크기에 정비례한다.

→ 길이가 같은 호에 대한 원주각의 크기는 같다.

05 전략 사인법칙을 이용하여 △ABC의 세 변의 길이의 비를 구한다.

풀이 $6\sin A=2\sqrt{3}\sin B=3\sin C=k$ $(k>0)$로 놓으면

$\sin A=\frac{k}{6}$, $\sin B=\frac{k}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{6}k$, $\sin C=\frac{k}{3}$

사인법칙에 의하여

$a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$

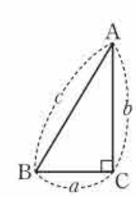
$=\frac{k}{6}:\frac{\sqrt{3}}{6}k:\frac{k}{3}$

$=1:\sqrt{3}:2$

즉 $a^2:b^2:c^2=1:3:4$이므로

$c^2=a^2+b^2$

따라서 △ABC는 오른쪽 그림과 같이 $\angle C=90°$인 직각삼각형이므로



$\sin A=\frac{a}{c}=\frac{1}{2}$

이때 $0°<\angle A<90°$이므로

$\angle A=30°$ 답 ⑤

06 전략 $\sin^2 x+\cos^2 x=1$임을 이용하여 주어진 등식을 변형한다.

풀이 $\cos^2 A=1-\sin^2 A$, $\cos^2 B=1-\sin^2 B$, $\cos^2 C=1-\sin^2 C$이므로 주어진 등식에 대입하면

$$(1-\sin^2 A)-(1-\sin^2 B)-(1-\sin^2 C)=-1$$

$$\therefore \sin^2 A=\sin^2 B+\sin^2 C \quad \cdots\cdots ㉠$$

△ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$$\sin A=\frac{a}{2R},\ \sin B=\frac{b}{2R},\ \sin C=\frac{c}{2R}$$

이것을 ㉠에 대입하면

$$\left(\frac{a}{2R}\right)^2=\left(\frac{b}{2R}\right)^2+\left(\frac{c}{2R}\right)^2$$

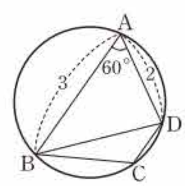
$$\therefore a^2=b^2+c^2$$

따라서 △ABC는 $A=90°$인 직각삼각형이다.

답 ③

07 전략 원에 내접하는 사각형에서 한 쌍의 대각의 크기의 합은 180°임을 이용한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 $\overline{BD}$를 그으면 △ABD에서 코사인법칙에 의하여



$$\overline{BD}^2=3^2+2^2-2\cdot3\cdot2\cdot\cos 60°$$

$$=9+4-2\cdot3\cdot2\cdot\frac{1}{2}=7 \quad \cdots ❶$$

한편 □ABCD가 원에 내접하므로

$$A+C=180°$$

$$\therefore C=180°-60°=120° \quad \cdots ❷$$

$\overline{BC}:\overline{CD}=2:1$이므로 $\overline{BC}=2k$, $\overline{CD}=k\ (k>0)$로 놓으면 △BCD에서 코사인법칙에 의하여

$$7=(2k)^2+k^2-2\cdot2k\cdot k\cdot\cos 120°$$

$$7=4k^2+k^2-2\cdot2k\cdot k\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$7k^2=7,\qquad k^2=1$$

$$\therefore k=1\ (\because k>0)$$

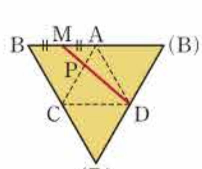
따라서 $\overline{CD}$의 길이는 1이다. $\cdots$ ❸

답 1

단계	채점 기준	비율
❶	$\overline{BD}^2$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷	C를 구할 수 있다.	20 %
❸	$\overline{CD}$의 길이를 구할 수 있다.	50 %

08 전략 정사면체의 전개도에 $\overline{MP}+\overline{PD}$가 최소가 되는 경우를 그려 본다.

풀이 정사면체의 전개도는 오른쪽 그림과 같으므로



$$\overline{MP}+\overline{PD}\ge\overline{DM}$$

△AMD에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{DM}^2=4^2+8^2-2\cdot4\cdot8\cdot\cos 120°$$

$$=16+64-2\cdot4\cdot8\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=112$$

$$\therefore \overline{DM}=4\sqrt{7}\ (\because \overline{DM}>0)$$

따라서 $\overline{MP}+\overline{PD}$의 최솟값은 $4\sqrt{7}$이다.

답 $4\sqrt{7}$

Q BOX

정삼각형의 한 내각의 크기는 60°이므로
$\angle MAD=2\cdot60°$
$=120°$

09 전략 △ABD에서 코사인법칙을 이용하여 $\cos A$의 값을 구한다.

풀이 △ABD에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos A=\frac{6^2+6^2-(\sqrt{15})^2}{2\cdot6\cdot6}=\frac{19}{24}$$

△ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{BC}^2=6^2+10^2-2\cdot6\cdot10\cdot\cos A$$

$$=36+100-2\cdot6\cdot10\cdot\frac{19}{24}=41$$

$$\therefore \overline{BC}=\sqrt{41}\ (\because \overline{BC}>0)$$

답 ⑤

다른 풀이 $\angle ADB=\theta$라 하면 △ABD에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos\theta=\frac{6^2+(\sqrt{15})^2-6^2}{2\cdot6\cdot\sqrt{15}}=\frac{\sqrt{15}}{12}$$

이때

$$\angle BDC=\pi-\theta,\ \overline{CD}=10-6=4$$

이므로 △BCD에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{BC}^2=(\sqrt{15})^2+4^2-2\cdot\sqrt{15}\cdot4\cdot\cos(\pi-\theta)$$

$$=15+16-2\cdot\sqrt{15}\cdot4\cdot\left(-\frac{\sqrt{15}}{12}\right)=41$$

$$\therefore \overline{BC}=\sqrt{41}\ (\because \overline{BC}>0)$$

$\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$

10 전략 코사인법칙을 이용하여 $\cos C$를 x에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 코사인법칙에 의하여

$$\cos C=\frac{x^2+7^2-5^2}{2\cdot x\cdot7}=\frac{x^2+24}{14x}=\frac{x}{14}+\frac{12}{7x}$$

$x>0$에서 $\frac{x}{14}>0$, $\frac{12}{7x}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{x}{14}+\frac{12}{7x}\ge2\sqrt{\frac{x}{14}\cdot\frac{12}{7x}}=\frac{2\sqrt{6}}{7}$$

이때 등호는 $\frac{x}{14}=\frac{12}{7x}$일 때 성립하므로

$$x^2=24\qquad \therefore x=2\sqrt{6}\ (\because x>0)$$

따라서 $\cos C$는 $x=2\sqrt{6}$일 때 최솟값 $\frac{2\sqrt{6}}{7}$을 갖는다.

답 최솟값: $\frac{2\sqrt{6}}{7}$, $x=2\sqrt{6}$

$a>0$, $b>0$일 때,
$\frac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}$
(단, 등호는 $a=b$일 때 성립)

11 전략 사인법칙과 코사인법칙을 이용하여 주어진 등식을 a, b, c에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 $\sin\left(\frac{\pi}{2}+A\right)=\cos A$, $\cos\left(\frac{\pi}{2}-B\right)=\sin B$이므로 주어진 등식은

$$\cos A\sin B=\sin C \quad \cdots\cdots ㉠$$

$\triangle ABC$의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$$\sin B=\frac{b}{2R},\ \sin C=\frac{c}{2R} \quad \cdots\cdots ㉡$$

코사인법칙에 의하여

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \quad \cdots\cdots ㉢$$

㉡, ㉢을 ㉠에 대입하면

$$\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\cdot\frac{b}{2R}=\frac{c}{2R}$$

$$b^2+c^2-a^2=2c^2$$

$$\therefore\ b^2=a^2+c^2$$

따라서 $\triangle ABC$는 $B=90°$인 직각삼각형이다.

답 ④

12 전략 코사인법칙을 이용하여 $\overline{BC}$의 길이를 구한 후 사인법칙을 이용하여 R의 값을 구한다.

풀이 코사인법칙에 의하여

$$\overline{BC}^2=5^2+6^2-2\cdot5\cdot6\cdot\cos A$$

$$=25+36-2\cdot5\cdot6\cdot\frac{3}{5}=25$$

$$\therefore\ \overline{BC}=5\ (\because\ \overline{BC}>0)$$

이때

$$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=\frac{4}{5}$$

$$(\because\ 0°<A<180°)$$

이고 사인법칙에 의하여 $\frac{5}{\sin A}=2R$이므로

$$R=\frac{5}{\frac{4}{5}}\cdot\frac{1}{2}=\frac{25}{8}$$

$$\therefore\ 8R=25$$

답 25

13 전략 사인법칙을 이용하여 $\overline{BC}$의 길이를 구한 후 코사인법칙을 이용하여 $\overline{AC}$의 길이를 구한다.

풀이 사인법칙에 의하여 $\frac{\overline{BC}}{\sin\frac{\pi}{3}}=2\cdot7$이므로

$$\overline{BC}=14\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=7\sqrt{3}$$

$\overline{AB}:\overline{AC}=3:1$이므로 $\overline{AB}=3k$, $\overline{AC}=k\ (k>0)$로 놓으면 $\triangle ABC$에서 코사인법칙에 의하여

$$(7\sqrt{3})^2=(3k)^2+k^2-2\cdot3k\cdot k\cdot\cos\frac{\pi}{3}$$

$$147=9k^2+k^2-2\cdot3k\cdot k\cdot\frac{1}{2}$$

$$7k^2=147,\qquad k^2=21$$

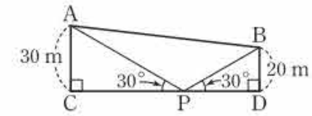
$$\therefore\ k=\sqrt{21}\ (\because\ k>0)$$

$$\therefore\ \overline{AC}=\sqrt{21}$$

답 ②

14 전략 삼각함수의 정의를 이용하여 $\overline{AP}$, $\overline{BP}$의 길이를 구한 후 $\triangle APB$에서 코사인법칙을 이용하여 $\overline{AB}$의 길이를 구한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 두 점 C, D를 잡으면 직각삼각형 ACP에서



$$\overline{AP}=\frac{\overline{AC}}{\sin30°}=\frac{30}{\frac{1}{2}}=60\,(\text{m}) \quad \cdots ❶$$

직각삼각형 BPD에서

$$\overline{BP}=\frac{\overline{BD}}{\sin30°}=\frac{20}{\frac{1}{2}}=40\,(\text{m}) \quad \cdots ❷$$

이때 $\triangle APB$에서

$$\angle APB=180°-(30°+30°)=120°$$

이므로 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AB}^2=60^2+40^2-2\cdot60\cdot40\cdot\cos120°$$

$$=3600+1600-2\cdot60\cdot40\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=7600$$

$$\therefore\ \overline{AB}=20\sqrt{19}\ (\text{m})\ (\because\ \overline{AB}>0)$$

따라서 두 지점 A, B 사이의 거리는 $20\sqrt{19}$ m이다. ❸

답 $20\sqrt{19}$ m

단계	채점 기준	비율
❶	$\overline{AP}$의 길이를 구할 수 있다.	30 %
❷	$\overline{BP}$의 길이를 구할 수 있다.	30 %
❸	두 지점 A, B 사이의 거리를 구할 수 있다.	40 %

Q BOX

$\triangle ABC$의 두 변의 길이 a, b와 그 끼인각의 크기 C에 대하여

$\triangle ABC=\frac{1}{2}ab\sin C$

15 전략 $\triangle ABC$의 넓이는 $\triangle ABD$와 $\triangle ACD$의 넓이의 합과 같음을 이용한다.

풀이 $\overline{AD}=x$라 하면 $\triangle ABC=\triangle ABD+\triangle ACD$이므로

$$\frac{1}{2}\cdot8\cdot6\cdot\sin60°$$

$$=\frac{1}{2}\cdot8\cdot x\cdot\sin30°+\frac{1}{2}\cdot x\cdot6\cdot\sin30°$$

$$\frac{1}{2}\cdot8\cdot6\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}\cdot8\cdot x\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot x\cdot6\cdot\frac{1}{2}$$

$$12\sqrt{3}=2x+\frac{3}{2}x,\qquad \frac{7}{2}x=12\sqrt{3}$$

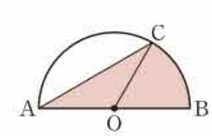
$$\therefore\ x=\frac{24\sqrt{3}}{7}$$

$$\therefore\ \overline{AD}=\frac{24\sqrt{3}}{7}$$

답 $\frac{24\sqrt{3}}{7}$

16 전략 보조선을 그어 넓이를 구하는 부분을 삼각형과 부채꼴로 나눈다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 반원의 중심을 O라 하고 $\overline{OC}$를 그으면 부채꼴 COB에서



$$\overline{OB}=\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}\cdot12=6$$

반지름의 길이가 r, 호의 길이가 l인 부채꼴의 넓이 S는

$S=\frac{1}{2}rl$

이고 호 CB의 길이가 2π이므로 넓이는

$$\frac{1}{2}\cdot6\cdot2\pi=6\pi$$

부채꼴 COB의 중심각의 크기를 θ라 하면 호의 길이가 2π이므로

$6\theta=2\pi \qquad \therefore \theta=\frac{\pi}{3}$

즉 $\angle AOC=\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{2}{3}\pi$이고, $\overline{OA}=\overline{OC}=\overline{OB}=6$이므로

$$\triangle AOC=\frac{1}{2}\cdot6\cdot6\cdot\sin\frac{2}{3}\pi=\frac{1}{2}\cdot6\cdot6\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=9\sqrt{3}$$

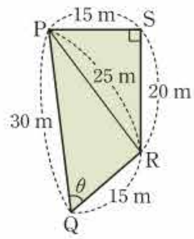
따라서 구하는 넓이는

$6\pi+9\sqrt{3}$ 답 ③

반지름의 길이가 r, 중심각의 크기가 θ인 부채꼴의 호의 길이 l은 $l=r\theta$

17 전략 사각형 모양의 꽃밭을 두 개의 삼각형으로 나누어 넓이를 구한다.

풀이 꽃밭을 오른쪽 그림과 같이 사각형 PQRS라 하고 $\overline{PR}$를 그으면 직각삼각형 PRS에서



$\overline{PR}=\sqrt{15^2+20^2}=25\,(m)$

$\triangle PQR$에서 $\angle PQR=\theta$라 하면 코사인법칙에 의하여

$$\cos\theta=\frac{30^2+15^2-25^2}{2\cdot30\cdot15}=\frac{5}{9}$$

이때 $0°<\theta<180°$이므로

$$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\left(\frac{5}{9}\right)^2}=\frac{2\sqrt{14}}{9}$$

$$\therefore \square PQRS=\triangle PQR+\triangle PRS=\frac{1}{2}\cdot30\cdot15\cdot\frac{2\sqrt{14}}{9}+\frac{1}{2}\cdot15\cdot20=50\sqrt{14}+150\,(m^2)$$

따라서 꽃밭의 넓이는 $(50\sqrt{14}+150)\ m^2$이다.

답 $(50\sqrt{14}+150)\ m^2$

18 전략 먼저 $\triangle ACD$에서 코사인법칙을 이용하여 $\overline{CD}$의 길이를 구한다.

풀이 $\overline{CD}=x$라 하면 $\triangle ACD$에서 코사인법칙에 의하여

$(2\sqrt{3})^2=4^2+x^2-2\cdot4\cdot x\cdot\cos60°$

$12=16+x^2-2\cdot4\cdot x\cdot\frac{1}{2}, \qquad x^2-4x+4=0$

$(x-2)^2=0 \qquad \therefore x=2$

$\therefore \square ABCD=4\cdot2\cdot\sin60°=4\cdot2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=4\sqrt{3}$ 답 $4\sqrt{3}$

다른 풀이 $\triangle ACD$에서 사인법칙에 의하여

$\frac{2\sqrt{3}}{\sin60°}=\frac{4}{\sin(\angle ACD)}$

$2\sqrt{3}\sin(\angle ACD)=4\sin60°$

$\therefore \sin(\angle ACD)=4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{3}}=1$

따라서 $\angle ACD=90°$이므로 직각삼각형 ACD에서

$\overline{CD}=\sqrt{4^2-(2\sqrt{3})^2}=2$

$\therefore \square ABCD=4\cdot2\cdot\sin60°=4\sqrt{3}$

08 등차수열과 등비수열

15 등차수열

Lecture 31 수열
106쪽

1-1 (1) $a_1=5\cdot1-1=4$, $a_2=5\cdot2-1=9$, $a_3=5\cdot3-1=14$, $a_4=5\cdot4-1=19$, $a_5=5\cdot5-1=24$

수열의 일반항 a_n의 n에 1, 2, 3, 4, 5를 차례대로 대입한다.

(2) $a_1=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$, $a_2=\frac{2}{2+1}=\frac{2}{3}$, $a_3=\frac{3}{3+1}=\frac{3}{4}$, $a_4=\frac{4}{4+1}=\frac{4}{5}$, $a_5=\frac{5}{5+1}=\frac{5}{6}$

답 (1) 4, 9, 14, 19, 24 (2) $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{6}$

1-2 (1) $4+2=6$

(2) $2^4-3^4=16-81=-65$

답 (1) 6 (2) -65

2-1 $a_1=1=\frac{1}{1^2}$, $a_2=\frac{1}{4}=\frac{1}{2^2}$, $a_3=\frac{1}{9}=\frac{1}{3^2}$, $a_4=\frac{1}{16}=\frac{1}{4^2}$, $a_5=\frac{1}{25}=\frac{1}{5^2}$, $\cdots$이므로

$a_n=\frac{1}{n^2}$ 답 $a_n=\frac{1}{n^2}$

2-2 (1) $a_1=\frac{1}{3}=\frac{1}{1+2}$, $a_2=\frac{2}{4}=\frac{2}{2+2}$, $a_3=\frac{3}{5}=\frac{3}{3+2}$, $a_4=\frac{4}{6}=\frac{4}{4+2}$, $\cdots$이므로

$a_n=\frac{n}{n+2}$

(2) $a_1=1\cdot2=1\cdot(1+1)$, $a_2=2\cdot3=2\cdot(2+1)$, $a_3=3\cdot4=3\cdot(3+1)$, $a_4=4\cdot5=4\cdot(4+1)$이므로

$a_n=n(n+1)$

답 (1) $a_n=\frac{n}{n+2}$ (2) $a_n=n(n+1)$

Lecture 32 등차수열
107쪽

1-1 (1) $a_n=3+(n-1)\cdot(-5)=-5n+8$

(2) 주어진 등차수열의 첫째항이 -4이고 공차가 3이므로

$-1-(-4)=2-(-1)=5-2=\cdots=3$

$a_n=-4+(n-1)\cdot3=3n-7$

답 (1) $a_n=-5n+8$ (2) $a_n=3n-7$

1-2 (1) $a_n=11+(n-1)\cdot(-2)=-2n+13$

(2) $a_7=(-2)\cdot7+13=-1$

수열의 일반항 a_n의 n에 7을 대입한다.

답 (1) $a_n=-2n+13$ (2) -1

2-1 x는 3과 15의 등차중항이므로

$x=\frac{3+15}{2}=9$ 　　답 9

2-2 x는 -2와 6의 등차중항이므로

$x=\frac{-2+6}{2}=2$

y는 6과 14의 등차중항이므로

$y=\frac{6+14}{2}=10$ 　　답 $x=2$, $y=10$

기본+표준 유형 Q+Q

108쪽

01 $a_1=\frac{1+5}{2\cdot1}=3$, $a_5=\frac{5+5}{2\cdot5}=1$이므로

$a_1+a_5=4$ 　　답 ③

02 $a_1=11=10^1+1$, $a_2=101=10^2+1$,
$a_3=1001=10^3+1$, $a_4=10001=10^4+1$,
$a_5=100001=10^5+1$이므로

$a_n=10^n+1$ 　　답 ③

03 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_3=a+2d=4$ 　　…… ㉠

$a_7=a+6d=-8$ 　　…… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 　$a=10$, $d=-3$

따라서 $a_n=10+(n-1)\cdot(-3)=-3n+13$이므로

$a_{10}=(-3)\cdot10+13=-17$ 　　답 ④

04 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a라 하면

$a_6=a+5\cdot4=15$ 　　$\therefore a=-5$

따라서 $a_n=-5+(n-1)\cdot4=4n-9$이므로 $a_k=35$에서

$4k-9=35$ 　　$\therefore k=11$ 　　답 11

05 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_4=a+3d=3$ 　　…… ㉠

$a_2+a_7=(a+d)+(a+6d)$

$=2a+7d=1$ 　　…… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 　$a=18$, $d=-5$

$\therefore a_n=18+(n-1)\cdot(-5)=-5n+23$

-47을 제k항이라 하면

$-5k+23=-47$ 　　$\therefore k=14$

따라서 -47은 제14항이다. 　　답 제14항

06 첫째항을 a, 공차를 d라 하고, 일반항을 a_n이라 하면

$a_6=a+5d=-17$ 　　…… ㉠

$a_{10}=a+9d=-5$ 　　…… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 　$a=-32$, $d=3$

$\therefore a_n=-32+(n-1)\cdot3=3n-35$

$3n-35>0$에서 　$n>\frac{35}{3}=11.6\cdots$

따라서 처음으로 양수가 되는 항은 제12항이다.

답 ②

07 $a_n=-11+(n-1)\cdot\frac{4}{3}=\frac{4}{3}n-\frac{37}{3}$

$\frac{4}{3}n-\frac{37}{3}>0$에서 　$n>\frac{37}{4}=9.25$

이때 $a_9=\frac{4}{3}\cdot9-\frac{37}{3}=-\frac{1}{3}$, $a_{10}=\frac{4}{3}\cdot10-\frac{37}{3}=1$이므로

$|a_9|=\frac{1}{3}$, $|a_{10}|=1$

따라서 $|a_n|$의 최솟값은 $\frac{1}{3}$이다. 　　답 $\frac{1}{3}$

08 공차를 d라 하면 첫째항이 8, 제5항이 36이므로

$8+4d=36$ 　　$\therefore d=7$

따라서 주어진 수열의 공차는 7이다. 　　답 7

09 첫째항이 -7, 공차가 $\frac{1}{2}$인 등차수열의 제$(n+2)$항이 25이므로

$-7+(n+1)\cdot\frac{1}{2}=25$, 　$n+1=64$

$\therefore n=63$ 　　답 63

10 세 수 2, a^2+4a, $5a$가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2(a^2+4a)=2+5a$, 　$2a^2+3a-2=0$

$(a+2)(2a-1)=0$ 　　$\therefore a=\frac{1}{2}$ ($\because a>0$)

답 ②

11 세 수 $4-3\sqrt{2}$, b, $\sqrt{2}$가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$b=\frac{(4-3\sqrt{2})+\sqrt{2}}{2}=2-\sqrt{2}$

세 수 a, $4-3\sqrt{2}$, $2-\sqrt{2}$도 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2(4-3\sqrt{2})=a+(2-\sqrt{2})$

$\therefore a=6-5\sqrt{2}$

$\therefore ab=(6-5\sqrt{2})(2-\sqrt{2})=22-16\sqrt{2}$

답 $22-16\sqrt{2}$

12 세 수를 $a-d$, a, $a+d$로 놓으면
세 수의 합이 15이므로

$(a-d)+a+(a+d)=15$

$3a=15$ 　　$\therefore a=5$

세 수의 제곱의 합이 107이므로

$(5-d)^2+5^2+(5+d)^2=107$

Q BOX

처음으로 양수가 되는 항이 a_k일 때, $|a_{k-1}|$과 $|a_k|$의 값 중 작은 값이 구하는 최솟값이다.

두 수 a, b 사이에 n개의 수를 넣어서 만든 등차수열
➡ 첫째항: a,
제$(n+2)$항: b
➡ $b=a+(n+1)d$
(단, d는 공차)

$a_{10}=10+9\cdot(-3)$
$=-17$
과 같이 구할 수도 있다.

등차수열 $\{a_n\}$에서 처음으로
① 양수가 되는 항
➡ $a_n>0$을 만족시키는 자연수 n의 최솟값을 구한다.
② 음수가 되는 항
➡ $a_n<0$을 만족시키는 자연수 n의 최솟값을 구한다.

$75+2d^2=107, \quad d^2=16$

$\therefore d=\pm4$

따라서 세 수는 1, 5, 9이므로 세 수의 곱은

$1\cdot5\cdot9=45$ 답 ②

13 네 수를 $a-3d$, $a-d$, $a+d$, $a+3d$로 놓으면 네 수의 합이 4이므로

$(a-3d)+(a-d)+(a+d)+(a+3d)=4$

$4a=4 \quad \therefore a=1$

가장 작은 수와 가장 큰 수의 곱이 -35이므로

$(1-3d)(1+3d)=-35$

$1-9d^2=-35, \quad d^2=4$

$\therefore d=\pm2$

따라서 네 수는 -5, -1, 3, 7이므로 가장 작은 수는 -5이다. 답 -5

16 등차수열의 합

Lecture 33 등차수열의 합 110쪽

1-1 (1) $\dfrac{10(-2+16)}{2}=70$

(2) $\dfrac{10\{2\cdot8+(10-1)\cdot(-3)\}}{2}=-55$

답 (1) 70 (2) -55

1-2 첫째항이 -6, 공차가 $-2-(-6)=4$이므로

$\dfrac{14\{2\cdot(-6)+(14-1)\cdot4\}}{2}=280$ 답 280

2-1 (1) 첫째항이 1, 공차가 $-3-1=-4$이므로

$a_n=1+(n-1)\cdot(-4)=-4n+5$

(2) $a_k=-27$에서 $\quad -4k+5=-27$

$\therefore k=8$

(3) 첫째항이 1, 제8항이 -27인 등차수열의 첫째항부터 제8항까지의 합이므로

$\dfrac{8\{1+(-27)\}}{2}=-104$

답 (1) $a_n=-4n+5$ (2) 8 (3) -104

첫째항이 1, 공차가 -4이므로

$\dfrac{8\{2\cdot1+7\cdot(-4)\}}{2}$

$=-104$

와 같이 구할 수도 있다.

2-2 (1) 2, 5, 8, ⋯, 23은 첫째항이 2, 공차가 $5-2=3$인 등차수열이므로 일반항 a_n은

$a_n=2+(n-1)\cdot3=3n-1$

23을 제k항이라 하면

$3k-1=23 \quad \therefore k=8$

따라서 구하는 합은 첫째항이 2, 제8항이 23인 등차수열의 첫째항부터 제8항까지의 합이므로

$\dfrac{8(2+23)}{2}=100$

107~111쪽

(2) 4, 0, -4, ⋯, -52는 첫째항이 4, 공차가 $0-4=-4$인 등차수열이므로 일반항 a_n은

$a_n=4+(n-1)\cdot(-4)=-4n+8$

-52를 제k항이라 하면

$-4k+8=-52 \quad \therefore k=15$

따라서 구하는 합은 첫째항이 4, 제15항이 -52인 등차수열의 첫째항부터 제15항까지의 합이므로

$\dfrac{15\{4+(-52)\}}{2}=-360$

답 (1) 100 (2) -360

Lecture 34 수열의 합과 일반항 사이의 관계 111쪽

1-1 (1) $a_1=S_1=1^2+1=2$

(2) $a_{10}=S_{10}-S_9=10^2+10-(9^2+9)=20$

답 (1) 2 (2) 20

1-2 (1) $a_3=S_3-S_2=-3^2+6\cdot3-(-2^2+6\cdot2)=1$

(2) $a_8=S_8-S_7=-8^2+6\cdot8-(-7^2+6\cdot7)=-9$

답 (1) 1 (2) -9

2-1 (i) $n=1$일 때,

$a_1=S_1=2\cdot1^2+3\cdot1=5$

(ii) $n\ge2$일 때,

$$\begin{aligned}a_n&=S_n-S_{n-1}\\&=2n^2+3n-\{2(n-1)^2+3(n-1)\}\\&=4n+1 \quad \cdots\cdots ㉠\end{aligned}$$

이때 $a_1=5$는 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$a_n=4n+1$ 답 $a_n=4n+1$

쌤 한마디

$a_n=S_n-S_{n-1}$을 이용하여 얻은 식은 $n\ge2$일 때만 적용된다.

따라서 이 식에 $n=1$을 대입하여 얻은 값과 $a_1=S_1$을 이용하여 얻은 값을 서로 비교하여

① 같으면 ➡ 일반항은 a_n만 쓴다.

② 다르면 ➡ a_1과 일반항 a_n $(n\ge2)$으로 나누어 쓴다.

2-2 (i) $n=1$일 때,

$a_1=S_1=-1^2+5\cdot1-1=3$

(ii) $n\ge2$일 때,

$$\begin{aligned}a_n&=S_n-S_{n-1}\\&=-n^2+5n-1\\&\quad-\{-(n-1)^2+5(n-1)-1\}\\&=-2n+6 \quad \cdots\cdots ㉠\end{aligned}$$

㉠에 $n=1$을 대입하면

$a_1=-2\cdot1+6=4$

$a_1=S_1$을 이용하여 얻은 값과 다르므로 수열 $\{a_n\}$은 둘째항부터 등차수열을 이룬다.

(i), (ii)에서 $\quad a_1=3$, $a_n=-2n+6$ $(n\ge2)$

답 $a_1=3$, $a_n=-2n+6$ $(n\ge2)$

01 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_2=a+d=9$ …… ㉠

$a_7=a+6d=39$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면　$a=3$, $d=6$

따라서 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제20항까지의 합은

$$\frac{20\{2\cdot3+(20-1)\cdot6\}}{2}=1200$$

답 1200

02 첫째항이 26, 제m항이 -19인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제m항까지의 합이 56이므로

$$\frac{m\{26+(-19)\}}{2}=56$$

$7m=112$　$\therefore m=16$

따라서 $a_{16}=-19$이므로 이 수열의 공차를 d라 하면

$26+15d=-19$

$\therefore d=-3$

답 ④

03 첫째항이 3, 끝항이 51, 항수가 $n+2$인 등차수열의 합이 405이므로

$$\frac{(n+2)(3+51)}{2}=405$$

$n+2=15$　$\therefore n=13$

답 ④

> 두 수 a, b 사이에 n개의 수를 넣어서 첫째항이 a, 제$(n+2)$항이 b인 등차수열을 만들 때, 이 등차수열의 합을 S라 하면
> $S=\dfrac{(n+2)(a+b)}{2}$

04 첫째항이 -8, 끝항이 48, 항수가 16인 등차수열의 합은

$$\frac{16(-8+48)}{2}=320$$

따라서 $-8+a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{14}+48=320$이므로

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{14}=320-(-8+48)=280$

답 280

05 주어진 등차수열의 공차를 d, 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

$$S_5=\frac{5\{2\cdot5+(5-1)d\}}{2}=45$$

$5+2d=9$　$\therefore d=2$

$$\therefore S_{15}=\frac{15\{2\cdot5+(15-1)\cdot2\}}{2}=285$$

답 285

06 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$S_{10}=\dfrac{10\{2a+(10-1)d\}}{2}=40$에서

$2a+9d=8$ …… ㉠

$S_{20}=\dfrac{20\{2a+(20-1)d\}}{2}=280$에서

$2a+19d=28$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면　$a=-5$, $d=2$

$$\therefore S_{30}=\frac{30\{2\cdot(-5)+(30-1)\cdot2\}}{2}=720$$

답 ②

Q BOX

> 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때
> ① $a_k>0$, $a_{k+1}<0$이면 S_n의 최댓값은 S_k이다.
> ② $a_k<0$, $a_{k+1}>0$이면 S_n의 최솟값은 S_k이다.

07 $a_n=-52+(n-1)\cdot6=6n-58$

$6n-58>0$에서　$n>\dfrac{29}{3}=9.6\cdots$

즉 수열 $\{a_n\}$은 제10항부터 양수이므로 첫째항부터 제9항까지의 합이 최소이다.

이때 $a_9=6\cdot9-58=-4$이므로 구하는 최솟값은

$$S_9=\frac{9\{-52+(-4)\}}{2}=-252$$

답 -252

08 주어진 등차수열의 공차를 d, 일반항을 a_n이라 하면 첫째항부터 제4항까지의 합이 84이므로

$$\frac{4\{2\cdot27+(4-1)d\}}{2}=84$$

$54+3d=42$　$\therefore d=-4$

$\therefore a_n=27+(n-1)\cdot(-4)=-4n+31$

$-4n+31<0$에서　$n>\dfrac{31}{4}=7.75$

즉 수열 $\{a_n\}$은 제8항부터 음수이므로 첫째항부터 제7항까지의 합이 최대이다.

$\therefore p=7$

이때 $a_7=-4\cdot7+31=3$이므로

$$q=\frac{7(27+3)}{2}=105$$

$\therefore p+q=112$

답 ③

09 50 이하의 자연수 중에서 2로 나누었을 때의 나머지가 1인 수는

1, 3, 5, …, 49

이때 $49=1+2\cdot24$에서 구하는 값은 첫째항이 1, 끝항이 49, 항수가 25인 등차수열의 합이므로

$$\frac{25(1+49)}{2}=625$$

답 ③

> 첫째항이 1, 공차가 2인 등차수열의 제25항

10 30보다 크고 70보다 작은 자연수 중에서 3의 배수는

33, 36, 39, …, 69 …… ㉠

이때 $69=33+3\cdot12$에서 ㉠은 첫째항이 33, 끝항이 69, 항수가 13인 등차수열이므로 그 합은

$$\frac{13(33+69)}{2}=663$$

30보다 크고 70보다 작은 자연수 중에서 5의 배수는

35, 40, 45, …, 65 …… ㉡

이때 $65=35+5\cdot6$에서 ㉡은 첫째항이 35, 끝항이 65, 항수가 7인 등차수열이므로 그 합은

$$\frac{7(35+65)}{2}=350$$

한편 30보다 크고 70보다 작은 자연수 중에서 15의 배수는 45, 60이므로 두 수의 합은

> 45, 60은 ㉠, ㉡에 모두 포함된다.

$45+60=105$

따라서 30보다 크고 70보다 작은 자연수 중에서 3 또는 5로 나누어떨어지는 수의 총합은

$663+350-105=908$

답 908

쌤 한마디

① 자연수 d의 양의 배수를 작은 것부터 차례대로 나열하면
$d,\ 2d,\ 3d,\ \cdots$
→ 첫째항과 공차가 모두 d인 등차수열
② 자연수 d로 나누었을 때의 나머지가 $a\ (0<a<d)$인 자연수를 작은 것부터 차례대로 나열하면
$a,\ a+d,\ a+2d,\ \cdots$
→ 첫째항이 a, 공차가 d인 등차수열

11 $a_1=S_1=3\cdot1^2+5\cdot1=8$
$a_6=S_6-S_5=3\cdot6^2+5\cdot6-(3\cdot5^2+5\cdot5)=38$
$\therefore a_1+a_6=46$ 답 ⑤

12 (i) $n=1$일 때,
$a_1=S_1=-1^2+8\cdot1=7$
(ii) $n\ge2$일 때,
$a_n=S_n-S_{n-1}$
$=-n^2+8n-\{-(n-1)^2+8(n-1)\}$
$=-2n+9$ ⋯⋯ ㉠
이때 $a_1=7$은 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로
$a_n=-2n+9$
$-2n+9>0$에서 $n<\frac{9}{2}=4.5$
따라서 첫째항부터 제4항까지 양수이므로 구하는 총합은
$S_4=-4^2+8\cdot4=16$ 답 16

13 (i) $n=1$일 때,
$a_1=S_1=1^2-3\cdot1+k=k-2$
(ii) $n\ge2$일 때,
$a_n=S_n-S_{n-1}$
$=n^2-3n+k-\{(n-1)^2-3(n-1)+k\}$
$=2n-4$ ⋯⋯ ㉠
이때 수열 $\{a_n\}$이 첫째항부터 등차수열을 이루려면 $a_1=k-2$는 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같아야 하므로
$k-2=2\cdot1-4$ $\therefore k=0$ 답 0

17 등비수열

Lecture 35 등비수열 114쪽

1-1 (1) $a_n=-1\cdot3^{n-1}=-3^{n-1}$
(2) 주어진 등비수열의 첫째항이 4이고 공비가 $-\frac{1}{2}$이므로
$a_n=4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$
답 (1) $a_n=-3^{n-1}$ (2) $a_n=4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

1-2 (2) $a_5=3\cdot(-2)^{5-1}=48$
답 (1) $a_n=3\cdot(-2)^{n-1}$ (2) 48

2-1 x는 3과 75의 등비중항이므로
$x^2=3\cdot75=225$
$\therefore x=\pm15$ 답 -15 또는 15

2-2 $2\sqrt{2}$는 x와 4의 등비중항이므로
$(2\sqrt{2})^2=4x$ $\therefore x=2$
4는 $2\sqrt{2}$와 y의 등비중항이므로
$4^2=2\sqrt{2}y$ $\therefore y=4\sqrt{2}$
답 $x=2,\ y=4\sqrt{2}$

기본+표준 유형 Q+Q 115쪽

01 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면
$a_3=ar^2=3$ ⋯⋯ ㉠
$a_6=ar^5=24$ ⋯⋯ ㉡
㉡÷㉠을 하면 $r^3=8$ $\therefore r=2$
$r=2$를 ㉠에 대입하면
$4a=3$ $\therefore a=\frac{3}{4}$
따라서 $a_n=\frac{3}{4}\cdot2^{n-1}$이므로
$a_8=\frac{3}{4}\cdot2^7=96$ 답 ④

02 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면
$a_2=ar=54$ ⋯⋯ ㉠
$a_4=ar^3=6$ ⋯⋯ ㉡
㉡÷㉠을 하면 $r^2=\frac{1}{9}$ $\therefore r=\frac{1}{3}\ (\because r>0)$
$r=\frac{1}{3}$을 ㉠에 대입하면
$\frac{1}{3}a=54$ $\therefore a=162$
$\therefore a_n=162\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$
$\frac{2}{27}$를 제k항이라 하면 $162\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}=\frac{2}{27}$
$\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}=\left(\frac{1}{3}\right)^7$, $k-1=7$
$\therefore k=8$
따라서 $\frac{2}{27}$는 제8항이다. 답 제8항

03 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면
$\frac{a_2+a_3+a_4}{a_5+a_6+a_7}=\frac{1}{2}$에서
$\frac{a_1r+a_1r^2+a_1r^3}{a_1r^4+a_1r^5+a_1r^6}=\frac{1}{2}$
$\frac{a_1r(1+r+r^2)}{a_1r^4(1+r+r^2)}=\frac{1}{2}$

Q BOX

$\frac{-2}{4}=\frac{1}{-2}$
$=-\frac{1}{2}\div1$
$=\cdots=-\frac{1}{2}$

$81\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}=\frac{1}{27}$이므로
$3^4\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}=\left(\frac{1}{3}\right)^3$
$\therefore \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}=\left(\frac{1}{3}\right)^7$

08 등차수열과 등비수열

$\frac{1}{r^3}=\frac{1}{2}$ $\quad\therefore r^3=2$

$\therefore \frac{a_{10}}{a_1}=\frac{a_1r^9}{a_1}=r^9=(r^3)^3=2^3=8$

답 8

04 주어진 등비수열의 공비를 r, 일반항을 a_n이라 하면 $a_4=4$에서

$32\cdot r^3=4,\quad r^3=\frac{1}{8}\quad\therefore r=\frac{1}{2}$

따라서 $a_n=32\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$이므로 $32\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}<\frac{1}{3}$에서

$\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}<\frac{1}{96},\quad 2^{n-1}>96$

이때 $2^6=64$, $2^7=128$이므로

$n-1\geq 7\quad\therefore n\geq 8$

따라서 처음으로 $\frac{1}{3}$보다 작아지는 항은 제8항이다.

답 제8항

05 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_3=ar^2=6$ …… ㉠

$a_5=ar^4=18$ …… ㉡

㉡÷㉠을 하면 $r^2=3$

$\therefore r=\sqrt{3}\ (\because r>0)$

$r=\sqrt{3}$을 ㉠에 대입하면

$3a=6\quad\therefore a=2$

따라서 $a_n=2\cdot(\sqrt{3})^{n-1}$이므로 $a_n{}^2>800$에서

$4\cdot 3^{n-1}>800,\quad 3^{n-1}>200$

이때 $3^4=81$, $3^5=243$이므로

$n-1\geq 5\quad\therefore n\geq 6$

따라서 자연수 n의 최솟값은 6이다.

답 ①

06 공비를 r라 하면 첫째항이 3, 제5항이 768이므로

$3r^4=768,\quad r^4=256$

$\therefore r=4\ (\because r>0)$

이때 a_3은 주어진 수열의 제4항이므로

$a_3=3\cdot 4^3=192$

답 192

07 첫째항이 243, 공비가 $\frac{2}{3}$인 등비수열의 제$(n+2)$항이 $\frac{128}{9}$이므로

$243\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}=\frac{128}{9},\quad \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}=\left(\frac{2}{3}\right)^7$

$n+1=7\quad\therefore n=6$

답 6

08 세 양수 x, $x+4$, $9x$가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$(x+4)^2=x\cdot 9x,\quad x^2+8x+16=9x^2$

$8x^2-8x-16=0,\quad x^2-x-2=0$

$(x+1)(x-2)=0\quad\therefore x=2\ (\because x>0)$

답 2

Q BOX

첫째항이 a, 공비가 r인 등비수열 $\{a_n\}$에서 처음으로
① k보다 커지는 항
➡ $ar^{n-1}>k$를 만족시키는 자연수 n의 최솟값을 구한다.
② k보다 작아지는 항
➡ $ar^{n-1}<k$를 만족시키는 자연수 n의 최솟값을 구한다.

수열의 모든 항이 양수이므로 공비는 양수이다.

두 수 a, b 사이에 n개의 수를 넣어서 만든 등비수열
➡ 첫째항: a, 제$(n+2)$항: b
➡ $b=ar^{n+1}$ (단, r는 공비)

처음 몇 개의 항을 나열하여 규칙성을 파악한다.

09 주어진 등비수열의 공비가 1보다 크므로

$1<a<b<c$

세 수 a, b, c가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$b^2=ac$

$b^3=6ac$에서 $\quad b^3=6b^2$

$b^2(b-6)=0\quad\therefore b=6\ (\because b>1)$

따라서 세 수 1, a, 6이 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$a^2=6\quad\therefore a=\sqrt{6}\ (\because a>1)$

답 ②

10 세 실수를 a, ar, ar^2으로 놓으면

$a+ar+ar^2=7$에서

$a(1+r+r^2)=7$ …… ㉠

$a\cdot ar\cdot ar^2=-27$에서

$(ar)^3=-27$ …… ㉡

㉡에서 $\quad ar=-3\quad\therefore a=-\frac{3}{r}$

$a=-\frac{3}{r}$을 ㉠에 대입하면

$-\frac{3}{r}(1+r+r^2)=7$

$3r^2+10r+3=0,\quad (r+3)(3r+1)=0$

$\therefore r=-3$ 또는 $r=-\frac{1}{3}$

$r=-3$일 때 $a=1$, $r=-\frac{1}{3}$일 때 $a=9$이므로 세 실수는 1, -3, 9이다.

따라서 가장 큰 수는 9이다.

답 ⑤

11 삼차방정식의 세 실근을 a, ar, ar^2으로 놓으면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$a+ar+ar^2=p$ …… ㉠

$a\cdot ar+ar\cdot ar^2+ar^2\cdot a=14$에서

$ar(a+ar+ar^2)=14$

$\therefore arp=14\ (\because$ ㉠$)$ …… ㉡

$a\cdot ar\cdot ar^2=8$에서

$(ar)^3=8\quad\therefore ar=2$

$ar=2$를 ㉡에 대입하면

$2p=14\quad\therefore p=7$

답 7

12 1회 시행 후 남아 있는 종이의 넓이는

$1024\cdot\frac{3}{4}$

2회 시행 후 남아 있는 종이의 넓이는

$1024\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}=1024\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2$

3회 시행 후 남아 있는 종이의 넓이는

$1024\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}=1024\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^3$

⋮

n회 시행 후 남아 있는 종이의 넓이는

$1024\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^n$

따라서 6회 시행 후 남아 있는 종이의 넓이는

$$1024\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^6=\frac{729}{4}$$ 답 $\frac{729}{4}$

13 1 번째 튀어 오른 공의 높이는

$2\cdot\frac{4}{5}$ (m)

2 번째 튀어 오른 공의 높이는

$2\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{4}{5}=2\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^2$ (m)

3 번째 튀어 오른 공의 높이는

$2\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{4}{5}=2\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^3$ (m)

⋮

n 번째 튀어 오른 공의 높이는

$2\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^n$ (m)

따라서 9 번째 튀어 오른 공의 높이는

$2\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^9=\frac{2^{19}}{5^9}$ (m) 답 ④

18 등비수열의 합

Lecture 36 등비수열의 합 117쪽

1-1 (1) $\frac{2(4^5-1)}{4-1}=682$

(2) $\frac{1\cdot\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^5\right\}}{1-\frac{1}{2}}=2\cdot\left(1-\frac{1}{32}\right)=\frac{31}{16}$

답 (1) 682 (2) $\frac{31}{16}$

1-2 (1) 3, 6, 12, ⋯, 768은 첫째항이 3, 공비가 $\frac{6}{3}=2$인 등비수열이므로 일반항 a_n은

$a_n=3\cdot2^{n-1}$

768을 제k항이라 하면

$3\cdot2^{k-1}=768,\quad 2^{k-1}=2^8$

$k-1=8\quad\therefore k=9$

따라서 구하는 합은 첫째항이 3, 공비가 2인 등비수열의 첫째항부터 제9항까지의 합이므로

$\frac{3(2^9-1)}{2-1}=1533$

(2) 48, −24, 12, ⋯, $\frac{3}{4}$은 첫째항이 48, 공비가 $\frac{-24}{48}=-\frac{1}{2}$인 등비수열이므로 일반항 a_n은

$a_n=48\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$\frac{3}{4}$을 제k항이라 하면

$48\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1}=\frac{3}{4},\quad \left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1}=\left(-\frac{1}{2}\right)^6$

$k-1=6\quad\therefore k=7$

따라서 구하는 합은 첫째항이 48, 공비가 $-\frac{1}{2}$인 등비수열의 첫째항부터 제7항까지의 합이므로

$$\frac{48\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^7\right\}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=32\left(1+\frac{1}{128}\right)=\frac{129}{4}$$

답 (1) 1533 (2) $\frac{129}{4}$

2-1 (1) $a_3=S_3-S_2=3^3-1-(3^2-1)=18$

(2) (i) $n=1$일 때,

$a_1=S_1=3-1=2$

(ii) $n\ge2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}=3^n-1-(3^{n-1}-1)$

$=2\cdot3^{n-1}$ ⋯⋯ ㉠

이때 $a_1=2$는 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$a_n=2\cdot3^{n-1}$

답 (1) 18 (2) $a_n=2\cdot3^{n-1}$

2-2 (i) $n=1$일 때,

$a_1=S_1=4^2+1=17$

(ii) $n\ge2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}=4^{n+1}+1-(4^n+1)$

$=3\cdot4^n$ ⋯⋯ ㉠

㉠에 $n=1$을 대입하면

$a_1=3\cdot4=12$

(i), (ii)에서 $a_1=17,\ a_n=3\cdot4^n\ (n\ge2)$

답 $a_1=17,\ a_n=3\cdot4^n\ (n\ge2)$

쌤 한마디

$S_n=Ar^n+B$ ($r\ne0,\ r\ne1,\ A,\ B$는 상수)일 때

① $A+B=0$이면 수열 $\{a_n\}$은 첫째항부터 등비수열을 이룬다.

② $A+B\ne0$이면 수열 $\{a_n\}$은 둘째항부터 등비수열을 이룬다.

Lecture 37 원리합계 118쪽

1-1 (2) $a\times1.02+a\times1.02^2+\cdots+a\times1.02^5$

$=\frac{a\times1.02\times(1.02^5-1)}{1.02-1}=\frac{a\times1.02\times(1.1-1)}{0.02}$

$=5.1a$ (원)

답 (1) (가) $a\times1.02^4$ (나) $a\times1.02$ (2) $5.1a$원

1-2 a원을 연이율 3 %의 복리로 n년 동안 예금하면 n년 후의 원리합계는

$a\times(1+0.03)^n=a\times1.03^n$ (원)

Q BOX

$48\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1}=\frac{3}{4}$에서

$\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1}=\frac{1}{64}$

$=\left(-\frac{1}{2}\right)^6$

$1024\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^6$

$=2^{10}\cdot\frac{3^6}{(2^2)^6}$

$=\frac{3^6}{2^2}=\frac{729}{4}$

$2\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^9=2\cdot\frac{(2^2)^9}{5^9}$

$=2\cdot\frac{2^{18}}{5^9}$

$=\frac{2^{19}}{5^9}$

$a_1=S_1$을 이용하여 얻은 값과 다르므로 수열 $\{a_n\}$은 둘째항부터 등비수열을 이룬다.

첫째항이 $a\times1.02$, 공비가 1.02인 등비수열의 첫째항부터 제5항까지의 합

따라서 구하는 적립금의 원리합계는

$a\times1.03+a\times1.03^2+\cdots+a\times1.03^5$

$=\dfrac{a\times1.03\times(1.03^5-1)}{1.03-1}=\dfrac{a\times1.03\times(1.2-1)}{0.03}$

$=\dfrac{103}{15}a$ (원) 답 $\dfrac{103}{15}a$원

2-1 (2) $a+a\times1.02+\cdots+a\times1.02^4=\dfrac{a(1.02^5-1)}{1.02-1}$

$=\dfrac{a(1.1-1)}{0.02}$

$=5a$ (원)

답 (1) (가) $a\times1.02^3$ (나) a (2) $5a$원

첫째항이 a, 공비가 1.02인 등비수열의 첫째항부터 제5항까지의 합

2-2 a원을 연이율 3 %의 복리로 n년 동안 예금하면 n년 후의 원리합계는

$a\times(1+0.03)^n=a\times1.03^n$ (원)

따라서 구하는 적립금의 원리합계는

$a+a\times1.03+\cdots+a\times1.03^4=\dfrac{a(1.03^5-1)}{1.03-1}$

$=\dfrac{a(1.2-1)}{0.03}$

$=\dfrac{20}{3}a$ (원)

답 $\dfrac{20}{3}a$원

기본+표준 유형 Q+Q

119쪽

01 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_3=ar^2=12$ ······ ㉠

$a_5=ar^4=48$ ······ ㉡

㉡÷㉠을 하면 $r^2=4$

$\therefore r=-2$ ($\because r<0$)

$r=-2$를 ㉠에 대입하면

$4a=12$ $\therefore a=3$

따라서 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 10항까지의 합은

$\dfrac{3\{1-(-2)^{10}\}}{1-(-2)}=-1023$ 답 -1023

02 주어진 등비수열의 첫째항이 5, 공비가 $\dfrac{15}{5}=3$이므로

$S_n=\dfrac{5(3^n-1)}{3-1}=\dfrac{5}{2}(3^n-1)$

$S_k=1820$에서 $\dfrac{5}{2}(3^k-1)=1820$

$3^k-1=728,$ $3^k=729=3^6$

$\therefore k=6$ 답 ①

03 주어진 등비수열의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$\dfrac{a(r^3-1)}{r-1}=28$ ······ ㉠

$\dfrac{a(r^6-1)}{r-1}=\dfrac{a(r^3+1)(r^3-1)}{r-1}$

$=252$ ······ ㉡

㉡÷㉠을 하면 $r^3+1=9,$ $r^3=8$

$\therefore r=2$

$r=2$를 ㉠에 대입하여 정리하면

$7a=28$ $\therefore a=4$

따라서 주어진 등비수열의 일반항을 a_n이라 하면

$a_n=4\cdot2^{n-1}=2^{n+1}$이므로

$a_7=2^8=256$ 답 256

04 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$S_n=\dfrac{a(r^n-1)}{r-1}=45$ ······ ㉠

$S_{2n}=\dfrac{a(r^{2n}-1)}{r-1}=\dfrac{a(r^n+1)(r^n-1)}{r-1}$

$=60$ ······ ㉡

㉡÷㉠을 하면 $r^n+1=\dfrac{4}{3}$ $\therefore r^n=\dfrac{1}{3}$

$\therefore S_{3n}=\dfrac{a(r^{3n}-1)}{r-1}=\dfrac{a(r^n-1)(r^{2n}+r^n+1)}{r-1}$

$=45\left\{\left(\dfrac{1}{3}\right)^2+\dfrac{1}{3}+1\right\}=65$ 답 ②

05 2022년의 전기차 생산량을 a대라 하고, 매년 전기차 생산량이 전년도 생산량의 r배라 하면 2022년부터 2025년까지의 전기차 생산량이 5000대이므로

2022년: a대
2023년: ar대
2024년: ar^2대
⋮
2030년: ar^8대

$\dfrac{a(r^4-1)}{r-1}=5000$ ······ ㉠

2026년부터 2029년까지의 전기차 생산량이 7500대이므로

$\dfrac{ar^4(r^4-1)}{r-1}=7500$ ······ ㉡

㉡÷㉠을 하면 $r^4=\dfrac{3}{2}$

따라서 2030년의 전기차 생산량은

$ar^8=a(r^4)^2=\dfrac{9}{4}a$

이므로 2022년의 전기차 생산량의 $\dfrac{9}{4}$배이다.

답 $\dfrac{9}{4}$배

06 한 변의 길이가 1인 정사각형의 넓이는 1이므로

1회 시행에서 색칠한 부분의 넓이는

$1\cdot\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{4}$

2회 시행에서 색칠한 부분의 넓이는

$1\cdot\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{4}=\left(\dfrac{1}{4}\right)^2$

3회 시행에서 색칠한 부분의 넓이는

$1\cdot\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{4}=\left(\dfrac{1}{4}\right)^3$

⋮

따라서 시행을 10회 반복했을 때, 색칠한 부분의 넓이의 합은

$$\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^3+\cdots+\left(\frac{1}{4}\right)^{10}$$
$$=\frac{\frac{1}{4}\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{10}\right\}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{3}\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{10}\right\}$$

답 $\frac{1}{3}\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{10}\right\}$

첫째항과 공비가 모두 $\frac{1}{4}$인 등비수열의 첫째항부터 제10항까지의 합

07 $a_1=S_1=6^2-6=30$

$a_3=S_3-S_2=6^4-6-(6^3-6)=1080$

$\therefore a_1+a_3=1110$ 답 ③

08 (i) $n=1$일 때,

$a_1=S_1=5-1=4$

(ii) $n\geq 2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}=5^n-1-(5^{n-1}-1)$
$=4\cdot 5^{n-1}$ …… ㉠

이때 $a_1=4$는 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$a_n=4\cdot 5^{n-1}$

$4\cdot 5^{n-1}>1000$에서 $5^{n-1}>250$

이때 $5^3=125$, $5^4=625$이므로

$n-1\geq 4$ $\therefore n\geq 5$

따라서 자연수 n의 최솟값은 5이다. 답 ②

09 (i) $n=1$일 때,

$a_1=S_1=3\cdot 2^2+k=k+12$

(ii) $n\geq 2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}$
$=3\cdot 2^{n+1}+k-(3\cdot 2^n+k)$
$=3\cdot 2^n$ …… ㉠

이때 수열 $\{a_n\}$이 첫째항부터 등비수열을 이루려면 $a_1=k+12$는 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같아야 하므로

$k+12=6$ $\therefore k=-6$ 답 -6

10 매년 말에 500만 원씩 적립하면 10년째 말의 적립금의 원리합계는

$$500+500(1+0.05)+500(1+0.05)^2+\cdots+500(1+0.05)^9$$
$$=\frac{500(1.05^{10}-1)}{1.05-1}=\frac{500\times 0.6}{0.05}$$
$=6000$ (만 원) 답 6000만 원

11 매월 초에 10만 원씩 적립하면 1년째, 즉 12개월째 말의 적립금의 원리합계는

$$10(1+0.01)+10(1+0.01)^2+\cdots+10(1+0.01)^{12}$$
$$=\frac{10\times 1.01\times(1.01^{12}-1)}{1.01-1}=\frac{10\times 1.01\times 0.13}{0.01}$$
$=131.3$ (만 원)

즉 131만 3천 원이다. 답 ①

중단원 마무리

121쪽

01 전략 주어진 수열의 규칙을 찾아 일반항 a_n을 구한다.

풀이 $a_1=1=\frac{1}{2\cdot1-1}$, $a_2=\frac{1}{3}=\frac{1}{2\cdot2-1}$,

$a_3=\frac{1}{5}=\frac{1}{2\cdot3-1}$, $a_4=\frac{1}{7}=\frac{1}{2\cdot4-1}$, …이므로

$a_n=\frac{1}{2n-1}$

즉 $\frac{1}{2n-1}=\frac{1}{105}$에서 $2n-1=105$

$\therefore n=53$ 답 ④

02 전략 첫째항을 a, 공차를 d라 하면 $a_n=a+(n-1)d$임을 이용한다.

풀이 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_8-a_4=28$에서 $(a+7d)-(a+3d)=28$

$4d=28$ $\therefore d=7$

따라서 수열 $\{a_n\}$의 공차는 7이다. 답 7

쌤 한마디

공차가 d인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 제$(n+k)$항은 제n항에 공차 d를 k번 더한 것과 같음을 이용하여 등차수열의 두 항의 차를 다음과 같이 식으로 나타낼 수도 있다.

$a_{n+k}=a_n+kd \Longleftrightarrow a_{n+k}-a_n=kd$

즉 **02**번에서 $a_8-a_4=4d$임을 바로 생각할 수 있다.

03 전략 두 수 a, b가 절댓값이 같고 부호가 반대이면 $a=-b$, 즉 $a+b=0$임을 이용한다.

① $|A|=\begin{cases} A\ (A\geq 0) \\ -A\ (A<0)\end{cases}$
② $|A|=|B|$
➡ $A=B$ 또는 $A=-B$

풀이 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_3+a_6=0$이므로

$(a+2d)+(a+5d)=0$

$\therefore 2a+7d=0$ …… ㉠

또 $a_8=21$이므로 $a+7d=21$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-21$, $d=6$

$\therefore a_n=-21+(n-1)\cdot 6=6n-27$

75를 제k항이라 하면

$6k-27=75$ $\therefore k=17$

따라서 75는 제17항이다. 답 제17항

04 전략 주어진 조건을 이용하여 먼저 첫째항과 공차를 구한 후 일반항 a_n을 구한다.

풀이 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_1=a_3+8$에서 $a_1=(a_1+2d)+8$

$2d=-8$ $\therefore d=-4$

$2a_4-3a_6=3$에서

$2\{a_1+3\cdot(-4)\}-3\{a_1+5\cdot(-4)\}=3$

$-a_1+36=3$ $\therefore a_1=33$

따라서 수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 33, 공차가 -4이므로

$a_n=33+(n-1)\cdot(-4)=-4n+37$

$a_k<0$에서 $\quad -4k+37<0$

$\therefore k>\frac{37}{4}=9.25$

따라서 자연수 k의 최솟값은 10이다. 답 ②

05 전략 두 수 a, b 사이에 n개의 수를 넣어서 등차수열을 만들면 a는 첫째항이고, b는 제$(n+2)$항임을 이용한다.

풀이 공차를 d라 하면 첫째항이 36, 제$(n+2)$항이 -4이므로

$36+(n+1)d=-4$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

이때 a_9는 주어진 수열의 제10항이므로

$36+9d=18 \quad \therefore d=-2$

$d=-2$를 ㉠에 대입하면

$36-2(n+1)=-4, \quad n+1=20$

$\therefore n=19$ 답 ③

06 전략 세 수 a, b, c가 이 순서대로 등차수열을 이루면 $b=\frac{a+c}{2}$, 즉 $2b=a+c$임을 이용한다.

풀이 세 수 α, k, β가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2k=\alpha+\beta$

이때 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=24$이므로

$2k=24 \quad \therefore k=12$ 답 12

07 전략 등차수열을 이루는 세 수는 $a-d$, a, $a+d$로 놓는다.

풀이 밑면의 가로의 길이, 세로의 길이, 높이를 각각 $a-d$, a, $a+d$로 놓으면

모든 모서리의 길이의 합이 96이므로

$4\{(a-d)+a+(a+d)\}=96$

$3a=24 \quad \therefore a=8$

겉넓이가 376이므로

$2\{8(8-d)+(8+d)(8-d)+8(8+d)\}=376$

$192-d^2=188, \quad d^2=4 \quad \therefore d=\pm 2$

따라서 밑면의 가로의 길이, 세로의 길이, 높이는 각각 6, 8, 10 또는 10, 8, 6이므로 직육면체의 부피는

$6\cdot 8\cdot 10=480$ 답 480

08 전략 첫째항이 a, 공차가 d인 등차수열의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n은 $S_n=\frac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}$임을 이용한다.

풀이 첫째항이 -6, 공차가 2인 등차수열의 첫째항부터 제n항까지의 합이 30이므로

$\frac{n\{2\cdot(-6)+(n-1)\cdot 2\}}{2}=30$

$n(n-7)=30, \quad n^2-7n-30=0$

$(n+3)(n-10)=0$

$\therefore n=10$ ($\because$ n은 자연수) 답 10

QBOX

첫째항이 a_{20}, 끝항이 a_{30}이고 항수가 11인 등차수열의 합

밑면의 가로의 길이, 세로의 길이, 높이가 각각 a, b, c인 직육면체에서
① (모든 모서리의 길이의 합) $=4(a+b+c)$
② (겉넓이) $=2(ab+bc+ca)$
③ (부피) $=abc$

09 전략 등차수열 $\{a_n\}$의 일반항을 구한 후 처음으로 음수가 되는 항을 구한다.

풀이 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_{10}=55+9d=28 \quad \therefore d=-3$

$\therefore a_n=55+(n-1)\cdot(-3)=-3n+58$

$-3n+58<0$에서 $\quad n>\frac{58}{3}=19.3\cdots$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항부터 제19항까지 양수이고, 제20항부터 음수이다.

이때 $a_{19}=-3\cdot 19+58=1$, $a_{20}=-3\cdot 20+58=-2$, $a_{30}=-3\cdot 30+58=-32$이므로

$|a_1|+|a_2|+|a_3|+\cdots+|a_{30}|$
$=(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{19})$
$\quad -(a_{20}+a_{21}+a_{22}+\cdots+a_{30})$
$=\frac{19(55+1)}{2}-\frac{11\{-2+(-32)\}}{2}$
$=532+187=719$ 답 ④

다른 풀이 $|a_1|+|a_2|+|a_3|+\cdots+|a_{30}|$
$=(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{19})$
$\quad -(a_{20}+a_{21}+a_{22}+\cdots+a_{30})$
$=2(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{19})$
$\quad -(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{30})$
$=2\cdot\frac{19(55+1)}{2}-\frac{30\{55+(-32)\}}{2}$
$=1064-345=719$

10 전략 두 수 사이에 n개의 수를 넣어서 만든 수열의 항수는 $n+2$임을 이용한다.

풀이 첫째항이 1, 끝항이 37, 항수가 $n+2$인 등차수열의 합이 190이므로

$\frac{(n+2)(1+37)}{2}=190, \quad n+2=10$

$\therefore n=8$ ··· ❶

따라서 이 수열의 제10항이 37이므로

$1+9d=37 \quad \therefore d=4$ ··· ❷

$\therefore n+d=12$ ··· ❸

답 12

단계	채점 기준	비율
❶	n의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷	d의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸	$n+d$의 값을 구할 수 있다.	20 %

11 전략 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때, $a_k<0$, $a_{k+1}>0$이면 S_n의 최솟값은 S_k임을 이용한다.

풀이 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 음수이고 S_n이 $n=12$에서만 최솟값을 가지므로

$a_{12}<0, \ a_{13}>0$

공차를 d라 하면 $a_{12}<0$에서

$-100+11d<0$

$\therefore d<\frac{100}{11}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$a_{13}>0$에서 $\quad -100+12d>0$

$\therefore d>\frac{25}{3}$ ...... ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$\frac{25}{3}<d<\frac{100}{11}$

이때 d는 정수이므로 $\quad d=9$ 답 ④

$\frac{25}{3}=8.3\cdots$,

$\frac{100}{11}=9.09\cdots$

12 **전략** 60 이하의 자연수 중 5의 배수를 작은 것부터 차례대로 나열한 수열의 항수를 구한다.

풀이 60 이하의 자연수 중에서 5의 배수는

5, 10, 15, $\cdots$, 60

이때 $60=5+5\cdot 11$에서 구하는 값은 첫째항이 5, 끝항이 60, 항수가 12인 등차수열의 합이므로

첫째항이 5, 공차가 5인 등차수열의 제12항

$\frac{12(5+60)}{2}=390$ 답 390

13 **전략** 20개의 자연수 중 가장 큰 수를 첫째항으로 하면 20개의 자연수는 공차가 -1인 등차수열을 이룬다.

풀이 연속하는 20개의 자연수 중에서 가장 큰 수를 a라 하면 20개의 자연수는 첫째항이 a, 공차가 -1인 등차수열을 이루므로

$\frac{20\{2a+(20-1)\cdot(-1)\}}{2}=570$

$2a-19=57 \quad \therefore a=38$

따라서 가장 큰 수는 38이다. 답 ④

14 **전략** 먼저 수열의 합과 일반항 사이의 관계를 이용하여 일반항 a_n을 구한다.

풀이 (i) $n=1$일 때,

$a_1=S_1=1^2-7\cdot 1=-6$

(ii) $n\geq 2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=n^2-7n-\{(n-1)^2-7(n-1)\}$

$=2n-8$ ...... ㉠

이때 $a_1=-6$은 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$a_n=2n-8$ ··· ❶

따라서 $a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{2k}$는 첫째항이 -4, 끝항이 $4k-8$, 항수가 k인 등차수열의 합이므로

$a_2=2\cdot 2-8=-4$

$a_{2k}=2\cdot 2k-8$
$=4k-8$

$\frac{k\{-4+(4k-8)\}}{2}=80, \quad 2k^2-6k=80$

$k^2-3k-40=0, \quad (k+5)(k-8)=0$

$\therefore k=8$ ($\because k$는 자연수) ··· ❷

답 8

단계	채점 기준	비율
❶	a_n을 구할 수 있다.	50 %
❷	k의 값을 구할 수 있다.	50 %

15 **전략** 첫째항이 a, 공비가 r인 등비수열 $\{a_n\}$의 일반항은 $a_n=ar^{n-1}$임을 이용한다.

풀이 $a_n=48\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$이므로 $a_k=\frac{3}{8}$에서

$48\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}=\frac{3}{8}, \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}=\frac{1}{128}=\left(\frac{1}{2}\right)^7$

$k-1=7 \quad \therefore k=8$ 답 ③

16 **전략** 공비를 r라 하면 $a_n=a_1r^{n-1}$임을 이용한다.

풀이 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면

$\frac{a_{16}}{a_{14}}+\frac{a_8}{a_7}=12$에서 $\quad \frac{a_1r^{15}}{a_1r^{13}}+\frac{a_1r^7}{a_1r^6}=12$

$r^2+r=12, \quad r^2+r-12=0$

$(r+4)(r-3)=0 \quad \therefore r=3$ ($\because r>0$)

수열의 모든 항이 양수이므로 공비는 양수이다.

$\therefore \frac{a_3}{a_1}+\frac{a_6}{a_3}=\frac{a_1r^2}{a_1}+\frac{a_1r^5}{a_1r^2}=r^2+r^3$

$=3^2+3^3=36$ 답 36

쌤 한마디

공비가 r인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 제$(n+k)$항은 제n항에 공비 r를 k번 곱한 것과 같음을 이용하여 등비수열의 두 항의 비를 다음과 같이 식으로 나타낼 수도 있다.

$a_{n+k}=a_n\cdot r^k \Longleftrightarrow \frac{a_{n+k}}{a_n}=r^k$

즉 **16**번에서 $\frac{a_{16}}{a_{14}}+\frac{a_8}{a_7}=r^2+r$임을 바로 생각할 수 있다.

17 **전략** 첫째항이 a, 공비가 r인 등비수열 $\{a_n\}$의 일반항은 $a_n=ar^{n-1}$임을 이용하여 a, r의 값을 구한다.

풀이 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$\log_2 a_3=\frac{1}{4}$에서 $\quad a_3=ar^2=2^{\frac{1}{4}}$ ...... ㉠

$\log_2 a_6=1$에서 $\quad a_6=ar^5=2$ ...... ㉡

㉡÷㉠을 하면 $\quad r^3=2^{\frac{3}{4}} \quad \therefore r=2^{\frac{1}{4}}$

$r=2^{\frac{1}{4}}$을 ㉠에 대입하여 정리하면 $\quad a=2^{-\frac{1}{4}}$

따라서 $a_n=2^{-\frac{1}{4}}\cdot(2^{\frac{1}{4}})^{n-1}=2^{\frac{n-2}{4}}$이므로 $4<a_n<64$에서

$2^2<2^{\frac{n-2}{4}}<2^6, \quad 2<\frac{n-2}{4}<6$

$8<n-2<24 \quad \therefore 10<n<26$

즉 자연수 n은 11, 12, 13, $\cdots$, 25의 15개이다.

$25-11+1=15$(개)

답 15

18 **전략** 두 수 a, b 사이에 n개의 수를 넣어서 등비수열을 만들면 a는 첫째항이고, b는 제$(n+2)$항임을 이용한다.

풀이 공비를 r라 하면 첫째항이 2, 제13항이 162이므로

$2r^{12}=162, \quad r^{12}=81$

$\therefore r^3=3$ ($\because r>0$)

$r^{12}=81$에서
$(r^3)^4=3^4$
이때 $r>0$에서 $r^3>0$이므로
$r^3=3$

이때 x_1, x_4, x_{10}은 각각 주어진 수열의 제2항, 제5항, 제11항이므로

$x_1=2r,\ x_4=2r^4,\ x_{10}=2r^{10}$

$\therefore x_1 : x_4 : x_{10}=2r : 2r^4 : 2r^{10}$

$=1 : r^3 : r^9$

$r^9=(r^3)^3=3^3=27$

$=1 : 3 : 27$ 답 ④

08 등차수열과 등비수열

19 전략 세 수 a, b, c가 이 순서대로 등차수열을 이루면 $2b=a+c$, 등비수열을 이루면 $b^2=ac$임을 이용한다.

풀이 세 수 a, $a+b$, $2a-b$는 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2(a+b)=a+(2a-b)$

$\therefore a=3b$ ...... ㉠

세 수 1, $a-1$, $3b+1$은 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$(a-1)^2=1\cdot(3b+1)$ ...... ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $(a-1)^2=a+1$

$a^2-3a=0$, $a(a-3)=0$

$\therefore a=0$ 또는 $a=3$

이때 세 수 1, $a-1$, $3b+1$은 이 순서대로 공비가 양수인 등비수열을 이루므로 $a-1$은 양수이어야 한다.

즉 $a-1>0$에서 $a>1$ $\therefore a=3$

$a=3$을 ㉠에 대입하면

$3=3b$ $\therefore b=1$

$\therefore a^2+b^2=3^2+1^2=10$ 답 10

20 전략 등비수열을 이루는 세 수는 a, ar, ar^2으로 놓는다.

풀이 세 짝수 a, b, c가 이 순서대로 등비수열을 이루므로 $b=ar$, $c=ar^2$ (r는 $r\ge2$인 자연수)으로 놓으면 $a+b+c=42$에서

$a+ar+ar^2=42$

$\therefore a(1+r+r^2)=42$ ...... ㉠

(i) $r=2$일 때,

㉠에서 $7a=42$ $\therefore a=6$

$a=6$, $r=2$일 때, 세 짝수는 6, 12, 24이므로 $6+12+24=42$

(ii) $r=3$일 때,

㉠에서 $13a=42$ $\therefore a=\frac{42}{13}$

그런데 a는 짝수이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(iii) $r=4$일 때,

㉠에서 $21a=42$ $\therefore a=2$

$a=2$, $r=4$일 때, 세 짝수는 2, 8, 32이므로 $2+8+32=42$

(iv) $r=5$일 때,

㉠에서 $31a=42$ $\therefore a=\frac{42}{31}$

그런데 a는 짝수이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(v) $r\ge6$일 때,

$1+r+r^2\ge43$이므로 ㉠을 만족시키는 짝수 a는 존재하지 않는다.

이상에서 모든 a의 값의 합은

$6+2=8$ 답 ②

21 전략 정사각형 T_1, T_2, T_3, $\cdots$의 한 변의 길이를 구하여 규칙을 찾는다.

풀이 주어진 정사각형의 넓이가 4이므로 한 변의 길이는 $\sqrt{4}=2$

정사각형 T_1의 한 변의 길이는

$\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$

정사각형 T_2의 한 변의 길이는

$$\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=1$$

정사각형 T_3의 한 변의 길이는

$$\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

⋮

정사각형 T_n의 한 변의 길이는

$$\sqrt{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}=2^{\frac{2-n}{2}}$$ ··· ❶

$\sqrt{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}$
$=2^{\frac{1}{2}}\cdot2^{\frac{1-n}{2}}$
$=2^{\frac{2-n}{2}}$

따라서 $f(n)=\frac{2-n}{2}$이므로

$f(102)=-50$ ··· ❷

답 -50

단계	채점 기준	비율
❶	정사각형 T_n의 한 변의 길이를 구할 수 있다.	70 %
❷	$f(102)$의 값을 구할 수 있다.	30 %

22 전략 첫째항이 a, 공비가 r인 등비수열 $\{a_n\}$의 일반항은 $a_n=ar^{n-1}$임을 이용하여 r의 값을 구한다.

풀이 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면 $a_9=5a_7$에서

$4r^8=5\cdot4r^6$, $r^2=5$

$\therefore r=\sqrt{5}$ ($\because r>0$)

따라서 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제6항까지의 합은

$$\frac{4\{(\sqrt{5})^6-1\}}{\sqrt{5}-1}=\frac{4(125-1)(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)}$$

$$=124(\sqrt{5}+1)$$ 답 ⑤

23 전략 먼저 공비가 1이 아님을 확인한 후 등비수열의 합의 공식을 이용한다.

풀이 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하자.

이때 $r=1$이면 $S_4=4a$, $S_2=2a$이므로

$\frac{S_4}{S_2}=2\ne9$ $\therefore r\ne1$

$$\frac{S_4}{S_2}=\frac{\frac{a(r^4-1)}{r-1}}{\frac{a(r^2-1)}{r-1}}=\frac{r^4-1}{r^2-1}=\frac{(r^2+1)(r^2-1)}{r^2-1}$$

$=r^2+1$

이므로 $r^2+1=9$ $\therefore r^2=8$

$\therefore \frac{a_4}{a_2}=\frac{ar^3}{ar}=r^2=8$ 답 ④

24 전략 파이프의 길이가 일정한 비율로 감소하므로 파이프의 길이가 등비수열을 이룸을 이용한다.

풀이 첫 번째 파이프의 길이를 a m, 다음 파이프의 길이가 이전 파이프의 길이의 r배라 하면 첫 번째 파이프부터 6 번째 파이프까지의 길이의 합이 2 m이므로

$\frac{a(1-r^6)}{1-r}=2$ ...... ㉠

또 첫 번째 파이프부터 12 번째 파이프까지의 길이의 합이 $2+\frac{2}{3}=\frac{8}{3}$ (m)이므로

(첫 번째 파이프부터 6 번째 파이프까지의 길이의 합)+(7 번째 파이프부터 12 번째 파이프까지의 길이의 합)

$$\frac{a(1-r^{12})}{1-r}=\frac{a(1+r^6)(1-r^6)}{1-r}=\frac{8}{3} \quad \cdots ㉡$$

㉡÷㉠을 하면 $\quad 1+r^6=\frac{4}{3} \qquad \therefore r^6=\frac{1}{3}$

따라서 첫 번째 파이프부터 18 번째 파이프까지의 길이의 합은

$$\frac{a(1-r^{18})}{1-r}=\frac{a(1-r^6)(1+r^6+r^{12})}{1-r}$$
$$=2\left\{1+\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^2\right\}=\frac{26}{9}\,(\mathrm{m})$$

따라서 파이프의 총길이는 $\frac{26}{9}$ m이다. 답 $\frac{26}{9}$ m

25 전략 첫째항이 a, 공비가 r인 등비수열 $\{a_n\}$의 일반항은 $a_n=ar^{n-1}$임을 이용하여 a, r의 값을 구한다.

풀이 $S_{n+3}-S_n=13\cdot 3^{n-1}$에서

$a_{n+1}+a_{n+2}+a_{n+3}=13\cdot 3^{n-1}$

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$n=1$일 때, $a_2+a_3+a_4=13$이므로

$ar+ar^2+ar^3=13$

$\therefore ar(1+r+r^2)=13 \quad \cdots\cdots ㉠$

$n=2$일 때, $a_3+a_4+a_5=39$이므로

$ar^2+ar^3+ar^4=39$

$\therefore ar^2(1+r+r^2)=39 \quad \cdots\cdots ㉡$

㉡÷㉠을 하면 $\quad r=3$

$r=3$을 ㉠에 대입하면

$3a(1+3+3^2)=13, \quad 3a=1$

$\therefore a=\frac{1}{3}$

따라서 수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 $\frac{1}{3}$, 공비가 3이므로

$a_4=\frac{1}{3}\cdot 3^3=9$ 답 9

26 전략 첫째항과 공비를 찾아 등비수열의 합을 이용하여 준수와 세진이가 받는 금액을 구한다.

풀이 준수와 세진이가 각각 24개월, 12개월째 말에 받는 금액을 A만 원, B만 원이라 하면

$$A=10(1+0.002)+10(1+0.002)^2+\cdots+10(1+0.002)^{24}$$
$$=\frac{10\times 1.002\times(1.002^{24}-1)}{1.002-1}$$
$$=5010(1.002^{24}-1)$$
$$B=20(1+0.002)+20(1+0.002)^2+\cdots+20(1+0.002)^{12}$$
$$=\frac{20\times 1.002\times(1.002^{12}-1)}{1.002-1}$$
$$=10020(1.002^{12}-1)$$
$$\therefore \frac{A}{B}=\frac{5010(1.002^{24}-1)}{10020(1.002^{12}-1)}=\frac{1.002^{12}+1}{2}$$
$$=\frac{1.02+1}{2}=1.01$$

따라서 준수가 받는 금액은 세진이가 받는 금액의 1.01배이다. 답 1.01배

Q BOX

첫째항이 $10(1+0.002)$, 공비가 $1+0.002$인 등비수열의 첫째항부터 제24항까지의 합

첫째항이 $20(1+0.002)$, 공비가 $1+0.002$인 등비수열의 첫째항부터 제12항까지의 합

$\sum_{k=2}^{15}\frac{1}{k}$과 같이 나타낼 수도 있다.

09 수열의 합

19 기호 $\sum$의 뜻과 성질

Lecture 38 기호 $\sum$의 뜻과 성질 126쪽

1-1 답 (1) $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)$ (2) $\sum_{k=1}^{n}2^k$

1-2 (1) $\sum_{k=1}^{10}k^2=1^2+2^2+3^2+\cdots+10^2$
$=1+4+9+\cdots+100$

(2) $\sum_{i=1}^{n}(-5)^i=(-5)+(-5)^2+(-5)^3+\cdots+(-5)^n$
$=-5+25-125+\cdots+(-5)^n$

답 풀이 참조

2-1 (1) $\sum_{k=1}^{10}(a_k-1)=\sum_{k=1}^{10}a_k-\sum_{k=1}^{10}1=3-1\cdot 10=-7$

(2) $\sum_{k=1}^{10}2(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{10}(2a_k+2b_k)$
$=2\sum_{k=1}^{10}a_k+2\sum_{k=1}^{10}b_k$
$=2\cdot 3+2\cdot 5=16$

답 (1) -7 (2) 16

2-2 (1) $\sum_{k=1}^{5}(3a_k-2b_k)=3\sum_{k=1}^{5}a_k-2\sum_{k=1}^{5}b_k$
$=3\cdot 4-2\cdot 8=-4$

(2) $\sum_{k=1}^{5}(-a_k+4b_k+1)=-\sum_{k=1}^{5}a_k+4\sum_{k=1}^{5}b_k+\sum_{k=1}^{5}1$
$=-4+4\cdot 8+1\cdot 5=33$

답 (1) -4 (2) 33

기본+표준 유형 Q+Q 127쪽

01 ③ $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{15}=\sum_{k=1}^{14}\frac{1}{k+1}$ 답 ③

02 $\sum_{k=2}^{100}a_k=8$에서

$a_2+a_3+a_4+\cdots+a_{100}=8 \quad \cdots\cdots ㉠$

$\sum_{k=1}^{99}a_k=5$에서

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{99}=5 \quad \cdots\cdots ㉡$

㉠−㉡을 하면 $\quad a_{100}-a_1=3$ 답 ⑤

03 $\sum_{k=1}^{10}(2a_k-1)^2=\sum_{k=1}^{10}(4a_k{}^2-4a_k+1)$
$=4\sum_{k=1}^{10}a_k{}^2-4\sum_{k=1}^{10}a_k+\sum_{k=1}^{10}1$
$=4\cdot 6-4\cdot 3+1\cdot 10$
$=22$ 답 ①

04 $\sum_{k=1}^{20} a_k=\alpha$, $\sum_{k=1}^{20} b_k=\beta$라 하자.

$\sum_{k=1}^{20}(a_k+b_k)=15$에서

$\alpha+\beta=15$ ⋯⋯ ㉠

$\sum_{k=1}^{20}(a_k-b_k)=-7$에서

$\alpha-\beta=-7$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\alpha=4$, $\beta=11$

$$\therefore \sum_{k=1}^{20}(3a_k-4b_k+2)=3\sum_{k=1}^{20}a_k-4\sum_{k=1}^{20}b_k+\sum_{k=1}^{20}2$$
$$=3\cdot4-4\cdot11+2\cdot20$$
$$=8$$

답 8

05 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$$\sum_{k=1}^{100}a_{2k}-\sum_{k=1}^{100}a_{2k-1}$$
$$=(a_2+a_4+\cdots+a_{200})-(a_1+a_3+\cdots+a_{199})$$
$$=(a_2-a_1)+(a_4-a_3)+\cdots+(a_{200}-a_{199})$$
$$=\underbrace{d+d+\cdots+d}_{d\text{가 }100\text{개}}$$
$$=100d$$

이때 $a_3=-3$, $a_6=9$이므로

$a_1+2d=-3$, $a_1+5d=9$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a_1=-11$, $d=4$

$a_6-a_3=3d$이므로
$3d=12$ $\therefore d=4$

따라서 구하는 값은

$100d=400$

답 400

06
$$\sum_{k=1}^{100}\frac{3^k-2^k}{4^k}=\sum_{k=1}^{100}\left\{\left(\frac{3}{4}\right)^k-\left(\frac{1}{2}\right)^k\right\}$$
$$=\sum_{k=1}^{100}\left(\frac{3}{4}\right)^k-\sum_{k=1}^{100}\left(\frac{1}{2}\right)^k$$

첫째항이 $\frac{3}{4}$, 공비가 $\frac{3}{4}$인 등비수열의 첫째항부터 제100항까지의 합

$$=\frac{\frac{3}{4}\left\{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{100}\right\}}{1-\frac{3}{4}}-\frac{\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{100}\right\}}{1-\frac{1}{2}}$$
$$=3\left\{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{100}\right\}-\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{100}\right\}$$
$$=-3\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{100}+\left(\frac{1}{2}\right)^{100}+2$$

따라서 $a=-3$, $b=2$이므로

$a+b=-1$

답 ⑤

20 여러 가지 수열의 합

Lecture 39 자연수의 거듭제곱의 합

128쪽

1-1 (1) $1+2+3+\cdots+9=\sum_{k=1}^{9}k=\frac{9\cdot10}{2}=45$

(2) $1^2+2^2+3^2+\cdots+9^2=\sum_{k=1}^{9}k^2=\frac{9\cdot10\cdot19}{6}=285$

(3) $1^3+2^3+3^3+\cdots+9^3=\sum_{k=1}^{9}k^3=\left(\frac{9\cdot10}{2}\right)^2=2025$

답 (1) 45 (2) 285 (3) 2025

1-2 (1)
$$\sum_{k=1}^{5}(3k+5)=3\sum_{k=1}^{5}k+\sum_{k=1}^{5}5$$
$$=3\cdot\frac{5\cdot6}{2}+5\cdot5$$
$$=70$$

(2)
$$\sum_{k=1}^{8}(k^2-k)=\sum_{k=1}^{8}k^2-\sum_{k=1}^{8}k$$
$$=\frac{8\cdot9\cdot17}{6}-\frac{8\cdot9}{2}$$
$$=168$$

(3)
$$\sum_{k=1}^{4}(k^3-2k^2+1)=\sum_{k=1}^{4}k^3-2\sum_{k=1}^{4}k^2+\sum_{k=1}^{4}1$$
$$=\left(\frac{4\cdot5}{2}\right)^2-2\cdot\frac{4\cdot5\cdot9}{6}+1\cdot4$$
$$=44$$

(4)
$$\sum_{k=1}^{10}(k+1)(k+2)=\sum_{k=1}^{10}(k^2+3k+2)$$
$$=\sum_{k=1}^{10}k^2+3\sum_{k=1}^{10}k+\sum_{k=1}^{10}2$$
$$=\frac{10\cdot11\cdot21}{6}+3\cdot\frac{10\cdot11}{2}+2\cdot10$$
$$=570$$

답 (1) 70 (2) 168 (3) 44 (4) 570

1-3 (1)
$$2+4+6+\cdots+30=\sum_{k=1}^{15}2k=2\sum_{k=1}^{15}k$$
$$=2\cdot\frac{15\cdot16}{2}=240$$

(2)
$$5^2+6^2+7^2+\cdots+11^2=\sum_{k=1}^{7}(k+4)^2$$
$$=\sum_{k=1}^{7}(k^2+8k+16)$$
$$=\sum_{k=1}^{7}k^2+8\sum_{k=1}^{7}k+\sum_{k=1}^{7}16$$
$$=\frac{7\cdot8\cdot15}{6}+8\cdot\frac{7\cdot8}{2}+16\cdot7$$
$$=476$$

답 (1) 240 (2) 476

다른 풀이 (2) $5^2+6^2+7^2+\cdots+11^2$
$$=\sum_{k=5}^{11}k^2=\sum_{k=1}^{11}k^2-\sum_{k=1}^{4}k^2$$
$$=\frac{11\cdot12\cdot23}{6}-\frac{4\cdot5\cdot9}{6}$$
$$=476$$

Lecture 40 분수 꼴인 수열의 합

129쪽

$$\frac{1}{AB}=\frac{1}{B-A}\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{B}\right)$$
(단, $A\neq B$)

1-1 (1)
$$\sum_{k=1}^{8}\frac{1}{(k+1)(k+2)}$$
$$=\sum_{k=1}^{8}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)$$
$$=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)$$
$$+\cdots+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{10}\right)$$
$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{10}=\frac{2}{5}$$

(2) $\sum_{k=1}^{9}\frac{1}{k(k+2)}$

$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{9}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$

$=\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)\right.$

$\left.+\cdots+\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{10}\right)+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{11}\right)\right\}$

$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{10}-\frac{1}{11}\right)=\frac{36}{55}$

답 (1) $\frac{2}{5}$ (2) $\frac{36}{55}$

Q BOX

항이 건너뛰며 소거될 때, 앞에서 첫 번째, 세 번째가 남으면 뒤에서도 첫 번째, 세 번째가 남는다.

1-2 (1) $\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\cdots+\frac{1}{9\cdot10}$

$=\sum_{k=1}^{9}\frac{1}{k(k+1)}$

$=\sum_{k=1}^{9}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$

$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)$

$+\cdots+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{10}\right)$

$=1-\frac{1}{10}=\frac{9}{10}$

(2) $\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}+\frac{1}{5\cdot7}+\cdots+\frac{1}{19\cdot21}$

$=\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$

$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$

$=\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)\right.$

$\left.+\cdots+\left(\frac{1}{19}-\frac{1}{21}\right)\right\}$

$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{21}\right)=\frac{10}{21}$

답 (1) $\frac{9}{10}$ (2) $\frac{10}{21}$

2-1 (1) $\sum_{k=1}^{15}\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}$

$=\sum_{k=1}^{15}\frac{\sqrt{k}-\sqrt{k+1}}{(\sqrt{k}+\sqrt{k+1})(\sqrt{k}-\sqrt{k+1})}$

$=\sum_{k=1}^{15}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$

$=(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})$

$+\cdots+(\sqrt{16}-\sqrt{15})$

$=\sqrt{16}-1=3$

항이 연달아 소거될 때, 앞에서 두 번째가 남으면 뒤에서도 두 번째가 남는다.

(2) $\sum_{k=1}^{48}\frac{2}{\sqrt{k}+\sqrt{k+2}}$

$=\sum_{k=1}^{48}\frac{2(\sqrt{k}-\sqrt{k+2})}{(\sqrt{k}+\sqrt{k+2})(\sqrt{k}-\sqrt{k+2})}$

$=\sum_{k=1}^{48}(\sqrt{k+2}-\sqrt{k})$

$=(\sqrt{3}-1)+(\sqrt{4}-\sqrt{2})+(\sqrt{5}-\sqrt{3})+(\sqrt{6}-\sqrt{4})$

$+\cdots+(\sqrt{49}-\sqrt{47})+(\sqrt{50}-\sqrt{48})$

$=-1-\sqrt{2}+\sqrt{49}+\sqrt{50}=6+4\sqrt{2}$

답 (1) 3 (2) $6+4\sqrt{2}$

2-2 (주어진 식)

$=\sum_{k=1}^{12}\frac{1}{\sqrt{2k-1}+\sqrt{2k+1}}$

$=\sum_{k=1}^{12}\frac{\sqrt{2k-1}-\sqrt{2k+1}}{(\sqrt{2k-1}+\sqrt{2k+1})(\sqrt{2k-1}-\sqrt{2k+1})}$

$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{12}(\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k-1})$

$=\frac{1}{2}\{(\sqrt{3}-1)+(\sqrt{5}-\sqrt{3})+(\sqrt{7}-\sqrt{5})$

$+\cdots+(\sqrt{25}-\sqrt{23})\}$

$=\frac{1}{2}(\sqrt{25}-1)$

$=2$

답 2

기본+표준 유형 Q+Q

130쪽

01 $\sum_{k=1}^{10}(3k-1)^2-\sum_{k=1}^{10}(3k)^2$

$=\sum_{k=1}^{10}(9k^2-6k+1)-\sum_{k=1}^{10}9k^2$

$=\sum_{k=1}^{10}(-6k+1)$

$=-6\cdot\frac{10\cdot11}{2}+1\cdot10$

$=-320$

답 -320

자연수의 거듭제곱의 합

① $\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$

② $\sum_{k=1}^{n}k^2$
$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

③ $\sum_{k=1}^{n}k^3=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

02 $\sum_{k=1}^{11}\frac{1+2+3+\cdots+k}{k+1}=\sum_{k=1}^{11}\frac{\frac{k(k+1)}{2}}{k+1}$

$=\sum_{k=1}^{11}\frac{1}{2}k$

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{11\cdot12}{2}$

$=33$

답 ⑤

03 $\sum_{n=1}^{8}\left(\sum_{m=1}^{n}mn\right)=\sum_{n=1}^{8}\left(n\sum_{m=1}^{n}m\right)$

n을 상수로 생각한다.

$=\sum_{n=1}^{8}\left\{n\cdot\frac{n(n+1)}{2}\right\}$

$=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{8}(n^3+n^2)$

$=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{8\cdot9}{2}\right)^2+\frac{8\cdot9\cdot17}{6}\right\}$

$=\frac{1}{2}(1296+204)$

$=750$

답 ⑤

Q쌤 한마디

Σ를 여러 개 포함한 식의 계산에서는 문자가 상수인 것과 상수가 아닌 것을 구별해야 한다.

$\sum_{k=1}^{n}(k+n)=\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}n=\frac{n(n+1)}{2}+n\cdot n$

상수가 아닌 것 상수인 것

L 09 수열의 합

04 $\sum_{k=1}^{n}\left\{\sum_{i=1}^{k}(i+k)\right\}$

$=\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{k(k+1)}{2}+k^2\right\}$

$=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{3}{2}k^2+\frac{1}{2}k\right)$

$=\frac{3}{2}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{1}{2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}$

$=\frac{1}{4}n(n+1)(2n+1+1)$

$=\frac{n(n+1)^2}{2}$

따라서 $\frac{n(n+1)^2}{2}=90$이므로

$n(n+1)^2=180$

$n^3+2n^2+n-180=0$

$(n-5)(n^2+7n+36)=0$

$\therefore n=5$ ($\because n$은 자연수)

답 5

05 수열 $1\cdot3$, $2\cdot5$, $3\cdot7$, $\cdots$의 일반항을 a_n이라 하면

$a_n=n(2n+1)=2n^2+n$

따라서 구하는 값은 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 9 항까지의 합이므로

$\sum_{k=1}^{9}a_k=\sum_{k=1}^{9}(2k^2+k)$

$=2\cdot\frac{9\cdot10\cdot19}{6}+\frac{9\cdot10}{2}$

$=615$

답 ②

06 수열 1, $1+2$, $1+2+2^2$, $1+2+2^2+2^3$, $\cdots$의 일반항을 a_n이라 하면

$a_n=1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}$

$=\frac{1\cdot(2^n-1)}{2-1}=2^n-1$

따라서 주어진 수열의 첫째항부터 제10항까지의 합은

$\sum_{k=1}^{10}a_k=\sum_{k=1}^{10}(2^k-1)$

$=\frac{2(2^{10}-1)}{2-1}-10$

$=2036$

답 2036

07 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=n^2-3n$

(i) $n=1$일 때,

$a_1=S_1=1^2-3\cdot1=-2$

(ii) $n\geq2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=n^2-3n-\{(n-1)^2-3(n-1)\}$

$=2n-4$ …… ㉠

이때 $a_1=-2$는 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$a_n=2n-4$

따라서 $a_{2k-1}=2(2k-1)-4=4k-6$이므로

$\sum_{k=1}^{8}a_{2k-1}=\sum_{k=1}^{8}(4k-6)$

$=4\cdot\frac{8\cdot9}{2}-6\cdot8$

$=96$

답 96

08 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=2^{n+1}-2$

(i) $n=1$일 때,

$a_1=S_1=2^2-2=2$

(ii) $n\geq2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=2^{n+1}-2-(2^n-2)$

$=2^n$ …… ㉠

이때 $a_1=2$는 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$a_n=2^n$

따라서 $\frac{1}{a_k}=\frac{1}{2^k}=\left(\frac{1}{2}\right)^k$이므로

$\sum_{k=1}^{15}\frac{1}{a_k}=\sum_{k=1}^{15}\left(\frac{1}{2}\right)^k=\frac{\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{15}\right\}}{1-\frac{1}{2}}$

$=1-\left(\frac{1}{2}\right)^{15}$

답 ④

09 수열 2, 5, 8, 11, $\cdots$은 첫째항이 2, 공차가 3인 등차수열이므로 일반항은

$2+(n-1)\cdot3=3n-1$

주어진 수열의 일반항을 a_n이라 하면

$a_n=\frac{1}{(3n-1)(3n+2)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3n-1}-\frac{1}{3n+2}\right)$

따라서 주어진 수열의 첫째항부터 제12항까지의 합은

$\sum_{k=1}^{12}a_k=\sum_{k=1}^{12}\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3k-1}-\frac{1}{3k+2}\right)$

$=\frac{1}{3}\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{11}\right)\right.$

$\left.+\cdots+\left(\frac{1}{35}-\frac{1}{38}\right)\right\}$

$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{38}\right)$

$=\frac{3}{19}$

답 ②

10 수열 1, $\frac{1}{1+2}$, $\frac{1}{1+2+3}$, $\cdots$의 일반항을 a_n이라 하면

$a_n=\frac{1}{1+2+3+\cdots+n}=\frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}}$

$=\frac{2}{n(n+1)}$

$=2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$

QBOX

첫째항이 1, 공비가 2인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 $\sum_{k=1}^{n}a_k$를 S_n이라 하면

(i) $a_1=S_1=\sum_{k=1}^{1}a_k$

(ii) $a_n=S_n-S_{n-1}$

$=\sum_{k=1}^{n}a_k-\sum_{k=1}^{n-1}a_k$

$(n\geq2)$

임을 이용하여 일반항 a_n을 구한다.

따라서 구하는 값은 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제11항까지의 합이므로

$$\sum_{k=1}^{11} a_k=\sum_{k=1}^{11} 2\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$
$$=2\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{11}-\frac{1}{12}\right)\right\}$$
$$=2\left(1-\frac{1}{12}\right)$$
$$=\frac{11}{6}$$

답 $\frac{11}{6}$

11 수열 $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}, \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{5}}, \cdots$의 일반항을 a_n이라 하면

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}}$$
$$=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n+2}}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2})(\sqrt{n+1}-\sqrt{n+2})}$$
$$=\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}$$

따라서 구하는 값은 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제48항까지의 합이므로

$$\sum_{k=1}^{48} a_k=\sum_{k=1}^{48}(\sqrt{k+2}-\sqrt{k+1})$$
$$=(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+(\sqrt{5}-\sqrt{4})+\cdots+(\sqrt{50}-\sqrt{49})$$
$$=\sqrt{50}-\sqrt{2}$$
$$=4\sqrt{2}$$

답 ②

12
$$\sum_{k=1}^{23}\frac{2}{\sqrt{k}+\sqrt{k+2}}$$
$$=\sum_{k=1}^{23}\frac{2(\sqrt{k}-\sqrt{k+2})}{(\sqrt{k}+\sqrt{k+2})(\sqrt{k}-\sqrt{k+2})}$$
$$=\sum_{k=1}^{23}(\sqrt{k+2}-\sqrt{k})$$
$$=(\sqrt{3}-1)+(\sqrt{4}-\sqrt{2})+(\sqrt{5}-\sqrt{3})+(\sqrt{6}-\sqrt{4})+\cdots+(\sqrt{24}-\sqrt{22})+(\sqrt{25}-\sqrt{23})$$
$$=-1-\sqrt{2}+\sqrt{24}+\sqrt{25}$$
$$=2\sqrt{6}-\sqrt{2}+4$$

따라서 $a=2$, $b=4$이므로

$a+b=6$

답 6

13
$$\sum_{k=1}^{80}\log_3\left(1+\frac{1}{k}\right)$$
$$=\sum_{k=1}^{80}\log_3\frac{k+1}{k}$$
$$=\log_3\frac{2}{1}+\log_3\frac{3}{2}+\log_3\frac{4}{3}+\cdots+\log_3\frac{81}{80}$$
$$=\log_3\left(\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\cdots\cdot\frac{81}{80}\right)$$
$$=\log_3 81$$
$$=\log_3 3^4$$
$$=4$$

답 4

Q BOX

$2\cdot 8^{n-1}=2\cdot(2^3)^{n-1}$
$=2\cdot 2^{3n-3}$
$=2^{3n-2}$

46, 47, 48, 49, 50, ⋯

81, 80, 79, 78, 77, ⋯

자연수 k에 대하여
(i) k가 홀수일 때, 처음으로 나타나는 k는 k 번째 묶음의 k 번째 항이다.
(ii) k가 짝수일 때, 처음으로 나타나는 k는 $(k+1)$ 번째 묶음의 k 번째 항이다.

$a>0$, $a\neq 1$, $M>0$, $N>0$일 때
① $\log_a M+\log_a N=\log_a MN$
② $\log_a N^k=k\log_a N$ (단, k는 실수)

14 $a_n=2\cdot 8^{n-1}=2^{3n-2}$이므로

$$\sum_{k=1}^{10}\log_2 a_k=\sum_{k=1}^{10}\log_2 2^{3k-2}$$
$$=\sum_{k=1}^{10}(3k-2)$$
$$=3\cdot\frac{10\cdot 11}{2}-2\cdot 10$$
$$=145$$

답 ⑤

15 위에서 n 번째 줄에는 n개의 자연수가 있으므로 첫 번째 줄부터 n 번째 줄까지의 자연수의 개수는

$$\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$$

$n=9$일 때 $\frac{9\cdot 10}{2}=45$, $n=10$일 때 $\frac{10\cdot 11}{2}=55$이므로 50은 위에서 10 번째 줄의 왼쪽에서 5 번째에 있다.
따라서 $a=10$, $b=5$이므로

$a+b=15$

답 ④

16 각 줄의 첫 번째 수는 차례대로

$1^2, 2^2, 3^2, 4^2, \cdots$

이므로 9 번째 줄의 첫 번째 수는

$9^2=81$

이때 9 번째 줄은 왼쪽에서 5 번째에 있는 수까지 1씩 줄어들므로 구하는 수는 77이다.

답 77

17 주어진 수열을

$(1), (-1, -2), (1, 2, 3), (-1, -2, -3, -4), (1, 2, 3, 4, 5), \cdots$

와 같이 묶으면 처음으로 나타나는 10은 11 번째 묶음의 10 번째 항이다.
이때 n 번째 묶음의 항의 개수는 n이므로 첫 번째 묶음부터 10 번째 묶음까지의 항의 개수는

$$\sum_{k=1}^{10}k=\frac{10\cdot 11}{2}=55$$

따라서 $55+10=65$이므로 처음으로 나타나는 10은 제65항이다.

답 ③

중단원 마무리

133쪽

01 전략 $\sum_{k=1}^{n}a_k=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$임을 이용한다.

풀이
$$\sum_{k=1}^{14}a_{k+1}-\sum_{k=2}^{15}a_{k-1}$$
$$=(a_2+a_3+a_4+\cdots+a_{15})-(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{14})$$
$$=a_{15}-a_1$$
$$=45-4$$
$$=41$$

답 41

09 수열의 합

02 전략 $\sum_{k=1}^{n}(a_{k+1}-a_k)$를 Σ를 사용하지 않은 합의 꼴로 나타내어 항을 소거한다.

풀이 $\sum_{k=1}^{n}(a_{k+1}-a_k)$

$=(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+(a_4-a_3)+\cdots+(a_{n+1}-a_n)$

$=a_{n+1}-a_1$

$=a_{n+1}-15$

따라서 $a_{n+1}-15=2n+1$이므로

$a_{n+1}=2n+16$

$\therefore a_{10}=2\cdot 9+16=34$

답 ④

03 전략 자연수 n이 홀수인 경우와 짝수인 경우로 나누어 생각한다.

풀이 자연수 k에 대하여

(i) $n=2k-1$일 때,

$n^2=(2k-1)^2=4(k^2-k)+1$이므로

$a_{2k-1}=1$

(ii) $n=2k$일 때,

$n^2=(2k)^2=4k^2$이므로

$a_{2k}=0$

(i), (ii)에서

$\sum_{n=1}^{1000}a_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{999}+a_{1000}$

$=\underline{1+0+1+\cdots+1+0}$

1이 500개, 0이 500개

$=1\cdot 500$

$=500$

답 500

04 전략 $(a_k+2)^2$을 전개한 후 Σ의 성질을 이용한다.

풀이 $\sum_{k=1}^{10}(a_k+2)^2=\sum_{k=1}^{10}(a_k^2+4a_k+4)$

$=\sum_{k=1}^{10}a_k^2+4\sum_{k=1}^{10}a_k+\sum_{k=1}^{10}4$

$=\sum_{k=1}^{10}a_k^2+4\cdot 4+4\cdot 10$

$=\sum_{k=1}^{10}a_k^2+56$

즉 $\sum_{k=1}^{10}a_k^2+56=67$이므로

$\sum_{k=1}^{10}(a_k)^2=11$

답 ⑤

05 전략 다항식 $P(x)$를 일차식 $x-\alpha$로 나누었을 때의 나머지는 $P(\alpha)$이다.

풀이 다항식 $P(x)=x^{2n-1}(x-2)$를 $x-3$으로 나누었을 때의 나머지는 $P(3)$이므로

$a_n=3^{2n-1}\cdot(3-2)=\frac{1}{3}\cdot 9^n$

$\therefore \sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{3}\cdot 9^k\right)$

$=\frac{1}{3}\cdot\frac{9(9^n-1)}{9-1}$

$=\frac{3(9^n-1)}{8}$

답 ②

Q BOX

06 전략 먼저 등차수열의 합의 공식을 이용하여 S_n을 구한다.

풀이 주어진 등차수열의 첫째항이 50, 공차가 -4이므로

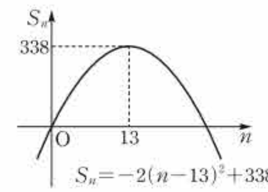
$S_n=\underline{\frac{n\{2\cdot 50+(n-1)\cdot(-4)\}}{2}}$

첫째항이 a, 공차가 d인 등차수열의 첫째항부터 제n항까지의 합은 $\frac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}$

$=-2n^2+52n$

$=-2(n-13)^2+338$

S_n을 n에 대한 이차함수로 생각하면 그 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



이때

$\sum_{k=m}^{m+4}S_k$

$=S_m+S_{m+1}+S_{m+2}+S_{m+3}+S_{m+4}$

이고, 위의 그림에서 S_n의 값은 $n=13$일 때 최대이고 그 그래프는 직선 $n=13$에 대하여 대칭이므로 $\sum_{k=m}^{m+4}S_k$의 값이 최대가 되려면 $S_{m+2}=S_{13}$이어야 한다.

따라서 $m+2=13$이므로

$m=11$

답 ④

07 전략 a_{2k-1}을 구한 후 Σ의 성질과 $\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$임을 이용한다.

풀이 $a_{2k-1}=2(2k-1)-3=4k-5$이므로

$\sum_{k=1}^{n-1}a_{2k-1}=\sum_{k=1}^{n-1}(4k-5)$

$=4\cdot\frac{(n-1)n}{2}-5(n-1)$

$=2n^2-7n+5$

답 ②

08 전략 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 a_n을 구한다.

풀이 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$a_n=-\frac{-(n+5)}{n^2+6n+5}=\frac{n+5}{(n+1)(n+5)}$

$=\frac{1}{n+1}$

$\therefore \sum_{k=1}^{10}\frac{1}{a_k}=\sum_{k=1}^{10}(k+1)$

$=\frac{10\cdot 11}{2}+1\cdot 10$

$=65$

답 ①

09 전략 일반항에서 상수인 것과 상수가 아닌 것을 구별하여 괄호 안부터 계산한다.

풀이 $\sum_{j=1}^{9}\left\{\sum_{i=1}^{j}\left(\sum_{k=1}^{i}a\right)\right\}=\sum_{j=1}^{9}\left(\sum_{i=1}^{j}ai\right)=\sum_{j=1}^{9}\left(a\sum_{i=1}^{j}i\right)$

a를 상수로 생각한다.

$=a\sum_{j=1}^{9}\frac{j(j+1)}{2}$

$=\frac{a}{2}\sum_{j=1}^{9}(j^2+j)$

$=\frac{a}{2}\left(\frac{9\cdot 10\cdot 19}{6}+\frac{9\cdot 10}{2}\right)$

$=165a$ ⋯ ❶

따라서 $165a=330$이므로

$a=2$ ⋯ ❷

답 2

단계	채점 기준	비율
❶	주어진 등식의 좌변을 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	80 %
❷	a의 값을 구할 수 있다.	20 %

10 전략 주어진 식을 Σ를 사용하여 나타낸 후 Σ의 성질과 자연수의 거듭제곱의 합을 이용한다.

풀이 수열 $1,\ 1+2,\ 1+2+3,\ \cdots$의 일반항을 a_n이라 하면

$$a_n=1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

따라서 구하는 값은 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제10항까지의 합이므로

$$\sum_{k=1}^{10}a_k=\sum_{k=1}^{10}\frac{k(k+1)}{2}$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{10}(k^2+k)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{10\cdot11\cdot21}{6}+\frac{10\cdot11}{2}\right)$$
$$=220$$

답 ②

11 전략 n을 상수로 생각하고 수열 $1\cdot n,\ 2\cdot(n-1),\ 3\cdot(n-2),\ \cdots$의 일반항을 구한다.

풀이 수열 $1\cdot n,\ 2\cdot(n-1),\ 3\cdot(n-2),\ \cdots$의 일반항을 a_k라 하면

$$a_k=k\{n-(k-1)\}=-k^2+(n+1)k$$

이므로 주어진 식은

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}\{-k^2+(n+1)k\}$$
$$=-\sum_{k=1}^{n}k^2+(n+1)\sum_{k=1}^{n}k$$
$$=-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)\cdot\frac{n(n+1)}{2}$$
$$=\frac{n(n+1)\{-(2n+1)+3(n+1)\}}{6}$$
$$=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

답 $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$

12 전략 수열의 합과 일반항 사이의 관계를 이용하여 a_nb_n을 구한다.

풀이 $\sum_{k=1}^{n}a_kb_k=4n^3+3n^2-n=n(n+1)(4n-1)$이므로

$4n^3+3n^2-n$
$=n(4n^2+3n-1)$
$=n(n+1)(4n-1)$

$n\geq2$일 때,

$$a_nb_n=\sum_{k=1}^{n}a_kb_k-\sum_{k=1}^{n-1}a_kb_k$$
$$=n(n+1)(4n-1)-n(n-1)(4n-5)$$
$$=n\{(4n^2+3n-1)-(4n^2-9n+5)\}$$
$$=n(12n-6)$$
$$=6n(2n-1) \quad \cdots\cdots ㉠$$

수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 2, 공차가 4인 등차수열이므로

$$a_n=2+(n-1)\cdot4=4n-2$$

$a_n=4n-2=2(2n-1)$을 ㉠에 대입하면

$$2(2n-1)b_n=6n(2n-1)$$

$n\geq2$일 때 $2n-1\neq0$이므로

$$b_n=3n\ (n\geq2)$$
$$\therefore b_5=3\cdot5=15$$

답 15

다른 풀이 $a_5b_5=\sum_{k=1}^{5}a_kb_k-\sum_{k=1}^{4}a_kb_k$

$$=4\cdot5^3+3\cdot5^2-5-(4\cdot4^3+3\cdot4^2-4)$$
$$=270$$

이때 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 2, 공차가 4인 등차수열이므로

$$a_5=2+(5-1)\cdot4=18$$

따라서 $18b_5=270$이므로

$$b_5=15$$

13 전략 $\frac{1}{a_{2n-1}a_{2n+1}}$을 구한 후 부분분수로 변형한다.

풀이 $a_n=3n-1$이므로

$$a_{2n-1}=3(2n-1)-1=6n-4,$$
$$a_{2n+1}=3(2n+1)-1=6n+2$$
$$\therefore \sum_{n=1}^{10}\frac{1}{a_{2n-1}a_{2n+1}}$$
$$=\sum_{n=1}^{10}\frac{1}{(6n-4)(6n+2)}$$
$$=\frac{1}{6}\sum_{n=1}^{10}\left(\frac{1}{6n-4}-\frac{1}{6n+2}\right)$$
$$=\frac{1}{6}\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{14}\right)+\left(\frac{1}{14}-\frac{1}{20}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{56}-\frac{1}{62}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{62}\right)$$
$$=\frac{5}{62}$$

답 ①

14 전략 자연수의 거듭제곱의 합을 이용하여 식을 간단히 한 후 부분분수로 변형한다.

풀이 $a_n=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{2k+1}{1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2}$

$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{2k+1}{\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}}$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{6}{k(k+1)}$$
$$=3\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$
$$=3\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$$
$$=3\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$=\frac{3n}{n+1}$$

따라서 $a_m=\dfrac{3m}{m+1}=\dfrac{90}{31}$이므로

$31m=30(m+1)$

$\therefore m=30$ 답 ④

15 전략 일반항을 구한 후 분모를 유리화한다.

풀이 $a_n=\dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$

$=\dfrac{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}{(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})(\sqrt{n}-\sqrt{n+1})}$

$=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$

$\therefore \sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$

$=(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+\cdots+(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$

$=\sqrt{n+1}-1$

따라서 $\sqrt{n+1}-1=9$이므로

$\sqrt{n+1}=10,\quad n+1=100$

$\therefore n=99$ 답 ③

16 전략 수열의 합과 일반항 사이의 관계를 이용하여 a_n을 구한 후 로그의 성질을 이용하여 수열의 합을 구한다.

풀이 $n\ge2$일 때,

$a_n=\sum_{k=1}^{n}a_k-\sum_{k=1}^{n-1}a_k$

$=\log_2(n^2+n)-\log_2\{(n-1)^2+(n-1)\}$

$=\log_2(n^2+n)-\log_2(n^2-n)$

$=\log_2\dfrac{n^2+n}{n^2-n}$

$=\log_2\dfrac{n(n+1)}{n(n-1)}$

$=\log_2\dfrac{n+1}{n-1}$

$a_{2n+1}=\log_2\dfrac{2n+2}{2n}=\log_2\dfrac{n+1}{n}$이므로

$\sum_{n=1}^{15}a_{2n+1}=\sum_{n=1}^{15}\log_2\dfrac{n+1}{n}$

$=\log_2\dfrac{2}{1}+\log_2\dfrac{3}{2}+\log_2\dfrac{4}{3}+\cdots+\log_2\dfrac{16}{15}$

$=\log_2\left(\dfrac{2}{1}\cdot\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{4}{3}\cdot\cdots\cdot\dfrac{16}{15}\right)$

$=\log_2 16$

$=\log_2 2^4$

$=4$ 답 4

17 전략 주어진 수열을 규칙성을 갖도록 묶은 후 각 묶음의 항의 개수와 규칙성을 조사한다.

풀이 주어진 수열을

$\left(\dfrac{1}{2}\right), \left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}\right), \left(\dfrac{1}{4}, \dfrac{2}{4}, \dfrac{3}{4}\right),$

$\left(\dfrac{1}{5}, \dfrac{2}{5}, \dfrac{3}{5}, \dfrac{4}{5}\right), \cdots$

Q BOX

$(n-1)^2+(n-1)$
$=(n-1)(n-1+1)$
$=n^2-n$

$a>0,\ a\ne1,\ M>0,\ N>0$일 때,
$\log_a M-\log_a N=\log_a\dfrac{M}{N}$

n 번째 묶음의 분모는 $n+1$이다.

와 같이 분모가 같은 항끼리 묶으면 n 번째 묶음의 항의 개수는 n이므로 첫 번째 묶음부터 n 번째 묶음까지의 항의 개수는

$\sum_{k=1}^{n}k=\dfrac{n(n+1)}{2}$

$n=11$일 때 $\dfrac{11\cdot12}{2}=66$, $n=12$일 때 $\dfrac{12\cdot13}{2}=78$이므로 제71항은 12 번째 묶음의 5 번째 항이다.

이때 12 번째 묶음은 분모가 13이고 분자가 1부터 1씩 커지므로 제71항은 $\dfrac{5}{13}$이다. 답 $\dfrac{5}{13}$

18 전략 n 번째 줄에 나열된 수들의 규칙을 파악한 후 그 합을 식으로 나타낸다.

풀이 위에서 n 번째 줄에 나열된 수의 합은 첫째항이 n, 공차가 n인 등차수열의 첫째항부터 제n항까지의 합과 같으므로

$\dfrac{n\{2n+(n-1)n\}}{2}=\dfrac{n^3+n^2}{2}$ ⋯ ❶

따라서 첫 번째 줄부터 9 번째 줄까지 나열된 모든 수의 합은

$\sum_{k=1}^{9}\dfrac{k^3+k^2}{2}=\dfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{9}(k^3+k^2)$

$=\dfrac{1}{2}\left\{\left(\dfrac{9\cdot10}{2}\right)^2+\dfrac{9\cdot10\cdot19}{6}\right\}$

$=1155$ ⋯ ❷

답 1155

단계	채점 기준	비율
❶	n 번째 줄에 나열된 수의 합을 구할 수 있다.	70 %
❷	첫 번째 줄부터 9 번째 줄까지 나열된 모든 수의 합을 구할 수 있다.	30 %

135~137쪽

10 수학적 귀납법

21 수열의 귀납적 정의

Lecture 41 등차수열의 귀납적 정의

136쪽

1-1 (1) $a_{n+1}=3-a_n$의 n에 1, 2, 3을 차례대로 대입하면

$a_2=3-a_1=3-1=2$

$a_3=3-a_2=3-2=1$

$a_4=3-a_3=3-1=2$

(2) $a_{n+1}=2a_n-1$의 n에 1, 2, 3을 차례대로 대입하면

$a_2=2a_1-1=2\cdot3-1=5$

$a_3=2a_2-1=2\cdot5-1=9$

$a_4=2a_3-1=2\cdot9-1=17$

답 (1) 2 (2) 17

1-2 (1) $a_{n+1}=\dfrac{2}{a_n}$의 n에 1, 2, 3, 4를 차례대로 대입하면

$a_2=\dfrac{2}{a_1}=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$

$a_3=\dfrac{2}{a_2}=\dfrac{2}{\frac{1}{2}}=4$

$a_4=\dfrac{2}{a_3}=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$

$a_5=\dfrac{2}{a_4}=\dfrac{2}{\frac{1}{2}}=4$

(2) $a_{n+2}=a_{n+1}a_n$의 n에 1, 2, 3을 차례대로 대입하면

$a_3=a_2a_1=2\cdot(-1)=-2$

$a_4=a_3a_2=(-2)\cdot2=-4$

$a_5=a_4a_3=(-4)\cdot(-2)=8$

답 (1) 4 (2) 8

2-1 답 (1) $a_1=-1$, $a_{n+1}=a_n+4$ ($n=1, 2, 3, \cdots$)

(2) $a_1=5$, $a_{n+1}=a_n-7$ ($n=1, 2, 3, \cdots$)

참고 (1) 수열 $\{a_n\}$이 등차수열이므로

$a_1=-1$, $a_2=3$, $a_{n+1}-a_n=a_{n+2}-a_{n+1}$ ($n=1, 2, 3, \cdots$)

과 같이 정의할 수도 있다.

$a_2=-1+4=3$

2-2 (1) 주어진 수열은 첫째항이 2, 공차가 3인 등차수열이므로

$a_n=2+(n-1)\cdot3=3n-1$

(2) $a_{n+2}-a_{n+1}=a_{n+1}-a_n$에서 주어진 수열은 등차수열이고

$a_1=-6$, $a_2-a_1=8-(-6)=14$

이므로 첫째항이 -6, 공차가 14이다.

$\therefore a_n=-6+(n-1)\cdot14=14n-20$

답 (1) $a_n=3n-1$ (2) $a_n=14n-20$

첫째항이 a, 공차가 d인 등차수열의 일반항 a_n은
$a_n=a+(n-1)d$

Q BOX

Lecture 42 등비수열의 귀납적 정의

137쪽

1-1 답 (1) $a_1=3$, $a_{n+1}=2a_n$ ($n=1, 2, 3, \cdots$)

(2) $a_1=4$, $a_{n+1}=-\dfrac{1}{5}a_n$ ($n=1, 2, 3, \cdots$)

참고 (1) 수열 $\{a_n\}$이 등비수열이므로

$a_1=3$, $a_2=6$,

$a_{n+1}\div a_n=a_{n+2}\div a_{n+1}$ ($n=1, 2, 3, \cdots$)

과 같이 정의할 수도 있다.

$a_2=3\cdot2=6$

1-2 (1) 주어진 수열은 첫째항이 1, 공비가 6인 등비수열이므로

$a_n=1\cdot6^{n-1}=6^{n-1}$

첫째항이 a, 공비가 r ($r\neq0$)인 등비수열의 일반항 a_n은
$a_n=ar^{n-1}$

(2) $\dfrac{a_{n+2}}{a_{n+1}}=\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$에서 주어진 수열은 등비수열이고

$a_1=-12$, $a_2\div a_1=4\div(-12)=-\dfrac{1}{3}$

이므로 첫째항이 -12, 공비가 $-\dfrac{1}{3}$이다.

$\therefore a_n=-12\cdot\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$

답 (1) $a_n=6^{n-1}$ (2) $a_n=-12\cdot\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$

2-1 (1) $a_{n+1}=a_n+n$의 n에 1, 2, 3, $\cdots$, 9를 차례대로 대입하면

$a_2=a_1+1$

$a_3=a_2+2=a_1+1+2$

$a_4=a_3+3=a_1+1+2+3$

$\vdots$

$a_{10}=a_9+9=a_1+1+2+\cdots+9$

$=-2+45=43$

$1+2+\cdots+9=\dfrac{9\cdot10}{2}=45$

(2) $a_{n+1}=\dfrac{n+2}{n+1}a_n$의 n에 1, 2, 3, $\cdots$, 9를 차례대로 대입하면

$a_2=\dfrac{3}{2}a_1$

$a_3=\dfrac{4}{3}a_2=\dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{3}{2}a_1$

$a_4=\dfrac{5}{4}a_3=\dfrac{5}{4}\cdot\dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{3}{2}a_1$

$\vdots$

$a_{10}=\dfrac{11}{10}a_9=\dfrac{11}{10}\cdot\dfrac{10}{9}\cdot\dfrac{9}{8}\cdot\cdots\cdot\dfrac{3}{2}a_1$

$=\dfrac{11}{2}a_1=\dfrac{11}{2}\cdot6=33$

(3) $a_{n+1}=2^na_n$의 n에 1, 2, 3, $\cdots$, 9를 차례대로 대입하면

$a_2=2a_1$

$a_3=2^2a_2=2^2\cdot2a_1$

$a_4=2^3a_3=2^3\cdot2^2\cdot2a_1$

$\vdots$

$a_{10}=2^9a_9=2^9\cdot2^8\cdot2^7\cdot\cdots\cdot2a_1$

$=2^{1+2+3+\cdots+9}\cdot1=2^{45}$

답 (1) 43 (2) 33 (3) 2^{45}

기본 + 표준 유형 Q+Q

138쪽

01 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 3, 공차가 5인 등차수열이므로

$a_n=3+(n-1)\cdot5=5n-2$

$a_k=78$에서 $5k-2=78$

$5k=80$ $\therefore k=16$

답 16

02 $a_{n+2}-a_{n+1}=a_{n+1}-a_n$에서 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이므로 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_5=a+4d=8$ …… ㉠

$a_{10}=a+9d=23$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-4$, $d=3$

따라서 $a_n=-4+(n-1)\cdot3=3n-7$이므로

$a_{20}=3\cdot20-7=53$

답 ①

$a_{20}=-4+19\cdot3=53$ 과 같이 구할 수도 있다.

03 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 2, 공비가 3인 등비수열이므로

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_6=\frac{2(3^6-1)}{3-1}=3^6-1=728$$

답 ③

첫째항이 a, 공비가 r인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n은

$$S_n=\frac{a(r^n-1)}{r-1} \text{ (단, } r\neq1)$$

04 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 4, 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열이므로

$$a_n=4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$$

$a_k=\frac{1}{4^7}$에서 $\left(\frac{1}{2}\right)^{k-3}=\frac{1}{4^7}=\left(\frac{1}{2}\right)^{14}$

$k-3=14$ $\therefore k=17$

답 17

05 $a_{n+1}=a_n+4n$의 n에 1, 2, 3, …, 10을 차례대로 대입하면

$a_2=a_1+4\cdot1=-1+4\cdot1=3$

$a_3=a_2+4\cdot2=a_1+4\cdot1+4\cdot2$

$a_4=a_3+4\cdot3=a_1+4\cdot1+4\cdot2+4\cdot3$

⋮

$$a_{11}=a_{10}+4\cdot10=a_1+4\cdot1+4\cdot2+\cdots+4\cdot10$$
$$=-1+\sum_{k=1}^{10}4k=-1+4\cdot\frac{10\cdot11}{2}$$
$$=219$$

$\therefore a_2+a_{11}=222$

답 222

06 $a_{n+1}=a_n+2^n$의 n에 1, 2, 3, …, 7을 차례대로 대입하면

$a_2=a_1+2^1=a+2$

$a_3=a_2+2^2=a+2+2^2$

$a_4=a_3+2^3=a+2+2^2+2^3$

⋮

$a_8=a_7+2^7=a+2+2^2+2^3+\cdots+2^7$

이때 $a_8=260$이므로

$a+2+2^2+2^3+\cdots+2^7=260$

첫째항과 공비가 모두 2인 등비수열의 첫째항부터 제7항까지의 합

$$a+\frac{2(2^7-1)}{2-1}=260$$

$a+254=260$ $\therefore a=6$

답 6

07 $a_{n+1}=\frac{2n+1}{2n-1}a_n$의 n에 1, 2, 3, …, 7을 차례대로 대입하면

$a_2=\frac{3}{1}a_1=3a_1$

$a_3=\frac{5}{3}a_2=\frac{5}{3}\cdot3a_1$

$a_4=\frac{7}{5}a_3=\frac{7}{5}\cdot\frac{5}{3}\cdot3a_1$

⋮

$$a_8=\frac{15}{13}a_7=\frac{15}{13}\cdot\frac{13}{11}\cdot\frac{11}{9}\cdot\cdots\cdot3a_1$$
$$=15a_1=15\cdot\frac{1}{3}=5$$

답 ②

08 $\sqrt{n+1}\,a_{n+1}=\sqrt{n}\,a_n$에서

$$a_{n+1}=\sqrt{\frac{n}{n+1}}\,a_n$$

위의 식의 n에 1, 2, 3, …을 차례대로 대입하면

$a_2=\sqrt{\frac{1}{2}}\,a_1$

$a_3=\sqrt{\frac{2}{3}}\,a_2=\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}}\,a_1=\sqrt{\frac{1}{3}}\,a_1$

$a_4=\sqrt{\frac{3}{4}}\,a_3=\sqrt{\frac{3}{4}}\cdot\sqrt{\frac{1}{3}}\,a_1=\sqrt{\frac{1}{4}}\,a_1$

⋮

$\therefore a_n=\sqrt{\frac{1}{n}}\,a_1=\sqrt{\frac{1}{n}}$

$a_k=\frac{1}{6}$에서 $\sqrt{\frac{1}{k}}=\frac{1}{6}$

$\frac{1}{k}=\frac{1}{36}$ $\therefore k=36$

답 36

09 $a_{n+1}=3n-a_n$의 n에 1, 2, 3, 4를 차례대로 대입하면

$a_2=3\cdot1-a_1=3-(-2)=5$

$a_3=3\cdot2-a_2=6-5=1$

$a_4=3\cdot3-a_3=9-1=8$

$a_5=3\cdot4-a_4=12-8=4$

답 4

10 $a_{n+1}=\frac{a_n}{2a_n+1}$의 n에 1, 2, 3, 4, 5를 차례대로 대입하면

$$a_2=\frac{a_1}{2a_1+1}=\frac{1}{2\cdot1+1}=\frac{1}{3}$$

$$a_3=\frac{a_2}{2a_2+1}=\frac{\frac{1}{3}}{2\cdot\frac{1}{3}+1}=\frac{1}{2+3}=\frac{1}{5}$$

$$a_4=\frac{a_3}{2a_3+1}=\frac{\frac{1}{5}}{2\cdot\frac{1}{5}+1}=\frac{1}{2+5}=\frac{1}{7}$$

$$a_5=\frac{a_4}{2a_4+1}=\frac{\frac{1}{7}}{2\cdot\frac{1}{7}+1}=\frac{1}{2+7}=\frac{1}{9}$$

$$a_6=\frac{a_5}{2a_5+1}=\frac{\frac{1}{9}}{2\cdot\frac{1}{9}+1}=\frac{1}{2+9}=\frac{1}{11}$$

$$\therefore \frac{a_6}{a_4}=\frac{\frac{1}{11}}{\frac{1}{7}}=\frac{7}{11}$$

답 $\frac{7}{11}$

11 $a_{n+2}=a_{n+1}-a_n$의 n에 1, 2, 3, …을 차례대로 대입하면

$a_3=a_2-a_1=5-3=2$
$a_4=a_3-a_2=2-5=-3$
$a_5=a_4-a_3=-3-2=-5$
$a_6=a_5-a_4=-5-(-3)=-2$
$a_7=a_6-a_5=-2-(-5)=3$
$a_8=a_7-a_6=3-(-2)=5$
⋮

따라서 수열 $\{a_n\}$은 3, 5, 2, -3, -5, -2가 이 순서대로 반복되므로 $a_{n+p}=a_n$을 만족시키는 가장 작은 자연수 p의 값은 6이다.

답 6

$a_1=a_7=a_{13}=\cdots=3$
$a_2=a_8=a_{14}=\cdots=5$
$a_3=a_9=a_{15}=\cdots=2$
$a_4=a_{10}=a_{16}=\cdots=-3$
$a_5=a_{11}=a_{17}=\cdots=-5$
$a_6=a_{12}=a_{18}=\cdots=-2$

12 $a_{n+2}=\frac{a_{n-1}a_{n+1}}{a_n}$의 n에 2, 3, 4, …를 차례대로 대입하면

$$a_4=\frac{a_1a_3}{a_2}=\frac{1\cdot4}{-2}=-2$$
$$a_5=\frac{a_2a_4}{a_3}=\frac{-2\cdot(-2)}{4}=1$$
$$a_6=\frac{a_3a_5}{a_4}=\frac{4\cdot1}{-2}=-2$$
$$a_7=\frac{a_4a_6}{a_5}=\frac{-2\cdot(-2)}{1}=4$$
$$a_8=\frac{a_5a_7}{a_6}=\frac{1\cdot4}{-2}=-2$$
⋮

따라서 수열 $\{a_n\}$은 1, -2, 4, -2가 이 순서대로 반복된다.
이때 $34=4\cdot8+2$이므로
$a_{34}=a_2=-2$

답 ②

13 $S_{n+1}=2S_n-3$의 n에 1, 2, 3, 4를 차례대로 대입하면

$S_2=2S_1-3=2\cdot(-4)-3=-11$
$S_3=2S_2-3=2\cdot(-11)-3=-25$
$S_4=2S_3-3=2\cdot(-25)-3=-53$
$S_5=2S_4-3=2\cdot(-53)-3=-109$
$\therefore a_5=S_5-S_4=-109-(-53)=-56$

답 -56

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면
$a_1=S_1$,
$a_n=S_n-S_{n-1}$ $(n\geq2)$

14 $S_n=3a_n+4$에서
$S_{n+1}=3a_{n+1}+4$

한편 $a_{n+1}=S_{n+1}-S_n$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$이므로

$a_{n+1}=3a_{n+1}+4-(3a_n+4)$

$2a_{n+1}=3a_n$ $\therefore a_{n+1}=\frac{3}{2}a_n$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $a_1=-2$, 공비가 $\frac{3}{2}$인 등비수열이므로

$$a_n=-2\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$$
$$\therefore a_{10}=-2\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^9=-\frac{3^9}{2^8}$$

답 ②

15 $(n+1)$회 시행 후 물탱크에 남아 있는 물의 양 a_{n+1} L는 n회 시행 후 물탱크에 남아 있는 물의 양 a_n L의 $\frac{3}{5}$에 30 L를 더한 것이므로

$a_{n+1}=\frac{3}{5}a_n+30$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$

답 $a_{n+1}=\frac{3}{5}a_n+30$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$

$\frac{2}{5}$를 버리면
$1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$
이 남는다.

16 (1) $(n+1)$시간 후 살아 있는 미생물의 수 a_{n+1}은 n시간 후 살아 있는 미생물의 수 a_n에서 3을 뺀 후 5배 한 것이므로

$a_{n+1}=(a_n-3)\cdot5$
$=5a_n-15$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$

(2) $a_1=(5-3)\cdot5=10$이므로
$a_2=5a_1-15=5\cdot10-15=35$
$a_3=5a_2-15=5\cdot35-15=160$
$a_4=5a_3-15=5\cdot160-15=785$

답 (1) $a_{n+1}=5a_n-15$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$ (2) 785

17 $a_1=3$, $a_2=a_1+6$, $a_3=a_2+9$, …이므로
$a_{n+1}=a_n+3(n+1)$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$

답 $a_{n+1}=a_n+3(n+1)$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$

$a_2=a_1+3(1+1)$,
$a_3=a_2+3(2+1)$

22 수학적 귀납법

Lecture 43 수학적 귀납법

141쪽

1-1 답 $n=5$, $k+1$

1-2 (i) $n=1$일 때,

$$(\text{좌변})=1,\ (\text{우변})=\frac{1\cdot2}{2}=\boxed{1}$$

따라서 주어진 등식이 성립한다.

(ii) $n=k$일 때 주어진 등식이 성립한다고 가정하면

$$1+2+3+\cdots+k=\frac{k(k+1)}{2}$$

앞의 식의 양변에 $k+1$을 더하면

$$1+2+3+\cdots+k+(k+1)$$
$$=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)$$
$$=\frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}$$
$$=\frac{(k+1)(\boxed{k+2})}{2}$$

따라서 $n=k+1$일 때도 주어진 등식이 성립한다.

(i), (ii)에서 모든 자연수 n에 대하여 주어진 등식이 성립한다. 답 1, $k+2$

기본+표준 유형 Q+Q

142쪽

01 조건 (가)에서 $p(1)$이 참이므로 조건 (나)에서 $p(2)$가 참이다.

$p(2)$가 참이므로 조건 (나)에서 $p(4)$, 즉 $p(2^2)$이 참이다.

$p(4)$가 참이므로 조건 (나)에서 $p(8)$, 즉 $p(2^3)$이 참이다.

⋮

따라서 $p(2^k)$ (k는 자연수)이 모두 참이므로 반드시 참인 명제는 $p(32)$이다. 답 ⑤

$p(2\cdot1)=p(2)$

$p(2\cdot2)=p(4)$

$p(2\cdot4)=p(8)$

02 ㄱ. $p(1)$이 참이면 주어진 조건에 의하여

$p(4)$, $p(7)$, $p(10)$, $\cdots$, $p(3n+1)$

이 모두 참이지만 $p(3n)$이 참인지는 알 수 없다.

ㄴ. $p(3)$이 참이면 주어진 조건에 의하여

$p(6)$, $p(9)$, $p(12)$, $\cdots$, $p(3n)$

이 모두 참이다.

ㄷ. ㄱ에서 $p(1)$이 참이면 $p(3n+1)$이 참이고, ㄴ에서 $p(3)$이 참이면 $p(3n)$이 참이다.

그러나 $p(3n+2)$가 참인지는 알 수 없다.

이상에서 옳은 것은 ㄴ뿐이다. 답 ㄴ

$p(1+3)=p(4)$, $p(4+3)=p(7)$, $p(7+3)=p(10)$

$p(3+3)=p(6)$, $p(6+3)=p(9)$, $p(9+3)=p(12)$

03 (i) $n=1$일 때,

(좌변)$=1$, (우변)$=1^2=\boxed{1}$

따라서 주어진 등식이 성립한다.

(ii) $n=k$일 때 주어진 등식이 성립한다고 가정하면

$$1+3+5+\cdots+(2k-1)=k^2$$

위의 식의 양변에 $\boxed{2k+1}$을 더하면

$$1+3+5+\cdots+(2k-1)+(2k+1)$$
$$=k^2+2k+1=(k+1)^2$$

따라서 $n=k+1$일 때도 주어진 등식이 성립한다.

$\therefore$ (가) 1 (나) $2k+1$

답 (가) 1 (나) $2k+1$

Q BOX

$k\geq4$이므로

$k+1\geq5>2$

04 (1) $n=1$일 때,

(좌변)$=1$, (우변)$=2^1-1=1$

따라서 주어진 등식이 성립한다.

(2) $n=k$일 때 주어진 등식이 성립한다고 가정하면

$$1+2+2^2+\cdots+2^{k-1}=2^k-1$$

위의 식의 양변에 2^k을 더하면

$$1+2+2^2+\cdots+2^{k-1}+2^k=2^k-1+2^k$$
$$=2\cdot2^k-1$$
$$=2^{k+1}-1$$

따라서 $n=k+1$일 때도 주어진 등식이 성립한다.

답 풀이 참조

05 (ii) $n=k$일 때 $2^{2n}-1$이 3의 배수라 가정하면

$2^{2k}-1=3N$ (N은 자연수)

으로 놓을 수 있다.

이때 $n=k+1$이면

$$2^{2(k+1)}-1=2^2\cdot2^{2k}-1=\boxed{4}\cdot2^{2k}-1$$
$$=4(3N+1)-1$$
$$=4\cdot3N+3$$
$$=3(\boxed{4N+1})$$

따라서 $n=k+1$일 때도 $2^{2n}-1$은 3의 배수이다.

즉 $a=4$, $f(N)=4N+1$이므로

$f(a)=f(4)=4\cdot4+1=17$ 답 ③

06 (ii) $n=k$일 때 7^n+5^{n-1}이 2로 나누어떨어진다고 가정하면

$7^k+5^{k-1}=2N$ (N은 자연수)

으로 놓을 수 있다.

이때 $n=k+1$이면

$$7^{k+1}+5^k=7\cdot7^k+5\cdot\boxed{5^{k-1}}$$
$$=7(\boxed{7^k+5^{k-1}})-2\cdot5^{k-1}$$
$$=7\cdot2N-2\cdot5^{k-1}$$
$$=2(7N-5^{k-1})$$

따라서 $n=k+1$일 때도 7^n+5^{n-1}은 2로 나누어떨어진다.

$\therefore$ (가) 5^{k-1} (나) 7^k+5^{k-1}

답 (가) 5^{k-1} (나) 7^k+5^{k-1}

07 (ii) $n=k$ $(k\geq4)$일 때 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면

$$1\cdot2\cdot3\cdot\cdots\cdot k>2^k$$

위의 식의 양변에 $\boxed{k+1}$을 곱하면

$$1\cdot2\cdot3\cdot\cdots\cdot k\cdot(k+1)>2^k\cdot(k+1)$$

이때 $k\geq4$이므로

$$2^k\cdot(k+1)>2^k\cdot\boxed{2}=\boxed{2^{k+1}}$$
$$\therefore 1\cdot2\cdot3\cdot\cdots\cdot k\cdot(k+1)>2^{k+1}$$

따라서 $n=k+1$일 때도 주어진 부등식이 성립한다.

즉 $f(k)=k+1$, $a=2$, $g(k)=2^{k+1}$이므로

$f(a)+g(a)=f(2)+g(2)=2+1+2^{2+1}=11$ 답 11

08 (ii) $n=k\ (k\geq 2)$일 때 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면

$(1+h)^k > 1+kh$

위의 식의 양변에 $\boxed{1+h}$를 곱하면

$$(1+h)^{k+1} > (1+kh)(1+h) = 1+\boxed{(k+1)h}+kh^2 \quad \cdots\cdots ㉠$$

이때 $kh^2>0$이므로

$1+(k+1)h+kh^2 > 1+(k+1)h$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡에서

$(1+h)^{k+1} > 1+(k+1)h$

따라서 $n=k+1$일 때도 주어진 부등식이 성립한다.

∴ (가) $1+h$ (나) $(k+1)h$

답 (가) $1+h$ (나) $(k+1)h$

중단원 마무리

145쪽

01 전략 수열 $\{a_n\}$이 등차수열임을 이용하여 일반항 a_n을 구한다.

풀이 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 -8, 공차가 4인 등차수열이므로

$a_n=-8+(n-1)\cdot 4=4n-12$

$\therefore a_{19}=4\cdot 19-12=64$

답 64

> 수열 $\{a_n\}$에서 $a_{n+1}-a_n=d$ (일정) 또는 $a_{n+1}=a_n+d$이면 수열 $\{a_n\}$은 공차가 d인 등차수열이다.

02 전략 수열 $\{a_n\}$이 등차수열임을 이용하여 일반항 a_n을 구한 후 처음으로 음수가 되는 항을 찾는다.

풀이 $a_{n+2}-2a_{n+1}+a_n=0$, 즉 $2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$에서 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이고

$a_1=35$, $a_2-a_1=32-35=-3$

이므로 첫째항이 35, 공차가 -3이다.

$\therefore a_n=35+(n-1)\cdot(-3)=-3n+38$

$-3n+38<0$에서 $3n>38$

$\therefore n>\frac{38}{3}=12.66\cdots$

즉 수열 $\{a_n\}$은 제13항부터 음수이므로 첫째항부터 제12항까지의 합이 최대이다.

따라서 구하는 자연수 n의 값은 12이다.

답 ③

03 전략 수열 $\{a_n\}$이 등비수열임을 이용하여 일반항 a_n을 구한 후 $a_n<\frac{1}{2}$을 만족시키는 자연수 n의 최솟값을 구한다.

풀이 $a_{n+1}=\sqrt{a_na_{n+2}}$, 즉 $a_{n+1}{}^2=a_na_{n+2}$에서 수열 $\{a_n\}$은 등비수열이고

$a_1=500$, $\frac{a_2}{a_1}=\frac{250}{500}=\frac{1}{2}$

이므로 첫째항이 500, 공비가 $\frac{1}{2}$이다.

$\therefore a_n=500\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ ⋯ ❶

> 수열 $\{a_n\}$에서 $a_{n+1}\div a_n=r$ (일정) 또는 $a_{n+1}=ra_n$이면 수열 $\{a_n\}$은 공비가 r인 등비수열이다.

$500\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}<\frac{1}{2}$에서 $2^{n-1}>1000$

이때 $2^9=512$, $2^{10}=1024$이므로

$n-1\geq 10$ $\therefore n\geq 11$

따라서 처음으로 $\frac{1}{2}$보다 작아지는 항은 제11항이다. ⋯ ❷

답 제11항

단계	채점 기준	비율
❶	일반항 a_n을 구할 수 있다.	40 %
❷	처음으로 $\frac{1}{2}$보다 작아지는 항은 제몇 항인지 구할 수 있다.	60 %

04 전략 이차방정식이 중근을 가지면 (판별식)=0임을 이용하여 a_n과 a_{n+1} 사이의 관계식을 구한다.

풀이 이차방정식 $a_nx^2-a_{n+1}x+a_n=0$이 중근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(-a_{n+1})^2-4a_n{}^2=0$

$a_{n+1}{}^2-4a_n{}^2=0$, $(a_{n+1}+2a_n)(a_{n+1}-2a_n)=0$

$\therefore a_{n+1}=-2a_n$ 또는 $a_{n+1}=2a_n$

> 수열 $\{a_n\}$은 공비가 -2 또는 2인 등비수열이다.

이때 수열 $\{a_n\}$의 모든 항이 양수이므로

$a_{n+1}=2a_n$

즉 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 2, 공비가 2인 등비수열이므로

$\sum_{k=1}^{8}a_k=\frac{2(2^8-1)}{2-1}=510$

답 510

쌤 한마디

이차방정식의 근의 판별

계수가 실수인 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 $D=b^2-4ac$라 하면

① $D>0 \Longleftrightarrow$ 서로 다른 두 실근을 갖는다.
② $D=0 \Longleftrightarrow$ 중근(서로 같은 두 실근)을 갖는다.
③ $D<0 \Longleftrightarrow$ 서로 다른 두 허근을 갖는다.

05 전략 주어진 등식의 n에 3, 4를 차례대로 대입하여 a_5를 k에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 $a_{n+1}=a_n+3^n+k$의 n에 3, 4를 차례대로 대입하면

$a_4=a_3+3^3+k=-30+27+k=k-3$

$a_5=a_4+3^4+k=(k-3)+81+k=2k+78$

따라서 $2k+78=70$이므로

$2k=-8$ $\therefore k=-4$

답 ②

06 전략 주어진 등식의 n에 1, 2, 3, 4, 5를 차례대로 대입하여 수열의 각 항을 구한다.

풀이 $a_{n+1}=a_n+6n-5$의 n에 1, 2, 3, 4, 5를 차례대로 대입하면

$a_2=a_1+6\cdot 1-5=-5+1=-4$

$a_3=a_2+6\cdot 2-5=-4+7=3$

$a_4=a_3+6\cdot 3-5=3+13=16$

$a_5=a_4+6\cdot4-5=16+19=35$

$a_6=a_5+6\cdot5-5=35+25=60$

$\therefore \sum_{k=1}^{6}a_k=a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6$

$=-5+(-4)+3+16+35+60$

$=105$ 답 ③

07 전략 주어진 등식의 n에 7, 8, 9를 차례대로 대입하여 a_{10}을 a_7에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 $a_{n+1}-a_n=2^{n-5}+n$에서

$a_{n+1}=a_n+2^{n-5}+n$

위의 식의 n에 7, 8, 9를 차례대로 대입하면

$a_8=a_7+2^2+7$

$a_9=a_8+2^3+8=a_7+(2^2+2^3)+(7+8)$

$a_{10}=a_9+2^4+9=a_7+(2^2+2^3+2^4)+(7+8+9)$

$\therefore a_{10}-a_7=(2^2+2^3+2^4)+(7+8+9)$

$=28+24$

$=52$ 답 ④

08 전략 주어진 등식의 n에 1, 2, 3, …을 차례대로 대입하여 규칙을 찾는다.

풀이 $a_{n+1}=\frac{n}{n+1}a_n$의 n에 1, 2, 3, …을 차례대로 대입하면

$a_2=\frac{1}{2}a_1$

$a_3=\frac{2}{3}a_2=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}a_1$

$a_4=\frac{3}{4}a_3=\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}a_1$

$a_5=\frac{4}{5}a_4=\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}a_1$

⋮

$\therefore a_n=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n-1}\cdot\cdots\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}a_1=\frac{1}{n}a_1=\frac{1}{n}$

$a_k=\frac{1}{100}$에서 $\frac{1}{k}=\frac{1}{100}$

$\therefore k=100$ 답 100

09 전략 주어진 등식에 $n+1$ 대신 n을 대입하여 얻은 식과 주어진 등식을 이용하여 a_n과 a_{n+1} 사이의 관계식을 구한다.

풀이 $a_{n+1}=\sum_{k=1}^{n}ka_k$의 n에 1을 대입하면

$a_2=1\cdot a_1=2$

$n\ge2$일 때, $a_n=\sum_{k=1}^{n-1}ka_k$이므로

$a_{n+1}-a_n=\sum_{k=1}^{n}ka_k-\sum_{k=1}^{n-1}ka_k=na_n$

$\therefore a_{n+1}=(n+1)a_n\ (n\ge2)$

위의 식의 n에 50을 대입하면

$a_{51}=51a_{50}$ $\therefore \frac{a_{51}}{a_{50}}=51$

$\therefore a_2+\frac{a_{51}}{a_{50}}=53$ 답 ④

Q BOX

첫째항이 1, 공비가 4인 등비수열의 첫째항부터 제10항까지의 합

a_1의 값과 같다.

10 전략 주어진 등식의 n에 1, 2, 3, …, 9를 차례대로 대입하여 a_{10}의 값을 구한다.

풀이 $a_{n+1}=4a_n+1$의 n에 1, 2, 3, …, 9를 차례대로 대입하면

$a_2=4a_1+1=4+1$

$a_3=4a_2+1=4(4+1)+1=4^2+4+1$

$a_4=4a_3+1=4(4^2+4+1)+1=4^3+4^2+4+1$

⋮

$a_{10}=4a_9+1=\underline{4^9+4^8+4^7+\cdots+4+1}$

$=\frac{1\cdot(4^{10}-1)}{4-1}=\frac{1}{3}(4^{10}-1)$ 답 ④

11 전략 주어진 식의 n에 1, 2, 3, …, 6을 차례대로 대입하여 a_7의 값을 구한다.

풀이 주어진 식의 n에 1, 2, 3, …, 6을 차례대로 대입하면

$n=1$은 홀수이므로

$a_2=2a_1=2\cdot(-3)=-6$

$n=2$는 짝수이므로

$a_3=a_2+1=-6+1=-5$

$n=3$은 홀수이므로

$a_4=2a_3=2\cdot(-5)=-10$

$n=4$는 짝수이므로

$a_5=a_4+1=-10+1=-9$

$n=5$는 홀수이므로

$a_6=2a_5=2\cdot(-9)=-18$

$n=6$은 짝수이므로

$a_7=a_6+1=-18+1=-17$

답 -17

12 전략 a_2, a_3, a_4, …의 값을 차례대로 구하여 같은 수가 반복되는 규칙을 찾는다.

풀이 $a_1=1$이고

$a_2=(7\cdot1$을 5로 나누었을 때의 나머지$)=2$

$a_3=(7\cdot2$를 5로 나누었을 때의 나머지$)=4$

$a_4=(7\cdot4$를 5로 나누었을 때의 나머지$)=3$

$a_5=(7\cdot3$을 5로 나누었을 때의 나머지$)=1$

$a_6=(7\cdot1$을 5로 나누었을 때의 나머지$)=2$

⋮ ···· ❶

따라서 수열 $\{a_n\}$은 1, 2, 4, 3이 이 순서대로 반복된다. ···· ❷

이때 $2022=4\cdot505+2$, $2023=4\cdot505+3$, $2024=4\cdot506$이므로

$a_{2022}+a_{2023}+a_{2024}=a_2+a_3+a_4$

$=2+4+3=9$ ···· ❸

답 9

단계	채점 기준	비율
❶	a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, …의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷	수열 $\{a_n\}$의 규칙을 찾을 수 있다.	40 %
❸	$a_{2022}+a_{2023}+a_{2024}$의 값을 구할 수 있다.	20 %

13 전략 주어진 등식의 n에 1, 2, 3, …을 차례대로 대입하여 반복되는 수를 구하고, 그중 $|a_k|=3$을 만족시키는 수를 찾는다.

풀이 $a_{n+2}=a_{n+1}-a_n$의 n에 1, 2, 3, …을 차례대로 대입하면

$a_3=a_2-a_1=3-9=-6$

$a_4=a_3-a_2=-6-3=-9$

$a_5=a_4-a_3=-9-(-6)=-3$

$a_6=a_5-a_4=-3-(-9)=6$

$a_7=a_6-a_5=6-(-3)=9$

$a_8=a_7-a_6=9-6=3$

⋮

따라서 수열 $\{a_n\}$은 9, 3, −6, −9, −3, 6이 이 순서대로 반복된다.

이때 반복되는 6개의 수 중에서 $|a_k|=3$을 만족시키는 수는 3, −3의 2개이고, $100=6\cdot16+4$이므로 구하는 자연수 k의 개수는

$2\cdot16+1=33$ 답 33

반복되는 수의 앞에서부터 4 번째까지의 수 중에서 $|a_k|=3$을 만족시키는 수는 3의 1개이다.

14 전략 $a_{n+1}=S_{n+1}-S_n$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$임을 이용하여 주어진 등식을 변형한다.

풀이 $S_n=2a_n+9n$에서

$S_{n+1}=2a_{n+1}+9n+9$

한편 $a_{n+1}=S_{n+1}-S_n$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$이므로

$a_{n+1}=2a_{n+1}+9n+9-(2a_n+9n)$

$\therefore a_{n+1}=2a_n-9$

이때 $S_1=2a_1+9$에서

$a_1=2a_1+9$ $\therefore a_1=-9$

$a_{n+1}=2a_n-9$의 n에 1, 2, 3을 차례대로 대입하면

$a_2=2a_1-9=2\cdot(-9)-9=-27$

$a_3=2a_2-9=2\cdot(-27)-9=-63$

$a_4=2a_3-9=2\cdot(-63)-9=-135$ 답 ⑤

15 전략 a_n을 이용하여 a_{n+1}을 나타낼 수 있도록 규칙을 찾는다.

풀이 (i) n명의 학생을 두 조로 나누는 방법의 수는 a_n이고 각각의 방법에서 추가된 1명을 두 조 중 어느 한 조에 넣는 방법의 수는

$\boxed{2a_n}$

(ii) n명과 추가된 1명으로 두 조를 나누는 방법의 수는

$\boxed{1}$

(i), (ii)에서 구하는 관계식은

$a_{n+1}=2a_n+1$ $(n=2, 3, 4, \cdots)$

$\therefore$ (가) $2a_n$ (나) 1 답 (가) $2a_n$ (나) 1

16 전략 n개의 직선에 1개의 직선을 추가했을 때 증가하는 교점의 개수를 생각하여 a_n과 a_{n+1} 사이의 관계식을 구한다.

풀이 (1) n개의 직선에 1개의 직선을 추가하면 이 직선은 기존의 n개의 직선과 각각 한 번씩 만나므로 n개의 새로운 교점이 생긴다.

즉 $(n+1)$ 번째 직선을 추가하면 교점이 n개 증가하므로

$a_{n+1}=a_n+n$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$

(2) 1개의 직선을 그을 때 생기는 교점은 없으므로

$a_1=0$

$a_{n+1}=a_n+n$의 n에 1, 2, 3, …, 19를 차례대로 대입하면

$a_2=a_1+1=1$

$a_3=a_2+2=1+2$

$a_4=a_3+3=1+2+3$

⋮

$a_{20}=a_{19}+19=1+2+3+\cdots+18+19$

$=\sum_{k=1}^{19}k=\frac{19\cdot20}{2}=190$

답 (1) $a_{n+1}=a_n+n$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$ (2) 190

17 전략 $n=m$일 때의 등식과 $\sum$의 정의를 이용하여 (가), (나)에 알맞은 식을 구한다.

풀이 (ii) $n=m$일 때, $(*)$이 성립한다고 가정하면

$\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k+1}k^2=(-1)^{m+1}\cdot\frac{m(m+1)}{2}$

이므로

$\sum_{k=1}^{m+1}(-1)^{k+1}k^2$

$=\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k+1}k^2+\boxed{(-1)^{m+2}(m+1)^2}$

$=\boxed{(-1)^{m+1}\cdot\frac{m(m+1)}{2}}+(-1)^{m+2}(m+1)^2$

$=(-1)^{m+1}\left\{\frac{m(m+1)}{2}-(m+1)^2\right\}$

$=(-1)^{m+1}\left\{-\frac{(m+1)(m+2)}{2}\right\}$

$=(-1)^{m+2}\cdot\frac{(m+1)(m+2)}{2}$

$k=m+1$일 때 $(-1)^{k+1}k^2$의 값

$\frac{m(m+1)}{2}-(m+1)^2$
$=\frac{(m+1)(m-2m-2)}{2}$
$=\frac{(m+1)(-m-2)}{2}$
$=-\frac{(m+1)(m+2)}{2}$

따라서 $f(m)=(-1)^{m+2}(m+1)^2$,

$g(m)=(-1)^{m+1}\cdot\frac{m(m+1)}{2}$이므로

$f(5)=(-1)^7\cdot6^2=-36$,

$g(2)=(-1)^3\cdot\frac{2\cdot3}{2}=-3$

$\therefore \frac{f(5)}{g(2)}=12$ 답 ③

Work Book

01 지수

01 거듭제곱과 거듭제곱근

W 2쪽

01 (2) $a^5b^7 \div (ab)^5 = a^5b^7 \div a^5b^5 = b^2$

(3) $(4a^3b)^2 \div 8a^4b^3 = 16a^6b^2 \div 8a^4b^3 = \dfrac{2a^2}{b}$

(4) $\left(\dfrac{a^2}{b^3}\right)^4 \times 3ab^9 \div (-3a^3b)^2 = \dfrac{a^8}{b^{12}} \times 3ab^9 \times \dfrac{1}{9a^6b^2}$

$= \dfrac{a^3}{3b^5}$

답 (1) a^4b^3 (2) b^2 (3) $\dfrac{2a^2}{b}$ (4) $\dfrac{a^3}{3b^5}$

02 (1) 64의 세제곱근을 x라 하면 $x^3=64$이므로

$x^3-64=0, \quad (x-4)(x^2+4x+16)=0$

$\therefore x=4$ 또는 $x=-2\pm2\sqrt{3}i$

따라서 64의 세제곱근 중 실수인 것은 4이다.

(2) -36의 네제곱근을 x라 하면

$x^4=-36$

이때 실수 x에 대하여 $x^4 \geq 0$이므로 $x^4=-36$의 실근은 없다.

따라서 -36의 네제곱근 중 실수인 것은 없다.

> n이 짝수일 때, 음수의 n제곱근 중 실수인 것은 없다.

(3) -125의 세제곱근을 x라 하면 $x^3=-125$이므로

$x^3+125=0, \quad (x+5)(x^2-5x+25)=0$

$\therefore x=-5$ 또는 $x=\dfrac{5\pm5\sqrt{3}i}{2}$

따라서 -125의 세제곱근 중 실수인 것은 -5이다.

(4) 256의 네제곱근을 x라 하면 $x^4=256$이므로

$x^4-256=0, \quad (x^2+16)(x^2-16)=0$

$(x+4i)(x-4i)(x+4)(x-4)=0$

$\therefore x=\pm4i$ 또는 $x=\pm4$

따라서 256의 네제곱근 중 실수인 것은 -4, 4이다.

답 (1) 4 (2) 없다. (3) -5 (4) -4, 4

03 (1) $\sqrt[3]{7}\sqrt[3]{49}=\sqrt[3]{7\times49}=\sqrt[3]{343}=\sqrt[3]{7^3}=7$

(2) $\dfrac{\sqrt[3]{0.01}}{\sqrt[3]{10}}=\sqrt[3]{\dfrac{1}{100}\times\dfrac{1}{10}}=\sqrt[3]{\dfrac{1}{1000}}$

$=\sqrt[3]{\left(\dfrac{1}{10}\right)^3}=\dfrac{1}{10}$

(3) $\sqrt[4]{18}\times\sqrt[4]{27}\div\sqrt[4]{6}=\sqrt[4]{\dfrac{18\times27}{6}}=\sqrt[4]{81}=\sqrt[4]{3^4}=3$

(4) $(\sqrt[4]{25})^2+\sqrt[3]{\sqrt{729}}=\sqrt[4]{25^2}+\sqrt[6]{729}$

$=\sqrt[4]{(5^2)^2}+\sqrt[6]{3^6}$

$=\sqrt[4]{5^4}+\sqrt[6]{3^6}$

$=5+3=8$

답 (1) 7 (2) $\dfrac{1}{10}$ (3) 3 (4) 8

04 ③ $\left(\dfrac{-2a}{b^2}\right)^4=\dfrac{16a^4}{b^8}$

④ $a^7\div(a^4)^2=a^7\div a^8=\dfrac{1}{a}$

⑤ $(6a^2)^2\div12a^4=36a^4\div12a^4=3$

답 ③

05 $(a^2b)^3\times\dfrac{a}{2b}\div2a^4b=a^6b^3\times\dfrac{a}{2b}\times\dfrac{1}{2a^4b}$

$=\dfrac{a^3b}{4}$

답 ②

06 81의 네제곱근을 x라 하면 $x^4=81$이므로

$x^4-81=0, \quad (x^2+9)(x^2-9)=0$

$(x+3i)(x-3i)(x+3)(x-3)=0$

$\therefore x=\pm3i$ 또는 $x=\pm3$

따라서 81의 네제곱근은 $-3i$, $3i$, -3, 3이다.

답 ②

07 625의 네제곱근을 x라 하면 $x^4=625$에서

$x^4-625=0, \quad (x^2+25)(x^2-25)=0$

$(x+5i)(x-5i)(x+5)(x-5)=0$

$\therefore x=\pm5i$ 또는 $x=\pm5$

따라서 625의 네제곱근 중 음수인 것은 -5이므로

$a=-5$

-216의 세제곱근을 y라 하면 $y^3=-216$이므로

$y^3+216=0, \quad (y+6)(y^2-6y+36)=0$

$\therefore y=-6$ 또는 $y=3\pm3\sqrt{3}i$

따라서 -216의 세제곱근 중 실수인 것은 -6이므로

$b=-6$

> n이 홀수일 때, $\sqrt[n]{a}$의 부호는 a의 부호와 일치한다.

$\therefore ab=30$

답 30

08 ② 0의 n제곱근은 0이다.

③ -1의 세제곱근을 x라 하면 $x^3=-1$이므로

$x^3+1=0, \quad (x+1)(x^2-x+1)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=\dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$

따라서 -1의 세제곱근 중 실수인 것은 -1이다.

⑤ n이 홀수일 때, 7의 n제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[n]{7}$의 1개이다.

답 ②

09 2의 제곱근 중 실수인 것은 $\pm\sqrt{2}$의 2개이므로

$f_2(2)=2$

$\sqrt{2}$의 세제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[3]{\sqrt{2}}$의 1개이므로

$f_3(\sqrt{2})=1$

-2의 네제곱근 중 실수인 것은 존재하지 않으므로

$f_4(-2)=0$

$-\sqrt{2}$의 다섯제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[5]{-\sqrt{2}}$의 1개이므로 $f_5(-\sqrt{2})=1$

$\therefore f_2(2)+f_3(\sqrt{2})+f_4(-2)+f_5(-\sqrt{2})$

$=2+1+0+1=4$

답 4

참고 (i) n이 홀수일 때, $f_n(x)=1$

(ii) n이 짝수일 때, $f_n(x)=\begin{cases} 2 & (x>0) \\ 1 & (x=0) \\ 0 & (x<0) \end{cases}$

10 $\sqrt[3]{75}\times\sqrt[6]{\frac{25}{36}}\div\sqrt[3]{4}=\sqrt[3]{75}\times\sqrt[6]{\left(\frac{5}{6}\right)^2}\div\sqrt[3]{4}$

$=\sqrt[3]{75}\times\sqrt[3]{\frac{5}{6}}\div\sqrt[3]{4}$

$=\sqrt[3]{75\times\frac{5}{6}\times\frac{1}{4}}$

$=\sqrt[3]{\frac{125}{8}}=\sqrt[3]{\left(\frac{5}{2}\right)^3}$

$=\frac{5}{2}$ 답 ⑤

11 $\sqrt{\frac{4^9+8^9}{4^6+8^7}}=\sqrt{\frac{(2^2)^9+(2^3)^9}{(2^2)^6+(2^3)^7}}=\sqrt{\frac{2^{18}+2^{27}}{2^{12}+2^{21}}}$

$=\sqrt{\frac{2^{18}(1+2^9)}{2^{12}(1+2^9)}}=\sqrt{\frac{2^{18}}{2^{12}}}=\sqrt{2^6}$

$=2^3=8$ 답 8

12 $\sqrt[3]{\frac{\sqrt{5}}{\sqrt[6]{5}}}=\frac{\sqrt[3]{\sqrt{5}}}{\sqrt[3]{\sqrt[6]{5}}}=\frac{\sqrt[6]{5}}{\sqrt[18]{5}}=\frac{\sqrt[18]{5^3}}{\sqrt[18]{5}}=\sqrt[18]{\frac{5^3}{5}}=\sqrt[18]{5^2}$

이므로

$k=2$ 답 2

다른 풀이 $\sqrt[3]{\frac{\sqrt{5}}{\sqrt[6]{5}}}=\sqrt[18]{5^k}$의 양변을 세제곱하면

$\left(\sqrt[3]{\frac{\sqrt{5}}{\sqrt[6]{5}}}\right)^3=(\sqrt[18]{5^k})^3$, $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt[6]{5}}=\sqrt[6]{5^k}$

$\sqrt{5}=\sqrt[6]{5^k}\times\sqrt[6]{5}$, $\sqrt{5}=\sqrt[6]{5^k\times5}$

$\sqrt[6]{5^3}=\sqrt[6]{5^{k+1}}$, $5^3=5^{k+1}$

$3=k+1$ $\therefore k=2$

13 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\sqrt[3]{3}+b=\sqrt[3]{81}$, $\sqrt[3]{3}b=a$

$\sqrt[3]{3}+b=\sqrt[3]{81}$에서

$b=\sqrt[3]{81}-\sqrt[3]{3}=\sqrt[3]{3^3\times3}-\sqrt[3]{3}$

$=3\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{3}=2\sqrt[3]{3}$

$b=2\sqrt[3]{3}$을 $\sqrt[3]{3}b=a$에 대입하면

$a=\sqrt[3]{3}\times2\sqrt[3]{3}=2\sqrt[3]{9}$

$\therefore ab=2\sqrt[3]{9}\times2\sqrt[3]{3}=4\sqrt[3]{27}$

$=4\sqrt[3]{3^3}=4\times3=12$ 답 ⑤

14 $\sqrt[3]{2ab^2}\times\sqrt[12]{a^5b^9}\div\sqrt[6]{4a^3b^4}$

$=\sqrt[12]{2^4a^4b^8}\times\sqrt[12]{a^5b^9}\div\sqrt[12]{4^2a^6b^8}$

$=\sqrt[12]{\frac{16a^4b^8\times a^5b^9}{16a^6b^8}}$

$=\sqrt[12]{a^3b^9}=\sqrt[4]{ab^3}$ 답 ②

Q BOX

$A>0$, $B>0$이고 k는 2 이상의 자연수일 때, $A<B$이면 $\sqrt[k]{A}<\sqrt[k]{B}$

두 자연수 x, y에 대하여 $x\le n\le y$를 만족시키는 자연수 n의 개수 ➡ $y-x+1$

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라 하면 $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$, $\alpha\beta=\frac{c}{a}$

15 $\frac{\sqrt[4]{a\sqrt[3]{a\sqrt[5]{a}}}}{\sqrt[6]{a\sqrt[5]{a\sqrt{a}}}}=\frac{\sqrt[4]{a}\times\sqrt[12]{a}\times\sqrt[60]{a}}{\sqrt[6]{a}\times\sqrt[30]{a}\times\sqrt[60]{a}}$

$=\frac{\sqrt[60]{a^{15}\times a^5\times a}}{\sqrt[60]{a^{10}\times a^2\times a}}$

$=\frac{\sqrt[60]{a^{21}}}{\sqrt[60]{a^{13}}}=\sqrt[60]{\frac{a^{21}}{a^{13}}}$

$=\sqrt[60]{a^8}=\sqrt[15]{a^2}$

따라서 $p=15$, $q=2$이므로

$p+q=17$ 답 17

16 6, 8, 12의 최소공배수가 24이므로

$A=\sqrt[6]{2}=\sqrt[24]{2^4}=\sqrt[24]{16}$

$B=\sqrt[8]{3}=\sqrt[24]{3^3}=\sqrt[24]{27}$

$C=\sqrt[12]{5}=\sqrt[24]{5^2}=\sqrt[24]{25}$

$\sqrt[24]{16}<\sqrt[24]{25}<\sqrt[24]{27}$이므로

$A<C<B$ 답 $A<C<B$

17 $\sqrt{2\sqrt[3]{7}}=\sqrt{\sqrt[3]{2^3\times7}}=\sqrt[6]{56}$,

$\sqrt{3\sqrt[3]{2}}=\sqrt{\sqrt[3]{3^3\times2}}=\sqrt[6]{54}$,

$\sqrt[3]{5\sqrt{2}}=\sqrt[3]{\sqrt{5^2\times2}}=\sqrt[6]{50}$에서

$\sqrt[6]{50}<\sqrt[6]{54}<\sqrt[6]{56}$

따라서 $a=\sqrt[6]{50}$, $b=\sqrt[6]{56}$이므로 부등식

$\sqrt[6]{50}\le\sqrt[6]{n}\le\sqrt[6]{56}$을 만족시키는 자연수 n은

50, 51, 52, $\cdots$, 56

의 7개이다. 답 ④

18 (i) $A-B=\sqrt[3]{3}+2\sqrt{2}-(2\sqrt[3]{3}+\sqrt{2})$

$=-\sqrt[3]{3}+\sqrt{2}=-\sqrt[6]{9}+\sqrt[6]{8}<0$

$\therefore A<B$

(ii) $A-C=\sqrt[3]{3}+2\sqrt{2}-(3\sqrt[3]{3}-2\sqrt{2})$

$=-2\sqrt[3]{3}+4\sqrt{2}=2(-\sqrt[3]{3}+\sqrt{8})$

$=2(-\sqrt[6]{9}+\sqrt[6]{512})>0$

$\therefore A>C$

(i), (ii)에서 $C<A<B$

따라서 가장 작은 수는 $3\sqrt[3]{3}-2\sqrt{2}$, 가장 큰 수는 $2\sqrt[3]{3}+\sqrt{2}$이므로

$(3\sqrt[3]{3}-2\sqrt{2})+(2\sqrt[3]{3}+\sqrt{2})=5\sqrt[3]{3}-\sqrt{2}$

즉 $a=5$, $b=-1$이므로

$a-b=6$ 답 6

쌤 한마디

두 수 또는 두 식의 대소 관계의 판정

① 차의 부호를 조사한다.
- $A-B>0 \Longleftrightarrow A>B$

② 제곱의 차의 부호를 조사한다.
- $A>0$, $B>0$일 때, $A^2-B^2>0 \Longleftrightarrow A^2>B^2 \Longleftrightarrow A>B$

③ 비를 조사한다.
- $A>0$, $B>0$일 때, $\frac{A}{B}>1 \Longleftrightarrow A>B$

02 지수의 확장

W 5쪽

01 (1) $2^5\times2^{-2}\div2^0=2^3\div1=8$

(2) $3^{-8}\div(3^5)^{-2}=3^{-8}\div3^{-10}=3^2=9$

(3) $(a^{-3}b)^{-1}\times(-ab)^{-2}=a^3b^{-1}\times a^{-2}b^{-2}$

$=ab^{-3}=\dfrac{a}{b^3}$

$(-1)^{-2}=\dfrac{1}{(-1)^2}=1$ 이므로 $(-ab)^{-2}=a^{-2}b^{-2}$

(4) $(a^{-2}b^3)^5\div(ab^5)^2=a^{-10}b^{15}\div a^2b^{10}$

$=a^{-12}b^5=\dfrac{b^5}{a^{12}}$

답 (1) 8 (2) 9 (3) $\dfrac{a}{b^3}$ (4) $\dfrac{b^5}{a^{12}}$

02 (1) $3^{\frac{1}{2}}\div9^{\frac{3}{4}}=3^{\frac{1}{2}}\div(3^2)^{\frac{3}{4}}=3^{\frac{1}{2}}\div3^{\frac{3}{2}}=3^{-1}=\dfrac{1}{3}$

(2) $2^{3+\sqrt{5}}\times2^{3-\sqrt{5}}=2^{3+\sqrt{5}+3-\sqrt{5}}=2^6=64$

(3) $5^{-\frac{5}{6}}\times5^{\frac{7}{3}}\div5^{-\frac{3}{2}}=5^{-\frac{5}{6}+\frac{7}{3}-\left(-\frac{3}{2}\right)}=5^3=125$

(4) $7^{\sqrt{12}}\times7^{\sqrt{3}}\div7^{\sqrt{27}}=7^{2\sqrt{3}+\sqrt{3}-3\sqrt{3}}=7^0=1$

답 (1) $\dfrac{1}{3}$ (2) 64 (3) 125 (4) 1

03 (1) $(a^3b^{-6})^{\frac{1}{2}}\times(a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{2}{5}})^{10}=a^{\frac{3}{2}}b^{-3}\times a^{\frac{5}{2}}b^4=a^4b$

(2) $(a^{\sqrt{20}}b^{-\sqrt{5}})^{\frac{1}{\sqrt{5}}}\div(a^{-\sqrt{12}}b^{\sqrt{3}})^{\sqrt{3}}=a^2b^{-1}\div a^{-6}b^3$

$=a^8b^{-4}=\dfrac{a^8}{b^4}$

답 (1) a^4b (2) $\dfrac{a^8}{b^4}$

04 ① $-3^{-1}=-\dfrac{1}{3}$ ② $3^{-2}=\dfrac{1}{3^2}=\dfrac{1}{9}$

③ $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-2}=2^2=4$ ④ $\left(\dfrac{1}{4}\right)^0=1$

⑤ $\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{-3}=(-2)^3=-8$

따라서 두 번째로 큰 것은 ④이다. 답 ④

$-8<-\dfrac{1}{3}<\dfrac{1}{9}<1<4$

05 $\dfrac{5^4+5^8}{5^{-4}+5^{-8}}=\dfrac{5^4(1+5^4)}{5^{-8}(5^4+1)}=\dfrac{5^4}{5^{-8}}=5^{12}$

$\therefore k=12$ 답 12

분자, 분모를 각각 지수가 작은 수로 묶는다.

06 ③ $\{(-2)^4\}^{\frac{1}{4}}$과 같이 밑이 음수이고 지수가 정수가 아닌 유리수인 경우에는 지수법칙을 이용할 수 없다.

지수가 정수가 아닌 유리수일 때, 밑이 양수이어야 지수법칙이 성립한다.

답 ③

07 $3^{\frac{1}{4}}\times(5^{\frac{2}{3}}\times3^{-\frac{5}{2}})^{-\frac{1}{2}}\times5^{\frac{4}{3}}=3^{\frac{1}{4}}\times5^{-\frac{1}{3}}\times3^{\frac{5}{4}}\times5^{\frac{4}{3}}$

$=3^{\frac{1}{4}+\frac{5}{4}}\times5^{-\frac{1}{3}+\frac{4}{3}}$

$=3^{\frac{3}{2}}\times5$

$=15\sqrt{3}$ 답 $15\sqrt{3}$

$3^{\frac{3}{2}}=\sqrt{3^3}=\sqrt{3^2\times3}=3\sqrt{3}$

08 $\sqrt[4]{\sqrt{2}}\times\sqrt{2\sqrt{2\sqrt[3]{2}}}=\sqrt[8]{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt[4]{2}\times\sqrt[12]{2}$

$=2^{\frac{1}{8}}\times2^{\frac{1}{2}}\times2^{\frac{1}{4}}\times2^{\frac{1}{12}}$

$=2^{\frac{1}{8}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{12}}=2^{\frac{23}{24}}$

따라서 $p=\dfrac{23}{24}$이므로 $24p=23$ 답 23

09 $\sqrt{a\sqrt[3]{a}}\div\sqrt[3]{a^4\sqrt{a^k}}\times\sqrt[6]{a}$

$=\sqrt{a}\times\sqrt[6]{a}\div(\sqrt[3]{a^4}\times\sqrt[6]{a^k})\times\sqrt[6]{a}$

$=a^{\frac{1}{2}}\times a^{\frac{1}{6}}\div(a^{\frac{4}{3}}\times a^{\frac{k}{6}})\times a^{\frac{1}{6}}$

$=a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{6}-\frac{4}{3}-\frac{k}{6}+\frac{1}{6}}=a^{-\frac{k+3}{6}}$

따라서 $a^{-\frac{k+3}{6}}=1$이므로

$-\dfrac{k+3}{6}=0$ $\therefore k=-3$ 답 ②

10 $3^{\sqrt{5}+1}\div(3^{4\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}\times3^{5-\sqrt{5}}=3^{\sqrt{5}+1}\div3^8\times3^{5-\sqrt{5}}$

$=3^{\sqrt{5}+1-8+5-\sqrt{5}}$

$=3^{-2}=\dfrac{1}{9}$ 답 ①

11 ① $2^{\frac{3}{5}}\times2^{\frac{1}{2}}=2^{\frac{3}{5}+\frac{1}{2}}=2^{\frac{11}{10}}=\sqrt[10]{2^{11}}$

② $(5^{-\sqrt{3}})^{\frac{1}{\sqrt{3}}}=5^{-1}=\dfrac{1}{5}$

③ $\{(-2)^2\}^{\frac{3}{2}}=4^{\frac{3}{2}}=(2^2)^{\frac{3}{2}}=2^3=8$

④ $7^{\sqrt{8}+3}\div7^{\sqrt{2}-3}=7^{2\sqrt{2}+3}\div7^{\sqrt{2}-3}=7^{2\sqrt{2}+3-(\sqrt{2}-3)}=7^{\sqrt{2}+6}$

⑤ $(\sqrt{3})^{10\sqrt{3}}=(3^{\frac{1}{2}})^{10\sqrt{3}}=3^{5\sqrt{3}}$,

$(9\sqrt{3})^{2\sqrt{3}}=(3^2\times3^{\frac{1}{2}})^{2\sqrt{3}}=(3^{\frac{5}{2}})^{2\sqrt{3}}=3^{5\sqrt{3}}$

$\therefore (\sqrt{3})^{10\sqrt{3}}=(9\sqrt{3})^{2\sqrt{3}}$

답 ④

12 $a=4^3=(2^2)^3=2^6$이므로 $2=a^{\frac{1}{6}}$

$2^6=a$에서 $(2^6)^{\frac{1}{6}}=a^{\frac{1}{6}}$ $\therefore 2=a^{\frac{1}{6}}$

$\therefore 8^5=(2^3)^5=2^{15}=(a^{\frac{1}{6}})^{15}=a^{\frac{5}{2}}$ 답 ④

13 $a=\sqrt[3]{2}$에서 $a^3=2$

$b=\sqrt{3}$에서 $b^2=3$

$\therefore 12^{\frac{1}{6}}=(2^2\times3)^{\frac{1}{6}}=2^{\frac{1}{3}}\times3^{\frac{1}{6}}$

$=(a^3)^{\frac{1}{3}}\times(b^2)^{\frac{1}{6}}=ab^{\frac{1}{3}}$ 답 ⑤

14 $(a^{\frac{1}{4}}+a^{-\frac{1}{4}})^2-(a^{\frac{1}{4}}+a^{-\frac{1}{4}})(a^{\frac{1}{4}}-a^{-\frac{1}{4}})$

$=(a^{\frac{1}{4}})^2+2a^{\frac{1}{4}}a^{-\frac{1}{4}}+(a^{-\frac{1}{4}})^2-\{(a^{\frac{1}{4}})^2-(a^{-\frac{1}{4}})^2\}$

$=a^{\frac{1}{2}}+2+a^{-\frac{1}{2}}-(a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}})$

$=2a^{-\frac{1}{2}}+2=2\times9^{-\frac{1}{2}}+2$

$=\dfrac{2}{3}+2=\dfrac{8}{3}$ 답 ②

다른 풀이 $(a^{\frac{1}{4}}+a^{-\frac{1}{4}})^2-(a^{\frac{1}{4}}+a^{-\frac{1}{4}})(a^{\frac{1}{4}}-a^{-\frac{1}{4}})$

$=(a^{\frac{1}{4}}+a^{-\frac{1}{4}})\{a^{\frac{1}{4}}+a^{-\frac{1}{4}}-(a^{\frac{1}{4}}-a^{-\frac{1}{4}})\}$

$=(a^{\frac{1}{4}}+a^{-\frac{1}{4}})\times2a^{-\frac{1}{4}}$

$=2+2a^{-\frac{1}{2}}=2+\dfrac{2}{3}=\dfrac{8}{3}$

15 $(a^{\frac{1}{6}}-b^{\frac{1}{3}})(a^{\frac{1}{2}}+b)(a^{\frac{1}{3}}+a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}})$

$=(a^{\frac{1}{2}}+b)(a^{\frac{1}{6}}-b^{\frac{1}{3}})(a^{\frac{1}{3}}+a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}})$

$=(a^{\frac{1}{2}}+b)\{(a^{\frac{1}{6}})^3-(b^{\frac{1}{3}})^3\}$

$=(a^{\frac{1}{2}}+b)(a^{\frac{1}{2}}-b)$

$=(a^{\frac{1}{2}})^2-b^2=a-b^2$

$=2\sqrt{2}-(\sqrt[4]{2})^2=2\sqrt{2}-\sqrt{2}=\sqrt{2}$ 답 $\sqrt{2}$

16 $2^x-2^{-x}=5$의 양변을 제곱하면

$(2^x-2^{-x})^2=5^2$, $\quad 2^{2x}+2^{-2x}-2=25$

$\therefore 4^x+4^{-x}=27$ 답 ③

17 $x^{\frac{1}{3}}-x^{-\frac{1}{3}}=1+\sqrt{3}$의 양변을 세제곱하면

$(x^{\frac{1}{3}}-x^{-\frac{1}{3}})^3=(1+\sqrt{3})^3$

$x-x^{-1}-3(x^{\frac{1}{3}}-x^{-\frac{1}{3}})=10+6\sqrt{3}$

$\therefore x-\frac{1}{x}=10+6\sqrt{3}+3(1+\sqrt{3})$

$=13+9\sqrt{3}$

따라서 $p=13$, $q=9$이므로

$p-q=4$ 답 4

$(1+\sqrt{3})^3$
$=1+3\sqrt{3}+9+3\sqrt{3}$
$=10+6\sqrt{3}$

18 $x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}=4$의 양변을 제곱하면

$(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})^2=4^2$

$x+x^{-1}+2=16$ $\quad \therefore x+x^{-1}=14$

$x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}=4$의 양변을 세제곱하면

$(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})^3=4^3$

$x^{\frac{3}{2}}+x^{-\frac{3}{2}}+3(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})=64$

$\therefore x^{\frac{3}{2}}+x^{-\frac{3}{2}}=64-3\times4=52$

$\therefore \frac{x^{\frac{3}{2}}+x^{-\frac{3}{2}}+4}{x+x^{-1}}=\frac{52+4}{14}=4$ 답 4

19 $4^x=3$에서 $\quad 2^{2x}=3$

$\frac{8^x+8^{-x}}{2^x+2^{-x}}$의 분자, 분모에 2^x을 곱하면

$\frac{8^x+8^{-x}}{2^x+2^{-x}}=\frac{2^x(2^{3x}+2^{-3x})}{2^x(2^x+2^{-x})}=\frac{2^{4x}+2^{-2x}}{2^{2x}+1}$

$=\frac{(2^{2x})^2+(2^{2x})^{-1}}{2^{2x}+1}$

$=\frac{3^2+3^{-1}}{3+1}=\frac{7}{3}$ 답 $\frac{7}{3}$

20 $\frac{a^{3x}+a^{-x}}{a^x-a^{-3x}}$의 분자, 분모에 a^x을 곱하면

$\frac{a^{3x}+a^{-x}}{a^x-a^{-3x}}=\frac{a^x(a^{3x}+a^{-x})}{a^x(a^x-a^{-3x})}=\frac{a^{4x}+1}{a^{2x}-a^{-2x}}$

$=\frac{(a^{2x})^2+1}{a^{2x}-(a^{2x})^{-1}}$

$=\frac{(1+\sqrt{2})^2+1}{1+\sqrt{2}-\frac{1}{1+\sqrt{2}}}$

$=\frac{3+2\sqrt{2}+1}{1+\sqrt{2}-(\sqrt{2}-1)}=\frac{4+2\sqrt{2}}{2}$

$=2+\sqrt{2}$ 답 ④

$\frac{1}{1+\sqrt{2}}$
$=\frac{1-\sqrt{2}}{(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})}$
$=\frac{1-\sqrt{2}}{1-2}=\sqrt{2}-1$

21 $\frac{a^k-a^{-k}}{a^k+a^{-k}}$의 분자, 분모에 a^k을 곱하면

$\frac{a^k-a^{-k}}{a^k+a^{-k}}=\frac{a^k(a^k-a^{-k})}{a^k(a^k+a^{-k})}=\frac{a^{2k}-1}{a^{2k}+1}$

즉 $\frac{a^{2k}-1}{a^{2k}+1}=\frac{3}{4}$이므로

$4a^{2k}-4=3a^{2k}+3$ $\quad \therefore a^{2k}=7$

$\therefore a^{4k}=(a^{2k})^2=7^2=49$ 답 ③

22 $2^x=27$에서

$2=27^{\frac{1}{x}}=(3^3)^{\frac{1}{x}}=3^{\frac{3}{x}}$ ...... ㉠

$18^y=81$에서

$18=81^{\frac{1}{y}}=(3^4)^{\frac{1}{y}}=3^{\frac{4}{y}}$ ...... ㉡

㉠÷㉡을 하면 $\quad \frac{1}{9}=3^{\frac{3}{x}}\div3^{\frac{4}{y}}$

$3^{\frac{3}{x}-\frac{4}{y}}=3^{-2}$ $\quad \therefore \frac{3}{x}-\frac{4}{y}=-2$ 답 -2

23 $a^x=4$에서 $\quad a=4^{\frac{1}{x}}=(2^2)^{\frac{1}{x}}=2^{\frac{2}{x}}$ ...... ㉠

$b^y=4$에서 $\quad b=4^{\frac{1}{y}}=(2^2)^{\frac{1}{y}}=2^{\frac{2}{y}}$ ...... ㉡

$c^z=4$에서 $\quad c=4^{\frac{1}{z}}=(2^2)^{\frac{1}{z}}=2^{\frac{2}{z}}$ ...... ㉢

㉠×㉡×㉢을 하면

$abc=2^{\frac{2}{x}}\times2^{\frac{2}{y}}\times2^{\frac{2}{z}}$, $\quad 32=2^{\frac{2}{x}+\frac{2}{y}+\frac{2}{z}}$

$2^5=2^{\frac{2}{x}+\frac{2}{y}+\frac{2}{z}}$, $\quad \frac{2}{x}+\frac{2}{y}+\frac{2}{z}=5$

$\therefore \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{5}{2}$ 답 ⑤

24 $F=a\times2^{-\frac{t}{3}}$에서

$a=14$, $t=10$일 때, $\quad F_1=14\times2^{-\frac{10}{3}}$

$a=21$, $t=4$일 때, $\quad F_2=21\times2^{-\frac{4}{3}}$

$\therefore \frac{F_2}{F_1}=\frac{21\times2^{-\frac{4}{3}}}{14\times2^{-\frac{10}{3}}}=\frac{3}{2}\times2^2=6$ 답 6

25 음식물의 개수가 $4n$, 음식물의 부피가 $2v$일 때, 음식물을 데우는 데 걸리는 시간을 t'이라 하면

$t'=k(4n)^{\frac{1}{2}}(2v)^{\frac{3}{2}}=2\times2^{\frac{3}{2}}\times kn^{\frac{1}{2}}v^{\frac{3}{2}}$

$=2^{\frac{5}{2}}kn^{\frac{1}{2}}v^{\frac{3}{2}}=2^{\frac{5}{2}}t$

따라서 걸리는 시간은 $2^{\frac{5}{2}}$배, 즉 $4\sqrt{2}$배 증가한다. 답 ③

$2^{\frac{5}{2}}=2^2\times2^{\frac{1}{2}}=4\sqrt{2}$

26 증식하기 전 박테리아 A, B의 개체 수를 각각 a라 하자.

A는 5분마다 8배로 개체 수가 증가하므로 1시간, 즉 60분 후 A의 개체 수는

$a\times8^{12}$

$60\div5=12$

B는 3분마다 2배로 개체 수가 증가하므로 1시간, 즉 60분 후 B의 개체 수는

$a\times2^{20}$

$60\div3=20$

1시간 후 A의 개체 수는 B의 개체 수의 2^p배이므로

$a\times8^{12}=a\times2^{20}\times2^p$, $\quad (2^3)^{12}=2^{20}\times2^p$

$\frac{2^{36}}{2^{20}}=2^p$, $\quad 2^{16}=2^p$

$\therefore p=16$ 답 16

02 로그

03 로그

Ⓦ 9쪽

01 답 (1) $5=\log_2 32$ (2) $-3=\log_3 \frac{1}{27}$

(3) $\frac{1}{2}=\log_{36}6$ (4) $2=\log_{\frac{3}{5}} \frac{9}{25}$

$a^x=N \Longleftrightarrow x=\log_a N$

02 (1) $\log_{10}x=0$에서 $x=10^0=1$

(2) $\log_{\frac{1}{3}}x=-2$에서 $x=\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}=9$

(3) $\log_x \frac{1}{64}=3$에서 $x^3=\frac{1}{64}$

$\therefore x=\frac{1}{4}$

(4) $\log_x\sqrt{7}=\frac{1}{2}$에서 $x^{\frac{1}{2}}=\sqrt{7}$

$\therefore x=7$

답 (1) 1 (2) 9 (3) $\frac{1}{4}$ (4) 7

03 (2) $\log_2 \frac{1}{8}=\log_2 2^{-3}=-3$

(3) $\log_3 \frac{3}{2}+\log_3 6=\log_3\left(\frac{3}{2}\cdot 6\right)=\log_3 9$

$=\log_3 3^2=2$

(4) $\log_5 5\sqrt{3}-\frac{1}{2}\log_5 3=\log_5 5\sqrt{3}-\log_5 3^{\frac{1}{2}}$

$=\log_5 5\sqrt{3}-\log_5\sqrt{3}$

$=\log_5 \frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\log_5 5$

$=1$

답 (1) 0 (2) -3 (3) 2 (4) 1

$a>0$, $a\neq1$, $M>0$, $N>0$일 때
① $\log_a 1=0$, $\log_a a=1$
② $\log_a MN=\log_a M+\log_a N$
③ $\log_a \frac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$
④ $\log_a N^k=k\log_a N$ (단, k는 실수)

04 (1) $\frac{\log_7 8}{\log_7 2}+\frac{1}{\log_4 2}=\log_2 8+\log_2 4$

$=\log_2 2^3+\log_2 2^2$

$=3+2=5$

(2) $\log_3 5\cdot\log_5 9=\log_3 5\cdot\log_5 3^2$

$=\log_3 5\cdot 2\log_5 3$

$=2\log_3 5\cdot\log_5 3$

$=2\cdot 1=2$

(3) $\log_{\frac{1}{100}}\sqrt{10}=\log_{10^{-2}}10^{\frac{1}{2}}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\log_{10}10=-\frac{1}{4}$

(4) $\log_2 4\cdot\log_4 6\cdot\log_6 2+2^{\log_4 3}$

$=\frac{\log_{10}4}{\log_{10}2}\cdot\frac{\log_{10}6}{\log_{10}4}\cdot\frac{\log_{10}2}{\log_{10}6}+3^{\log_4 2}$

$=1+3^{\log_{2^2}2}=1+3^{\frac{1}{2}}=1+\sqrt{3}$

답 (1) 5 (2) 2 (3) $-\frac{1}{4}$ (4) $1+\sqrt{3}$

$a>0$, $a\neq1$, $b>0$, $c>0$, $c\neq1$일 때
① $\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}$
② $\log_a b=\frac{1}{\log_b a}$ (단, $b\neq1$)

05 ⑤ $4^{\frac{1}{2}}=2 \Longleftrightarrow \log_4 2=\frac{1}{2}$ 답 ⑤

06 $x=\log_7 2$에서 $7^x=2$

$\therefore 7^x-7^{-x}=7^x-\frac{1}{7^x}=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$ 답 $\frac{3}{2}$

다른 풀이 $7^x-7^{-x}=7^{\log_7 2}-7^{-\log_7 2}$

$=2^{\log_7 7}-2^{-\log_7 7}$

$=2-2^{-1}$

$=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

07 $\log_a 5=3$에서 $a^3=5$

$\log_5 6=b$에서 $5^b=6$

$\therefore a^{3b}=(a^3)^b=5^b=6$ 답 ⑤

08 진수의 조건에서 $25-x>0$ $\therefore x<25$

따라서 x의 값이 아닌 것은 ⑤이다. 답 ⑤

09 진수의 조건에서

$x^2-kx+2k>0$

임의의 실수 x에 대하여 위의 부등식이 성립해야 하므로 이차방정식 $x^2-kx+2k=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-k)^2-4\cdot 2k<0$

$k^2-8k<0$, $k(k-8)<0$

$\therefore 0<k<8$ 답 $0<k<8$

10 (i) $\log_x(7-x)^2$이 정의되려면

밑의 조건에서 $x>0$, $x\neq1$

$\therefore 0<x<1$ 또는 $x>1$ …… ㉠

진수의 조건에서 $(7-x)^2>0$

$\therefore x\neq7$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$0<x<1$ 또는 $1<x<7$ 또는 $x>7$

(ii) $\log_{6-x}|x-9|$가 정의되려면

밑의 조건에서 $6-x>0$, $6-x\neq1$

$x<6$, $x\neq5$

$\therefore x<5$ 또는 $5<x<6$ …… ㉢

진수의 조건에서 $|x-9|>0$

$\therefore x\neq9$ …… ㉣

㉢, ㉣의 공통 범위를 구하면

$x<5$ 또는 $5<x<6$

(i), (ii)에서

$0<x<1$ 또는 $1<x<5$ 또는 $5<x<6$

따라서 정수 x는 2, 3, 4이므로 구하는 합은

$2+3+4=9$ 답 9

11 ㄱ. $\log_{\frac{1}{3}}1=0$

ㄴ. $\log_5\sqrt{5}=\log_5 5^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$

ㄷ. $\log_2\frac{1}{16}=\log_2 2^{-4}=-4$

ㄹ. $\log_2(\log_3 9)=\log_2(\log_3 3^2)=\log_2 2=1$

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄹ이다. 답 ④

12 $\log_{60} a+\log_{60} 3b+\log_{60} 4c=1$에서

$\log_{60}(a\cdot 3b\cdot 4c)=1,\quad \log_{60} 12abc=1$

$12abc=60 \qquad \therefore abc=5$ 답 5

13 $\log_2 \frac{2}{1}+\log_2 \frac{3}{2}+\log_2 \frac{4}{3}+\cdots+\log_2 \frac{16}{15}$

$=\log_2\left(\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\cdots\cdot\frac{16}{15}\right)$

$=\log_2 16=\log_2 2^4=4$ 답 ⑤

14 $\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{BD}:\overline{CD}$이므로

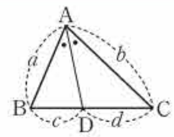
$3:4=\log_5 x:\log_5 y^2,\quad 3\log_5 y^2=4\log_5 x$

$6\log_5 y=4\log_5 x,\quad \log_5 x=\frac{3}{2}\log_5 y$

$\log_5 x=\log_5 y^{\frac{3}{2}} \qquad \therefore x=y^{\frac{3}{2}}$

$\therefore k=\frac{3}{2}$ 답 $\frac{3}{2}$

Q BOX



△ABC에서 ∠BAD=∠CAD이면 $a:b=c:d$

15 $\frac{1}{\log_2 x}+\frac{1}{\log_4 x}+\frac{1}{\log_6 x}$

$=\log_x 2+\log_x 4+\log_x 6$

$=\log_x(2\cdot 4\cdot 6)$

$=\log_x 48$

$\therefore k=48$ 답 ④

16 $\log_2(\log_3 4)+\log_2(\log_4 5)+\log_2(\log_5 6)$

$+\cdots+\log_2(\log_{80} 81)$

$=\log_2(\log_3 4\cdot\log_4 5\cdot\log_5 6\cdot\cdots\cdot\log_{80} 81)$

$=\log_2\left(\log_3 4\cdot\frac{\log_3 5}{\log_3 4}\cdot\frac{\log_3 6}{\log_3 5}\cdot\cdots\cdot\frac{\log_3 81}{\log_3 80}\right)$

$=\log_2(\log_3 81)=\log_2(\log_3 3^4)$

$=\log_2 4=\log_2 2^2=2$ 답 2

17 $x=\log_4 9+\log_2 7=\log_{2^2} 3^2+\log_2 7$

$=\log_2 3+\log_2 7=\log_2(3\cdot 7)$

$=\log_2 21$

$\therefore 2^x=2^{\log_2 21}=21$ 답 ④

18 $(\log_5 9-\log_{25} 3)(\log_3 5+\log_{27} 25)$

$=(\log_5 3^2-\log_{5^2} 3)(\log_3 5+\log_{3^3} 5^2)$

$=\left(2\log_5 3-\frac{1}{2}\log_5 3\right)\left(\log_3 5+\frac{2}{3}\log_3 5\right)$

$=\frac{3}{2}\log_5 3\cdot\frac{5}{3}\log_3 5=\frac{5}{2}$ 답 $\frac{5}{2}$

$\frac{3}{2}\log_5 3\cdot\frac{5}{3}\log_3 5$

$=\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{3}\cdot\log_5 3\cdot\log_3 5$

$=\frac{5}{2}\cdot 1=\frac{5}{2}$

19 $A=\log_{\sqrt{3}} 9-\log_2 8=\log_{3^{\frac{1}{2}}} 3^2-\log_2 2^3=4-3=1$

$B=\log_4(\log_{\sqrt{7}} 7)=\log_4(\log_{7^{\frac{1}{2}}} 7)$

$=\log_4 2=\log_{2^2} 2=\frac{1}{2}$

$C=6^{\log_6 4-\log_6 12}=6^{\log_6 \frac{4}{12}}=6^{\log_6 \frac{1}{3}}=\frac{1}{3}$

$\therefore C<B<A$ 답 ⑤

20 $4^a=x,\ 4^b=y$에서 $\quad \log_4 x=a,\ \log_4 y=b$

$\log_{2^2} x=a,\ \log_{2^2} y=b$

$\frac{1}{2}\log_2 x=a,\ \frac{1}{2}\log_2 y=b$

$\therefore \log_2 x=2a,\ \log_2 y=2b$

$\therefore \log_2 \frac{x^5}{\sqrt{y}}=\log_2 x^5-\log_2\sqrt{y}$

$=5\log_2 x-\frac{1}{2}\log_2 y$

$=5\cdot 2a-\frac{1}{2}\cdot 2b$

$=10a-b$ 답 ⑤

21 $\log_5 14=a$에서

$\log_5 2+\log_5 7=a$ …… ㉠

$\log_5 \frac{2}{7}=b$에서

$\log_5 2-\log_5 7=b$ …… ㉡

㉠+㉡을 하면 $\quad 2\log_5 2=a+b$

$\therefore \log_5 2=\frac{a+b}{2}$

㉠−㉡을 하면 $\quad 2\log_5 7=a-b$

$\therefore \log_5 7=\frac{a-b}{2}$

$\therefore \log_5 98=\log_5(2\cdot 7^2)$

$=\log_5 2+\log_5 7^2$

$=\log_5 2+2\log_5 7$

$=\frac{a+b}{2}+2\cdot\frac{a-b}{2}$

$=\frac{3}{2}a-\frac{1}{2}b$

따라서 $p=\frac{3}{2},\ q=-\frac{1}{2}$이므로

$p-q=2$ 답 2

22 $\log_2 7=a$에서 $\quad \log_7 2=\frac{1}{a}$

$\log_7 5=b,\ \log_3 5=c$이고 $\log_3 5=\frac{\log_7 5}{\log_7 3}$에서

$\log_7 3=\frac{\log_7 5}{\log_3 5}=\frac{b}{c}$

$\therefore \log_{10} 90=\frac{\log_7 90}{\log_7 10}$

$=\frac{\log_7(2\cdot 3^2\cdot 5)}{\log_7(2\cdot 5)}$

$=\frac{\log_7 2+\log_7 3^2+\log_7 5}{\log_7 2+\log_7 5}$

$=\frac{\log_7 2+2\log_7 3+\log_7 5}{\log_7 2+\log_7 5}$

$=\dfrac{\frac{1}{a}+\frac{2b}{c}+b}{\frac{1}{a}+b}$

분자, 분모에 각각 ac를 곱한다.

$=\frac{c+2ab+abc}{c+abc}$

답 $\frac{c+2ab+abc}{c+abc}$

W 02 로그

23 $54^x=6^y=3$에서 $x=\log_{54}3$, $y=\log_6 3$

$\therefore \dfrac{x-y}{xy}=\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{\log_6 3}-\dfrac{1}{\log_{54}3}$

$=\log_3 6-\log_3 54=\log_3 \dfrac{6}{54}$

$=\log_3 \dfrac{1}{9}=\log_3 3^{-2}=-2$ 답 -2

24 $\log_c a : \log_c b=1:2$에서

$2\log_c a=\log_c b$

$\log_c a^2=\log_c b \qquad \therefore b=a^2$

$\therefore \log_a b+\log_b a=\log_a a^2+\log_{a^2} a$

$=2+\dfrac{1}{2}=\dfrac{5}{2}$ 답 ③

25 $\log_a x=3$, $\log_b x=4$, $\log_c x=6$에서

$\log_x a=\dfrac{1}{\log_a x}=\dfrac{1}{3}$,

$\log_x b=\dfrac{1}{\log_b x}=\dfrac{1}{4}$,

$\log_x c=\dfrac{1}{\log_c x}=\dfrac{1}{6}$

이때

$\log_x abc=\log_x a+\log_x b+\log_x c$

$=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{6}=\dfrac{3}{4}$

이므로

$\log_{abc}\sqrt{x}=\log_{abc}x^{\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{2}\log_{abc}x$

$=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{\log_x abc}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{4}{3}=\dfrac{2}{3}$ 답 ②

26 $a^3=b^4$에서 $b=a^{\frac{3}{4}}$이므로

$A=\log_a b=\log_a a^{\frac{3}{4}}=\dfrac{3}{4}$

$b^4=c^5$에서 $c=b^{\frac{4}{5}}$이므로

$B=\log_b c=\log_b b^{\frac{4}{5}}=\dfrac{4}{5}$

$a^3=c^5$에서 $a=c^{\frac{5}{3}}$이므로

$C=\dfrac{1}{2}\log_c a=\dfrac{1}{2}\log_c c^{\frac{5}{3}}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{5}{3}=\dfrac{5}{6}$

이때 $\dfrac{3}{4}<\dfrac{4}{5}<\dfrac{5}{6}$이므로

$A<B<C$ 답 $A<B<C$

27 $\log_4 16<\log_4 48<\log_4 64$에서

$2<\log_4 48<3$

이므로

$x=2$, $y=\log_4 48-2=\log_4 48-\log_4 16=\log_4 3$

$\therefore \dfrac{4^y+4^{-y}}{2^x-2^{-x}}=\dfrac{4^{\log_4 3}+4^{-\log_4 3}}{2^2-2^{-2}}$

$=\dfrac{3+\dfrac{1}{3}}{4-\dfrac{1}{4}}=\dfrac{\dfrac{10}{3}}{\dfrac{15}{4}}=\dfrac{8}{9}$ 답 ②

Q BOX

$\log_4 48=2.\cdots$에서 $\log_4 48$의 정수 부분이 2이므로 소수 부분은 $\log_4 48-2$

값이 1인 것은 $f(6)$, $f(7)$, $\cdots$, $f(35)$의 $35-6+1=30$(개)

28 (i) $1\le N<6$일 때,

$\log_6 1\le\log_6 N<\log_6 6$에서

$0\le\log_6 N<1$

즉 $\log_6 N$의 정수 부분이 0이므로

$f(N)=0$

$\therefore f(2)=f(3)=f(4)=f(5)=0$

(ii) $6\le N<36$일 때,

$\log_6 6\le\log_6 N<\log_6 36$에서

$1\le\log_6 N<2$

즉 $\log_6 N$의 정수 부분이 1이므로

$f(N)=1$

$\therefore f(6)=f(7)=\cdots=f(35)=1$

(iii) $36\le N<216$일 때,

$\log_6 36\le\log_6 N<\log_6 216$에서

$2\le\log_6 N<3$

즉 $\log_6 N$의 정수 부분이 2이므로

$f(N)=2$

$\therefore f(36)=f(37)=\cdots=f(40)=2$

이상에서

$f(2)+f(3)+f(4)+\cdots+f(40)$

$=1\cdot 30+2\cdot 5=40$ 답 40

29 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\log_4 a+\log_4 b=-2$

$\log_4 ab=-2$

$\therefore ab=4^{-2}=\dfrac{1}{16}$ 답 $\dfrac{1}{16}$

30 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=3\log_7 2$, $\alpha\beta=\log_7 6-1$

이므로

$(\alpha-1)(\beta-1)=\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1$

$=\log_7 6-1-3\log_7 2+1$

$=\log_7 6-\log_7 2^3$

$=\log_7 \dfrac{3}{4}$

$\therefore k=\dfrac{3}{4}$ 답 ③

31 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\log_3 a+\log_3 b=4$, $\log_3 a\cdot\log_3 b=k$

$\log_3 a+\log_3 b=4$에서 $\log_3 ab=4$

$\therefore ab=3^4=81$

이때 $a+b=30$에서 $b=30-a$이므로

$a(30-a)=81$, $a^2-30a+81=0$

$(a-3)(a-27)=0 \qquad \therefore a=3$ 또는 $a=27$

따라서 $a=3$, $b=27$ 또는 $a=27$, $b=3$이므로

$k=\log_3 a\cdot\log_3 b=\log_3 3\cdot\log_3 27$

$=1\cdot 3=3$ 답 3

04 상용로그

14쪽

01 (1) $\log\frac{1}{10}=\log 10^{-1}=-1$

(2) $\log\sqrt[4]{10^3}=\log 10^{\frac{3}{4}}=\frac{3}{4}$

(3) $\log 20+\log 50=\log(20\cdot 50)=\log 1000$
$=\log 10^3=3$

(4) $\log 70-\log 7+\log\sqrt[3]{\frac{1}{100}}$
$=\log\frac{70}{7}+\log\sqrt[3]{\frac{1}{100}}$
$=\log 10+\log 10^{-\frac{2}{3}}$
$=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$

답 (1) -1 (2) $\frac{3}{4}$ (3) 3 (4) $\frac{1}{3}$

02 (2) $\log 74.9=\log(7.49\times 10)$
$=\log 7.49+\log 10$
$=0.8745+1$
$=1.8745$

(3) $\log 0.768=\log(7.68\times 10^{-1})$
$=\log 7.68+\log 10^{-1}$
$=0.8854-1$
$=-0.1146$

(4) $\log 0.0757=\log(7.57\times 10^{-2})$
$=\log 7.57+\log 10^{-2}$
$=0.8791-2$
$=-1.1209$

답 (1) 0.8785 (2) 1.8745
(3) -0.1146 (4) -1.1209

03 ③ $\log 0.512=\log(5.12\times 10^{-1})$
$=\log 5.12+\log 10^{-1}$
$=0.7093-1=-0.2907$

답 ③

04 $\log 17.4-\log x=1.2405-(-0.7595)$
$=2=\log 100$

즉 $\log\frac{17.4}{x}=\log 100$이므로

$\frac{17.4}{x}=100$

$\therefore x=\frac{17.4}{100}=0.174$ 답 0.174

05 $\log\frac{27}{2}=\log\frac{3^3}{2}=\log 3^3-\log 2$
$=3\log 3-\log\frac{10}{5}$
$=3\log 3-(\log 10-\log 5)$
$=3a-(1-b)$
$=3a+b-1$ 답 ④

Q BOX

n이 실수일 때,
$\log 10^n=n$

$\frac{I_1}{I_2}=100$에서
$I_1=100I_2$
이므로 2등급인 별의 밝기는 7등급인 별의 밝기의 100배이다.

$2=2\log 10=\log 10^2$
$=\log 100$

Q쌤 한마디

상용로그를 포함한 문제는

$\log 2=\log\frac{10}{5}=\log 10-\log 5=1-\log 5,$

$\log 5=\log\frac{10}{2}=\log 10-\log 2=1-\log 2$

임이 자주 이용되므로 알아두면 문제 해결에 도움이 될 수 있다.

06 $\log\sqrt[3]{6.35}=\frac{1}{3}\log 6.35$
$=\frac{1}{3}\times 0.8028=0.2676$ 답 ②

07 $\log 381=\log(3.81\times 10^2)=\log 3.81+\log 10^2$
$=0.5809+2=2.5809$

$\log 0.04=\log(4\cdot 10^{-2})=\log 4+\log 10^{-2}$
$=0.6021-2=-1.3979$

$\therefore \log 381-\log 0.04=2.5809-(-1.3979)$
$=3.9788$ 답 3.9788

08 2등급인 별의 밝기를 I_1이라 하면

$2=-\frac{5}{2}\log I_1+C$ …… ㉠

7등급인 별의 밝기를 I_2라 하면

$7=-\frac{5}{2}\log I_2+C$ …… ㉡

㉠$-$㉡을 하면

$-5=-\frac{5}{2}(\log I_1-\log I_2)$

$-5=-\frac{5}{2}\log\frac{I_1}{I_2}$, $\log\frac{I_1}{I_2}=2$

$\therefore \frac{I_1}{I_2}=10^2=100$

따라서 2등급인 별의 밝기는 7등급인 별의 밝기의 100배이다. 답 ④

09 $I=600$, $S=0.7$을 $S=k\log I$에 대입하면

$0.7=k\log 600$

$\therefore k=\frac{0.7}{\log 600}=\frac{0.7}{\log(6\cdot 10^2)}$
$=\frac{0.7}{\log 6+\log 10^2}=\frac{0.7}{0.8+2}$
$=\frac{0.7}{2.8}=\frac{1}{4}$

따라서 $I=36$일 때의 감각의 세기는

$\frac{1}{4}\log 36=\frac{1}{4}\log 6^2=\frac{1}{2}\log 6$
$=\frac{1}{2}\times 0.8=0.4$ 답 0.4

10 첫 달 매출액을 A, 매출액의 매월 증가율을 $a\,\%$라 하면

$A\left(1+\frac{a}{100}\right)^8=3A$

$\therefore \left(1+\frac{a}{100}\right)^8=3$

양변에 상용로그를 취하면

$$8\log\left(1+\frac{a}{100}\right)=\log 3$$

$$\log\left(1+\frac{a}{100}\right)=\frac{1}{8}\log 3=\frac{1}{8}\times 0.48=0.06$$

이때 $\log 1.15=0.06$이므로

$$1+\frac{a}{100}=1.15, \qquad \frac{a}{100}=0.15$$

$\therefore a=15$

따라서 매출액은 매월 15 %씩 증가하였다.

답 15 %

11 현재 회원 수를 A라 하면 매년 7 %씩 증가하므로 10년 후 회원 수는

$$A\left(1+\frac{7}{100}\right)^{10}=1.07^{10}A$$

1.07^{10}에 상용로그를 취하면

$$\log 1.07^{10}=10\log 1.07$$
$$=10\times 0.03=0.3$$

이때 $\log 2=0.3$이므로

$1.07^{10}=2$

따라서 10년 후 회원 수는 현재 회원 수의 2배가 된다.

$1.07^{10}A=2A$

답 2배

12 처음 불순물의 양을 A라 하면

$$A\left(1-\frac{a}{100}\right)^4=\frac{1}{10}A$$

$$\therefore \left(1-\frac{a}{100}\right)^4=\frac{1}{10}$$

양변에 상용로그를 취하면

$$4\log\left(1-\frac{a}{100}\right)=\log\frac{1}{10}$$

$$\begin{aligned}\log\left(1-\frac{a}{100}\right)&=\frac{1}{4}\log 10^{-1}=-\frac{1}{4}=-0.25\\&=-1+0.75=-1+\log 5.62\\&=\log 10^{-1}+\log 5.62\\&=\log(10^{-1}\times 5.62)\\&=\log 0.562\end{aligned}$$

따라서 $1-\frac{a}{100}=0.562$이므로

$100-a=56.2 \qquad \therefore a=43.8$

답 ①

Q BOX

03 지수함수

05 지수함수

W 16쪽

01 (1) $f(2)=\left(\frac{1}{5}\right)^2=\frac{1}{25}$

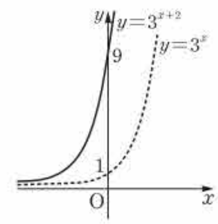
(2) $f(-1)=\left(\frac{1}{5}\right)^{-1}=5$

(3) $f(-3)f(1)=\left(\frac{1}{5}\right)^{-3}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^1=\left(\frac{1}{5}\right)^{-2}=25$

답 (1) $\frac{1}{25}$ (2) 5 (3) 25

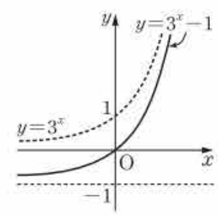
$y=f(x-a)+b$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 것이다.

02 (1) $y=3^{x+2}$의 그래프는 $y=3^x$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



따라서 치역은 $\{y|y>0\}$이고, 점근선의 방정식은 $y=0$이다.

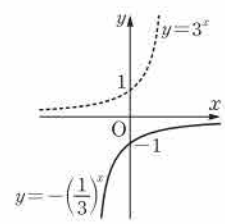
(2) $y=3^x-1$의 그래프는 $y=3^x$의 그래프를 y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



$3^x>0$에서 $3^x-1>-1$이므로 치역이 $\{y|y>-1\}$임을 알 수 있다.

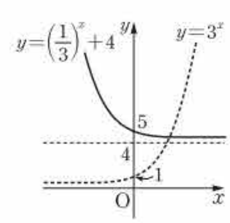
따라서 치역은 $\{y|y>-1\}$이고, 점근선의 방정식은 $y=-1$이다.

(3) $y=-\left(\frac{1}{3}\right)^x=-3^{-x}$의 그래프는 $y=3^x$의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



따라서 치역은 $\{y|y<0\}$이고, 점근선의 방정식은 $y=0$이다.

(4) $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x+4=3^{-x}+4$의 그래프는 $y=3^x$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 후 y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



따라서 치역은 $\{y|y>4\}$이고, 점근선의 방정식은 $y=4$이다.

답 풀이 참조

03 (1) 함수 $y=5^x$은 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하므로 $-1\le x\le 3$에서

$x=3$일 때 최대이고, 최댓값은

$5^3=125$

$x=-1$일 때 최소이고, 최솟값은

$5^{-1}=\frac{1}{5}$

(2) 함수 $y=7^{-x}$은 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로 $-2\le x\le 0$에서

$y=7^{-x}=\left(\frac{1}{7}\right)^{x}$

$x=-2$일 때 최대이고, 최댓값은

$7^{-(-2)}=49$

$x=0$일 때 최소이고, 최솟값은

$7^{0}=1$

(3) 함수 $y=\left(\frac{1}{4}\right)^{x+2}-5$는 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로 $-4\le x\le -2$에서

$x=-4$일 때 최대이고, 최댓값은

$\left(\frac{1}{4}\right)^{-4+2}-5=16-5=11$

$x=-2$일 때 최소이고, 최솟값은

$\left(\frac{1}{4}\right)^{-2+2}-5=1-5=-4$

답 (1) 최댓값: 125, 최솟값: $\frac{1}{5}$
(2) 최댓값: 49, 최솟값: 1
(3) 최댓값: 11, 최솟값: -4

04 $f(-1)=a$에서 $a=\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}=3$

그래프가 점 $(-1,\ a)$를 지나므로 $f(-1)=a$

$f(b)=27$에서 $\left(\frac{1}{3}\right)^{b}=27$

그래프가 점 $(b,\ 27)$을 지나므로 $f(b)=27$

$\left(\frac{1}{3}\right)^{b}=\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}$ $\therefore b=-3$

$\therefore a+b=0$

답 0

05 $f(p)=q$에서 $4^{p}=q$

$\therefore f\left(\frac{p}{2}\right)-f\left(-\frac{p}{2}\right)=4^{\frac{p}{2}}-4^{-\frac{p}{2}}$

$=(4^{p})^{\frac{1}{2}}-(4^{p})^{-\frac{1}{2}}$

$=\sqrt{q}-\frac{1}{\sqrt{q}}$

답 ③

06 $f(2k)=a^{2k}+a^{-2k}=7$이므로

$(a^{k}+a^{-k})^{2}=a^{2k}+a^{-2k}+2$

$=7+2=9$

$\therefore a^{k}+a^{-k}=3\ (\because a^{k}+a^{-k}>0)$

$a^{k}>0,\ a^{-k}>0$이므로 $a^{k}+a^{-k}>0$

$\therefore f(3k)=a^{3k}+a^{-3k}$

$=(a^{k}+a^{-k})^{3}-3(a^{k}+a^{-k})$

$=3^{3}-3\cdot 3=18$

답 ⑤

$a^{3}+b^{3}$
$=(a+b)^{3}-3ab(a+b)$

07 $f(3)=8$에서 $a^{3}=8$ $\therefore a=2$

$\therefore f(x)=2^{x}$

① 정의역은 실수 전체의 집합이다.

② 그래프는 제1사분면과 제2사분면을 지난다.

③ x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.

④ $f(-1)=2^{-1}=\frac{1}{2}$이므로 그래프는 점 $(-1,\ 2)$를 지나지 않는다.

답 ⑤

08 ㄱ. 치역은 양의 실수 전체의 집합이다.

ㄴ. 일대일함수이므로 $x_1\ne x_2$이면 $f(x_1)\ne f(x_2)$이다.

ㄷ. 함수 $f(x)$는 $0<a<1$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로 $x_1<x_2$이면 $f(x_1)>f(x_2)$이다.

ㄹ. $f(0)=a^{0}=1,\ f(1)=a^{1}=a$이므로 그래프는 두 점 $(0,\ 1),\ (1,\ a)$를 지난다.

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ, ㄹ이다.

답 ⑤

09 $y=(a^{2}-4a+4)^{x}$에서 x의 값이 증가할 때 y의 값도 증가하려면 $a^{2}-4a+4>1$이어야 하므로

(밑)>1

$a^{2}-4a+3>0,\quad (a-1)(a-3)>0$

$\therefore a<1$ 또는 $a>3$

답 $a<1$ 또는 $a>3$

10 $y=2^{x+a}+b$의 그래프의 점근선의 방정식은 $y=b$이므로 $b=-3$

즉 $y=2^{x+a}-3$이고, 이 함수의 그래프가 점 $(0,\ 1)$을 지나므로

$1=2^{a}-3,\quad 2^{a}=4$

$2^{a}=2^{2}\quad \therefore a=2$

$\therefore a-b=5$

답 5

11 $y=a^{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -7만큼, y축의 방향으로 -10만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=a^{x+7}-10$

이 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$-y=a^{-x+7}-10\quad \therefore y=-a^{-x+7}+10$

이 함수의 그래프가 점 $(5,\ 1)$을 지나므로

$1=-a^{-5+7}+10,\quad a^{2}=9$

$\therefore a=3\ (\because a>1)$

답 ②

12 ㄱ. $y=\frac{5^{x}}{5}=5^{x}\cdot 5^{-1}=5^{x-1}$이므로 $y=5^{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼 평행이동하면 $y=\frac{5^{x}}{5}$의 그래프와 겹쳐진다.

ㄴ. $y=\left(\frac{1}{25}\right)^{x}=5^{-2x}$이므로 $y=5^{x}$의 그래프를 평행이동하거나 대칭이동하여 $y=\left(\frac{1}{25}\right)^{x}$의 그래프와 겹쳐질 수 없다.

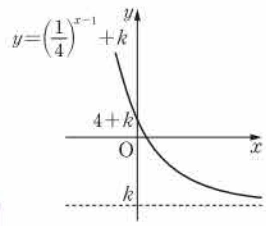
ㄷ. $y=\left(\frac{1}{5}\right)^{x}-3=5^{-x}-3$이므로 $y=5^{x}$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 후 y축의 방향으로 -3만큼 평행이동하면 $y=\left(\frac{1}{5}\right)^{x}-3$의 그래프와 겹쳐진다.

ㄹ. $y=\sqrt{5}\cdot 5^{x}=5^{\frac{1}{2}}\cdot 5^{x}=5^{x+\frac{1}{2}}$이므로 $y=5^{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{1}{2}$만큼 평행이동하면 $y=\sqrt{5}\cdot 5^{x}$의 그래프와 겹쳐진다.

이상에서 $y=5^{x}$의 그래프를 평행이동 또는 대칭이동하여 겹쳐질 수 있는 그래프의 식은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다.

답 ㄱ, ㄷ, ㄹ

13 $y=\left(\frac{1}{4}\right)^{x-1}+k$의 그래프가 제 3 사분면을 지나지 않으려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$4+k\geq 0$

$\therefore k\geq -4$

따라서 실수 k의 최솟값은 -4이다. 답 -4

$x=0$에서의 함숫값

14 $y=a^x$의 그래프가 두 점 $(b, 4)$, $(c, 6)$을 지나므로

$a^b=4$, $a^c=6$

$\therefore f\left(\frac{b+c}{2}\right)=a^{\frac{b+c}{2}}=(a^b\cdot a^c)^{\frac{1}{2}}$

$=(4\cdot 6)^{\frac{1}{2}}=2\sqrt{6}$ 답 ④

15 점 A의 좌표를 $(a, 9)$라 하면 점 A가 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$의 그래프 위의 점이므로

$\left(\frac{1}{3}\right)^a=9$, $\quad \left(\frac{1}{3}\right)^a=\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$ $\quad \therefore a=-2$

$\therefore \mathrm{A}(-2, 9)$

점 B의 좌표를 $(b, 9)$라 하면 점 B가 $y=\left(\frac{1}{9}\right)^x$의 그래프 위의 점이므로

$\left(\frac{1}{9}\right)^b=9$, $\quad \left(\frac{1}{9}\right)^b=\left(\frac{1}{9}\right)^{-1}$ $\quad \therefore b=-1$

$\therefore \mathrm{B}(-1, 9)$

따라서 $\overline{\mathrm{AB}}=-1-(-2)=1$이므로

$\triangle\mathrm{AOB}=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 9=\frac{9}{2}$ 답 $\frac{9}{2}$

두 점 A, B의 y좌표가 같으므로 $\overline{\mathrm{AB}}$의 길이는 두 점의 x좌표의 차와 같다.

x축과 직선 AB, 즉 직선 $y=9$ 사이의 거리

16 점 P의 좌표를 $(a, 5^a)$이라 하면 $\overline{\mathrm{OP}}$를 $1:4$로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{1\cdot a+4\cdot 0}{1+4}, \frac{1\cdot 5^a+4\cdot 0}{1+4}\right)$, 즉 $\left(\frac{a}{5}, 5^{a-1}\right)$

이 점이 $y=\left(\frac{1}{5}\right)^x$의 그래프 위에 있으므로

$5^{a-1}=\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{a}{5}}$, $\quad 5^{a-1}=5^{-\frac{a}{5}}$

$a-1=-\frac{a}{5}$, $\quad \frac{6}{5}a=1$

$\therefore a=\frac{5}{6}$ 답 ③

쌤 한마디

좌표평면 위의 선분의 내분점과 외분점

좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(x_1, y_1)$, $\mathrm{B}(x_2, y_2)$를 이은 선분 AB를 $m:n$ $(m>0, n>0)$으로

① 내분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n}, \frac{my_2+ny_1}{m+n}\right)$

② 외분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{mx_2-nx_1}{m-n}, \frac{my_2-ny_1}{m-n}\right)$ (단, $m\neq n$)

Q BOX

$a>0$이고 m, n이 2 이상의 자연수일 때, $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$

17 $A=\sqrt{0.2}=\sqrt{\frac{1}{5}}=\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{2}}$

$B=\sqrt[4]{\frac{1}{125}}=\sqrt[4]{\left(\frac{1}{5}\right)^3}=\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{3}{4}}$

$C=\sqrt[3]{0.04}=\sqrt[3]{\frac{1}{25}}=\sqrt[3]{\left(\frac{1}{5}\right)^2}=\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{2}{3}}$

이때 $\frac{1}{2}<\frac{2}{3}<\frac{3}{4}$이고 함수 $y=\left(\frac{1}{5}\right)^x$은 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로

$\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{3}{4}}<\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{2}{3}}<\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{2}}$

$\therefore B<C<A$ 답 $B<C<A$

18 $\left(\frac{1}{64}\right)^{-\frac{2}{9}}=(2^{-6})^{-\frac{2}{9}}=2^{\frac{4}{3}}$

$(4^{\frac{1}{3}}\cdot 8^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}=(2^{\frac{2}{3}}\cdot 2^{\frac{3}{2}})^{\frac{1}{2}}=(2^{\frac{13}{6}})^{\frac{1}{2}}=2^{\frac{13}{12}}$

$\sqrt[5]{8\sqrt[3]{2}}=(2^3\cdot 2^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{5}}=(2^{\frac{10}{3}})^{\frac{1}{5}}=2^{\frac{2}{3}}$

$\sqrt{\sqrt{\sqrt{128}}}=\sqrt[8]{2^7}=2^{\frac{7}{8}}$

이때 $\frac{2}{3}<\frac{7}{8}<\frac{13}{12}<\frac{4}{3}$이고 함수 $y=2^x$은 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하므로

$2^{\frac{2}{3}}<2^{\frac{7}{8}}<2^{\frac{13}{12}}<2^{\frac{4}{3}}$

따라서 가장 큰 수는 $2^{\frac{4}{3}}$, 가장 작은 수는 $2^{\frac{2}{3}}$이므로 구하는 곱은

$2^{\frac{4}{3}}\cdot 2^{\frac{2}{3}}=2^2=4$ 답 4

19 함수 $y=a^x$은 $0<a<1$일 때 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로 $0<a<1$에서

$a^1<a^a<a^0$ $\qquad \therefore a<a^a<1$

마찬가지로 함수 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$도 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로

$\frac{1}{3}<\left(\frac{1}{3}\right)^{a^a}<\left(\frac{1}{3}\right)^a$ 답 ②

20 함수 $y=2^{x-3}+k$는 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하므로 $-3\leq x\leq 5$에서 $x=5$일 때 최대이다.

즉 $2^{5-3}+k=6$이므로 $\qquad 4+k=6$

$\therefore k=2$ 답 ④

21 함수 $y=5^{-x}\cdot 3^x=\left(\frac{3}{5}\right)^x$은 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로 $-2\leq x\leq 3$에서

$x=-2$일 때 최대이고, 최댓값은

$\left(\frac{3}{5}\right)^{-2}=\frac{25}{9}$

$x=3$일 때 최소이고, 최솟값은

$\left(\frac{3}{5}\right)^3=\frac{27}{125}$

따라서 치역은 $\left\{y \,\middle|\, \frac{27}{125}\leq y\leq\frac{25}{9}\right\}$이므로

$a=\frac{27}{125}$, $b=\frac{25}{9}$ $\qquad \therefore ab=\frac{3}{5}$ 답 $\frac{3}{5}$

22 (i) $a>1$일 때,
최댓값은 $f(2)$, 최솟값은 $f(0)$이므로
$f(2)=9f(0)$, $a^3=9a$
$a(a+3)(a-3)=0$ $\therefore a=3$ ($\because a>1$)
(ii) $0<a<1$일 때,
최댓값은 $f(0)$, 최솟값은 $f(2)$이므로
$f(0)=9f(2)$, $a=9a^3$
$a(3a+1)(3a-1)=0$
$\therefore a=\frac{1}{3}$ ($\because 0<a<1$)
(i), (ii)에서 $a=3$ 또는 $a=\frac{1}{3}$이므로 구하는 곱은
$3\cdot\frac{1}{3}=1$ 답 1

쌤 한마디

함수 $y=a^x$에서 $a=1$이면 $y=1$이므로 $y=a^x$은 상수함수이고, $a>0$, $a\neq1$이면 $y=a^x$은 지수함수이다. 즉 함수 $y=a^x$의 최대·최소는 a의 값의 범위에 따라 달라지므로 문제에서 a의 값의 조건이 주어지지 않은 경우에는 a의 값의 범위를 $0<a<1$, $a=1$, $a>1$인 경우로 나누어 생각해야 한다. 그런데 **22**번에서는 최댓값이 최솟값의 9배가 되어야 하므로 $a=1$인 경우는 생각하지 않아도 된다.

23 $f(x)=-x^2+6x+k$로 놓으면
$f(x)=-(x-3)^2+k+9$
함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{-x^2+6x+k}=\left(\frac{1}{2}\right)^{f(x)}$은 $f(x)$의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로 $f(x)$가 최대일 때 y는 최솟값을 갖는다.
따라서 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{f(x)}$은 $f(x)=k+9$일 때 최솟값 8을 가지므로
$\left(\frac{1}{2}\right)^{k+9}=8$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{k+9}=\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$
$k+9=-3$ $\therefore k=-12$ 답 -12

24 $g(x)=-x^2+2x+1=-(x-1)^2+2$
함수 $(f\circ g)(x)=f(g(x))=3^{g(x)}$은 $g(x)$의 값이 증가하면 $(f\circ g)(x)$의 값도 증가하므로 $g(x)$가 최대일 때 $(f\circ g)(x)$는 최댓값을 갖는다.
따라서 $(f\circ g)(x)$는 $g(x)=2$, 즉 $x=1$일 때 최댓값 9를 가지므로
$(f\circ g)(1)=3^2=9$
$a=1$, $b=9$ $\therefore b-a=8$ 답 ②

25 $f(x)=x^2-4x+1$로 놓으면
$f(x)=(x-2)^2-3$
$f(1)=-2$, $f(2)=-3$, $f(4)=1$이므로 $1\le x\le4$에서
$-3\le f(x)\le1$
함수 $y=a^{x^2-4x+1}=a^{f(x)}$은 $f(x)$의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로 $f(x)$가 최소일 때 y는 최댓값을, $f(x)$가 최대일 때 y는 최솟값을 갖는다.
따라서 $y=a^{f(x)}$은 $f(x)=-3$일 때 최댓값 27을 가지므로
$a^{-3}=27$, $a^3=\frac{1}{27}$
$\therefore a=\frac{1}{3}$
즉 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{f(x)}$이고 $f(x)=1$일 때 최솟값 $\left(\frac{1}{3}\right)^1=\frac{1}{3}$을 갖는다. 답 $\frac{1}{3}$

쌤 한마디

$\alpha\le x\le\beta$에서 이차함수 $f(x)=a(x-p)^2+q$의 최댓값과 최솟값은
① $\alpha\le p\le\beta$일 때
→ $f(p)$, $f(\alpha)$, $f(\beta)$ 중 가장 큰 값이 최댓값, 가장 작은 값이 최솟값이다.
② $p<\alpha$ 또는 $p>\beta$일 때
→ $f(\alpha)$, $f(\beta)$ 중 큰 값이 최댓값, 작은 값이 최솟값이다.

26 $y=16^{-x}-4^{-x+1}=\left\{\left(\frac{1}{4}\right)^x\right\}^2-4\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^x$
$4^{-x+1}=4^{-x}\cdot4$
$=4\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^x$
$\left(\frac{1}{4}\right)^x=t$ $(t>0)$로 놓으면 주어진 함수는
$y=t^2-4t=(t-2)^2-4$
따라서 y는 $t=2$일 때 최솟값 -4를 갖는다. 답 ③

27 $y=2\cdot5^x-25^x+7=-(5^x)^2+2\cdot5^x+7$
$5^x=t$로 놓으면 주어진 함수는
$y=-t^2+2t+7=-(t-1)^2+8$
이때 $-2\le x\le1$에서
$5^{-2}\le5^x\le5^1$ $\therefore \frac{1}{25}\le t\le5$
따라서 $\frac{1}{25}\le t\le5$에서 함수 $y=-(t-1)^2+8$은
$t=1$일 때 최대이고, 최댓값은
$-(1-1)^2+8=8$
$t=5$일 때 최소이고, 최솟값은
$-(5-1)^2+8=-8$
즉 $M=8$, $m=-8$이므로
$M-m=16$ 답 16

28 $y=\left(\frac{1}{9}\right)^x-2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{x-2}+k$
$=\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^x\right\}^2-18\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^x+k$
$2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{x-2}$
$=2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^x\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$
$=2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^x\cdot9$
$=18\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^x$
$\left(\frac{1}{3}\right)^x=t$ $(t>0)$로 놓으면 주어진 함수는
$y=t^2-18t+k=(t-9)^2+k-81$
따라서 y는 $t=9$일 때 최솟값 $k-81$을 가지므로
$k-81=-20$ $\therefore k=61$
$t=9$일 때 $x=-2$이므로
$t=9$일 때, $\left(\frac{1}{3}\right)^x=9$
$\left(\frac{1}{3}\right)^x=\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$
$\therefore x=-2$
$a=-2$
$\therefore k+a=59$ 답 ①

29 $\left(\frac{1}{6}\right)^x>0$, $\left(\frac{1}{6}\right)^{-x+2}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$y=\left(\frac{1}{6}\right)^x+\left(\frac{1}{6}\right)^{-x+2}\ge 2\sqrt{\left(\frac{1}{6}\right)^x\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{-x+2}}$$
$$=2\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$$

이때 등호는 $\left(\frac{1}{6}\right)^x=\left(\frac{1}{6}\right)^{-x+2}$일 때 성립하므로

$x=-x+2,\quad 2x=2\quad \therefore x=1$

따라서 주어진 함수는 $x=1$일 때 최솟값 $\frac{1}{3}$을 가지므로

$a=1,\ b=\frac{1}{3}\quad \therefore ab=\frac{1}{3}$ 답 $\frac{1}{3}$

30 $y=2^{x+a}+\frac{1}{2^{x-a}}+5=2^{x+a}+2^{a-x}+5$

이때 $2^{x+a}>0$, $2^{a-x}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$y=2^{x+a}+2^{a-x}+5\ge 2\sqrt{2^{x+a}\cdot 2^{a-x}}+5$$
$$=2\cdot 2^a+5=2^{a+1}+5$$

(단, 등호는 $x=0$일 때 성립)

따라서 $2^{a+1}+5=37$이므로

$2^{a+1}=32,\quad 2^{a+1}=2^5$

$a+1=5\quad \therefore a=4$ 답 ④

등호는 $2^{x+a}=2^{a-x}$일 때 성립하므로
$x+a=a-x$
$2x=0\quad \therefore x=0$

06 지수함수의 활용

W 21쪽

01 (1) $3^{x-2}=27$에서 $3^{x-2}=3^3$이므로

$x-2=3\quad \therefore x=5$

(2) $\left(\frac{1}{5}\right)^{2x}-3\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^x-10=0$에서

$\left\{\left(\frac{1}{5}\right)^x\right\}^2-3\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^x-10=0$

$\left(\frac{1}{5}\right)^x=t\ (t>0)$로 놓으면

$t^2-3t-10=0,\quad (t+2)(t-5)=0$

$\therefore t=5\ (\because t>0)$

즉 $\left(\frac{1}{5}\right)^x=5$이므로 $\left(\frac{1}{5}\right)^x=\left(\frac{1}{5}\right)^{-1}$

$\therefore x=-1$

(3) $2^{3x-1}=7^{3x-1}$에서 밑은 다르고 지수는 같으므로

$3x-1=0\quad \therefore x=\frac{1}{3}$

(4) (i) $x=1$일 때, $1^1=1^4$이므로 등식이 성립한다.

(ii) $x\ne 1$일 때, $2x-1=5-x$에서

$3x=6\quad \therefore x=2$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 근은

$x=1$ 또는 $x=2$

답 (1) $x=5$ (2) $x=-1$
(3) $x=\frac{1}{3}$ (4) $x=1$ 또는 $x=2$

02 (1) $\left(\frac{1}{49}\right)^{x-1}\ge 7^{3-x}$에서 $\left(\frac{1}{7}\right)^{2x-2}\ge\left(\frac{1}{7}\right)^{x-3}$

밑이 1보다 작으므로 $2x-2\le x-3$

$\therefore x\le -1$

(2) $(\sqrt{3})^{5x}<9^{x+4}$에서 $3^{\frac{5}{2}x}<3^{2x+8}$

밑이 1보다 크므로 $\frac{5}{2}x<2x+8$

$\frac{1}{2}x<8\quad \therefore x<16$

(3) $4^x-5\cdot 2^x+4\le 0$에서

$(2^x)^2-5\cdot 2^x+4\le 0$

$2^x=t\ (t>0)$로 놓으면

$t^2-5t+4\le 0,\quad (t-1)(t-4)\le 0$

$\therefore 1\le t\le 4$

즉 $1\le 2^x\le 4$에서 $2^0\le 2^x\le 2^2$

밑이 1보다 크므로 $0\le x\le 2$

(4) $\left(\frac{1}{6}\right)^{2x-1}+5\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^x-1>0$에서

$6\cdot\left\{\left(\frac{1}{6}\right)^x\right\}^2+5\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^x-1>0$

$\left(\frac{1}{6}\right)^x=t\ (t>0)$로 놓으면

$6t^2+5t-1>0,\quad (t+1)(6t-1)>0$

$\therefore t<-1$ 또는 $t>\frac{1}{6}$

그런데 $t>0$이므로 $t>\frac{1}{6}$

즉 $\left(\frac{1}{6}\right)^x>\frac{1}{6}$에서 밑이 1보다 작으므로

$x<1$

답 (1) $x\le -1$ (2) $x<16$
(3) $0\le x\le 2$ (4) $x<1$

03 $(2^{2x}-8)(5^x-25)=0$에서

$2^{2x}=8$ 또는 $5^x=25$

$2^{2x}=8$에서 $2^{2x}=2^3\quad \therefore x=\frac{3}{2}$

$5^x=25$에서 $5^x=5^2\quad \therefore x=2$

따라서 주어진 방정식의 두 실근의 곱은

$\frac{3}{2}\cdot 2=3$ 답 3

04 주어진 방정식의 한 근이 4이므로

$3^{4^2+a}=\left(\frac{1}{9}\right)^{-4},\quad 3^{16+a}=3^8$

$16+a=8\quad \therefore a=-8$ 답 ②

$\left(\frac{1}{9}\right)^{-4}=(3^{-2})^{-4}=3^8$

05 $\frac{4^{x^2+3}}{8^x}=32$에서 $\frac{2^{2x^2+6}}{2^{3x}}=2^5$

$\therefore 2^{2x^2-3x+6}=2^5$

즉 $2x^2-3x+6=5$이므로 $2x^2-3x+1=0$

$(2x-1)(x-1)=0\quad \therefore x=\frac{1}{2}$ 또는 $x=1$

$\therefore \alpha^2+\beta^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2+1^2=\frac{5}{4}$ 답 $\frac{5}{4}$

06 $5^{x+1}+5^{-x}=6$에서 $\quad 5\cdot5^x+\frac{1}{5^x}-6=0$

$5^x=t\ (t>0)$로 놓으면

$$5t+\frac{1}{t}-6=0$$

양변에 t를 곱하면 $\quad 5t^2-6t+1=0$

$$(5t-1)(t-1)=0 \qquad \therefore t=\frac{1}{5} \text{ 또는 } t=1$$

즉 $5^x=\frac{1}{5}$ 또는 $5^x=1$이므로

$$x=-1 \text{ 또는 } x=0$$

따라서 $\alpha=-1$, $\beta=0$이므로

$$\beta-\alpha=1$$

답 ①

07 $16^x-7\cdot4^x+10=0$에서

$$(4^x)^2-7\cdot4^x+10=0$$

$4^x=t\ (t>0)$로 놓으면

$$t^2-7t+10=0$$

이 이차방정식의 두 근은 4^α, 4^β이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$4^\alpha+4^\beta=7,\ 4^\alpha\cdot4^\beta=10$$

$$\begin{aligned}\therefore 16^\alpha+16^\beta&=(4^\alpha)^2+(4^\beta)^2\\&=(4^\alpha+4^\beta)^2-2\cdot4^\alpha\cdot4^\beta\\&=7^2-2\cdot10=29\end{aligned}$$

답 29

다른 풀이 $16^x-7\cdot4^x+10=0$에서

$$(4^x)^2-7\cdot4^x+10=0$$

$4^x=t\ (t>0)$로 놓으면 $\quad t^2-7t+10=0$

$$(t-2)(t-5)=0 \qquad \therefore t=2 \text{ 또는 } t=5$$

따라서 $4^\alpha=2$, $4^\beta=5$ 또는 $4^\alpha=5$, $4^\beta=2$이므로

$$\begin{aligned}16^\alpha+16^\beta&=(4^\alpha)^2+(4^\beta)^2\\&=2^2+5^2=29\end{aligned}$$

08 $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x}-8\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^x+3k=0$에서

$$\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^x\right\}^2-8\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^x+3k=0$$

$\left(\frac{1}{3}\right)^x=t\ (t>0)$로 놓으면

$$t^2-8t+3k=0$$

이 이차방정식의 두 근은 $\left(\frac{1}{3}\right)^\alpha$, $\left(\frac{1}{3}\right)^\beta$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\left(\frac{1}{3}\right)^\alpha\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^\beta=3k, \qquad \left(\frac{1}{3}\right)^{\alpha+\beta}=3k$$

이때 $\alpha+\beta=-2$이므로 $\quad \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}=3k$

$$3k=9 \qquad \therefore k=3$$

답 ②

09 $a^{2x}-a^x-12=0$에서

$$(a^x)^2-a^x-12=0$$

$a^x=t\ (t>0)$로 놓으면

$$t^2-t-12=0, \qquad (t+3)(t-4)=0$$

$$\therefore t=4\ (\because t>0)$$

즉 방정식 $a^x=4$의 해가 $x=\frac{1}{3}$이므로

$$a^{\frac{1}{3}}=4 \qquad \therefore a=4^3=64$$

답 64

10 $\begin{cases}2^{x+1}+2^y=10\\2^{x-y}=\frac{1}{8}\end{cases}$에서 $\quad \begin{cases}2\cdot2^x+2^y=10\\\frac{2^x}{2^y}=\frac{1}{8}\end{cases}$

$2^x=X$, $2^y=Y\ (X>0,\ Y>0)$로 놓으면 주어진 연립방정식은

$$\begin{cases}2X+Y=10\\\frac{X}{Y}=\frac{1}{8}\end{cases}, \text{ 즉 } \begin{cases}2X+Y=10\\Y=8X\end{cases}$$

이 연립방정식을 풀면 $\quad X=1,\ Y=8$

즉 $2^x=1$, $2^y=8$이므로 $\quad x=0,\ y=3$

$$\therefore \alpha+\beta=3$$

답 3

Q BOX

$Y=8X$를 $2X+Y=10$에 대입하면

$$10X=10$$

$$\therefore X=1,\ Y=8$$

11 $\begin{cases}3^x+3^y=6\\9^x+9^y=20\end{cases}$에서 $\quad \begin{cases}3^x+3^y=6\\(3^x)^2+(3^y)^2=20\end{cases}$

$3^x=X$, $3^y=Y\ (X>0,\ Y>0)$로 놓으면 주어진 연립방정식은

$$\begin{cases}X+Y=6\\X^2+Y^2=20\end{cases}$$

이 연립방정식을 풀면

$$X=2,\ Y=4 \text{ 또는 } X=4,\ Y=2$$

$$\therefore 3^x=2,\ 3^y=4 \text{ 또는 } 3^x=4,\ 3^y=2$$

그런데 $\alpha>\beta$이므로 $\quad 3^\alpha=4,\ 3^\beta=2$

$$\therefore 3^\alpha-3^\beta=2$$

답 ④

$\begin{cases}X+Y=6 & \cdots㉠\\X^2+Y^2=20 & \cdots㉡\end{cases}$

㉠에서 $\quad Y=6-X$

이것을 ㉡에 대입하여 정리하면

$$X^2-6X+8=0$$

$$(X-2)(X-4)=0$$

$$\therefore X=2 \text{ 또는 } X=4$$

$X=2$를 ㉠에 대입하면

$$Y=4$$

$X=4$를 ㉠에 대입하면

$$Y=2$$

12 (ⅰ) $x-1=1$, 즉 $x=2$일 때, $1^6=1^8$이므로 등식이 성립한다.

(ⅱ) $x-1\neq1$일 때, $3x=x+6$에서

$$2x=6 \qquad \therefore x=3$$

(ⅰ), (ⅱ)에서 주어진 방정식의 근은

$$x=2 \text{ 또는 } x=3$$

이므로 모든 x의 값의 합은

$$2+3=5$$

답 ③

13 (ⅰ) $2x=0$, 즉 $x=0$일 때, $1^0=9^0$이므로 등식이 성립한다.

(ⅱ) $2x\neq0$일 때, $5x+1=x+9$에서

$$4x=8 \qquad \therefore x=2$$

(ⅰ), (ⅱ)에서 주어진 방정식의 근은

$$x=0 \text{ 또는 } x=2$$

답 $x=0$ 또는 $x=2$

14 $2^{2x}-2^{x+3}=k$에서

$$(2^x)^2-8\cdot2^x-k=0$$

$2^x=t\ (t>0)$로 놓으면

$$t^2-8t-k=0 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

주어진 방정식이 서로 다른 두 실근을 가지려면 이차방정식 ㉠이 서로 다른 두 양의 실근을 가져야 한다.

(i) 이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-4)^2-(-k)>0 \qquad \therefore k>-16$

(ii) (두 근의 합)$=8>0$

(iii) (두 근의 곱)$=-k>0 \qquad \therefore k<0$

이상에서 $-16<k<0$이므로

$a=-16,\ b=0$

$\therefore b-a=16$ 답 ④

15 $9^x-4\cdot3^x+k=0$에서

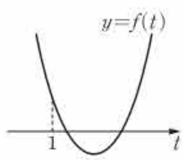
$(3^x)^2-4\cdot3^x+k=0$

$3^x=t\ (t>0)$로 놓으면

$t^2-4t+k=0 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

주어진 방정식이 서로 다른 두 개의 양의 실근을 가지려면 이차방정식 ㉠이 $t>1$에서 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

$f(t)=t^2-4t+k$라 하면 이차함수 $y=f(t)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



(i) 이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-2)^2-k>0 \qquad \therefore k<4$

(ii) $f(1)=1-4+k>0$에서

$k>3$

(iii) 이차함수 $y=f(t)$의 그래프의 축의 방정식은 $t=2$이고 $2>1$이다.

이상에서 $3<k<4$ 답 $3<k<4$

16 $\left(\frac{1}{7}\right)^{-f(x)}>\left(\frac{1}{7}\right)^{-g(x)}$에서 밑이 1보다 작으므로

$-f(x)<-g(x) \qquad \therefore f(x)>g(x)$

주어진 그래프에서 부등식 $f(x)>g(x)$의 해는

$x<0$ 또는 $x>3$ 답 $x<0$ 또는 $x>3$

17 $9^{x^2}<3^{6-x}$에서 $\quad 3^{2x^2}<3^{6-x}$

밑이 1보다 크므로 $\quad 2x^2<6-x$

$2x^2+x-6<0, \qquad (x+2)(2x-3)<0$

$\therefore -2<x<\frac{3}{2}$

따라서 정수 x는 $-1,\ 0,\ 1$의 3개이다. 답 ③

18 $\left(\frac{1}{5}\right)^{2x+5}\le5^{x^2-2}\le\left(\frac{1}{25}\right)^{x-3}$에서

$\left(\frac{1}{5}\right)^{2x+5}\le\left(\frac{1}{5}\right)^{-x^2+2}\le\left(\frac{1}{5}\right)^{2x-6}$

밑이 1보다 작으므로

$2x+5\ge-x^2+2\ge2x-6$

(i) $2x+5\ge-x^2+2$에서 $\quad x^2+2x+3\ge0$

그런데 $x^2+2x+3=(x+1)^2+2>0$이므로 이 부등식의 해는 모든 실수이다.

(ii) $-x^2+2\ge2x-6$에서 $\quad x^2+2x-8\le0$

$(x+4)(x-2)\le0 \qquad \therefore -4\le x\le2$

(i), (ii)에서 구하는 해는

$-4\le x\le2$ 답 ①

Q BOX

$A<B<C$ 꼴의 부등식은 연립부등식 $\begin{cases}A<B\\B<C\end{cases}$ 꼴로 바꾸어 푼다.

19 $2^x-2^{2-x}\ge3$에서 $\quad 2^x-\frac{4}{2^x}-3\ge0$

$2^x=t\ (t>0)$로 놓으면

$t-\frac{4}{t}-3\ge0$

양변에 t를 곱하면 $\quad t^2-3t-4\ge0$

$t>0$이므로 부등호의 방향이 바뀌지 않는다.

$(t+1)(t-4)\ge0 \qquad \therefore t\le-1$ 또는 $t\ge4$

그런데 $t>0$이므로 $\quad t\ge4$

즉 $2^x\ge4$이고 밑이 1보다 크므로

$x\ge2$ 답 $x\ge2$

20 $\left(\frac{1}{9}\right)^x-12\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^x+27\le0$에서

$\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^x\right\}^2-12\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^x+27\le0$

$\left(\frac{1}{3}\right)^x=t\ (t>0)$로 놓으면

$t^2-12t+27\le0, \qquad (t-3)(t-9)\le0$

$\therefore 3\le t\le9$

즉 $3\le\left(\frac{1}{3}\right)^x\le9$이므로 $\quad \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}\le\left(\frac{1}{3}\right)^x\le\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$

밑이 1보다 작으므로 $\quad -2\le x\le-1$

따라서 $M=-1,\ m=-2$이므로

$M+m=-3$ 답 ⑤

21 $25^x>(\sqrt{5})^{x^2}$에서 $\quad 5^{2x}>5^{\frac{1}{2}x^2}$

밑이 1보다 크므로 $\quad 2x>\frac{1}{2}x^2$

$x^2-4x<0, \qquad x(x-4)<0$

$\therefore 0<x<4 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$16^x+3\cdot4^x-28\ge0$에서

$(4^x)^2+3\cdot4^x-28\ge0$

$4^x=t\ (t>0)$로 놓으면

$t^2+3t-28\ge0, \qquad (t+7)(t-4)\ge0$

$\therefore t\le-7$ 또는 $t\ge4$

그런데 $t>0$이므로 $\quad t\ge4$

즉 $4^x\ge4$이고 밑이 1보다 크므로

$x\ge1 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$1\le x<4$ 답 $1\le x<4$

22 $\left(\frac{1}{4}\right)^x-a\left(\frac{1}{2}\right)^x+b<0$에서

$\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^x\right\}^2-a\left(\frac{1}{2}\right)^x+b<0$

$\left(\frac{1}{2}\right)^x=t\ (t>0)$로 놓으면

$t^2-at+b<0 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

이때 $-3<x<1$에서

$\left(\frac{1}{2}\right)^{1}<\left(\frac{1}{2}\right)^{x}<\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$ $\quad\therefore\ \frac{1}{2}<t<8$

해가 $\frac{1}{2}<t<8$이고 t^2의 계수가 1인 이차부등식은

$\left(t-\frac{1}{2}\right)(t-8)<0 \quad \therefore\ t^2-\frac{17}{2}t+4<0$

이것이 ㉠과 일치하므로 $\quad a=\frac{17}{2},\ b=4$

$\therefore\ ab=34$ 답 34

Q BOX

해가 $\alpha<x<\beta$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은
$(x-\alpha)(x-\beta)<0$

23 밑이 1보다 크므로

$5x+9>x^2-5, \quad x^2-5x-14<0$

$(x+2)(x-7)<0 \quad \therefore\ -2<x<7$

그런데 $x>1$이므로 주어진 부등식의 해는

$1<x<7$ 답 ③

24 (i) $x=1$일 때, $1^2\le1^{11}$이므로 부등식이 성립한다.

(ii) $0<x<1$일 때, 밑이 1보다 작으므로

$7x-5\ge4x+7, \quad 3x\ge12$

$\therefore\ x\ge4$

그런데 $0<x<1$이므로 부등식을 만족시키는 x가 존재하지 않는다.

(iii) $x>1$일 때, 밑이 1보다 크므로

$7x-5\le4x+7, \quad 3x\le12$

$\therefore\ x\le4$

그런데 $x>1$이므로 $\quad 1<x\le4$

이상에서 주어진 부등식의 해는

$1\le x\le4$

따라서 정수 x는 1, 2, 3, 4이므로 구하는 합은

$1+2+3+4=10$ 답 10

25 $4^x-2^{x+3}+2k\ge0$에서

$(2^x)^2-8\cdot2^x+2k\ge0$

$2^x=t\ (t>0)$로 놓으면

$t^2-8t+2k\ge0$

$\therefore\ (t-4)^2+2k-16\ge0$

이 부등식이 $t>0$인 모든 실수 t에 대하여 성립하려면

$2k-16\ge0 \quad \therefore\ k\ge8$

따라서 실수 k의 최솟값은 8이다. 답 ④

26 $\left(\frac{1}{9}\right)^x-\left(\frac{1}{3}\right)^{x+1}>k$에서

$\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^x\right\}^2-\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^x-k>0$

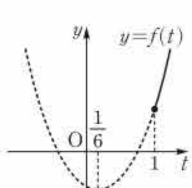
$\left(\frac{1}{3}\right)^x=t$로 놓으면 $x\le0$일 때 $t\ge1$이고

$t^2-\frac{1}{3}t-k>0$

$f(t)=t^2-\frac{1}{3}t-k$라 하면

$f(t)=\left(t-\frac{1}{6}\right)^2-k-\frac{1}{36}$

$t\ge1$에서 $f(t)>0$이어야 하므로 $y=f(t)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 한다.



축이 직선 $t=\frac{1}{6}$이고 아래로 볼록한 포물선

즉 $f(1)>0$이어야 하므로

$1-\frac{1}{3}-k>0 \quad \therefore\ k<\frac{2}{3}$ 답 $k<\frac{2}{3}$

27 이 금융 상품에 80만 원을 투자한 지 n년 후의 이익금은 $80\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{n}{4}}$만 원이므로 이익금이 180만 원이 되면

$80\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{n}{4}}=180$

$\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{n}{4}}=\frac{9}{4}=\left(\frac{3}{2}\right)^2, \quad \frac{n}{4}=2$

$\therefore\ n=8$

따라서 이익금이 180만 원이 되는 것은 투자한 지 8년 후이다. 답 ③

28 x시간 후 혈중 농도는

$0.5\times(1-0.2)^x=0.5\times\left(\frac{4}{5}\right)^x$ (μg/mL)

혈중 농도가 0.32μg/mL 이하가 되려면

$0.5\times\left(\frac{4}{5}\right)^x\le0.32$

$\left(\frac{4}{5}\right)^x\le\frac{0.32}{0.5}$

$\frac{0.32}{0.5}=\frac{32}{50}=\frac{16}{25}=\left(\frac{4}{5}\right)^2$

$\therefore\ \left(\frac{4}{5}\right)^x\le\left(\frac{4}{5}\right)^2$

밑이 1보다 작으므로 $\quad x\ge2$

따라서 치료제의 혈중 농도가 처음으로 0.32μg/mL 이하가 되는 것은 인체에 투여한 지 2시간 후이다.

답 2시간

29 n주 후의 불량률은 $\frac{128}{1000}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n$이므로 이것이 0.1 %가 되면

$12.8\ \%=\frac{12.8}{100}=\frac{128}{1000}$

$\frac{128}{1000}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{1}{1000}$

$0.1\ \%=\frac{0.1}{100}=\frac{1}{1000}$

$\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{1}{128}=\left(\frac{1}{2}\right)^7 \quad \therefore\ n=7$

따라서 불량률이 0.1 %가 되는 것은 7주 후이다.

답 ④

30 x시간 후 미생물 배양기에 있는 미생물 A, B의 수는 각각

$4^x,\ 4\cdot2^x$

처음의 양이 p이고 매시간 a배씩 변할 때, x시간 후의 양을 y라 하면
$y=pa^x$

이때 두 미생물의 수의 합이 320 이상이 되려면

$4^x+4\cdot2^x\ge320$

$(2^x)^2+4\cdot2^x-320\ge0$

$2^x=t\ (t>0)$로 놓으면

$t^2+4t-320\ge0, \quad (t+20)(t-16)\ge0$

$\therefore\ t\le-20$ 또는 $t\ge16$

그런데 $t>0$이므로 $\quad t\ge16$

즉 $2^x\ge16$이고 밑이 1보다 크므로

$x\ge4$

따라서 최소 4시간이 지나야 한다. 답 4시간

04 로그함수

07 로그함수

W 26쪽

01 (1) $f(5)=\log_{\frac{1}{5}}5=\log_{\frac{1}{5}}\left(\frac{1}{5}\right)^{-1}=-1$

(2) $f\left(\frac{1}{25}\right)=\log_{\frac{1}{5}}\frac{1}{25}=\log_{\frac{1}{5}}\left(\frac{1}{5}\right)^{2}=2$

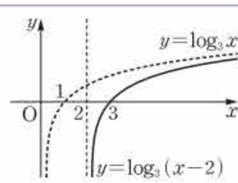
(3) $f(10)+f\left(\frac{5}{2}\right)=\log_{\frac{1}{5}}10+\log_{\frac{1}{5}}\frac{5}{2}$

$=\log_{\frac{1}{5}}\left(10\cdot\frac{5}{2}\right)=\log_{\frac{1}{5}}25$

$=\log_{\frac{1}{5}}\left(\frac{1}{5}\right)^{-2}=-2$

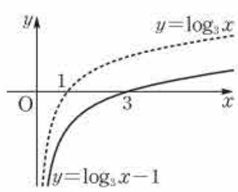
답 (1) -1 (2) 2 (3) -2

02 (1) $y=\log_3(x-2)$의 그래프는 $y=\log_3 x$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



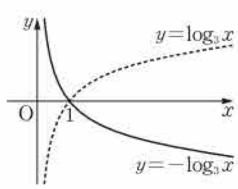
따라서 정의역은 $\{x|x>2\}$이고, 점근선의 방정식은 $x=2$이다.

(2) $y=\log_3 x-1$의 그래프는 $y=\log_3 x$의 그래프를 y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



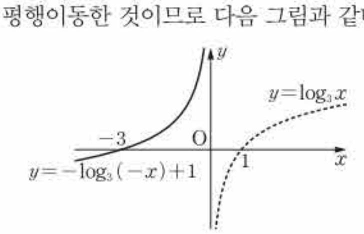
따라서 정의역은 $\{x|x>0\}$이고, 점근선의 방정식은 $x=0$이다.

(3) $y=-\log_3 x$의 그래프는 $y=\log_3 x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



따라서 정의역은 $\{x|x>0\}$이고, 점근선의 방정식은 $x=0$이다.

(4) $y=-\log_3(-x)+1$의 그래프는 $y=\log_3 x$의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 후 y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



따라서 정의역은 $\{x|x<0\}$이고, 점근선의 방정식은 $x=0$이다.

답 풀이 참조

Q BOX

$y=\log_3 x$의 그래프뿐만 아니라 그래프의 점근선도 같이 평행이동한 것으로 생각한다.

$y=-\log_3(-x)$

$\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{2}}{\cancel{3}}\cdot\frac{\cancel{3}}{\cancel{4}}\cdot\cdots\cdot\frac{\cancel{n-1}}{n}$
$=\frac{1}{n}$

03 (1) 함수 $y=\log_5 x$는 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하므로 $5\le x\le 125$에서

$x=125$일 때 최대이고, 최댓값은

$\log_5 125=\log_5 5^3=3$

$x=5$일 때 최소이고, 최솟값은

$\log_5 5=1$

(2) 함수 $y=\log_{\frac{1}{6}}x$는 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로 $\frac{1}{36}\le x\le 1$에서

$x=\frac{1}{36}$일 때 최대이고, 최댓값은

$\log_{\frac{1}{6}}\frac{1}{36}=\log_{\frac{1}{6}}\left(\frac{1}{6}\right)^2=2$

$x=1$일 때 최소이고, 최솟값은

$\log_{\frac{1}{6}}1=0$

(3) 함수 $y=\log_2(x+7)+3$은 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하므로 $-3\le x\le 9$에서

$x=9$일 때 최대이고, 최댓값은

$\log_2(9+7)+3=\log_2 16+3=\log_2 2^4+3$

$=4+3=7$

$x=-3$일 때 최소이고, 최솟값은

$\log_2(-3+7)+3=\log_2 4+3=\log_2 2^2+3$

$=2+3=5$

답 (1) 최댓값: 3, 최솟값: 1
(2) 최댓값: 2, 최솟값: 0
(3) 최댓값: 7, 최솟값: 5

04 $f\left(\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{1}{f(3)}=\log_4\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\log_4 3}$

$=-\log_4 3\cdot\frac{1}{\log_4 3}$

$=-1$

답 -1

05 $f(x)=\log_{\frac{1}{3}}\left(1-\frac{1}{x}\right)=\log_{\frac{1}{3}}\frac{x-1}{x}$이므로

$f(2)+f(3)+f(4)+\cdots+f(n)$

$=\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{2}+\log_{\frac{1}{3}}\frac{2}{3}+\log_{\frac{1}{3}}\frac{3}{4}+\cdots+\log_{\frac{1}{3}}\frac{n-1}{n}$

$=\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{n-1}{n}\right)$

$=\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{n}$

즉 $\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{n}=3$이므로

$\frac{1}{n}=\left(\frac{1}{3}\right)^3 \qquad \therefore n=27$

답 27

06 $(a, b)\in A$이므로

$b=\log_2 a$

ㄱ. $y=\log_2 x$의 x에 $2a$를 대입하면

$y=\log_2 2a=\log_2 2+\log_2 a=1+b$

$\therefore (2a, 2+b)\notin A$

ㄴ. $y=\log_2 x$의 x에 $\frac{1}{a}$을 대입하면

$$y=\log_2 \frac{1}{a}=-\log_2 a=-b$$

$$\therefore \left(\frac{1}{a},\ -b\right)\in A$$

ㄷ. $y=\log_2 x$의 x에 $\frac{a}{8}$를 대입하면

$$y=\log_2 \frac{a}{8}=\log_2 a-\log_2 8=b-3$$

$$\therefore \left(\frac{a}{8},\ b-3\right)\in A$$

ㄹ. $y=\log_2 x$의 x에 a^3을 대입하면

$$y=\log_2 a^3=3\log_2 a=3b$$

$$\therefore (a^3,\ 3b)\in A$$

이상에서 집합 A의 원소인 것은 ㄴ, ㄷ, ㄹ이다.

답 ⑤

쌤 한마디

함수 $f: X \longrightarrow Y$에서 정의역 X의 원소 x와 이에 대응하는 함숫값 $f(x)$의 순서쌍 $(x,\ f(x))$ 전체의 집합 $\{(x,\ f(x))\mid x\in X\}$를 함수 f의 그래프라 한다. 즉 **06**번에서 주어진 집합 A는 함수 $y=\log_2 x$의 그래프이다.

07 $y=\log_7(-x^2-2x+15)$에서

$-x^2-2x+15>0,\qquad x^2+2x-15<0$

$(x+5)(x-3)<0\qquad \therefore -5<x<3$

따라서 주어진 함수의 정의역은

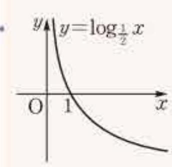
$\{x\mid -5<x<3\}$

답 $\{x\mid -5<x<3\}$

$a>0,\ a\neq 1$일 때, $\log_a f(x)$가 정의되려면 ➡ $f(x)>0$

08 ㄱ. 밑이 1보다 작으므로 $x_1<x_2$이면 $f(x_1)>f(x_2)$이다.

ㄴ. 그래프는 제1사분면과 제4사분면을 지난다.



ㄷ. 그래프는 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$의 그래프와 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ뿐이다.

답 ①

09 $y=\log_a bx$의 그래프에서 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로

$0<a<1$

또 $x=1$일 때 $y<0$이므로

$\log_a b<0\qquad \therefore b>1$

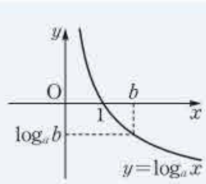
따라서 $y=\log_b ax$는 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하고, $x=1$일 때 $y=\log_b a=\frac{1}{\log_a b}<0$이므로 그래프의 개형은 ①과 같다.

답 ①

쌤 한마디

$0<a<1$일 때, $y=\log_a x$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $\log_a b<0$을 만족시키는 b의 값의 범위는

$b>1$



10 주어진 그래프는 $y=\log_2 x$의 그래프를 평행이동한 것이므로 그 식을 $y=\log_2(x-m)+n$이라 하자.

이 함수의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=m$이므로

$m=-1$

즉 $y=\log_2(x+1)+n$이고, 이 함수의 그래프가 점 $(1,\ -1)$을 지나므로

$-1=\log_2 2+n\qquad \therefore n=-2$

따라서 구하는 그래프의 식은

$y=\log_2(x+1)-2$

답 ④

11 ㄱ. $y=\log_3\frac{1}{x}=\log_3 x^{-1}=-\log_3 x$이므로 $y=\log_3 x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동하면 $y=\log_3\frac{1}{x}$의 그래프와 겹쳐진다.

ㄴ. $y=\log_9 x=\log_{3^2}x=\frac{1}{2}\log_3 x$이므로 $y=\log_3 x$의 그래프를 평행이동하거나 대칭이동하여 $y=\log_9 x$의 그래프와 겹쳐질 수 없다.

ㄷ. $y=\log_3(-27x)=\log_3(-x)+\log_3 27$

$=\log_3(-x)+3$

이므로 $y=\log_3 x$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 후 y축의 방향으로 3만큼 평행이동하면 $y=\log_3(-27x)$의 그래프와 겹쳐진다.

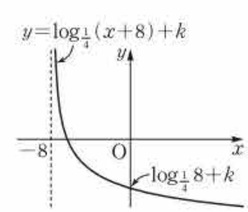
ㄹ. $y=\log_{\frac{1}{3}}(x+5)=\log_{3^{-1}}(x+5)=-\log_3(x+5)$이므로 $y=\log_3 x$의 그래프를 x축의 방향으로 -5만큼 평행이동한 후 x축에 대하여 대칭이동하면 $y=\log_{\frac{1}{3}}(x+5)$의 그래프와 겹쳐진다.

이상에서 $y=\log_3 x$의 그래프를 평행이동 또는 대칭이동하여 겹쳐질 수 있는 그래프의 식은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다.

답 ㄱ, ㄷ, ㄹ

참고 ㄹ. $y=\log_3 x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 -5만큼 평행이동해도 $y=\log_{\frac{1}{3}}(x+5)$의 그래프와 겹쳐진다.

12 $y=\log_{\frac{1}{4}}(x+8)+k$의 그래프가 제1사분면을 지나지 않으려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$\log_{\frac{1}{4}}8+k\le 0$

$x=0$에서의 함숫값

$\log_{2^{-2}}2^3+k\le 0,\qquad -\frac{3}{2}+k\le 0$

$\therefore k\le\frac{3}{2}$

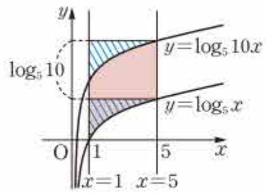
따라서 실수 k의 최댓값은 $\frac{3}{2}$이다.

답 ③

13 $y=\log_5 10x=\log_5 x+\log_5 10$의 그래프는 $y=\log_5 x$의 그래프를 y축의 방향으로 $\log_5 10$만큼 평행이동한 것이다.

따라서 오른쪽 그림에서 빗금 친 두 부분의 넓이가 같으므로 구하는 넓이는

$(5-1)\cdot\log_5 10$
$=4\log_5 10$



답 ③

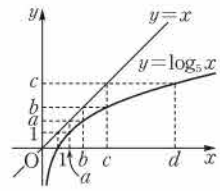
14 $\log_5 c=b$, $\log_5 d=c$이므로

$b-c=\log_5 c-\log_5 d$

$=\log_5 \frac{c}{d}$

따라서 $5^{b-c}=\frac{c}{d}$이므로

$\left(\frac{1}{5}\right)^{b-c}=\frac{d}{c}$



답 ⑤

15 세 점 A, M, B의 y좌표는 각각 $\log_2 6$, $\log_2 a$, $\log_2 24$이고 점 M이 $\overline{\mathrm{AB}}$의 중점이므로

$\log_2 a=\frac{\log_2 6+\log_2 24}{2}=\frac{1}{2}\log_2 144=\log_2 12$

$\therefore a=12$

답 12

좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$를 이은 선분 AB의 중점의 좌표는 $\left(\frac{x_1+x_2}{2},\ \frac{y_1+y_2}{2}\right)$

16 $x=\frac{1}{2}$을 $y=\log_{\frac{1}{4}} x$에 대입하면

$y=\log_{\frac{1}{4}}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ $\quad\therefore \mathrm{A}\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$

$x=\frac{1}{2}$을 $y=\log_{\sqrt{2}} x$에 대입하면

$y=\log_{\sqrt{2}}\frac{1}{2}=-2$ $\quad\therefore \mathrm{B}\left(\frac{1}{2},\ -2\right)$

$x=2$를 $y=\log_{\frac{1}{4}} x$에 대입하면

$y=\log_{\frac{1}{4}} 2=-\frac{1}{2}$ $\quad\therefore \mathrm{C}\left(2,\ -\frac{1}{2}\right)$

$x=2$를 $y=\log_{\sqrt{2}} x$에 대입하면

$y=\log_{\sqrt{2}} 2=2$ $\quad\therefore \mathrm{D}(2,\ 2)$

□ABCD는 평행사변형이므로 구하는 넓이는

$\left\{\frac{1}{2}-(-2)\right\}\cdot\left(2-\frac{1}{2}\right)=\frac{15}{4}$

답 $\frac{15}{4}$

$\overline{\mathrm{AB}}\,/\!/\,\overline{\mathrm{CD}}$, $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{CD}}$이므로 □ABCD는 평행사변형이다.

17 (1) $y=6^{x-5}$에서 $\quad x-5=\log_6 y$

$\therefore x=\log_6 y+5$

x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는

$y=\log_6 x+5$

(2) $y=\log_{\frac{1}{2}} 4x=-2+\log_{\frac{1}{2}} x$에서

$\log_{\frac{1}{2}} 4=\log_{2^{-1}} 2^2=-2$

$\log_{\frac{1}{2}} x=y+2$ $\quad\therefore x=\left(\frac{1}{2}\right)^{y+2}$

x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는

$y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x+2}$

답 (1) $y=\log_6 x+5$ (2) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x+2}$

참고 (2) $y=\log_{\frac{1}{2}} 4x$에서 $4x=\left(\frac{1}{2}\right)^y$이므로

$x=\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^y=\left(\frac{1}{2}\right)^{y+2}$

과 같이 x를 y에 대한 식으로 나타낼 수도 있다.

18 $y=\log_9(x-7)+2$에서

$\log_9(x-7)=y-2$, $\quad x-7=9^{y-2}$

$\therefore x=9^{y-2}+7$

x와 y를 서로 바꾸면

$y=9^{x-2}+7=3^{2x-4}+7$

따라서 $y=\log_9(x-7)+2$의 역함수는 $y=3^{2x-4}+7$이고, 이것이 $y=a^{2x+b}+c$와 일치해야 하므로

$a=3$, $b=-4$, $c=7$

$\therefore a-b-c=0$

답 0

19 $f^{-1}(7)=k$라 하면 $f(k)=7$이므로

$\log_2(k+5)+3=7$, $\quad\log_2(k+5)=4$

$k+5=2^4=16$ $\quad\therefore k=11$

답 ⑤

다른 풀이 $y=\log_2(x+5)+3$에서

$\log_2(x+5)=y-3$, $\quad x+5=2^{y-3}$

$\therefore x=2^{y-3}-5$

x와 y를 서로 바꾸면 $\quad y=2^{x-3}-5$

따라서 $f^{-1}(x)=2^{x-3}-5$이므로

$f^{-1}(7)=2^{7-3}-5=16-5=11$

20 함수 $y=\log_a x+b$의 그래프와 그 역함수의 그래프의 교점은 $y=\log_a x+b$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다.

이때 두 교점의 x좌표가 1, 3이므로 $y=\log_a x+b$의 그래프는 두 점 (1, 1), (3, 3)을 지난다.

$1=\log_a 1+b$에서 $\quad b=1$

$3=\log_a 3+1$에서 $\quad\log_a 3=2$

$a^2=3$ $\quad\therefore a=\sqrt{3}$ $(\because a>1)$

$\therefore ab=\sqrt{3}$

답 ②

21 $\frac{3}{2}<\frac{5}{3}<2$이고 함수 $y=\log_a x$는 $0<a<1$일 때 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로

$\log_a 2<\log_a\frac{5}{3}<\log_a\frac{3}{2}$

따라서 가장 큰 수는 $\log_a\frac{3}{2}$이다.

답 $\log_a\frac{3}{2}$

22 함수 $y=\log_5 x$는 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하므로 $1<a<5$에서

$\log_5 1<\log_5 a<\log_5 5$

$0<\log_5 a<1$

$\therefore 0<A<1$ ······ ㉠

$B=\log_a 5=\frac{1}{\log_5 a}$이므로

$a>0$, $a\neq 1$, $b>0$, $b\neq 1$일 때, $\log_a b=\frac{1}{\log_b a}$

$\frac{1}{\log_5 a}>1$ $\quad\therefore B>1$ ······ ㉡

$C=\log_5 \frac{1}{a}=\log_5 a^{-1}=-\log_5 a$이므로

$-1<-\log_5 a<0$

$\therefore -1<C<0$ ...... ㉢

㉠, ㉡, ㉢에서 $C<A<B$ 답 $C<A<B$

23 함수 $y=\log_{\frac{1}{4}}(x-4)+2$는 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로 $5\le x\le 20$에서 $x=5$일 때 최대이고, 최댓값은

$\log_{\frac{1}{4}}(5-4)+2=\log_{\frac{1}{4}}1+2=0+2=2$

따라서 $a=5$, $b=2$이므로

$a+b=7$ 답 ①

24 함수 $y=\log_3(x-k)-4$는 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하므로 $8\le x\le 32$에서 $x=32$일 때 최댓값, $x=8$일 때 최솟값을 갖는다.

즉 $\log_3(32-k)-4=-1$이므로

$\log_3(32-k)=3$

$32-k=3^3=27$ $\therefore k=5$

따라서 $y=\log_3(x-5)-4$이므로 구하는 최솟값은

$\log_3(8-5)-4=\log_3 3-4$

$=1-4=-3$ 답 -3

25 $f(x)=x^2+2x+3$으로 놓으면

$f(x)=(x+1)^2+2$

$f(-3)=6$, $f(-1)=2$, $f(4)=27$이므로 $-3\le x\le 4$에서

$2\le f(x)\le 27$

함수 $y=\log_2(x^2+2x+3)=\log_2 f(x)$는 $f(x)$의 값이 증가하면 y의 값도 증가하므로

$f(x)=27$일 때 최대이고, 최댓값은

$\log_2 27=3\log_2 3$

$f(x)=2$일 때 최소이고, 최솟값은

$\log_2 2=1$

따라서 구하는 곱은 $3\log_2 3$ 답 ③

26 $f(x)=x^2-2x+k$로 놓으면

$f(x)=(x-1)^2+k-1$

함수 $y=\log_{\frac{1}{3}}(x^2-2x+k)=\log_{\frac{1}{3}}f(x)$는 $f(x)$의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로 $f(x)$가 최소일 때 y는 최댓값을 갖는다.

따라서 $y=\log_{\frac{1}{3}}f(x)$는 $f(x)=k-1$일 때 최댓값 -2를 가지므로

$\log_{\frac{1}{3}}(k-1)=-2$, $k-1=\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}=9$

$\therefore k=10$ 답 10

27 $y=(\log_5 x)^2+\log_{\frac{1}{5}}x^4-3$

$=(\log_5 x)^2-4\log_5 x-3$

$\log_5 x=t$로 놓으면 주어진 함수는

$y=t^2-4t-3=(t-2)^2-7$

QBOX

$t=2$, 즉 $\log_5 x=2$에서 $x=5^2=25$

$\log_x y=\log_y x$에서

$\frac{\log y}{\log x}=\frac{\log x}{\log y}$

$(\log x)^2=(\log y)^2$

$\log x>0$, $\log y>0$이므로

$\log x=\log y$

$\therefore x=y$

$-1\le x\le 6$에서 함수 $y=f(x)$는 $x=1$일 때 최솟값 $k-1$을 갖는다.

$\log_{5^{-1}}x^4=-4\log_5 x$

따라서 y는 $t=2$, 즉 $x=25$일 때 최솟값 -7을 가지므로

$a=25$, $b=-7$

$\therefore a+b=18$ 답 18

28 $\log_{\frac{1}{2}}x=t$로 놓으면 주어진 함수는

$y=t^2-t=\left(t-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$

이때 $\frac{1}{2}\le x\le 4$에서

$\log_{\frac{1}{2}}4\le\log_{\frac{1}{2}}x\le\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}$

$\therefore -2\le t\le 1$

따라서 $-2\le t\le 1$에서 함수 $y=\left(t-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$은 $t=-2$일 때 최대이고, 최댓값은

$\left(-2-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}=6$

$t=\frac{1}{2}$일 때 최소이고, 최솟값은

$\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}=-\frac{1}{4}$

따라서 $M=6$, $m=-\frac{1}{4}$이므로

$Mm=-\frac{3}{2}$ 답 ①

29 $\log_{\sqrt{x}}y+\log_y x^2=2\log_x y+2\log_y x$

이때 $x>1$, $y>1$에서 $\log_x y>0$, $\log_y x>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$2\log_x y+2\log_y x\ge 2\sqrt{2\log_x y\cdot 2\log_y x}$

$=2\cdot 2=4$

(단, 등호는 $x=y$일 때 성립)

따라서 구하는 최솟값은 4이다. 답 ④

30 $y=\log_{\frac{1}{2}}x-\log_x 512=\log_{\frac{1}{2}}x-\log_x 2^9$

$=\log_{\frac{1}{2}}x-9\log_x 2=\log_{\frac{1}{2}}x+\frac{9}{\log_{\frac{1}{2}}x}$

$0<x<1$에서 $\log_{\frac{1}{2}}x>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\log_{\frac{1}{2}}x+\frac{9}{\log_{\frac{1}{2}}x}\ge 2\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}x\cdot\frac{9}{\log_{\frac{1}{2}}x}}$

$=2\cdot 3=6$

이때 등호는 $\log_{\frac{1}{2}}x=\frac{9}{\log_{\frac{1}{2}}x}$일 때 성립하므로

$(\log_{\frac{1}{2}}x)^2=9$, $\log_{\frac{1}{2}}x=3$ ($\because \log_{\frac{1}{2}}x>0$)

$\therefore x=\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$

따라서 주어진 함수는 $x=\frac{1}{8}$일 때 최솟값 6을 가지므로

$a=\frac{1}{8}$, $b=6$

$\therefore ab=\frac{3}{4}$ 답 $\frac{3}{4}$

08 로그함수의 활용

W 31쪽

01 (1) 진수의 조건에서 $x-2>0$이므로

$x>2$ ...... ㉠

$\log_{\frac{1}{5}}(x-2)=-1$에서 $x-2=5$

$\therefore x=7$

$x=7$은 ㉠을 만족시키므로 주어진 방정식의 해이다.

(2) 진수의 조건에서 $x-1>0$, $8-2x>0$이므로

$x>1$, $x<4$

$\therefore 1<x<4$ ...... ㉠

$\log_7(x-1)=\log_7(8-2x)$에서

$x-1=8-2x$, $3x=9$

$\therefore x=3$

$x=3$은 ㉠을 만족시키므로 주어진 방정식의 해이다.

(3) $\log_3 x=t$로 놓으면 $t^2-4t+3=0$

$(t-1)(t-3)=0$ $\therefore t=1$ 또는 $t=3$

즉 $\log_3 x=1$ 또는 $\log_3 x=3$이므로

$x=3$ 또는 $x=3^3=27$

(4) 밑의 조건에서 $x^2>0$, $x^2\neq1$, $5x>0$, $5x\neq1$이므로

$x\neq0$, $x\neq-1$, $x\neq1$, $x>0$, $x\neq\frac{1}{5}$이므로 $0<x<\frac{1}{5}$ 또는 $\frac{1}{5}<x<1$ 또는 $x>1$

$0<x<\frac{1}{5}$ 또는 $\frac{1}{5}<x<1$

또는 $x>1$ ...... ㉠

$\log_{x^2}6=\log_{5x}6$에서 진수가 같으므로

$x^2=5x$, $x^2-5x=0$

$x(x-5)=0$ $\therefore x=0$ 또는 $x=5$

㉠에 의하여 주어진 방정식의 해는

$x=5$

(5) $x^{\log x}=x$의 양변에 상용로그를 취하면

$\log x^{\log x}=\log x$, $\log x\cdot\log x=\log x$

$\therefore (\log x)^2-\log x=0$

$\log x=t$로 놓으면 $t^2-t=0$

$t(t-1)=0$ $\therefore t=0$ 또는 $t=1$

즉 $\log x=0$ 또는 $\log x=1$이므로

$x=1$ 또는 $x=10$

답 (1) $x=7$ (2) $x=3$ (3) $x=3$ 또는 $x=27$ (4) $x=5$ (5) $x=1$ 또는 $x=10$

02 (1) 진수의 조건에서 $x+1>0$이므로

$x>-1$ ...... ㉠

$\log_2(x+1)\le3$에서 $\log_2(x+1)\le\log_2 8$

$3=\log_2 2^3=\log_2 8$

밑이 1보다 크므로 $x+1\le8$

$\therefore x\le7$ ...... ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$-1<x\le7$

(2) 진수의 조건에서 $3-x>0$, $x+5>0$이므로

$x<3$, $x>-5$

$\therefore -5<x<3$ ...... ㉠

$\log_{\frac{1}{7}}(3-x)>\log_{\frac{1}{7}}(x+5)$에서 밑이 1보다 작으므로

$3-x<x+5$

$2x>-2$ $\therefore x>-1$ ...... ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$-1<x<3$

(3) 진수의 조건에서 $x>0$ ...... ㉠

$\log_{\frac{1}{2}}x=t$로 놓으면 $t^2-t-6\ge0$

$(t+2)(t-3)\ge0$ $\therefore t\le-2$ 또는 $t\ge3$

즉 $\log_{\frac{1}{2}}x\le-2$ 또는 $\log_{\frac{1}{2}}x\ge3$이므로

$\log_{\frac{1}{2}}x\le\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$ 또는 $\log_{\frac{1}{2}}x\ge\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^3$

밑이 1보다 작으므로

$x\le\frac{1}{8}$ 또는 $x\ge4$ ...... ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$0<x\le\frac{1}{8}$ 또는 $x\ge4$

(4) 진수의 조건에서 $x>0$ ...... ㉠

$x^{\log_3 x}<81$의 양변에 밑이 3인 로그를 취하면

$\log_3 x^{\log_3 x}<\log_3 81$, $\log_3 x\cdot\log_3 x<4$

$\therefore (\log_3 x)^2-4<0$

$\log_3 x=t$로 놓으면 $t^2-4<0$

$(t+2)(t-2)<0$ $\therefore -2<t<2$

즉 $-2<\log_3 x<2$이므로

$\log_3 3^{-2}<\log_3 x<\log_3 3^2$

밑이 1보다 크므로 $\frac{1}{9}<x<9$ ...... ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$\frac{1}{9}<x<9$

답 (1) $-1<x\le7$ (2) $-1<x<3$ (3) $0<x\le\frac{1}{8}$ 또는 $x\ge4$ (4) $\frac{1}{9}<x<9$

03 진수의 조건에서 $7x+3>0$이므로

$x>-\frac{3}{7}$

$3\log_8(7x+3)=2$에서 $\log_2(7x+3)=\log_2 2^2$

$7x+3=4$ $\therefore x=\frac{1}{7}$

진수의 조건을 만족시킨다.

따라서 $\alpha=\frac{1}{7}$이므로 $\log_7\frac{1}{\alpha}=\log_7 7=1$

답 1

04 진수의 조건에서 $9-x>0$, $9+x>0$이므로

$x<9$, $x>-9$ $\therefore -9<x<9$ ...... ㉠

$\log_{\frac{1}{2}}(9-x)+\log_{\frac{1}{2}}(9+x)=-5$에서

$\log_{\frac{1}{2}}(9-x)(9+x)=\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{-5}$

$(9-x)(9+x)=32$, $81-x^2=32$

$x^2=49$ $\therefore x=\pm7$ ($\because$ ㉠)

따라서 모든 근의 곱은

$-7\cdot7=-49$

답 ③

05 진수의 조건에서 $x>0$, $(x+2)^2>0$이므로

$x>0$, $x\neq-2$ $\quad\therefore x>0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$\log_{\frac{1}{3}}x+\log_{\frac{1}{9}}(x+2)^2=-1$에서

$\log_{\frac{1}{3}}x+\log_{\frac{1}{3}}(x+2)=-1$

$\log_{\frac{1}{3}}x(x+2)=\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$

$x(x+2)=3$, $\quad x^2+2x-3=0$

$(x+3)(x-1)=0$ $\quad\therefore x=1$ ($\because$ ㉠)

답 $x=1$

06 $\log_4 x^2+2\log_x 4-5=0$에서

$2\log_4 x+\frac{2}{\log_4 x}-5=0$

$\log_4 x=t\ (t\neq0)$로 놓으면 $\quad 2t+\frac{2}{t}-5=0$

양변에 t를 곱한다.

$2t^2-5t+2=0$, $\quad (2t-1)(t-2)=0$

$\therefore t=\frac{1}{2}$ 또는 $t=2$

즉 $\log_4 x=\frac{1}{2}$ 또는 $\log_4 x=2$이므로

$x=4^{\frac{1}{2}}=2$ 또는 $x=4^2=16$

따라서 두 근의 곱은

$2\cdot16=32$

답 ④

07 $(\log_3 9x)^2-\log_3 x^7-2=0$에서

$(2+\log_3 x)^2-7\log_3 x-2=0$

$4+4\log_3 x+(\log_3 x)^2-7\log_3 x-2=0$

$\therefore (\log_3 x)^2-3\log_3 x+2=0$

$\log_3 x=t$로 놓으면 $\quad t^2-3t+2=0$

$(t-1)(t-2)=0$ $\quad\therefore t=1$ 또는 $t=2$

즉 $\log_3 x=1$ 또는 $\log_3 x=2$이므로

$x=3$ 또는 $x=3^2=9$

따라서 $\alpha=3$, $\beta=9$ 또는 $\alpha=9$, $\beta=3$이므로

$\alpha^2+\beta^2=3^2+9^2=90$

답 90

08 $\log_{\frac{1}{5}}x\cdot\log_{\frac{1}{5}}x-\log_5 x^2+k=0$에서

$(\log_{\frac{1}{5}}x)^2+2\log_{\frac{1}{5}}x+k=0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

방정식 ㉠의 한 근이 $\frac{1}{25}$이므로

$\left(\log_{\frac{1}{5}}\frac{1}{25}\right)^2+2\log_{\frac{1}{5}}\frac{1}{25}+k=0$

$2^2+2\cdot2+k=0$ $\quad\therefore k=-8$

$k=-8$을 ㉠에 대입하면

$(\log_{\frac{1}{5}}x)^2+2\log_{\frac{1}{5}}x-8=0$

$\log_{\frac{1}{5}}x=t$로 놓으면 $\quad t^2+2t-8=0$

$(t+4)(t-2)=0$ $\quad\therefore t=-4$ 또는 $t=2$

즉 $\log_{\frac{1}{5}}x=-4$ 또는 $\log_{\frac{1}{5}}x=2$이므로

$x=\left(\frac{1}{5}\right)^{-4}=625$ 또는 $x=\left(\frac{1}{5}\right)^2=\frac{1}{25}$

따라서 다른 한 근은 625이다.

답 625

09 $\begin{cases}\log_2 x-\log_5 y=2\\ \log_4 x+2\log_5 y=\frac{7}{2}\end{cases}$에서

$\begin{cases}\log_2 x-\log_5 y=2\\ \frac{1}{2}\log_2 x+2\log_5 y=\frac{7}{2}\end{cases}$

$\log_2 x=X$, $\log_5 y=Y$로 놓으면

$\begin{cases}X-Y=2\\ \frac{1}{2}X+2Y=\frac{7}{2}\end{cases}$

이 연립방정식을 풀면

$X=3$, $Y=1$

즉 $\log_2 x=3$, $\log_5 y=1$이므로

$x=2^3=8$, $y=5$

따라서 $\alpha=8$, $\beta=5$이므로

$\alpha+\beta=13$

답 ⑤

10 $\log_{\sqrt{2}}x=t$로 놓으면

$t^2+kt-7=0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

주어진 방정식의 두 근을 α, β라 하면 $\alpha\beta=8$이고 방정식 ㉠의 두 근은 $\log_{\sqrt{2}}\alpha$, $\log_{\sqrt{2}}\beta$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\log_{\sqrt{2}}\alpha+\log_{\sqrt{2}}\beta=-k$

$\log_{\sqrt{2}}\alpha\beta=-k$, $\quad \log_{\sqrt{2}}8=-k$

$\log_{\sqrt{2}}8=\log_{2^{\frac{1}{2}}}2^3=6$

$\therefore k=-6$

답 ①

11 밑과 진수의 조건에서 $3x-5>0$, $3x-5\neq1$, $x+1>0$, $x+1\neq1$, $x+2>0$이므로

$\frac{5}{3}<x<2$ 또는 $x>2$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

밑이 같은 경우

(ⅰ) $3x-5=x+1$일 때,

$2x=6$ $\quad\therefore x=3$

$x=3$은 ㉠을 만족시키므로 주어진 방정식의 해이다.

진수가 1인 경우

(ⅱ) $x+2=1$일 때, $\quad x=-1$

$x=-1$은 ㉠을 만족시키지 않으므로 주어진 방정식의 해가 아니다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 주어진 방정식의 해는

$x=3$

답 $x=3$

12 밑과 진수의 조건에서 $x^2-2x+1>0$, $x^2-2x+1\neq1$, $5-x>0$이므로

$(x-1)^2>0$이므로 $x\neq1$

$x^2-2x\neq0$이므로 $x(x-2)\neq0$ $\quad\therefore x\neq0,\ x\neq2$

$x<0$ 또는 $0<x<1$ 또는 $1<x<2$ 또는 $2<x<5$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

밑이 같은 경우

(ⅰ) $x^2-2x+1=4$일 때,

$x^2-2x-3=0$, $\quad (x+1)(x-3)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=3$

$x=-1$, $x=3$은 ㉠을 만족시키므로 주어진 방정식의 해이다.

진수가 1인 경우

(ⅱ) $5-x=1$일 때, $\quad x=4$

$x=4$는 ㉠을 만족시키므로 주어진 방정식의 해이다.

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 해는

$x=-1$ 또는 $x=3$ 또는 $x=4$

이므로 모든 x의 값의 합은

$-1+3+4=6$ 답 ③

13 $x^{\log_2 x}-16x^3=0$에서 $x^{\log_2 x}=16x^3$

$x^{\log_2 x}=16x^3$의 양변에 밑이 2인 로그를 취하면

$\log_2 x^{\log_2 x}=\log_2 16x^3$

$\log_2 x\cdot\log_2 x=4+3\log_2 x$

$\therefore (\log_2 x)^2-3\log_2 x-4=0$

$\log_2 x=t$로 놓으면 $t^2-3t-4=0$

$(t+1)(t-4)=0$ $\therefore t=-1$ 또는 $t=4$

즉 $\log_2 x=-1$ 또는 $\log_2 x=4$이므로

$x=2^{-1}=\frac{1}{2}$ 또는 $x=2^4=16$

따라서 모든 근의 곱은

$\frac{1}{2}\cdot16=8$ 답 ④

14 $x^{\log x-2}=1000$의 양변에 상용로그를 취하면

$\log x^{\log x-2}=\log 1000$

$(\log x-2)\log x=3$

$\therefore (\log x)^2-2\log x-3=0$

$\log x=t$로 놓으면 $t^2-2t-3=0$

$(t+1)(t-3)=0$ $\therefore t=-1$ 또는 $t=3$

즉 $\log x=-1$ 또는 $\log x=3$이므로

$x=10^{-1}$ 또는 $x=10^3$

$\therefore \log_\alpha\beta+\log_\beta\alpha=\log_{10^{-1}}10^3+\log_{10^3}10^{-1}$

$=-3-\frac{1}{3}=-\frac{10}{3}$

답 $-\frac{10}{3}$

15 진수의 조건에서 $x^2+4x+4>0$이므로

$(x+2)^2>0$

$\therefore x<-2$ 또는 $x>-2$ …… ㉠

$\log_{\frac{1}{3}}(x^2+4x+4)\ge-2$에서

$\log_{\frac{1}{3}}(x^2+4x+4)\ge\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$

밑이 1보다 작으므로 $x^2+4x+4\le9$

$x^2+4x-5\le0$, $(x+5)(x-1)\le0$

$\therefore -5\le x\le1$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$-5\le x<-2$ 또는 $-2<x\le1$

따라서 정수 x는 -5, -4, -3, -1, 0, 1의 6개이다.

답 ②

16 진수의 조건에서 $f(x)>0$, $x+4>0$

$f(x)>0$에서 $x<-6$ 또는 $x>-1$

$x+4>0$에서 $x>-4$

$\therefore x>-1$ …… ㉠

Q BOX

이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=x+4$보다 아래쪽에 있거나 만나는 부분의 x의 값의 범위

$\log_\alpha\beta+\log_\beta\alpha$

$=\frac{\log\beta}{\log\alpha}+\frac{\log\alpha}{\log\beta}$

$=\frac{\log10^3}{\log10^{-1}}+\frac{\log10^{-1}}{\log10^3}$

$=-3-\frac{1}{3}=-\frac{10}{3}$

과 같이 구할 수도 있다.

$\log_5 f(x)+\log_{\frac{1}{5}}(x+4)\le0$에서

$\log_5 f(x)-\log_5(x+4)\le0$

$\therefore \log_5 f(x)\le\log_5(x+4)$

밑이 1보다 크므로 $f(x)\le x+4$

$\therefore -5\le x\le2$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$-1<x\le2$

따라서 정수 x는 0, 1, 2이므로 구하는 합은

$0+1+2=3$ 답 3

17 $\log_2(x^2-2x+8)<4$에서

$x^2-2x+8=(x-1)^2+7>0$

이므로 모든 실수 x가 진수의 조건을 만족시킨다.

$\log_2(x^2-2x+8)<\log_2 16$에서 밑이 1보다 크므로

$x^2-2x+8<16$, $x^2-2x-8<0$

$(x+2)(x-4)<0$

$\therefore -2<x<4$ …… ㉠

$\log_{\frac{1}{7}}(2x-4)\ge\log_{\frac{1}{7}}(x+3)$의 진수의 조건에서

$2x-4>0$, $x+3>0$이므로

$x>2$, $x>-3$

$\therefore x>2$ …… ㉡

$\log_{\frac{1}{7}}(2x-4)\ge\log_{\frac{1}{7}}(x+3)$에서 밑이 1보다 작으므로

$2x-4\le x+3$ $\therefore x\le7$ …… ㉢

㉡, ㉢의 공통 범위를 구하면

$2<x\le7$ …… ㉣

따라서 주어진 연립부등식의 해는 ㉠, ㉣의 공통 범위이므로

$2<x<4$ 답 $2<x<4$

18 진수의 조건에서 $x>0$ …… ㉠

$\log_{\frac{1}{3}}x=t$로 놓으면 $t^2-t-2\ge0$

$(t+1)(t-2)\ge0$ $\therefore t\le-1$ 또는 $t\ge2$

즉 $\log_{\frac{1}{3}}x\le-1$ 또는 $\log_{\frac{1}{3}}x\ge2$이므로

$\log_{\frac{1}{3}}x\le\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$ 또는 $\log_{\frac{1}{3}}x\ge\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^2$

밑이 1보다 작으므로

$x\le\frac{1}{9}$ 또는 $x\ge3$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$0<x\le\frac{1}{9}$ 또는 $x\ge3$ 답 ④

19 진수의 조건에서 $8x>0$, $\frac{x}{4}>0$이므로

$x>0$ …… ㉠

$\log_{\frac{1}{2}}8x\cdot\log_2\frac{x}{4}>0$에서

$(\log_{\frac{1}{2}}8+\log_{\frac{1}{2}}x)(\log_2 x-\log_2 4)>0$

$-(\log_2 8+\log_2 x)(\log_2 x-\log_2 4)>0$

$\therefore (\log_2 x+3)(\log_2 x-2)<0$

$\log_2 x=t$로 놓으면 $\quad (t+3)(t-2)<0$

$\therefore -3<t<2$

즉 $-3<\log_2 x<2$이므로

$\log_2 2^{-3}<\log_2 x<\log_2 2^2$

밑이 1보다 크므로 $\quad \frac{1}{8}<x<4 \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$\frac{1}{8}<x<4$

따라서 $\alpha=\frac{1}{8}$, $\beta=4$이므로

$\alpha\beta=\frac{1}{2}$ 답 $\frac{1}{2}$

20 $\log_5 x=t$로 놓으면

$t^2+at+b<0 \quad \cdots\cdots$ ㉠

$\frac{1}{5}<x<125$에서 $\quad \log_5 \frac{1}{5}<\log_5 x<\log_5 125$

$\therefore -1<t<3$

해가 $-1<t<3$이고 t^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(t+1)(t-3)<0 \quad \therefore t^2-2t-3<0$

이 부등식이 ㉠과 일치해야 하므로

$a=-2$, $b=-3$

$\therefore a-b=1$ 답 ③

해가 $\alpha<x<\beta$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은
$(x-\alpha)(x-\beta)<0$

21 진수의 조건에서 $\quad x>0 \quad \cdots\cdots$ ㉠

$x^{\log_{\frac{1}{3}} x}\geq x$의 양변에 밑이 $\frac{1}{3}$인 로그를 취하면

$\log_{\frac{1}{3}} x^{\log_{\frac{1}{3}} x}\leq \log_{\frac{1}{3}} x$, $\quad \log_{\frac{1}{3}} x\cdot\log_{\frac{1}{3}} x<\log_{\frac{1}{3}} x$

$\therefore (\log_{\frac{1}{3}} x)^2-\log_{\frac{1}{3}} x\leq 0$

$0<\frac{1}{3}<1$이므로 부등호의 방향이 바뀐다.

$\log_{\frac{1}{3}} x=t$로 놓으면 $\quad t^2-t\leq 0$

$t(t-1)\leq 0 \quad \therefore 0\leq t\leq 1$

즉 $0\leq \log_{\frac{1}{3}} x\leq 1$이므로

$\log_{\frac{1}{3}} 1\leq \log_{\frac{1}{3}} x\leq \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{3}$

밑이 1보다 작으므로 $\quad \frac{1}{3}\leq x\leq 1 \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$\frac{1}{3}\leq x\leq 1$

따라서 $\alpha=\frac{1}{3}$, $\beta=1$이므로

$\alpha+\beta=\frac{4}{3}$ 답 ④

22 진수의 조건에서 $\quad x>0 \quad \cdots\cdots$ ㉠

$x^{\log_5 x}<\frac{125}{x^2}$의 양변에 밑이 5인 로그를 취하면

$\log_5 x^{\log_5 x}<\log_5 \frac{125}{x^2}$

$\log_5 x\cdot\log_5 x<\log_5 125-2\log_5 x$

$\therefore (\log_5 x)^2+2\log_5 x-3<0$

$\log_5 x=t$로 놓으면 $\quad t^2+2t-3<0$

$(t+3)(t-1)<0 \quad \therefore -3<t<1$

즉 $-3<\log_5 x<1$이므로

$\log_5 5^{-3}<\log_5 x<\log_5 5$

밑이 1보다 크므로 $\quad \frac{1}{125}<x<5 \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$\frac{1}{125}<x<5$

$\frac{1}{125}<x<5$를 만족시키는 자연수 x는 1, 2, 3, 4이다.

따라서 자연수 x의 최댓값은 4이다. 답 4

23 $(\log x)^2-\log ax^4+5>0$에서

$(\log x)^2-(\log a+4\log x)+5>0$

$\therefore (\log x)^2-4\log x-\log a+5>0$

$\log x=t$로 놓으면 $\quad t^2-4t-\log a+5>0$

모든 양수 x에 대하여 주어진 부등식이 성립하려면 모든 실수 t에 대하여 위의 부등식이 성립해야 하므로 이차방정식 $t^2-4t-\log a+5=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-2)^2-(-\log a+5)<0$

$\log a<1$, $\quad \log a<\log 10$

밑이 1보다 크므로 $\quad a<10$

이때 $a>0$이므로 $\quad 0<a<10$

따라서 자연수 a는 1, 2, 3, ⋯, 9의 9개이다. 답 ③

24 주어진 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(1+\log_3 a)^2-(7+\log_3 a)>0$

$\therefore (\log_3 a)^2+\log_3 a-6>0$

$\log_3 a=t$로 놓으면 $\quad t^2+t-6>0$

$(t+3)(t-2)>0 \quad \therefore t<-3$ 또는 $t>2$

즉 $\log_3 a<-3$ 또는 $\log_3 a>2$이므로

$\log_3 a<\log_3 3^{-3}$ 또는 $\log_3 a>\log_3 3^2$

밑이 1보다 크므로 $\quad a<\frac{1}{27}$ 또는 $a>9$

이때 $a>0$이므로 $\quad 0<a<\frac{1}{27}$ 또는 $a>9$

따라서 자연수 a의 최솟값은 10이다. 답 10

25 $x^{\log_2 x}\geq (8x)^{2k}$의 양변에 밑이 2인 로그를 취하면

$\log_2 x^{\log_2 x}\geq \log_2 (8x)^{2k}$

$\log_2 x\cdot\log_2 x\geq 2k\log_2 8x$

$(\log_2 x)^2\geq 2k(3+\log_2 x)$

$\therefore (\log_2 x)^2-2k\log_2 x-6k\geq 0$

$\log_2 x=t$로 놓으면 $\quad t^2-2kt-6k\geq 0$

임의의 양수 x에 대하여 주어진 부등식이 성립하려면 모든 실수 t에 대하여 위의 부등식이 성립해야 하므로 이차방정식 $t^2-2kt-6k=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-k)^2-(-6k)\leq 0$

$k^2+6k\leq 0$, $\quad k(k+6)\leq 0$

$\therefore -6\leq k\leq 0$

따라서 $\alpha=-6$, $\beta=0$이므로

$\beta-\alpha=6$ 답 ④

26 평균 해수면에서의 높이가 3320 m 이상 9960 m 이하이므로

$3.32 \le h \le 9.96$

$3.32 \le -3.32\log P \le 9.96$

$-3 \le \log P \le -1$

$\log 10^{-3} \le \log P \le \log 10^{-1}$

밑이 1보다 크므로 $\frac{1}{1000} \le P \le \frac{1}{10}$

따라서 기압의 범위는 $\frac{1}{1000}$기압 이상 $\frac{1}{10}$기압 이하이다.

답 $\frac{1}{1000}$기압 이상 $\frac{1}{10}$기압 이하

3320 m=3.32 km

9960 m=9.96 km

27 n년 후 관광객 수가 2배가 된다고 하면

$a \times 1.05^n = 2a \quad \therefore 1.05^n = 2$

양변에 상용로그를 취하면

$n\log 1.05 = \log 2$

$\therefore n = \frac{\log 2}{\log 1.05} = \frac{0.3}{0.02} = 15$

따라서 관광객 수가 올해의 2배가 되는 것은 지금으로부터 15년 후이다. 답 15년

28 현재의 미세 먼지 농도를 a라 하면 n년 후 미세 먼지 농도는

$a \times (1-0.07)^n = a \times 0.93^n$

n년 후 미세 먼지 농도가 현재의 절반이 된다고 하면

$a \times 0.93^n = \frac{1}{2}a \quad \therefore 0.93^n = \frac{1}{2}$

양변에 상용로그를 취하면

$n\log 0.93 = \log\frac{1}{2}, \quad n(\log 9.3 - 1) = -\log 2$

$n(0.97-1) = -0.3$

$\therefore n = \frac{0.3}{0.03} = 10$

따라서 미세 먼지 농도가 현재의 절반이 되는 것은 지금으로부터 10년 후이다. 답 10년

$\log 0.93$
$=\log(9.3 \times 10^{-1})$
$=\log 9.3 - 1$

29 현재 두 제품의 개발에 투자하는 금액을 K원이라 하면 n년 후 두 제품 A, B의 개발에 투자한 금액은 각각

$K(1+0.1)^n = K \times 1.1^n$ (원),

$K(1+0.25)^n = K \times 1.25^n$ (원)

n년 후 제품 B에 투자한 금액이 처음으로 제품 A에 투자한 금액의 10배 이상이 된다고 하면

$K \times 1.25^n \ge 10 \times K \times 1.1^n$

$\therefore 1.25^n \ge 10 \times 1.1^n \ (\because K > 0)$

양변에 상용로그를 취하면

$n\log 1.25 \ge \log 10 + n\log 1.1$

$0.097n \ge 1 + 0.041n, \quad 0.056n \ge 1$

$\therefore n \ge 17.\cdots$

따라서 현재로부터 18년 후 제품 B에 투자한 금액이 처음으로 제품 A에 투자한 금액의 10배 이상이 된다.

답 ⑤

05 삼각함수

09 일반각과 호도법

W 36쪽

01 (1) $450° = 360° \times 1 + 90°$이므로

$360° \times n + 90°$

(2) $-380° = 360° \times (-2) + 340°$이므로

$360° \times n + 340°$

답 (1) $360° \times n + 90°$ (2) $360° \times n + 340°$

02 (1) $510° = 360° \times 1 + 150°$

따라서 510°는 제2사분면의 각이다.

(2) $750° = 360° \times 2 + 30°$

따라서 750°는 제1사분면의 각이다.

(3) $-170° = 360° \times (-1) + 190°$

따라서 −170°는 제3사분면의 각이다.

(4) $-800° = 360° \times (-3) + 280°$

따라서 −800°는 제4사분면의 각이다.

답 (1) 제2사분면 (2) 제1사분면 (3) 제3사분면 (4) 제4사분면

호도법과 육십분법

① (호도법의 각) $=$(육십분법의 각) $\times \frac{\pi}{180}$

② (육십분법의 각) $=$(호도법의 각) $\times \frac{180°}{\pi}$

03 (1) $108° = 108 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{3}{5}\pi$

(2) $-225° = (-225) \cdot \frac{\pi}{180} = -\frac{5}{4}\pi$

(3) $\frac{3}{4}\pi = \frac{3}{4}\pi \cdot \frac{180°}{\pi} = 135°$

(4) $-\frac{7}{5}\pi = \left(-\frac{7}{5}\pi\right) \cdot \frac{180°}{\pi} = -252°$

답 (1) $\frac{3}{5}\pi$ (2) $-\frac{5}{4}\pi$ (3) 135° (4) −252°

04 $\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot l = 20\pi$이므로 $l = 8\pi$

$5\theta = 8\pi$이므로 $\theta = \frac{8}{5}\pi$ 답 $\theta = \frac{8}{5}\pi,\ l = 8\pi$

05 ① $-860° = 360° \times (-3) + 220°$

② $-280° = 360° \times (-1) + 80°$

③ $400° = 360° \times 1 + 40°$

④ $950° = 360° \times 2 + 230°$

⑤ $1190° = 360° \times 3 + 110°$

답 ④

$40° < 80° < 110° < 220° < 230°$

06 ① $-650° = 360° \times (-2) + 70°$

② $-290° = 360° \times (-1) + 70°$

③ $70° = 360° \times 0 + 70°$

④ $430° = 360° \times 1 + 70°$

⑤ $890° = 360° \times 2 + 170°$

답 ⑤

07 ㄱ. $-175° = 360° \times (-1) + 185°$ ➡ 제3사분면

ㄴ. $-80° = 360° \times (-1) + 280°$ ➡ 제4사분면

ㄷ. $595°=360°\times1+235°$ ➡ 제3사분면

ㄹ. $1260°=360°\times3+180°$

이상에서 제3사분면의 각인 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ㄱ, ㄷ

08 동경 OP가 나타내는 각의 크기는

$130°-280°=-150°$

이때 $-150°=360°\times(-1)+210°$이므로 동경 OP는 제3사분면에 있다. 답 제3사분면

09 2θ가 제4사분면의 각이므로

$360°\times n+270°<2\theta<360°\times n+360°$ (n은 정수)

$\therefore 180°\times n+135°<\theta<180°\times n+180°$

(i) $n=2k$ (k는 정수)일 때,

$180°\times2k+135°<\theta<180°\times2k+180°$

$\therefore 360°\times k+135°<\theta<360°\times k+180°$

따라서 θ는 제2사분면의 각이다.

(ii) $n=2k+1$ (k는 정수)일 때,

$180°\times(2k+1)+135°<\theta<180°\times(2k+1)+180°$

$\therefore 360°\times k+315°<\theta<360°\times k+360°$

따라서 θ는 제4사분면의 각이다.

(i), (ii)에서 θ는 제2사분면 또는 제4사분면의 각이다.

답 ⑤

10 ① $-132°=(-132)\cdot\frac{\pi}{180}=-\frac{11}{15}\pi$

② $45°=45\cdot\frac{\pi}{180}=\frac{\pi}{4}$

③ $160°=160\cdot\frac{\pi}{180}=\frac{8}{9}\pi$

④ $-\frac{5}{12}\pi=\left(-\frac{5}{12}\pi\right)\cdot\frac{180°}{\pi}=-75°$

⑤ $\frac{9}{5}\pi=\frac{9}{5}\pi\cdot\frac{180°}{\pi}=324°$

답 ③

11 $80°=80\cdot\frac{\pi}{180}=\frac{4}{9}\pi$, $170°=170\cdot\frac{\pi}{180}=\frac{17}{18}\pi$

이므로

$80°+\frac{5}{3}\pi-170°=\frac{4}{9}\pi+\frac{5}{3}\pi-\frac{17}{18}\pi=\frac{7}{6}\pi$

$\therefore a=\frac{7}{6}$ 답 $\frac{7}{6}$

다른 풀이 $\frac{5}{3}\pi=\frac{5}{3}\pi\cdot\frac{180°}{\pi}=300°$이므로

$80°+\frac{5}{3}\pi-170°=80°+300°-170°=210°$

따라서 $210°=210\cdot\frac{\pi}{180}=\frac{7}{6}\pi$이므로

$a=\frac{7}{6}$

Q BOX

동경이 좌표축 위에 있을 때에는 어느 사분면에도 속하지 않는다.

각의 크기는 회전 방향이 양의 방향이면 '+'를, 음의 방향이면 '−'를 붙여서 나타낸다.

원점에 대하여 대칭이다.

각의 크기를 육십분법과 호도법 중 하나로 통일하여 나타낸다.

12 각 θ를 나타내는 동경과 각 5θ를 나타내는 동경이 일치하므로

$5\theta-\theta=2n\pi$ (n은 정수)

$4\theta=2n\pi$ $\therefore \theta=\frac{n}{2}\pi$ ⋯⋯ ㉠

$\pi<\theta<2\pi$에서 $\pi<\frac{n}{2}\pi<2\pi$이므로

$2<n<4$ $\therefore n=3$

이것을 ㉠에 대입하면 $\theta=\frac{3}{2}\pi$ 답 $\frac{3}{2}\pi$

13 각 θ를 나타내는 동경과 각 6θ를 나타내는 동경이 일직선 위에 있고 방향이 반대이므로

$6\theta-\theta=(2n+1)\pi$ (n은 정수)

$5\theta=(2n+1)\pi$ $\therefore \theta=\frac{2n+1}{5}\pi$ ⋯⋯ ㉠

$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$에서 $\frac{\pi}{2}<\frac{2n+1}{5}\pi<\pi$이므로

$\frac{5}{2}<2n+1<5$, $\frac{3}{4}<n<2$

$\therefore n=1$

이것을 ㉠에 대입하면 $\theta=\frac{3}{5}\pi$ 답 $\frac{3}{5}\pi$

14 각 θ를 나타내는 동경과 각 7θ를 나타내는 동경이 원점에 대하여 대칭이므로

$7\theta-\theta=(2n+1)\pi$ (n은 정수)

$6\theta=(2n+1)\pi$ $\therefore \theta=\frac{2n+1}{6}\pi$ ⋯⋯ ㉠

$0<\theta<\pi$에서 $0<\frac{2n+1}{6}\pi<\pi$이므로

$0<2n+1<6$, $-\frac{1}{2}<n<\frac{5}{2}$

$\therefore n=0$ 또는 $n=1$ 또는 $n=2$

이것을 ㉠에 대입하면

$\theta=\frac{\pi}{6}$ 또는 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 또는 $\theta=\frac{5}{6}\pi$

따라서 모든 각 θ의 크기의 합은

$\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}+\frac{5}{6}\pi=\frac{3}{2}\pi$ 답 ③

15 각 α를 나타내는 동경과 각 β를 나타내는 동경이 y축에 대하여 대칭이므로

$\alpha+\beta=360°\times n+180°$ (n은 정수)

① $510°=360°\times1+150°$

② $540°=360°\times1+180°$

③ $570°=360°\times1+210°$

④ $840°=360°\times2+120°$

⑤ $870°=360°\times2+150°$

답 ②

16 각 2θ를 나타내는 동경과 각 3θ를 나타내는 동경이 x축에 대하여 대칭이므로

$2\theta+3\theta=2n\pi$ (n은 정수)

$5\theta=2n\pi$ $\therefore \theta=\frac{2n}{5}\pi$ ⋯⋯ ㉠

$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$에서 $\frac{\pi}{2}<\frac{2n}{5}\pi<\pi$이므로

$\frac{5}{4}<n<\frac{5}{2}$ $\quad\therefore n=2$

이것을 ㉠에 대입하면 $\quad\theta=\frac{4}{5}\pi$ 　답 $\frac{4}{5}\pi$

17 각 θ를 나타내는 동경과 각 5θ를 나타내는 동경이 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로

$\theta+5\theta=2n\pi+\frac{\pi}{2}$ (n은 정수)

$6\theta=2n\pi+\frac{\pi}{2}$ $\quad\therefore \theta=\frac{n}{3}\pi+\frac{\pi}{12}$ …… ㉠

$0<\theta<\pi$에서 $0<\frac{n}{3}\pi+\frac{\pi}{12}<\pi$이므로

$-\frac{1}{4}<n<\frac{11}{4}$

$\therefore n=0$ 또는 $n=1$ 또는 $n=2$

이것을 ㉠에 대입하면

$\theta=\frac{\pi}{12}$ 또는 $\theta=\frac{5}{12}\pi$ 또는 $\theta=\frac{3}{4}\pi$

따라서 $\alpha=\frac{3}{4}\pi$, $\beta=\frac{\pi}{12}$이므로

$\alpha-\beta=\frac{2}{3}\pi$ 　답 ⑤

18 부채꼴의 넓이가 3π이므로

$\frac{1}{2}\cdot a^2\cdot\frac{3}{2}\pi=3\pi$, $\quad a^2=4$

$\therefore a=2$ ($\because a>0$)

따라서 부채꼴의 호의 길이는

$2\cdot\frac{3}{2}\pi=3\pi$ $\quad\therefore b=3$

$\therefore a+b=5$ 　답 5

19 부채꼴의 반지름의 길이를 r, 호의 길이를 l이라 하면

$l=\frac{3}{4}r$

이때 부채꼴의 둘레의 길이가 11이므로

$2r+\frac{3}{4}r=11$, $\quad\frac{11}{4}r=11$

$\therefore r=4$

따라서 부채꼴의 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot 4^2\cdot\frac{3}{4}=6$ 　답 6

20 반지름의 길이가 r인 원의 넓이는

πr^2

반지름의 길이가 $6r$이고 호의 길이가 3π인 부채꼴의 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot 6r\cdot 3\pi=9\pi r$

두 넓이가 서로 같으므로 $\quad\pi r^2=9\pi r$

$r^2-9r=0$, $\quad r(r-9)=0$

$\therefore r=9$ ($\because r>0$) 　답 ④

Q BOX

$0<\frac{n}{3}\pi+\frac{\pi}{12}<\pi$에서

$-\frac{\pi}{12}<\frac{n}{3}\pi<\frac{11}{12}\pi$

$\therefore -\frac{1}{4}<n<\frac{11}{4}$

a는 반지름의 길이이므로 양수이다.

원의 중심에서 현에 내린 수선은 그 현을 이등분한다.

$\triangle OAB$는 $\overline{OA}=\overline{OB}$인 이등변삼각형이므로

$\angle AOH=\angle BOH$

$\therefore \angle AOB=2\theta$

$=\frac{2}{3}\pi$

반지름의 길이가 r이고 중심각의 크기가 θ인 부채꼴의 둘레의 길이는

$2\times$(반지름의 길이)

$+$(호의 길이)

$=2r+r\theta$

21 부채꼴의 반지름의 길이를 r라 하면

$r\cdot\frac{\pi}{4}=\pi$ $\quad\therefore r=4$

$\triangle OBH$는 직각이등변삼각형이므로

$\overline{BH}=\overline{OH}=4\sin\frac{\pi}{4}=4\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}$

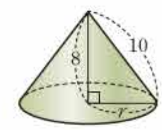
따라서 색칠한 부분의 넓이는

(부채꼴 AOB의 넓이) $-\triangle OBH$

$=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot\pi-\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}$

$=2\pi-4$ 　답 $2\pi-4$

22 오른쪽 그림과 같이 모선의 길이가 10이고 높이가 8인 원뿔의 밑면인 원의 반지름의 길이를 r라 하면



$r=\sqrt{10^2-8^2}=6$

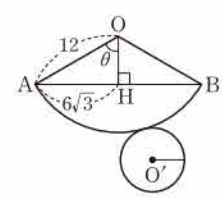
원뿔의 전개도에서 부채꼴의 호의 길이는 밑면인 원의 둘레의 길이와 같으므로

$2\pi\cdot 6=12\pi$

따라서 옆면인 부채꼴의 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot 10\cdot 12\pi=60\pi$ 　답 ②

23 오른쪽 그림과 같이 점 O에서 $\overline{AB}$에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\overline{AH}=\frac{1}{2}\overline{AB}=6\sqrt{3}$

$\angle AOH=\theta$라 하면

$\sin\theta=\frac{6\sqrt{3}}{12}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

이므로 $\quad\theta=\frac{\pi}{3}\left(\because 0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$

$\therefore \angle AOB=\frac{2}{3}\pi$

원뿔의 밑면인 원 O'의 둘레의 길이는 부채꼴 AOB의 호의 길이와 같으므로

$12\cdot\frac{2}{3}\pi=8\pi$ 　답 8π

24 $\overline{AB}=a$, $\overline{BO}=r$라 하면 원뿔의 전개도에서 부채꼴의 호의 길이는 밑면인 원의 둘레의 길이인 $2\pi r$와 같으므로 옆면인 부채꼴의 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot a\cdot 2\pi r=\pi ar$

이때 옆넓이는 밑넓이의 3배이므로

$\pi ar=3\cdot\pi r^2$ $\quad\therefore a=3r$

$\therefore \cos(\angle ABO)=\frac{\overline{BO}}{\overline{AB}}=\frac{r}{3r}=\frac{1}{3}$ 　답 ④

25 부채꼴의 반지름의 길이를 r, 호의 길이를 l이라 하면 둘레의 길이가 4이므로

$2r+l=4$ $\quad\therefore l=4-2r$

부채꼴의 넓이를 S라 하면

$$S=\frac{1}{2}r(4-2r)=-r^2+2r$$
$$=-(r-1)^2+1\ (0<r<2)$$

$4-2r>0$, $r>0$이므로 $0<r<2$

따라서 $r=1$일 때 S는 최댓값 1을 가지므로

$a=1$, $b=1$ $\quad\therefore a+b=2$ 답 ③

26 부채꼴의 반지름의 길이를 r, 호의 길이를 l이라 하면 둘레의 길이가 10이므로

$2r+l=10$ $\quad\therefore l=10-2r$

부채꼴의 넓이를 S라 하면

$$S=\frac{1}{2}r(10-2r)=-r^2+5r$$
$$=-\left(r-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{25}{4}\ (0<r<5)$$

$10-2r>0$, $r>0$이므로 $0<r<5$

따라서 $r=\frac{5}{2}$일 때 S는 최대이므로 이때의 부채꼴의 호의 길이는

$10-2\cdot\frac{5}{2}=5$ 답 5

27 부채꼴의 반지름의 길이를 r, 호의 길이를 l이라 하면 둘레의 길이가 a이므로

$2r+l=a$ $\quad\therefore l=a-2r$

부채꼴의 넓이를 S라 하면

$$S=\frac{1}{2}r(a-2r)=-r^2+\frac{a}{2}r$$
$$=-\left(r-\frac{a}{4}\right)^2+\frac{a^2}{16}\ \left(0<r<\frac{a}{2}\right)$$

$a-2r>0$, $r>0$이므로 $0<r<\frac{a}{2}$

따라서 $r=\frac{a}{4}$일 때 S는 최댓값 $\frac{a^2}{16}$을 갖는다.

이때의 부채꼴의 중심각의 크기를 θ라 하면

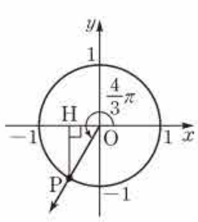
$$\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{a}{4}\right)^2\cdot\theta=\frac{a^2}{16}$$

$\therefore \theta=2$ 답 ④

10 삼각함수

40쪽

01 (1) 오른쪽 그림과 같이 각 $\theta=\frac{4}{3}\pi$를 나타내는 동경과 원점 O를 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원의 교점을 P, 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하자.



$\overline{\mathrm{OP}}=1$이고, $\angle\mathrm{POH}=\frac{\pi}{3}$이므로

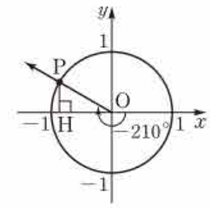
$$\mathrm{P}\left(-\frac{1}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$\overline{\mathrm{PH}}=\overline{\mathrm{OP}}\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\overline{\mathrm{OH}}=\overline{\mathrm{OP}}\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$

$\therefore \sin\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\theta=-\frac{1}{2}$, $\tan\theta=\sqrt{3}$

(2) 오른쪽 그림과 같이 각 $\theta=-210°$를 나타내는 동경과 원점 O를 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원의 교점을 P, 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하자.



$\overline{\mathrm{OP}}=1$이고, $\angle\mathrm{POH}=30°$이므로

$$\mathrm{P}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2}\right)$$

$\overline{\mathrm{PH}}=\overline{\mathrm{OP}}\sin 30°=\frac{1}{2}$

$\overline{\mathrm{OH}}=\overline{\mathrm{OP}}\cos 30°=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore \sin\theta=\frac{1}{2}$, $\cos\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\tan\theta=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

답 풀이 참조

02 $\cos\theta>0$이므로 θ는 제1사분면 또는 제4사분면의 각이고, $\tan\theta>0$이므로 θ는 제1사분면 또는 제3사분면의 각이다.

따라서 θ는 제1사분면의 각이다. 답 제1사분면

03 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로

$$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-\left(\frac{4}{5}\right)^2=\frac{9}{25}$$

이때 θ가 제2사분면의 각이므로 $\quad\cos\theta<0$

$\therefore \cos\theta=-\frac{3}{5}$

또 $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$이므로 $\quad\tan\theta=-\frac{4}{3}$

답 $\cos\theta=-\frac{3}{5}$, $\tan\theta=-\frac{4}{3}$

04 $(\sin\theta+\cos\theta)^2=\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$

$$=1+2\sin\theta\cos\theta$$
$$=1+2\cdot\frac{1}{4}=\frac{3}{2}$$

$\therefore \sin\theta+\cos\theta=\pm\frac{\sqrt{6}}{2}$ 답 $\pm\frac{\sqrt{6}}{2}$

05 $\tan\theta=\frac{a}{4}$이므로

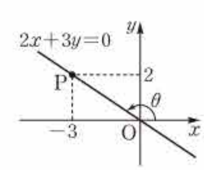
$\frac{a}{4}=-\sqrt{3}$ $\quad\therefore a=-4\sqrt{3}$

따라서 $\mathrm{P}(4,\ -4\sqrt{3})$이므로

$\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{4^2+(-4\sqrt{3})^2}=8$ 답 ④

원점 O와 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$ 사이의 거리는
$\overline{\mathrm{OA}}=\sqrt{x_1^2+y_1^2}$

06 $0<\theta<\pi$이므로 오른쪽 그림과 같이 직선 $2x+3y=0$ 위의 점 $\mathrm{P}(-3,\ 2)$에 대하여



$\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{(-3)^2+2^2}=\sqrt{13}$

$\therefore \sin\theta=\frac{2}{\sqrt{13}}=\frac{2\sqrt{13}}{13}$,

$\cos\theta=\frac{-3}{\sqrt{13}}=-\frac{3\sqrt{13}}{13}$,

$\tan\theta=\frac{2}{-3}=-\frac{2}{3}$

$\therefore \sin\theta\cos\theta-\tan\theta=-\frac{6}{13}+\frac{2}{3}=\frac{8}{39}$ 답 $\frac{8}{39}$

07 점 D의 좌표는 $(\cos\theta,\ \sin\theta)$

점 B와 점 D는 원점에 대하여 대칭이므로 점 B의 좌표는

$(-\cos\theta,\ -\sin\theta)$

따라서 점 B의 x좌표는 $-\cos\theta$이다. 답 ⑤

> 점 $(a,\ b)$를 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는
> $(-a,\ -b)$

08 $\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$이므로

$\sin\theta<0,\ \cos\theta<0,\ \tan\theta>0$

$\therefore$ (주어진 식)

$=\sin\theta+\cos\theta+\tan\theta-\sin\theta-\cos\theta+\tan\theta$

$=2\tan\theta$ 답 $2\tan\theta$

> θ는 제3사분면의 각이다.

09 $\sqrt{\sin\theta}\sqrt{\tan\theta}=-\sqrt{\sin\theta\tan\theta}$에서

$\sin\theta<0,\ \tan\theta<0$

따라서 θ는 제4사분면의 각이다. 답 제4사분면

> 0이 아닌 두 실수 $a,\ b$에 대하여
> $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$이면
> $a<0,\ b<0$

10 $\sin\theta>0,\ \cos\theta<0$에서 θ는 제2사분면의 각이므로

$2n\pi+\frac{\pi}{2}<\theta<2n\pi+\pi$ (n은 정수)

$\therefore n\pi+\frac{\pi}{4}<\frac{\theta}{2}<n\pi+\frac{\pi}{2}$

(i) $n=2k$ (k는 정수)일 때,

$2k\pi+\frac{\pi}{4}<\frac{\theta}{2}<2k\pi+\frac{\pi}{2}$

(ii) $n=2k+1$ (k는 정수)일 때,

$(2k+1)\pi+\frac{\pi}{4}<\frac{\theta}{2}<(2k+1)\pi+\frac{\pi}{2}$

$\therefore 2k\pi+\frac{5}{4}\pi<\frac{\theta}{2}<2k\pi+\frac{3}{2}\pi$

(i), (ii)에서

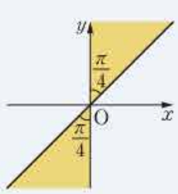
$2k\pi+\frac{\pi}{4}<\frac{\theta}{2}<2k\pi+\frac{\pi}{2}$

또는 $2k\pi+\frac{5}{4}\pi<\frac{\theta}{2}<2k\pi+\frac{3}{2}\pi$

이때 $\frac{\pi}{2}<\frac{2}{3}\pi<\frac{5}{4}\pi$이므로 각 $\frac{\theta}{2}$가 될 수 없는 것은 ③이다. 답 ③

쌤 한마디

각 $\frac{\theta}{2}$를 나타내는 동경이 속하는 모든 영역을 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.
(단, 경계선은 제외한다.)



다른 풀이 $\sin\theta>0,\ \cos\theta<0$에서 θ는 제2사분면의 각이다.

① $\frac{\theta}{2}=\frac{3}{8}\pi$이면 $\theta=\frac{3}{4}\pi$이므로 θ는 제2사분면의 각이다.

② $\frac{\theta}{2}=\frac{5}{12}\pi$이면 $\theta=\frac{5}{6}\pi$이므로 θ는 제2사분면의 각이다.

③ $\frac{\theta}{2}=\frac{2}{3}\pi$이면 $\theta=\frac{4}{3}\pi$이므로 θ는 제3사분면의 각이다.

④ $\frac{\theta}{2}=\frac{11}{8}\pi$이면 $\theta=\frac{11}{4}\pi=2\pi\times1+\frac{3}{4}\pi$이므로 θ는 제2사분면의 각이다.

⑤ $\frac{\theta}{2}=\frac{7}{5}\pi$이면 $\theta=\frac{14}{5}\pi=2\pi\times1+\frac{4}{5}\pi$이므로 θ는 제2사분면의 각이다.

11 $\left(\tan\theta+\frac{1}{\cos\theta}-1\right)\left(1-\frac{1}{\tan\theta}-\frac{1}{\sin\theta}\right)$

$=\frac{\sin\theta+1-\cos\theta}{\cos\theta}\cdot\frac{\sin\theta-\cos\theta-1}{\sin\theta}$

$=\frac{\{(\sin\theta-\cos\theta)+1\}\{(\sin\theta-\cos\theta)-1\}}{\sin\theta\cos\theta}$

$=\frac{(\sin\theta-\cos\theta)^2-1}{\sin\theta\cos\theta}$

$=\frac{\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta-1}{\sin\theta\cos\theta}$

$=\frac{-2\sin\theta\cos\theta}{\sin\theta\cos\theta}=-2$ 답 -2

> $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$이므로
> $\frac{1}{\tan\theta}=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

12 ㄱ. $\frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}=\frac{\cos\theta(1+\sin\theta)}{(1-\sin\theta)(1+\sin\theta)}$

$=\frac{\cos\theta(1+\sin\theta)}{1-\sin^2\theta}$

$=\frac{\cos\theta(1+\sin\theta)}{\cos^2\theta}$

$=\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}$

> $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로
> $1-\sin^2\theta=\cos^2\theta$

ㄴ. $\frac{\sin^3\theta}{\cos^3\theta-\cos\theta}=\frac{\sin^3\theta}{-\cos\theta(1-\cos^2\theta)}$

$=\frac{\sin^3\theta}{-\cos\theta\sin^2\theta}$

$=\frac{\sin\theta}{-\cos\theta}$

$=-\tan\theta$

ㄷ. $\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}=\frac{(1+\sin\theta)^2+\cos^2\theta}{\cos\theta(1+\sin\theta)}$

$=\frac{1+2\sin\theta+\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\cos\theta(1+\sin\theta)}$

$=\frac{2(1+\sin\theta)}{\cos\theta(1+\sin\theta)}$

$=\frac{2}{\cos\theta}$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ④

13 $\sqrt{1+2\sin\theta\cos\theta}-\sqrt{1-2\sin\theta\cos\theta}$

$=\sqrt{\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta}$

$\quad-\sqrt{\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta}$

$=\sqrt{(\sin\theta+\cos\theta)^2}-\sqrt{(\sin\theta-\cos\theta)^2}$

$=\sin\theta+\cos\theta-\{-(\sin\theta-\cos\theta)\}$

$=\sin\theta+\cos\theta+\sin\theta-\cos\theta$

$=2\sin\theta$ 답 ④

> $0<\sin\theta<\cos\theta$이므로
> $\sin\theta+\cos\theta>0,$
> $\sin\theta-\cos\theta<0$

14 $\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-\left(-\frac{15}{17}\right)^2=\frac{64}{289}$

이때 θ는 제4사분면의 각이므로 $\cos\theta=\frac{8}{17}$

또 $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$이므로 $\tan\theta=-\frac{15}{8}$

$\therefore \frac{1}{\cos\theta}-\tan\theta=\frac{17}{8}-\left(-\frac{15}{8}\right)=4$ 답 4

15 $\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}+\tan\theta=\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}+\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$=\frac{\cos^2\theta+\sin\theta+\sin^2\theta}{(1+\sin\theta)\cos\theta}$

$=\frac{1+\sin\theta}{(1+\sin\theta)\cos\theta}$

$=\frac{1}{\cos\theta}$

따라서 $\frac{1}{\cos\theta}=3$이므로 $\cos\theta=\frac{1}{3}$

$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{8}{9}$이므로

$\sin\theta=-\frac{2\sqrt{2}}{3}\ \left(\because \frac{3}{2}\pi<\theta<2\pi\right)$ 답 $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$

16 $\frac{1}{1-\cos\theta}+\frac{1}{1+\cos\theta}=\frac{1+\cos\theta+1-\cos\theta}{1-\cos^2\theta}$

$=\frac{2}{\sin^2\theta}$

따라서 $\frac{2}{\sin^2\theta}=6$이므로 $\sin^2\theta=\frac{1}{3}$

$\therefore \cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

$\tan^2\theta=\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}}=\frac{1}{2}$이므로

$\tan\theta=-\frac{\sqrt{2}}{2}\ \left(\because \frac{\pi}{2}<\theta<\pi\right)$ 답 $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

17 $\cos\theta-\sin\theta=\sqrt{2}$의 양변을 제곱하면

$\cos^2\theta-2\cos\theta\sin\theta+\sin^2\theta=2$

$1-2\cos\theta\sin\theta=2$ $\therefore \cos\theta\sin\theta=-\frac{1}{2}$

따라서

$(\cos\theta+\sin\theta)^2=\cos^2\theta+2\cos\theta\sin\theta+\sin^2\theta$

$=1+2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=0$

이므로 $\cos\theta+\sin\theta=0$ 답 0

18 $\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{2}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{4}$

$1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{4}$ $\therefore \sin\theta\cos\theta=-\frac{3}{8}$

$\therefore \frac{1}{\sin\theta}+\frac{1}{\cos\theta}=\frac{\cos\theta+\sin\theta}{\sin\theta\cos\theta}$

$=\frac{\frac{1}{2}}{-\frac{3}{8}}=-\frac{4}{3}$ 답 $-\frac{4}{3}$

Q BOX

$\cos\theta>0$

θ는 제3사분면의 각이므로
$\sin\theta<0$, $\cos\theta<0$

a^3+b^3
$=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

θ는 제4사분면의 각이므로
$\sin\theta<0$

θ는 제2사분면의 각이므로
$\tan\theta<0$

$\sin\theta\cos\theta=\frac{k}{2}$
$=-\frac{3}{8}$

x^2의 계수가 a이고 두 근이 α, β인 이차방정식은
$a\{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\}=0$

19 $(\sin\theta+\cos\theta)^2=\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$

$=1+2\cdot\frac{3}{8}=\frac{7}{4}$

이때 $\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$이므로 $\sin\theta+\cos\theta<0$

$\therefore \sin\theta+\cos\theta=-\frac{\sqrt{7}}{2}$

$\therefore \sin^3\theta+\cos^3\theta$

$=(\sin\theta+\cos\theta)(\sin^2\theta-\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)$

$=\left(-\frac{\sqrt{7}}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{3}{8}\right)=-\frac{5\sqrt{7}}{16}$ 답 ③

20 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(\cos\theta+\sin\theta)+(\cos\theta-\sin\theta)=\sqrt{3}$ ...... ㉠

$(\cos\theta+\sin\theta)(\cos\theta-\sin\theta)=k$ ...... ㉡

㉠에서 $2\cos\theta=\sqrt{3}$ $\therefore \cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$

㉡에서

$k=\cos^2\theta-\sin^2\theta=\cos^2\theta-(1-\cos^2\theta)$

$=2\cos^2\theta-1=2\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-1=\frac{1}{2}$ 답 ④

21 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\sin\theta+\cos\theta=-\frac{1}{2}$, $\sin\theta\cos\theta=\frac{k}{2}$

$\sin\theta+\cos\theta=-\frac{1}{2}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{4}$

$1+k=\frac{1}{4}$ $\therefore k=-\frac{3}{4}$

이때

$\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

$=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$

$=\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}=-\frac{8}{3}$,

$\tan\theta\cdot\frac{1}{\tan\theta}=1$

이므로 x^2의 계수가 3이고 $\tan\theta$, $\frac{1}{\tan\theta}$을 두 근으로 하는 이차방정식은

$3\left(x^2+\frac{8}{3}x+1\right)=0$, 즉 $3x^2+8x+3=0$

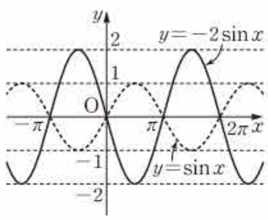
답 $3x^2+8x+3=0$

06 삼각함수의 그래프

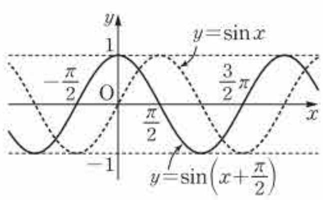
11 삼각함수의 그래프

W 43쪽

01 (1) $y=-2\sin x$의 그래프는 $y=\sin x$의 그래프를 y축의 방향으로 2배 한 후 x축에 대하여 대칭이동한 것이다. 따라서 그래프는 다음 그림과 같고 치역은 $\{y|-2\le y\le 2\}$, 주기는 2π이다.

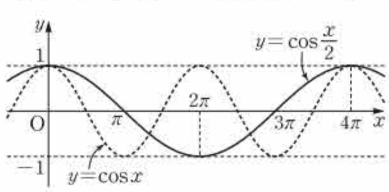


(2) $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$의 그래프는 $y=\sin x$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{\pi}{2}$만큼 평행이동한 것이다. 따라서 그래프는 다음 그림과 같고 치역은 $\{y|-1\le y\le 1\}$, 주기는 2π이다.

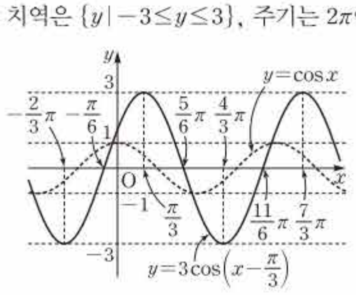


답 풀이 참조

02 (1) $y=\cos\frac{x}{2}$의 그래프는 $y=\cos x$의 그래프를 x축의 방향으로 2배 한 것이다. 따라서 그래프는 다음 그림과 같고 치역은 $\{y|-1\le y\le 1\}$, 주기는 4π이다.



(2) $y=3\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$의 그래프는 $y=\cos x$의 그래프를 y축의 방향으로 3배 한 후 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{3}$만큼 평행이동한 것이다. 따라서 그래프는 다음 그림과 같고 치역은 $\{y|-3\le y\le 3\}$, 주기는 2π이다.



답 풀이 참조

Q BOX

$\frac{2}{3}x=n\pi+\frac{\pi}{2}$에서

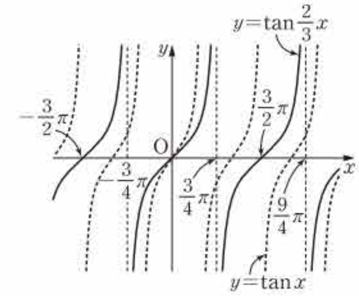
$x=\frac{3}{2}n\pi+\frac{3}{4}\pi$

$2x-\frac{\pi}{4}=n\pi+\frac{\pi}{2}$에서

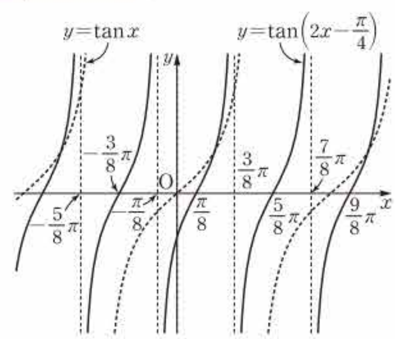
$2x=n\pi+\frac{3}{4}\pi$

$\therefore x=\frac{n}{2}\pi+\frac{3}{8}\pi$

03 (1) $y=\tan\frac{2}{3}x$의 그래프는 $y=\tan x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{3}{2}$배 한 것이다. 따라서 그래프는 다음 그림과 같고 주기는 $\frac{3}{2}\pi$, 점근선의 방정식은 $x=\frac{3}{2}n\pi+\frac{3}{4}\pi$ (n은 정수)이다.



(2) $y=\tan\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=\tan 2\left(x-\frac{\pi}{8}\right)$의 그래프는 $y=\tan x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{1}{2}$배 한 후 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{8}$만큼 평행이동한 것이다. 따라서 그래프는 다음 그림과 같고 주기는 $\frac{\pi}{2}$, 점근선의 방정식은 $x=\frac{n}{2}\pi+\frac{3}{8}\pi$ (n은 정수)이다.



답 풀이 참조

04 함수 $f(x)$의 주기가 4이므로

$f(x+4)=f(x)$

$\therefore f(9)=f(5)=f(1)$,

$f(14)=f(10)=f(6)=f(2)$

$0\le x<4$에서 $f(x)=x^2$이므로

$f(9)+f(14)=f(1)+f(2)$

$=1+4=5$

답 5

05 $f(15)=f(13)=f(11)=\cdots=f(1)$

$f(16)=f(14)=f(12)=\cdots=f(0)$

$f(17)=f(15)=f(1)$

$\therefore f(15)+f(16)+f(17)=f(1)+f(0)+f(1)$

$=-5+3+(-5)$

$=-7$

답 ②

06 ㄱ. 두 함수의 주기는 모두 2π로 같다.

ㄴ. $g(x)=\cos x$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이므로

$g(-x)=g(x)$

ㄷ. $g(x)=\cos x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{2}$만큼 평행이동하면 $f(x)=\sin x$의 그래프와 일치하므로

$f(x)=g\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ㄱ, ㄷ

07 ① 정의역은 $x\neq n\pi+\frac{\pi}{2}$ (n은 정수)인 실수 전체의 집합이다.

② 주기가 π이므로

$\tan(x+\pi)=\tan x$

③ 그래프가 원점에 대하여 대칭이므로

$\tan(-x)=-\tan x$

④ 최댓값과 최솟값은 없다.

⑤ 그래프의 점근선의 방정식은 $x=n\pi+\frac{\pi}{2}$ (n은 정수)이다.

답 ②

08 $y=\sin x$의 그래프는 $0\leq x\leq\pi$에서 직선 $x=\frac{\pi}{2}$에 대하여 대칭이므로

$\frac{p+r}{2}=\frac{\pi}{2}$ $\quad\therefore p+r=\pi$

또 $y=\cos x$의 그래프는 $0\leq x\leq 2\pi$에서 직선 $x=\pi$에 대하여 대칭이므로

$\frac{q+s}{2}=\pi$ $\quad\therefore q+s=2\pi$

$\therefore p+q+r+s=(p+r)+(q+s)$

$=\pi+2\pi=3\pi$ 답 3π

쌤 한마디

삼각함수의 그래프의 대칭성

① $f(x)=\sin x$ $(0\leq x\leq\pi)$에서

$f(a)=f(b)=k$ ⟹ $\frac{a+b}{2}=\frac{\pi}{2}$

⟹ $a+b=\pi$ (단, $a\neq b$)

② $f(x)=\cos x$ $(0\leq x\leq 2\pi)$에서

$f(a)=f(b)=k$ ⟹ $\frac{a+b}{2}=\pi$

⟹ $a+b=2\pi$ (단, $a\neq b$)

③ $f(x)=\tan x$에서

$f(a)=f(b)=k$ ⟹ $a-b=n\pi$ (단, n은 정수)

09 두 점 A, D는 직선 $x=\pi$에 대하여 대칭이므로

$\frac{\alpha+\delta}{2}=\pi$ $\quad\therefore \alpha+\delta=2\pi$

또 두 점 B, C는 직선 $x=\pi$에 대하여 대칭이므로

$\frac{\beta+\gamma}{2}=\pi$ $\quad\therefore \beta+\gamma=2\pi$

$\therefore \alpha-\beta-\gamma+\delta=\alpha+\delta-(\beta+\gamma)$

$=2\pi-2\pi=0$ 답 0

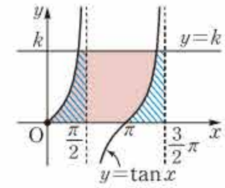
Q BOX

x 대신 $x-\frac{1}{2}$을 대입한다.

방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형을 y축에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식
➡ $f(-x,\ y)=0$

$y=\cos x$의 그래프는 $0\leq x\leq 2\pi$에서 직선 $x=\pi$에 대하여 대칭이므로 $y=\cos x$의 그래프와 직선 $y=\frac{3}{4}$의 두 교점 A, D도 직선 $x=\pi$에 대하여 대칭이다.

10 오른쪽 그림에서 빗금 친 두 부분의 넓이가 서로 같으므로 $y=\tan x$의 그래프와 x축 및 직선 $y=k$로 둘러싸인 부분의 넓이는



$\left(\frac{3}{2}\pi-\frac{\pi}{2}\right)k=k\pi$

따라서 $k\pi=3\pi$이므로

$k=3$ 답 3

11 $y=\cos\frac{\pi}{4}x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{1}{2}$만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=\cos\frac{\pi}{4}\left(x-\frac{1}{2}\right)$

이 함수의 그래프가 점 $\left(\frac{11}{6},\ a\right)$를 지나므로

$a=\cos\frac{\pi}{4}\cdot\left(\frac{11}{6}-\frac{1}{2}\right)=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$ 답 $\frac{1}{2}$

12 ㄱ. $y=\sin(3x+2\pi)=\sin 3\left(x+\frac{2}{3}\pi\right)$의 그래프는 $y=\sin 3x$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{2}{3}\pi$만큼 평행이동한 것이다.

ㄴ. $y=2\sin 3x-\frac{1}{4}$의 그래프는 $y=\sin 3x$의 그래프를 y축의 방향으로 2배 한 후 y축의 방향으로 $-\frac{1}{4}$만큼 평행이동한 것이다.

ㄷ. $y=3\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$의 그래프는 $y=\sin 3x$의 그래프를 x축의 방향으로 3배, y축의 방향으로 3배 한 후 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{2}$만큼 평행이동한 것이다.

ㄹ. $y=\sin(3x-\pi)+2=\sin 3\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+2$의 그래프는 $y=\sin 3x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{3}$만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

이상에서 $y=\sin 3x$의 그래프를 평행이동하여 겹쳐질 수 있는 그래프의 식은 ㄱ, ㄹ이다. 답 ③

13 $y=\tan x$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$y=\tan(-x)$, 즉 $y=-\tan x$

이 함수의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{3}$만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=-\tan\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+2$

따라서 $f(x)=-\tan\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+2$이므로

$f\left(\frac{7}{12}\pi\right)=-\tan\left(\frac{7}{12}\pi-\frac{\pi}{3}\right)+2$

$=-\tan\frac{\pi}{4}+2$

$=-1+2=1$ 답 ④

14 $y=2\sin 5x$의 주기는 $\frac{2}{5}\pi$이므로 $a=\frac{2}{5}\pi$

$y=\frac{1}{4}\cos\frac{x}{2}$의 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}}=4\pi$이므로 $b=4\pi$

$y=\tan 3x$의 주기는 $\frac{\pi}{3}$이므로 $c=\frac{\pi}{3}$

$\therefore c<a<b$ 답 ④

15 각 함수의 최댓값을 구하면

① 3 ② $2+1=3$ ③ $1+2=3$

④ $3+6=9$ ⑤ $4-1=3$

따라서 최댓값이 나머지 넷과 다른 하나는 ④이다.

답 ④

16 $y=5\sin\frac{2}{3}x$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{\pi}{2}$만큼, y축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=5\sin\frac{2}{3}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-4$

이 함수의 최댓값은 $5-4=1$, 최솟값은 $-5-4=-9$이므로

$M=1$, $m=-9$

$\therefore M+m=-8$ 답 -8

17 $y=\tan\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$의 주기는 $\frac{\pi}{2}$

각 함수의 주기를 구하면

ㄱ. $\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$ ㄴ. $\frac{2\pi}{|-6|}=\frac{\pi}{3}$

ㄷ. $\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$ ㄹ. $\frac{\pi}{\left|-\frac{1}{2}\right|}=2\pi$

이상에서 $y=\tan\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$와 주기가 같은 함수는 ㄱ, ㄷ이다. 답 ㄱ, ㄷ

18 $f(x)=a\cos\pi x+b$의 최댓값이 5이고 $a>0$이므로

$a+b=5$ ······ ㉠

$f\left(\frac{1}{3}\right)=-1$이므로 $a\cos\frac{\pi}{3}+b=-1$

$\therefore \frac{1}{2}a+b=-1$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=12$, $b=-7$

$\therefore a-b=19$ 답 19

쌤 한마디

삼각함수의 미정계수는 다음과 같이 최대·최소, 주기, 함숫값을 이용하여 결정한다.

① $y=a\sin bx+c$, $y=a\cos bx+c$에서

- a, c ◎ 삼각함수의 최대·최소 또는 함숫값을 이용
- b ◎ 삼각함수의 주기를 이용

② $y=a\tan bx+c$에서

- a, c ◎ 함숫값을 이용
- b ◎ 삼각함수의 주기 또는 점근선의 방정식을 이용

19 $f(x)=a\sin\left(\frac{\pi}{2}-bx\right)+c$의 최댓값이 4이고 $a>0$이므로

$a+c=4$ ······ ㉠

주기가 2π이고 $b>0$이므로

$\frac{2\pi}{b}=2\pi$ $\therefore b=1$

따라서 $f(x)=a\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+c$이고 $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=3$이므로

$a\sin\frac{\pi}{6}+c=3$

$\therefore \frac{1}{2}a+c=3$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=2$, $c=2$

$\therefore abc=4$ 답 4

20 $y=-2\tan(ax+b)+5$의 주기가 4π이고 $a>0$이므로

$\frac{\pi}{a}=4\pi$ $\therefore a=\frac{1}{4}$

따라서 $y=-2\tan\left(\frac{x}{4}+b\right)+5$의 그래프의 점근선의 방정식은

$\frac{x}{4}+b=n\pi+\frac{\pi}{2}$, $\frac{x}{4}=n\pi+\frac{\pi}{2}-b$

$\therefore x=4n\pi+2\pi-4b$ (n은 정수)

이 방정식이 $x=4n\pi$와 일치하므로

$2\pi-4b=4k\pi$ (k는 정수)

이어야 한다.

이때 $0<b<\pi$이므로 $b=\frac{\pi}{2}$

> Q BOX
> $0<b<\pi$에서
> $-4\pi<-4b<0$
> $-2\pi<2\pi-4b<2\pi$
> 따라서 $2\pi-4b=0$이므로
> $b=\frac{\pi}{2}$

$\therefore \frac{b}{a}=2\pi$ 답 2π

21 주어진 함수의 최댓값이 2, 최솟값이 -1이고 $a>0$이므로

$a+c=2$, $-a+c=-1$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=\frac{3}{2}$, $c=\frac{1}{2}$

또 주기가 $3\pi-(-\pi)=4\pi$이고 $b>0$이므로

$\frac{2\pi}{b}=4\pi$ $\therefore b=\frac{1}{2}$

$\therefore \frac{ac}{b}=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2=\frac{3}{2}$ 답 $\frac{3}{2}$

22 주어진 함수의 주기가 2π이고 $a>0$이므로

$\frac{\pi}{a}=2\pi$ $\therefore a=\frac{1}{2}$

따라서 주어진 함수는 $y=\tan\left(\frac{x}{2}-b\right)$이고, 이 함수의 그래프가 점 $(\pi, 0)$을 지나므로

$0=\tan\left(\frac{\pi}{2}-b\right)$

이때 $-\frac{\pi}{2}<\frac{\pi}{2}-b<\frac{\pi}{2}$이므로

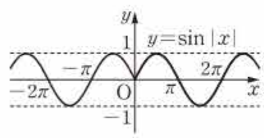
> $0<b<\pi$에서
> $-\pi<-b<0$
> 이므로
> $-\frac{\pi}{2}<\frac{\pi}{2}-b<\frac{\pi}{2}$

$\frac{\pi}{2}-b=0 \qquad \therefore b=\frac{\pi}{2}$

$\therefore ab=\frac{\pi}{4}$

답 $\frac{\pi}{4}$

23 ② $y=\sin|x|$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 주기함수가 아니다.



답 ②

참고 ① $y=|\sin x|$의 주기: π
③ $y=|\cos x|$의 주기: π
④ $y=\cos|x|$의 주기: 2π
⑤ $y=|\tan x|$의 주기: π

24 $f(x)=\left|\cos\frac{x}{3}\right|$의 주기는

$\frac{\pi}{\frac{1}{3}}=3\pi$

따라서 $f(x+a)=f(x)$를 만족시키는 양수 a의 최솟값은 3π이다.

답 3π

25 $f(x)=a|\sin bx|+c$의 주기가 2π이고 $b>0$이므로

$\frac{\pi}{b}=2\pi \qquad \therefore b=\frac{1}{2}$

$0\le\left|\sin\frac{x}{2}\right|\le1$이고 $a>0$이므로

$0\le a\left|\sin\frac{x}{2}\right|\le a$

$\therefore c\le a\left|\sin\frac{x}{2}\right|+c\le a+c$

이때 $f(x)$의 최댓값이 2이므로

$a+c=2$ …… ㉠

한편 $f(x)=a\left|\sin\frac{x}{2}\right|+c$에서 $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}$이므로

$a\left|\sin\frac{\pi}{6}\right|+c=-\frac{1}{2}$

$\therefore \frac{1}{2}a+c=-\frac{1}{2}$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad a=5,\ c=-3$

따라서 구하는 최솟값은

$c=-3$

답 ③

12 삼각함수의 성질

W 47쪽

01 (1) $\sin\frac{19}{3}\pi=\sin\left(6\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

(2) $\cos\frac{5}{4}\pi=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)=-\cos\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

(3) $\tan\frac{5}{6}\pi=\tan\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{\tan\frac{\pi}{3}}$

$=-\frac{1}{\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

Q BOX

$\tan\left(-\frac{13}{3}\pi\right)$
$=\tan\left(-4\pi-\frac{\pi}{3}\right)$
$=\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)$
$=-\tan\frac{\pi}{3}$
와 같이 구할 수도 있다.

$y=\cos x$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이므로 $y=\cos x$의 그래프와 $y=\cos|x|$의 그래프는 일치한다.

(4) $\tan\left(-\frac{13}{3}\pi\right)=-\tan\frac{13}{3}\pi=-\tan\left(4\pi+\frac{\pi}{3}\right)$

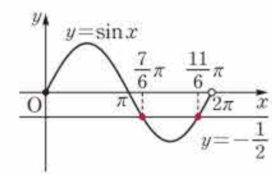
$=-\tan\frac{\pi}{3}=-\sqrt{3}$

답 (1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (2) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (3) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ (4) $-\sqrt{3}$

다른 풀이 (3) $\tan\frac{5}{6}\pi=\tan\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=-\tan\frac{\pi}{6}$

$=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

02 (1) 오른쪽 그림과 같이 $0\le x<2\pi$에서 함수 $y=\sin x$의 그래프와 직선 $y=-\frac{1}{2}$의 교점의 x좌표가 $\frac{7}{6}\pi$, $\frac{11}{6}\pi$이므로

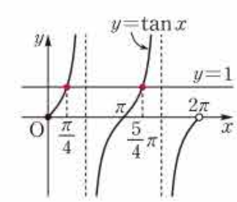


$x=\frac{7}{6}\pi$ 또는 $x=\frac{11}{6}\pi$

(2) $\tan x-1=0$에서

$\tan x=1$

오른쪽 그림과 같이 $0\le x<2\pi$에서 함수 $y=\tan x$의 그래프와 직선 $y=1$의 교점의 x좌표가 $\frac{\pi}{4}$, $\frac{5}{4}\pi$이므로



$x=\frac{\pi}{4}$ 또는 $x=\frac{5}{4}\pi$

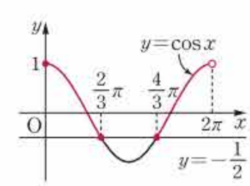
답 (1) $x=\frac{7}{6}\pi$ 또는 $x=\frac{11}{6}\pi$

(2) $x=\frac{\pi}{4}$ 또는 $x=\frac{5}{4}\pi$

03 (1) $2\cos x+1\ge0$에서

$\cos x\ge-\frac{1}{2}$

부등식 $\cos x\ge-\frac{1}{2}$의 해는 $0\le x<2\pi$에서 함수 $y=\cos x$의 그래프가 직선 $y=-\frac{1}{2}$과 만나는 부분 또는 직선보다 위쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위이므로 위의 그림에서

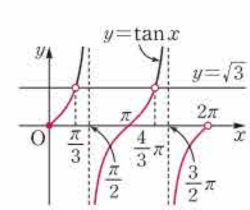


$0\le x\le\frac{2}{3}\pi$ 또는 $\frac{4}{3}\pi\le x<2\pi$

(2) $\sqrt{3}\tan x<3$에서

$\tan x<\sqrt{3}$

부등식 $\tan x<\sqrt{3}$의 해는 $0\le x<2\pi$에서 함수 $y=\tan x$의 그래프가 직선 $y=\sqrt{3}$보다 아래쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위이므로 위의 그림에서



W 06 삼각함수의 그래프

$0 \le x < \frac{\pi}{3}$ 또는 $\frac{\pi}{2} < x < \frac{4}{3}\pi$

또는 $\frac{3}{2}\pi < x < 2\pi$

답 (1) $0 \le x \le \frac{2}{3}\pi$ 또는 $\frac{4}{3}\pi \le x < 2\pi$

(2) $0 \le x < \frac{\pi}{3}$ 또는 $\frac{\pi}{2} < x < \frac{4}{3}\pi$

또는 $\frac{3}{2}\pi < x < 2\pi$

04 $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)-\tan\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)$

$=\sin\theta-\left(-\frac{1}{\tan\theta}\right)$

$=\sin\theta+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

$=\frac{\sqrt{5}}{3}+\frac{\frac{2}{3}}{\frac{\sqrt{5}}{3}}$

$=\frac{\sqrt{5}}{3}+\frac{2\sqrt{5}}{5}=\frac{11\sqrt{5}}{15}$ 답 $\frac{11\sqrt{5}}{15}$

$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$이므로 $\frac{1}{\tan\theta}=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

05 $\frac{\tan(2\pi-\theta)}{\tan(\pi+\theta)}+\frac{\cos(\pi-\theta)}{\sin\left(\frac{3}{2}\pi-\theta\right)}$

$=\frac{-\tan\theta}{\tan\theta}+\frac{-\cos\theta}{-\cos\theta}$

$=-1+1=0$ 답 0

06 $\sin 250^\circ=\sin(90^\circ\times3-20^\circ)$

$=-\cos 20^\circ=-0.9397$

$\cos 100^\circ=\cos(90^\circ+10^\circ)$

$=-\sin 10^\circ=-0.1736$

$\therefore \sin 250^\circ+\cos 100^\circ=-0.9397-0.1736$

$=-1.1133$ 답 -1.1133

$\sin 250^\circ$
$=\sin(180^\circ+70^\circ)$
$=-\sin 70^\circ$
로 변형하면 주어진 삼각함수표를 이용하여 삼각함수의 값을 구할 수 없다.

07 $\sin\left(-\frac{7}{3}\pi\right)=-\sin\frac{7}{3}\pi=-\sin\left(2\pi+\frac{\pi}{3}\right)$

$=-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan\frac{3}{4}\pi=\tan\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=-\tan\frac{\pi}{4}=-1$

$\therefore \sin^2\left(-\frac{7}{3}\pi\right)+\tan^2\frac{3}{4}\pi=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+(-1)^2$

$=\frac{3}{4}+1=\frac{7}{4}$ 답 $\frac{7}{4}$

08 $\sin 510^\circ=\sin(90^\circ\times5+60^\circ)$

$=\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$

$\cos 750^\circ=\cos(90^\circ\times8+30^\circ)$

$=\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan 225^\circ=\tan(180^\circ+45^\circ)$

$=\tan 45^\circ=1$

$\therefore A=\frac{1}{2}-\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-1=-2$

$\cos\frac{10}{3}\pi=\cos\left(3\pi+\frac{\pi}{3}\right)=-\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}$

$\tan\frac{3}{4}\pi=\tan\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=-\tan\frac{\pi}{4}=-1$

$\sin\frac{11}{6}\pi=\sin\left(2\pi-\frac{\pi}{6}\right)=-\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{2}$

$\therefore B=-\frac{1}{2}+(-1)-\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$

$\therefore A-B=-1$ 답 ②

09 $\tan 89^\circ=\tan(90^\circ-1^\circ)=\frac{1}{\tan 1^\circ}$

$\tan 88^\circ=\tan(90^\circ-2^\circ)=\frac{1}{\tan 2^\circ}$

$\vdots$

$\tan 46^\circ=\tan(90^\circ-44^\circ)=\frac{1}{\tan 44^\circ}$

$\therefore \tan 1^\circ\times\tan 2^\circ\times\cdots\times\tan 88^\circ\times\tan 89^\circ$

$=\tan 1^\circ\times\tan 2^\circ\times\cdots\times\tan 44^\circ\times\tan 45^\circ$

$\times\frac{1}{\tan 44^\circ}\times\cdots\times\frac{1}{\tan 2^\circ}\times\frac{1}{\tan 1^\circ}$

$=\tan 45^\circ=1$ 답 1

10 $5\theta=\pi$이므로

$\sin 2\theta+\sin 4\theta+\sin 5\theta+\sin 7\theta+\sin 9\theta$

$=\sin 2\theta+\sin(5\theta-\theta)+\sin 5\theta$

$+\sin(5\theta+2\theta)+\sin(10\theta-\theta)$

$=\sin 2\theta+\sin(\pi-\theta)+\sin\pi$

$+\sin(\pi+2\theta)+\sin(2\pi-\theta)$

$=\sin 2\theta+\sin\theta+0-\sin 2\theta-\sin\theta$

$=0$ 답 ③

$10\theta=5\theta\cdot2=2\pi$

11 $A+B+C=\pi$이므로

ㄱ. $\sin A=\sin\{\pi-(B+C)\}=\sin(B+C)$

ㄴ. $\cos(A+B+C)=\cos\pi=-1$

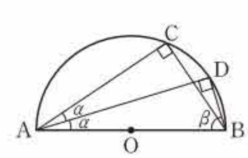
ㄷ. $\tan\frac{A}{2}=\tan\frac{\pi-(B+C)}{2}$

$=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{B+C}{2}\right)$

$=\frac{1}{\tan\frac{B+C}{2}}$

이상에서 옳은 것은 ㄱ뿐이다. 답 ㄱ

12 $\angle ADB=\frac{\pi}{2}$이므로



반원에 대한 원주각의 크기는 $\frac{\pi}{2}$이다.

$\triangle ABD$에서

$\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$

따라서 $\beta=\frac{\pi}{2}-\alpha$이므로

$\sin(\beta-\alpha)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)=\cos 2\alpha$

$=\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{AC}}{1}=\overline{AC}$ 답 ①

$\angle CAB=2\alpha$이므로 직각삼각형 ABC에서 $\cos 2\alpha=\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$

13 $y=3\cos x+\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-2$

$=3\cos x+\cos x-2$

$=4\cos x-2$

따라서 함수 $y=4\cos x-2$의 최댓값은 $4-2=2$, 최솟값은 $-4-2=-6$이므로

$M=2,\ m=-6$

$\therefore M-m=8$

답 8

14 $-1\le\cos 5x\le 1$이므로

$-4\le\cos 5x-3\le -2$

$2\le|\cos 5x-3|\le 4$

$\therefore -2\le 2|\cos 5x-3|-6\le 2$

따라서 주어진 함수의 최댓값은 2, 최솟값은 -2이므로 구하는 곱은

$2\cdot(-2)=-4$

답 -4

15 $y=-|2\sin x-a|+5$에서 $-1\le\sin x\le 1$이고 $a>0$이므로 주어진 함수는 $\sin x=-1$일 때 최솟값 1을 갖는다.

즉 $-|-2-a|+5=1$이므로

$-(2+a)+5=1,\quad -2-a=-4$

$\therefore a=2$

$a>0$에서 $2+a>0$이므로

$|-2-a|=|2+a|$
$=2+a$

따라서 $y=-|2\sin x-2|+5$이고 이 함수는 $\sin x=1$일 때 최댓값 5를 가지므로

$b=5$

$\therefore a+b=7$

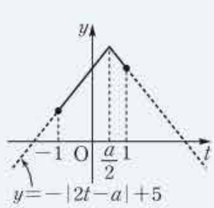
답 ③

쌤 한마디

$y=-|2\sin x-a|+5$에서 $\sin x=t$로 놓으면 $-1\le t\le 1$이고

$y=-|2t-a|+5$

$-1\le t\le 1$에서 함수 $y=-|2t-a|+5$의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같으므로 이 함수는 $t=-1$, 즉 $\sin x=-1$일 때 최솟값을 가짐을 알 수 있다.



16 $y=\dfrac{2\cos x+1}{\cos x+2}$에서 $\cos x=t$로 놓으면 $-1\le t\le 1$이고

$y=\dfrac{2t+1}{t+2}=\dfrac{2(t+2)-3}{t+2}=-\dfrac{3}{t+2}+2$

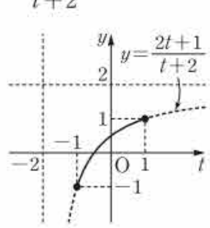
오른쪽 그림에서 $t=1$일 때 최댓값은 1, $t=-1$일 때 최솟값은 -1이므로 주어진 함수의 치역은

$\{y\mid -1\le y\le 1\}$

따라서 $a=-1,\ b=1$이므로

$ab=-1$

답 ①



17 $y=\dfrac{2\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+10}{\sin x-3}=\dfrac{-2\sin x+10}{\sin x-3}$

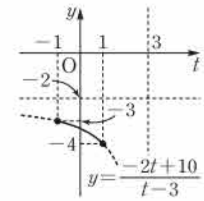
$\sin x=t$로 놓으면 $-1\le t\le 1$이고

$y=\dfrac{-2t+10}{t-3}=\dfrac{-2(t-3)+4}{t-3}=\dfrac{4}{t-3}-2$

오른쪽 그림에서 $t=-1$일 때 최댓값은 -3, $t=1$일 때 최솟값은 -4이므로

$M=-3,\ m=-4$

$\therefore M-m=1$



답 1

18 $y=\sin^2 x+6\cos x+a$

$=(1-\cos^2 x)+6\cos x+a$

$=-\cos^2 x+6\cos x+a+1$

$\cos x=t$로 놓으면 $-1\le t\le 1$이고

$y=-t^2+6t+a+1$

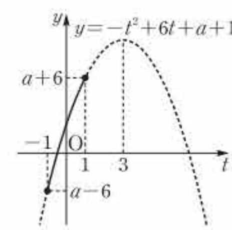
$=-(t-3)^2+a+10$

오른쪽 그림에서 $t=-1$일 때 최솟값은 $a-6$이므로

$a-6=-4$

$\therefore a=2$

답 ②



19 $y=-\cos^2(\pi+x)+\cos\left(\frac{3}{2}\pi-x\right)+2$

먼저 각을 x로 통일한 후 삼각함수 사이의 관계를 이용하여 한 종류의 삼각함수로 통일한다.

$=-(-\cos x)^2-\sin x+2$

$=-\cos^2 x-\sin x+2$

$=-(1-\sin^2 x)-\sin x+2$

$=\sin^2 x-\sin x+1$

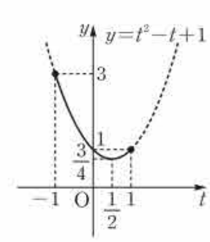
$\sin x=t$로 놓으면 $-1\le t\le 1$이고

$y=t^2-t+1=\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$

오른쪽 그림에서 $t=-1$일 때 최댓값은 3, $t=\frac{1}{2}$일 때 최솟값은 $\frac{3}{4}$이므로

$M=3,\ m=\frac{3}{4}$

$\therefore \dfrac{M}{m}=3\cdot\dfrac{4}{3}=4$



답 4

20 이차방정식 $x^2-2x\cos\theta-\sin^2\theta=0$의 두 근이 $\alpha,\ \beta$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2\cos\theta,\ \alpha\beta=-\sin^2\theta$

$\therefore \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$

$=(2\cos\theta)^2+2\sin^2\theta$

$=4\cos^2\theta+2\sin^2\theta$

$=4\cos^2\theta+2(1-\cos^2\theta)$

$=2\cos^2\theta+2$

$-1\le\cos\theta\le 1$이므로

$0\le\cos^2\theta\le 1$

$2\le 2\cos^2\theta+2\le 4$

$\therefore 2\le\alpha^2+\beta^2\le 4$

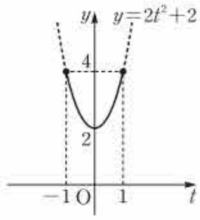
이와 같이 $\alpha^2+\beta^2$의 최댓값이 4임을 구할 수도 있다.

$y=2\cos^2\theta+2$라 하고 $\cos\theta=t$로 놓으면 $-1\le t\le 1$이고

$y=2t^2+2$

오른쪽 그림에서 $t=-1$ 또는 $t=1$일 때 최댓값은 4이므로 $\alpha^2+\beta^2$의 최댓값은 4이다.

답 4



다른 풀이 $x^2-2x\cos\theta-\sin^2\theta=0$에서

$x^2-2x\cos\theta-(1-\cos^2\theta)=0$

$x^2-2x\cos\theta+(\cos\theta-1)(\cos\theta+1)=0$

$(x-\cos\theta+1)(x-\cos\theta-1)=0$

$\therefore\ x=\cos\theta-1$ 또는 $x=\cos\theta+1$

$\therefore\ \alpha^2+\beta^2=(\cos\theta-1)^2+(\cos\theta+1)^2$
$=2\cos^2\theta+2$

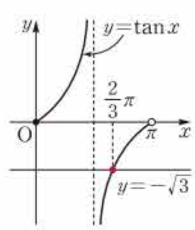
21 $\sin x=-\sqrt{3}\cos x$의 양변을 $\cos x$로 나누면

$\dfrac{\sin x}{\cos x}=-\sqrt{3}\qquad\therefore\ \tan x=-\sqrt{3}$

오른쪽 그림과 같이 $0\le x<\pi$에서 함수 $y=\tan x$의 그래프와 직선 $y=-\sqrt{3}$의 교점의 x좌표가 $\dfrac{2}{3}\pi$이므로

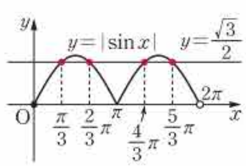
$x=\dfrac{2}{3}\pi$

답 $x=\dfrac{2}{3}\pi$



$\cos x=0$이면 $\sin x\ne 0$이므로
$\sin x\ne-\sqrt{3}\cos x$
$\therefore\ \cos x\ne 0$

22 오른쪽 그림과 같이 $0\le x<2\pi$에서 함수 $y=|\sin x|$의 그래프와 직선 $y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$의 교점의 x좌표가 $\dfrac{\pi}{3}$, $\dfrac{2}{3}\pi$, $\dfrac{4}{3}\pi$, $\dfrac{5}{3}\pi$이므로



$x=\dfrac{\pi}{3}$ 또는 $x=\dfrac{2}{3}\pi$ 또는 $x=\dfrac{4}{3}\pi$ 또는 $x=\dfrac{5}{3}\pi$

따라서 모든 실근의 합은

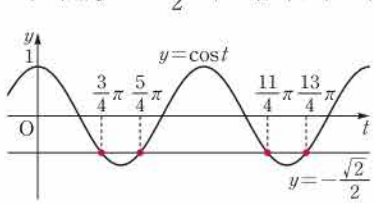
$\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{2}{3}\pi+\dfrac{4}{3}\pi+\dfrac{5}{3}\pi=4\pi$

답 ④

23 $2x=t$로 놓으면 주어진 방정식은

$\cos t=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

방정식 $\cos t=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$를 만족시키는 t는 함수 $y=\cos t$의 그래프와 직선 $y=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$의 교점의 t좌표와 같다.



즉 $\cos t=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$를 만족시키는 양수 t를 작은 것부터 차례대로 나열하면

$\dfrac{3}{4}\pi,\ \dfrac{5}{4}\pi,\ \dfrac{11}{4}\pi,\ \dfrac{13}{4}\pi,\ \cdots$

이므로 3 번째 수는 $\dfrac{11}{4}\pi$이다.

따라서 구하는 x의 값은

$\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{11}{4}\pi=\dfrac{11}{8}\pi$

답 $\dfrac{11}{8}\pi$

$\dfrac{11}{4}\pi$는 t의 값이므로 $2x=t$, 즉 $x=\dfrac{1}{2}t$임을 이용하여 x의 값을 구한다.

24 $\pi\sin x=t$로 놓으면 $0\le x<2\pi$에서 $-\pi\le t\le\pi$이고 주어진 방정식은

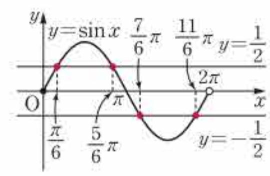
$\cos t=0$

$\therefore\ t=-\dfrac{\pi}{2}$ 또는 $t=\dfrac{\pi}{2}$

즉 $\pi\sin x=-\dfrac{\pi}{2}$ 또는 $\pi\sin x=\dfrac{\pi}{2}$이므로

$\sin x=-\dfrac{1}{2}$ 또는 $\sin x=\dfrac{1}{2}$

오른쪽 그림과 같이 $0\le x<2\pi$에서 함수 $y=\sin x$의 그래프와 직선 $y=\dfrac{1}{2}$, $y=-\dfrac{1}{2}$의 교점의 x좌표가 $\dfrac{\pi}{6}$, $\dfrac{5}{6}\pi$, $\dfrac{7}{6}\pi$, $\dfrac{11}{6}\pi$이므로



$x_1=\dfrac{\pi}{6}$, $x_2=\dfrac{5}{6}\pi$, $x_3=\dfrac{7}{6}\pi$, $x_4=\dfrac{11}{6}\pi$

$\therefore\ x_2+x_4-(x_1+x_3)=\dfrac{5}{6}\pi+\dfrac{11}{6}\pi-\left(\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{7}{6}\pi\right)$
$=\dfrac{4}{3}\pi$

답 ③

25 $\cos^2 x-\cos x+2\sin^2 x=0$에서

$\cos^2 x-\cos x+2(1-\cos^2 x)=0$

$\cos^2 x+\cos x-2=0$

$(\cos x+2)(\cos x-1)=0$

$\therefore\ \cos x=1\ (\because\ -1<\cos x\le 1)$

$0\le x<\pi$이므로

$x=0$

답 $x=0$

$\cos x$가 있으므로 $\sin^2 x$를 $1-\cos^2 x$로 바꾼다.

26 $\tan x+\dfrac{1}{\tan x}=-2$의 양변에 $\tan x$를 곱하면

$\tan^2 x+1=-2\tan x$

$\tan^2 x+2\tan x+1=0$

$(\tan x+1)^2=0$

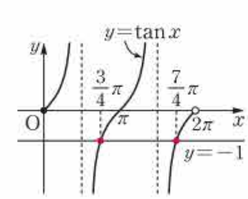
$\therefore\ \tan x=-1$

오른쪽 그림에서 방정식 $\tan x=-1$의 해는

$x=\dfrac{3}{4}\pi$ 또는 $x=\dfrac{7}{4}\pi$

따라서 모든 실근의 합은

$\dfrac{3}{4}\pi+\dfrac{7}{4}\pi=\dfrac{5}{2}\pi$



답 ⑤

27 $4\cos^2 A-11\cos A+6=0$에서

$(4\cos A-3)(\cos A-2)=0$

$\therefore \cos A=\frac{3}{4}$ ($\because$ $-1<\cos A<1$)

Q BOX: $0<A<\pi$이므로 $-1<\cos A<1$

이때 $A+B+C=\pi$에서 $B+C=\pi-A$이므로

$\sin(B+C)=\sin(\pi-A)=\sin A$

$=\sqrt{1-\cos^2 A}$ ($\because$ $0<A<\pi$)

$=\sqrt{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2}$

$=\frac{\sqrt{7}}{4}$ 　　답 $\frac{\sqrt{7}}{4}$

28 $2\sin^2 x-2\sin x\cos x-\sqrt{3}\sin x+\sqrt{3}\cos x=0$에서

$2\sin x(\sin x-\cos x)-\sqrt{3}(\sin x-\cos x)=0$

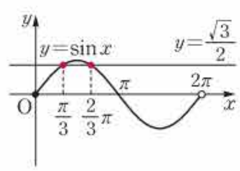
$(2\sin x-\sqrt{3})(\sin x-\cos x)=0$

$\therefore \sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 또는 $\sin x=\cos x$

(i) $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$일 때,

$0\le x<2\pi$이므로

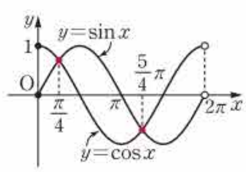
$x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\frac{2}{3}\pi$



(ii) $\sin x=\cos x$일 때,

$0\le x<2\pi$이므로

$x=\frac{\pi}{4}$ 또는 $x=\frac{5}{4}\pi$



(i), (ii)에서 주어진 방정식의 해는

$x=\frac{\pi}{4}$ 또는 $x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\frac{2}{3}\pi$ 또는 $x=\frac{5}{4}\pi$

이므로 해의 개수는 4이다. 　　답 ④

29 $\cos^2 x-4\sin(x+\pi)+a=0$에서

$(1-\sin^2 x)+4\sin x+a=0$

$\therefore \sin^2 x-4\sin x-1=a$

이 방정식이 실근을 가지려면 함수 $y=\sin^2 x-4\sin x-1$의 그래프와 직선 $y=a$가 만나야 한다.

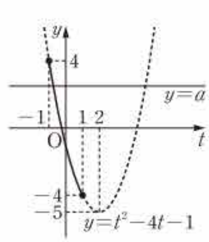
이때 $\sin x=t$로 놓으면 $-1\le t\le 1$이고

$y=t^2-4t-1=(t-2)^2-5$

오른쪽 그림에서 함수 $y=t^2-4t-1$의 그래프와 직선 $y=a$가 만나도록 하는 실수 a의 값의 범위는

$-4\le a\le 4$

따라서 실수 a의 최댓값은 4이다. 　　답 ③



30 $\cos x=-\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+k$에서

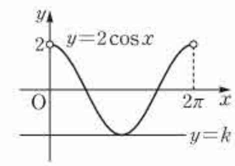
$\cos x=-\cos x+k$

$\therefore 2\cos x=k$

이 방정식이 하나의 실근을 가지려면 함수 $y=2\cos x$의 그래프와 직선 $y=k$가 한 점에서 만나야 한다.

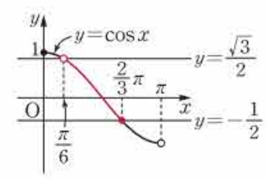
오른쪽 그림에서 $y=2\cos x$의 그래프와 직선 $y=k$가 한 점에서 만나려면

$k=-2$ 　　답 -2



31 오른쪽 그림에서 부등식 $-\frac{1}{2}\le\cos x<\frac{\sqrt{3}}{2}$의 해는

$\frac{\pi}{6}<x\le\frac{2}{3}\pi$



답 ①

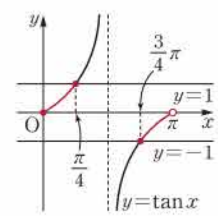
32 $|\tan x|\le 1$에서

$-1\le\tan x\le 1$

오른쪽 그림에서 부등식 $-1\le\tan x\le 1$의 해는

$0\le x\le\frac{\pi}{4}$

또는 $\frac{3}{4}\pi\le x<\pi$



답 $0\le x\le\frac{\pi}{4}$ 또는 $\frac{3}{4}\pi\le x<\pi$

33 $2\sin^2 x+\cos x-1>0$에서

$2(1-\cos^2 x)+\cos x-1>0$

$2\cos^2 x-\cos x-1<0$

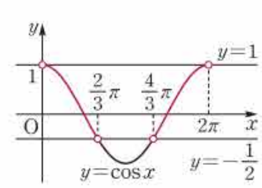
$(2\cos x+1)(\cos x-1)<0$

$\therefore -\frac{1}{2}<\cos x<1$

오른쪽 그림에서 부등식 $-\frac{1}{2}<\cos x<1$의 해는

$0<x<\frac{2}{3}\pi$

또는 $\frac{4}{3}\pi<x<2\pi$



답 $0<x<\frac{2}{3}\pi$ 또는 $\frac{4}{3}\pi<x<2\pi$

34 $2\cos^2 x+5\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\ge 4$에서

$2\cos^2 x-5\sin x\ge 4$

$2(1-\sin^2 x)-5\sin x-4\ge 0$

$2\sin^2 x+5\sin x+2\le 0$

$(2\sin x+1)(\sin x+2)\le 0$

$0\le x<2\pi$에서 $\sin x+2>0$이므로

Q BOX: $0\le x<2\pi$에서
$-1\le\sin x\le 1$
$1\le\sin x+2\le 3$
$\therefore \sin x+2>0$

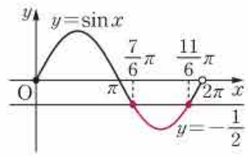
$2\sin x+1\le 0$

$\therefore \sin x\le-\frac{1}{2}$

오른쪽 그림에서 부등식

$\sin x \le -\dfrac{1}{2}$의 해는

$\dfrac{7}{6}\pi \le x \le \dfrac{11}{6}\pi$



따라서 $\alpha=\dfrac{7}{6}\pi$, $\beta=\dfrac{11}{6}\pi$이므로

$\beta-\alpha=\dfrac{2}{3}\pi$

답 ④

35 $4\sin^2 x-2(\sqrt{3}-1)\cos x+\sqrt{3}-4>0$에서

$4(1-\cos^2 x)-2(\sqrt{3}-1)\cos x+\sqrt{3}-4>0$

$4\cos^2 x+2(\sqrt{3}-1)\cos x-\sqrt{3}<0$

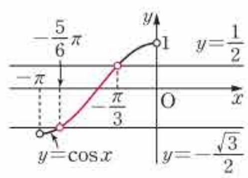
$(2\cos x+\sqrt{3})(2\cos x-1)<0$

$\therefore -\dfrac{\sqrt{3}}{2}<\cos x<\dfrac{1}{2}$

오른쪽 그림에서 부등식

$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}<\cos x<\dfrac{1}{2}$의 해는

$-\dfrac{5}{6}\pi<x<-\dfrac{\pi}{3}$



따라서 $\alpha=-\dfrac{5}{6}\pi$, $\beta=-\dfrac{\pi}{3}$이므로

$\alpha+\beta=-\dfrac{7}{6}\pi$

답 $-\dfrac{7}{6}\pi$

36 $\cos^2\theta-4\sin\theta\le a$에서

$(1-\sin^2\theta)-4\sin\theta\le a$

$\therefore -\sin^2\theta-4\sin\theta+1\le a$ …… ㉠

$y=-\sin^2\theta-4\sin\theta+1$이라 하고 $\sin x=t$로 놓으면 $-1\le t\le 1$이고

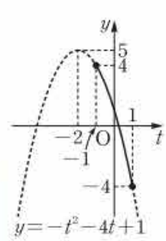
$y=-t^2-4t+1=-(t+2)^2+5$

오른쪽 그림에서 $t=-1$일 때 y의 최댓값은 4이므로 부등식 ㉠이 모든 실수 θ에 대하여 성립하려면

$a\ge 4$

따라서 실수 a의 최솟값은 4이다.

답 ④



모든 실수 x에 대하여 부등식 $f(x)\le a$가 성립하려면

($f(x)$의 최댓값)$\le a$

이어야 한다.

37 이차방정식 $x^2-2x\sin\theta-\cos\theta+1=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=\sin^2\theta-(-\cos\theta+1)>0$

$(1-\cos^2\theta)+\cos\theta-1>0$

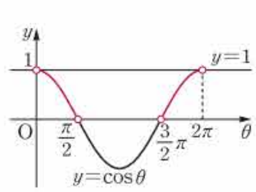
$\cos^2\theta-\cos\theta<0$, $\quad \cos\theta(\cos\theta-1)<0$

$\therefore 0<\cos\theta<1$

오른쪽 그림에서 θ의 값의 범위는

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$

또는 $\dfrac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$



답 $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ 또는 $\dfrac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$

38 주어진 이차함수의 그래프가 x축에 접하려면 이차방정식 $x^2+2x\cos\theta+\dfrac{7}{2}\cos\theta+2=0$이 중근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=\cos^2\theta-\left(\dfrac{7}{2}\cos\theta+2\right)=0$

$2\cos^2\theta-7\cos\theta-4=0$

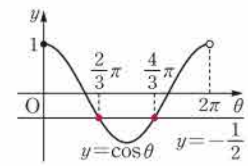
$(2\cos\theta+1)(\cos\theta-4)=0$

$\therefore \cos\theta=-\dfrac{1}{2}$ ($\because -1\le\cos\theta\le 1$)

오른쪽 그림에서

$\theta=\dfrac{2}{3}\pi$ 또는 $\theta=\dfrac{4}{3}\pi$

따라서 θ의 최댓값은 $\dfrac{4}{3}\pi$이다.



답 $\dfrac{4}{3}\pi$

07 삼각함수의 활용

13 사인법칙과 코사인법칙

Ⓦ 53쪽

01 (1) 사인법칙에 의하여 $\dfrac{a}{\sin 30^\circ}=\dfrac{6}{\sin 60^\circ}$이므로

$a\sin 60^\circ=6\sin 30^\circ$

$\therefore\ a=6\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{\sqrt{3}}=2\sqrt{3}$

(2) 사인법칙에 의하여 $\dfrac{4}{\sin 45^\circ}=\dfrac{2\sqrt{6}}{\sin C}$이므로

$4\sin C=2\sqrt{6}\sin 45^\circ$

$\therefore\ \sin C=2\sqrt{6}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{1}{4}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

이때 $0^\circ<C<135^\circ$이므로

$C=60^\circ$ 또는 $C=120^\circ$

답 (1) $2\sqrt{3}$ (2) 60° 또는 120°

02 $A+B+C=180^\circ$이므로

$A=180^\circ-(70^\circ+80^\circ)=30^\circ$

△ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$\dfrac{9}{\sin 30^\circ}=2R$

$\therefore\ R=\dfrac{9}{\frac{1}{2}}\cdot\dfrac{1}{2}=9$

답 9

03 (1) 코사인법칙에 의하여

$c^2=(\sqrt{3})^2+1^2-2\cdot\sqrt{3}\cdot 1\cdot\cos 30^\circ$

$=3+1-2\cdot\sqrt{3}\cdot 1\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=1$

$c>0$이므로 $c=1$

(2) 코사인법칙에 의하여

$a^2=5^2+3^2-2\cdot 5\cdot 3\cdot\cos 120^\circ$

$=25+9-2\cdot 5\cdot 3\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)=49$

$a>0$이므로 $a=7$

답 (1) 1 (2) 7

04 코사인법칙에 의하여

$\cos A=\dfrac{3^2+(\sqrt{2})^2-(\sqrt{5})^2}{2\cdot 3\cdot\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

이때 $0^\circ<A<180^\circ$이므로

$A=45^\circ$

답 45°

05 $A+B+C=180^\circ$이므로

$A=180^\circ-(75^\circ+60^\circ)=45^\circ$

사인법칙에 의하여 $\dfrac{a}{\sin 45^\circ}=\dfrac{2\sqrt{3}}{\sin 60^\circ}$이므로

$a\sin 60^\circ=2\sqrt{3}\sin 45^\circ$

$\therefore\ a=2\sqrt{3}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{2}{\sqrt{3}}=2\sqrt{2}$

답 ④

Q BOX

△ABC는 직각이등변 삼각형이므로

$\angle\mathrm{BAC}$
$=\angle\mathrm{BCA}$
$=\dfrac{1}{2}(180^\circ-90^\circ)$
$=45^\circ$

삼각형의 세 내각의 크기의 합이 180°이고 $A=45^\circ$이므로
$0^\circ<C<135^\circ$

$\sin(180^\circ-\theta)=\sin\theta$

06 $\angle\mathrm{BAC}=45^\circ$이고, $\overset{\frown}{\mathrm{BC}}$에 대한 원주각의 크기가 같으므로

$\angle\mathrm{BDC}=\angle\mathrm{BAC}=45^\circ$

$\angle\mathrm{DBC}=90^\circ-60^\circ=30^\circ$이므로 △BCD에서 사인법칙에 의하여

$\dfrac{6\sqrt{2}}{\sin 45^\circ}=\dfrac{\overline{\mathrm{CD}}}{\sin 30^\circ}$

$6\sqrt{2}\sin 30^\circ=\overline{\mathrm{CD}}\sin 45^\circ$

$\therefore\ \overline{\mathrm{CD}}=6\sqrt{2}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{\sqrt{2}}=6$

답 6

다른 풀이 △ABC에서

$\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{(6\sqrt{2})^2+(6\sqrt{2})^2}=12$

$\overline{\mathrm{AC}}$는 원 O의 지름이고 $\angle\mathrm{DBC}=90^\circ-60^\circ=30^\circ$이므로 △DBC에서 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{\mathrm{CD}}}{\sin 30^\circ}=12\qquad\therefore\ \overline{\mathrm{CD}}=12\cdot\dfrac{1}{2}=6$

쌤 한마디

반원에 대한 원주각의 크기가 90°이므로 $\angle\mathrm{ABC}=90^\circ$에서 $\overline{\mathrm{AC}}$가 원 O의 지름임을 알 수 있다.

07 $\angle\mathrm{ADB}=\theta$라 하면 △ABD에서 사인법칙에 의하여

$\dfrac{4}{\sin\theta}=\dfrac{\overline{\mathrm{BD}}}{\sin 60^\circ}$

$4\sin 60^\circ=\overline{\mathrm{BD}}\sin\theta$

$\therefore\ \overline{\mathrm{BD}}=4\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{1}{\sin\theta}=\dfrac{2\sqrt{3}}{\sin\theta}$ ...... ㉠

$\angle\mathrm{ADC}=180^\circ-\theta$이므로 △ACD에서 사인법칙에 의하여

$\dfrac{3}{\sin(180^\circ-\theta)}=\dfrac{\overline{\mathrm{DC}}}{\sin 45^\circ}$

$3\sin 45^\circ=\overline{\mathrm{DC}}\sin\theta$

$\therefore\ \overline{\mathrm{DC}}=3\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{1}{\sin\theta}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2\sin\theta}$ ...... ㉡

㉠, ㉡에서

$\overline{\mathrm{BD}}:\overline{\mathrm{DC}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{\sin\theta}:\dfrac{3\sqrt{2}}{2\sin\theta}$

$=4\sqrt{3}:3\sqrt{2}$

$=4\sqrt{6}:6$

$\therefore\ k=6$

답 6

08 $A+B+C=180^\circ$이므로

$A=180^\circ-(50^\circ+70^\circ)=60^\circ$

△ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$\dfrac{9}{\sin 60^\circ}=2R$

$\therefore\ R=\dfrac{9}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\cdot\dfrac{1}{2}=3\sqrt{3}$

따라서 △ABC의 외접원의 넓이는

$\pi\cdot(3\sqrt{3})^2=27\pi$

답 27π

09 $0° < A < 180°$이므로

$\sin A = \sqrt{1-\cos^2 A} = \sqrt{1-\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

△ABC의 외접원의 반지름의 길이가 6이므로 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{BC}}{\sin A} = 2\cdot 6$

$\therefore \overline{BC} = 2\cdot 6\cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = 4\sqrt{3}$ 답 $4\sqrt{3}$

10 사인법칙에 의하여

$\sin A : \sin B : \sin C = a : b : c$

$= 5 : 4 : 8$

이므로 $\sin A = 5k$, $\sin B = 4k$, $\sin C = 8k$ $(k>0)$로 놓으면

$\frac{\sin A \sin C}{\sin^2 B} = \frac{5k\cdot 8k}{(4k)^2} = \frac{5}{2}$ 답 ③

11 $a+b=8k$, $b+c=7k$, $c+a=9k\,(k>0)$로 놓고 세 식을 변끼리 더하면

$2(a+b+c) = 24k \quad \therefore a+b+c = 12k$

따라서 $a=5k$, $b=3k$, $c=4k$이므로

$\sin A : \sin B : \sin C = a : b : c$

$= 5k : 3k : 4k$

$= 5 : 3 : 4$ 답 $5 : 3 : 4$

$a+b+c=12k$에 $b+c=7k$를 대입하면
$a+7k=12k$
$\therefore a=5k$

12 $A+B+C=180°$이고 $A : B : C = 1 : 2 : 3$이므로

$A = 180°\cdot\frac{1}{6} = 30°$, $B = 180°\cdot\frac{2}{6} = 60°$,

$C = 180°\cdot\frac{3}{6} = 90°$

사인법칙에 의하여

$a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C$

$= \sin 30° : \sin 60° : \sin 90°$

$= \frac{1}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} : 1$

$= 1 : \sqrt{3} : 2$

따라서 $a=k$, $b=\sqrt{3}k$, $c=2k$ $(k>0)$로 놓으면

$\frac{b^2-a^2}{ac} = \frac{(\sqrt{3}k)^2-k^2}{k\cdot 2k} = \frac{2k^2}{2k^2} = 1$ 답 1

13 △ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$\sin A = \frac{a}{2R}$, $\sin B = \frac{b}{2R}$, $\sin C = \frac{c}{2R}$

이것을 주어진 등식에 대입하면

$(b-c)\cdot\frac{a}{2R} = b\cdot\frac{b}{2R} - c\cdot\frac{c}{2R}$

$b^2-c^2-ab+ac=0$

$(b+c)(b-c)-a(b-c)=0$

$(b-c)(b+c-a)=0$

$b+c\neq a$이므로 $\quad b-c=0$, 즉 $b=c$

따라서 △ABC는 $b=c$인 이등변삼각형이다. 답 ②

두 변의 길이의 합이 나머지 한 변의 길이와 같으면 삼각형이 만들어지지 않는다.

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 해는 $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

원에 내접하는 사각형에서 한 쌍의 대각의 크기의 합은 180°이다.

14 주어진 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4} = (-\sin B)^2 - (\cos A + \cos C)(\cos A - \cos C)$

$= \sin^2 B - \cos^2 A + \cos^2 C$

$= \sin^2 B - (1-\sin^2 A) + (1-\sin^2 C)$

$= \sin^2 B + \sin^2 A - \sin^2 C$

이므로

$\sin^2 B + \sin^2 A - \sin^2 C = 0$ ...... ㉠

△ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$\sin A = \frac{a}{2R}$, $\sin B = \frac{b}{2R}$, $\sin C = \frac{c}{2R}$

이것을 ㉠에 대입하면

$\left(\frac{b}{2R}\right)^2 + \left(\frac{a}{2R}\right)^2 - \left(\frac{c}{2R}\right)^2 = 0$

$\therefore a^2+b^2=c^2$

따라서 △ABC는 $C=90°$인 직각삼각형이다.

답 $C=90°$인 직각삼각형

15 코사인법칙에 의하여

$(3\sqrt{2})^2 = (2\sqrt{3})^2 + c^2 - 2\cdot 2\sqrt{3}\cdot c\cdot\cos 30°$

$18 = 12 + c^2 - 2\cdot 2\sqrt{3}\cdot c\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$

$c^2-6c-6=0$

$\therefore c = 3+\sqrt{15}$ ($\because c>0$) 답 $3+\sqrt{15}$

16 □ABCD가 원에 내접하므로

$B+D=180°$

$\therefore D = 180° - 45° = 135°$

따라서 △ACD에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AC}^2 = (2\sqrt{2})^2 + 5^2 - 2\cdot 2\sqrt{2}\cdot 5\cdot\cos 135°$

$= 8+25-2\cdot 2\sqrt{2}\cdot 5\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 53$ 답 ④

17 $\angle BDC = 60°$이므로

$\angle ADC = 180° - 60° = 120°$

$\overline{AD}=x$, $\overline{AC}=y$라 하면 △ADC에서 코사인법칙에 의하여

$y^2 = x^2+3^2-2\cdot x\cdot 3\cdot\cos 120°$

$= x^2+9-2\cdot x\cdot 3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$

$= x^2+3x+9$ ...... ㉠

한편 △BCD에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{BC}^2 = 4^2+3^2-2\cdot 4\cdot 3\cdot\cos 60°$

$= 16+9-2\cdot 4\cdot 3\cdot\frac{1}{2} = 13$

$\therefore \overline{BC} = \sqrt{13}$ ($\because \overline{BC}>0$)

△ABC는 직각삼각형이므로

$(x+4)^2 = (\sqrt{13})^2 + y^2$

㉠을 위의 식에 대입하면

$x^2+8x+16 = 13+x^2+3x+9$

$5x=6 \qquad \therefore\ x=\dfrac{6}{5}$

$\therefore\ \overline{\mathrm{AD}}=\dfrac{6}{5}$ 답 $\dfrac{6}{5}$

다른 풀이 $\overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{13}$이므로 △BCD에서 코사인법칙에 의하여

$\cos B=\dfrac{4^2+(\sqrt{13})^2-3^2}{2\cdot 4\cdot \sqrt{13}}=\dfrac{5\sqrt{13}}{26}$ ...... ㉠

$\overline{\mathrm{AD}}=x$라 하면 △ABC는 직각삼각형이므로

$\cos B=\dfrac{\sqrt{13}}{x+4}$ ...... ㉡

㉠, ㉡에서 $\dfrac{5\sqrt{13}}{26}=\dfrac{\sqrt{13}}{x+4}$

$5(x+4)=26, \qquad 5x=6 \qquad \therefore\ x=\dfrac{6}{5}$

18 코사인법칙에 의하여

$\cos A=\dfrac{5^2+4^2-6^2}{2\cdot 5\cdot 4}=\dfrac{1}{8}$

이때 $0^\circ<A<180^\circ$이므로

$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}$

$=\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{8}\right)^2}=\dfrac{3\sqrt{7}}{8}$ 답 $\dfrac{3\sqrt{7}}{8}$

19 △ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\cos B=\dfrac{6^2+8^2-12^2}{2\cdot 6\cdot 8}=-\dfrac{11}{24}$

이므로 △ABD에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{\mathrm{AD}}^2=6^2+4^2-2\cdot 6\cdot 4\cdot \cos B$

$=36+16-2\cdot 6\cdot 4\cdot\left(-\dfrac{11}{24}\right)=74$

$\therefore\ \overline{\mathrm{AD}}=\sqrt{74}\ (\because\ \overline{\mathrm{AD}}>0)$ 답 $\sqrt{74}$

20 $\overline{\mathrm{BD}}:\overline{\mathrm{CD}}=\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{AC}}=1:2$이므로 $\overline{\mathrm{BD}}=x$, $\overline{\mathrm{CD}}=2x\ (x>0)$라 하고 $\angle\mathrm{BAD}=\theta$라 하면 △ABD에서 코사인법칙에 의하여

$\cos\theta=\dfrac{9^2+(6\sqrt{3})^2-x^2}{2\cdot 9\cdot 6\sqrt{3}}=\dfrac{189-x^2}{108\sqrt{3}}$

△ADC에서 코사인법칙에 의하여

$\cos\theta=\dfrac{(6\sqrt{3})^2+18^2-(2x)^2}{2\cdot 6\sqrt{3}\cdot 18}=\dfrac{108-x^2}{54\sqrt{3}}$

따라서 $\dfrac{189-x^2}{108\sqrt{3}}=\dfrac{108-x^2}{54\sqrt{3}}$이므로

$189-x^2=216-2x^2$

$x^2=27 \qquad \therefore\ x=3\sqrt{3}\ (\because\ x>0)$

$\therefore\ \overline{\mathrm{BD}}=3\sqrt{3}$ 답 ④

21 △ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$\sin A=\dfrac{a}{2R},\ \sin B=\dfrac{b}{2R}$ ...... ㉠

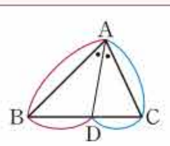
코사인법칙에 의하여

$\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$ ...... ㉡

Q BOX

a^3-c^3
$=(a-c)(a^2+ac+c^2)$

$\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{BD}}+\overline{\mathrm{DC}}$
$=4+4=8$



➡ $\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{AC}}$
$=\overline{\mathrm{BD}}:\overline{\mathrm{CD}}$

㉠, ㉡을 주어진 등식에 대입하면

$\dfrac{a}{2R}-\dfrac{b}{2R}\cdot\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=0$

$2a^2-(a^2+b^2-c^2)=0$

$\therefore\ b^2=a^2+c^2$

따라서 △ABC는 $B=90^\circ$인 직각삼각형이다.

답 $B=90^\circ$인 직각삼각형

22 $\tan A\sin A=\tan C\sin C$에서

$\dfrac{\sin A}{\cos A}\cdot\sin A=\dfrac{\sin C}{\cos C}\cdot\sin C$

$\therefore\ \cos C\sin^2 A=\cos A\sin^2 C$ ...... ㉠

△ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$\sin A=\dfrac{a}{2R},\ \sin C=\dfrac{c}{2R}$ ...... ㉡

코사인법칙에 의하여

$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc},\ \cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$ ...... ㉢

㉡, ㉢을 ㉠에 대입하면

$\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\cdot\left(\dfrac{a}{2R}\right)^2=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\cdot\left(\dfrac{c}{2R}\right)^2$

$a^3+ab^2-ac^2=b^2c+c^3-a^2c$

$a^3-c^3+b^2(a-c)+ac(a-c)=0$

$(a-c)(a^2+2ac+b^2+c^2)=0$

$\therefore\ a=c\ (\because\ a^2+2ac+b^2+c^2>0)$

따라서 △ABC는 $a=c$인 이등변삼각형이다. 답 ③

23 길이가 8인 변의 대각의 크기를 θ라 하면 코사인법칙에 의하여

$\cos\theta=\dfrac{5^2+7^2-8^2}{2\cdot 5\cdot 7}=\dfrac{1}{7}$

이때 $0^\circ<\theta<180^\circ$이므로

$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{7}\right)^2}=\dfrac{4\sqrt{3}}{7}$

삼각형의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$\dfrac{8}{\sin\theta}=2R$

$\therefore\ R=\dfrac{8}{\frac{4\sqrt{3}}{7}}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{7\sqrt{3}}{3}$

따라서 외접원의 넓이는

$\pi\cdot\left(\dfrac{7\sqrt{3}}{3}\right)^2=\dfrac{49}{3}\pi$ 답 $\dfrac{49}{3}\pi$

24 △ABC에서 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{\mathrm{AC}}}{\sin 45^\circ}=\dfrac{3\sqrt{2}}{\sin 60^\circ}$

$\overline{\mathrm{AC}}\sin 60^\circ=3\sqrt{2}\sin 45^\circ$

$\therefore\ \overline{\mathrm{AC}}=3\sqrt{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{2}{\sqrt{3}}=2\sqrt{3}$

$\triangle ACD$는 $\overline{AC}=\overline{CD}=2\sqrt{3}$인 이등변삼각형이고

$\angle ACD=180°-60°=120°$

이므로 $\triangle ACD$에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AD}^2=(2\sqrt{3})^2+(2\sqrt{3})^2-2\cdot2\sqrt{3}\cdot2\sqrt{3}\cdot\cos120°$$

$$=12+12-2\cdot2\sqrt{3}\cdot2\sqrt{3}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=36$$

$\therefore \overline{AD}=6$ ($\because \overline{AD}>0$) 답 6

다른 풀이 $\triangle ACD$는 $\overline{AC}=\overline{CD}$인 이등변삼각형이므로

$\angle CDA=\frac{1}{2}\angle ACB=30°$

$\triangle ABD$에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{3\sqrt{2}}{\sin30°}=\frac{\overline{AD}}{\sin45°}$$

$\overline{AD}\sin30°=3\sqrt{2}\sin45°$

$\therefore \overline{AD}=3\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot2=6$

25 삼각형의 나머지 한 각의 크기는

$180°-(75°+60°)=45°$

A 지점에서 풍선까지의 거리를 x m라 하면 사인법칙에 의하여

$$\frac{30}{\sin45°}=\frac{x}{\sin60°}$$

$30\sin60°=x\sin45°$

$\therefore x=30\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{2}}=15\sqrt{6}$

따라서 A 지점에서 풍선까지의 거리는 $15\sqrt{6}$ m이다.

답 $15\sqrt{6}$ m

26 $\triangle ABC$에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AB}^2=100^2+100^2-2\cdot100\cdot100\cdot\cos120°$$

$$=2\cdot100^2-2\cdot100^2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=3\cdot100^2$$

$\therefore \overline{AB}=100\sqrt{3}$ (m) ($\because \overline{AB}>0$)

따라서 두 나무 A, B 사이의 거리는 $100\sqrt{3}$ m이다.

답 ⑤

27 $\triangle ABC$에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos C=\frac{3^2+2^2-4^2}{2\cdot3\cdot2}=-\frac{1}{4}$$

이때 $0°<C<180°$이므로

$$\sin C=\sqrt{1-\cos^2C}=\sqrt{1-\left(-\frac{1}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{15}}{4}$$

$\triangle ABC$의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$$\frac{4}{\sin C}=2R$$

$$\therefore R=\frac{4}{\frac{\sqrt{15}}{4}}\cdot\frac{1}{2}=\frac{8\sqrt{15}}{15}$$

따라서 접시의 반지름의 길이는 $\frac{8\sqrt{15}}{15}$이다.

답 $\frac{8\sqrt{15}}{15}$

Q BOX

$\angle CAD=\angle CDA$이므로

$\angle ACB$

$=\angle CAD+\angle CDA$

$=2\angle CDA$

$\therefore \angle CDA$

$=\frac{1}{2}\angle ACB$

$100^2=10000$으로 계산하지 않고 100^2으로 묶어서 계산하는 것이 더 간단하다.

한 원에서 호의 길이는 그 호에 대한 중심각의 크기에 정비례한다.

14 삼각형의 넓이

57쪽

01 (1) $\triangle ABC=\frac{1}{2}\cdot8\cdot10\cdot\sin45°$

$$=\frac{1}{2}\cdot8\cdot10\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=20\sqrt{2}$$

(2) $\triangle ABC=\frac{1}{2}\cdot12\cdot5\cdot\sin150°$

$$=\frac{1}{2}\cdot12\cdot5\cdot\frac{1}{2}=15$$

답 (1) $20\sqrt{2}$ (2) 15

02 $\square ABCD=6\cdot7\cdot\sin60°$

$$=6\cdot7\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=21\sqrt{3}$$ 답 $21\sqrt{3}$

03 $\square ABCD=\frac{1}{2}\cdot8\cdot11\cdot\sin135°$

$$=\frac{1}{2}\cdot8\cdot11\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=22\sqrt{2}$$ 답 $22\sqrt{2}$

04 $\triangle ABC$의 넓이가 18이므로

$\frac{1}{2}\cdot4\sqrt{3}\cdot6\cdot\sin B=18$

$\therefore \sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}$

이때 $90°<B<180°$이므로

$B=120°$ 답 ②

05 $A+B+C=180°$이므로

$A+B=180°-C$

따라서 $\sin(A+B)=\sin(180°-C)=\sin C$이므로

$\sin C=\frac{2}{5}$

$\therefore \triangle ABC=\frac{1}{2}\cdot5\cdot8\cdot\frac{2}{5}=8$ 답 8

06 $\angle AOB:\angle BOC:\angle COA=\overset{\frown}{AB}:\overset{\frown}{BC}:\overset{\frown}{CA}$

$=5:4:3$

이므로

$\angle AOB=360°\cdot\frac{5}{12}=150°$,

$\angle BOC=360°\cdot\frac{4}{12}=120°$,

$\angle COA=360°\cdot\frac{3}{12}=90°$

$\therefore \triangle ABC=\triangle AOB+\triangle BOC+\triangle COA$

$$=\frac{1}{2}\cdot8\cdot8\cdot\sin150°+\frac{1}{2}\cdot8\cdot8\cdot\sin120°+\frac{1}{2}\cdot8\cdot8\cdot\sin90°$$

$$=\frac{1}{2}\cdot8\cdot8\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot8\cdot8\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\cdot8\cdot8\cdot1$$

$$=48+16\sqrt{3}$$ 답 $48+16\sqrt{3}$

07 코사인법칙에 의하여

$$\cos B=\frac{2^2+3^2-4^2}{2\cdot2\cdot3}=-\frac{1}{4}$$

이때 $0^\circ<B<180^\circ$이므로

$$\sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\sqrt{1-\left(-\frac{1}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$\therefore \triangle ABC=\frac{1}{2}\cdot2\cdot3\cdot\frac{\sqrt{15}}{4}=\frac{3\sqrt{15}}{4}$$ 답 ④

쌤 한마디

세 변의 길이가 주어진 삼각형의 넓이는 헤론의 공식을 이용하여 구할 수도 있다.

> 헤론의 공식
> 세 변의 길이가 a, b, c인 삼각형의 넓이는
> $$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\ \left(단,\ s=\frac{a+b+c}{2}\right)$$

따라서 **07**번을 헤론의 공식을 이용하여 풀면

$$s=\frac{2+3+4}{2}=\frac{9}{2}$$

이므로

$$\triangle ABC=\sqrt{\frac{9}{2}\cdot\left(\frac{9}{2}-2\right)\cdot\left(\frac{9}{2}-3\right)\cdot\left(\frac{9}{2}-4\right)}$$
$$=\sqrt{\frac{9}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}}=\frac{3\sqrt{15}}{4}$$

08 $\triangle ABC=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}bc\sin A$

$$=\frac{1}{2}ca\sin B=16$$

늘어난 부분의 넓이는

$$\triangle APQ=\frac{1}{2}\cdot\overline{AP}\cdot\overline{AQ}\cdot\sin(180^\circ-A)$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}b\cdot\frac{5}{4}c\cdot\sin A$$
$$=\frac{5}{16}\cdot\frac{1}{2}bc\sin A$$
$$=\frac{5}{16}\triangle ABC=\frac{5}{16}\cdot16=5$$

QBOX: $\overline{AP}=0.25\overline{AC}=\frac{1}{4}b$

QBOX: $\overline{AQ}=1.25\overline{AB}=\frac{5}{4}c$

$$\triangle BQR=\frac{1}{2}\cdot\overline{BQ}\cdot\overline{BR}\cdot\sin(180^\circ-B)$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}c\cdot\frac{5}{4}a\cdot\sin B$$
$$=\frac{5}{16}\cdot\frac{1}{2}ca\sin B$$
$$=\frac{5}{16}\triangle ABC=\frac{5}{16}\cdot16=5$$

$$\triangle CRP=\frac{1}{2}\cdot\overline{CR}\cdot\overline{CP}\cdot\sin(180^\circ-C)$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}a\cdot\frac{5}{4}b\cdot\sin C$$
$$=\frac{5}{16}\cdot\frac{1}{2}ab\sin C$$
$$=\frac{5}{16}\triangle ABC=\frac{5}{16}\cdot16=5$$

$$\therefore \triangle PQR=\triangle ABC+\triangle APQ+\triangle BQR+\triangle CRP$$
$$=16+5+5+5$$
$$=31$$ 답 ③

09 삼각형의 넓이는

$$2\cdot5^2\cdot\sin\frac{\pi}{6}\cdot\sin\frac{\pi}{3}\cdot\sin\frac{\pi}{2}=2\cdot25\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot1$$
$$=\frac{25\sqrt{3}}{2}$$ 답 $\frac{25\sqrt{3}}{2}$

QBOX: $\triangle ABC$의 외접원의 반지름의 길이가 R일 때, $\triangle ABC=2R^2\sin A\sin B\sin C$

10 $\triangle ABC$의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면

$$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{5}\cdot(7+8+9)=\frac{7\cdot8\cdot9}{4R},\quad 12\sqrt{5}=\frac{126}{R}$$

$$\therefore R=\frac{21\sqrt{5}}{10}$$

QBOX: $\triangle ABC$의 내접원의 반지름의 길이가 r일 때, $\triangle ABC=\frac{1}{2}r(a+b+c)$

따라서 외접원의 둘레의 길이는

$$2\pi\cdot\frac{21\sqrt{5}}{10}=\frac{21\sqrt{5}}{5}\pi$$ 답 $\frac{21\sqrt{5}}{5}\pi$

11 $\square ABCD=\triangle ABD+\triangle BCD$

$$=\frac{1}{2}\cdot5\cdot8\cdot\sin\frac{\pi}{3}+\frac{1}{2}\cdot3\sqrt{3}\cdot8\cdot\sin\frac{\pi}{6}$$
$$=\frac{1}{2}\cdot5\cdot8\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\cdot3\sqrt{3}\cdot8\cdot\frac{1}{2}$$
$$=10\sqrt{3}+6\sqrt{3}$$
$$=16\sqrt{3}$$ 답 $16\sqrt{3}$

12 $\triangle ABD$에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{BD}^2=6^2+6^2-2\cdot6\cdot6\cdot\cos120^\circ$$
$$=36+36-2\cdot6\cdot6\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=108$$

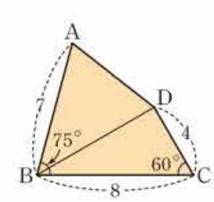
$$\therefore \overline{BD}=6\sqrt{3}\ (\because \overline{BD}>0)$$

$$\therefore \square ABCD$$
$$=\triangle ABD+\triangle BCD$$
$$=\frac{1}{2}\cdot6\cdot6\cdot\sin120^\circ+\frac{1}{2}\cdot9\cdot6\sqrt{3}\cdot\sin45^\circ$$
$$=\frac{1}{2}\cdot6\cdot6\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\cdot9\cdot6\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$=9\sqrt{3}+\frac{27\sqrt{6}}{2}$$

따라서 $a=9$, $b=\frac{27}{2}$이므로

$$\frac{b}{a}=\frac{27}{2}\cdot\frac{1}{9}=\frac{3}{2}$$ 답 ④

13 오른쪽 그림과 같이 $\overline{BD}$를 그으면 $\triangle BCD$에서 코사인법칙에 의하여



$$\overline{BD}^2=4^2+8^2-2\cdot4\cdot8\cdot\cos60^\circ$$
$$=16+64-2\cdot4\cdot8\cdot\frac{1}{2}=48$$

$$\therefore \overline{BD}=4\sqrt{3}\ (\because \overline{BD}>0)$$

$\triangle BCD$에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{4\sqrt{3}}{\sin60^\circ}=\frac{4}{\sin(\angle DBC)}$$

$$4\sqrt{3}\sin(\angle DBC)=4\sin60^\circ$$

$$\therefore \sin(\angle DBC)=4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{4\sqrt{3}}=\frac{1}{2}$$

이때 $0° < \angle DBC < 75°$이므로

$\angle DBC = 30°$

따라서 $\angle ABD = 75° - 30° = 45°$이므로

$\square ABCD = \triangle ABD + \triangle BCD$

$= \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 4\sqrt{3} \cdot \sin 45° + \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 4 \cdot \sin 60°$

$= \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 4\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$

$= 7\sqrt{6} + 8\sqrt{3}$ 　답 $7\sqrt{6} + 8\sqrt{3}$

14 $\overline{CD} = \overline{AB} = 3$이므로

$\square ABCD = 3 \cdot 4 \cdot \sin 135°$

$= 3 \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 6\sqrt{2}$ 　답 $6\sqrt{2}$

15 평행사변형 ABCD의 넓이가 $24\sqrt{2}$이므로

$6 \cdot 4\sqrt{6} \cdot \sin B = 24\sqrt{2}$

$\therefore \sin B = \frac{\sqrt{3}}{3}$

이때 $0° < B < 90°$이므로

$\cos B = \sqrt{1 - \sin^2 B} = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}$

따라서 △ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AC}^2 = 6^2 + (4\sqrt{6})^2 - 2 \cdot 6 \cdot 4\sqrt{6} \cdot \cos B$

$= 36 + 96 - 2 \cdot 6 \cdot 4\sqrt{6} \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} = 36$

$\therefore \overline{AC} = 6$ ($\because \overline{AC} > 0$) 　답 ②

16 □ABCD의 두 대각선이 이루는 예각의 크기를 θ라 하면 □ABCD의 넓이가 15이므로

$\frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{6} \cdot 5\sqrt{6} \cdot \sin\theta = 15$

$\therefore \sin\theta = \frac{1}{2}$

이때 θ는 예각이므로 　$\theta = 30°$ 　답 ②

17 직각삼각형 BCD에서

$\overline{BD} = \frac{6}{\tan 30°} = 6\sqrt{3}$

$\therefore \square ABCD = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 6\sqrt{3} \cdot \sin 60°$

$= \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 6\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{81}{2}$ 　답 $\frac{81}{2}$

18 $\angle APB = \theta$라 하면 △ABP에서 코사인법칙에 의하여

$\cos\theta = \frac{2^2 + 4^2 - 4^2}{2 \cdot 2 \cdot 4} = \frac{1}{4}$

이때 $0° < \theta < 180°$이므로

$\sin\theta = \sqrt{1 - \cos^2\theta} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{15}}{4}$

$\therefore \square ABCD = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 7 \cdot \sin\theta$

$= \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 7 \cdot \frac{\sqrt{15}}{4} = 7\sqrt{15}$ 　답 ⑤

Q BOX

수열의 일반항 a_n의 n에 1, 2, 3을 차례대로 대입한다.

첫째항이 a, 공차가 d인 등차수열의 일반항 a_n은

$a_n = a + (n-1)d$

$5-1 = 9-5 = 13-9$
$= 17-13$
$= \cdots = 4$

세 수 a, b, c가 이 순서대로 등차수열을 이루면

$b = \frac{a+c}{2}$

△BCD는 $\angle BDC = 90°$인 직각삼각형이므로 삼각비를 이용하여 $\overline{BD}$의 길이를 구할 수 있다.

$\overline{AC} = \overline{AP} + \overline{PC}$
$= 2 + 6 = 8$

$\overline{BD} = \overline{BP} + \overline{PD}$
$= 4 + 3 = 7$

08 등차수열과 등비수열

15 등차수열

Ⓦ 60쪽

01 (1) $a_1 = -1+4 = 3$, $a_2 = -2+4 = 2$,

$a_3 = -3+4 = 1$

(2) $a_1 = 10-1 = 9$, $a_2 = 10^2 - 1 = 99$,

$a_3 = 10^3 - 1 = 999$

(3) $a_1 = \frac{7}{1+2} = \frac{7}{3}$, $a_2 = \frac{7}{2+2} = \frac{7}{4}$, $a_3 = \frac{7}{3+2} = \frac{7}{5}$

답 (1) 3, 2, 1 　(2) 9, 99, 999 　(3) $\frac{7}{3}$, $\frac{7}{4}$, $\frac{7}{5}$

02 (1) $a_n = -4 + (n-1) \cdot 7 = 7n - 11$

(2) $a_n = 8 + (n-1) \cdot (-2) = -2n + 10$

(3) 주어진 등차수열의 첫째항이 1이고 공차가 4이므로

$a_n = 1 + (n-1) \cdot 4 = 4n - 3$

(4) 주어진 등차수열의 첫째항이 -3이고 공차가 -3이므로

$a_n = -3 + (n-1) \cdot (-3) = -3n$

답 (1) $a_n = 7n - 11$ 　(2) $a_n = -2n + 10$
(3) $a_n = 4n - 3$ 　(4) $a_n = -3n$

03 (1) x는 -6과 -14의 등차중항이므로

$x = \frac{-6 + (-14)}{2} = -10$

(2) 8은 x와 $3x$의 등차중항이므로

$8 = \frac{x + 3x}{2}$, 　$2x = 8$

$\therefore x = 4$

답 (1) -10 　(2) 4

04 -128을 제k항이라 하면

$-2k^2 = -128$, 　$k^2 = 64$

$\therefore k = 8$ ($\because$ k는 자연수)

따라서 -128은 제8항이다.

답 제8항

05 제2항은 　$2^2 - 5 \cdot 2 = -6$

제7항은 　$7^2 - 5 \cdot 7 = 14$

따라서 구하는 합은

$-6 + 14 = 8$ 　답 ①

06 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \cdots = a_{100} - a_{99} = d$

$\therefore a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + a_{99} - a_{100}$

$= -\{(a_2 - a_1) + (a_4 - a_3) + \cdots + (a_{100} - a_{99})\}$

$= -50d$

즉 $-50d = 100$이므로 　$d = -2$

따라서 주어진 수열의 공차는 -2이다. 　답 -2

07 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a라 하면

$a_9=a+8\cdot(-2)=9 \quad \therefore a=25$

따라서 $a_n=25+(n-1)\cdot(-2)=-2n+27$이므로

$b_n=a_{2n}=-2\cdot 2n+27=-4n+27$

답 $b_n=-4n+27$

08 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$(a_2+a_5):(a_3+a_6)=2:3$에서

$\{(a_1+d)+(a_1+4d)\}:\{(a_1+2d)+(a_1+5d)\}=2:3$

$(2a_1+5d):(2a_1+7d)=2:3$

$3(2a_1+5d)=2(2a_1+7d)$

$\therefore d=-2a_1$

$\therefore a_{15}=a_1+14d=a_1+14\cdot(-2a_1)=-27a_1$

답 ④

09 $a_n=100+(n-1)\cdot(-3)=-3n+103$

$-3n+103<10$에서 $\quad 3n>93$

$\therefore n>31$

따라서 처음으로 10보다 작아지는 항은 제32항이다.

답 제32항

10 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_3=a+2d=-37$ …… ㉠

$a_9=a+8d=-13$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-45,\ d=4$

$\therefore a_n=-45+(n-1)\cdot 4=4n-49$

$4n-49>0$에서 $\quad n>\frac{49}{4}=12.25$

따라서 자연수 n의 최솟값은 13이다.

답 ②

11 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a라 하면

$a_{21}=a+20\cdot 5=21 \quad \therefore a=-79$

$\therefore a_n=-79+(n-1)\cdot 5=5n-84$

$5n-84>0$에서 $\quad n>\frac{84}{5}=16.8$

이때 $a_{16}=5\cdot 16-84=-4,\ a_{17}=5\cdot 17-84=1$이므로

$|a_{16}|=4,\ |a_{17}|=1$

따라서 $|a_n|$의 값이 최소가 되는 자연수 n의 값은 17이다.

답 17

12 공차를 d라 하면 첫째항이 1, 제17항이 49이므로

$1+16d=49 \quad \therefore d=3$

이때 a_7은 주어진 수열의 제8항이므로

$a_7=1+7\cdot 3=22$

답 ③

13 공차를 d라 하면 첫째항이 12, 제5항이 38이므로

$12+4d=38 \quad \therefore d=\frac{13}{2}$

이때 $a,\ b,\ c$는 각각 주어진 수열의 제2항, 제3항, 제4항이므로

$a=12+\frac{13}{2}=\frac{37}{2},\ b=12+2\cdot\frac{13}{2}=25,$

$c=12+3\cdot\frac{13}{2}=\frac{63}{2}$

$\therefore a+b+c=75$

답 75

14 공차를 d라 하면 첫째항이 8, 제$(n+2)$항이 50이므로

$8+(n+1)d=50 \quad \therefore n+1=\frac{42}{d}$

이때 n은 자연수이므로 $\frac{42}{d}$는 1보다 큰 자연수이어야 한다.

따라서 공차가 될 수 없는 것은 ⑤이다.

답 ⑤

15 세 수 7, a, 15가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$a=\frac{7+15}{2}=11$

세 수 11, 8, b도 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$8=\frac{11+b}{2} \quad \therefore b=5$

$\therefore ab=55$

답 55

16 세 수 $\log_3 4$, $\log_3 a$, $\log_3 16$이 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2\log_3 a=\log_3 4+\log_3 16$

$\log_3 a^2=\log_3 64, \quad a^2=64$

$\therefore a=8\ (\because a>0)$

세 수 $\log_3 8$, $\log_3 16$, $\log_3 b$도 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2\log_3 16=\log_3 8+\log_3 b$

$\log_3 16^2=\log_3 8b, \quad 8b=256$

$\therefore b=32$

$\therefore b-a=24$

답 ③

17 (1) $f(1)=a\cdot 1^2-3\cdot 1+4=a+1$

$f(3)=a\cdot 3^2-3\cdot 3+4=9a-5$

$f(4)=a\cdot 4^2-3\cdot 4+4=16a-8$

(2) 세 수 $f(1)$, $f(3)$, $f(4)$, 즉 $a+1$, $9a-5$, $16a-8$이 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2(9a-5)=(a+1)+(16a-8)$

$18a-10=17a-7$

$\therefore a=3$

답 풀이 참조

18 세 수를 $a-d$, a, $a+d$로 놓으면

세 수의 합이 18이므로

$(a-d)+a+(a+d)=18$

$3a=18 \quad \therefore a=6$

Q BOX

$d=8$이면

$n+1=\frac{42}{8}$

$\therefore n=\frac{17}{4}$

그런데 n은 자연수이므로

$d\neq 8$

처음으로 양수가 되는 항이 a_k일 때, $|a_{k-1}|$과 $|a_k|$의 값 중 작은 값이 $|a_n|$의 최솟값이다.

나머지정리

다항식 $P(x)$를 일차식 $x-\alpha$로 나누었을 때의 나머지를 R라 하면

$R=P(\alpha)$

세 수의 곱이 120이므로

$6(6-d)(6+d)=120, \quad 36-d^2=20$

$d^2=16 \quad \therefore d=\pm4$

따라서 세 수는 2, 6, 10이므로 세 수의 제곱의 합은

$2^2+6^2+10^2=140$ 답 140

19 삼차방정식의 세 실근을 $a-d$, a, $a+d$로 놓으면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(a-d)+a+(a+d)=-6$

$3a=-6 \quad \therefore a=-2$

따라서 주어진 방정식의 한 근이 -2이므로 방정식에 $x=-2$를 대입하면

$(-2)^3+6\cdot(-2)^2+k\cdot(-2)-24=0$

$2k=-8 \quad \therefore k=-4$ 답 ②

20 조건 (가)에서 직각삼각형의 세 변의 길이를 $a-d$, a, $a+d$ $(a>d>0)$로 놓으면 피타고라스 정리에 의하여

$(a+d)^2=a^2+(a-d)^2$

$a^2-4ad=0, \quad a(a-4d)=0$

$\therefore a=4d$ ($\because a>0$)

또 조건 (나)에서

$\frac{1}{2}a(a-d)=54$

$a=4d$를 위의 식에 대입하면

$6d^2=54, \quad d^2=9 \quad \therefore d=3$ ($\because d>0$)

따라서 $a=12$이므로 직각삼각형의 빗변의 길이는

$a+d=12+3=15$ 답 ②

가장 긴 변이 빗변이므로 빗변의 길이는 $a+d$이다.

16 등차수열의 합

W 63쪽

01 (1) $\frac{15(4+32)}{2}=270$

(2) $\frac{15\{2\cdot10+(15-1)\cdot(-1)\}}{2}=45$

답 (1) 270 (2) 45

02 (1) 1, 6, 11, ⋯, 36은 첫째항이 1, 공차가 $6-1=5$인 등차수열이므로 일반항 a_n은

$a_n=1+(n-1)\cdot5=5n-4$

36을 제k항이라 하면

$5k-4=36 \quad \therefore k=8$

따라서 구하는 합은 첫째항이 1, 제8항이 36인 등차수열의 첫째항부터 제8항까지의 합이므로

$\frac{8(1+36)}{2}=148$

(2) -16, -13, -10, ⋯, 29는 첫째항이 -16, 공차가 $-13-(-16)=3$인 등차수열이므로 일반항 a_n은

$a_n=-16+(n-1)\cdot3=3n-19$

29를 제k항이라 하면

$3k-19=29 \quad \therefore k=16$

따라서 구하는 합은 첫째항이 -16, 제16항이 29인 등차수열의 첫째항부터 제16항까지의 합이므로

$\frac{16(-16+29)}{2}=104$

답 (1) 148 (2) 104

03 (1) (i) $n=1$일 때,

$a_1=S_1=1^2-1=0$

(ii) $n\ge2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=n^2-n-\{(n-1)^2-(n-1)\}$

$=2n-2$ ⋯⋯ ㉠

이때 $a_1=0$은 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$a_n=2n-2$

(2) (i) $n=1$일 때,

$a_1=S_1=2\cdot1^2-4\cdot1+1=-1$

(ii) $n\ge2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=2n^2-4n+1$

$-\{2(n-1)^2-4(n-1)+1\}$

$=4n-6$ ⋯⋯ ㉠

㉠에 $n=1$을 대입하면

$a_1=4\cdot1-6=-2$

(i), (ii)에서 $a_1=-1$, $a_n=4n-6$ $(n\ge2)$

답 (1) $a_n=2n-2$

(2) $a_1=-1$, $a_n=4n-6$ $(n\ge2)$

$a_1=S_1$을 이용하여 얻은 값과 다르므로 수열 $\{a_n\}$은 둘째항부터 등차수열을 이룬다.

04 $a_1=-3\cdot1+9=6$, $a_9=-3\cdot9+9=-18$이므로 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제9항까지의 합은

$\frac{9\{6+(-18)\}}{2}=-54$ 답 ④

05 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 -30, 공차가 4이므로

$S_n=\frac{n\{2\cdot(-30)+(n-1)\cdot4\}}{2}=2n^2-32n$

$2n^2-32n>0$에서 $n(n-16)>0$

$\therefore n>16$ ($\because n$은 자연수)

따라서 자연수 n의 최솟값은 17이다. 답 17

06 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$(a+2d)+(a+3d)+(a+4d)=18$에서

$a+3d=6$ ⋯⋯ ㉠

$(a+6d)+(a+7d)+(a+8d)=30$에서

$a+7d=10$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3$, $d=1$

따라서 $a_{11}=3+10\cdot1=13$, $a_{20}=3+19\cdot1=22$이므로 수열 $\{a_n\}$의 제11항부터 제20항까지의 합은

$\frac{10(13+22)}{2}=175$ 답 ⑤

첫째항이 a_{11}, 끝항이 a_{20}이고 항수가 10인 등차수열의 합

07 두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 공차를 각각 d, d'이라 하면

$a_1+b_1=5$, $d+d'=3$

$\therefore (a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10})$
$+(b_1+b_2+b_3+\cdots+b_{10})$
$=\dfrac{10(2a_1+9d)}{2}+\dfrac{10(2b_1+9d')}{2}$
$=5\{2(a_1+b_1)+9(d+d')\}$
$=5(2\cdot5+9\cdot3)$
$=185$ 답 185

다른 풀이 수열 $\{a_n+b_n\}$은 첫째항이 5, 공차가 3인 등차수열이므로

(주어진 식)$=(a_1+b_1)+(a_2+b_2)+\cdots+(a_{10}+b_{10})$
$=\dfrac{10\{2\cdot5+(10-1)\cdot3\}}{2}$
$=185$

쌤 한마디

두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 공차를 각각 d, d'이라 하면

$a_n+b_n=\{a_1+(n-1)d\}+\{b_1+(n-1)d'\}$
$=(a_1+b_1)+(n-1)(d+d')$

즉 수열 $\{a_n+b_n\}$은 첫째항이 a_1+b_1, 공차가 $d+d'$인 등차수열이다.

08 첫째항이 1, 끝항이 64, 항수가 $n+2$인 등차수열의 합이 715이므로

$\dfrac{(n+2)(1+64)}{2}=715$

$n+2=22$ $\therefore n=20$

주어진 등차수열의 공차를 d라 하면 64는 제22항이므로

$1+21d=64$ $\therefore d=3$ 답 ②

09 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=305$이므로

$4+a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+57=366$

즉 첫째항이 4, 끝항이 57, 항수가 $n+2$인 등차수열의 합이 366이므로

$\dfrac{(n+2)(4+57)}{2}=366$

$n+2=12$ $\therefore n=10$ 답 10

10 주어진 등차수열의 공차를 d라 하면 a_4는 이 수열의 제5항이므로

$a_4=-5+4d=11$ $\therefore d=4$

이때 79는 이 수열의 제$(n+2)$항이므로

$79=-5+(n+1)\cdot4$, $n+1=21$

$\therefore n=20$

따라서 주어진 수열은 첫째항이 -5, 끝항이 79, 항수가 22인 등차수열이므로 이 수열의 모든 항의 합은

$\dfrac{22(-5+79)}{2}=814$ 답 ③

Q BOX

$d=23$이면
$n+1=\dfrac{23}{23}=1$
$\therefore n=0$
그런데 n은 자연수이므로
$d\neq23$

두 수 a, b 사이에 n개의 수를 넣어서 첫째항이 a, 제$(n+2)$항이 b인 등차수열을 만들 때, 이 등차수열의 합을 S라 하면
$S=\dfrac{(n+2)(a+b)}{2}$

$a_6+a_7+\cdots+a_{10}$
$=(a_1+5d)$
$+(a_2+5d)$
$+\cdots+(a_5+5d)$
$=a_1+a_2+\cdots+a_5$
$+5\cdot5d$

11 주어진 등차수열의 공차를 d라 하면 첫째항이 3, 제$(n+2)$항이 26이므로

$3+(n+1)d=26$ $\therefore n+1=\dfrac{23}{d}$

이때 n, d는 자연수이므로 d는 23을 제외한 23의 양의 약수이어야 한다.

$\therefore d=1$, $n=22$

따라서 첫째항이 3, 끝항이 26, 항수가 24인 등차수열의 합은

$\dfrac{24(3+26)}{2}=348$

즉 $3+a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+26=348$이므로

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=319$ 답 319

12 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d, 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

$S_4=\dfrac{4\{2a+(4-1)d\}}{2}=4$에서

$2a+3d=2$ …… ㉠

$S_{10}=\dfrac{10\{2a+(10-1)d\}}{2}=-50$에서

$2a+9d=-10$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=4$, $d=-2$

$\therefore a_6=4+(6-1)\cdot(-2)=-6$ 답 -6

13 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d, 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

$S_5=\dfrac{5\{2a+(5-1)d\}}{2}=55$에서

$a+2d=11$ …… ㉠

$S_{10}=\dfrac{10\{2a+(10-1)d\}}{2}=55+205=260$에서

$2a+9d=52$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-1$, $d=6$

$\therefore S_{15}=\dfrac{15\{2\cdot(-1)+(15-1)\cdot6\}}{2}=615$

따라서 제11항부터 제15항까지의 합은

$S_{15}-S_{10}=615-260=355$ 답 ①

다른 풀이 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_{n+5}=a_n+5d$이므로

$a_6+a_7+\cdots+a_{10}=a_1+a_2+\cdots+a_5+5\cdot5d$ …… ㉠

$a_{11}+a_{12}+\cdots+a_{15}=a_6+a_7+\cdots+a_{10}+5\cdot5d$ …… ㉡

㉠에서 $205=55+25d$ $\therefore d=6$

$d=6$을 ㉡에 대입하면

$a_{11}+a_{12}+\cdots+a_{15}=205+25\cdot6=355$

14 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d $(d>0)$라 하면

$S_{35}=\dfrac{35\{2a+(35-1)d\}}{2}=210$에서

$a+17d=6$ …… ㉠

$|S_{15}|=\left|\frac{15\{2a+(15-1)d\}}{2}\right|=210$에서

$|a+7d|=14$

$\therefore a+7d=14$ 또는 $a+7d=-14$

(i) $a+7d=14$일 때,

㉠과 연립하여 풀면 $\quad a=\frac{98}{5},\ d=-\frac{4}{5}$

이때 공차가 음수이므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a+7d=-14$일 때,

㉠과 연립하여 풀면 $\quad a=-28,\ d=2$

(i), (ii)에서 $a=-28,\ d=2$이므로

$$S_{10}=\frac{10\{2\cdot(-28)+(10-1)\cdot 2\}}{2}=-190$$

답 -190

15 $a_n=19+(n-1)\cdot(-2)=-2n+21$

$-2n+21<0$에서 $\quad n>\frac{21}{2}=10.5$

즉 수열 $\{a_n\}$은 제11항부터 음수이므로 첫째항부터 제10항까지의 합이 최대이다.

따라서 자연수 n의 값은 10이다. 답 10

16 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_7=a+6d=12$ …… ㉠

$a_{10}=a+9d=-3$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=42,\ d=-5$

$\therefore a_n=42+(n-1)\cdot(-5)=-5n+47$

$-5n+47<0$에서 $\quad n>\frac{47}{5}=9.4$

즉 수열 $\{a_n\}$은 제10항부터 음수이므로 첫째항부터 제9항까지의 합이 최대이다.

이때 $a_9=-5\cdot 9+47=2$이므로 구하는 최댓값은

$$S_9=\frac{9(42+2)}{2}=198$$

답 198

17 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$$S_4=\frac{4\{2\cdot(-5)+(4-1)d\}}{2}=6d-20$$

$$S_9=\frac{9\{2\cdot(-5)+(9-1)d\}}{2}=36d-45$$

$S_4=S_9$에서 $\quad 6d-20=36d-45$

$30d=25 \quad \therefore d=\frac{5}{6}$

$\therefore a_n=-5+(n-1)\cdot\frac{5}{6}=\frac{5}{6}n-\frac{35}{6}$

$\frac{5}{6}n-\frac{35}{6}>0$에서 $\quad n>7$

즉 수열 $\{a_n\}$은 제8항부터 양수이므로 첫째항부터 제7항까지의 합이 최소이다.

이때 $a_7=\frac{5}{6}\cdot 7-\frac{35}{6}=0$이므로 구하는 최솟값은

$$S_7=\frac{7(-5+0)}{2}=-\frac{35}{2}$$

답 ②

참고 $a_7=0$이므로 $S_6+a_7=S_7$에서

$S_6=S_7$

따라서 S_6도 S_n의 최솟값이 될 수 있다.

18 100과 200 사이에 있는 자연수 중에서 6의 배수는

102, 108, 114, $\cdots$, 198

이때 $198=102+6\cdot 16$에서 구하는 값은 첫째항이 102, 끝항이 198, 항수가 17인 등차수열의 합이므로

$$\frac{17(102+198)}{2}=2550$$

답 ②

19 두 자리 자연수 중에서 5로 나누었을 때의 나머지가 4인 수는

14, 19, 24, $\cdots$, 99

이때 $99=14+5\cdot 17$에서 구하는 값은 첫째항이 14, 끝항이 99, 항수가 18인 등차수열의 합이므로

$$\frac{18(14+99)}{2}=1017$$

답 1017

20 3으로 나누었을 때의 나머지가 2인 수는

2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, $\cdots$ …… ㉠

4로 나누었을 때의 나머지가 3인 수는

3, 7, 11, 15, 19, 23, 27, 31, $\cdots$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 공통인 수를 작은 것부터 차례대로 나열하면

11, 23, 35, $\cdots$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 11, 공차가 12인 등차수열이므로

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10}=\frac{10\{2\cdot 11+(10-1)\cdot 12\}}{2}$$

$$=650$$

답 ⑤

21 $a_1=S_1=2\cdot 1^2+1-3=0$이므로 $\quad k\neq 1$

$k\geq 2$일 때,

$a_k=S_k-S_{k-1}$

$=2k^2+k-3-\{2(k-1)^2+(k-1)-3\}$

$=4k-1$

$a_k=27$에서 $\quad 4k-1=27 \quad \therefore k=7$

답 ④

22 $S_n=n^2+kn+4,\ T_n=3n^2-n$이라 하면

$a_{10}=S_{10}-S_9=10^2+10k+4-(9^2+9k+4)$

$=k+19$

$b_{10}=T_{10}-T_9=3\cdot 10^2-10-(3\cdot 9^2-9)$

$=56$

이때 $a_{10}=b_{10}$이므로 $\quad k+19=56$

$\therefore k=37$

답 37

23 $S_n=an^2+2n+b$에서

$a_1=S_1=a\cdot 1^2+2\cdot 1+b=-1$

$\therefore a+b=-3$ …… ㉠

$a_8=S_8-S_7=-43$에서

$a\cdot 8^2+2\cdot 8+b-(a\cdot 7^2+2\cdot 7+b)=-43$

Q BOX

첫째항이 102, 공차가 6인 등차수열의 제17항

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때

① $a_k>0,\ a_{k+1}<0$이면 S_n의 최댓값은 S_k이다.

② $a_k<0,\ a_{k+1}>0$이면 S_n의 최솟값은 S_k이다.

$15a+2=-43 \quad \therefore a=-3$

$a=-3$을 ㉠에 대입하면 $\quad b=0$

$\therefore a^2+b^2=9$ 답 9

24 (i) $n=1$일 때,

$a_1=S_1=2\cdot1^2-5\cdot1=-3$

(ii) $n\ge2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}$
$=2n^2-5n-\{2(n-1)^2-5(n-1)\}$
$=4n-7$ ⋯⋯ ㉠

이때 $a_1=-3$은 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$a_n=4n-7$

$9\le a_n\le40$에서 $\quad 9\le4n-7\le40$

$16\le4n\le47 \quad \therefore 4\le n\le\frac{47}{4}$

따라서 자연수 n은 4, 5, 6, ⋯, 11의 8개이다. 답 ④

$\frac{47}{4}=11.75$

17 등비수열

67쪽

01 (3) 주어진 등비수열의 첫째항이 2이고 공비가 2이므로

$a_n=2\cdot2^{n-1}=2^n$

(4) 주어진 등비수열의 첫째항이 1이고 공비가 $-\frac{1}{5}$이므로

$a_n=1\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)^{n-1}=\left(-\frac{1}{5}\right)^{n-1}$

답 (1) $a_n=4\cdot(-1)^{n-1}$ (2) $a_n=\frac{1}{2}\cdot6^{n-1}$
(3) $a_n=2^n$ (4) $a_n=\left(-\frac{1}{5}\right)^{n-1}$

첫째항이 a, 공비가 r인 등비수열의 일반항 a_n은
$a_n=ar^{n-1}$

$\frac{4}{2}=\frac{8}{4}=\frac{16}{8}=\cdots=2$

02 (1) x는 2와 18의 등비중항이므로

$x^2=2\cdot18=36 \quad \therefore x=\pm6$

(2) 9는 x와 $3x$의 등비중항이므로

$9^2=x\cdot3x, \quad x^2=27 \quad \therefore x=\pm3\sqrt{3}$

답 (1) -6 또는 6 (2) $-3\sqrt{3}$ 또는 $3\sqrt{3}$

세 수 a, b, c가 이 순서대로 등비수열을 이루면
$b^2=ac$

03 $a_n=\frac{2}{3^{2n-1}}$에서 $\quad a_1=\frac{2}{3}, a_2=\frac{2}{3^3}=\frac{2}{27}$

$\therefore \frac{a_2}{a_1}=\frac{2}{27}\div\frac{2}{3}=\frac{1}{9}$

따라서 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항은 $\frac{2}{3}$, 공비는 $\frac{1}{9}$이다.

답 첫째항: $\frac{2}{3}$, 공비: $\frac{1}{9}$

04 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_2=ar=18$ ⋯⋯ ㉠

$a_3:a_6=8:1$에서 $\quad a_3=8a_6$

$ar^2=8ar^5, \quad r^3=\frac{1}{8} \quad \therefore r=\frac{1}{2}$

$r=\frac{1}{2}$을 ㉠에 대입하면 $\quad \frac{1}{2}a=18 \quad \therefore a=36$

따라서 $a_n=36\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$이므로

$a_4=36\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{9}{2}$ 답 $\frac{9}{2}$

05 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면

$a_1+a_2+a_3=2$에서 $\quad a_1+a_1r+a_1r^2=2$

$\therefore a_1(1+r+r^2)=2$ ⋯⋯ ㉠

$a_4+a_5+a_6=54$에서 $\quad a_1r^3+a_1r^4+a_1r^5=54$

$\therefore a_1r^3(1+r+r^2)=54$ ⋯⋯ ㉡

㉡÷㉠을 하면 $\quad r^3=27 \quad \therefore r=3$

$r=3$을 ㉠에 대입하면 $\quad 13a_1=2 \quad \therefore a_1=\frac{2}{13}$

$\therefore a_2+a_4+a_6=a_1r+a_1r^3+a_1r^5$
$=a_1r(1+r^2+r^4)$
$=\frac{2}{13}\cdot3\cdot(1+3^2+3^4)$
$=42$ 답 ③

06 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_2=ar=5$ ⋯⋯ ㉠

$a_6=ar^5=125$ ⋯⋯ ㉡

㉡÷㉠을 하면 $\quad r^4=25 \quad \therefore r=\sqrt{5}\ (\because r>0)$

$r=\sqrt{5}$를 ㉠에 대입하면 $\quad \sqrt{5}a=5 \quad \therefore a=\sqrt{5}$

따라서 $a_n=\sqrt{5}\cdot(\sqrt{5})^{n-1}=(\sqrt{5})^n$이므로

$a_1a_3a_5\cdots a_{19}$
$=\sqrt{5}\cdot(\sqrt{5})^3\cdot(\sqrt{5})^5\cdot\cdots\cdot(\sqrt{5})^{19}$
$=5^{\frac{1+3+5+\cdots+19}{2}}=5^{\frac{10(1+19)}{4}}=5^{50}$ 답 ①

첫째항이 1, 끝항이 19, 항수가 10인 등차수열의 합

07 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_4=ar^3=12$ ⋯⋯ ㉠

$a_7=ar^6=96$ ⋯⋯ ㉡

㉡÷㉠을 하면 $\quad r^3=8 \quad \therefore r=2$

$r=2$를 ㉠에 대입하면 $\quad 8a=12 \quad \therefore a=\frac{3}{2}$

따라서 $a_n=\frac{3}{2}\cdot2^{n-1}$이므로 $\frac{3}{2}\cdot2^{n-1}>3000$에서

$2^{n-1}>2000$

이때 $2^{10}=1024$, $2^{11}=2048$이므로

$n-1\ge11 \quad \therefore n\ge12$

따라서 처음으로 3000보다 커지는 항은 제12항이다.

답 제12항

08 $a_n=1\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$이므로

$a_n-a_{n+1}=\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}-\left(\frac{1}{3}\right)^n=2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n$

$2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n<\frac{1}{600}$에서 $\quad \left(\frac{1}{3}\right)^n<\frac{1}{1200}$

$3^n>1200$

이때 $3^6=729$, $3^7=2187$이므로

$n\ge7$

따라서 자연수 n의 최솟값은 7이다. 답 ③

공비가 $\frac{1}{3}$이므로
$a_n>a_{n+1}$
따라서 a_n과 a_{n+1}의 차는 a_n-a_{n+1}이다.

09 공비를 r라 하면 첫째항이 32, 제4항이 108이므로

$32r^3=108$, $r^3=\frac{27}{8}$

$\therefore r=\frac{3}{2}$

이때 a, b는 각각 주어진 수열의 제2항, 제3항이므로

$a=32\cdot\frac{3}{2}=48$, $b=32\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2=72$

$\therefore b-a=24$ 답 ④

> 두 수 a, b 사이에 n개의 수를 넣어서 만든 등비수열
> ➡ 첫째항: a, 제$(n+2)$항: b
> ➡ $b=ar^{n+1}$ (단, r는 공비)

10 공비를 r라 하면 첫째항이 5, 제10항이 40이므로

$5r^9=40$, $r^9=8$

$\therefore r^3=2$

이때 a_5, a_7은 각각 주어진 수열의 제6항, 제8항이므로

$a_5=5r^5$, $a_7=5r^7$

$\therefore a_5a_7=5r^5\cdot5r^7=25r^{12}$

$=25\cdot(r^3)^4=25\cdot2^4$

$=400$ 답 400

11 세 수 3, a, 48이 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$a^2=3\cdot48=144$ $\therefore a=12$ ($\because a>0$)

세 수 12, 48, b도 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$48^2=12b$ $\therefore b=192$

$\therefore a+b=204$ 답 204

12 세 수 $\sin\theta$, $\frac{1}{3}$, $\cos\theta$가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$\sin\theta\cos\theta=\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$

$\therefore \tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

$=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$

$=\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}$

$=9$ 답 9

> 삼각함수 사이의 관계
> ① $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$
> ② $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

13 세 수 -3, a, b가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2a=-3+b$

$\therefore b=2a+3$ …… ㉠

세 수 a, b, 27이 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$b^2=27a$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $(2a+3)^2=27a$

$4a^2-15a+9=0$, $(4a-3)(a-3)=0$

$\therefore a=3$ ($\because a>1$)

$a=3$을 ㉠에 대입하면 $b=9$

$\therefore ab=27$ 답 27

14 세 수 α, β, $\alpha\beta$가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$\beta^2=\alpha\cdot\alpha\beta$ $\therefore \beta=\alpha^2$ …… ㉠

한편 이차방정식 $x^2+kx-8=0$의 서로 다른 두 실근이 α, β이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-k$, $\alpha\beta=-8$

㉠을 $\alpha\beta=-8$에 대입하면

$\alpha^3=-8$ $\therefore \alpha=-2$

$\alpha=-2$를 ㉠에 대입하면 $\beta=4$

$\therefore k=-(\alpha+\beta)=-(-2+4)=-2$

답 ②

15 세 실수를 a, ar, ar^2으로 놓으면

$a+ar+ar^2=9$에서

$a(1+r+r^2)=9$ …… ㉠

$a\cdot ar\cdot ar^2=-216$에서

$(ar)^3=-216$ …… ㉡

㉡에서 $ar=-6$ $\therefore a=-\frac{6}{r}$

$a=-\frac{6}{r}$을 ㉠에 대입하면 $-\frac{6}{r}(1+r+r^2)=9$

$2r^2+5r+2=0$, $(r+2)(2r+1)=0$

$\therefore r=-2$ 또는 $r=-\frac{1}{2}$

$r=-2$일 때 $a=3$, $r=-\frac{1}{2}$일 때 $a=12$이므로 세 실수는 3, -6, 12이다.

따라서 가장 작은 수는 -6이다. 답 -6

16 밑면의 가로의 길이, 세로의 길이, 높이를 각각 a, ar, ar^2으로 놓으면

$4(a+ar+ar^2)=74$에서

$a+ar+ar^2=\frac{37}{2}$ …… ㉠

$2(a\cdot ar+ar\cdot ar^2+ar^2\cdot a)=222$에서

$ar(a+ar+ar^2)=111$ …… ㉡

㉡÷㉠을 하면 $ar=6$

따라서 직육면체의 부피는

$a\cdot ar\cdot ar^2=(ar)^3=6^3=216$

답 ⑤

17 세 실수를 a, ar, ar^2으로 놓으면

$a+ar+ar^2=14$에서

$a(1+r+r^2)=14$ …… ㉠

$a^2+(ar)^2+(ar^2)^2=84$에서

$a^2(1+r^2+r^4)=84$

㉠의 양변을 제곱하면

$a^2(1+r^2+r^4+2r+2r^2+2r^3)=196$

$a^2(1+r^2+r^4)+2ar\cdot a(1+r+r^2)=196$

$84+2ar\cdot14=196$, $28ar=112$

$\therefore ar=4$

따라서 세 수의 곱은

$a\cdot ar\cdot ar^2=(ar)^3=4^3=64$

답 ①

> $(a+b+c)^2$
> $=a^2+b^2+c^2$
> $+2ab+2bc+2ca$

18 한 변의 길이가 6인 정사각형의 넓이는

$6^2=36$

1회 시행 후 남아 있는 도형의 넓이는

$36\cdot\frac{8}{9}$

2회 시행 후 남아 있는 도형의 넓이는

$36\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{8}{9}=36\cdot\left(\frac{8}{9}\right)^2$

3회 시행 후 남아 있는 도형의 넓이는

$36\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{8}{9}=36\cdot\left(\frac{8}{9}\right)^3$

⋮

n회 시행 후 남아 있는 도형의 넓이는

$36\cdot\left(\frac{8}{9}\right)^n$

따라서 8회 시행 후 남아 있는 도형의 넓이는

$36\cdot\left(\frac{8}{9}\right)^8=\frac{2^{26}}{3^{14}}$

이므로 $p=26$, $q=14$

$\therefore p+q=40$ 답 40

$36\cdot\left(\frac{8}{9}\right)^8$
$=2^2\cdot3^2\cdot\left(\frac{2^3}{3^2}\right)^8$
$=2^2\cdot3^2\cdot\frac{2^{24}}{3^{16}}$
$=\frac{2^{26}}{3^{14}}$

19 1월의 데이터 사용량을 a MB, 매월 데이터 사용량의 증가율을 r라 하자.

5개월 후인 6월의 데이터 사용량이 1월의 4배이므로

$a(1+r)^5=4a$

$\therefore (1+r)^5=4$

10개월 후인 11월의 데이터 사용량이 $a(1+r)^{10}$ MB이므로 6월부터 11월까지 5개월 동안 증가한 데이터 사용량은

$a(1+r)^{10}-a(1+r)^5=a(1+r)^5\{(1+r)^5-1\}$
$=4a(4-1)$
$=12a$ (MB)

즉 $12a=3600$이므로

$a=300$

따라서 1월의 데이터 사용량은 300 MB이다.

답 300 MB

20 처음 빵의 단위 무게당 가격을 A원이라 하면 1번 시행 후 A원으로 살 수 있는 빵의 무게는 처음 무게의 $1-\frac{25}{100}=\frac{3}{4}$이다.

1번 시행 후 빵의 단위 무게당 가격은

$\frac{4}{3}A$ (원)

(단위 무게당 가격) $=\frac{(빵의 가격)}{(빵의 무게)}$ 이므로 1번 시행 후 A원으로 살 수 있는 빵의 무게가 처음 무게의 $\frac{3}{4}$이면 단위 무게당 가격은 처음 단위 무게당 가격의 $\frac{4}{3}$이다.

2번 시행 후 빵의 단위 무게당 가격은

$\frac{4}{3}A\cdot\frac{4}{3}=\left(\frac{4}{3}\right)^2A$ (원)

3번 시행 후 빵의 단위 무게당 가격은

$\frac{4}{3}A\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{3}=\left(\frac{4}{3}\right)^3A=\frac{64}{27}A$ (원)

따라서 빵의 단위 무게당 가격은 처음의 $\frac{64}{27}$배이다.

답 $\frac{64}{27}$배

18 등비수열의 합 Ⓦ 70쪽

01 (1) $\frac{-5(2^6-1)}{2-1}=-315$

(2) $\frac{\frac{2}{3}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^6\right\}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{728}{729}$

답 (1) -315 (2) $\frac{728}{729}$

02 (i) $n=1$일 때,

$a_1=S_1=10-1=9$

(ii) $n\geq2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}=10^n-1-(10^{n-1}-1)$
$=9\cdot10^{n-1}$ …… ㉠

이때 $a_1=9$는 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$a_n=9\cdot10^{n-1}$

답 $a_n=9\cdot10^{n-1}$

03 100만 원을 연이율 5 %의 복리로 n년 동안 예금하면 n년 후의 원리합계는

$100(1+0.05)^n=100\times1.05^n$ (만 원)

(1) 매년 초에 100만 원씩 적립하면 5년째 말의 적립금의 원리합계는

$100\times1.05+100\times1.05^2+\cdots+100\times1.05^5$
$=\frac{100\times1.05\times(1.05^5-1)}{1.05-1}$
$=\frac{100\times1.05\times(1.3-1)}{0.05}$
$=630$ (만 원)

첫째항이 100×1.05, 공비가 1.05인 등비수열의 첫째항부터 제5항까지의 합

(2) 매년 말에 100만 원씩 적립하면 5년째 말의 적립금의 원리합계는

$100+100\times1.05+\cdots+100\times1.05^4$
$=\frac{100(1.05^5-1)}{1.05-1}$
$=\frac{100(1.3-1)}{0.05}$
$=600$ (만 원)

첫째항이 100, 공비가 1.05인 등비수열의 첫째항부터 제5항까지의 합

답 (1) 630만 원 (2) 600만 원

04 주어진 등비수열의 공비를 r라 하면 제5항이 16이므로

$1\cdot r^4=16$ $\therefore r=-2$ ($\because r<0$)

따라서 이 수열의 첫째항부터 제7항까지의 합은

$\frac{1\cdot\{1-(-2)^7\}}{1-(-2)}=43$ 답 ④

05 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_3+a_5=ar^2+ar^4=ar^2(1+r^2)=24$ …… ㉠

$a_5+a_7=ar^4+ar^6=ar^4(1+r^2)=72$ …… ㉡

㉡÷㉠을 하면 $r^2=3$

$\therefore r=\sqrt{3}\ (\because r>0)$

$r=\sqrt{3}$을 ㉠에 대입하여 정리하면

$12a=24 \qquad \therefore a=2$

따라서 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 12 항까지의 합은

$$\frac{2\{(\sqrt{3})^{12}-1\}}{\sqrt{3}-1}=\frac{2(729-1)(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}$$
$$=728(\sqrt{3}+1)$$ 답 $728(\sqrt{3}+1)$

06 $a_n=-1+(n-1)\cdot 2=2n-3$이므로

$$2^{a_n}=2^{2n-3}=\frac{1}{2}\cdot 4^{n-1}$$

$2^{2n-3}=2^{2(n-1)-1}=4^{n-1}\cdot 2^{-1}=\frac{1}{2}\cdot 4^{n-1}$

따라서 수열 $\{2^{a_n}\}$은 첫째항이 $\frac{1}{2}$, 공비가 4인 등비수열이므로 첫째항부터 제10항까지의 합은

$$\frac{\frac{1}{2}(4^{10}-1)}{4-1}=\frac{2^{20}-1}{6}$$ 답 ③

07 주어진 등비수열의 첫째항을 a라 하면

$$\frac{a\{1-(-2)^5\}}{1-(-2)}=33, \qquad 11a=33$$

$\therefore a=3$

따라서 이 수열의 첫째항부터 제8항까지의 합은

$$\frac{3\{1-(-2)^8\}}{1-(-2)}=-255$$ 답 -255

08 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면 $\frac{S_6}{S_3}=65$에서

$r^6-1=(r^3+1)(r^3-1)$

$$\frac{\frac{3(r^6-1)}{r-1}}{\frac{3(r^3-1)}{r-1}}=65, \qquad r^3+1=65$$

$r^3=64 \qquad \therefore r=4$

$\therefore a_4=3\cdot 4^3=192$ 답 ③

다른 풀이 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면

$a_{n+3}=a_n r^3$이므로

$a_4+a_5+a_6=(a_1+a_2+a_3)r^3$

$a_4+a_5+a_6=a_1r^3+a_2r^3+a_3r^3=(a_1+a_2+a_3)r^3$

$\therefore S_6=S_3+S_3r^3=(1+r^3)S_3$

$\frac{S_6}{S_3}=65$에서 $\quad \frac{(1+r^3)S_3}{S_3}=65$

$1+r^3=65, \qquad r^3=64 \qquad \therefore r=4$

$\therefore a_4=3\cdot 4^3=192$

09 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10}=\frac{a_1(r^{10}-1)}{r-1}$$
$$=16 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$$a_1+a_3+a_5+a_7+a_9=\frac{a_1\{(r^2)^5-1\}}{r^2-1}$$

$a_1+a_3+a_5+a_7+a_9=a_1+a_1r^2+a_1r^4+a_1r^6+a_1r^8$ 이므로 첫째항이 a_1, 공비가 r^2인 등비수열의 첫째항부터 제5항까지의 합이다.

$$=\frac{a_1(r^{10}-1)}{(r+1)(r-1)}$$
$$=12 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠÷㉡을 하면 $\quad r+1=\frac{4}{3}$

$\therefore r=\frac{1}{3}$ 답 $\frac{1}{3}$

10 V석의 구역은 1개이고 등급에 따라 구역의 개수가 3배씩 늘어나므로 전체 구역의 개수는

$$1+1\cdot 3+1\cdot 3^2+1\cdot 3^3+1\cdot 3^4=\frac{1\cdot(3^5-1)}{3-1}$$
$$=121$$

이때 한 구역의 좌석이 40개이므로 좌석의 총개수는

$121\cdot 40=4840$ 답 4840

11 둘째 날부터 전날 이동한 거리의 10 %씩 늘려서 이동하므로 일주일 동안 소현이가 이동하는 거리는

$$4+4(1+0.1)+4(1+0.1)^2+\cdots+4(1+0.1)^6$$
$$=\frac{4(1.1^7-1)}{1.1-1}=\frac{4\times 0.9}{0.1}$$
$$=36\,(\mathrm{km})$$ 답 36 km

12 매년 5 %씩 채굴량을 늘리므로 n년 후 천연가스의 총채굴량은

$$10^5+10^5(1+0.05)+10^5(1+0.05)^2+\cdots+10^5(1+0.05)^n$$
$$=\frac{10^5(1.05^{n+1}-1)}{1.05-1}$$
$$=20\cdot 10^5(1.05^{n+1}-1)$$
$$=2\cdot 10^6(1.05^{n+1}-1)$$

이 천연가스가 모두 고갈되려면

$2\cdot 10^6(1.05^{n+1}-1)\ge 4\cdot 10^6$

$1.05^{n+1}-1\ge 2, \qquad 1.05^{n+1}\ge 3$

이때 $1.05^{22}=2.9$, $1.05^{23}=3.1$이므로

$n+1\ge 23 \qquad \therefore n\ge 22$

따라서 천연가스가 모두 고갈되는 해는 2045년이다.

$2023+22=2045$(년)

답 ①

13 $a_6=S_6-S_5=2^6-1-(2^5-1)=2^5$

$a_{10}=S_{10}-S_9=2^{10}-1-(2^9-1)=2^9$

$\therefore \frac{a_{10}}{a_6}=\frac{2^9}{2^5}=2^4=16$ 답 16

14 ㄱ. (i) $n=1$일 때,

$a_1=S_1=4-1=3$

(ii) $n\ge 2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}=4^n-1-(4^{n-1}-1)$
$=3\cdot 4^{n-1} \qquad \cdots\cdots ㉠$

이때 $a_1=3$은 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$a_n=3\cdot 4^{n-1}$

ㄴ. $a_1+a_3+a_5+a_7+a_9$

$=3+3\cdot 4^2+3\cdot 4^4+3\cdot 4^6+3\cdot 4^8$

첫째항이 3, 공비가 4^2인 등비수열의 첫째항부터 제5항까지의 합

$$=\frac{3\{(4^2)^5-1\}}{4^2-1}$$
$$=\frac{4^{10}-1}{5}$$

ㄷ. $a_{3n}=3\cdot 4^{3n-1}=48\cdot 64^{n-1}$이므로 수열 $\{a_{3n}\}$의 공비는 64이다.

$3\cdot 4^{3n-1}=3\cdot 4^{3(n-1)}\cdot 4^2=48\cdot 64^{n-1}$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ④

15 $\log_3 S_n = n+1$에서 $\quad S_n = 3^{n+1}$

(i) $n=1$일 때,

$a_1 = S_1 = 3^2 = 9$

(ii) $n \geq 2$일 때,

$$a_n = S_n - S_{n-1} = 3^{n+1} - 3^n = 2 \cdot 3^n \quad \cdots\cdots ㉠$$

㉠에 $n=1$을 대입하면

$a_1 = 2 \cdot 3 = 6$

(i), (ii)에서

$a_1 = 9$, $a_n = 2 \cdot 3^n \ (n \geq 2)$

$\therefore a_1 + a_3 + a_5 = 9 + 2 \cdot 3^3 + 2 \cdot 3^5 = 549$

답 549

16 매년 초에 20만 원씩 적립하면 12년째 말의 적립금의 원리합계는

$$20(1+0.04) + 20(1+0.04)^2 + \cdots + 20(1+0.04)^{12}$$
$$= \frac{20 \times 1.04 \times (1.04^{12} - 1)}{1.04 - 1}$$
$$= \frac{20 \times 1.04 \times 0.6}{0.04}$$
$= 312$ (만 원)

답 312만 원

17 매월 초에 30만 원씩 적립하므로 3년, 즉 36개월 후 만기에 받을 수 있는 금액은

$$30(1+0.003) + 30(1+0.003)^2 + \cdots + 30(1+0.003)^{36}$$
$$= \frac{30 \times 1.003 \times (1.003^{36} - 1)}{1.003 - 1}$$
$$= \frac{30 \times 1.003 \times 0.11}{0.003}$$
$= 1103.3$ (만 원)

즉 1103만 3천 원이다.

답 1103만 3천 원

18 매년 말에 a만 원씩 적립하면 10년째 말의 적립금의 원리합계는

$$a + a(1+0.06) + a(1+0.06)^2 + \cdots + a(1+0.06)^9$$
$$= \frac{a(1.06^{10} - 1)}{1.06 - 1}$$
$$= \frac{a \times 0.8}{0.06}$$
$= \frac{40}{3}a$ (만 원)

따라서 $\frac{40}{3}a = 5000$이어야 하므로

$a = 375$

답 ④

Q BOX

$a_1 = S_1$을 이용하여 얻은 값과 다르므로 수열 $\{a_n\}$은 둘째항부터 등비수열을 이룬다.

$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$

$\sum_{k=1}^{2n} a_k = 4n^2 - 3n$의 양변에 $n=5$를 대입한다.

09 수열의 합

19 기호 Σ의 뜻과 성질

Ⓦ 73쪽

01 (1) $1+4+9+\cdots+64 = 1^2+2^2+3^2+\cdots+8^2 = \sum_{k=1}^{8} k^2$

(2)
$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{24\cdot 25}$$
$$= \frac{1}{1\cdot(1+1)} + \frac{1}{2\cdot(2+1)} + \frac{1}{3\cdot(3+1)} + \cdots + \frac{1}{24\cdot(24+1)}$$
$$= \sum_{k=1}^{24} \frac{1}{k(k+1)}$$

답 (1) $\sum_{k=1}^{8} k^2$ (2) $\sum_{k=1}^{24} \frac{1}{k(k+1)}$

02 (1) $\sum_{k=1}^{10}(2a_k+3) = 2\sum_{k=1}^{10} a_k + \sum_{k=1}^{10} 3 = 2\cdot 7 + 3\cdot 10 = 44$

(2) $\sum_{k=1}^{10}(a_k - 5b_k - 4) = \sum_{k=1}^{10} a_k - 5\sum_{k=1}^{10} b_k - \sum_{k=1}^{10} 4 = 7 - 5\cdot(-2) - 4\cdot 10 = -23$

답 (1) 44 (2) -23

03 $\sum_{k=1}^{100} a_k - \sum_{k=1}^{99} a_k$

$= (a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{100}) - (a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{99})$

$= a_{100}$

이므로 $\quad a_{100} = 4$

답 4

04 $\sum_{k=1}^{14} f(k+1) - \sum_{k=2}^{15} f(k-1)$

$= \{f(2)+f(3)+f(4)+\cdots+f(15)\}$
$\quad -\{f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(14)\}$

$= f(15) - f(1)$

$= 81 - 3 = 78$

답 78

05 $\sum_{k=1}^{n}(a_{2k-1} + a_{2k})$

$= (a_1+a_2) + (a_3+a_4) + \cdots + (a_{2n-1}+a_{2n})$

$= \sum_{k=1}^{2n} a_k$

이므로 $\quad \sum_{k=1}^{2n} a_k = 4n^2 - 3n$

$\therefore \sum_{k=1}^{10} a_k = 4\cdot 5^2 - 3\cdot 5 = 85$

답 ②

06 $\sum_{k=1}^{20}(a_k - b_k)^2 = \sum_{k=1}^{20}(a_k^2 - 2a_kb_k + b_k^2) = \sum_{k=1}^{20}(a_k^2 + b_k^2) - 2\sum_{k=1}^{20} a_kb_k$

$\therefore \sum_{k=1}^{20}(a_k^2 + b_k^2) = \sum_{k=1}^{20}(a_k - b_k)^2 + 2\sum_{k=1}^{20} a_kb_k = 40 + 2\cdot 15 = 70$

답 ③

07 $\sum_{k=1}^{n} a_k=5n$, $\sum_{k=1}^{n} b_k=-2n^2$의 양변에 $n=10$을 각각 대입하면

$$\sum_{k=1}^{10} a_k=5\cdot10=50,\ \sum_{k=1}^{10} b_k=-2\cdot10^2=-200$$

$$\begin{aligned}\therefore \sum_{k=1}^{10}(3a_k-b_k+1)&=3\sum_{k=1}^{10}a_k-\sum_{k=1}^{10}b_k+\sum_{k=1}^{10}1\\&=3\cdot50-(-200)+1\cdot10\\&=360\end{aligned}$$

답 ③

08 $\sum_{k=1}^{10}(3a_k+1)=3\sum_{k=1}^{10}a_k+\sum_{k=1}^{10}1=3\sum_{k=1}^{10}a_k+10$에서

$3\sum_{k=1}^{10}a_k+10=40 \qquad \therefore \sum_{k=1}^{10}a_k=10$

$\sum_{k=1}^{10}(a_k+1)(a_k-1)=\sum_{k=1}^{10}(a_k^2-1)=\sum_{k=1}^{10}a_k^2-10$에서

$\sum_{k=1}^{10}a_k^2-10=50 \qquad \therefore \sum_{k=1}^{10}a_k^2=60$

$$\begin{aligned}\therefore \sum_{k=1}^{10}(3a_k+1)^2&=\sum_{k=1}^{10}(9a_k^2+6a_k+1)\\&=9\sum_{k=1}^{10}a_k^2+6\sum_{k=1}^{10}a_k+\sum_{k=1}^{10}1\\&=9\cdot60+6\cdot10+1\cdot10\\&=610\end{aligned}$$

답 610

09 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a라 하면

$$\sum_{k=1}^{12}a_k=\frac{12\{2a+(12-1)\cdot3\}}{2}=12a+198$$

즉 $12a+198=210$이므로

$12a=12 \qquad \therefore a=1$

따라서 $a_n=1+(n-1)\cdot3=3n-2$이므로

$a_5=3\cdot5-2=13$

답 13

10 $\sum_{k=1}^{20}2^{-k}\cos\frac{k\pi}{2}$

$$\begin{aligned}&=\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2^2}\cos\pi+\frac{1}{2^3}\cos\frac{3}{2}\pi\\&\quad+\cdots+\frac{1}{2^{20}}\cos10\pi\\&=-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}-\frac{1}{2^6}+\cdots+\frac{1}{2^{20}}\\&=\frac{-\frac{1}{4}\left\{1-\left(-\frac{1}{4}\right)^{10}\right\}}{1-\left(-\frac{1}{4}\right)}\\&=-\frac{1}{5}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{20}\right\}\end{aligned}$$

답 ②

11 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_3+a_{13}=6a_6$에서

$(a+2d)+(a+12d)=6(a+5d)$

$4a+16d=0 \qquad \therefore a+4d=0 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$\sum_{k=1}^{10}a_k=-5$에서 $\qquad \frac{10(2a+9d)}{2}=-5$

$\therefore 2a+9d=-1 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad a=4,\ d=-1$

따라서 $a_n=4+(n-1)\cdot(-1)=-n+5$이므로

$a_8=-8+5=-3$

답 ④

Q BOX

$a_5=1+4\cdot3=13$과 같이 구할 수도 있다.

$k=1, 2, 3, \cdots$일 때, $\cos\frac{k\pi}{2}$의 값은 $0, -1, 0, 1$이 이 순서대로 반복된다.

첫째항과 공비가 모두 $-\frac{1}{2^2}=-\frac{1}{4}$인 등비수열의 첫째항부터 제10항까지의 합

12 $1+3+3^2+\cdots+3^{k-1}=\frac{1\cdot(3^k-1)}{3-1}=\frac{3^k-1}{2}$

$$\begin{aligned}\therefore &\sum_{k=1}^{15}(1+3+3^2+\cdots+3^{k-1})\\&=\sum_{k=1}^{15}\frac{3^k-1}{2}=\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{15}3^k-\sum_{k=1}^{15}1\right)\\&=\frac{1}{2}\left\{\frac{3(3^{15}-1)}{3-1}-1\cdot15\right\}\\&=\frac{3^{16}-33}{4}\end{aligned}$$

따라서 $a=4$, $b=16$이므로

$a+b=20$

답 20

20 여러 가지 수열의 합

W 75쪽

자연수의 거듭제곱의 합

① $\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$

② $\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

③ $\sum_{k=1}^{n}k^3=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

01 (1) $\sum_{k=1}^{9}(2k-7)=2\cdot\frac{9\cdot10}{2}-7\cdot9$

$=27$

(2) $\sum_{k=1}^{5}(-k^3+4k^2)=-\left(\frac{5\cdot6}{2}\right)^2+4\cdot\frac{5\cdot6\cdot11}{6}$

$=-5$

답 (1) 27 (2) -5

02 (1) $\sum_{k=1}^{20}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{20}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$

$$\begin{aligned}&=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)\\&\quad+\cdots+\left(\frac{1}{20}-\frac{1}{21}\right)\\&=1-\frac{1}{21}=\frac{20}{21}\end{aligned}$$

(2) $\sum_{k=1}^{34}\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k+2}}$

$$\begin{aligned}&=\sum_{k=1}^{34}\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k+2}}{(\sqrt{k+1}+\sqrt{k+2})(\sqrt{k+1}-\sqrt{k+2})}\\&=\sum_{k=1}^{34}(\sqrt{k+2}-\sqrt{k+1})\\&=(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+(\sqrt{5}-\sqrt{4})\\&\quad+\cdots+(\sqrt{36}-\sqrt{35})\\&=\sqrt{36}-\sqrt{2}\\&=6-\sqrt{2}\end{aligned}$$

답 (1) $\frac{20}{21}$ (2) $6-\sqrt{2}$

$\sum_{i=1}^{10}(i^2-2i+4)$는 i 대신 k를 사용하여 나타낼 수 있다.

03 $\sum_{k=1}^{10}(3k^2-k+4)-\sum_{i=1}^{10}(i^2-2i+4)$

$$\begin{aligned}&=\sum_{k=1}^{10}(3k^2-k+4)-\sum_{k=1}^{10}(k^2-2k+4)\\&=\sum_{k=1}^{10}(3k^2-k+4-k^2+2k-4)\\&=\sum_{k=1}^{10}(2k^2+k)\\&=2\cdot\frac{10\cdot11\cdot21}{6}+\frac{10\cdot11}{2}\\&=825\end{aligned}$$

답 ⑤

04 $\sum_{k=1}^{n}(4k-3)=4\cdot\frac{n(n+1)}{2}-3n=2n^2-n$

따라서 $2n^2-n=45$이므로

$2n^2-n-45=0,\quad (2n+9)(n-5)=0$

$\therefore n=5$ ($\because n$은 자연수) 답 5

05 $\sum_{k=1}^{8}(k-c)^2=\sum_{k=1}^{8}(k^2-2ck+c^2)$

$=\frac{8\cdot9\cdot17}{6}-2c\cdot\frac{8\cdot9}{2}+c^2\cdot8$

$=8c^2-72c+204$

$=8\left(c-\frac{9}{2}\right)^2+42$

따라서 $\sum_{k=1}^{8}(k-c)^2$의 값이 최소가 되도록 하는 c의 값은 $\frac{9}{2}$이다. 답 ②

06 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha_k+\beta_k=k,\ \alpha_k\beta_k=-k$

이므로

$\alpha_k{}^3+\beta_k{}^3=(\alpha_k+\beta_k)^3-3\alpha_k\beta_k(\alpha_k+\beta_k)$

$=k^3-3\cdot(-k)\cdot k$

$=k^3+3k^2$

$\therefore \sum_{k=1}^{4}(\alpha_k{}^3+\beta_k{}^3)=\sum_{k=1}^{4}(k^3+3k^2)$

$=\left(\frac{4\cdot5}{2}\right)^2+3\cdot\frac{4\cdot5\cdot9}{6}$

$=190$ 답 ①

07 $\sum_{l=1}^{16}\left\{\sum_{k=1}^{l}(2k-l)\right\}=\sum_{l=1}^{16}\left\{2\cdot\frac{l(l+1)}{2}-l\cdot l\right\}=\sum_{l=1}^{16}l$

$=\frac{16\cdot17}{2}=136$ 답 136

l을 상수로 생각한다.

08 $\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{i}k\right)=\sum_{i=1}^{n}\frac{i(i+1)}{2}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(i^2+i)$

$=\frac{1}{2}\left\{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}\right\}$

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1+3)}{6}$

$=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$

따라서 $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}=56$이므로

$n(n+1)(n+2)=6\cdot7\cdot8\quad\therefore n=6$ 답 ③

09 $\sum_{i=1}^{m}\left\{\sum_{j=1}^{n}(i+j)\right\}=\sum_{i=1}^{m}\left\{in+\frac{n(n+1)}{2}\right\}$

$=n\cdot\frac{m(m+1)}{2}+m\cdot\frac{n(n+1)}{2}$

$=\frac{mn(m+n+2)}{2}$

$=\frac{35(12+2)}{2}=245$ 답 ④

10 수열 $1\cdot2^2,\ 2\cdot3^2,\ 3\cdot4^2,\ \cdots$의 일반항을 a_n이라 하면

$a_n=n(n+1)^2=n^3+2n^2+n$

따라서 주어진 수열의 첫째항부터 제8항까지의 합은

$\sum_{k=1}^{8}a_k=\sum_{k=1}^{8}(k^3+2k^2+k)$

$=\left(\frac{8\cdot9}{2}\right)^2+2\cdot\frac{8\cdot9\cdot17}{6}+\frac{8\cdot9}{2}$

$=1740$ 답 ④

11 수열 $1\cdot20,\ 2\cdot19,\ 3\cdot18,\ \cdots$의 일반항을 a_n이라 하면

$a_n=n(21-n)=-n^2+21n$

따라서 구하는 값은 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제20항까지의 합이므로

$\sum_{k=1}^{20}a_k=\sum_{k=1}^{20}(-k^2+21k)$

$=-\frac{20\cdot21\cdot41}{6}+21\cdot\frac{20\cdot21}{2}$

$=1540$ 답 1540

12 수열 $1,\ 1+3,\ 1+3+5,\ \cdots$의 일반항을 a_n이라 하면

$a_n=1+3+5+\cdots+(2n-1)$

$=\sum_{k=1}^{n}(2k-1)$

$=2\cdot\frac{n(n+1)}{2}-n$

$=n^2$

따라서 구하는 값은 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제13항까지의 합이므로

$2n-1=25$에서

$2n=26\quad\therefore n=13$

$\sum_{k=1}^{13}a_k=\sum_{k=1}^{13}k^2=\frac{13\cdot14\cdot27}{6}=819$ 답 ①

13 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 $\sum_{k=1}^{n}a_k$를 S_n이라 하면
(i) $a_1=S_1=\sum_{k=1}^{1}a_k$
(ii) $a_n=S_n-S_{n-1}$
$=\sum_{k=1}^{n}a_k-\sum_{k=1}^{n-1}a_k$ $(n\ge2)$
임을 이용하여 일반항 a_n을 구한다.

$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=n^2+2n$

(i) $n=1$일 때,

$a_1=S_1=1^2+2\cdot1=3$

(ii) $n\ge2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=n^2+2n-\{(n-1)^2+2(n-1)\}$

$=2n+1$ ······ ㉠

이때 $a_1=3$은 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$a_n=2n+1$

따라서 $ka_k=k(2k+1)=2k^2+k$이므로

$\sum_{k=1}^{6}ka_k=\sum_{k=1}^{6}(2k^2+k)$

$=2\cdot\frac{6\cdot7\cdot13}{6}+\frac{6\cdot7}{2}$

$=203$

답 ②

14 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 하면

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=3^n-1$$

(i) $n=1$일 때,

$$a_1=S_1=3-1=2$$

(ii) $n\geq2$일 때,

$$\begin{aligned}a_n&=S_n-S_{n-1}\\&=3^n-1-(3^{n-1}-1)\\&=2\cdot3^{n-1} \quad \cdots\cdots ㉠\end{aligned}$$

이때 $a_1=2$는 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$$a_n=2\cdot3^{n-1}$$

따라서 $a_{2k}=2\cdot3^{2k-1}=\frac{2}{3}\cdot9^k$이므로

$$\sum_{k=1}^{7}a_{2k}=\sum_{k=1}^{7}\left(\frac{2}{3}\cdot9^k\right)=\frac{2}{3}\cdot\frac{9(9^7-1)}{9-1}=\frac{3^{15}-3}{4}$$

즉 $p=4$, $q=15$이므로 $\quad p+q=19$ 답 19

15 $\displaystyle\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{16k^2-8k-3}$

분모를 인수분해한 후 부분분수로 변형한다.

$$\begin{aligned}&=\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{(4k-3)(4k+1)}\\&=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{4k-3}-\frac{1}{4k+1}\right)\\&=\frac{1}{4}\left\{\left(1-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{9}\right)+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{13}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{37}-\frac{1}{41}\right)\right\}\\&=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{41}\right)=\frac{10}{41}\end{aligned}$$

답 ①

16 수열 $\frac{1}{2^2-1}$, $\frac{1}{4^2-1}$, $\frac{1}{6^2-1}$, $\cdots$의 일반항을 a_n이라 하면

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{1}{(2n)^2-1}=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\end{aligned}$$

첫째항이 a, 공차가 d인 등차수열의 일반항 a_n은
$a_n=a+(n-1)d$

$$\begin{aligned}\therefore\ &\frac{1}{2^2-1}+\frac{1}{4^2-1}+\frac{1}{6^2-1}+\cdots+\frac{1}{50^2-1}\\&=\sum_{k=1}^{25}a_k=\sum_{k=1}^{25}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)\\&=\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{49}-\frac{1}{51}\right)\right\}\\&=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{51}\right)=\frac{25}{51}\end{aligned}$$

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제25항까지의 합

따라서 $p=51$, $q=25$이므로

$$p-q=26$$

답 26

17 $a_n=\dfrac{n^3+2n^2+10}{n^2+2n}=\dfrac{n^2(n+2)+10}{n(n+2)}$

$$=n+\frac{10}{n(n+2)}=n+5\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$$

이므로

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{8}a_k\\&=\sum_{k=1}^{8}\left\{k+5\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)\right\}\\&=\frac{8\cdot9}{2}\\&\quad+5\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{9}\right)+\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{10}\right)\right\}\\&=36+5\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{9}-\frac{1}{10}\right)\\&=\frac{382}{9}\end{aligned}$$

답 $\frac{382}{9}$

18 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2k-1}+\sqrt{2k+1}}$

$$\begin{aligned}&=\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{2k-1}-\sqrt{2k+1}}{(\sqrt{2k-1}+\sqrt{2k+1})(\sqrt{2k-1}-\sqrt{2k+1})}\\&=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k-1})\\&=\frac{1}{2}\{(\sqrt{3}-1)+(\sqrt{5}-\sqrt{3})+(\sqrt{7}-\sqrt{5})+\cdots+(\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1})\}\\&=\frac{\sqrt{2n+1}-1}{2}\end{aligned}$$

따라서 $\dfrac{\sqrt{2n+1}-1}{2}=5$이므로

$\sqrt{2n+1}=11$, $\quad 2n+1=121$

$2n=120 \quad \therefore n=60$

답 ①

19 $a_n=4+(n-1)\cdot3=3n+1$이므로

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{20}\frac{1}{\sqrt{a_{k+1}}+\sqrt{a_k}}\\&=\sum_{k=1}^{20}\frac{\sqrt{a_{k+1}}-\sqrt{a_k}}{(\sqrt{a_{k+1}}+\sqrt{a_k})(\sqrt{a_{k+1}}-\sqrt{a_k})}\\&=\sum_{k=1}^{20}\frac{\sqrt{a_{k+1}}-\sqrt{a_k}}{a_{k+1}-a_k}=\sum_{k=1}^{20}\frac{\sqrt{a_{k+1}}-\sqrt{a_k}}{3}\\&=\frac{1}{3}\{(\sqrt{a_2}-\sqrt{a_1})+(\sqrt{a_3}-\sqrt{a_2})+(\sqrt{a_4}-\sqrt{a_3})+\cdots+(\sqrt{a_{21}}-\sqrt{a_{20}})\}\\&=\frac{1}{3}(\sqrt{a_{21}}-\sqrt{a_1})\\&=\frac{1}{3}(\sqrt{3\cdot21+1}-\sqrt{4})\\&=\frac{1}{3}(8-2)=2\end{aligned}$$

답 ①

20 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\log_3\frac{\sqrt{k+1}}{\sqrt{k}}$

$$\begin{aligned}&=\log_3\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1}}+\log_3\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}+\log_3\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{3}}+\cdots+\log_3\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}\\&=\log_3\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{3}}\cdot\cdots\cdot\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}\right)\\&=\log_3\sqrt{n+1}\end{aligned}$$

따라서 $\log_3\sqrt{n+1}=2$이므로

$\sqrt{n+1}=3^2=9$, $\quad n+1=81$

$\therefore n=80$ 답 ⑤

21 $\sum_{k=2}^{50}\log\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$

$=\sum_{k=2}^{50}\log\frac{k^2-1}{k^2}=\sum_{k=2}^{50}\log\frac{(k-1)(k+1)}{k^2}$

$=\sum_{k=2}^{50}\log\left(\frac{k-1}{k}\cdot\frac{k+1}{k}\right)$

$=\log\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\right)+\log\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\right)+\log\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\right)$

$+\cdots+\log\left(\frac{49}{50}\cdot\frac{51}{50}\right)$

$=\log\left\{\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\right)\cdot\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\right)\cdot\cdots\cdot\left(\frac{49}{50}\cdot\frac{51}{50}\right)\right\}$

$=\log\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{51}{50}\right)=\log\frac{51}{100}$

$=\log 51-2$ 답 $\log 51-2$

22 주어진 수열을

(11), (101, 110), (1001, 1010, 1100), ⋯

과 같이 묶으면 n 번째 묶음의 각 항은 $(n+1)$자리 수이므로 100010000은 8 번째 묶음의 5 번째 항이다.

이때 n 번째 묶음의 항의 개수는 n이므로 첫 번째 묶음부터 7 번째 묶음까지의 항의 개수는

$\sum_{k=1}^{7}k=\frac{7\cdot 8}{2}=28$

따라서 $28+5=33$이므로 100010000은 제33항이다.

답 제33항

23 위에서 n 번째 줄에 나열된 수는 첫째항이 1, 공차가 $n-1$인 등차수열을 이루므로 위에서 15 번째 줄에 나열된 수는 첫째항이 1, 공차가 14인 등차수열을 이룬다.

따라서 15 번째 줄의 왼쪽에서 11 번째에 있는 수는

$1+(11-1)\cdot 14=141$ 답 ④

24 위에서 n번째 줄에는 $(2n-1)$개의 자연수가 있으므로 첫 번째 줄부터 n번째 줄까지의 자연수의 개수는

$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=2\cdot\frac{n(n+1)}{2}-n=n^2$

$n=11$일 때 $11^2=121$, $n=12$일 때 $12^2=144$이므로 123은 위에서 12 번째 줄에 있다.

이때 12 번째 줄은 왼쪽에서부터 오른쪽으로 1씩 커지므로 123은 12 번째 줄의 왼쪽에서 2 번째에 있다.

따라서 $a=12$, $b=2$이므로

$a+b=14$ 답 14

Q BOX

첫째항이 a, 공차가 d인 등차수열의 일반항 a_n은
$a_n=a+(n-1)d$

첫째항이 a, 공비가 r $(r\neq 0)$인 등비수열의 일반항 a_n은
$a_n=ar^{n-1}$

100010000은 9자리 수이고, 만의 자리의 숫자가 1이므로 8 번째 묶음의 5 번째 항이다.

$a_{10}=48+9\cdot(-3)$
$=21$
과 같이 구할 수도 있다.

홀수 번째 줄은 오른쪽에서부터 왼쪽으로 1씩 커지고, 짝수 번째 줄은 왼쪽에서부터 오른쪽으로 1씩 커진다.

10 수학적 귀납법

21 수열의 귀납적 정의

Ⓦ 79쪽

01 (1) $a_{n+1}-a_n=7$에서 주어진 수열은 공차가 7인 등차수열이다.

이때 첫째항이 -2이므로

$a_n=-2+(n-1)\cdot 7=7n-9$

(2) $2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$에서 주어진 수열은 등차수열이고

$a_1=5$, $a_2-a_1=3-5=-2$

이므로 첫째항이 5, 공차가 -2이다.

$\therefore a_n=5+(n-1)\cdot(-2)=-2n+7$

답 (1) $a_n=7n-9$ (2) $a_n=-2n+7$

02 (1) $a_{n+1}\div a_n=\frac{1}{2}$에서 주어진 수열은 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열이다.

이때 첫째항이 3이므로

$a_n=3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

(2) ${a_{n+1}}^2=a_na_{n+2}$에서 주어진 수열은 등비수열이고

$a_1=4$, $a_2\div a_1=16\div 4=4$

이므로 첫째항이 4, 공비가 4이다.

$\therefore a_n=4\cdot 4^{n-1}=4^n$

답 (1) $a_n=3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ (2) $a_n=4^n$

03 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 48, 공차가 -3인 등차수열이므로

$a_n=48+(n-1)\cdot(-3)=-3n+51$

$\therefore a_{10}=-3\cdot 10+51=21$ 답 21

04 $a_{n+2}-a_{n+1}=a_{n+1}-a_n$에서 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이므로 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_2=a+d=4$ ⋯⋯ ㉠

$a_7=a+6d=19$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad a=1$, $d=3$

$\therefore a_n=1+(n-1)\cdot 3=3n-2$

$3n-2>100$에서 $\quad 3n>102$

$\therefore n>34$

따라서 자연수 n의 최솟값은 35이다. 답 ②

05 $a_{n+2}-2a_{n+1}+a_n=0$, 즉 $2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$에서 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이고

$a_1=11$, $a_2-a_1=15-11=4$

이므로 첫째항이 11, 공차가 4이다.

따라서 $a_n=11+(n-1)\cdot 4=4n+7$이므로

$\sum_{n=1}^{7}a_n=\sum_{n=1}^{7}(4n+7)$

$=4\cdot\frac{7\cdot 8}{2}+7\cdot 7=161$ 답 161

다른 풀이 $\sum_{n=1}^{7} a_n$은 첫째항이 11, 공차가 4인 등차수열의 첫째항부터 제7항까지의 합이므로

$$\sum_{n=1}^{7} a_n = \frac{7\{2\cdot 11+(7-1)\cdot 4\}}{2}=161$$

06 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 1, 공비가 5인 등비수열이므로

$$a_n=1\cdot 5^{n-1}=5^{n-1}$$

따라서 $a_{13}=5^{12}$이므로

$k=12$ 답 12

07 $\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}=\frac{a_{n+1}}{a_n}$에서 수열 $\{a_n\}$은 등비수열이므로 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_2=ar=6$ …… ㉠

$a_4=ar^3=24$ …… ㉡

㉡÷㉠을 하면 $r^2=4$

$\therefore r=2\ (\because r>0)$

$r=2$를 ㉠에 대입하면 $2a=6$ $\therefore a=3$

따라서 $a_n=3\cdot 2^{n-1}$이므로

$a_6=3\cdot 2^5=96$ 답 96

08 ${a_{n+1}}^2=a_na_{n+2}$에서 수열 $\{a_n\}$은 등비수열이고

$$a_1=4,\ a_2\div a_1=3\div 4=\frac{3}{4}$$

이므로 첫째항이 4, 공비가 $\frac{3}{4}$이다.

$$\therefore a_n=4\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$$

$4\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}<1$에서 $\frac{3^{n-1}}{4^{n-2}}<1$

이때 $\frac{3^4}{4^3}=\frac{81}{64}$, $\frac{3^5}{4^4}=\frac{243}{256}$이므로

$n-1\ge 5$ $\therefore n\ge 6$

따라서 처음으로 1보다 작아지는 항은 제6항이다.

답 ③

09 $a_{n+1}=a_n+\frac{1}{n(n+1)}$에서

$$a_{n+1}=a_n+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

위의 식의 n에 1, 2, 3, …, 99를 차례대로 대입하면

$$a_2=a_1+1-\frac{1}{2}$$

$$a_3=a_2+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=a_1+1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$$
$$=a_1+1-\frac{1}{3}$$

$$a_4=a_3+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=a_1+1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$$
$$=a_1+1-\frac{1}{4}$$

⋮

$$a_{100}=a_1+1-\frac{1}{100}=2+1-\frac{1}{100}=\frac{299}{100}$$

답 $\frac{299}{100}$

BOX

첫째항이 a, 공차가 d인 등차수열의 첫째항부터 제n항까지의 합은 $\frac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}$

수열의 모든 항이 양수이므로 공비는 양수이다.

첫째항이 a, 공비가 r인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n은 $S_n=\frac{a(r^n-1)}{r-1}$ (단, $r\ne 1$)

$a>0$, $a\ne 1$, $N>0$일 때, $\log_a N^k=k\log_a N$ (단, k는 실수)

$\frac{1}{AB}=\frac{1}{B-A}\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{B}\right)$ (단, $A\ne B$)

10 $a_{n+1}=a_n+f(n)$의 n에 1, 2, 3, 4를 차례대로 대입하면

$$a_2=a_1+f(1)$$
$$a_3=a_2+f(2)=a_1+f(1)+f(2)$$
$$a_4=a_3+f(3)=a_1+f(1)+f(2)+f(3)$$
$$a_5=a_4+f(4)=a_1+f(1)+f(2)+f(3)+f(4)$$
$$=a_1+\sum_{k=1}^{4}f(k)$$
$$=-3+(4^2+1)=14$$

답 14

11 $a_n=a_{n-1}+3^{n-1}$의 n에 2, 3, 4, …를 차례대로 대입하면

$$a_2=a_1+3$$
$$a_3=a_2+3^2=a_1+3+3^2$$
$$a_4=a_3+3^3=a_1+3+3^2+3^3$$

⋮

$$\therefore a_n=a_1+3+3^2+3^3+\cdots+3^{n-1}$$
$$=5+\frac{3(3^{n-1}-1)}{3-1}=5+\frac{3^n-3}{2}$$

$a_k=125$에서 $5+\frac{3^k-3}{2}=125$

$\frac{3^k-3}{2}=120$, $3^k=243=3^5$

$\therefore k=5$ 답 ②

12 $a_{n+1}=\frac{n+1}{n}a_n$의 n에 1, 2, 3, …, 26을 차례대로 대입하면

$$a_2=\frac{2}{1}a_1=2a_1$$
$$a_3=\frac{3}{2}a_2=\frac{3}{2}\cdot 2a_1=3a_1$$
$$a_4=\frac{4}{3}a_3=\frac{4}{3}\cdot 3a_1=4a_1$$

⋮

$$a_{27}=27a_1=27\cdot 3=81$$

$\therefore \log_3 a_{27}=\log_3 81=\log_3 3^4=4$ 답 ④

13 $a_{n+1}=6^{n+1}a_n$의 n에 1, 2, 3, …을 차례대로 대입하면

$$a_2=6^2a_1$$
$$a_3=6^3a_2=6^3\cdot 6^2a_1$$
$$a_4=6^4a_3=6^4\cdot 6^3\cdot 6^2a_1$$

⋮

$$\therefore a_n=6^n\cdot 6^{n-1}\cdot\cdots\cdot 6^2a_1$$
$$=6^n\cdot 6^{n-1}\cdot\cdots\cdot 6^2\cdot 6$$
$$=6^{1+2+\cdots+n}=6^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

$a_k=6^{66}$에서 $6^{\frac{k(k+1)}{2}}=6^{66}$

$\frac{k(k+1)}{2}=66$, $k^2+k-132=0$

$(k+12)(k-11)=0$

$\therefore k=11\ (\because k$는 자연수$)$ 답 11

14 $a_{n+1}=na_n$의 n에 1, 2, 3, ⋯, 19를 차례대로 대입하면

$a_2=a_1=1$
$a_3=2a_2=2\cdot1$
$a_4=3a_3=3\cdot2\cdot1$
⋮
$a_{20}=19a_{19}=19\cdot18\cdot17\cdot\cdots\cdot1$

이때 $1\cdot2\cdot3\cdot4=24$이므로 a_5, a_6, a_7, ⋯, a_{20}은 모두 12로 나누어떨어진다. 즉 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{20}$을 12로 나누었을 때의 나머지는 $a_1+a_2+a_3+a_4$를 12로 나누었을 때의 나머지와 같다.
따라서 $a_1+a_2+a_3+a_4=1+1+2+6=10$이므로 구하는 나머지는 10이다. 답 ⑤

쌤 한마디

자연수 A는 자연수 n으로 나누어떨어지고, 자연수 B를 n으로 나누었을 때의 나머지가 r $(0<r<n)$이면 $A=na$, $B=nb+r$ (a는 자연수, b는 음이 아닌 정수)로 놓을 수 있으므로

$A+B=na+nb+r=n(a+b)+r$

따라서 $A+B$를 n으로 나누었을 때의 나머지는 r이므로 B를 n으로 나누었을 때의 나머지와 같다.
즉 **14**번에서 a_5, a_6, a_7, ⋯, a_{20}이 모두 12로 나누어떨어지므로 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{20}$을 12로 나누었을 때의 나머지가 $a_1+a_2+a_3+a_4$를 12로 나누었을 때의 나머지와 같음을 알 수 있다.

15 주어진 식의 n에 1, 2, 3, ⋯, 6을 차례대로 대입하면
$a_1=70$은 짝수이므로

$a_2=\frac{1}{2}a_1=\frac{1}{2}\cdot70=35$

$a_2=35$는 홀수이므로

$a_3=a_2+1=35+1=36$

$a_3=36$은 짝수이므로

$a_4=\frac{1}{2}a_3=\frac{1}{2}\cdot36=18$

$a_4=18$은 짝수이므로

$a_5=\frac{1}{2}a_4=\frac{1}{2}\cdot18=9$

$a_5=9$는 홀수이므로

$a_6=a_5+1=9+1=10$

$a_6=10$은 짝수이므로

$a_7=\frac{1}{2}a_6=\frac{1}{2}\cdot10=5$ 답 5

16 $a_n+a_{n+1}=n$의 n에 1, 3, 5, ⋯, 29를 차례대로 대입하면

$a_1+a_2=1$
$a_3+a_4=3$
$a_5+a_6=5$
⋮
$a_{29}+a_{30}=29$

$\therefore \sum_{k=1}^{30}a_k=(a_1+a_2)+(a_3+a_4)+\cdots+(a_{29}+a_{30})$
$=1+3+5+\cdots+29$
$=\sum_{k=1}^{15}(2k-1)$
$=2\cdot\frac{15\cdot16}{2}-1\cdot15=225$ 답 ③

Q BOX

첫째항이 1, 공차가 2인 등차수열의 첫째항부터 제15항까지의 합이므로
$\frac{15\{2\cdot1+(15-1)\cdot2\}}{2}=225$
와 같이 구할 수도 있다.

17 $a_{n+1}=a_n+(-1)^n$의 n에 1, 2, 3, ⋯을 차례대로 대입하면

$a_2=a_1+(-1)=9-1=8$
$a_3=a_2+(-1)^2=8+1=9$
$a_4=a_3+(-1)^3=9-1=8$
⋮

따라서 수열 $\{a_n\}$은 9, 8이 이 순서대로 반복된다.

$a_1=a_3=a_5=\cdots=9$
$a_2=a_4=a_6=\cdots=8$

이때 $200=2\cdot100$이므로

$a_{200}=a_2=8$ 답 ④

18 주어진 식의 n에 1, 2, 3, ⋯을 차례대로 대입하면
$n=1$은 홀수이므로

$a_2=\frac{a_1}{2-3a_1}=\frac{2}{2-3\cdot2}=-\frac{1}{2}$

$n=2$는 짝수이므로

$a_3=a_2+1=-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}$

$n=3$은 홀수이므로

$a_4=\frac{a_3}{2-3a_3}=\frac{\frac{1}{2}}{2-3\cdot\frac{1}{2}}=1$

$n=4$는 짝수이므로

$a_5=a_4+1=1+1=2$

$n=5$는 홀수이므로

$a_6=\frac{a_5}{2-3a_5}=\frac{2}{2-3\cdot2}=-\frac{1}{2}$
⋮

따라서 수열 $\{a_n\}$은 2, $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, 1이 이 순서대로 반복된다.
이때 $20=4\cdot5$, $30=4\cdot7+2$이므로

$a_{20}=a_4=1$, $a_{30}=a_2=-\frac{1}{2}$

$\therefore a_{20}+a_{30}=\frac{1}{2}$ 답 $\frac{1}{2}$

19 조건 (가)에서 $a_{n+1}=3a_n+1$의 n에 1, 2, 3을 차례대로 대입하면

$a_2=3a_1+1=3\cdot1+1=4$
$a_3=3a_2+1=3\cdot4+1=13$
$a_4=3a_3+1=3\cdot13+1=40$

조건 (나)에서 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+4}=a_n$이므로 수열 $\{a_n\}$은 1, 4, 13, 40이 이 순서대로 반복된다.

W 10 수학적 귀납법

이때 $10=4\cdot 2+2$이므로

$$\sum_{k=1}^{10} a_k=2(a_1+a_2+a_3+a_4)+a_1+a_2$$
$$=2(1+4+13+40)+1+4$$
$$=121$$

답 121

20 $2S_n=a_{n+1}-1$에서 $S_n=\frac{1}{2}a_{n+1}-\frac{1}{2}$

$\therefore S_{n+1}=\frac{1}{2}a_{n+2}-\frac{1}{2}$

한편 $a_{n+1}=S_{n+1}-S_n$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$이므로

$$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_{n+2}-\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}a_{n+1}-\frac{1}{2}\right)$$

$$\frac{1}{2}a_{n+2}=\frac{3}{2}a_{n+1} \quad \therefore a_{n+2}=3a_{n+1}$$

이때 $2S_1=a_2-1$에서

$a_2=2\cdot(-6)+1=-11$

이므로 $a_{n+2}=3a_{n+1}$의 n에 1, 2, 3을 차례대로 대입하면

$a_3=3a_2=3\cdot(-11)=-33$

$a_4=3a_3=3\cdot(-33)=-99$

$a_5=3a_4=3\cdot(-99)=-297$

답 ②

다른 풀이 $a_{n+1}=S_{n+1}-S_n$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$이므로

$2S_n=a_{n+1}-1$에서 $2S_n=S_{n+1}-S_n-1$

$\therefore S_{n+1}=3S_n+1$

위의 식의 n에 1, 2, 3, 4를 차례대로 대입하면

$S_2=3S_1+1=3\cdot(-6)+1=-17$

$S_3=3S_2+1=3\cdot(-17)+1=-50$

$S_4=3S_3+1=3\cdot(-50)+1=-149$

$S_5=3S_4+1=3\cdot(-149)+1=-446$

$\therefore a_5=S_5-S_4=-446-(-149)=-297$

참고 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=-6$, $a_2=-11$이고 둘째항부터 공비가 3인 등비수열을 이룬다.

21 $S_n=-3a_n+n$에서

$S_{n+1}=-3a_{n+1}+n+1$

한편 $a_{n+1}=S_{n+1}-S_n$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$이므로

$a_{n+1}=-3a_{n+1}+n+1-(-3a_n+n)$

$4a_{n+1}=3a_n+1 \quad \therefore a_{n+1}=\frac{3}{4}a_n+\frac{1}{4}$

위의 식의 n에 1, 2, 3을 차례대로 대입하면

$$a_2=\frac{3}{4}a_1+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{7}{16}$$

$$a_3=\frac{3}{4}a_2+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}\cdot\frac{7}{16}+\frac{1}{4}=\frac{37}{64}$$

$$a_4=\frac{3}{4}a_3+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}\cdot\frac{37}{64}+\frac{1}{4}=\frac{175}{256}$$

따라서 $p=256$, $q=175$이므로

$p+q=431$

답 431

22 $(n+1)$일째 되는 날의 공부 시간 a_{n+1}분은 n일째 되는 날의 공부 시간 a_n분의 $\frac{3}{2}$배에서 10분을 뺀 것이므로

$$a_{n+1}=\frac{3}{2}a_n-10 \ (n=1, 2, 3, \cdots)$$

답 $a_{n+1}=\frac{3}{2}a_n-10$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$

23 농도가 a_n %인 소금물 50 g에 들어 있는 소금의 양은

$$\frac{a_n}{100}\cdot 50=\frac{1}{2}a_n \ (\text{g})$$

농도가 6 %인 소금물 50 g에 들어 있는 소금의 양은

$$\frac{6}{100}\cdot 50=3 \ (\text{g})$$

$$\therefore a_{n+1}=\frac{\frac{1}{2}a_n+3}{100}\cdot 100$$
$$=\frac{1}{2}a_n+3 \ (n=1, 2, 3, \cdots)$$

답 $a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+3$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$

24 (1) 시행을 한 번 하면 전체 막대의 길이의 $\frac{2}{3}$가 남으므로

$$a_{n+1}=\frac{2}{3}a_n \ (n=1, 2, 3, \cdots)$$

(2) 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $a_1=\frac{2}{3}\cdot 135=90$, 공비가 $\frac{2}{3}$인 등비수열이므로

$$a_n=90\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

$$\therefore a_6=90\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^5=\frac{320}{27}$$

답 (1) $a_{n+1}=\frac{2}{3}a_n$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$ (2) $\frac{320}{27}$

Q BOX

$(\text{소금물의 농도})=\frac{(\text{소금의 양})}{(\text{소금물의 양})}\times 100\ (\%)$

농도가 a_n %인 소금물 100 g에서 50 g을 덜어내고 남은 소금물 50 g에 들어 있는 소금의 양

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면
$a_1=S_1$,
$a_n=S_n-S_{n-1}$ $(n\ge 2)$

22 수학적 귀납법

83쪽

01 명제 $p(n)$이 $n=2, 4, 8, \cdots, 2^m, \cdots$ (m은 자연수)일 때 성립함을 보이려면

(i) $n=\boxed{2}$일 때, $p(n)$이 성립함을 보인다.

(ii) $2^{m+1}=2\cdot 2^m$이므로 $n=k$ $(k\ge\boxed{2})$일 때 $p(n)$이 성립한다고 가정하면 $n=\boxed{2k}$일 때도 $p(n)$이 성립함을 보인다.

답 2, 2, $2k$

02 (i) $n=1$일 때,

$$(\text{좌변})=1^2=1, \ (\text{우변})=\frac{1\cdot 2\cdot 3}{6}=\boxed{1}$$

따라서 주어진 등식이 성립한다.

(ii) $n=k$일 때 주어진 등식이 성립한다고 가정하면

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

위의 식의 양변에 $(k+1)^2$을 더하면

$1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2+(k+1)^2$

$=\dfrac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2$

$=\dfrac{(k+1)\{k(2k+1)+6(k+1)\}}{6}$

$=\dfrac{(k+1)(\boxed{2k^2+7k+6})}{6}$

$=\dfrac{(k+1)(k+2)(\boxed{2k+3})}{6}$

따라서 $n=k+1$일 때도 주어진 등식이 성립한다.

(i), (ii)에서 모든 자연수 n에 대하여 주어진 등식이 성립한다. 답 1, $2k^2+7k+6$, $2k+3$

03 $a=1$, $b=2$이므로

$a+b=3$ 답 3

$3=1+2$, $5=3+2$, $7=5+2$, $\cdots$ 이므로 $p(k)$가 참이면 $p(k+2)$도 참이어야 한다.

04 ㄱ. $p(1)$이 참이면

$p(8)$, $p(15)$, $p(22)$, $\cdots$, $p(7n+1)$

이 참이다.

이때 $125=7\cdot17+6$이므로 $p(125)$가 참인지는 알 수 없다.

ㄴ. $p(1)$이 참이면

$p(5)$, $p(25)$, $p(125)$, $\cdots$

가 참이다.

$p(5^n)$이 참이다.

ㄷ. $p(1)$이 참이면

$p(2\cdot1+3)=p(5)$, $p(2\cdot5+3)=p(13)$,

$p(2\cdot13+3)=p(29)$, $p(2\cdot29+3)=p(61)$,

$p(2\cdot61+3)=p(125)$, $\cdots$

가 참이다.

이상에서 조건 (나)가 될 수 있는 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

05 (ii) $n=k$일 때 주어진 등식이 성립한다고 가정하면

$1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\cdots+k(k+1)$

$=\dfrac{k(k+1)(k+2)}{3}$

위의 식의 양변에 $\boxed{(k+1)(k+2)}$를 더하면

$1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\cdots+k(k+1)$

$+(k+1)(k+2)$

$=\dfrac{k(k+1)(k+2)}{3}+(k+1)(k+2)$

$=\dfrac{\boxed{(k+1)(k+2)(k+3)}}{3}$

따라서 $f(k)=(k+1)(k+2)$,

$g(k)=(k+1)(k+2)(k+3)$이므로

$f(1)+g(1)=2\cdot3+2\cdot3\cdot4=30$ 답 30

06 (1) $n=1$일 때,

(좌변)$=1^3=1$, (우변)$=\left(\dfrac{1\cdot2}{2}\right)^2=1$

따라서 주어진 등식이 성립한다.

(2) $n=k$일 때 주어진 등식이 성립한다고 가정하면

$1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3=\left\{\dfrac{k(k+1)}{2}\right\}^2$

위의 식의 양변에 $(k+1)^3$을 더하면

$1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3+(k+1)^3$

$=\left\{\dfrac{k(k+1)}{2}\right\}^2+(k+1)^3$

$=(k+1)^2\left(\dfrac{k^2}{4}+k+1\right)$

$=\dfrac{1}{4}(k+1)^2(k+2)^2$

$=\left\{\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}\right\}^2$

$\dfrac{k^2}{4}+k+1$
$=\dfrac{1}{4}(k^2+4k+4)$
$=\dfrac{1}{4}(k+2)^2$

따라서 $n=k+1$일 때도 주어진 등식이 성립한다.

답 풀이 참조

07 (i) $n=1$일 때,

(좌변)$=\dfrac{1}{1\cdot3}=\dfrac{1}{3}$, (우변)$=\dfrac{1}{2\cdot1+1}=\dfrac{1}{3}$

따라서 주어진 등식이 성립한다.

(ii) $n=k$일 때 주어진 등식이 성립한다고 가정하면

$\dfrac{1}{1\cdot3}+\dfrac{1}{3\cdot5}+\dfrac{1}{5\cdot7}+\cdots+\dfrac{1}{(2k-1)(2k+1)}$

$=\dfrac{k}{2k+1}$

위의 식의 양변에 $\dfrac{1}{(2k+1)(2k+3)}$을 더하면

$\dfrac{1}{1\cdot3}+\dfrac{1}{3\cdot5}+\dfrac{1}{5\cdot7}+\cdots+\dfrac{1}{(2k-1)(2k+1)}$

$+\dfrac{1}{(2k+1)(2k+3)}$

$=\dfrac{k}{2k+1}+\dfrac{1}{(2k+1)(2k+3)}$

$=\dfrac{k(2k+3)+1}{(2k+1)(2k+3)}=\dfrac{2k^2+3k+1}{(2k+1)(2k+3)}$

$=\dfrac{(2k+1)(k+1)}{(2k+1)(2k+3)}=\dfrac{k+1}{2k+3}$

따라서 $n=k+1$일 때도 주어진 등식이 성립한다.

(i), (ii)에서 모든 자연수 n에 대하여 주어진 등식이 성립한다. 답 풀이 참조

08 (ii) $n=k$일 때 n^3+2n이 3으로 나누어떨어진다고 가정하면

$k^3+2k=3N$ (N은 자연수)

으로 놓을 수 있다.

이때 $n=k+1$이면

$(k+1)^3+2(k+1)=k^3+3k^2+5k+3$

$=k^3+2k+\boxed{3k^2+3k+3}$

$=3N+3k^2+3k+3$

$=3(\boxed{N+k^2+k+1})$

$(k+1)^3+2(k+1)$
$=k^3+3k^2+3k+1$
$+2k+2$
$=k^3+3k^2+5k+3$

따라서 $n=k+1$일 때도 n^3+2n은 3으로 나누어떨어진다.

$\therefore$ (가) $3k^2+3k+3$ (나) $N+k^2+k+1$ 답 ④

W 10 수학적 귀납법

09 (ii) $n=k$일 때 $2^{n+1}+3^{2n-1}$이 7의 배수라 가정하면

$2^{k+1}+3^{2k-1}=7N$ (N은 자연수)

으로 놓을 수 있다.

이때 $n=k+1$이면

$$\begin{aligned}2^{k+2}+3^{2k+1}&=\boxed{2}\cdot 2^{k+1}+\boxed{9}\cdot 3^{2k-1}\\&=2\cdot 2^{k+1}+2\cdot 3^{2k-1}+7\cdot 3^{2k-1}\\&=2(2^{k+1}+3^{2k-1})+7\cdot 3^{2k-1}\\&=2\cdot 7N+7\cdot\boxed{3^{2k-1}}\\&=7(2N+3^{2k-1})\end{aligned}$$

따라서 $n=k+1$일 때도 $2^{n+1}+3^{2n-1}$은 7의 배수이다.

즉 $a=2$, $b=9$, $f(k)=3^{2k-1}$이므로

$$\begin{aligned}f(a+b)&=f(2+9)=f(11)\\&=3^{2\cdot 11-1}=3^{21}\end{aligned}$$

답 ③

10 (i) $n=\boxed{5}$일 때,

(좌변)$=2^5=32$, (우변)$=5^2=25$

따라서 주어진 부등식이 성립한다.

(ii) $n=k$ $(k\geq 5)$일 때 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면

$2^k>k^2$

위의 식의 양변에 2를 곱하면

$2^{k+1}>2k^2$ ······ ㉠

그런데 $k\geq 5$이면

$k^2-2k-1=\boxed{(k-1)^2}-2>0$

이므로 $k^2>2k+1$ ······ ㉡

㉠, ㉡에서

$2^{k+1}>2k^2=k^2+k^2>k^2+2k+1=\boxed{(k+1)^2}$

따라서 $n=k+1$일 때도 주어진 부등식이 성립한다.

$\therefore$ (가) 5 (나) $(k-1)^2$ (다) $(k+1)^2$

답 ④

$y=(k-1)^2-2$는 $k\geq 5$에서 $k=5$일 때 최솟값 14를 가지므로
$(k-1)^2-2\geq 14>0$

11 (ii) $n=k$ $(k\geq 2)$일 때 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}>\frac{2k}{k+1}$$

위의 식의 양변에 $\frac{1}{k+1}$을 더하면

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}$$
$$>\frac{2k}{k+1}+\frac{1}{k+1}=\boxed{\frac{2k+1}{k+1}}$$ ······ ㉠

이때

$$\frac{2k+1}{k+1}-\frac{2k+2}{k+2}$$
$$=\frac{(2k+1)(k+2)-(2k+2)(k+1)}{(k+1)(k+2)}$$
$$=\frac{\boxed{k}}{(k+1)(k+2)}>0$$

이므로

$$\frac{2k+1}{k+1}>\frac{2k+2}{k+2}$$ ······ ㉡

$(2k+1)(k+2)$
$-(2k+2)(k+1)$
$=2k^2+5k+2$
$-(2k^2+4k+2)$
$=k$

㉠, ㉡에서

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k+1}>\frac{2k+2}{k+2}$$
$$=\frac{2(k+1)}{k+2}$$

따라서 $n=k+1$일 때도 주어진 부등식이 성립한다.

즉 $f(k)=\frac{2k+1}{k+1}$, $g(k)=k$이므로

$$f(1)g(4)=\frac{2+1}{1+1}\cdot 4=6$$

답 6

12 (i) $n=3$일 때,

(좌변)$=2^4=16$, (우변)$=3\cdot 2=6$

따라서 주어진 부등식이 성립한다.

(ii) $n=k$ $(k\geq 3)$일 때 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면

$2^{k+1}>k(k-1)$

위의 식의 양변에 2를 곱하면

$2^{k+2}>2k(k-1)=k^2+k(k-2)$

이때 $k^2+k(k-2)\geq k^2+k$이므로

$2^{k+2}>k^2+k=k(k+1)$

따라서 $n=k+1$일 때도 주어진 부등식이 성립한다.

$k\geq 3$에서 $k-2\geq 1$이므로
$k(k-2)\geq k$
$\therefore k^2+k(k-2)$
$\geq k^2+k$

(i), (ii)에서 $n\geq 3$인 모든 자연수 n에 대하여 주어진 부등식이 성립한다.

답 풀이 참조