쎈

정답 및 풀이

Ⅰ 다항식

01 다항식의 연산 ······ 2
02 나머지정리와 인수분해 ······ 13

Ⅱ 방정식

03 복소수 ······ 31
04 이차방정식 ······ 42
05 이차방정식과 이차함수 ······ 59
06 여러 가지 방정식 ······ 71

Ⅲ 부등식

07 부등식 ······ 87
08 이차부등식 ······ 100

Ⅳ 도형의 방정식

09 평면좌표와 직선의 방정식 ······ 121
10 원의 방정식 ······ 142
11 도형의 이동 ······ 162

⋯› 정답을 확인하려 할 때에는 「**빠른 정답 찾기**」를 이용하면 편리합니다.

Ⅰ. 다항식

01 다항식의 연산

0001 답 $5x^3-3x^2+x-12$

0002 답 $-12+x-3x^2+5x^3$

0003 답 $2x^2+(3y+1)x-y^2-10y+1$

0004 답 $2x^2+x+1+(3x-10)y-y^2$

0005 답 x^3+x^2+x-4

0006 $(x^2+2xy-3y^2)-(2x^2-5xy-y^2)$
$=x^2+2xy-3y^2-2x^2+5xy+y^2$
$=-x^2+7xy-2y^2$ 답 $-x^2+7xy-2y^2$

0007 $(4x^2+y^2)-(2xy-5y^2)+(x^2-3xy)$
$=4x^2+y^2-2xy+5y^2+x^2-3xy$
$=5x^2-5xy+6y^2$ 답 $5x^2-5xy+6y^2$

0008 $A+B-C$
$=(x^3-3x^2+x-1)+(2x^3+x^2-5)-(-x^2-4x+6)$
$=x^3-3x^2+x-1+2x^3+x^2-5+x^2+4x-6$
$=3x^3-x^2+5x-12$ 답 $3x^3-x^2+5x-12$

0009 $3A-(2B+C)$
$=3A-2B-C$
$=3(x^3-3x^2+x-1)-2(2x^3+x^2-5)-(-x^2-4x+6)$
$=3x^3-9x^2+3x-3-4x^3-2x^2+10+x^2+4x-6$
$=-x^3-10x^2+7x+1$ 답 $-x^3-10x^2+7x+1$

0010 $(A+2B)-(2A-C)$
$=A+2B-2A+C$
$=-A+2B+C$
$=-(x^3-3x^2+x-1)+2(2x^3+x^2-5)+(-x^2-4x+6)$
$=-x^3+3x^2-x+1+4x^3+2x^2-10-x^2-4x+6$
$=3x^3+4x^2-5x-3$ 답 $3x^3+4x^2-5x-3$

0011 답 $ab^4-3a^3b^2+2ab^3$

0012 $(x^2-2xy+3y)(x-y)$
$=x^3-x^2y-2x^2y+2xy^2+3xy-3y^2$
$=x^3-3x^2y+2xy^2+3xy-3y^2$
답 $x^3-3x^2y+2xy^2+3xy-3y^2$

0013 $(a+2b)(a^2+ab-b^2)$
$=a^3+a^2b-ab^2+2a^2b+2ab^2-2b^3$
$=a^3+3a^2b+ab^2-2b^3$ 답 $a^3+3a^2b+ab^2-2b^3$

0014 $(3x+2)^2=(3x)^2+2\cdot 3x\cdot 2+2^2$
$=9x^2+12x+4$ 답 $9x^2+12x+4$

0015 $(4x-1)^2=(4x)^2-2\cdot 4x\cdot 1+1^2$
$=16x^2-8x+1$ 답 $16x^2-8x+1$

0016 $(2a+3b)(2a-3b)=(2a)^2-(3b)^2$
$=4a^2-9b^2$ 답 $4a^2-9b^2$

0017 $(x+6)(x-8)=x^2+(6-8)x+6\cdot(-8)$
$=x^2-2x-48$ 답 $x^2-2x-48$

0018 $(7x+5)(4x-3)=7\cdot 4x^2+(-21+20)x+5\cdot(-3)$
$=28x^2-x-15$ 답 $28x^2-x-15$

0019 $(a+2b-c)^2$
$=a^2+(2b)^2+(-c)^2+2\cdot a\cdot 2b+2\cdot 2b\cdot(-c)+2\cdot(-c)\cdot a$
$=a^2+4b^2+c^2+4ab-4bc-2ca$
답 $a^2+4b^2+c^2+4ab-4bc-2ca$

0020 $(x+2)^3=x^3+3\cdot x^2\cdot 2+3\cdot x\cdot 2^2+2^3$
$=x^3+6x^2+12x+8$ 답 $x^3+6x^2+12x+8$

0021 $(x-1)^3=x^3-3\cdot x^2\cdot 1+3\cdot x\cdot 1^2-1^3$
$=x^3-3x^2+3x-1$ 답 x^3-3x^2+3x-1

0022 $(x+2y)(x^2-2xy+4y^2)=x^3+(2y)^3$
$=x^3+8y^3$ 답 x^3+8y^3

0023 $(3a-1)(9a^2+3a+1)=(3a)^3-1^3$
$=27a^3-1$ 답 $27a^3-1$

0024 $(x+2)(x-4)(x+5)$
$=x^3+(2-4+5)x^2+(-8-20+10)x+2\cdot(-4)\cdot 5$
$=x^3+3x^2-18x-40$ 답 $x^3+3x^2-18x-40$

0025 $(4x^2+2xy+y^2)(4x^2-2xy+y^2)$
$=(2x)^4+(2x)^2y^2+y^4$
$=16x^4+4x^2y^2+y^4$ 답 $16x^4+4x^2y^2+y^4$

0026 $(2a+b-c)(4a^2+b^2+c^2-2ab+bc+2ca)$
$=(2a)^3+b^3+(-c)^3-3\cdot 2a\cdot b\cdot(-c)$
$=8a^3+b^3-c^3+6abc$ 답 $8a^3+b^3-c^3+6abc$

0027 $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=3^2-2\cdot(-10)=29$ 답 29

0028 $a^2+b^2=(a-b)^2+2ab=(-4)^2+2\cdot3=22$ 답 22

0029 $(a-b)^2=(a+b)^2-4ab=2^2-4\cdot(-7)=32$ 답 32

0030 $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$
$=3^3-3\cdot(-2)\cdot3=45$ 답 45

0031 $a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$
$=1^3+3\cdot4\cdot1=13$ 답 13

0032 $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$
$=9^2-2\cdot8=65$ 답 65

0033 $x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2=3^2-2=7$ 답 7

0034 $x^3+\dfrac{1}{x^3}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=3^3-3\cdot3=18$ 답 18

0035 $x+y=(1+\sqrt{2})+(1-\sqrt{2})=2$,
$xy=(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})=-1$이므로
$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$
$=2^3-3\cdot(-1)\cdot2=14$ 답 14

0036 $x-y=(1+\sqrt{2})-(1-\sqrt{2})=2\sqrt{2}$,
$xy=(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})=-1$이므로
$x^3-y^3=(x-y)^3+3xy(x-y)$
$=(2\sqrt{2})^3+3\cdot(-1)\cdot2\sqrt{2}=10\sqrt{2}$ 답 $10\sqrt{2}$

0037

$$\begin{array}{r|l} & 4x-3 \\ \hline x^2+2x-3) & 4x^3+5x^2-3x-1 \\ & \underline{4x^3+8x^2-12x} \\ & -3x^2+9x-1 \\ & \underline{-3x^2-6x+9} \\ & 15x-10 \end{array}$$

$\therefore$ 몫: $4x-3$, 나머지: $15x-10$

답 몫: $4x-3$, 나머지: $15x-10$

0038

$$\begin{array}{r|l} & 2x-6 \\ \hline x^2+3x+1) & 2x^3-7x-2 \\ & \underline{2x^3+6x^2+2x} \\ & -6x^2-9x-2 \\ & \underline{-6x^2-18x-6} \\ & 9x+4 \end{array}$$

$\therefore$ 몫: $2x-6$, 나머지: $9x+4$

답 몫: $2x-6$, 나머지: $9x+4$

0039

$$\begin{array}{r|l} & x^2+x+3 \\ \hline x-3) & x^3-2x^2+5 \\ & \underline{x^3-3x^2} \\ & x^2 \\ & \underline{x^2-3x} \\ & 3x+5 \\ & \underline{3x-9} \\ & 14 \end{array}$$

$\therefore$ 몫: x^2+x+3, 나머지: 14 답 몫: x^2+x+3, 나머지: 14

0040 $P(x)=(x^2-5)(x+2)+3$
$=x^3+2x^2-5x-10+3$
$=x^3+2x^2-5x-7$ 답 x^3+2x^2-5x-7

0041 $P(x)=(x^2-x+1)(x-1)-2x+5$
$=x^3-x^2-x^2+x+x-1-2x+5$
$=x^3-2x^2+4$ 답 x^3-2x^2+4

0042

$$\begin{array}{r|l} & x^2+x-3 \\ \hline 2x-1) & 2x^3+x^2-7x+7 \\ & \underline{2x^3-x^2} \\ & 2x^2-7x \\ & \underline{2x^2-x} \\ & -6x+7 \\ & \underline{-6x+3} \\ & 4 \end{array}$$

$\therefore 2x^3+x^2-7x+7=(2x-1)(x^2+x-3)+4$

답 풀이 참조

0043

$$\begin{array}{r|l} & 3x-1 \\ \hline x^2+2) & 3x^3-x^2+4x+3 \\ & \underline{3x^3+6x} \\ & -x^2-2x+3 \\ & \underline{-x^2-2} \\ & -2x+5 \end{array}$$

$\therefore 3x^3-x^2+4x+3=(x^2+2)(3x-1)-2x+5$

답 풀이 참조

유형 01 다항식의 덧셈과 뺄셈 본책 12쪽

(i) 구하는 식을 간단히 정리한다.
(ii) 주어진 다항식을 (i)에 대입하여 간단히 한다.

0044 $2X-B=A-5B$에서 $2X=A-4B$
$\therefore X=\dfrac{1}{2}A-2B$
$=\dfrac{1}{2}(2x^2-4xy+6y^2)-2(-x^2+2xy+4y^2)$
$=x^2-2xy+3y^2+2x^2-4xy-8y^2$
$=3x^2-6xy-5y^2$ 답 ③

0045 $A-2(A-B)+C$

$=-A+2B+C$

$=-(2x^3-x^2+3x+4)+2(x^3+x-2)$

$\quad+(-x^3+3x^2+5x-1)$

$=-2x^3+x^2-3x-4+2x^3+2x-4-x^3+3x^2+5x-1$

$=-x^3+4x^2+4x-9$ 답 ③

0046 $(x^2+2x-y+1)*(2x-y-5)$

$=2(x^2+2x-y+1)-(2x-y-5)$

$=2x^2+4x-2y+2-2x+y+5$

$=2x^2+2x-y+7$ 답 ④

0047 $A+B=-x^2+5xy+y^2$ ······ ㉠

$B+C=2x^2-3xy$ ······ ㉡

$C+A=x^2+6xy-7y^2$ ······ ㉢

㉠+㉡+㉢을 하면

$2(A+B+C)=2x^2+8xy-6y^2$

$\therefore A+B+C=x^2+4xy-3y^2$ 답 ⑤

0048 $A-B=-3x^2+2xy-2y^2$ ······ ㉠

$2A+B=xy-4y^2$ ······ ㉡

㉠+㉡을 하면

$3A=-3x^2+3xy-6y^2$

$\therefore A=-x^2+xy-2y^2$ ··· ❶

이것을 ㉠에 대입하면

$(-x^2+xy-2y^2)-B=-3x^2+2xy-2y^2$

$\therefore B=(-x^2+xy-2y^2)-(-3x^2+2xy-2y^2)$

$=-x^2+xy-2y^2+3x^2-2xy+2y^2$

$=2x^2-xy$ ··· ❷

$\therefore A-2B=(-x^2+xy-2y^2)-2(2x^2-xy)$

$=-x^2+xy-2y^2-4x^2+2xy$

$=-5x^2+3xy-2y^2$ ··· ❸

답 $-5x^2+3xy-2y^2$

채점 기준	비율
❶ 다항식 A를 구할 수 있다.	40%
❷ 다항식 B를 구할 수 있다.	40%
❸ $A-2B$를 계산할 수 있다.	20%

유형 02 다항식의 전개식에서 계수 구하기

본책 12쪽

분배법칙을 이용하여 필요한 항이 나오도록 각 다항식에서 하나씩 선택하여 곱한다.

예 $(1-x+x^2)(3-x)$의 전개식에서 x항은

$1\cdot(-x)+(-x)\cdot 3=-4x$

따라서 x의 계수는 -4이다.

0049 $(2x^3+6x^2-8x-1)(x^2+5x+10)$의 전개식에서 x^2항은

$6x^2\cdot 10+(-8x)\cdot 5x+(-1)\cdot x^2=19x^2$

따라서 x^2의 계수는 19이다. 답 ④

0050 $(a-b+6)(4a+b-1)$의 전개식에서 ab항은

$a\cdot b+(-b)\cdot 4a=-3ab$

따라서 ab의 계수는 -3이다. 답 ②

0051 $(2x^2+x-3)(x^2+2x+k)$의 전개식에서 x항은

$x\cdot k+(-3)\cdot 2x=(k-6)x$ ··· ❶

이때 x의 계수가 5이므로

$k-6=5$

$\therefore k=11$ ··· ❷

답 11

채점 기준	비율
❶ 주어진 다항식의 전개식에서 x항을 구할 수 있다.	70%
❷ k의 값을 구할 수 있다.	30%

0052 $(x+1)(x+2)(x+3)\cdots(x+10)$의 전개식에서 x^9항은

$x^9\cdot 10+x^9\cdot 9+x^9\cdot 8+\cdots+x^9\cdot 2+x^9\cdot 1$

$=(1+2+\cdots+8+9+10)x^9$

$=55x^9$

따라서 x^9의 계수는 55이다. 답 ③

0053 $(1+x+2x^2+\cdots+100x^{100})^2$

$=(1+x+2x^2+\cdots+100x^{100})(1+x+2x^2+\cdots+100x^{100})$

이 식의 전개식에서 x^3항은

$1\cdot 3x^3+x\cdot 2x^2+2x^2\cdot x+3x^3\cdot 1=10x^3$

따라서 x^3의 계수는 10이다. 답 10

참고 주어진 식의 전개식에서 x^3의 계수와

$(1+x+2x^2+3x^3)(1+x+2x^2+3x^3)$

의 전개식에서 x^3의 계수는 서로 같다.

유형 03 곱셈 공식을 이용한 다항식의 전개

본책 13쪽

다항식의 곱셈은 곱셈 공식을 이용하면 빠르게 전개할 수 있다. 이때 곱셈 공식이 생각나지 않으면 분배법칙을 이용하여 전개한다.

0054 $(a+b+c)^2+(-a+b+c)^2+(a-b+c)^2+(a+b-c)^2$

$=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

$\quad+a^2+b^2+c^2-2ab+2bc-2ca$

$\quad+a^2+b^2+c^2-2ab-2bc+2ca$

$\quad+a^2+b^2+c^2+2ab-2bc-2ca$

$=4a^2+4b^2+4c^2$ 답 ②

0055 $(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)$

$=(x^2-1)(x^2+1)(x^4+1)=(x^4-1)(x^4+1)$

$=x^8-1=30-1$ ($\because x^8=30$)

$=29$

답 ①

0056 $(x+3)(x-3)(x^2+3x+9)(x^2-3x+9)$

$=\{(x+3)(x^2-3x+9)\}\{(x-3)(x^2+3x+9)\}$

$=(x^3+27)(x^3-27)$

$=x^6-729$

답 x^6-729

다른 풀이 $(x+3)(x-3)(x^2+3x+9)(x^2-3x+9)$

$=\{(x+3)(x-3)\}\{(x^2+3x+9)(x^2-3x+9)\}$

$=(x^2-9)(x^4+9x^2+81)$

$=x^6-729$

0057 $a+b+c=2$에서

$a+b=2-c$, $b+c=2-a$, $c+a=2-b$

이므로

$(a+b)(b+c)(c+a)$

$=(2-c)(2-a)(2-b)$

$=8-4(a+b+c)+2(ab+bc+ca)-abc$

$=8-4\cdot2+2\cdot(-7)-(-2)$

$=-12$

답 -12

유형 04 공통부분이 있는 다항식의 전개

본책 14쪽

① 공통부분이 있으면 공통부분을 하나의 문자로 바꾸어 곱셈 공식을 이용한다.

② ( )( )( )( ) 꼴은 공통부분이 생기도록 짝을 지어 곱셈 공식을 이용한다.

0058 $3a-b=t$로 놓으면

(주어진 식)$=(t-2c)(t+2c)=t^2-4c^2$

$=(3a-b)^2-4c^2$

$=9a^2-6ab+b^2-4c^2$

답 $9a^2-6ab+b^2-4c^2$

0059 $(x-3)(x-2)(x+1)(x+2)$

$=\{(x-3)(x+2)\}\{(x-2)(x+1)\}$

$=(x^2-x-6)(x^2-x-2)$

$x^2-x=t$로 놓으면

(주어진 식)$=(t-6)(t-2)=t^2-8t+12$

$=(x^2-x)^2-8(x^2-x)+12$

$=x^4-2x^3+x^2-8x^2+8x+12$

$=x^4-2x^3-7x^2+8x+12$

따라서 $a=-2$, $b=-7$, $c=8$이므로

$a-b-c=-3$

답 ①

0060 $3+2k=a$, $3-2k=b$로 놓으면

(주어진 식)$=(a^3+b^3)^2-(a^3-b^3)^2$

$=a^6+2a^3b^3+b^6-(a^6-2a^3b^3+b^6)=4a^3b^3$

$=4(3+2k)^3(3-2k)^3$

$=4(9-4k^2)^3$

$=4(9-4\cdot2)^3=4$

답 ④

유형 05 $(x\pm y)^2$, $(x\pm y)^3$을 포함한 곱셈 공식의 변형

본책 14쪽

x^2+y^2, x^3+y^3, x^4+y^4의 값을 구할 때는 $x+y$, xy의 값을 이용할 수 있도록 식을 변형한다.

① $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=(x-y)^2+2xy$

② $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$

③ $x^4+y^4=(x^2)^2+(y^2)^2=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2$

$=\{(x+y)^2-2xy\}^2-2(xy)^2$

0061 $x^2+y^2=(x-y)^2+2xy$에서

$3=2^2+2xy$ $\quad\therefore xy=-\frac{1}{2}$

$\therefore x^3-y^3=(x-y)^3+3xy(x-y)$

$=2^3+3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot2=5$

답 ⑤

0062 $x+y=4$, $xy=1$이므로

$x^2-xy+y^2=(x+y)^2-3xy=4^2-3\cdot1=13$

답 13

0063 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=3$에서 $\quad\frac{a+b}{ab}=3$

이때 $ab=2$이므로 $\quad\frac{a+b}{2}=3$ $\quad\therefore a+b=6$

따라서 $(a-b)^2=(a+b)^2-4ab=6^2-4\cdot2=28$이므로

$a-b=\sqrt{28}=2\sqrt{7}$ ($\because a>b$)

답 ②

0064 $x^2+y^2=(7+4\sqrt{3})+(7-4\sqrt{3})=14$

$x^2y^2=(7+4\sqrt{3})(7-4\sqrt{3})=49-48=1$

$\therefore xy=1$ ($\because x>0$, $y>0$)

$(x+y)^2=x^2+y^2+2xy=14+2\cdot1=16$이므로

$x+y=4$ ($\because x>0$, $y>0$) ··· ❶

$\therefore x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$

$=4^3-3\cdot1\cdot4=52$ ··· ❷

$\therefore \frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}=\frac{x^3+y^3}{xy}=\frac{52}{1}=52$ ··· ❸

답 52

채점 기준	비율
❶ $x+y$, xy의 값을 구할 수 있다.	40%
❷ x^3+y^3의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ $\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}$의 값을 구할 수 있다.	20%

0065 $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$
$=(-1)^2-2\cdot(-3)=7$,
$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$
$=(-1)^3-3\cdot(-3)\cdot(-1)=-10$
이고
$$(x^2+y^2)(x^3+y^3)=x^5+x^2y^3+x^3y^2+y^5$$
$$=x^5+y^5+x^2y^2(x+y)$$
이므로
$$x^5+y^5=(x^2+y^2)(x^3+y^3)-x^2y^2(x+y)$$
$$=7\cdot(-10)-(-3)^2\cdot(-1)=-61,$$
$$x^6+y^6=(x^3)^2+(y^3)^2=(x^3+y^3)^2-2x^3y^3$$
$$=(-10)^2-2\cdot(-3)^3=154$$
$\therefore x^5+y^5+x^6+y^6=93$ 답 ②

유형 06 $x+\frac{1}{x}$, $x-\frac{1}{x}$의 값의 활용 본책 15쪽

$x^2+\frac{1}{x^2}$, $x^3+\frac{1}{x^3}$, $x^3-\frac{1}{x^3}$의 값을 구할 때는 $x+\frac{1}{x}$ 또는 $x-\frac{1}{x}$의 값을 이용할 수 있도록 식을 변형한다.

① $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2$

② $x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)$

③ $x^3-\frac{1}{x^3}=\left(x-\frac{1}{x}\right)^3+3\left(x-\frac{1}{x}\right)$

0066 $x\neq0$이므로 $x^2-2x-1=0$의 양변을 x로 나누면
$$x-2-\frac{1}{x}=0 \qquad \therefore x-\frac{1}{x}=2$$
$$\therefore x^3-\frac{1}{x^3}=\left(x-\frac{1}{x}\right)^3+3\left(x-\frac{1}{x}\right)$$
$$=2^3+3\cdot2=14$$
답 14

참고 $x=0$을 $x^2-2x-1=0$에 대입하면 (좌변)$=-1\neq0$이므로 $x\neq0$이다.

0067 $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=x^2+\frac{1}{x^2}+2=4+2=6$

그런데 $x>0$이므로 $x+\frac{1}{x}=\sqrt{6}$
$$\therefore x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)$$
$$=(\sqrt{6})^3-3\cdot\sqrt{6}=3\sqrt{6}$$
답 ①

0068 $x\neq0$이므로 $x^2-3x+1=0$의 양변을 x로 나누면
$$x-3+\frac{1}{x}=0 \qquad \therefore x+\frac{1}{x}=3$$ ··· ❶

따라서 $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=3^2-2=7$,

$x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)=3^3-3\cdot3=18$이므로 ··· ❷

$$x^3+3x^2-5x-7-\frac{5}{x}+\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3}$$
$$=x^3+\frac{1}{x^3}+3\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-5\left(x+\frac{1}{x}\right)-7$$
$$=18+3\cdot7-5\cdot3-7=17$$ ··· ❸

답 17

채점 기준	비율
❶ $x+\frac{1}{x}$의 값을 구할 수 있다.	20%
❷ $x^2+\frac{1}{x^2}$, $x^3+\frac{1}{x^3}$의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ 주어진 식의 값을 구할 수 있다.	40%

유형 07 $a^2+b^2+c^2$, $a^3+b^3+c^3$을 포함한 곱셈 공식의 변형 본책 15쪽

① $a^2+b^2+c^2$, $a+b+c$, $ab+bc+ca$ 중 어느 두 값을 알면 곱셈 공식
$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$$
를 이용하여 나머지 한 값을 구할 수 있다.

② $a^3+b^3+c^3$의 값을 구할 때는 곱셈 공식
$$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=a^3+b^3+c^3-3abc$$
를 이용한다.

0069 $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$에서
$3^2=15+2(ab+bc+ca)$
$\therefore ab+bc+ca=-3$
$$\therefore \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{ab+bc+ca}{abc}=\frac{-3}{-1}=3$$
답 ⑤

0070 $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$에서
$$(\sqrt{2})^2=a^2+b^2+c^2+2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$$
$\therefore a^2+b^2+c^2=3$

$a^3+b^3+c^3=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc$에서
$$a^3+b^3+c^3=\sqrt{2}\cdot\left\{3-\left(-\frac{1}{2}\right)\right\}+3\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$
$$=\frac{7}{2}\sqrt{2}-\frac{3}{2}\sqrt{2}=2\sqrt{2}$$
답 ④

0071 $a-b=4$, $b-c=-1$을 변끼리 더하면
$a-c=3$
$\therefore a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$
$$=\frac{1}{2}(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca)$$
$$=\frac{1}{2}\{(a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)+(a^2-2ca+c^2)\}$$
$$=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(a-c)^2\}$$
$$=\frac{1}{2}\{4^2+(-1)^2+3^2\}$$
$$=\frac{1}{2}\cdot26=13$$
답 13

0072 $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$에서

$0=1+2(ab+bc+ca)$

$\therefore\ ab+bc+ca=-\dfrac{1}{2}$ ⋯⋯ ㉠ ⋯→ ❶

㉠의 양변을 제곱하여 정리하면

$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2(ab^2c+abc^2+a^2bc)=\dfrac{1}{4}$

$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2abc(a+b+c)=\dfrac{1}{4}$

이때 $a+b+c=0$이므로

$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=\dfrac{1}{4}$ ⋯→ ❷

$\therefore\ a^4+b^4+c^4=(a^2+b^2+c^2)^2-2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$

$=1^2-2\cdot\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{2}$ ⋯→ ❸

답 $\dfrac{1}{2}$

채점 기준	비율
❶ $ab+bc+ca$의 값을 구할 수 있다.	30%
❷ $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ $a^4+b^4+c^4$의 값을 구할 수 있다.	30%

유형 08~09 곱셈 공식의 활용 본책 16쪽

① 반복되는 수는 같은 문자로 생각한다.
② 주어진 길이, 넓이, 부피 등을 문자로 나타내어 본다.

0073 $(4+3)(4^2+3^2)(4^4+3^4)$

$=(4-3)(4+3)(4^2+3^2)(4^4+3^4)$

$4-3=1$

$=(4^2-3^2)(4^2+3^2)(4^4+3^4)$

$=(4^4-3^4)(4^4+3^4)$

$=4^8-3^8$

답 ③

0074 $9\times11\times101\times10001$

$=(10-1)(10+1)(100+1)(10000+1)$

$=(10^2-1)(10^2+1)(10^4+1)$

$=(10^4-1)(10^4+1)$

$=10^8-1$

답 ②

0075 $198^2+299\times301$

$=(200-2)^2+(300-1)(300+1)$

$=40000-800+4+90000-1$

$=129203$

이므로 여섯 자리 자연수이다.

$\therefore\ n=6$

답 6

0076 직사각형의 가로의 길이를 a, 세로의 길이를 b라 하면

$a^2+b^2=17^2,\ a+b=\dfrac{1}{2}\cdot46=23$

$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$에서

$17^2=23^2-2ab,\quad 2ab=240$

$\therefore\ ab=120$

따라서 구하는 넓이는 120이다.

답 120

0077 $\{(a+b)+c\}\{(a+b)-c\}=\{c+(a-b)\}\{c-(a-b)\}$ 에서

$(a+b)^2-c^2=c^2-(a-b)^2$

$a^2+2ab+b^2-c^2=c^2-a^2+2ab-b^2$

$2(a^2+b^2)=2c^2\qquad\therefore\ a^2+b^2=c^2$

따라서 삼각형 ABC는 $\angle C=90°$인 직각삼각형이다.

답 ⑤

0078 구하는 입체도형의 부피는

$(x+2)^3-3\cdot x^2(x+2)+2\cdot x^3$

$=x^3+6x^2+12x+8-3x^3-6x^2+2x^3$

$=12x+8$

답 $12x+8$

0079 직육면체의 밑면의 가로의 길이, 세로의 길이와 높이를 각각 a, b, c라 하면 모든 모서리의 길이의 합이 48이므로

$4(a+b+c)=48\qquad\therefore\ a+b+c=12$ ⋯→ ❶

또 대각선의 길이가 $\sqrt{54}$이므로

$\sqrt{a^2+b^2+c^2}=\sqrt{54}\qquad\therefore\ a^2+b^2+c^2=54$ ⋯→ ❷

직육면체의 겉넓이는 $2(ab+bc+ca)$이고

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$

이므로 $12^2=54+2(ab+bc+ca)$

$\therefore$ (겉넓이)$=2(ab+bc+ca)=90$ ⋯→ ❸

답 90

채점 기준	비율
❶ 직육면체의 밑면의 가로의 길이, 세로의 길이, 높이를 각각 a, b, c로 놓고 $a+b+c$의 값을 구할 수 있다.	30%
❷ $a^2+b^2+c^2$의 값을 구할 수 있다.	30%
❸ 직육면체의 겉넓이를 구할 수 있다.	40%

유형 10 다항식의 나눗셈; 몫과 나머지 본책 17쪽

다항식의 나눗셈은 각 다항식을 내림차순으로 정리한 후 차수를 맞춰서 계산한다. 이때 해당되는 차수의 항이 없으면 그 자리를 비워 두고 계산한다.

0080

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2x\ -1 \\
\hline
x^2-x-1 & 2x^3-3x^2+\ x-3 \\
 & 2x^3-2x^2-2x \\
\hline
 & \quad\ -x^2+3x-3 \\
 & \quad\ -x^2+\ x+1 \\
\hline
 & \qquad\quad 2x-4
\end{array}
$$

따라서 $Q(x)=2x-1$, $R(x)=2x-4$이므로

$Q(2)+R(1)=(2\cdot2-1)+(2\cdot1-4)$

$=3-2=1$

답 1

0081 $a=2$, $b=2$, $c=5$, $d=-3$이므로

$a+b+c+d=6$ 답 ⑤

0082

$$
\begin{array}{r|l}
 & x-1 \\
x^2+2x-1 & x^3+x^2-5x+4 \\
 & x^3+2x^2-x \\ \hline
 & -x^2-4x+4 \\
 & -x^2-2x+1 \\ \hline
 & -2x+3
\end{array}
$$

따라서 몫은 $x-1$, 나머지는 $-2x+3$이므로

$a=1$, $b=-1$, $c=-2$, $d=3$

$\therefore ab-cd=5$ 답 5

유형 11 다항식의 나눗셈; $A=BQ+R$

본책 17쪽

다항식 A를 다항식 $B(B\neq0)$로 나누었을 때의 몫을 Q, 나머지를 R라 하면

$A=BQ+R$ (단, R는 상수이거나 (R의 차수)<(B의 차수)이다.)

특히 $R=0$이면 A는 B로 나누어떨어진다고 한다.

0083 $x^4-3x^2+x-5=A(x^2-x+3)-7x+10$이므로

$A(x^2-x+3)=x^4-3x^2+x-5-(-7x+10)$

$=x^4-3x^2+8x-15$

$\therefore A=(x^4-3x^2+8x-15)\div(x^2-x+3)$

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2+x-5 \\
x^2-x+3 & x^4-3x^2+8x-15 \\
 & x^4-x^3+3x^2 \\ \hline
 & x^3-6x^2+8x \\
 & x^3-x^2+3x \\ \hline
 & -5x^2+5x-15 \\
 & -5x^2+5x-15 \\ \hline
 & 0
\end{array}
$$

$\therefore A=x^2+x-5$ 답 ③

0084 $P(x)=(x-2)(2x+3)+3=2x^2-x-3$

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2x-5 \\
x+2 & 2x^2-x-3 \\
 & 2x^2+4x \\ \hline
 & -5x-3 \\
 & -5x-10 \\ \hline
 & 7
\end{array}
$$

따라서 $P(x)$를 $x+2$로 나누었을 때의 몫은 $2x-5$, 나머지는 7이다. 답 몫: $2x-5$, 나머지: 7

0085 직육면체의 높이를 A라 하면

$(a-2)(a+3)A=a^3+5a^2-2a-24$

$(a^2+a-6)A=a^3+5a^2-2a-24$

$\therefore A=(a^3+5a^2-2a-24)\div(a^2+a-6)$

$$
\begin{array}{r|l}
 & a+4 \\
a^2+a-6 & a^3+5a^2-2a-24 \\
 & a^3+a^2-6a \\ \hline
 & 4a^2+4a-24 \\
 & 4a^2+4a-24 \\ \hline
 & 0
\end{array}
$$

$\therefore A=a+4$

따라서 직육면체의 높이는 $a+4$이다. 답 $a+4$

다른 풀이 $a^3+5a^2-2a-24$에서 a^3의 계수가 1이므로 구하는 높이를 $a+k$(k는 상수)라 하면

$(a-2)(a+3)(a+k)=a^3+5a^2-2a-24$

양변의 상수항을 비교하면

$-6k=-24$ $\therefore k=4$

따라서 직육면체의 높이는 $a+4$이다.

0086

$$
\begin{array}{r|l}
 & x-1 \\
x^2-x+b & x^3-2x^2+ax-3 \\
 & x^3-x^2+bx \\ \hline
 & -x^2+(a-b)x-3 \\
 & -x^2+x-b \\ \hline
 & (a-b-1)x-3+b
\end{array}
$$

이때 나머지가 0이어야 하므로

$a-b-1=0$, $-3+b=0$

따라서 $a=4$, $b=3$이므로

$ab=12$ 답 12

0087

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2x^2+x-3 \\
x^2-x-1 & 2x^4-x^3-6x^2+2x+5 \\
 & 2x^4-2x^3-2x^2 \\ \hline
 & x^3-4x^2+2x \\
 & x^3-x^2-x \\ \hline
 & -3x^2+3x+5 \\
 & -3x^2+3x+3 \\ \hline
 & 2
\end{array}
$$

$\therefore 2x^4-x^3-6x^2+2x+5=(x^2-x-1)(2x^2+x-3)+2$

이때 $x^2-x-1=0$이므로 구하는 식의 값은 2 답 ④

유형 12 몫과 나머지의 변형

본책 18쪽

다항식 $P(x)$를 $x-\frac{1}{a}$ $(a\neq0)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R라 하면

$P(x)=\left(x-\frac{1}{a}\right)Q(x)+R$

$=\frac{1}{a}(ax-1)Q(x)+R$

$=(ax-1)\cdot\frac{1}{a}Q(x)+R$

➡ $P(x)$를 $ax-1$로 나누었을 때의 몫은 $\frac{1}{a}Q(x)$, 나머지는 R이다.

0088 $P(x)$를 $x-\frac{1}{3}$로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 R이므로

$$P(x)=\left(x-\frac{1}{3}\right)Q(x)+R$$
$$=\frac{1}{3}(3x-1)Q(x)+R$$
$$=(3x-1)\cdot\frac{1}{3}Q(x)+R$$

따라서 $P(x)$를 $3x-1$로 나누었을 때의 몫은 $\frac{1}{3}Q(x)$, 나머지는 R이다.

답 ②

0089 $P(x)$를 $ax+b$로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 R이므로

$$P(x)=(ax+b)Q(x)+R \qquad \cdots ❶$$
$$=a\left(x+\frac{b}{a}\right)Q(x)+R$$
$$=\left(x+\frac{b}{a}\right)\cdot aQ(x)+R \qquad \cdots ❷$$

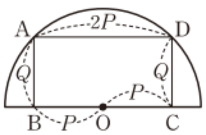
따라서 $P(x)$를 $x+\frac{b}{a}$로 나누었을 때의 몫은 $aQ(x)$, 나머지는 R이다. ··· ❸

답 몫: $aQ(x)$, 나머지: R

채점 기준	비율
❶ $P(x)$를 $ax+b$에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30%
❷ $P(x)$를 $x+\frac{b}{a}$에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	50%
❸ $P(x)$를 $x+\frac{b}{a}$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 구할 수 있다.	20%

0090 전략 $\overline{OC}=P$, $\overline{CD}=Q$로 놓고 주어진 조건을 이용하여 식을 세운다.

풀이 $\overline{OC}=P$, $\overline{CD}=Q$로 놓으면 조건 (가)에서



$$P+Q=x+y+3 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$\overline{DA}=2P$, $\overline{AB}=Q$, $\overline{BO}=P$이므로 조건 (나)에서

$$2P+Q+P=3x+y+5$$
$$\therefore 3P+Q=3x+y+5 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉡$-$㉠을 하면

$$2P=2x+2 \qquad \therefore P=x+1$$

이것을 ㉠에 대입하면

$$x+1+Q=x+y+3 \qquad \therefore Q=y+2$$

따라서 직사각형 ABCD의 넓이는

$$2P\cdot Q=2(x+1)(y+2)$$

답 ⑤

0091 전략 주어진 조건을 이용하여 식을 세운 후 다항식의 덧셈, 뺄셈, 곱셈을 이용하여 식의 값을 구한다.

풀이 조건 (가)에서

$$(x-3)(y-3)(2z-3)=0$$

이 식의 좌변을 전개하면

$$(xy-3x-3y+9)(2z-3)=0$$
$$2xyz-3xy-6zx+9x-6yz+9y+18z-27=0$$
$$2xyz-3(xy+2yz+2zx)+9(x+y+2z)-27=0$$

이때 조건 (나)에서 $xy+2yz+2zx=3(x+y+2z)$이므로

$$2xyz-3\cdot3(x+y+2z)+9(x+y+2z)-27=0$$
$$2xyz-9(x+y+2z)+9(x+y+2z)-27=0$$
$$2xyz-27=0 \qquad \therefore xyz=\frac{27}{2}$$
$$\therefore 10xyz=135$$

답 135

0092 전략 $ac+bd=\frac{1}{2}$의 양변을 제곱하여 $a^2c^2+b^2d^2$의 값을 구한다.

풀이 $ac+bd=\frac{1}{2}$의 양변을 제곱하면

$$(ac+bd)^2=\frac{1}{4}, \qquad a^2c^2+2abcd+b^2d^2=\frac{1}{4}$$
$$\therefore a^2c^2+b^2d^2=\frac{1}{4}-2abcd \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$a^2+b^2=2$, $c^2+d^2=2$이므로

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=4$$
$$a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2=4$$

이 식에 ㉠을 대입하면 $\quad a^2d^2+b^2c^2+\frac{1}{4}-2abcd=4$

$$(ad-bc)^2+\frac{1}{4}=4 \qquad \therefore (ad-bc)^2=\frac{15}{4}$$

그런데 $ad>bc$이므로 $\quad ad-bc=\frac{\sqrt{15}}{2}$

답 $\frac{\sqrt{15}}{2}$

0093 전략 A를 B에 대한 식으로 정리한 후, A^3-8B^3을 변형하여 x^5, x^4의 계수를 구한다.

풀이 $A=x^3+2(x^2+2x+3)=x^3+2B$이므로 $\quad A-2B=x^3$

$$\therefore A^3-8B^3=(A-2B)^3+3A\cdot2B(A-2B)$$
$$=(x^3)^3+6AB(A-2B)$$
$$=x^9+6(x^3+2B)Bx^3$$
$$=x^9+6x^6B+12x^3B^2$$

이때 x^5항, x^4항은 $12x^3B^2$항에서만 존재하므로

$$12x^3B^2=12x^3(x^2+2x+3)^2$$
$$=12x^3(x^2+2x+3)(x^2+2x+3)$$

의 전개식에서 x^5항은

$$12x^3(x^2\cdot3+2x\cdot2x+3\cdot x^2)=120x^5 \qquad \therefore p=120$$

또 x^4항은

$$12x^3(2x\cdot3+3\cdot2x)=144x^4 \qquad \therefore q=144$$
$$\therefore p+q=264$$

답 264

0094 전략 주어진 세 식을 변끼리 더한 후 곱셈 공식의 변형을 이용한다.

풀이 주어진 세 식을 변끼리 더하면

$$3a+3b+3c=3ab+3bc+3ca$$
$$\therefore ab+bc+ca=a+b+c=3$$

$\therefore\ a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$
$=3^2-2\cdot3=3$ 답 ①

0095 전략 직사각형 OPQR의 가로의 길이, 세로의 길이를 각각 x, y로 놓고 x, y에 대한 식을 세운다.

풀이 $\overline{OP}=x$, $\overline{OR}=y$라 하면
$xy=48$, $x^2+y^2=\overline{OQ}^2=10^2=100$
$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$이므로
$100=(x+y)^2-2\cdot48$
$\therefore\ (x+y)^2=196$
$x>0$, $y>0$이므로 $x+y=14$
이때 직사각형 OPQR에서 $\overline{PR}=\overline{OQ}=10$
$\therefore\ \overline{AP}+\overline{PR}+\overline{RB}=(10-x)+10+(10-y)$
$=30-(x+y)$
$=30-14=16$ 답 16

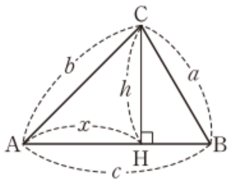
0096 전략 큰 정육면체와 작은 정육면체의 한 모서리의 길이를 각각 x, y로 놓고 주어진 조건을 이용하여 식을 세운다.

풀이 큰 정육면체와 작은 정육면체의 한 모서리의 길이를 각각 x, y라 하면
$x-y=4$
두 정육면체의 부피의 차가 100이므로
$x^3-y^3=100$
이때 $x^3-y^3=(x-y)^3+3xy(x-y)$이므로
$100=4^3+3xy\cdot4$, $100=64+12xy$
$12xy=36$ $\therefore\ xy=3$
따라서 두 정육면체의 겉넓이의 합은
$6x^2+6y^2=6(x^2+y^2)$
$=6\{(x-y)^2+2xy\}$
$=6(4^2+2\cdot3)=132$ 답 132

0097 전략 세 구의 반지름의 길이를 각각 a, b, c로 놓고 주어진 조건을 a, b, c에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 세 구의 반지름의 길이를 각각 a, b, c라 하면
$a+b+c=9$ …… ㉠
$4\pi(a^2+b^2+c^2)=116\pi$ $\therefore\ a^2+b^2+c^2=29$ …… ㉡
$\frac{4}{3}\pi(a^3+b^3+c^3)=132\pi$
$\therefore\ a^3+b^3+c^3=99$ …… ㉢
㉠의 양변을 제곱하면
$a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)=81$
이 식에 ㉡을 대입하면
$29+2(ab+bc+ca)=81$
$\therefore\ ab+bc+ca=26$ …… ㉣
$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=a^3+b^3+c^3-3abc$에 ㉠, ㉡, ㉢, ㉣을 대입하면
$9\cdot(29-26)=99-3abc$, $3abc=72$
$\therefore\ abc=24$
따라서 세 구의 반지름의 길이의 곱은 24이다. 답 24

0098 전략 삼각형 ABC의 높이를 a, b, c에 대한 식으로 나타내어 본다.



풀이 오른쪽 그림과 같이 꼭짓점 C에서 변 AB에 내린 수선의 발을 H라 하자.
$\overline{AH}=x$, $\overline{CH}=h$라 하면
$h^2=b^2-x^2$
$=a^2-(c-x)^2$
이므로 $b^2-x^2=a^2-(c-x)^2$
$b^2-x^2=a^2-c^2+2cx-x^2$
$2cx=b^2+c^2-a^2$
$\therefore\ x=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2c}$
$\therefore\ h^2=b^2-\left\{\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2c}\right\}^2$
$=\dfrac{4b^2c^2-(b^2+c^2-a^2)^2}{4c^2}$
$=\dfrac{2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2-(a^4+b^4+c^4)}{4c^2}$
이때
$2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2=(a^2+b^2+c^2)^2-(a^4+b^4+c^4)$
$=6^2-14=22$
이므로
$h^2=\dfrac{22-14}{4c^2}=\dfrac{2}{c^2}$ $\therefore\ h=\dfrac{\sqrt{2}}{c}$ ($\because\ c>0$, $h>0$)
따라서 삼각형 ABC의 넓이는
$\dfrac{1}{2}ch=\dfrac{1}{2}\cdot c\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{c}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 답 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

0099 전략 $x^2+x+2=(x^2+1)+(x+1)$임을 이용한다.

풀이 $x^2+x+2=(x^2+1)+(x+1)$이므로 $A=x^2+1$, $B=x+1$로 놓으면
$(x^2+x+2)^3=(A+B)^3$
$=A^3+\underbrace{3A^2B+3AB^2}_{A=x^2+1\text{로 나누어떨어진다.}}+B^3$
$=A(A^2+3AB+3B^2)+B^3$
이때 $(x^2+x+2)^3$을 x^2+1로 나누었을 때의 나머지는 $\underbrace{(x+1)^3}_{=B^3}$을 x^2+1로 나누었을 때의 나머지와 같다.

$$\begin{array}{r}
x+3 \\
x^2+1\,\big)\,\underbrace{x^3+3x^2+3x+1}_{=(x+1)^3} \\
\underline{x^3 \qquad\quad +x} \\
3x^2+2x+1 \\
\underline{3x^2 \qquad +3} \\
2x-2
\end{array}$$

따라서 $R(x)=2x-2$이므로
$R(5)=2\cdot5-2=8$ 답 8

0100 전략 $x=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$을 (x에 대한 이차식)$=0$ 꼴로 변형한다.

풀이 $x=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$에서 $2x-1=\sqrt{3}$

양변을 제곱하면

$4x^2-4x+1=3,\qquad 4x^2-4x-2=0$

$\therefore\ 2x^2-2x-1=0$

$4x^4-2x^3-5x+3$을 $2x^2-2x-1$로 나누면

$$\begin{array}{r|l} & 2x^2+x+2 \\ 2x^2-2x-1 & 4x^4-2x^3\qquad -5x+3 \\ & 4x^4-4x^3-2x^2 \\ \hline & \quad 2x^3+2x^2-5x \\ & \quad 2x^3-2x^2-x \\ \hline & \qquad 4x^2-4x+3 \\ & \qquad 4x^2-4x-2 \\ \hline & \qquad\qquad 5 \end{array}$$

$\therefore\ 4x^4-2x^3-5x+3=(2x^2-2x-1)(2x^2+x+2)+5$

이때 $2x^2-2x-1=0$이므로 구하는 식의 값은 5

답 5

0101 전략 다항식의 나눗셈에 대한 등식을 세운 후 몫과 나머지의 변형을 이용한다.

풀이 다항식 $P(x)$를 $(x+1)^3$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$$\begin{aligned} P(x)&=(x+1)^3Q(x)+2x^2+ax+1 \\ &=(x+1)(x+1)^2Q(x)+2(x^2+2x+1)+(a-4)x-1 \\ &=(x+1)(x+1)^2Q(x)+2(x+1)^2+(a-4)x-1 \\ &=(x+1)^2\{(x+1)Q(x)+2\}+(a-4)x-1 \end{aligned}$$

이때 $P(x)$를 $(x+1)^2$으로 나누었을 때의 나머지가 $x+b$이므로

$a-4=1,\ b=-1\qquad \therefore\ a=5,\ b=-1$

$\therefore\ a+b=4$

답 4

다른 풀이 다항식 $P(x)$를 $(x+1)^3$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$P(x)=(x+1)^3Q(x)+2x^2+ax+1$

이때 $(x+1)^3Q(x)$는 $(x+1)^2$으로 나누어떨어지므로 다항식 $P(x)$를 $(x+1)^2$으로 나누었을 때의 나머지는 다항식 $2x^2+ax+1$을 $(x+1)^2$으로 나누었을 때의 나머지와 같다.

$$\begin{array}{r|l} & 2 \\ x^2+2x+1 & 2x^2+ax+1 \\ & 2x^2+4x+2 \\ \hline & (a-4)x-1 \end{array}$$

따라서 $P(x)$를 $(x+1)^2$으로 나누었을 때의 나머지가 $x+b$이므로

$a-4=1,\ b=-1$

$\therefore\ a=5,\ b=-1$

0102 전략 다항식 $P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$에 대하여 $a_0+a_1+a_2+\cdots+a_n$의 값은 $P(1)$의 값과 같음을 이용한다.

풀이 $A+2B=x^2+1+2(x^2-3x+4)=3x^2-6x+9,$

$B+C=x^2-3x+4+(2x^2-x+2)=3x^2-4x+6,$

$C-A=2x^2-x+2-(x^2+1)=x^2-x+1$ ··· ❶

이므로

$(A+2B)(B+C)(C-A)$

$=(3x^2-6x+9)(3x^2-4x+6)(x^2-x+1)$

$P(x)=(3x^2-6x+9)(3x^2-4x+6)(x^2-x+1)$로 놓으면 다항식 $P(x)$의 전개식이 $a_6x^6+a_5x^5+\cdots+a_1x+a_0$이고 $a_0+a_1+\cdots+a_5+a_6$의 값은 $P(1)$의 값과 같으므로

$P(1)=6\cdot5\cdot1=30$ ··· ❷

답 30

채점 기준	비율
❶ $A+2B$, $B+C$, $C-A$를 구할 수 있다.	40%
❷ $a_0+a_1+\cdots+a_5+a_6$의 값을 구할 수 있다.	60%

0103 전략 조건 (가), (나)를 이용하여 a, b를 각각 x, y에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 조건 (가)에서 $x^2+y^2=a$이므로

$a=(x+y)^2-2xy$ ······ ㉠ ··· ❶

조건 (나)에서 $x^3+y^3=b(x+y)$이므로

$b(x+y)=(x+y)^3-3xy(x+y)$

이때 $x+y\neq0$이므로

$b=(x+y)^2-3xy$ ······ ㉡ ··· ❷

㉠, ㉡을 조건 (다)에 대입하면

$(x+y)^2-2xy-\{(x+y)^2-3xy\}=20$

$\therefore\ xy=20$ ··· ❸

따라서 자연수 x, y의 순서쌍 (x, y)는

$(1, 20), (2, 10), (4, 5), (5, 4), (10, 2), (20, 1)$

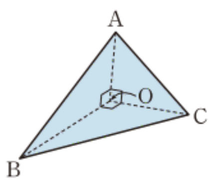
의 6개이다. ··· ❹

답 6

채점 기준	비율
❶ a를 x, y에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30%
❷ b를 x, y에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30%
❸ xy의 값을 구할 수 있다.	20%
❹ 순서쌍 (x, y)의 개수를 구할 수 있다.	20%

0104 전략 사면체의 세 모서리의 길이 사이의 관계식을 구한다.

풀이 조건 (가)에서 사면체 OABC는 오른쪽 그림과 같다.



$\overline{OA}=a$, $\overline{OB}=b$, $\overline{OC}=c$라 하면 조건 (나)에서

$a+b+c=13$ ··· ❶

조건 (다)에서

$\frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}bc+\frac{1}{2}ca=27$

$\therefore\ ab+bc+ca=54$ ··· ❷

$$\begin{aligned} \therefore\ \overline{OA}^2+\overline{OB}^2+\overline{OC}^2&=a^2+b^2+c^2 \\ &=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca) \\ &=13^2-2\cdot54 \\ &=61 \end{aligned}$$ ··· ❸

답 61

채점 기준	비율
❶ $\overline{OA}=a$, $\overline{OB}=b$, $\overline{OC}=c$로 놓고 $a+b+c$의 값을 구할 수 있다.	20%
❷ $ab+bc+ca$의 값을 구할 수 있다.	30%
❸ $\overline{OA}^2+\overline{OB}^2+\overline{OC}^2$의 값을 구할 수 있다.	50%

0105 전략 직사각형의 둘레의 길이를 이용하여 $\overline{CD}$의 길이를 구한 후 색칠한 부분의 넓이를 식으로 나타낸다.

풀이 $2\overline{CD}+2(2x+5)=6x+12$이므로

$2\overline{CD}+4x+10=6x+12$

$2\overline{CD}=2x+2 \quad \therefore \overline{CD}=x+1$ ··· ❶

따라서 $\overline{PD}=P(x)$라 하면 색칠한 부분의 넓이가 $-x^3+14x+13$이므로

$$(2x+5)(x+1)-\frac{1}{2}(x+1)P(x)\cdot 2=-x^3+14x+13$$ ··· ❷

$2x^2+7x+5-(x+1)P(x)=-x^3+14x+13$

$(x+1)P(x)=x^3+2x^2-7x-8$

$\therefore P(x)=(x^3+2x^2-7x-8)\div(x+1)$

$$\begin{array}{r|l} & x^2+x-8 \\ \hline x+1 & x^3+2x^2-7x-8 \\ & x^3+x^2 \\ \hline & \quad x^2-7x \\ & \quad x^2+x \\ \hline & \qquad -8x-8 \\ & \qquad -8x-8 \\ \hline & \qquad\qquad 0 \end{array}$$

$\therefore P(x)=x^2+x-8$

따라서 $\overline{PD}$의 길이는 x^2+x-8이다. ··· ❸

답 x^2+x-8

채점 기준	비율
❶ $\overline{CD}$의 길이를 구할 수 있다.	30%
❷ 색칠한 부분의 넓이를 이용하여 식을 세울 수 있다.	30%
❸ $\overline{PD}$의 길이를 구할 수 있다.	40%

0106 전략 다항식 $x^3+3x^2-14x+6$을 x^2-2x로 나누었을 때의 몫과 나머지를 이용하여 a를 X, Y에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 (1)

$$\begin{array}{r|l} & x+5 \\ \hline x^2-2x & x^3+3x^2-14x+6 \\ & x^3-2x^2 \\ \hline & \quad 5x^2-14x \\ & \quad 5x^2-10x \\ \hline & \qquad -4x+6 \end{array}$$

따라서 몫은 $x+5$, 나머지는 $-4x+6$이다. ··· ❶

(2) (1)에서

$x^3+3x^2-14x+6=(x^2-2x)(x+5)-4x+6$

이므로 양변에 $x=a$를 대입하면

$a^3+3a^2-14a+6=(a^2-2a)(a+5)-4a+6$

$\therefore X=Y(a+5)-4a+6$

이 식을 a에 대하여 정리하면

$(Y-4)a=X-5Y-6$

이때 $Y\neq4$이면 $a=\dfrac{X-5Y-6}{Y-4}$은 유리수이므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

따라서 $Y=4$이고 $X-5Y-6=0$이어야 하므로 $X=26$이다.

$\therefore X=26,\ Y=4$ ··· ❷

(3) $Y=4$이므로 $\quad a^2-2a=4$

$a^2-2a-4=0$

$\therefore a=1+\sqrt{5}\ (\because a>0)$ ··· ❸

답 (1) 몫: $x+5$, 나머지: $-4x+6$
(2) $X=26$, $Y=4$ (3) $1+\sqrt{5}$

채점 기준	비율
❶ 몫과 나머지를 구할 수 있다.	30%
❷ X, Y의 값을 구할 수 있다.	50%
❸ a의 값을 구할 수 있다.	20%

02 나머지정리와 인수분해

0107 답 ㄷ, ㄹ

0108 주어진 등식이 x에 대한 항등식이므로
$a-1=0,\ b+1=0,\ 2+c=0$
$\therefore\ a=1,\ b=-1,\ c=-2$ 답 $a=1,\ b=-1,\ c=-2$

0109 주어진 등식이 x에 대한 항등식이므로
$a+b=1,\ b+2=0,\ c-5=1$
$\therefore\ a=3,\ b=-2,\ c=6$ 답 $a=3,\ b=-2,\ c=6$

0110 주어진 등식의 양변에 $x=0,\ x=1,\ x=2$를 각각 대입하면
$-c=-3,\ b=-2,\ 2a+2b+c=1$
$\therefore\ a=1,\ b=-2,\ c=3$ 답 $a=1,\ b=-2,\ c=3$

다른 풀이 $ax(x-1)+bx+c(x-1)=ax^2+(-a+b+c)x-c$이므로 $ax^2+(-a+b+c)x-c=x^2-3$
이 식이 x에 대한 항등식이므로
$a=1,\ -a+b+c=0,\ -c=-3$
$\therefore\ a=1,\ b=-2,\ c=3$

0111 주어진 등식이 $x,\ y$에 대한 항등식이므로
$a-2=-1,\ b+4=1,\ c+1=7$
$\therefore\ a=1,\ b=-3,\ c=6$ 답 $a=1,\ b=-3,\ c=6$

0112 $a(x+y)-b(x-y)+1=(a-b)x+(a+b)y+1$이므로
$(a-b)x+(a+b)y+1=3x-5y+c$
이 식이 $x,\ y$에 대한 항등식이므로
$a-b=3,\ a+b=-5,\ c=1$
$\therefore\ a=-1,\ b=-4,\ c=1$ 답 $a=-1,\ b=-4,\ c=1$

0113 $P(1)=1-2+3+4=6$ 답 6

0114 $P(-2)=-8-8-6+4=-18$ 답 -18

0115 $P\left(-\frac{1}{2}\right)=1+1-1=1$ 답 1

0116 $P\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}-1=-\frac{5}{4}$ 답 $-\frac{5}{4}$

0117 $P(-3)=11$이므로 $-27+54+3k-1=11$
$3k=-15$ $\therefore\ k=-5$ 답 -5

0118 $P(-1)=0$이므로
$-3+k+6-4=0$ $\therefore\ k=1$ 답 1

0119 $P(2)=0$이므로 $24+4k-12-4=0$
$4k=-8$ $\therefore\ k=-2$ 답 -2

0120 $P(1)=0,\ P(-2)=0$이므로
$2+a+b-6=0,\ -16+4a-2b-6=0$
$a+b=4,\ 2a-b=11$
두 식을 연립하여 풀면 $a=5,\ b=-1$ 답 $a=5,\ b=-1$

0121
$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & -2 & -5 & 3 \\ & & -2 & 8 & -6 \\ \hline & 1 & -4 & 3 & -3 \end{array}$$
$\therefore$ 몫: x^2-4x+3, 나머지: -3
답 몫: x^2-4x+3, 나머지: -3

0122
$$\begin{array}{r|rrrr} 3 & 3 & -8 & 0 & -5 \\ & & 9 & 3 & 9 \\ \hline & 3 & 1 & 3 & 4 \end{array}$$
$\therefore$ 몫: $3x^2+x+3$, 나머지: 4
답 몫: $3x^2+x+3$, 나머지: 4

0123
$$\begin{array}{r|rrrr} \frac{1}{2} & 2 & 3 & -6 & 1 \\ & & 1 & 2 & -2 \\ \hline & 2 & 4 & -4 & -1 \end{array}$$
$\therefore$ 몫: $2x^2+4x-4$, 나머지: -1
답 몫: $2x^2+4x-4$, 나머지: -1

0124 답 $2b(ab+3)$

0125 $a(x-y)-b(y-x)=a(x-y)+b(x-y)$
$=(a+b)(x-y)$ 답 $(a+b)(x-y)$

0126 $1-m-n+mn=1-m-n(1-m)$
$=(1-m)(1-n)$ 답 $(1-m)(1-n)$

0127 $9x^2+6x+1=(3x)^2+2\cdot3x\cdot1+1^2$
$=(3x+1)^2$ 답 $(3x+1)^2$

0128 $16a^2-24ab+9b^2=(4a)^2-2\cdot4a\cdot3b+(3b)^2$
$=(4a-3b)^2$ 답 $(4a-3b)^2$

0129 $25x^2-y^2=(5x)^2-y^2$
$=(5x+y)(5x-y)$ 답 $(5x+y)(5x-y)$

0130 $27a^2-12b^2=3(9a^2-4b^2)=3\{(3a)^2-(2b)^2\}$
$=3(3a+2b)(3a-2b)$
답 $3(3a+2b)(3a-2b)$

0131 답 $(x+3)(x+7)$

0132 답 $(3a+1)(2a-5)$

0133 답 $(3a+7b)(a-b)$

0134 $a^2+b^2+4c^2+2ab+4bc+4ca$
$=a^2+b^2+(2c)^2+2ab+2\cdot b\cdot 2c+2\cdot 2c\cdot a$
$=(a+b+2c)^2$ 답 $(a+b+2c)^2$

0135 $x^2+y^2+z^2-2xy-2yz+2zx$

$=x^2+(-y)^2+z^2+2x\cdot(-y)+2\cdot(-y)\cdot z+2zx$

$=(x-y+z)^2$ 답 $(x-y+z)^2$

0136 $x^3+9x^2+27x+27=x^3+3\cdot x^2\cdot 3+3\cdot x\cdot 3^2+3^3$

$=(x+3)^3$ 답 $(x+3)^3$

0137 $-8a^3+36a^2b-54ab^2+27b^3$

$=(-2a)^3+3\cdot(-2a)^2\cdot 3b+3\cdot(-2a)\cdot(3b)^2+(3b)^3$

$=(-2a+3b)^3$ 답 $(-2a+3b)^3$

0138 $a^3+8=a^3+2^3=(a+2)(a^2-2a+4)$

답 $(a+2)(a^2-2a+4)$

0139 $27a^3-64b^3=(3a)^3-(4b)^3$

$=(3a-4b)(9a^2+12ab+16b^2)$

답 $(3a-4b)(9a^2+12ab+16b^2)$

0140 $x^4+4x^2y^2+16y^4$

$=x^4+x^2\cdot(2y)^2+(2y)^4$

$=(x^2+2xy+4y^2)(x^2-2xy+4y^2)$

답 $(x^2+2xy+4y^2)(x^2-2xy+4y^2)$

0141 $a^3+b^3+27c^3-9abc$

$=a^3+b^3+(3c)^3-3\cdot a\cdot b\cdot 3c$

$=(a+b+3c)(a^2+b^2+9c^2-ab-3bc-3ca)$

답 $(a+b+3c)(a^2+b^2+9c^2-ab-3bc-3ca)$

0142 $x+1=t$로 놓으면

$(x+1)^2-(x+1)-12=t^2-t-12$

$=(t+3)(t-4)$

$=(x+1+3)(x+1-4)$

$=(x+4)(x-3)$ 답 $(x+4)(x-3)$

0143 $x^2-3x=t$로 놓으면

$(x^2-3x)(x^2-3x+5)+6=t(t+5)+6$

$=t^2+5t+6$

$=(t+2)(t+3)$

$=(x^2-3x+2)(x^2-3x+3)$

$=(x-1)(x-2)(x^2-3x+3)$

답 $(x-1)(x-2)(x^2-3x+3)$

0144 $x^2=X$로 놓으면

$x^4-10x^2+9=X^2-10X+9$

$=(X-1)(X-9)$

$=(x^2-1)(x^2-9)$

$=(x+1)(x-1)(x+3)(x-3)$

답 $(x+1)(x-1)(x+3)(x-3)$

0145 $x^4+2x^2+9=(x^4+6x^2+9)-4x^2=(x^2+3)^2-(2x)^2$

$=(x^2+2x+3)(x^2-2x+3)$

답 $(x^2+2x+3)(x^2-2x+3)$

0146 주어진 식을 y에 대하여 내림차순으로 정리하면

$x^2+4xy+2x-4y-3$

$=4(x-1)y+x^2+2x-3$

$=4(x-1)y+(x-1)(x+3)$

$=(x-1)(x+4y+3)$ 답 $(x-1)(x+4y+3)$

0147 주어진 식을 x에 대하여 내림차순으로 정리하면

$x^2-xy-2y^2+x+4y-2$

$=x^2-(y-1)x-2(y^2-2y+1)$

$=x^2-(y-1)x-2(y-1)^2$

$=\{x-2(y-1)\}\{x+(y-1)\}$

$=(x-2y+2)(x+y-1)$ 답 $(x-2y+2)(x+y-1)$

0148 $P(x)=x^3-4x^2+x+6$이라 하면

$P(-1)=-1-4-1+6=0$

이므로 오른쪽과 같이 조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

-1	1	-4	1	6
		-1	5	-6
	1	-5	6	0

$P(x)=(x+1)(x^2-5x+6)$

$=(x+1)(x-2)(x-3)$

답 $(x+1)(x-2)(x-3)$

0149 $P(x)=x^4+5x^3+5x^2-5x-6$이라 하면

$P(-1)=1-5+5+5-6=0$,

$P(1)=1+5+5-5-6=0$

이므로 조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

-1	1	5	5	-5	-6
		-1	-4	-1	6
1	1	4	1	-6	0
		1	5	6	
	1	5	6	0	

$\therefore P(x)=(x+1)(x-1)(x^2+5x+6)$

$=(x+1)(x-1)(x+2)(x+3)$

답 $(x+1)(x-1)(x+2)(x+3)$

유형 01 항등식에서 미정계수 구하기; 계수 비교법

본책 26쪽

계수 비교법은 다음과 같은 경우에 이용한다.

① 양변을 내림차순으로 정리하기 쉬운 경우

② 식이 간단하여 전개하기 쉬운 경우

0150 $x^3+ax^2-36=(x+c)(x^2+bx-12)$에서

$x^3+ax^2-36=x^3+(b+c)x^2+(bc-12)x-12c$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$a=b+c$, $0=bc-12$, $-36=-12c$

$\therefore a=7$, $b=4$, $c=3$ $\therefore a+b+c=14$ 답 ③

0151 $a(x-2y)+b(x+y)-1=5x-y+c$에서

$(a+b)x+(-2a+b)y-1=5x-y+c$

이 등식이 x, y에 대한 항등식이므로

$a+b=5$, $-2a+b=-1$, $-1=c$

$\therefore a=2$, $b=3$, $c=-1$

$\therefore abc=-6$

답 -6

0152 $kx^2+x+ky^2+y-13k+1=0$을 k에 대하여 정리하면

$(x^2+y^2-13)k+x+y+1=0$

이 등식이 k에 대한 항등식이므로

$x^2+y^2-13=0$, $x+y+1=0$

$\therefore x^2+y^2=13$, $x+y=-1$

$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$이므로

$13=1-2xy$, $2xy=-12$ $\therefore xy=-6$

답 ①

0153 $\dfrac{ax+by+1}{x+2y-3}=k$ (k는 상수)로 놓으면

$ax+by+1=k(x+2y-3)$

$\therefore (a-k)x+(b-2k)y+1+3k=0$ ⋯ ❶

이 등식이 x, y에 대한 항등식이므로

$a-k=0$, $b-2k=0$, $1+3k=0$

$\therefore k=-\dfrac{1}{3}$, $a=-\dfrac{1}{3}$, $b=-\dfrac{2}{3}$ ⋯ ❷

$\therefore a+b=-1$ ⋯ ❸

답 -1

채점 기준	비율
❶ 주어진 식을 k로 놓고 x, y에 대하여 정리할 수 있다.	40%
❷ k, a, b의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	20%

유형 02 항등식에서 미정계수 구하기; 수치 대입법

본책 26쪽

수치 대입법은 다음과 같은 경우에 이용한다.

① 적당한 값을 대입하면 식이 간단해지는 경우

② 식이 길고 복잡하여 전개하기 어려운 경우

0154 주어진 등식의 양변에 $x=0$을 대입하면

$4=2b$ $\therefore b=2$

주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$-1=-c$ $\therefore c=1$

주어진 등식의 양변에 $x=2$를 대입하면

$-2=2a$ $\therefore a=-1$

$\therefore a-b+c=-2$

답 ①

0155 주어진 등식의 양변에 $x=4$를 대입하면 $b=9$

주어진 등식의 양변에 $x=3$을 대입하면

$-a=8$ $\therefore a=-8$

$\therefore a-b=-17$

답 -17

다른 풀이 $a(x-4)+b(x-3)=x+5$에서

$(a+b)x-4a-3b=x+5$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로 $a+b=1$, $-4a-3b=5$

두 식을 연립하여 풀면 $a=-8$, $b=9$

0156 주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$0=1-4+a+b+1$ $\therefore a+b=2$

주어진 등식의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$16=1+4+a-b+1$ $\therefore a-b=10$

$\therefore a^2-b^2=(a+b)(a-b)=2\cdot 10=20$

답 20

0157 주어진 등식의 양변에 $x=-2$를 대입하면

$0=16-4a+b$ $\therefore 4a-b=16$ ⋯⋯ ㉠

주어진 등식의 양변에 $x=\sqrt{2}$를 대입하면

$0=4-2a+b$ $\therefore 2a-b=4$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=6$, $b=8$

$\therefore (x+2)(x^2-2)P(x)=x^4-6x^2+8$

양변에 $x=3$을 대입하면 $5\cdot 7\cdot P(3)=81-54+8$

$35P(3)=35$ $\therefore P(3)=1$

답 1

유형 03 조건을 만족시키는 항등식

본책 27쪽

(i) 주어진 조건을 이용한다.

예 방정식의 근이 $x=a$이다.

➡ 방정식에 $x=a$를 대입하면 등식이 성립한다.

(ii) 어떤 문자에 대한 항등식인지를 찾아 미정계수법을 이용한다.

0158 이차방정식 $x^2+(k-2)x+(k+3)m+n+1=0$의 근이 1이므로 $1+(k-2)+(k+3)m+n+1=0$

$\therefore (1+m)k+(3m+n)=0$

이 등식이 k에 대한 항등식이므로

$1+m=0$, $3m+n=0$ $\therefore m=-1$, $n=3$

$\therefore mn=-3$

답 -3

0159 $x-y=1$에서 $y=x-1$

이것을 주어진 등식의 좌변에 대입하면

$px^2+qx+(x-1)^2-2x(x-1)+r(x-1)+2=0$

$\therefore (p-1)x^2+(q+r)x+3-r=0$ ⋯ ❶

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$p-1=0$, $q+r=0$, $3-r=0$

$\therefore p=1$, $q=-3$, $r=3$ ⋯ ❷

$\therefore pqr=-9$ ⋯ ❸

답 -9

채점 기준	비율
❶ 주어진 등식의 좌변을 x에 대하여 정리할 수 있다.	40%
❷ p, q, r의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ pqr의 값을 구할 수 있다.	20%

유형 04 항등식에서 계수의 합 구하기 본책 27쪽

주어진 등식의 양변에 적당한 수를 대입하여 계수에 대한 식으로 나타낸다.
➡ 등식 $(x+a)^n=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\cdots+a_0$에서
① 양변에 $x=0$을 대입하면 $a^n=a_0$
② 양변에 $x=1$을 대입하면 $(1+a)^n=a_n+a_{n-1}+a_{n-2}+\cdots+a_0$

0160 주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면
$4^3=a_6+a_5+\cdots+a_1+a_0$ ······ ㉠
주어진 등식의 양변에 $x=-1$을 대입하면
$8^3=a_6-a_5+\cdots-a_1+a_0$ ······ ㉡
㉠+㉡을 하면
$64+512=2(a_6+a_4+a_2+a_0)$
$\therefore a_0+a_2+a_4+a_6=288$ 답 ⑤

0161 주어진 등식의 양변에 $x=0$을 대입하면 $3^5=a_0$
주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면
$4^5=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{10}$
$\therefore a_1+a_2+\cdots+a_{10}=4^5-a_0=1024-243=781$ 답 781

0162 주어진 등식의 양변에 $x=-1$을 대입하면
$(-1)^{10}+1=a_{10}+a_9+\cdots+a_1+a_0$ ······ ㉠
주어진 등식의 양변에 $x=-3$을 대입하면
$(-3)^{10}+1=a_{10}-a_9+\cdots-a_1+a_0$ ······ ㉡
㉠+㉡을 하면
$3^{10}+3=2(a_{10}+a_8+a_6+a_4+a_2+a_0)$
$\therefore a_{10}+a_8+a_6+a_4+a_2+a_0=\dfrac{3^{10}+3}{2}=\dfrac{3(3^9+1)}{2}$ 답 ⑤

유형 05 다항식의 나눗셈과 항등식 본책 27쪽

다항식 $A(x)$를 다항식 $B(x)$ $(B(x)\neq0)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)$라 하면
$A(x)=B(x)Q(x)+R(x)$
가 성립하고, 이 식은 x에 대한 항등식이다.

0163 x^3+ax^2+b를 x^2-x+2로 나누었을 때의 몫을 $x+c$ (c는 상수)라 하면
$x^3+ax^2+b=(x^2-x+2)(x+c)$
$=x^3+(c-1)x^2+(-c+2)x+2c$
이 등식이 x에 대한 항등식이므로
$a=c-1,\ 0=-c+2,\ b=2c$
$\therefore a=1,\ b=4,\ c=2$
$\therefore ab=4$ 답 4

참고 x^3+ax^2+b의 최고차항의 계수가 1, x^2-x+2의 최고차항의 계수가 1이므로 몫은 $x+c$(c는 상수) 꼴이다.

0164 x^3+ax+b를 x^2+3x-2로 나누었을 때의 몫을 $x+c$ (c는 상수)라 하면
$x^3+ax+b=(x^2+3x-2)(x+c)+2$
$=x^3+(c+3)x^2+(3c-2)x-2c+2$
이 등식이 x에 대한 항등식이므로
$0=c+3,\ a=3c-2,\ b=-2c+2$
$\therefore a=-11,\ b=8,\ c=-3$
$\therefore a+b=-3$ 답 -3

0165 $x^4+ax^3+bx-11$을 x^2-2x+4로 나누었을 때의 몫을 x^2+cx+d (c, d는 상수)라 하면
$x^4+ax^3+bx-11=(x^2-2x+4)(x^2+cx+d)+x-3$
$=x^4+(c-2)x^3+(d-2c+4)x^2$
$+(-2d+4c+1)x+4d-3$
이 등식이 x에 대한 항등식이므로
$a=c-2,\ 0=d-2c+4,\ b=-2d+4c+1,\ -11=4d-3$
$\therefore a=-1,\ b=9,\ c=1,\ d=-2$
$\therefore a-b=-10$ 답 ②

유형 06~07 나머지정리; 일차식으로 나눌 때 본책 28쪽

다항식 $P(x)$를 일차식 $x-\alpha$로 나누었을 때의 나머지 ➡ $P(\alpha)$

0166 나머지정리에 의하여 $P(2)=3,\ Q(2)=-1$
따라서 구하는 나머지는
$3P(2)-4Q(2)=3\cdot3-4\cdot(-1)=13$ 답 13

0167 나머지정리에 의하여 $P(3)=7$
따라서 구하는 나머지는 $4P(3)=4\cdot7=28$ 답 ④

0168 나머지정리에 의하여
$P(1)+Q(1)=-4,\ P(1)-Q(1)=6$
두 식을 연립하여 풀면 $P(1)=1,\ Q(1)=-5$
따라서 구하는 나머지는 $P(1)Q(1)=1\cdot(-5)=-5$ 답 -5

0169 $P(x)=x^4+ax^3+bx^2-3$이라 하면 나머지정리에 의하여
$P(1)=4,\ P(-1)=-4$
$1+a+b-3=4,\ 1-a+b-3=-4$
$\therefore a+b=6,\ -a+b=-2$
두 식을 연립하여 풀면 $a=4,\ b=2$
$\therefore ab=8$ 답 ④

0170 $P(x)=x^3+ax^2-3x+2$라 하면 나머지정리에 의하여
$P(-1)=P(3)$
$-1+a+3+2=27+9a-9+2$
$-8a=16$ $\therefore a=-2$ 답 ②

0171 $P(x)=ax^7+bx^5+cx^3+dx+2$라 하면 나머지정리에 의하여 $P(1)=7$

$a+b+c+d+2=7$

$\therefore a+b+c+d=5$ ⋯ ❶

따라서 $P(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지는

$P(-1)=-a-b-c-d+2$
$=-(a+b+c+d)+2$
$=-5+2=-3$ ⋯ ❷

답 -3

채점 기준	비율
❶ $a+b+c+d$의 값을 구할 수 있다.	50%
❷ 주어진 다항식을 $x+1$로 나누었을 때의 나머지를 구할 수 있다.	50%

0172 $P(x)=2x^2+kx-5$라 하면 나머지정리에 의하여

$R_1=P(3)=3k+13$, $R_2=P(-3)=-3k+13$

$R_1R_2=25$이므로 $(3k+13)(-3k+13)=25$

$169-9k^2=25$, $k^2=16$

$\therefore k=4$ ($\because k>0$)

답 4

유형 08 나머지정리; 이차식으로 나눌 때의 나머지 (본책 29쪽)

다항식 $P(x)$를 이차식 $(x-\alpha)(x-\beta)$로 나누었을 때의 나머지는 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)로 놓고 $P(\alpha)$, $P(\beta)$의 값을 이용하여 a, b의 값을 구한다.

0173 나머지정리에 의하여 $P(1)=-1$, $P(-2)=-7$

다항식 $P(x)$를 x^2+x-2로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)=ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$P(x)=(x^2+x-2)Q(x)+ax+b$
$=(x+2)(x-1)Q(x)+ax+b$

양변에 $x=1$, $x=-2$를 각각 대입하면

$P(1)=a+b$, $P(-2)=-2a+b$

$\therefore a+b=-1$, $-2a+b=-7$

두 식을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=-3$

따라서 $R(x)=2x-3$이므로 $R(2)=1$

답 ①

0174 나머지정리에 의하여 $P(1)=2$, $P(-1)=4$

다항식 $(x^2+x+1)P(x)$를 x^2-1로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$(x^2+x+1)P(x)=(x^2-1)Q(x)+ax+b$
$=(x+1)(x-1)Q(x)+ax+b$

양변에 $x=1$, $x=-1$을 각각 대입하면

$3P(1)=a+b$, $P(-1)=-a+b$

$\therefore a+b=6$, $-a+b=4$

두 식을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=5$

따라서 구하는 나머지는 $x+5$이다.

답 $x+5$

0175 $P(x)$를 x^2-4로 나누었을 때의 몫을 $Q_1(x)$라 하면

$P(x)=(x^2-4)Q_1(x)+x+1$
$=(x+2)(x-2)Q_1(x)+x+1$ ⋯⋯ ㉠

$P(x)$를 x^2+2x-3으로 나누었을 때의 몫을 $Q_2(x)$라 하면

$P(x)=(x^2+2x-3)Q_2(x)-x+2$
$=(x+3)(x-1)Q_2(x)-x+2$ ⋯⋯ ㉡

$P(x)$를 x^2-3x+2로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$P(x)=(x^2-3x+2)Q(x)+ax+b$
$=(x-1)(x-2)Q(x)+ax+b$ ⋯⋯ ㉢

㉠의 양변에 $x=2$를 대입하면 $P(2)=3$

㉡의 양변에 $x=1$을 대입하면 $P(1)=1$

㉢의 양변에 $x=1$, $x=2$를 각각 대입하면

$P(1)=a+b$, $P(2)=2a+b$

$\therefore a+b=1$, $2a+b=3$

두 식을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=-1$

따라서 구하는 나머지는 $2x-1$이다.

답 ③

0176 $P(x)$를 x^2-4x+3으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)=ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$P(x)=(x^2-4x+3)Q(x)+ax+b$
$=(x-1)(x-3)Q(x)+ax+b$ ⋯⋯ ㉠ ⋯ ❶

조건 (나)의 양변에 $x=1$을 대입하면

$P(1)+P(1)=6$, $2P(1)=6$

$\therefore P(1)=3$ ⋯ ❷

조건 (나)의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$P(-1)+P(3)=6$, $-7+P(3)=6$ ($\because$ 조건 (가))

$\therefore P(3)=13$ ⋯ ❸

㉠의 양변에 $x=1$, $x=3$을 각각 대입하면

$P(1)=a+b$, $P(3)=3a+b$

$\therefore a+b=3$, $3a+b=13$

두 식을 연립하여 풀면 $a=5$, $b=-2$

따라서 $R(x)=5x-2$이므로 $R(5)=23$ ⋯ ❹

답 23

채점 기준	비율
❶ 나눗셈에 대한 등식을 세울 수 있다.	30%
❷ $P(1)$의 값을 구할 수 있다.	20%
❸ $P(3)$의 값을 구할 수 있다.	20%
❹ $R(5)$의 값을 구할 수 있다.	30%

유형 09 나머지정리; 삼차식으로 나눌 때의 나머지 (본책 29쪽)

다항식 $P(x)$를 삼차식 $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$로 나누었을 때의 나머지는 나머지를 ax^2+bx+c (a, b, c는 상수)로 놓고 $P(\alpha)$, $P(\beta)$, $P(\gamma)$의 값을 이용하여 a, b, c의 값을 구한다.

0177 $x^{15}-x^{10}+x^5-1$을 x^3-x로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)라 하면

$x^{15}-x^{10}+x^5-1$
$=(x^3-x)Q(x)+ax^2+bx+c$
$=x(x+1)(x-1)Q(x)+ax^2+bx+c$ ⋯⋯ ㉠

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면 $\quad -1=c$

㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$-4=a-b+c \quad \therefore a-b=-3$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$0=a+b+c \quad \therefore a+b=1$ $\cdots\cdots$ ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $\quad a=-1,\ b=2$

따라서 $R(x)=-x^2+2x-1$이므로

$R(-2)=-9$ 답 -9

SSEN 특강

다항식의 나눗셈에서의 나머지

다항식 $P(x)$를 $A(x)$로 나누었을 때의 나머지 $R(x)$는

① $A(x)$가 일차식 ➡ $R(x)$는 상수
➡ $R(x)=a$(단, a는 상수)

② $A(x)$가 이차식 ➡ $R(x)$는 상수이거나 일차식
➡ $R(x)=ax+b$(단, a, b는 상수)

③ $A(x)$가 삼차식 ➡ $R(x)$는 상수이거나 이차 이하의 다항식
➡ $R(x)=ax^2+bx+c$(단, a, b, c는 상수)

0178 $P(x)$를 $x(x-1)$로 나누었을 때의 몫을 $Q_1(x)$라 하면

$P(x)=x(x-1)Q_1(x)+2x-1$

양변에 $x=0$, $x=1$을 각각 대입하면

$P(0)=-1,\ P(1)=1$

$P(x)$를 $(x-1)(x-2)$로 나누었을 때의 몫을 $Q_2(x)$라 하면

$P(x)=(x-1)(x-2)Q_2(x)+4x-3$

양변에 $x=2$를 대입하면

$P(2)=5$

$P(x)$를 $x(x-1)(x-2)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 ax^2+bx+c (a, b, c는 상수)라 하면

$P(x)=x(x-1)(x-2)Q(x)+ax^2+bx+c$

양변에 $x=0$, $x=1$, $x=2$를 각각 대입하면

$P(0)=c,\ P(1)=a+b+c,\ P(2)=4a+2b+c$

$\therefore -1=c,\ 1=a+b+c,\ 5=4a+2b+c$

$\therefore a=1,\ b=1,\ c=-1$

따라서 구하는 나머지는 x^2+x-1이다. 답 x^2+x-1

0179 $P(x)$를 $(x-1)^2(x-2)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 ax^2+bx+c (a, b, c는 상수)라 하면

$P(x)=(x-1)^2(x-2)Q(x)+ax^2+bx+c$ $\cdots\cdots$ ㉠

$P(x)$를 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 나머지가 $x+2$이므로 ㉠에서 ax^2+bx+c를 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 나머지가 $x+2$이다.

$\therefore ax^2+bx+c=a(x-1)^2+x+2$

이것을 ㉠에 대입하면

$P(x)=(x-1)^2(x-2)Q(x)+a(x-1)^2+x+2$

한편 $P(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지가 3이므로

$P(2)=a+4=3 \quad \therefore a=-1$

따라서 구하는 나머지는

$-(x-1)^2+x+2=-x^2+3x+1$ 답 ③

유형 10 나머지정리; $P(ax+b)$를 $x-\alpha$로 나눌 때 본책 30쪽

다항식 $P(ax+b)$를 $x-\alpha$로 나누었을 때의 나머지 ➡ $P(a\alpha+b)$

0180 $P(x)$를 $2x^2+x-3$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$P(x)=(2x^2+x-3)Q(x)+x+6$

$=(2x+3)(x-1)Q(x)+x+6$

양변에 $x=1$을 대입하면 $\quad P(1)=7$

따라서 $P(x+4)$를 $x+3$으로 나누었을 때의 나머지는

$P(-3+4)=P(1)=7$ 답 ②

다른 풀이 $P(x)$를 $2x^2+x-3$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$P(x)=(2x^2+x-3)Q(x)+x+6$

$=(2x+3)(x-1)Q(x)+x+6$

양변에 x 대신 $x+4$를 대입하면

$P(x+4)=(2x+11)(x+3)Q(x+4)+x+10$

이때 $(2x+11)(x+3)Q(x+4)$는 $x+3$으로 나누어떨어지므로 $P(x+4)$를 $x+3$으로 나누었을 때의 나머지는 $x+10$을 $x+3$으로 나누었을 때의 나머지와 같다.

따라서 구하는 나머지는 $\quad -3+10=7$

0181 $P(x)$를 $(2x+1)(x+2)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면 $\quad P(x)=(2x+1)(x+2)Q(x)+4x-3$

양변에 $x=-2$를 대입하면 $\quad P(-2)=-11$

따라서 $P(3x+1)$을 $x+1$로 나누었을 때의 나머지는

$P(3\cdot(-1)+1)=P(-2)=-11$ 답 -11

0182 $P(x+1004)$를 $x+1005$로 나누었을 때의 나머지가 4이므로

$P(-1005+1004)=P(-1)=4$

$P(x+1005)$를 $x+1004$로 나누었을 때의 나머지가 2이므로

$P(-1004+1005)=P(1)=2$

따라서 $P(x)=x^3+ax+b$에서

$P(-1)=-1-a+b=4,\ P(1)=1+a+b=2$

$\therefore -a+b=5,\ a+b=1$

두 식을 연립하여 풀면 $\quad a=-2,\ b=3$

$\therefore ab=-6$ 답 -6

유형 11 나머지정리; 몫 $Q(x)$를 $x-\alpha$로 나눌 때 본책 30쪽

다항식 $P(x)$를 $x-p$로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 R이면

$P(x)=(x-p)Q(x)+R$

이때 $Q(x)$를 $x-\alpha$ ($\alpha\neq p$)로 나누었을 때의 나머지는 $\quad Q(\alpha)$

0183 $P(x)=x^{30}+x^{29}+x$라 하고 $P(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지를 R라 하면

$P(x)=(x-1)Q(x)+R$

양변에 $x=1$을 대입하면 $\quad P(1)=R \quad \therefore R=3$

$\therefore P(x)=(x-1)Q(x)+3$ $\cdots\cdots$ ㉠

$Q(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지는 $Q(-1)$이므로 ㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$P(-1)=-2Q(-1)+3$

$-1=-2Q(-1)+3$

$2Q(-1)=4 \qquad \therefore Q(-1)=2$

답 ①

0184 $P(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 2이므로 $\quad P(x)=(x+1)Q(x)+2 \quad \cdots\cdots$ ㉠

$Q(x)$를 $x-3$으로 나누었을 때의 나머지가 1이므로

$Q(3)=1$ ⋯ ❶

$P(x)$를 $x-3$으로 나누었을 때의 나머지는 $P(3)$이므로 ㉠의 양변에 $x=3$을 대입하면

$P(3)=4Q(3)+2=4\cdot1+2=6$ ⋯ ❷

답 6

채점 기준	비율
❶ $Q(3)$의 값을 구할 수 있다.	50%
❷ $P(x)$를 $x-3$으로 나누었을 때의 나머지를 구할 수 있다.	50%

0185 $P(x)$를 x^2+x+1로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 $x-12$이므로

$P(x)=(x^2+x+1)Q(x)+x-12 \quad \cdots\cdots$ ㉠

$Q(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 몫을 $Q'(x)$라 하면 나머지가 1이므로 $\quad Q(x)=(x-1)Q'(x)+1 \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$P(x)=(x^2+x+1)\{(x-1)Q'(x)+1\}+x-12$

$\quad=(x^3-1)Q'(x)+x^2+2x-11$

따라서 $R(x)=x^2+2x-11$이므로

$R(1)=-8$

답 -8

유형 12 나머지정리의 활용; 수의 나눗셈 본책 30쪽

예 15^5을 16으로 나누었을 때의 나머지

➡ $x=16$이라 하면 $15=x-1$이므로 $(x-1)^5$을 x로 나누었을 때의 나머지를 이용한다.

0186 $99^{100}=(98+1)^{100}$

$(x+1)^{100}$을 x로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R라 하면

$(x+1)^{100}=xQ(x)+R \quad \cdots\cdots$ ㉠

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면 $\quad R=1$

㉠의 양변에 $x=98$을 대입하면 $\quad 99^{100}=98Q(98)+1$

따라서 99^{100}을 98로 나누었을 때의 나머지는 1이다.

답 1

0187 (1) $(x-1)^9$을 x로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R라 하면

$(x-1)^9=xQ(x)+R \quad \cdots\cdots$ ㉠

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면 $\quad R=-1$

따라서 구하는 나머지는 -1이다. ⋯ ❶

(2) ㉠의 양변에 $x=75$를 대입하면

$74^9=75Q(75)-1$

$\quad=75\{Q(75)-1\}+75-1$

$\quad=75\{Q(75)-1\}+74$

따라서 구하는 나머지는 74이다. ⋯ ❷

답 (1) -1 (2) 74

채점 기준	비율
❶ $(x-1)^9$을 x로 나누었을 때의 나머지를 구할 수 있다.	40%
❷ 74^9을 75로 나누었을 때의 나머지를 구할 수 있다.	60%

참고 다항식의 나눗셈에서는 나머지가 음수일 수 있지만 자연수의 나눗셈에서는 나머지가 0 또는 양수이어야 한다.

0188 $2^{1111}=(2^4)^{277}\cdot2^3=8\cdot16^{277}$

$8x^{277}$을 $x+1$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R라 하면

$8x^{277}=(x+1)Q(x)+R \quad \cdots\cdots$ ㉠

㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면 $\quad R=-8$

㉠의 양변에 $x=16$을 대입하면

$8\cdot16^{277}=17Q(16)-8$

$\quad=17\{Q(16)-1\}+17-8$

$\therefore 2^{1111}=17\{Q(16)-1\}+9$

따라서 2^{1111}을 17로 나누었을 때의 나머지는 9이다.

답 ⑤

유형 13~14 인수정리 ; 일차식 또는 이차식으로 나눌 때 본책 31쪽

다항식 $P(x)$가

① $x-\alpha$로 나누어떨어지면 ➡ $P(\alpha)=0$

② $(x-\alpha)(x-\beta)$로 나누어떨어지면 ➡ $P(\alpha)=0$, $P(\beta)=0$

0189 $P(x)=x^4+mx^3+nx+4$라 하면 $P(x)$가 $x+2$, $x-1$로 각각 나누어떨어지므로

$P(-2)=0$, $P(1)=0$

$16-8m-2n+4=0$, $1+m+n+4=0$

$\therefore 4m+n=10$, $m+n=-5$

두 식을 연립하여 풀면 $\quad m=5$, $n=-10$

$\therefore m-n=15$

답 ③

0190 $P(x)=x^3+ax^2-4$라 하면 $P(x)$가 $x-2$를 인수로 가지므로 $\quad P(2)=0$

$8+4a-4=0 \qquad \therefore a=-1$

답 ②

0191 $P(x)=2x^3+kx^2-k^2x+10$이라 하면 $P(x)$가 $x-1$로 나누어떨어지므로 $\quad P(1)=0$ ⋯ ❶

$2+k-k^2+10=0$, $\quad k^2-k-12=0$

$(k+3)(k-4)=0 \qquad \therefore k=-3$ 또는 $k=4$

따라서 모든 상수 k의 값의 합은 $\quad -3+4=1$ ⋯ ❷

답 1

채점 기준	비율
❶ 인수정리를 이용할 수 있다.	40%
❷ 모든 k의 값의 합을 구할 수 있다.	60%

0192 $P(x+2)$가 $x+1$로 나누어떨어지므로

$P(-1+2)=P(1)=0$

$P(x)=x^3-2x^2+ax-3$에서

$P(1)=1-2+a-3=a-4$

이므로 $a-4=0$ $\therefore a=4$ 답 ④

0193 $P(1)=1$, $P(2)=2$, $P(3)=3$에서

$P(1)-1=0$, $P(2)-2=0$, $P(3)-3=0$

이므로 $P(x)-x$는 $x-1$, $x-2$, $x-3$으로 나누어떨어진다.

이때 $P(x)$는 x^3의 계수가 1인 삼차식이므로

$P(x)-x=(x-1)(x-2)(x-3)$

$\therefore P(x)=(x-1)(x-2)(x-3)+x$

따라서 $P(x)$를 $x-4$로 나누었을 때의 나머지는

$P(4)=(4-1)(4-2)(4-3)+4=10$ 답 10

0194 $P(x)=x^3-3x^2+ax+b$라 하면 $P(x)$가 x^2+x-2, 즉 $(x-1)(x+2)$로 나누어떨어지므로

$P(1)=0$, $P(-2)=0$

$1-3+a+b=0$, $-8-12-2a+b=0$

$\therefore a+b=2$, $-2a+b=20$

두 식을 연립하여 풀면 $a=-6$, $b=8$

$\therefore a-b=-14$ 답 ①

0195 $P(x)=x^3+x^2+ax+b$라 하면 $P(x)$가 $(x-1)(x+3)$으로 나누어떨어지므로

$P(1)=0$, $P(-3)=0$ ··· ❶

$1+1+a+b=0$, $-27+9-3a+b=0$

$\therefore a+b=-2$, $-3a+b=18$

두 식을 연립하여 풀면 $a=-5$, $b=3$ ··· ❷

$\therefore P(x)=x^3+x^2-5x+3$

따라서 $P(x)$를 $x+2$로 나누었을 때의 나머지는

$P(-2)=-8+4+10+3=9$ ··· ❸

답 9

채점 기준	비율
❶ 인수정리를 이용할 수 있다.	40%
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	30%
❸ 주어진 다항식을 $x+2$로 나누었을 때의 나머지를 구할 수 있다.	30%

0196 $P(x)=ax^2+bx+c\ (a\neq0)$라 하면 $P(1-x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지가 -4이므로

$P(1-1)=P(0)=-4$ $\therefore c=-4$

$xP(x)+x^2$이 x^2-4, 즉 $(x+2)(x-2)$로 나누어떨어지므로

$-2P(-2)+4=0$, $2P(2)+4=0$

$P(-2)=2$, $P(2)=-2$

$4a-2b-4=2$, $4a+2b-4=-2$

$\therefore 2a-b=3$, $2a+b=1$

두 식을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=-1$

따라서 $P(x)=x^2-x-4$이므로 $P(1)=-4$ 답 ②

유형 15 조립제법

본책 32쪽

다항식을 일차식으로 나누었을 때의 몫과 나머지는 조립제법을 이용하여 쉽게 구할 수 있다.

0197 x^3+ax^2-x+b를 $x-2$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 조립제법을 이용하여 구하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 1 & a & -1 & b \\ & & 2 & 2a+4 & 4a+6 \\ \hline & 1 & a+2 & 2a+3 & \boxed{4a+b+6} \end{array}$$

따라서 $k=2$, $c=2$, $a+2=5$, $2a+4=d$, $4a+b+6=20$이므로

$k=2$, $c=2$, $a=3$, $d=10$, $b=2$ 답 ⑤

0198 (1) 주어진 조립제법에서 $2a=1$이므로

$a=\frac{1}{2}$

따라서 조립제법을 완성하면 오른쪽과 같다.

$$\begin{array}{c|cccc} \frac{1}{2} & 2 & -3 & 3 & 1 \\ & & 1 & -1 & 1 \\ \hline & 2 & -2 & 2 & \boxed{2} \end{array}$$

즉 $a=\frac{1}{2}$, $b=-2$, $c=-1$, $d=2$

이므로

$a+b+c+d=-\frac{1}{2}$

(2) $2x^3-3x^2+3x+1$을 $x-\frac{1}{2}$로 나누었을 때의 몫은 $2x^2-2x+2$, 나머지는 2이므로

$$\begin{aligned} 2x^3-3x^2+3x+1&=\left(x-\frac{1}{2}\right)(2x^2-2x+2)+2 \\ &=\left(x-\frac{1}{2}\right)\cdot2(x^2-x+1)+2 \\ &=(2x-1)(x^2-x+1)+2 \end{aligned}$$

따라서 주어진 다항식을 $2x-1$로 나누었을 때의 몫은 x^2-x+1이다.

답 (1) $-\frac{1}{2}$ (2) x^2-x+1

0199 주어진 조립제법에서

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c&=\left(x+\frac{2}{3}\right)(px+q)+r \\ &=\frac{1}{3}(3x+2)(px+q)+r \\ &=(3x+2)\left(\frac{1}{3}px+\frac{1}{3}q\right)+r \end{aligned}$$

따라서 ax^2+bx+c를 $3x+2$로 나누었을 때의 몫은 $\frac{1}{3}px+\frac{1}{3}q$, 나머지는 r이다. 답 ③

유형 16 조립제법을 이용하여 항등식의 미정계수 구하기 본책 32쪽

조립제법을 연속으로 이용하면 내림차순으로 정리한 식에서 미정계수를 쉽게 구할 수 있다.

0200

$$\begin{array}{r|rrrr}
-1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\
 & & -1 & 0 & -1 \\ \hline
-1 & 1 & 0 & 1 & \boxed{3} \\
 & & -1 & 1 & \\ \hline
-1 & 1 & -1 & \boxed{2} & \\
 & & -1 & & \\ \hline
 & 1 & \boxed{-2} & &
\end{array}$$

위의 조립제법에서

$x^3+x^2+x+4=(x+1)(x^2+1)+3$
$=(x+1)\{(x+1)(x-1)+2\}+3$
$=(x+1)[(x+1)\{(x+1)-2\}+2]+3$
$=(x+1)\{(x+1)^2-2(x+1)+2\}+3$
$=(x+1)^3-2(x+1)^2+2(x+1)+3$

$\therefore a=1,\ b=-2,\ c=2,\ d=3$

$\therefore abcd=-12$ 답 -12

다른 풀이 $a(x+1)^3+b(x+1)^2+c(x+1)+d$
$=a(x^3+3x^2+3x+1)+b(x^2+2x+1)+c(x+1)+d$
$=ax^3+(3a+b)x^2+(3a+2b+c)x+a+b+c+d$

이므로

$a=1,\ 3a+b=1,\ 3a+2b+c=1,\ a+b+c+d=4$

$\therefore a=1,\ b=-2,\ c=2,\ d=3$

0201 (1)

$$\begin{array}{r|rrrr}
2 & 1 & -4 & 7 & -2 \\
 & & 2 & -4 & 6 \\ \hline
2 & 1 & -2 & 3 & \boxed{4} \\
 & & 2 & 0 & \\ \hline
2 & 1 & 0 & \boxed{3} & \\
 & & 2 & & \\ \hline
 & 1 & \boxed{2} & &
\end{array}$$

위의 조립제법에서

$x^3-4x^2+7x-2=(x-2)(x^2-2x+3)+4$
$=(x-2)\{(x-2)x+3\}+4$
$=(x-2)[(x-2)\{(x-2)+2\}+3]+4$
$=(x-2)\{(x-2)^2+2(x-2)+3\}+4$
$=(x-2)^3+2(x-2)^2+3(x-2)+4$

$\therefore a=1,\ b=2,\ c=3,\ d=4$ ⋯ ❶

(2) (1)에서 $P(x)=(x-2)^3+2(x-2)^2+3(x-2)+4$이므로

$P(2.1)=0.1^3+2\times0.1^2+3\times0.1+4=4.321$ ⋯ ❷

답 (1) $a=1,\ b=2,\ c=3,\ d=4$ (2) 4.321

채점 기준	비율
❶ 조립제법을 이용하여 $a,\ b,\ c,\ d$의 값을 구할 수 있다.	60%
❷ $P(2.1)$의 값을 구할 수 있다.	40%

0202

$$\begin{array}{r|rrrr}
\frac{1}{2} & 8 & -8 & -4 & 6 \\
 & & 4 & -2 & -3 \\ \hline
\frac{1}{2} & 8 & -4 & -6 & \boxed{3} \\
 & & 4 & 0 & \\ \hline
\frac{1}{2} & 8 & 0 & \boxed{-6} & \\
 & & 4 & & \\ \hline
 & 8 & \boxed{4} & &
\end{array}$$

위의 조립제법에서

$8x^3-8x^2-4x+6$
$=\left(x-\frac{1}{2}\right)(8x^2-4x-6)+3$
$=\left(x-\frac{1}{2}\right)\left\{\left(x-\frac{1}{2}\right)\cdot8x-6\right\}+3$
$=\left(x-\frac{1}{2}\right)\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)\left\{8\left(x-\frac{1}{2}\right)+4\right\}-6\right]+3$
$=\left(x-\frac{1}{2}\right)\left\{8\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+4\left(x-\frac{1}{2}\right)-6\right\}+3$
$=8\left(x-\frac{1}{2}\right)^3+4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-6\left(x-\frac{1}{2}\right)+3$
$=(2x-1)^3+(2x-1)^2-3(2x-1)+3$

$\therefore a=1,\ b=1,\ c=-3,\ d=3$

$\therefore ab-cd=10$ 답 10

유형 17 인수분해 공식을 이용한 다항식의 인수분해 본책 33쪽

인수분해 공식을 바로 이용할 수 없는 경우에는 공식을 이용할 수 있도록 식을 적당히 변형한다.

0203 ③ $x^3-8=(x-2)(x^2+2x+4)$ 답 ③

0204 $(x^2-y^2+z^2)^2-4x^2z^2$
$=\{(x^2-y^2+z^2)+2xz\}\{(x^2-y^2+z^2)-2xz\}$
$=\{(x+z)^2-y^2\}\{(x-z)^2-y^2\}$
$=(x+y+z)(x-y+z)(x+y-z)(x-y-z)$

답 $(x+y+z)(x-y+z)(x+y-z)(x-y-z)$

0205 ① $a^2-(b-c)^2=(a+b-c)(a-b+c)$

② $x^3+27=(x+3)(x^2-3x+9)$

③ $x^6-y^6=(x^3+y^3)(x^3-y^3)$
$=(x+y)(x^2-xy+y^2)(x-y)(x^2+xy+y^2)$
$=(x+y)(x-y)(x^2-xy+y^2)(x^2+xy+y^2)$

④ $(a-2b)^3-27b^3$
$=(a-2b)^3-(3b)^3$
$=(a-2b-3b)\{(a-2b)^2+(a-2b)\cdot3b+(3b)^2\}$
$=(a-5b)(a^2-ab+7b^2)$

⑤ $x^3-8y^3+z^3+6xyz$
$=x^3+(-2y)^3+z^3-3\cdot x\cdot(-2y)\cdot z$
$=(x-2y+z)(x^2+4y^2+z^2+2xy+2yz-zx)$ 답 ③

0206 $a^6+2a^3-a^4-2a^2=(a^6+2a^3+1)-(a^4+2a^2+1)$

$=(a^3+1)^2-(a^2+1)^2$

$=(a^3+1-a^2-1)(a^3+1+a^2+1)$

$=(a^3-a^2)(a^3+a^2+2)$

$=a^2(a-1)(a^3+a^2+2)$

따라서 인수인 것은 ⑤이다. 답 ⑤

다른 풀이 $a^6+2a^3-a^4-2a^2=a^6-a^4+2a^3-2a^2$

$=a^4(a^2-1)+2a^2(a-1)$

$=a^4(a+1)(a-1)+2a^2(a-1)$

$=a^2(a-1)\{a^2(a+1)+2\}$

$=a^2(a-1)(a^3+a^2+2)$

유형 18 공통부분이 있는 다항식의 인수분해

본책 33쪽

① 공통부분이 있으면 공통부분을 하나의 문자로 바꾸어 인수분해한다.
② (   )(   )(   )(   ) 꼴은 공통부분이 생기도록 짝을 지어 전개한 후 공통부분을 하나의 문자로 바꾸어 인수분해한다.

0207 $(x-4)(x-3)(x+1)(x+2)-24$

$=\{(x-4)(x+2)\}\{(x-3)(x+1)\}-24$

$=(x^2-2x-8)(x^2-2x-3)-24$

$x^2-2x=t$로 놓으면

(주어진 식)$=(t-8)(t-3)-24$

$=t^2-11t$

$=t(t-11)$

$=(x^2-2x)(x^2-2x-11)$

$=x(x-2)(x^2-2x-11)$

따라서 인수인 것은 ⑤이다. 답 ⑤

0208 $x^2-x=t$로 놓으면

(주어진 식)$=(t+1)(t-7)+15$

$=t^2-6t+8$

$=(t-2)(t-4)$

$=(x^2-x-2)(x^2-x-4)$

$=(x+1)(x-2)(x^2-x-4)$

따라서 $a=-2$, $b=-1$, $c=-4$이므로

$a+b+c=-7$ 답 -7

0209 $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)+k$

$=\{(x-1)(x-4)\}\{(x-2)(x-3)\}+k$

$=(x^2-5x+4)(x^2-5x+6)+k$ ··· ❶

$x^2-5x=t$로 놓으면

(주어진 식)$=(t+4)(t+6)+k$

$=t^2+10t+24+k$ ······ ㉠ ··· ❷

주어진 식이 x에 대한 이차식의 완전제곱식으로 인수분해되려면 ㉠이 t에 대한 완전제곱식으로 인수분해되어야 하므로

$24+k=25$ $\therefore k=1$ ··· ❸

답 1

채점 기준	비율
❶ 주어진 식을 공통부분이 생기도록 짝을 지어 전개할 수 있다.	30%
❷ 공통부분을 하나의 문자로 바꾸어 전개할 수 있다.	30%
❸ k의 값을 구할 수 있다.	40%

참고 $k=1$일 때, 주어진 식은 다음과 같이 인수분해된다.
(주어진 식)$=t^2+10t+25=(t+5)^2=(x^2-5x+5)^2$

유형 19 x^4+ax^2+b 꼴의 다항식의 인수분해

본책 34쪽

① $x^2=X$로 바꾸어 인수분해한다.
② 이차항을 적당히 분리하여 A^2-B^2 꼴로 변형한 후 인수분해한다.

0210 $x^2=X$로 놓으면

$x^4-26x^2+25=X^2-26X+25$

$=(X-1)(X-25)$

$=(x^2-1)(x^2-25)$

$=(x+1)(x-1)(x+5)(x-5)$

이때 $a<b<c<d$이므로

$a=-5$, $b=-1$, $c=1$, $d=5$

$\therefore bc-ad=24$ 답 24

0211 $x^2=X$로 놓으면

$x^4-32x^2+256=X^2-32X+256$

$=(X-16)^2$

$=(x^2-16)^2$

$=\{(x+4)(x-4)\}^2$

$=(x+4)^2(x-4)^2$

따라서 $a=4$, $b=-4$이므로

$a-b=8$ 답 ②

0212 $x^4-11x^2y^2+25y^4=(x^4-10x^2y^2+25y^4)-x^2y^2$

$=(x^2-5y^2)^2-(xy)^2$

$=(x^2+xy-5y^2)(x^2-xy-5y^2)$

따라서 $a=1$, $b=-5$ 또는 $a=-1$, $b=-5$이므로

$a^2+b^2=26$ 답 ⑤

0213 $x+1=X$, $x-1=Y$로 놓으면

$(x+1)^4-7(x+1)^2(x-1)^2+(x-1)^4$

$=X^4-7X^2Y^2+Y^4$

$=(X^4+2X^2Y^2+Y^4)-9X^2Y^2$

$=(X^2+Y^2)^2-(3XY)^2$

$=(X^2+3XY+Y^2)(X^2-3XY+Y^2)$

$=\{(x+1)^2+3(x+1)(x-1)+(x-1)^2\}$
$\times\{(x+1)^2-3(x+1)(x-1)+(x-1)^2\}$

$=-(5x^2-1)(x^2-5)$

답 $-(5x^2-1)(x^2-5)$

유형 20 여러 개의 문자를 포함한 다항식의 인수분해
본책 34쪽

① 차수가 가장 낮은 문자에 대하여 내림차순으로 정리한 후 인수분해한다.
② 차수가 모두 같을 때는 어느 한 문자에 대하여 내림차순으로 정리한 후 인수분해한다.

0214 주어진 식을 x에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$\begin{aligned}&2x^2+5xy-3y^2+3x-5y-2\\&=2x^2+(5y+3)x-(3y^2+5y+2)\\&=2x^2+(5y+3)x-(y+1)(3y+2)\\&=\{2x-(y+1)\}\{x+(3y+2)\}\\&=(2x-y-1)(x+3y+2)\end{aligned}$$

따라서 $a=2$, $b=-1$, $c=3$이므로

$a-b+c=6$

답 6

0215 주어진 식을 c에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$\begin{aligned}a^2b+b^2c-b^3-ca^2&=(b^2-a^2)c+a^2b-b^3\\&=(b^2-a^2)c-b(b^2-a^2)\\&=(b^2-a^2)(c-b)\\&=(b+a)(b-a)(c-b)\\&=(a+b)(a-b)(b-c)\end{aligned}$$

따라서 인수가 아닌 것은 ④이다.

답 ④

0216 주어진 식을 x에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$\begin{aligned}&x^2+2xy-3y^2+ax+4y+4\\&=x^2+(2y+a)x-(3y^2-4y-4)\\&=x^2+(2y+a)x-(y-2)(3y+2)\end{aligned}$$ ··· ❶

주어진 식이 x, y에 대한 두 일차식의 곱으로 인수분해되려면

$-(y-2)+(3y+2)=2y+a \qquad \therefore a=4$ ··· ❷

답 4

채점 기준	비율
❶ 주어진 식을 x에 대하여 내림차순으로 정리할 수 있다.	50%
❷ a의 값을 구할 수 있다.	50%

유형 21 순환하는 꼴의 다항식의 인수분해
본책 35쪽

a, b, c의 차수가 같으면서 순환하는 꼴의 다항식
➡ 주어진 식을 전개한 후 한 문자에 대하여 내림차순으로 정리한다.

0217 주어진 식을 a에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$\begin{aligned}&a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+2abc\\&=a^2(b+c)+b^2c+ab^2+ac^2+bc^2+2abc\\&=(b+c)a^2+(b^2+c^2+2bc)a+b^2c+bc^2\\&=(b+c)a^2+(b+c)^2a+bc(b+c)\\&=(b+c)\{a^2+(b+c)a+bc\}\\&=(b+c)(a+b)(a+c)\\&=(a+b)(b+c)(c+a)\end{aligned}$$

답 ⑤

참고 b나 c에 대하여 내림차순으로 정리한 후 인수분해해도 그 결과는 같다.

0218 $[a, b, c]+[b, c, a]+[c, a, b]$
$=a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$

이 식을 a에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$\begin{aligned}&a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)\\&=a^2(b-c)+b^2c-ab^2+ac^2-bc^2\\&=(b-c)a^2-(b^2-c^2)a+bc(b-c)\\&=(b-c)a^2-(b+c)(b-c)a+bc(b-c)\\&=(b-c)\{a^2-(b+c)a+bc\}\\&=(b-c)(a-b)(a-c)\\&=(a-b)(b-c)(a-c)\end{aligned}$$

답 $(a-b)(b-c)(a-c)$

0219 주어진 식의 분자를 x에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$\begin{aligned}&xy(x-y)+zx(z-x)+yz(y-z)\\&=x^2y-xy^2+z^2x-zx^2+y^2z-yz^2\\&=(y-z)x^2-(y^2-z^2)x+yz(y-z)\\&=(y-z)x^2-(y-z)(y+z)x+yz(y-z)\\&=(y-z)\{x^2-(y+z)x+yz\}\\&=(y-z)(x-y)(x-z)\\&=(x-y)(y-z)(x-z)\end{aligned}$$

$\therefore$ (주어진 식)$=\dfrac{(x-y)(y-z)(x-z)}{(x-y)(y-z)(x-z)}=1$

답 1

유형 22 인수정리를 이용한 다항식의 인수분해
본책 35쪽

삼차 이상의 다항식 $P(x)$를 인수분해할 때는 $P(\alpha)=0$을 만족시키는 상수 α의 값을 구하여 $P(x)=(x-\alpha)Q(x)$ 꼴로 인수분해한다.

0220 $P(x)=x^3-10x^2+19x+30$이라 하면

$P(-1)=-1-10-19+30=0$

이므로 오른쪽과 같이 조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr}-1 & 1 & -10 & 19 & 30\\ & & -1 & 11 & -30\\\hline & 1 & -11 & 30 & 0\end{array}$$

$$\begin{aligned}&x^3-10x^2+19x+30\\&=(x+1)(x^2-11x+30)\\&=(x+1)(x-5)(x-6)\end{aligned}$$

$\therefore a^2+b^2+c^2=1^2+(-5)^2+(-6)^2=62$

답 62

0221 $P(x)$가 $x-2$를 인수로 가지므로

$P(2)=8+8+2a-6=0$

$2a=-10 \qquad \therefore a=-5$

따라서 $P(x)=x^3+2x^2-5x-6$이므로 오른쪽과 같이 조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr}2 & 1 & 2 & -5 & -6\\ & & 2 & 8 & 6\\\hline & 1 & 4 & 3 & 0\end{array}$$

$$\begin{aligned}&x^3+2x^2-5x-6\\&=(x-2)(x^2+4x+3)\\&=(x-2)(x+1)(x+3)\end{aligned}$$

답 $(x-2)(x+1)(x+3)$

02 나머지정리와 인수분해

0222 $P(x)=x^3+(2a-1)x^2-2(a+1)x-4a$라 하면

$$P(-1)=-1+(2a-1)+2(a+1)-4a=0$$

이므로 조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 2a-1 & -2a-2 & -4a \\ & & -1 & -2a+2 & 4a \\ \hline & 1 & 2a-2 & -4a & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore x^3+(2a-1)x^2-2(a+1)x-4a$

$=(x+1)\{x^2+(2a-2)x-4a\}$

$=(x+1)(x-2)(x+2a)$

따라서 인수인 것은 ㄴ, ㄹ이다. 답 ④

다른 풀이 주어진 식을 a에 대하여 내림차순으로 정리하면

$x^3+(2a-1)x^2-2(a+1)x-4a$

$=a(2x^2-2x-4)+x^3-x^2-2x$

$=2a(x^2-x-2)+x(x^2-x-2)$

$=(x^2-x-2)(x+2a)$

$=(x+1)(x-2)(x+2a)$

0223 $x^4+5x^3+3x^2-9x=x(x^3+5x^2+3x-9)$

$H(x)=x^3+5x^2+3x-9$라 하면

$H(1)=0$이므로 오른쪽과 같이 조립제법을 이용하여 $H(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 5 & 3 & -9 \\ & & 1 & 6 & 9 \\ \hline & 1 & 6 & 9 & \boxed{0} \end{array}$$

x^3+5x^2+3x-9

$=(x-1)(x^2+6x+9)$

$=(x-1)(x+3)^2$

$\therefore x^4+5x^3+3x^2-9x=x(x-1)(x+3)^2$ ··· ❶

$P(x)$, $Q(x)$는 각각 이차식이고 $P(1)\neq 0$, $Q(0)\neq 0$이므로

$P(x)$는 $x-1$을 인수로 갖지 않고 $Q(x)$는 x를 인수로 갖지 않는다.

$P(x)=x(x+3)$

$Q(x)=(x+3)(x-1)$ ··· ❷

$\therefore Q(-1)=2\cdot(-2)=-4$ ··· ❸

답 -4

채점 기준	비율
❶ 주어진 식을 인수분해할 수 있다.	40%
❷ $P(x)$, $Q(x)$를 구할 수 있다.	40%
❸ $Q(-1)$의 값을 구할 수 있다.	20%

0224 $P(x)=ax^4+bx+3$이라 하면 $P(x)$가 $(x-1)^2$을 인수로 가지므로 $P(1)=a+b+3=0$ $\therefore b=-a-3$

$P(x)=ax^4+(-a-3)x+3$이므로 조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & a & 0 & 0 & -a-3 & 3 \\ & & a & a & a & -3 \\ \hline 1 & a & a & a & -3 & \boxed{0} \\ & & a & 2a & 3a & \\ \hline & a & 2a & 3a & \boxed{3a-3} & \end{array}$$

$\therefore P(x)=(x-1)(ax^3+ax^2+ax-3)$

$=(x-1)\{(x-1)(ax^2+2ax+3a)+3a-3\}$

$=(x-1)^2(ax^2+2ax+3a)+(3a-3)(x-1)$

$P(x)$가 $(x-1)^2$을 인수로 가지므로

$3a-3=0$ $\therefore a=1$

$\therefore P(x)=(x-1)^2(x^2+2x+3)$

따라서 $Q(x)=x^2+2x+3$이므로

$Q(2)=11$ 답 11

유형 23 계수가 대칭인 사차식의 인수분해 본책 36쪽

(i) 가운데 항이 상수가 되도록 x^2으로 묶어 낸다.

(ii) $x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2=\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2+2$임을 이용하여 $x+\dfrac{1}{x}$ 또는 $x-\dfrac{1}{x}$에 대한 이차식으로 정리하여 인수분해한다.

(iii) 각 인수에 x를 곱하여 다항식이 되도록 한다.

0225 $x^4-4x^3+5x^2-4x+1$

$=x^2\left(x^2-4x+5-\dfrac{4}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)$

$=x^2\left\{x^2+\dfrac{1}{x^2}-4\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+5\right\}$

$=x^2\left\{\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-4\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+3\right\}$

$=x^2\left(x+\dfrac{1}{x}-1\right)\left(x+\dfrac{1}{x}-3\right)$

$=(x^2-x+1)(x^2-3x+1)$

따라서 인수인 것은 ①이다. 답 ①

0226 $x^4-x^3-4x^2+x+1$

$=x^2\left(x^2-x-4+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)$

$=x^2\left\{x^2+\dfrac{1}{x^2}-\left(x-\dfrac{1}{x}\right)-4\right\}$

$=x^2\left\{\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2-\left(x-\dfrac{1}{x}\right)-2\right\}$

$=x^2\left(x-\dfrac{1}{x}+1\right)\left(x-\dfrac{1}{x}-2\right)$

$=(x^2+x-1)(x^2-2x-1)$

답 $(x^2+x-1)(x^2-2x-1)$

유형 24 조건이 주어진 다항식의 인수분해 본책 36쪽

① 주어진 조건을 다항식에 대입하여 간단히 한 후 인수분해한다.

② 다항식을 먼저 인수분해한 후 주어진 조건을 대입하여 식을 정리한다.

0227 $x+2y-z=0$에서

$z=x+2y$

$\therefore x^2+2xy+z^2=x^2+2xy+(x+2y)^2$

$=x(x+2y)+(x+2y)^2$

$=(x+2y)(2x+2y)$

$=2z(x+y)$ 답 ③

참고 주어진 식에 $x=z-2y$를 대입하면

$(z-2y)^2+2y(z-2y)+z^2=2z^2-2yz=2z(z-y)$

주어진 식에 $y=\frac{z-x}{2}$를 대입하면

$x^2+2x\cdot\frac{z-x}{2}+z^2=z^2+xz=z(z+x)$

0228 $1-4a^2+4ab-b^2=1-(4a^2-4ab+b^2)$

$=1^2-(2a-b)^2$

$=\{1+(2a-b)\}\{1-(2a-b)\}$

$=(1+2a-b)(1-2a+b)$

이때 $2a+b+1=0$에서 $1+2a=-b$, $1+b=-2a$

$\therefore$ (주어진 식)$=(-b-b)(-2a-2a)$

$=(-2b)(-4a)=8ab$

답 ③

다른 풀이 $2a+b+1=0$에서 $b=-2a-1$

$\therefore 1-4a^2+4ab-b^2=1-4a^2+4a(-2a-1)-(-2a-1)^2$

$=1-4a^2-8a^2-4a-4a^2-4a-1$

$=-16a^2-8a$

$=8a(-2a-1)=8ab$

0229 주어진 식을 y에 대하여 내림차순으로 정리하면

$xyz+x^2y-xy+x+z-1=(x^2+xz-x)y+(x+z-1)$

$=x(x+z-1)y+(x+z-1)$

$=(x+z-1)(xy+1)$

이때 $x+y+z=1$이므로 $x+z-1=-y$

$\therefore$ (주어진 식)$=-y(xy+1)$

답 ②

유형 25 인수분해를 이용하여 삼각형의 모양 판단하기

본책 36쪽

삼각형의 세 변의 길이가 a, b, c일 때

① $a=b$ 또는 $b=c$ 또는 $c=a$ ➡ 이등변삼각형

② $a=b=c$ ➡ 정삼각형

③ $a^2+b^2=c^2$ ➡ 빗변의 길이가 c인 직각삼각형

0230 주어진 식의 좌변을 c에 대하여 내림차순으로 정리하면

$a^3-a^2b+ac^2+ab^2-b^3-bc^2$

$=(a-b)c^2+a^3-a^2b+ab^2-b^3$

$=(a-b)c^2+a^2(a-b)+b^2(a-b)$

$=(a-b)(a^2+b^2+c^2)$

즉 $(a-b)(a^2+b^2+c^2)=0$이고 $a^2+b^2+c^2\neq0$이므로

$a-b=0$ $\therefore a=b$

따라서 주어진 조건을 만족시키는 삼각형은 $a=b$인 이등변삼각형이다.

답 ①

0231 주어진 식의 좌변을 인수분해하면

$a^3+b^3+c^3-3abc$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

$=\frac{1}{2}(a+b+c)\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$

즉 $(a+b+c)\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}=0$이고 $a+b+c\neq0$이므로

$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$

$\therefore a-b=0,\ b-c=0,\ c-a=0$

$\therefore a=b=c$

따라서 주어진 조건을 만족시키는 삼각형은 정삼각형이다.

답 정삼각형

0232 주어진 식을 $P(x)$라 하면 다항식 $P(x)$가 $x-a$로 나누어떨어지므로 $P(a)=0$

$\therefore a^3-(b+c)a^2-(b^2+c^2)a+b^3+b^2c+bc^2+c^3=0$

이 식의 좌변을 인수분해하면

$a^3-(b+c)a^2-(b^2+c^2)a+b^3+b^2c+bc^2+c^3$

$=a^3-(b+c)a^2-(b^2+c^2)a+b^2(b+c)+c^2(b+c)$

$=a^3-(b+c)a^2-(b^2+c^2)a+(b^2+c^2)(b+c)$

$=a^2(a-b-c)-(b^2+c^2)(a-b-c)$

$=(a^2-b^2-c^2)(a-b-c)$

즉 $(a^2-b^2-c^2)(a-b-c)=0$이고 $a-b-c\neq0$이므로

$a^2-b^2-c^2=0$ $\therefore a^2=b^2+c^2$

a, b, c는 삼각형의 세 변의 길이이므로 $a\neq b+c$

따라서 주어진 조건을 만족시키는 삼각형은 빗변의 길이가 a인 직각삼각형이므로 그 넓이는 $\frac{1}{2}bc$

답 $\frac{1}{2}bc$

유형 26 인수분해를 이용하여 식의 값 구하기

본책 37쪽

곱셈 공식과 인수분해 공식을 이용하여 식을 변형한 후 주어진 조건을 식에 대입한다.

0233 $x^4+x^2y^2+y^4=(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$

$=\{(x-y)^2+3xy\}\{(x-y)^2+xy\}$

$=(3^2+3\cdot2)(3^2+2)=165$

답 165

0234 $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

에서 $a+b+c=0$이므로

$a^3+b^3+c^3-3abc=0$ $\therefore a^3+b^3+c^3=3abc$

$\therefore \frac{a^3+b^3+c^3}{2abc}=\frac{3abc}{2abc}=\frac{3}{2}$

답 ④

0235 $b-c=2+\sqrt{2}$, $c-a=2-\sqrt{2}$를 변끼리 더하면

$b-a=4$ $\therefore a-b=-4$ ··· ❶

주어진 식을 a에 대하여 내림차순으로 정리하면

$a^2b-ab^2+b^2c-bc^2+c^2a-ca^2$

$=(b-c)a^2-(b^2-c^2)a+b^2c-bc^2$

$=(b-c)a^2-(b+c)(b-c)a+bc(b-c)$

$=(b-c)\{a^2-(b+c)a+bc\}$

$=(b-c)(a-b)(a-c)$ ··· ❷

$=(2+\sqrt{2})\cdot(-4)\cdot(-2+\sqrt{2})=8$ ··· ❸

답 8

채점 기준	비율
❶ $a-b$의 값을 구할 수 있다.	20%
❷ 주어진 식을 인수분해할 수 있다.	60%
❸ 주어진 식의 값을 구할 수 있다.	20%

유형 27 인수분해를 이용한 수의 계산

본책 37쪽

수를 문자로 바꾸고 인수분해 공식을 이용한다.

0236 $a=99999$로 놓으면

$$(\text{주어진 식})=\frac{a^3+1}{(a-1)a+1}=\frac{(a+1)(a^2-a+1)}{a^2-a+1}$$
$$=a+1=100000$$

답 ④

0237 $x=30$으로 놓으면

$$29\cdot31\cdot32\cdot34+9$$
$$=(x-1)(x+1)(x+2)(x+4)+9$$
$$=\{(x-1)(x+4)\}\{(x+1)(x+2)\}+9$$
$$=(x^2+3x-4)(x^2+3x+2)+9$$

$x^2+3x=X$로 놓으면

$$(x^2+3x-4)(x^2+3x+2)+9$$
$$=(X-4)(X+2)+9$$
$$=X^2-2X+1$$
$$=(X-1)^2$$
$$=(x^2+3x-1)^2$$
$$=(30^2+3\cdot30-1)^2$$
$$=(900+90-1)^2$$
$$=989^2$$
$$\therefore \sqrt{29\cdot31\cdot32\cdot34+9}=\sqrt{989^2}=989$$

답 989

0238 $P(1)=0$, $P(-2)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr}
1 & 1 & -1 & -3 & 5 & -2 \\
 & & 1 & 0 & -3 & 2 \\
\hline
-2 & 1 & 0 & -3 & 2 & 0 \\
 & & -2 & 4 & -2 & \\
\hline
 & 1 & -2 & 1 & 0 &
\end{array}$$

$$\therefore P(x)=(x-1)(x+2)(x^2-2x+1)$$
$$=(x-1)^3(x+2)$$

따라서 구하는 값은

$$P(11)=(11-1)^3(11+2)=10^3\times13=13000$$

답 ③

0239 $6^6-1=(6^3)^2-1=(6^3-1)(6^3+1)$

$$=(6-1)(6^2+6+1)(6+1)(6^2-6+1)$$
$$=5\cdot7\cdot31\cdot43$$

따라서 구하는 두 자리 자연수 n의 값은 31, 35, 43이다.

답 31, 35, 43

0240 전략 $P_n(x)$에 $n=1$, 2, 3을 각각 대입하여 $P_1(x)$, $P_2(x)$, $P_3(x)$를 구한 후 수치 대입법을 이용한다.

풀이 $P_1(x)=x-1$, $P_2(x)=(x-1)(x-2)$, $P_3(x)=(x-1)(x-2)(x-3)$이므로

$$2x^3-3x^2+1$$
$$=a+b(x-1)+c(x-1)(x-2)+d(x-1)(x-2)(x-3) \quad \cdots\cdots ㉠$$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로 ㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$$2-3+1=a \qquad \therefore a=0$$

㉠의 양변에 $x=2$를 대입하면

$$16-12+1=a+b \qquad \therefore b=5$$

㉠의 양변에 $x=3$을 대입하면

$$54-27+1=a+2b+2c \qquad \therefore c=9$$

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면

$$1=a-b+2c-6d \qquad \therefore d=2$$
$$\therefore a+b+c+d=16$$

답 16

0241 전략 주어진 등식의 양변에 적당한 수를 대입해 본다.

풀이 주어진 등식의 양변에 $x=0$을 대입하면 $a_0=-10$이므로

$$(x^2+3x)^5=a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{10}x^{10}$$
$$\therefore x^5(x+3)^5=a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{10}x^{10}$$

이 식의 좌변에서 사차 이하의 항의 계수는 모두 0이므로

$$a_1=a_2=a_3=a_4=0$$

즉 $x^5(x+3)^5=a_5x^5+a_6x^6+\cdots+a_{10}x^{10}$이므로

$$(x+3)^5=a_5+a_6x+\cdots+a_{10}x^5 \quad \cdots\cdots ㉠$$

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면 $a_5=3^5$

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$$4^5=a_5+a_6+a_7+a_8+a_9+a_{10}$$
$$\therefore a_6+a_7+a_8+a_9+a_{10}=4^5-3^5$$
$$\therefore 4a_5-(a_6+a_7+a_8+a_9+a_{10})=4\cdot3^5-(4^5-3^5)$$
$$=5\cdot3^5-4^5=191$$

답 191

0242 전략 $P(x)$가 삼차식이므로 x^2-2x+3으로 나누었을 때의 몫을 일차식으로 놓는다.

풀이 $P(x)=(x^2-2x+3)(px+q)$ (p, q는 상수, $p\neq0$)라 하면 $P(0)=-9$이므로

$$3q=-9 \qquad \therefore q=-3$$
$$\therefore P(x)=(x^2-2x+3)(px-3) \quad \cdots\cdots ㉠$$

또 $P(x)-36$을 x^2+5로 나누었을 때의 몫을 $px+r$ (r는 상수)라 하면

$$P(x)-36=(x^2+5)(px+r)$$
$$\therefore P(x)=(x^2+5)(px+r)+36$$

$P(0)=-9$이므로

$$5r+36=-9 \qquad \therefore r=-9$$
$$\therefore P(x)=(x^2+5)(px-9)+36 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서

$$(x^2-2x+3)(px-3)=(x^2+5)(px-9)+36$$
$$px^3-(2p+3)x^2+(3p+6)x-9=px^3-9x^2+5px-9$$

이 식이 x에 대한 항등식이므로

$2p+3=9$, $3p+6=5p$

$\therefore p=3$

따라서 $P(x)=(x^2-2x+3)(3x-3)$이므로

$P(2)=3\cdot3=9$ 답 9

0243 전략 $P(x)$를 x^2-x+1로 나누었을 때의 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)로 놓고 $\{P(x)\}^2$을 x^2-x+1로 나누었을 때의 나머지를 구해 본다.

풀이 $P(x)$를 x^2-x+1로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$(a, b는 상수)라 하면

$P(x)=(x^2-x+1)Q(x)+ax+b$

이때 $\{P(x)\}^2$을 x^2-x+1로 나누었을 때의 나머지는 $(ax+b)^2$을 x^2-x+1로 나누었을 때의 나머지와 같다.

그런데 $\{P(x)\}^2$이 x^2-x+1로 나누어떨어지므로

$(ax+b)^2=a^2(x^2-x+1)$

$\therefore a^2x^2+2abx+b^2=a^2x^2-a^2x+a^2$

이 식이 x에 대한 항등식이므로

$2ab=-a^2$, $b^2=a^2$ …… ㉠

$2ab=-a^2$에서 $a^2+2ab=0$

$a(a+2b)=0$ $\therefore a=0$ 또는 $a=-2b$

$a=0$일 때, ㉠에서 $b^2=0$ $\therefore b=0$

$a=-2b$일 때, ㉠에서 $3b^2=0$ $\therefore a=0$, $b=0$

$\therefore a=0$, $b=0$

따라서 $P(x)$를 x^2-x+1로 나누었을 때의 나머지는 0이다.

답 0

0244 전략 다항식 $A(x)$를 $B(x)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)$라 하면 $A(x)=B(x)Q(x)+R(x)$임을 이용한다.

풀이 $x^n(x^2+ax+b)$를 $(x-3)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$x^n(x^2+ax+b)=(x-3)^2Q(x)+3^n(x-3)$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=3$을 대입하면

$3^n(9+3a+b)=0$

$\therefore b=-3a-9$ ($\because 3^n\neq0$) …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$x^n(x^2+ax-3a-9)=(x-3)^2Q(x)+3^n(x-3)$

$x^n(x-3)(x+a+3)=(x-3)\{(x-3)Q(x)+3^n\}$

$x\neq3$일 때도 등식이 성립해야 하므로

$x^n(x+a+3)=(x-3)Q(x)+3^n$ …… ㉢

㉢의 양변에 $x=3$을 대입하면

$3^n(3+a+3)=3^n$, $a+6=1$

$\therefore a=-5$

$a=-5$를 ㉡에 대입하면 $b=6$

$\therefore ab=-30$ 답 -30

참고 $x^n(x-3)(x+a+3)=(x-3)\{(x-3)Q(x)+3^n\}$은 x에 대한 항등식이므로 모든 x에 대하여 참이 되는 등식이다.
따라서 $x=3$일 때와 $x\neq3$일 때 모두 등식이 성립해야 한다.

0245 전략 $x^{30}-1=(x-1)(x^{29}+x^{28}+\cdots+1)$임을 이용한다.

풀이 $x^{30}+3x+2$를 x^2-1로 나누었을 때의 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$x^{30}+3x+2=(x^2-1)Q(x)+ax+b$

$=(x+1)(x-1)Q(x)+ax+b$

양변에 $x=-1$, $x=1$을 각각 대입하면

$-a+b=0$, $a+b=6$

두 식을 연립하여 풀면

$a=3$, $b=3$

따라서 $x^{30}+3x+2=(x+1)(x-1)Q(x)+3x+3$이므로

$(x+1)(x-1)Q(x)=x^{30}-1$

이때 $x^{30}-1=(x-1)(x^{29}+x^{28}+\cdots+1)$이므로

$(x+1)(x-1)Q(x)=(x-1)(x^{29}+x^{28}+\cdots+1)$

$x\neq1$일 때도 등식이 성립해야 하므로

$(x+1)Q(x)=x^{29}+x^{28}+\cdots+1$

이 식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$2Q(1)=30$ $\therefore Q(1)=15$ 답 15

0246 전략 다항식 $(x+1)P(x)-x$가 $x-1$, $x-2$, $x-3$, $x-4$를 인수로 가짐을 이용한다.

풀이 $P(1)=\frac{1}{2}$, $P(2)=\frac{2}{3}$, $P(3)=\frac{3}{4}$, $P(4)=\frac{4}{5}$에서

$2P(1)-1=0$, $3P(2)-2=0$, $4P(3)-3=0$, $5P(4)-4=0$

이므로 다항식 $(x+1)P(x)-x$는 $x-1$, $x-2$, $x-3$, $x-4$를 인수로 갖는다. 즉

$(x+1)P(x)-x=k(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ (k는 상수)

로 놓을 수 있다. $P(x)$가 삼차식이므로 $(x+1)P(x)-x$는 사차식이다.

이 식의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$1=k\cdot(-2)\cdot(-3)\cdot(-4)\cdot(-5)$

$120k=1$ $\therefore k=\frac{1}{120}$

$\therefore (x+1)P(x)-x=\frac{1}{120}(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$

이 식의 양변에 $x=5$를 대입하면

$6P(5)-5=\frac{1}{120}\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1$

$6P(5)-5=\frac{1}{5}$ $\therefore P(5)=\frac{13}{15}$

따라서 $P(x)$를 $x-5$로 나누었을 때의 나머지는 $\frac{13}{15}$이다.

답 $\frac{13}{15}$

0247 전략 주어진 조립제법을 이용하여 상수 a, b, c, p, q, r의 값을 구한다.

풀이 주어진 조립제법에서 $p=1$

$(-1)\cdot q=-1$에서 $q=1$

$(-1)\cdot r=5$에서 $r=-5$

$a+(-1)=q=1$에서 $a=2$

$b+(-1)=r=-5$에서 $b=-4$

$c+5=13$에서 $c=8$

이때 $P(x)=(ax^2+bx+c)+(px^2+qx+r)$라 하면

$$P(x)=(2x^2-4x+8)+(x^2+x-5)$$
$$=3x^2-3x+3$$

따라서 $P(x)$를 $x+2$로 나누었을 때의 나머지는

$$P(-2)=12+6+3=21$$

답 ①

다른 풀이 주어진 다항식은 조립제법에 의하여

$$x^3+ax^2+bx+c=(x+1)(px^2+qx+r)+13$$

으로 나타낼 수 있으므로

$$ax^2+bx+c=(x+1)(px^2+qx+r)+13-x^3$$

이때 $P(x)=(ax^2+bx+c)+(px^2+qx+r)$라 하면

$$P(x)=(x+1)(px^2+qx+r)+13-x^3+(px^2+qx+r)$$
$$=(x+2)(px^2+qx+r)+13-x^3$$

따라서 $P(x)$를 $x+2$로 나누었을 때의 나머지는

$$P(-2)=13-(-2)^3=21$$

0248 전략 조립제법을 이용하여 n^4+n^2-2를 $(n-1)(n-2)$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 구해 본다.

풀이

1	1	0	1	0	-2
		1	1	2	2
2	1	1	2	2	0
		2	6	16	
	1	3	8	18	

위의 조립제법에서

$$n^4+n^2-2=(n-1)(n^3+n^2+2n+2)$$
$$=(n-1)\{(n-2)(n^2+3n+8)+18\}$$
$$=(n-1)(n-2)(n^2+3n+8)+18(n-1)$$

이때 $(n-1)(n-2)(n^2+3n+8)$은 $(n-1)(n-2)$로 나누어떨어지므로 n^4+n^2-2가 $(n-1)(n-2)$의 배수가 되기 위해서는 $18(n-1)$이 $(n-1)(n-2)$의 배수이어야 한다.

즉 $18(n-1)=(n-1)(n-2)k$ (k는 자연수)이므로

$$18=(n-2)k$$

k가 가장 작은 값을 가질 때 n이 가장 큰 값을 가지므로 $k=1$일 때 n이 가장 크다. 따라서 구하는 n의 값은 20이다.

답 20

0249 전략 보기의 각 경우에 대하여 x^4+ax^2+b가 인수분해되는 꼴을 생각해 본다.

풀이 ㄱ. $a=0$, $b=1$일 때

$$P(x)=x^4+1$$
$$\therefore N(0,\ 1)=0$$

ㄴ. $a=n$, $b=-20$일 때

$$P(x)=x^4+nx^2-20$$

$20=1\cdot20=2\cdot10=4\cdot5$에서 x^4+nx^2-20은

$(x^2-1)(x^2+20)$, $(x^2+1)(x^2-20)$, $(x^2-2)(x^2+10)$,

$(x+1)(x-1)$

$(x^2+2)(x^2-10)$, $(x^2-4)(x^2+5)$, $(x^2+4)(x^2-5)$

$(x+2)(x-2)$

따라서 $N(n,\ -20)=2$를 만족시키는 n은

$(x^2-1)(x^2+20)=x^4+19x^2-20$에서 $\quad n=19$

$(x^2-4)(x^2+5)=x^4+x^2-20$에서 $\quad n=1$

즉 정수 n의 개수는 2이다.

ㄷ. $a=m$, $b=4$일 때

$$P(x)=x^4+mx^2+4$$

$4=1\cdot4=2\cdot2$에서 x^4+mx^2+4는

$(x^2-1)(x^2-4)$, $(x^2+1)(x^2+4)$,

$(x+1)(x-1)(x+2)(x-2)$

$(x^2-2)(x^2-2)$, $(x^2+2)(x^2+2)$

따라서 $N(m,\ 4)=4$를 만족시키는 m은

$(x^2-1)(x^2-4)=x^4-5x^2+4$에서 $\quad m=-5$

즉 정수 m의 개수는 1이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

0250 전략 두 이차식 $A(x)$, $B(x)$는 $x^3-3x^2+2x+5-(2x+1)$의 인수임을 이용한다.

풀이 다항식 x^3-3x^2+2x+5를 서로 다른 두 이차식 $A(x)$, $B(x)$로 나누었을 때의 나머지가 모두 $2x+1$이므로 $A(x)$, $B(x)$는

$$x^3-3x^2+2x+5-(2x+1)=x^3-3x^2+4$$

의 인수이다.

$P(x)=x^3-3x^2+4$라 하면

$$P(-1)=-1-3+4=0$$

이므로 오른쪽과 같이 조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

-1	1	-3	0	4
		-1	4	-4
	1	-4	4	0

$$P(x)=(x+1)(x^2-4x+4)$$
$$=(x+1)(x-2)^2$$

…… ㉠

두 이차식 $A(x)$, $B(x)$는 ㉠의 서로 다른 인수이므로

$A(x)=(x+1)(x-2)$, $B(x)=(x-2)^2$

또는 $A(x)=(x-2)^2$, $B(x)=(x+1)(x-2)$

$\therefore A(x)+B(x)=(x+1)(x-2)+(x-2)^2$

따라서 다항식 $A(x)+B(x)$를 $x-5$로 나누었을 때의 나머지는

$$A(5)+B(5)=6\cdot3+3^2=27$$

답 ②

0251 전략 가로의 길이와 세로의 길이를 각각 인수분해하여 가로 방향과 세로 방향에 필요한 타일의 개수를 구한다.

풀이 $P(n)=n^3+7n^2+14n+8$이라 하면

$$P(-1)=-1+7-14+8=0$$

이므로 오른쪽과 같이 조립제법을 이용하여 $P(n)$을 인수분해하면

-1	1	7	14	8
		-1	-6	-8
	1	6	8	0

$$P(n)=(n+1)(n^2+6n+8)$$
$$=(n+1)(n+2)(n+4)$$

한편 $n^2+4n+3=(n+1)(n+3)$이므로 한 변의 길이가 $n+1$인 정사각형 모양의 타일이 가로 방향으로 $(n+2)(n+4)$개, 세로 방향으로 $(n+3)$개 필요하다.

따라서 필요한 타일의 개수는

$$(n+2)(n+3)(n+4)$$

답 ⑤

0252 전략 주어진 18개의 정육면체와 직육면체의 부피의 합을 a, b에 대한 식으로 나타낸 후 인수분해한다.

풀이 주어진 18개의 정육면체와 직육면체의 부피의 합은

$$4a^3+b^3+8a^2b+5ab^2$$

$P(a)=4a^3+8ba^2+5b^2a+b^3$이라 하면

$P(-b)=-4b^3+8b^3-5b^3+b^3=0$

이므로 오른쪽과 같이 조립제법을 이용하여 $P(a)$를 인수분해하면

$-b$	4	$8b$	$5b^2$	b^3
		$-4b$	$-4b^2$	$-b^3$
	4	$4b$	b^2	0

$P(a)=(a+b)(4a^2+4ab+b^2)$

$=(a+b)(2a+b)^2$

즉 $(a+b)(2a+b)^2=75$이고 $75=3\cdot5^2$이므로

$a+b=3,\ 2a+b=5$

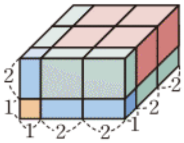
두 식을 연립하여 풀면 $a=2,\ b=1$

따라서 부피가 75인 직육면체의 밑면의 가로의 길이, 세로의 길이, 높이는 각각 5, 5, 3이므로 구하는 대각선의 길이는

$\sqrt{5^2+5^2+3^2}=\sqrt{59}$

답 ④

참고 주어진 18개의 정육면체와 직육면체로 만든 부피가 75인 직육면체는 오른쪽 그림과 같다.



0253 전략 주어진 식의 좌변을 인수분해한 후 식의 값이 0이 되는 경우를 생각해 본다.

풀이 $a^3-b^3-a^2b+ab^2-ac^2+bc^2$

$=(a-b)(a^2+ab+b^2)-ab(a-b)-c^2(a-b)$

$=(a-b)(a^2+ab+b^2-ab-c^2)$

$=(a-b)(a^2+b^2-c^2)$

이므로

$(a-b)(a^2+b^2-c^2)=0$ ...... ㉠

ㄱ. $a>b$이면 $a\neq b$이므로 ㉠에서 $a^2+b^2=c^2$

따라서 빗변의 길이가 c인 직각삼각형이므로

$c>a>b$

ㄴ. $b>c$이면 $a^2+b^2-c^2\neq0$이므로 ㉠에서

$a=b$

ㄷ. $b\geq c$이면 $a^2+b^2-c^2\neq0$이므로 ㉠에서

$a=b\quad \therefore a\geq c$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

0254 전략 먼저 주어진 등식의 좌변을 인수분해한다.

풀이 $(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc$

$=\{a+(b+c)\}\{(b+c)a+bc\}-abc$

$=(b+c)a^2+(b+c)^2a+abc+(b+c)bc-abc$

$=(b+c)a^2+(b+c)^2a+(b+c)bc$

$=(b+c)\{a^2+(b+c)a+bc\}$

$=(b+c)(a+b)(a+c)$

이고 $280=2^3\cdot5\cdot7$이므로

$(a+b)(b+c)(a+c)=2^3\cdot5\cdot7$

이때 $a>b>c\geq2$에서 $a+b>a+c>b+c\geq5$이므로

$a+b=8,\ a+c=7,\ b+c=5$

$\therefore a=5,\ \underline{b=3,\ c=2}$ $a>b>c\geq2$이고 $b+c=5$이므로 $b=3,\ c=2$

$\therefore abc=30$

답 30

0255 전략 $15=x$로 놓고 x^3+x^2-x+2를 인수분해한다.

풀이 $15=x$로 놓으면

$15^3+15^2-15+2=x^3+x^2-x+2$

$P(x)=x^3+x^2-x+2$라 하면

$P(-2)=-8+4+2+2=0$

이므로 오른쪽과 같이 조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

-2	1	1	-1	2
		-2	2	-2
	1	-1	1	0

$P(x)=(x+2)(x^2-x+1)$

$=(15+2)(15^2-15+1)$

$=17\cdot211$

따라서 $a=17,\ b=211$ 또는 $a=211,\ b=17$이므로

$a+b=228$

답 228

0256 전략 다항식 $P(x)+Q(x)$, $\{P(x)\}^3+\{Q(x)\}^3$, $P(x)Q(x)$를 $x-\alpha$로 나누었을 때의 나머지는 각각 $P(\alpha)+Q(\alpha)$, $\{P(\alpha)\}^3+\{Q(\alpha)\}^3$, $P(\alpha)Q(\alpha)$이다.

풀이 $P(x)+Q(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지가 5이므로

$P(1)+Q(1)=5$ ··· ❶

$\{P(x)\}^3+\{Q(x)\}^3$을 $x-1$로 나누었을 때의 나머지가 35이므로

$\{P(1)\}^3+\{Q(1)\}^3=35$ ··· ❷

$P(x)Q(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는 $P(1)Q(1)$이므로

$\{P(1)\}^3+\{Q(1)\}^3$

$=\{P(1)+Q(1)\}^3-3P(1)Q(1)\{P(1)+Q(1)\}$

에서 $35=5^3-15P(1)Q(1),\quad 15P(1)Q(1)=90$

$\therefore P(1)Q(1)=6$ ··· ❸

답 6

채점 기준	비율
❶ $P(1)+Q(1)$의 값을 구할 수 있다.	30%
❷ $\{P(1)\}^3+\{Q(1)\}^3$의 값을 구할 수 있다.	30%
❸ $P(x)Q(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지를 구할 수 있다.	40%

0257 전략 $\{P(x)\}^{1001}$을 $P(x^2)=\frac{1}{2}(x+1)(x-1)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$로 놓고 $\{P(-1)\}^{1001}$, $\{P(1)\}^{1001}$을 구한다.

풀이 $P(x^2)=\frac{1}{2}(x^2-1)=\frac{1}{2}(x+1)(x-1)$

$\{P(x)\}^{1001}$을 $P(x^2)$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$\{P(x)\}^{1001}=P(x^2)Q(x)+ax+b$

$=\frac{1}{2}(x+1)(x-1)Q(x)+ax+b$ ··· ❶

양변에 $x=-1$, $x=1$을 각각 대입하면

$\{P(-1)\}^{1001}=-a+b,\ \{P(1)\}^{1001}=a+b$ ...... ㉠ ··· ❷

이때

$P(-1)=\frac{1}{2}(-1-1)=-1,\ P(1)=\frac{1}{2}(1-1)=0$

이므로 이를 ㉠에 대입하면

$-a+b=-1,\ a+b=0$

두 식을 연립하여 풀면 $a=\frac{1}{2}$, $b=-\frac{1}{2}$

따라서 구하는 나머지는 $\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$이다. ⋯ ❸

답 $\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$

채점 기준	비율
❶ $\{P(x)\}^{1001}$을 $P(x^2)$으로 나누었을 때의 몫과 나머지를 이용하여 나타낼 수 있다.	30%
❷ $\{P(-1)\}^{1001}$, $\{P(1)\}^{1001}$의 값을 구할 수 있다.	30%
❸ $\{P(x)\}^{1001}$을 $P(x^2)$으로 나누었을 때의 나머지를 구할 수 있다.	40%

0258 전략 $2^3=x$로 놓고 주어진 식을 x에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 $2^3=8=x$로 놓으면

$2^{1000}+2^{1001}+2^{1002}+2^{1003}$

$=2\cdot(2^3)^{333}+4\cdot(2^3)^{333}+(2^3)^{334}+2\cdot(2^3)^{334}$

$=6\cdot8^{333}+3\cdot8^{334}=6x^{333}+3x^{334}$ ⋯ ❶

$6x^{333}+3x^{334}$을 $x-1$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R라 하면 $6x^{333}+3x^{334}=(x-1)Q(x)+R$ ⋯⋯ ㉠

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면 $R=9$ ⋯ ❷

㉠의 양변에 $x=8$을 대입하면

$6\cdot8^{333}+3\cdot8^{334}=7Q(8)+9=7\{Q(8)+1\}+2$

따라서 구하는 나머지는 2이다. ⋯ ❸

답 2

채점 기준	비율
❶ $2^3=x$로 놓고 주어진 식을 x에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30%
❷ ❶의 식을 $x-1$로 나누었을 때의 나머지를 구할 수 있다.	30%
❸ 주어진 수를 7로 나누었을 때의 나머지를 구할 수 있다.	40%

다른 풀이 $2^3=8=x$로 놓으면

$2^{1000}+2^{1001}+2^{1002}+2^{1003}=(1+2+4+8)\cdot2^{1000}$

$=15\cdot2^{1000}=30\cdot2^{999}$

$=30\cdot8^{333}=30x^{333}$

$30x^{333}$을 $x-1$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R라 하면

$30x^{333}=(x-1)Q(x)+R$ ⋯⋯ ㉡

㉡의 양변에 $x=1$을 대입하면 $R=30$

㉡의 양변에 $x=8$을 대입하면

$30\cdot8^{333}=7Q(8)+30=7\{Q(8)+4\}+2$

따라서 구하는 나머지는 2이다.

0259 전략 $a-b=x$, $b-c=y$, $c-a=z$로 놓고 주어진 식의 좌변을 인수분해한다.

풀이 $a-b=x$, $b-c=y$, $c-a=z$로 놓으면

$x+y+z=0$ ⋯ ❶

주어진 식의 좌변을 인수분해하면

$(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3$

$=x^3+y^3+z^3$

$=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)+3xyz$

$=3xyz$ ($\because x+y+z=0$)

$=3(a-b)(b-c)(c-a)$ ⋯ ❷

즉 $3(a-b)(b-c)(c-a)=0$이므로

$a=b$ 또는 $b=c$ 또는 $c=a$

따라서 주어진 조건을 만족시키는 삼각형은 이등변삼각형이다. ⋯ ❸

답 이등변삼각형

채점 기준	비율
❶ $a-b=x$, $b-c=y$, $c-a=z$로 놓고 $x+y+z$의 값을 구할 수 있다.	20%
❷ 주어진 식의 좌변을 인수분해할 수 있다.	40%
❸ 조건을 만족시키는 삼각형의 모양을 말할 수 있다.	40%

0260 전략 주어진 조건을 이용하여 a, b, c, d, e, f 사이의 관계식을 구한다.

풀이 (ii)에 의하여

$abc+acd+ade+aeb+fbc+fcd+fde+feb=385$ ⋯ ❶

$a(bc+cd+de+eb)+f(bc+cd+de+eb)=385$

$(a+f)\{b(c+e)+d(c+e)\}=385$

$(a+f)(b+d)(c+e)=385$ ⋯ ❷

이때 $385=5\cdot7\cdot11$이므로

$a+b+c+d+e+f=5+7+11=23$ ⋯ ❸

답 23

채점 기준	비율
❶ 각 면에 적힌 수의 합이 385임을 이용하여 식을 세울 수 있다.	20%
❷ ❶에서 세운 식의 좌변을 인수분해할 수 있다.	40%
❸ $a+b+c+d+e+f$의 값을 구할 수 있다.	40%

0261 전략 $n^2+n+17=m^2$으로 놓고 인수분해한다.

풀이 $n^2+n+17=m^2$ ⋯ ❶

이 식의 양변에 4를 곱하면

$4n^2+4n+68=4m^2$, $(2n+1)^2+67=4m^2$

$(2m)^2-(2n+1)^2=67$

$(2m+2n+1)(2m-2n-1)=67$ ⋯ ❷

$67=67\cdot1$이므로 $2m+2n+1=67$, $2m-2n-1=1$

$\therefore m+n=33$, $m-n=1$

두 식을 연립하여 풀면 $m=17$, $n=16$ ⋯ ❸

$\therefore mn=272$ ⋯ ❹

답 272

채점 기준	비율
❶ m, n에 대한 식을 세울 수 있다.	20%
❷ 67을 두 다항식의 곱으로 나타낼 수 있다.	40%
❸ m, n의 값을 구할 수 있다.	30%
❹ mn의 값을 구할 수 있다.	10%

Ⅱ. 방정식

03 복소수

0262 답 실수부분: 3, 허수부분: -1

0263 답 실수부분: 1, 허수부분: $\sqrt{2}$

0264 답 실수부분: $\frac{3}{2}$, 허수부분: $-\frac{5}{2}$

0265 답 실수부분: 0, 허수부분: -4

0266 답 실수부분: $\sqrt{7}$, 허수부분: 0

0267 답 실수부분: $2+\sqrt{5}$, 허수부분: 0

0268 답 ㄱ, ㄷ, ㄹ, ㅇ

0269 답 ㄴ, ㅁ, ㅂ, ㅅ

0270 답 $a=1,\ b=-2$

0271 답 $a=0,\ b=-5$

0272 답 $a=-2,\ b=-3$

0273 $(a+b)+4i=-2+2bi$에서

$a+b=-2,\ 4=2b$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=-4,\ b=2$ 답 $a=-4,\ b=2$

0274 $(3a+b)+(a-b)i=5-i$에서

$3a+b=5,\ a-b=-1$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=1,\ b=2$ 답 $a=1,\ b=2$

0275 $\overline{3+2i}=3-2i$ 답 $3-2i$

0276 $\overline{-4i+1}=\overline{1-4i}=1+4i$ 답 $1+4i$

0277 $\overline{-8}=-8$ 답 -8

0278 $\overline{15i}=-15i$ 답 $-15i$

참고 ① 실수 a의 켤레복소수는 a이다.

② 순허수 bi의 켤레복소수는 $-bi$이다.

0279 $(4-i)+(-8+2i)=(4-8)+(-1+2)i$

$=-4+i$ 답 $-4+i$

0280 $(7-2i)-(i-5)=(7+5)+(-2-1)i$

$=12-3i$ 답 $12-3i$

0281 $(11+3i)-(7-4i)+2i=(11-7)+(3+4+2)i$

$=4+9i$ 답 $4+9i$

0282 $(2-i)(4+3i)=8+6i-4i-3i^2$

$=8+2i-3\cdot(-1)$

$=11+2i$ 답 $11+2i$

0283 $(3+i)^2=9+6i+i^2$

$=9+6i-1$

$=8+6i$ 답 $8+6i$

0284 $\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=\frac{1-2i+i^2}{1-i^2}$

$=\frac{-2i}{2}=-i$ 답 $-i$

0285 $\frac{3+2i}{2-i}=\frac{(3+2i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}=\frac{6+3i+4i+2i^2}{4-i^2}$

$=\frac{4+7i}{5}=\frac{4}{5}+\frac{7}{5}i$ 답 $\frac{4}{5}+\frac{7}{5}i$

0286 $i^9=(i^4)^2\cdot i=i$ 답 i

0287 $(-i)^5=-i^5=-i^4\cdot i=-i$ 답 $-i$

0288 $1-i+i^2-i^3=1-i+(-1)-(-i)$

$=0$ 답 0

0289 $i^{100}+i^{101}=(i^4)^{25}+(i^4)^{25}\cdot i$

$=1+i$ 답 $1+i$

0290 $\sqrt{-9}=\sqrt{9}i=3i$ 답 $3i$

0291 $\sqrt{-12}=\sqrt{12}i=2\sqrt{3}i$ 답 $2\sqrt{3}i$

0292 $-\sqrt{-8}=-\sqrt{8}i=-2\sqrt{2}i$ 답 $-2\sqrt{2}i$

0293 $-\sqrt{-\frac{9}{4}}=-\sqrt{\frac{9}{4}}i=-\frac{3}{2}i$ 답 $-\frac{3}{2}i$

0294 $\pm\sqrt{-3}=\pm\sqrt{3}i$ 답 $\pm\sqrt{3}i$

0295 $\pm\sqrt{-25}=\pm\sqrt{25}i=\pm5i$ 답 $\pm5i$

0296 $\pm\sqrt{-18}=\pm\sqrt{18}i=\pm3\sqrt{2}i$ 답 $\pm3\sqrt{2}i$

0297 $\pm\sqrt{-\frac{1}{16}}=\pm\sqrt{\frac{1}{16}}i=\pm\frac{1}{4}i$ 답 $\pm\frac{1}{4}i$

SSEN 특강

a의 제곱근

실수 a에 대하여 제곱하여 a가 되는 수를 a의 제곱근이라 한다.
즉 $x^2=a$일 때 x를 a의 제곱근이라 한다.

0298 $\sqrt{-2}\sqrt{-8}=\sqrt{2}i\cdot\sqrt{8}i=\sqrt{16}i^2=-4$ 답 -4

0299 $\sqrt{3}\sqrt{-27}=\sqrt{3}\sqrt{27}i=\sqrt{81}i=9i$ 답 $9i$

0300 $\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{-4}}=\frac{4}{\sqrt{4}i}=\frac{4i}{2i^2}=\frac{4i}{-2}=-2i$ 답 $-2i$

0301 $\frac{\sqrt{-30}}{\sqrt{-6}}=\frac{\sqrt{30}i}{\sqrt{6}i}=\sqrt{5}$ 답 $\sqrt{5}$

유형 01 복소수의 뜻과 분류 본책 48쪽

a, b가 실수일 때,

$$\text{복소수 } a+bi \begin{cases} \text{실수 } a & (b=0) \\ \text{허수 } a+bi & (b\neq0) \end{cases}$$

0302 ① 0은 복소수이다.
③ $2-\sqrt{5}i$의 실수부분은 2, 허수부분은 $-\sqrt{5}$이다.
④ $-3i$의 실수부분은 0이다.
⑤ $a=3i$, $b=0$이면 $a+bi=3i$는 허수이다. 답 ②
a가 실수라는 조건이 없으므로 허수일 수도 있다.

0303 허수는 $\sqrt{2}-5i$, $3i$, $\sqrt{3}i$, $5i-2$의 4개이다. 답 4

유형 02 복소수의 사칙연산 본책 48쪽

복소수의 사칙연산 ➡ 허수단위 i를 문자처럼 생각하여 계산한다.

0304 ① $(7+3i)+(4-6i)=11-3i$
② $(i-5)-(2i-9)=4-i$
③ $(1-i^2)(1+i^2)=(1+1)(1-1)=0$
④ $(2-3i)^2=4-12i-9=-5-12i$
⑤ $\frac{1+i}{1-i}+\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1+i)^2+(1-i)^2}{(1-i)(1+i)}=\frac{2i-2i}{2}=0$ 답 ⑤

0305 $(2-i)(3+2i)+\frac{1+\sqrt{2}i}{\sqrt{2}-i}$
$=6+4i-3i+2+\frac{(1+\sqrt{2}i)(\sqrt{2}+i)}{(\sqrt{2}-i)(\sqrt{2}+i)}$
$=8+i+\frac{3i}{3}$
$=8+2i$ 답 $8+2i$

0306 $(5+3i)◎(1-2i)$
$=(5+3i)+(1-2i)-(5+3i)(1-2i)$
$=6+i-(5-10i+3i+6)$
$=6+i-11+7i$
$=-5+8i$ ❶
따라서 구하는 실수부분은 -5이다. ❷
답 -5

채점 기준	비율
❶ $(5+3i)◎(1-2i)$를 계산할 수 있다.	80%
❷ $(5+3i)◎(1-2i)$의 실수부분을 구할 수 있다.	20%

유형 03 복소수가 주어질 때의 식의 값 구하기 본책 48쪽

① 복소수 x에 대한 이차 이상의 식의 값
$x=a+bi$ (a, b는 실수)에서 $x-a=bi$ 꼴로 변형한 후 양변을 제곱하여 이차방정식을 만들고 이것을 주어진 식에 대입한다.
② 켤레복소수인 두 복소수에 대한 식의 값
두 복소수의 합 또는 곱을 구하여 주어진 식에 대입한다.

0307 $x=\frac{1-\sqrt{3}i}{2}$에서 $2x-1=-\sqrt{3}i$
양변을 제곱하면 $4x^2-4x+1=-3$
$4x^2-4x=-4$ $\therefore x^2-x=-1$
이를 주어진 식에 대입하면
$3x^2-3x-2=3(x^2-x)-2$
$=3\cdot(-1)-2$
$=-5$ 답 ①

다른 풀이 $3x^2-3x-2=3\cdot\left(\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)^2-3\cdot\frac{1-\sqrt{3}i}{2}-2$
$=3\cdot\frac{-2-2\sqrt{3}i}{4}-\frac{3}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}i-2$
$=-\frac{3}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{2}i-\frac{3}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}i-2$
$=-5$

0308 $x=2+i$, $y=2-i$에서
$x+y=4$, $xy=5$
$\therefore \frac{y}{x}+\frac{x}{y}=\frac{x^2+y^2}{xy}=\frac{(x+y)^2-2xy}{xy}$
$=\frac{16-10}{5}=\frac{6}{5}$ 답 ⑤

다른 풀이 $\frac{y}{x}+\frac{x}{y}=\frac{2-i}{2+i}+\frac{2+i}{2-i}$

$=\frac{(2-i)^2+(2+i)^2}{(2+i)(2-i)}$

$=\frac{3-4i+3+4i}{5}$

$=\frac{6}{5}$

0309 $x=\overline{2+3i}=2-3i$에서 $x-2=-3i$

양변을 제곱하면 $x^2-4x+4=-9$

$\therefore x^2-4x+13=0$

이를 주어진 식에 대입하면

$-x^3+4x^2-15x+5=-x(x^2-4x+13)-2x+5$

$=-2x+5$

$=-2(2-3i)+5$

$=1+6i$

답 ④

0310 $f(a,\ b)=\frac{a+bi}{a-bi}=\frac{(a+bi)^2}{(a-bi)(a+bi)}$

$=\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}+\frac{2ab}{a^2+b^2}i$

이때 $a=2b$이면

$f(2b,\ b)=\frac{(2b)^2-b^2}{(2b)^2+b^2}+\frac{4b^2}{(2b)^2+b^2}i$

$=\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i\ (\because b\neq 0)$

이므로

$f(2,\ 1)=f(4,\ 2)=\cdots=f(40,\ 20)=\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i$

$\therefore f(2,\ 1)+f(4,\ 2)+\cdots+f(40,\ 20)$

$=\left(\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i\right)\cdot 20$

$=12+16i$

답 $12+16i$

유형 04 복소수 z가 실수 또는 순허수가 되기 위한 조건

본책 49쪽

복소수 $z=a+bi$ (a, b는 실수)에 대하여

① z가 실수 ➡ $b=0$

② z가 순허수 ➡ $a=0$, $b\neq 0$

0311 $(1-i)(1+i)a^2+(2-3i)a-3i$

$=(2a^2+2a)-(3a+3)i$

이 복소수가 순허수가 되려면

$2a^2+2a=0,\ 3a+3\neq 0$

$2a^2+2a=0$에서 $2a(a+1)=0$

$\therefore a=0$ 또는 $a=-1$ …… ㉠

$3a+3\neq 0$에서 $a\neq -1$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $a=0$

답 0

0312 $z=i(a+2i)^2=i(a^2+4ai-4)$

$=-4a+(a^2-4)i$ …➊

이 복소수가 실수가 되려면

$a^2-4=0,\quad a^2=4\quad \therefore a=2\ (\because a>0)$

$\therefore \alpha=2$ …➋

$a=2$를 $z=-4a+(a^2-4)i$에 대입하면

$\beta=-8$ …➌

$\therefore \alpha-\beta=10$ …➍

답 10

채점 기준	비율
➊ z를 (실수부분)+(허수부분)i 꼴로 나타낼 수 있다.	30%
➋ α의 값을 구할 수 있다.	30%
➌ β의 값을 구할 수 있다.	30%
➍ $\alpha-\beta$의 값을 구할 수 있다.	10%

0313 $(1+i)x^2+(2-5i)x-8+6i$

$=(x^2+2x-8)+(x^2-5x+6)i$

이 복소수가 0이 아닌 실수가 되려면

$x^2+2x-8\neq 0,\ x^2-5x+6=0$

$x^2+2x-8\neq 0$에서 $(x+4)(x-2)\neq 0$

$\therefore x\neq -4,\ x\neq 2$ …… ㉠

$x^2-5x+6=0$에서 $(x-2)(x-3)=0$

$\therefore x=2$ 또는 $x=3$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $x=3$

답 ④

유형 05 복소수 z^2이 실수가 되기 위한 조건

본책 49쪽

복소수 $z=a+bi$ (a, b는 실수)에 대하여

① z^2이 실수 ➡ z가 실수 또는 순허수 ➡ $a=0$ 또는 $b=0$

② z^2이 음의 실수 ➡ z가 순허수 ➡ $a=0$, $b\neq 0$

③ z^2이 양의 실수 ➡ z가 0이 아닌 실수 ➡ $a\neq 0$, $b=0$

0314 $z=x(1-i)+2(-2+i)=(x-4)+(-x+2)i$

z^2이 음의 실수가 되려면 z는 순허수이어야 하므로

$x-4=0,\ -x+2\neq 0$

$\therefore x=4$

답 4

0315 z^2이 실수가 되려면 z는 실수 또는 순허수이어야 하므로

$a^2-6a+8=0$ 또는 $a-2=0$

$(a-2)(a-4)=0$ 또는 $a-2=0$

$\therefore a=2$ 또는 $a=4$

따라서 구하는 모든 a의 값의 합은

$2+4=6$

답 ③

다른 풀이 $z^2=(a^2-6a+8)^2+2(a^2-6a+8)(a-2)i-(a-2)^2$

z^2이 실수가 되려면

$2(a^2-6a+8)(a-2)=0,\quad (a-2)^2(a-4)=0$

$\therefore a=2$ 또는 $a=4$

0316 $z=(a+3i)(1+4i)+a(-5+ai)$
$\quad=(-4a-12)+(a^2+4a+3)i$
z^2이 양의 실수가 되려면 z는 0이 아닌 실수이어야 하므로
$\quad -4a-12\neq0,\ a^2+4a+3=0$
$-4a-12\neq0$에서 $\quad a\neq-3 \quad\cdots\cdots$ ㉠
$a^2+4a+3=0$에서 $\quad (a+1)(a+3)=0$
$\quad\therefore a=-1$ 또는 $a=-3 \quad\cdots\cdots$ ㉡
㉠, ㉡에서 $\quad a=-1$ 답 -1

유형 06 복소수가 서로 같을 조건 본책 50쪽

복소수를 포함한 등식에서 실수인 미지수의 값을 구할 때는 실수부분은 실수부분끼리, 허수부분은 허수부분끼리 정리하여 복소수가 서로 같을 조건을 이용한다.
① $a+bi=c+di$ (a, b, c, d는 실수) ➡ $a=c$, $b=d$
② $a+bi=0$ (a, b는 실수) ➡ $a=0$, $b=0$

0317 $2x(2-i)-y(1+3i)=\overline{7-7i}$에서
$\quad 4x-2xi-y-3yi=7+7i$
$\quad (4x-y)+(-2x-3y)i=7+7i$
복소수가 서로 같을 조건에 의하여
$\quad 4x-y=7,\ -2x-3y=7$
위의 두 식을 연립하여 풀면
$\quad x=1,\ y=-3 \qquad \therefore x+y=-2$ 답 ①

0318 $\dfrac{x}{1+2i}+\dfrac{y}{1-2i}=\dfrac{3}{3-i}$에서
$$\frac{x(1-2i)+y(1+2i)}{(1+2i)(1-2i)}=\frac{3(3+i)}{(3-i)(3+i)}$$
$$\frac{(x+y)-2(x-y)i}{5}=\frac{9+3i}{10}$$
$$(x+y)-2(x-y)i=\frac{9}{2}+\frac{3}{2}i \quad\cdots ❶$$
복소수가 서로 같을 조건에 의하여
$$x+y=\frac{9}{2},\ x-y=-\frac{3}{4}$$
위의 두 식을 연립하여 풀면
$$x=\frac{15}{8},\ y=\frac{21}{8} \quad\cdots ❷$$
$$\therefore 2x-y=\frac{9}{8} \quad\cdots ❸$$
답 $\dfrac{9}{8}$

채점 기준	비율
❶ 주어진 등식의 양변을 각각 (실수부분)+(허수부분)i 꼴로 나타낼 수 있다.	40%
❷ x, y의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ $2x-y$의 값을 구할 수 있다.	20%

0319 $x^2+y^2i-x+2yi-6-3i=0$에서
$\quad (x^2-x-6)+(y^2+2y-3)i=0$
복소수가 서로 같을 조건에 의하여
$\quad x^2-x-6=0,\ y^2+2y-3=0$
$x^2-x-6=0$에서 $\quad (x+2)(x-3)=0$
$\quad\therefore x=-2$ 또는 $x=3$
$y^2+2y-3=0$에서 $\quad (y+3)(y-1)=0$
$\quad\therefore y=-3$ 또는 $y=1$
$\quad\therefore xy=-9$ 또는 $xy=-2$ 또는 $xy=3$ 또는 $xy=6$
따라서 xy의 값이 될 수 없는 것은 ②이다. 답 ②

0320 $\dfrac{a}{1+ai}=\dfrac{a(1-ai)}{(1+ai)(1-ai)}=\dfrac{a-a^2i}{1+a^2}$
$$=\frac{a}{1+a^2}-\frac{a^2}{1+a^2}i$$
이므로 $\quad x+yi=\dfrac{a}{1+a^2}-\dfrac{a^2}{1+a^2}i$
복소수가 서로 같을 조건에 의하여
$$x=\frac{a}{1+a^2},\ y=-\frac{a^2}{1+a^2}$$
이때 $2x-y=1$이므로
$$2\cdot\frac{a}{1+a^2}+\frac{a^2}{1+a^2}=1,\qquad \frac{2a+a^2}{1+a^2}=1$$
$$2a+a^2=1+a^2,\qquad 2a=1 \qquad \therefore a=\frac{1}{2}$$
답 $\dfrac{1}{2}$

0321 $a(1+i)-b(1-i)=(a-b)+(a+b)i$
-1의 제곱근은 $\pm i$이므로
(i) $(a-b)+(a+b)i=i$일 때
복소수가 서로 같을 조건에 의하여
$\quad a-b=0,\ a+b=1$
위의 두 식을 연립하여 풀면
$$a=\frac{1}{2},\ b=\frac{1}{2}$$
(ii) $(a-b)+(a+b)i=-i$일 때
복소수가 서로 같을 조건에 의하여
$\quad a-b=0,\ a+b=-1$
위의 두 식을 연립하여 풀면
$$a=-\frac{1}{2},\ b=-\frac{1}{2}$$
(i), (ii)에서 $\quad a^2+b^2=\dfrac{1}{2}$ 답 $\dfrac{1}{2}$

다른 풀이 $\{a(1+i)-b(1-i)\}^2$
$\quad=a^2(1+i)^2-2ab(1+i)(1-i)+b^2(1-i)^2$
$\quad=2a^2i-4ab-2b^2i$
$\quad=-4ab+2(a^2-b^2)i$
이므로 $\quad -4ab+2(a^2-b^2)i=-1$
복소수가 서로 같을 조건에 의하여
$\quad -4ab=-1,\ 2(a^2-b^2)=0$
$$ab=\frac{1}{4},\ a^2=b^2$$
위의 두 식을 연립하여 풀면
$$a=\frac{1}{2},\ b=\frac{1}{2} \text{ 또는 } a=-\frac{1}{2},\ b=-\frac{1}{2}$$

유형 07 켤레복소수의 성질 본책 50쪽

복소수 z의 켤레복소수를 $\bar{z}$라 할 때

① $z+\bar{z}=$(실수) ② $z\bar{z}=$(실수)

③ $z=\bar{z}$ ➡ z는 실수 ④ $z=-\bar{z}$ ➡ z는 순허수 또는 0

0322 $z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하자.

① $z\bar{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2$이므로 실수이다.

② $\frac{1}{z}+\frac{1}{\bar{z}}=\frac{1}{a+bi}+\frac{1}{a-bi}$

$=\frac{a-bi+a+bi}{(a+bi)(a-bi)}=\frac{2a}{a^2+b^2}$

이므로 실수이다.

③ $a+bi=a-bi$에서 $2bi=0$ $\therefore b=0$

따라서 $z=a$이므로 z는 실수이다.

④ $z\bar{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2=0$에서

$a=0$, $b=0$ $\therefore z=0$

⑤ $\bar{z}=a-bi$가 순허수이면 $a=0$, $b\neq0$

따라서 $z=bi$이므로 z도 순허수이다.

답 ②

0323 $\bar{z}=-z$, 즉 $z+\bar{z}=0$이므로 z는 0 또는 순허수이다.

따라서 조건을 만족시키는 것은 $-2i$, $(1+\sqrt{3})i$, 0, i의 4개이다.

답 4

0324 $z=\bar{z}$이고 $z\neq0$이므로 z는 0이 아닌 실수이다.

따라서 $z=(2x^2-5x-3)+(x^2-9)i$에서

$2x^2-5x-3\neq0$, $x^2-9=0$ ··· ❶

$2x^2-5x-3\neq0$에서 $(2x+1)(x-3)\neq0$

$\therefore x\neq-\frac{1}{2}$, $x\neq3$ ······ ㉠ ··· ❷

$x^2-9=0$에서 $x^2=9$

$\therefore x=\pm3$ ······ ㉡ ··· ❸

㉠, ㉡에서 $x=-3$ ··· ❹

답 -3

채점 기준	비율
❶ z가 0이 아닌 실수인 조건을 구할 수 있다.	40%
❷ $2x^2-5x-3\neq0$을 만족시키는 x의 조건을 구할 수 있다.	20%
❸ $x^2-9=0$을 만족시키는 x의 값을 구할 수 있다.	20%
❹ x의 값을 구할 수 있다.	20%

0325 z^2이 실수이므로 $z^2=\bar{z}^2$

$z^2-\bar{z}^2=0$, $(z+\bar{z})(z-\bar{z})=0$

이때 z는 허수이므로 $z\neq\bar{z}$

$\therefore z+\bar{z}=0$

답 ①

참고 z는 순허수이므로 $z=bi$ (b는 0이 아닌 실수)라 하면

$z+\bar{z}=bi-bi=0$

$z\bar{z}=bi\cdot(-bi)=b^2$

0326 ㄱ. z^2+z가 실수이므로 $\overline{z^2+z}$도 실수이다.

ㄴ. $z^2+z=(a+bi)^2+a+bi$

$=a^2+2abi-b^2+a+bi$

$=(a^2+a-b^2)+(2a+1)bi$

이때 z^2+z가 실수이고 $b\neq0$이므로

$2a+1=0$ $\therefore a=-\frac{1}{2}$

$\therefore z+\bar{z}=2a=-1$

ㄷ. $z\bar{z}=\left(-\frac{1}{2}+bi\right)\left(-\frac{1}{2}-bi\right)=\frac{1}{4}+b^2$

이때 b는 0이 아닌 실수이므로

$\frac{1}{4}+b^2>\frac{1}{4}$ $\therefore z\bar{z}>\frac{1}{4}$

이상에서 옳은 것은 ㄴ뿐이다.

답 ②

유형 08 켤레복소수의 성질을 이용하여 식의 값 구하기 본책 51쪽

두 복소수 z_1, z_2의 켤레복소수를 각각 $\bar{z_1}$, $\bar{z_2}$라 할 때

① $\overline{(\bar{z_1})}=z_1$

② $\overline{z_1+z_2}=\bar{z_1}+\bar{z_2}$, $\overline{z_1-z_2}=\bar{z_1}-\bar{z_2}$

③ $\overline{z_1z_2}=\bar{z_1}\cdot\bar{z_2}$, $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\bar{z_1}}{\bar{z_2}}$ (단, $z_2\neq0$)

0327 $\alpha\bar{\alpha}+\bar{\alpha}\beta+\alpha\bar{\beta}+\beta\bar{\beta}=\bar{\alpha}(\alpha+\beta)+\bar{\beta}(\alpha+\beta)$

$=(\alpha+\beta)(\bar{\alpha}+\bar{\beta})$

$=(\alpha+\beta)(\overline{\alpha+\beta})$

이때 $\alpha=3+2i$, $\beta=1-i$이므로

$\alpha+\beta=4+i$, $\overline{\alpha+\beta}=4-i$

$\therefore$ (주어진 식)$=(4+i)(4-i)=17$

답 ②

0328 $\bar{z_1}-\bar{z_2}=\overline{z_1-z_2}=3+2i$이므로

$z_1-z_2=3-2i$

$\bar{z_1}\cdot\bar{z_2}=\overline{z_1z_2}=5+5i$이므로

$z_1z_2=5-5i$

$\therefore (z_1-3)(z_2+3)=z_1z_2+3(z_1-z_2)-9$

$=5-5i+3(3-2i)-9$

$=5-11i$

답 $5-11i$

0329 $\alpha\bar{\beta}=1$이므로 $\bar{\alpha}\beta=\overline{(\alpha\bar{\beta})}=\bar{1}=1$

$\alpha+\bar{\beta}=-i$이므로 $\bar{\alpha}+\beta=\overline{(\alpha+\bar{\beta})}=\overline{-i}=i$

$\therefore \frac{1}{\bar{\alpha}}+\frac{1}{\beta}=\frac{\bar{\alpha}+\beta}{\bar{\alpha}\beta}=i$

답 ④

0330 $z=\frac{w+2}{2w-1}=\frac{2-i+2}{2(2-i)-1}=\frac{4-i}{3-2i}$ ··· ❶

$$\therefore\ z\bar{z}=\frac{4-i}{3-2i}\cdot\overline{\left(\frac{4-i}{3-2i}\right)}=\frac{4-i}{3-2i}\cdot\frac{\overline{4-i}}{\overline{3-2i}}$$
$$=\frac{4-i}{3-2i}\cdot\frac{4+i}{3+2i}=\frac{16+1}{9+4}$$
$$=\frac{17}{13}$$ ··· ❷

답 $\frac{17}{13}$

채점 기준	비율
❶ z를 구할 수 있다.	30%
❷ $z\bar{z}$의 값을 구할 수 있다.	70%

0331 $\alpha\bar{\alpha}=\beta\bar{\beta}=3$에서 $\quad \bar{\alpha}=\frac{3}{\alpha},\ \bar{\beta}=\frac{3}{\beta}$

$\bar{\alpha}+\bar{\beta}=\bar{i}$에서 $\quad \frac{3}{\bar{\alpha}}+\frac{3}{\bar{\beta}}=i$

$$\frac{3(\bar{\alpha}+\bar{\beta})}{\bar{\alpha}\cdot\bar{\beta}}=i,\quad 3(\overline{\alpha+\beta})=i\overline{\alpha\beta},\quad 3\bar{i}=i\overline{\alpha\beta}$$
$$-3i=i\overline{\alpha\beta},\quad \overline{\alpha\beta}=-3$$
$$\therefore\ \alpha\beta=-3$$

답 ①

유형 09 조건을 만족시키는 복소수 구하기 본책 52쪽

복소수 z에 대한 등식이 주어지면 $z=a+bi$ (a, b는 실수)로 놓고 등식에 대입한 후 a, b의 값을 구한다.

0332 $z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면 $\bar{z}=a-bi$이므로
$(2-i)z+4i\bar{z}=1-4i$에서
$$(2-i)(a+bi)+4i(a-bi)=1-4i$$
$$2a+2bi-ai+b+4ai+4b=1-4i$$
$$(2a+5b)+(3a+2b)i=1-4i$$
복소수가 서로 같을 조건에 의하여
$$2a+5b=1,\ 3a+2b=-4$$
위의 두 식을 연립하여 풀면 $\quad a=-2,\ b=1$
$$\therefore\ z=-2+i$$

답 ②

0333 $z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면 $\bar{z}=a-bi$이므로
$z+\bar{z}=4,\ z\bar{z}=20$에서
$$(a+bi)+(a-bi)=4,\ (a+bi)(a-bi)=20$$
$$2a=4,\ a^2+b^2=20$$
위의 두 식을 연립하여 풀면 $\quad a=2,\ b=\pm4$
$$\therefore\ z=2\pm4i$$

답 $2\pm4i$

0334 $z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면 $\bar{z}=a-bi$이므로
$(1+i)z+(1-i)\bar{z}=2$에서
$$(1+i)(a+bi)+(1-i)(a-bi)=2$$
$$a+bi+ai-b+a-bi-ai-b=2$$
$$2(a-b)=2\quad \therefore\ a-b=1$$
따라서 $a-b=1$을 만족시키는 복소수는 ㄴ뿐이다.

답 ②

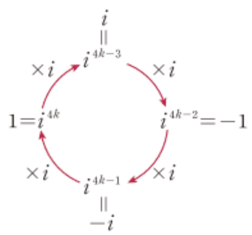
0335 $z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면 $\bar{z}=a-bi$이므로
$(1-2i)z+(2+3i)\bar{z}=-2+2i$에서
$$(1-2i)(a+bi)+(2+3i)(a-bi)=-2+2i$$
$$a+bi-2ai+2b+2a-2bi+3ai+3b=-2+2i$$
$$(3a+5b)+(a-b)i=-2+2i$$ ··· ❶
복소수가 서로 같을 조건에 의하여
$$3a+5b=-2,\ a-b=2$$
위의 두 식을 연립하여 풀면 $\quad a=1,\ b=-1$ ··· ❷
따라서 $z=1-i$이므로
$$z\bar{z}=(1-i)(1+i)=2$$ ··· ❸

답 2

채점 기준	비율
❶ $z=a+bi$로 놓고 주어진 등식에 대입하여 식을 정리할 수 있다.	50%
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	30%
❸ $z\bar{z}$의 값을 구할 수 있다.	20%

유형 10 허수단위 i의 거듭제곱 본책 52쪽

자연수 k에 대하여
$i^{4k-3}=i,\ i^{4k-2}=-1,$
$i^{4k-1}=-i,\ i^{4k}=1$
➡ i^n (n은 자연수)의 값은 4개의 값 i, -1, $-i$, 1이 반복되어 나타나므로 n을 4로 나누었을 때의 나머지가 같으면 그 값이 서로 같다.



0336 자연수 k에 대하여
$$i^{4k-3}=i,\ i^{4k-2}=-1,\ i^{4k-1}=-i,\ i^{4k}=1$$
이므로
$$i+i^2+i^3+\cdots+\underbrace{i^{2020}}_{(i^4)^{505}}$$
$$=(i-1-i+1)+(i-1-i+1)+\cdots+(i-1-i+1)$$
$$=0$$

답 ③

0337 자연수 k에 대하여
$$i^{4k-3}=i,\ i^{4k-2}=-1,\ i^{4k-1}=-i,\ i^{4k}=1$$
이므로
$$i+2i^2+3i^3+\cdots+49i^{49}+50i^{50}$$
$$=(i-2-3i+4)+(5i-6-7i+8)+\cdots+(49i-50)$$
$$=(2-2i)+(2-2i)+\cdots+(2-2i)+(49i-50)$$
$$=12(2-2i)+(49i-50)$$
$$=-26+25i$$
따라서 $-26+25i=a+bi$이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여
$$a=-26,\ b=25\quad \therefore\ a+b=-1$$

답 -1

0338 자연수 k에 대하여
$$i^{4k-3}=i,\ i^{4k-2}=-1,\ i^{4k-1}=-i,\ i^{4k}=1$$
이므로

$$\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\cdots+\frac{1}{i^n}$$
$$=\frac{1}{i}-1-\frac{1}{i}+1+\cdots+\frac{1}{i^n}$$
$$=-i-1+i+1-\cdots+\frac{1}{i^n}$$
$$=\begin{cases}-i & (n=4m-3)\\ -1-i & (n=4m-2)\\ -1 & (n=4m-1)\\ 0 & (n=4m)\end{cases}\ (m\text{은 자연수})$$

즉 주어진 등식을 만족시키는 경우는 $n=4m-1$ (m은 자연수)일 때이다.

이때 $n\le 50$이므로

$$4m-1\le 50,\quad 4m\le 51\quad \therefore m\le\frac{51}{4}$$

따라서 자연수 m은 1, 2, ⋯, 12의 12개이므로 구하는 n의 개수도 12이다. 답 12

0339 (i) $m=4k-3$ (k는 자연수)일 때

$i^{4k-3}=i$, $\underbrace{(-i)^{4k-3}}_{(-i)^{4k-3}=-i^{4k-3}=-i}=-i$이므로

$$z_m=\frac{i}{2}+\frac{-i}{2}=0$$

(ii) $m=4k-2$ (k는 자연수)일 때

$i^{4k-2}=-1$, $(-i)^{4k-2}=-1$이므로

$$z_m=\frac{-1}{2}+\frac{-1}{2}=-1$$

(iii) $m=4k-1$ (k는 자연수)일 때

$i^{4k-1}=-i$, $(-i)^{4k-1}=i$이므로

$$z_m=\frac{-i}{2}+\frac{i}{2}=0$$

(iv) $m=4k$ (k는 자연수)일 때

$i^{4k}=1$, $(-i)^{4k}=1$이므로

$$z_m=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$

ㄱ. $m=4k$ (k는 자연수)이면 $z_m=1$이다.

ㄴ. $100=4\cdot 25$, $102=4\cdot 26-2$이므로

$z_{100}=1$, $z_{102}=-1$

$\therefore z_{100}\ne z_{102}$

ㄷ. 임의의 자연수 m에 대하여 z_m은 실수이므로 $z_m=\overline{z_m}$이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

유형 11 복소수의 거듭제곱

본책 53쪽

복소수 z에 대하여 z^n (n은 자연수)의 값을 구할 때는 다음을 이용한다.

① $(1\pm i)^n$ 꼴 ➡ $(1\pm i)^2=\pm 2i$ (복호동순)

② $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^n$, $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^n$ 꼴 ➡ $\frac{1+i}{1-i}=i$, $\frac{1-i}{1+i}=-i$

0340 $(1+i)^{100}=\{(1+i)^2\}^{50}=(2i)^{50}$
$=2^{50}\cdot(i^4)^{12}\cdot i^2=-2^{50}$

$(1-i)^{100}=\{(1-i)^2\}^{50}=(-2i)^{50}=(2i)^{50}$
$=2^{50}\cdot(i^4)^{12}\cdot i^2=-2^{50}$

$\therefore (1+i)^{100}-(1-i)^{100}=-2^{50}-(-2^{50})=0$ 답 ③

0341 $\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=\frac{-2i}{2}=-i$,

$\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\frac{2i}{2}=i$

$\therefore \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{30}+\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{30}=(-i)^{30}+i^{30}=i^{30}+i^{30}$
$=(i^4)^7\cdot i^2+(i^4)^7\cdot i^2$
$=-1-1=-2$ 답 ①

0342 $z^2=\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{2i}{2}=i$이므로 $z^4=-1$

$\therefore z^2-z^3+z^4-\cdots+z^{10}$
$=(z^2-z^3+z^4-z^5)+z^4(z^2-z^3+z^4-z^5)+z^{10}$
$=(z^2-z^3+z^4-z^5)-(z^2-z^3+z^4-z^5)+z^{10}$
$=z^{10}=(z^2)^5=i^5=i$ 답 i

다른 풀이 $z^2=i$이므로

$z^2+z^4+z^6+z^8=i-1-i+1=0$

$\therefore z^2-z^3+z^4-\cdots+z^{10}$
$=(z^2+z^4+z^6+z^8)-z(z^2+z^4+z^6+z^8)+z^{10}$
$=z^{10}=i$

0343 $\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\frac{2i}{2}=i$,

$\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=\frac{-2i}{2}=-i$

$\therefore f(n)=\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2n}-\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{4n}$
$=i^{2n}-(-i)^{4n}=(-1)^n-1$

즉 n이 짝수일 때 $f(n)=0$이고, n이 홀수일 때 $f(n)=-2$이므로

$f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(100)$
$=-2+0-2+\cdots+0=-100$ 답 -100

유형 12 음수의 제곱근의 계산

본책 54쪽

(1) $\sqrt{-a}=\sqrt{a}\,i$ $(a>0)$임을 이용하여 음수의 제곱근을 허수단위 i를 사용하여 나타낸다.

(2) 음수의 제곱근의 성질을 이용하여 계산한다.

① $a<0$, $b<0$ ➡ $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$

② $a>0$, $b<0$ ➡ $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\frac{a}{b}}$

0344 ① $\sqrt{-3}\sqrt{7}=\sqrt{3}i\cdot\sqrt{7}=\sqrt{21}i=\sqrt{-21}$

② $\sqrt{-3}\sqrt{-7}=\sqrt{3}i\cdot\sqrt{7}i=\sqrt{21}i^2=-\sqrt{21}$

③ $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{-7}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}i}=\frac{\sqrt{3}i}{-\sqrt{7}}=-\sqrt{\frac{3}{7}}i=-\sqrt{-\frac{3}{7}}$

④ $\dfrac{\sqrt{-3}}{\sqrt{-7}}=\dfrac{\sqrt{3}i}{\sqrt{7}i}=\sqrt{\dfrac{3}{7}}$

⑤ $\dfrac{\sqrt{-3}}{\sqrt{7}}=\dfrac{\sqrt{3}i}{\sqrt{7}}=\sqrt{\dfrac{3}{7}}i=\sqrt{-\dfrac{3}{7}}$ 답 ②

0345 $\sqrt{-3}\sqrt{-12}+\sqrt{-4}\sqrt{9}+\dfrac{\sqrt{-8}}{\sqrt{-2}}+\dfrac{\sqrt{64}}{\sqrt{-4}}$

$=-\sqrt{36}+\sqrt{-36}+\sqrt{4}-\sqrt{-16}$

$=-6+6i+2-4i$

$=-4+2i$ ··· ❶

따라서 $-4+2i=a+bi$이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$a=-4,\ b=2$ ··· ❷

$\therefore\ a+b=-2$ ··· ❸

답 -2

채점 기준	비율
❶ 주어진 식의 좌변을 간단히 할 수 있다.	50%
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	30%
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	20%

0346 $0<a<1$이므로 $a-1<0,\ 1-a>0$

$\therefore\ \sqrt{a-1}\times\sqrt{1-a}-\dfrac{\sqrt{1-a}}{\sqrt{a-1}}\times\sqrt{\dfrac{a-1}{1-a}}+\sqrt{a}\times\sqrt{-a}$

$=\sqrt{1-a}\,i\times\sqrt{1-a}-\dfrac{\sqrt{1-a}}{\sqrt{1-a}\,i}\times\sqrt{-\dfrac{1-a}{1-a}}+\sqrt{a}\times\sqrt{a}\,i$

$=(1-a)i-\dfrac{1}{i}\times i+ai$

$=i-1$ 답 $i-1$

유형 13 음수의 제곱근의 성질

본책 54쪽

두 실수 a, b에 대하여

① $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$ ➡ $a<0,\ b<0$ 또는 $a=0$ 또는 $b=0$

② $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\dfrac{a}{b}}$ ➡ $a>0,\ b<0$ 또는 $a=0,\ b\neq0$

0347 $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$이므로 $a<0,\ b<0$

즉 $-a>0$이므로 $\dfrac{\sqrt{-a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{-\dfrac{a}{b}}$ 답 ④

0348 $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\dfrac{a}{b}}$이므로 $a>0,\ b<0$

① $\sqrt{a^2b}=\sqrt{a^2}\cdot\sqrt{b}=a\sqrt{b}$

② $\sqrt{ab^2}=\sqrt{a}\cdot\underbrace{\sqrt{b^2}}_{\sqrt{b^2}=|b|=-b}=-b\sqrt{a}$

③ $\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}=\sqrt{\dfrac{b}{a}}$

④ $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$

⑤ $\sqrt{-a}\sqrt{b}=-\sqrt{-ab}$ 답 ②

0349 $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$에서 $a<0,\ b<0$

$\dfrac{\sqrt{c}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\dfrac{c}{b}}$에서 $b<0,\ c>0$

$\therefore\ \sqrt{a^2}+\sqrt{c^2}-\overbrace{|b-c|}^{b<0,\ c>0\text{이므로}\quad b-c<0}=-a+c+(b-c)$

$=-a+b$ 답 ②

0350 전략 복소수가 서로 같을 조건을 이용하여 자연수 a, b가 존재하는 것을 찾는다.

풀이 a, b가 자연수일 때

$az_1+bz_2=a(1-i)+b(1+i)$

$=(a+b)+(-a+b)i$

ㄱ. $a+b=3,\ -a+b=5$이므로 $\underbrace{a=-1}_{\text{자연수가 아니다.}},\ b=4$

ㄴ. $a+b=4,\ -a+b=2$이므로 $a=1,\ b=3$

ㄷ. $a+b=5,\ -a+b=-1$이므로 $a=3,\ b=2$

이상에서 az_1+bz_2 꼴로 나타낼 수 있는 복소수는 ㄴ, ㄷ이다.

답 ④

0351 전략 주어진 교류 전기회로를 직렬연결, 병렬연결했을 때의 전체 임피던스를 각각 구한 후 그 크기를 구한다.

풀이 직렬연결했을 때의 전체 임피던스를 $z=R_1+X_1i$, 병렬연결했을 때의 전체 임피던스를 $z'=R_2+X_2i$라 하자.

$z=(1+i)+(1-i)=2$이므로

$R_1+X_1i=2$

즉 $R_1=2,\ X_1=0$이므로

$a=|z|=\sqrt{2^2+0^2}=2$

$\dfrac{1}{z'}=\dfrac{1}{1+i}+\dfrac{1}{1-i}=\dfrac{1-i+1+i}{(1+i)(1-i)}=1$에서 $z'=1$이므로

$R_2+X_2i=1$

즉 $R_2=1,\ X_2=0$이므로

$b=|z'|=\sqrt{1^2+0^2}=1$

$\therefore\ ab=2$ 답 2

0352 전략 $x^2=a+bi$ (a, b는 실수)에서 $x^2-a=bi$ 꼴로 변형한 후 양변을 제곱한다.

풀이 $x^2=-1+3i$에서 $x^2+1=3i$

양변을 제곱하면 $x^4+2x^2+1=-9$

$\therefore\ x^4+2x^2+10=0$

양변을 x로 나누면 $x^3+2x+\dfrac{10}{x}=0$

이를 주어진 식에 대입하면

$x^4+x^3+4x^2+2x+\dfrac{10}{x}$

$=x^4+4x^2+\left(x^3+2x+\dfrac{10}{x}\right)$

$=x^4+4x^2$

$=(x^4+2x^2)+2x^2$

$=2x^2-10$

$=2(-1+3i)-10$

$=-12+6i$ 답 ②

0353 전략 $z^3-(-\overline{z})^3=0$임을 이용한다.

풀이 조건 (나)에서 $z^3=(-\overline{z})^3$이므로

$$\begin{aligned} z^3-(-\overline{z})^3&=z^3+(\overline{z})^3 \\ &=(z+\overline{z})\{z^2-z\overline{z}+(\overline{z})^2\} \\ &=(z+\overline{z})\{(z+\overline{z})^2-3z\overline{z}\}=0 \end{aligned}$$

이때

$$z+\overline{z}=\{\sqrt{3}x+(x-2)i\}+\{\sqrt{3}x-(x-2)i\}=2\sqrt{3}x,$$

$$\begin{aligned} z\overline{z}&=\{\sqrt{3}x+(x-2)i\}\{\sqrt{3}x-(x-2)i\} \\ &=(\sqrt{3}x)^2+(x-2)^2=4x^2-4x+4 \end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned} &(z+\overline{z})\{(z+\overline{z})^2-3z\overline{z}\} \\ &=2\sqrt{3}x\{(2\sqrt{3}x)^2-3(4x^2-4x+4)\} \\ &=2\sqrt{3}x(12x-12) \\ &=24\sqrt{3}x(x-1)=0 \end{aligned}$$

$\therefore x=0$ 또는 $x=1$

따라서 모든 실수 x의 값의 합은 1이다. 답 ④

0354 전략 $z=a+bi$ (a, b는 실수)에 대하여 $\overline{z}=a-bi$임을 이용하여 z_n을 z_1 또는 z_2로 나타낸다.

풀이 $z_2=\overline{(1+2i)}(1+i)=(1-2i)(1+i)=3-i$

$z_3=\overline{(3-i)}(1+i)=(3+i)(1+i)=2+4i=2z_1$

$z_4=\overline{2z_1}(1+i)=2\overline{z_1}(1+i)=2z_2$

$z_5=\overline{2z_2}(1+i)=2\overline{z_2}(1+i)=2z_3=2^2z_1$

$z_6=\overline{2^2z_1}(1+i)=2^2\overline{z_1}(1+i)=2^2z_2$

$z_7=\overline{2^2z_2}(1+i)=2^2\overline{z_2}(1+i)=2^2z_3=2^3z_1$

⋮

$\therefore z_{2k+1}=2^kz_1$, $z_{2k+2}=2^kz_2$ (k는 자연수)

따라서 $z_{100}=2^{49}z_2=2^{49}(3-i)$이므로 z_{100}의 실수부분은 $3\cdot2^{49}$이다.

답 ③

0355 전략 $z_1=a+bi$ (a, b는 실수)로 놓고 복소수의 연산과 켤레복소수의 성질을 이용한다.

풀이 $z_1=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면 $\overline{z_1}=a-bi$이다.

조건 (가)에서

$z_2=-\overline{z_1}=-a+bi$

$z_1z_2=-a^2-b^2=-4$, 즉 $a^2+b^2=4$ …… ㉠

조건 (나)에서

$$\begin{aligned} (\overline{z_1}+2)(\overline{z_2}+2)&=\overline{z_1}\,\overline{z_2}+2(\overline{z_1}+\overline{z_2})+4 \\ &=\overline{z_1z_2}+2(\overline{z_1+z_2})+4 \\ &=-4+2(-2bi)+4 \\ &=-4bi \end{aligned}$$

즉 $-4bi=4i$이므로 $b=-1$

㉠에 $b=-1$을 대입하면 $a^2+1=4$

$a^2=3$ $\therefore a=\pm\sqrt{3}$

조건 (다)에서 $z_1+\overline{z_1}=2a>0$이므로 $a>0$

$\therefore a=\sqrt{3}$

따라서 $z_1=\sqrt{3}-i$, $z_2=-\sqrt{3}-i$이므로

$$\begin{aligned} z_1{}^2-z_2{}^2&=(z_1+z_2)(z_1-z_2) \\ &=(-2i)\cdot2\sqrt{3} \\ &=-4\sqrt{3}i \end{aligned}$$

답 ①

0356 전략 $\dfrac{\overline{z}}{z}$의 허수부분이 0임을 이용하여 z를 구한다.

풀이 $\overline{z}=a+i$이므로

$$\begin{aligned} \frac{\overline{z}}{z}&=\frac{a-i}{a+i}=\frac{(a-i)^2}{(a+i)(a-i)} \\ &=\frac{a^2-1-2ai}{a^2+1} \end{aligned}$$

$\dfrac{\overline{z}}{z}$가 실수이므로 $a=0$

따라서 $z=-i$이므로

$z^2=(-i)^2=i^2=-1$,

$z^3=(-1)\cdot(-i)=i$,

$z^4=(z^2)^2=(-1)^2=1$,

$z^5=z=-i$,

⋮

$$\begin{aligned} \therefore\ &1+z+z^2+z^3+\cdots+z^{100} \\ &=1+(-i-1+i+1)+(-i-1+i+1) \\ &\quad+\cdots+(-i-1+i+1) \\ &=1 \end{aligned}$$

답 1

0357 전략 복소수의 거듭제곱의 성질을 이용하여 z_1, z_2, z_3, z_4를 구한다.

풀이 $z_1=i^2(1+i)=-1-i$이므로

$P_{z_1}=-x-y$

$z_2=i^3(1+i)^2=(-i)\cdot2i=-2i^2=2$이므로

$P_{z_2}=2x$

$z_3=i^4(1+i)^3=2i(1+i)=2i+2i^2=-2+2i$이므로

$P_{z_3}=-2x+2y$

$z_4=i^5(1+i)^4=i\cdot(2i)^2=-4i$이므로

$P_{z_4}=-4y$

$$\begin{aligned} \therefore\ &(P_{z_1}+P_{z_2})-(P_{z_3}+P_{z_4}) \\ &=(-x-y+2x)-(-2x+2y-4y) \\ &=3x+y \end{aligned}$$

즉 $P_w=3x+y$이므로 $w=3+i$ 답 ②

0358 전략 복소수의 거듭제곱의 성질을 이용한다.

풀이 ㄱ. $z_2=\left(\dfrac{\sqrt{2}i}{1+i}\right)^2=\dfrac{-2}{2i}=-\dfrac{1}{i}=i$

ㄴ. $z_2=i$이므로

$$\begin{aligned} z_6&=\left(\frac{\sqrt{2}i}{1+i}\right)^6=\left\{\left(\frac{\sqrt{2}i}{1+i}\right)^2\right\}^3 \\ &=z_2{}^3=i^3=-i=-z_2 \end{aligned}$$

ㄷ. $z_8=\left(\frac{\sqrt{2}i}{1+i}\right)^8=\left(\frac{\sqrt{2}i}{1+i}\right)^2\left(\frac{\sqrt{2}i}{1+i}\right)^6$

$=z_2z_6=i\cdot(-i)=1$

이므로

$$z_{n+8}=\left(\frac{\sqrt{2}i}{1+i}\right)^{n+8}=\left(\frac{\sqrt{2}i}{1+i}\right)^n\cdot\left(\frac{\sqrt{2}i}{1+i}\right)^8$$

$$=z_n\cdot z_8=z_n$$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

0359 전략 주어진 수들의 곱이 -32인 경우를 나누어 n의 값을 구한다.

풀이 주사위를 던져서 0, 3, 5가 적어도 한 번 나오면 나온 수들의 곱이 -32가 될 수 없다.

또 $(2i)^2=-4$, $(1+i)^2\cdot 2i=-4$, $(1+i)^4=-4$이고 $32=2^5$이므로 $n\geq 5$이어야 한다.

(i) 2가 3번, $2i$가 2번 나오는 경우

$2^3\cdot(2i)^2=8\cdot(-4)=-32$

$\therefore n=5$

(ii) 2가 3번, $1+i$가 2번, $2i$가 1번 나오는 경우

$2^3\cdot(1+i)^2\cdot 2i=8\cdot(-4)=-32$

$\therefore n=6$

(iii) 2가 3번, $1+i$가 4번 나오는 경우

$2^3\cdot(1+i)^4=8\cdot(-4)=-32$

$\therefore n=7$

이상에서 가능한 n의 값은 5, 6, 7이므로 구하는 합은

$5+6+7=18$ 답 18

0360 전략 X, Y가 실수일 때, $|X|+|Y|=0$이면 $X=0$, $Y=0$임을 이용한다.

풀이 조건 (가)에서 $a<0$, $b>0$ $\therefore a<b$

조건 (나)에서 $b+c=0$, $a+b-2=0$

$\therefore c=-b$, $a=-b+2=c+2$

$\therefore c<a<b$ 답 ④

SSEN 특강

절댓값의 성질

실수 a, b에 대하여 $|a|\geq 0$, $|b|\geq 0$이므로 $|a|+|b|=0$이면

$|a|=0$, $|b|=0$ $\therefore a=0, b=0$

0361 전략 연산을 시행한 결과를 이용하여 방정식을 세운다.

풀이 어떤 수 x를 연산 장치 A에 두 번 넣은 후 출력된 값은

$$\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^2x=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}x \quad \cdots ❶$$

연산 장치 B에 넣은 후 출력된 값은

$$\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}x\cdot\frac{1-\sqrt{3}i}{2}=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}x \quad \cdots ❷$$

따라서 연산 장치 C에 넣었을 때 출력된 값이 1이 되려면

$$\frac{2}{(1+\sqrt{3}i)x}=1, \qquad (1+\sqrt{3}i)x=2$$

$$\therefore x=\frac{2}{1+\sqrt{3}i}=\frac{2(1-\sqrt{3}i)}{(1+\sqrt{3}i)(1-\sqrt{3}i)}=\frac{1-\sqrt{3}i}{2} \quad \cdots ❸$$

답 $\frac{1-\sqrt{3}i}{2}$

채점 기준	비율
❶ x를 연산 장치 A에 두 번 넣은 후 출력된 값을 간단히 할 수 있다.	30%
❷ 연산 장치 B에 넣은 후 출력된 값을 간단히 할 수 있다.	30%
❸ x의 값을 구할 수 있다.	40%

0362 전략 $z=a+bi$ (a, b는 실수)로 놓고 주어진 조건을 만족시키는 a, b의 값을 구한다.

풀이 $z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면 $\overline{z}=a-bi$이다.

조건 (가)에서

$(1+2i)+z=1+2i+a+bi=(a+1)+(b+2)i$

가 양의 실수이므로

$a+1>0$, $b+2=0$

$\therefore a>-1$, $b=-2$ $\cdots$ ❶

조건 (나)에서

$z\overline{z}=(a+bi)(a-bi)=6$

이므로 $a^2+b^2=6$

$a^2=2$ $\therefore a=\pm\sqrt{2}$

그런데 $a>-1$이므로 $a=\sqrt{2}$ $\cdots$ ❷

$$\therefore \frac{z+\overline{z}}{2}=\frac{(\sqrt{2}-2i)+(\sqrt{2}+2i)}{2}$$

$$=\frac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2} \quad \cdots ❸$$

답 $\sqrt{2}$

채점 기준	비율
❶ $z=a+bi$로 놓고 a의 값의 범위와 b의 값을 구할 수 있다.	50%
❷ a의 값을 구할 수 있다.	30%
❸ $\frac{z+\overline{z}}{2}$의 값을 구할 수 있다.	20%

0363 전략 $z=a+bi$ (a, b는 실수)로 놓고 주어진 식에 대입하여 a, b의 값을 구한다.

풀이 $z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면 $\overline{z}=a-bi$이므로

$\frac{2z-\overline{z}}{z\overline{z}}=1-i$에서

$$\frac{2(a+bi)-(a-bi)}{(a+bi)(a-bi)}=1-i$$

$$\frac{a}{a^2+b^2}+\frac{3b}{a^2+b^2}i=1-i \quad \cdots ❶$$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$\frac{a}{a^2+b^2}=1, \quad \frac{3b}{a^2+b^2}=-1$$

$a^2+b^2=a$, $a^2+b^2=-3b$

즉 $a=-3b$이므로 $\quad 10b^2=-3b$

$b(10b+3)=0 \quad \therefore b=0$ 또는 $b=-\frac{3}{10}$

그런데 $b=0$이면 $a=0$이고 $z=0$이므로 $\quad b=-\frac{3}{10}$

$\therefore a=-3b=\frac{9}{10}$ ··· ❷

$\therefore z=\frac{9}{10}-\frac{3}{10}i$ ··· ❸

답 $\frac{9}{10}-\frac{3}{10}i$

채점 기준	비율
❶ $z=a+bi$로 놓고 주어진 등식에 대입하여 식을 정리할 수 있다.	50%
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ z를 구할 수 있다.	10%

0364 전략 자연수 n에 대하여 $(\bar{z})^n=\overline{z^n}$임을 이용한다.

풀이 $z^4=\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$이므로 $\quad \overline{z^4}=\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$

즉 $(\bar{z})^4=\overline{z^4}=\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$이므로 ··· ❶

$$(\bar{z})^{1000}=\{(\bar{z})^4\}^{250}=\left(\frac{-1-i}{\sqrt{2}}\right)^{250}$$
$$=\left\{\left(\frac{-1-i}{\sqrt{2}}\right)^2\right\}^{125}=\left(\frac{2i}{2}\right)^{125}$$
$$=i^{125}=i$$ ··· ❷

답 i

채점 기준	비율
❶ $(\bar{z})^4$을 구할 수 있다.	40%
❷ $(\bar{z})^{1000}$을 구할 수 있다.	60%

0365 전략 z^n (n은 자연수)의 규칙성을 찾는다.

풀이 $z^2+\bar{z}=(a+bi)^2+(a-bi)$
$=(a^2-b^2+a)+(2ab-b)i$

$z^2+\bar{z}=0$이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$a^2-b^2+a=0$ ······ ㉠

$2ab-b=0 \quad \therefore b(2a-1)=0$ ······ ㉡

이때 $b>0$이므로 ㉡에서 $\quad a=\frac{1}{2}$

㉠에 $a=\frac{1}{2}$을 대입하면

$b^2=\frac{3}{4} \quad \therefore b=\frac{\sqrt{3}}{2}\ (\because b>0)$

$\therefore z=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$ ··· ❶

따라서

$$z^2=\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^2=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2},$$
$$z^3=z\cdot z^2=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\cdot\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}=-1,$$
$$z^4=z\cdot z^3=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\cdot(-1)=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2},$$
$$z^5=z^2\cdot z^3=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\cdot(-1)=\frac{1-\sqrt{3}i}{2},$$
$$z^6=(z^3)^2=1$$

이므로 z^n이 정수이려면 n은 3의 배수이어야 한다.
즉 구하는 자연수 n의 개수는 100 이하의 자연수 중 3의 배수의 개수와 같으므로 33이다. ··· ❷

답 33

채점 기준	비율
❶ z를 구할 수 있다.	40%
❷ 자연수 n의 개수를 구할 수 있다.	60%

04 이차방정식

0366 $x^2-x-20=0$에서 $(x+4)(x-5)=0$

$\therefore x=-4$ 또는 $x=5$ 답 $x=-4$ 또는 $x=5$

0367 $9x^2-6x+1=0$에서 $(3x-1)^2=0$

$\therefore x=\frac{1}{3}$(중근) 답 $x=\frac{1}{3}$(중근)

0368 $5x^2-9x-2=0$에서 $(5x+1)(x-2)=0$

$\therefore x=-\frac{1}{5}$ 또는 $x=2$ 답 $x=-\frac{1}{5}$ 또는 $x=2$

0369 $x^2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}=0$의 양변에 2를 곱하면

$2x^2-x-1=0$, $(2x+1)(x-1)=0$

$\therefore x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=1$ 답 $x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=1$

0370 $x=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot1\cdot(-1)}}{2\cdot1}$

$=\frac{3\pm\sqrt{13}}{2}$ 답 $x=\frac{3\pm\sqrt{13}}{2}$

0371 $x=\frac{-5\pm\sqrt{5^2-4\cdot2\cdot4}}{2\cdot2}=\frac{-5\pm\sqrt{-7}}{4}$

$=\frac{-5\pm\sqrt{7}i}{4}$ 답 $x=\frac{-5\pm\sqrt{7}i}{4}$

0372 $3x^2-2\cdot2x+2=0$이므로

$x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-3\cdot2}}{3}=\frac{2\pm\sqrt{-2}}{3}$

$=\frac{2\pm\sqrt{2}i}{3}$ 답 $x=\frac{2\pm\sqrt{2}i}{3}$

0373 $9x^2+2\cdot3x+5=0$이므로

$x=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-9\cdot5}}{9}=\frac{-3\pm\sqrt{-36}}{9}$

$=\frac{-3\pm6i}{9}=\frac{-1\pm2i}{3}$ 답 $x=\frac{-1\pm2i}{3}$

0374 $2x^2-5x+2=0$에서 $(2x-1)(x-2)=0$

$\therefore x=\frac{1}{2}$ 또는 $x=2$ 답 $x=\frac{1}{2}$ 또는 $x=2$, 실근

0375 $9x^2-12x+4=0$에서 $(3x-2)^2=0$

$\therefore x=\frac{2}{3}$(중근) 답 $x=\frac{2}{3}$(중근), 실근

0376 $x^2+4=0$에서 $\underline{x^2=-4}$

$x=\pm\sqrt{-4}$
$=\pm\sqrt{4}i=\pm2i$

$\therefore x=\pm2i$ 답 $x=\pm2i$, 허근

0377 $x=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot1}}{4}=\frac{1\pm\sqrt{-3}}{4}$

$=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{4}$ 답 $x=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{4}$, 허근

0378 $x^2+3|x|-4=0$에서

(i) $x<0$일 때, $x^2-3x-4=0$

$(x+1)(x-4)=0$ $\therefore x=-1$ 또는 $x=4$

그런데 $x<0$이므로 $x=-1$

(ii) $x\geq0$일 때, $x^2+3x-4=0$

$(x+4)(x-1)=0$ $\therefore x=-4$ 또는 $x=1$

그런데 $x\geq0$이므로 $x=1$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 해는

$x=\pm1$ 답 $x=\pm1$

다른 풀이 $x^2=|x|^2$이므로 주어진 방정식은

$|x|^2+3|x|-4=0$, $(|x|+4)(|x|-1)=0$

그런데 $|x|\geq0$이므로 $|x|=1$

$\therefore x=\pm1$

0379 $x^2-5|x|+2=0$에서

(i) $x<0$일 때, $x^2+5x+2=0$

$\therefore x=\frac{-5\pm\sqrt{5^2-4\cdot1\cdot2}}{2\cdot1}$

$=\frac{-5\pm\sqrt{17}}{2}$

(ii) $x\geq0$일 때, $x^2-5x+2=0$

$\therefore x=\frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot1\cdot2}}{2\cdot1}$

$=\frac{5\pm\sqrt{17}}{2}$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 해는

$x=\frac{-5\pm\sqrt{17}}{2}$ 또는 $x=\frac{5\pm\sqrt{17}}{2}$

답 $x=\frac{-5\pm\sqrt{17}}{2}$ 또는 $x=\frac{5\pm\sqrt{17}}{2}$

참고 (i)에서 $\frac{-5+\sqrt{17}}{2}<0$, $\frac{-5-\sqrt{17}}{2}<0$이므로 두 수 모두 근이다.

마찬가지로 (ii)에서 $\frac{5+\sqrt{17}}{2}>0$, $\frac{5-\sqrt{17}}{2}>0$이므로 두 수 모두 근이다.

0380 주어진 이차방정식의 판별식을 D라 하면
$D=3^2-4\cdot7\cdot(-1)=37>0$
따라서 서로 다른 두 실근을 갖는다. 답 서로 다른 두 실근

0381 $4x^2+2\cdot(-6)x+9=0$이므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=(-6)^2-4\cdot9=0$
따라서 중근을 갖는다. 답 중근

0382 $x^2+2\cdot\sqrt{3}x+5=0$이므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=(\sqrt{3})^2-1\cdot5=-2<0$
따라서 서로 다른 두 허근을 갖는다. 답 서로 다른 두 허근

0383 보기에 주어진 각 이차방정식의 판별식을 D라 하면
ㄱ. $D=5^2-4\cdot1\cdot3=13>0$
ㄴ. $D=(-3)^2-4\cdot2\cdot2=-7<0$
ㄷ. $\frac{D}{4}=1^2-1\cdot(-6)=7>0$
ㄹ. $\frac{D}{4}=(-2)^2-4\cdot1=0$
ㅁ. $\frac{D}{4}=2^2-2\cdot3=-2<0$
ㅂ. $\frac{D}{4}=1^2-2\cdot(-1)=3>0$
(1) 서로 다른 두 실근을 가지면 $D>0$이므로 ㄱ, ㄷ, ㅂ
(2) 중근을 가지면 $D=0$이므로 ㄹ
(3) 서로 다른 두 허근을 가지면 $D<0$이므로 ㄴ, ㅁ
답 (1) ㄱ, ㄷ, ㅂ (2) ㄹ (3) ㄴ, ㅁ

0384 이차방정식 $2x^2-x-k=0$의 판별식을 D라 하면
$D=(-1)^2-4\cdot2\cdot(-k)=1+8k$
(1) 서로 다른 두 실근을 가지려면 $D>0$이어야 하므로
$D=1+8k>0 \quad \therefore k>-\frac{1}{8}$
(2) 중근을 가지려면 $D=0$이어야 하므로
$D=1+8k=0 \quad \therefore k=-\frac{1}{8}$
(3) 서로 다른 두 허근을 가지려면 $D<0$이어야 하므로
$D=1+8k<0 \quad \therefore k<-\frac{1}{8}$
답 (1) $k>-\frac{1}{8}$ (2) $k=-\frac{1}{8}$ (3) $k<-\frac{1}{8}$

0385 이차방정식 $x^2-x+2=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여
(1) $\alpha+\beta=-\frac{-1}{1}=1$
(2) $\alpha\beta=\frac{2}{1}=2$
(3) $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=1^2-2\cdot2=-3$
(4) $(\alpha-1)(\beta-1)=\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1=2-1+1=2$
답 (1) 1 (2) 2 (3) -3 (4) 2

0386 이차방정식 $x^2-3x+1=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여
(1) $\alpha+\beta=-\frac{-3}{1}=3$
(2) $\alpha\beta=\frac{1}{1}=1$
(3) $\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}=\frac{3^2-2\cdot1}{1}=7$
(4) $(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=3^2-4\cdot1=5$이므로
$|\alpha-\beta|=\sqrt{5}$
답 (1) 3 (2) 1 (3) 7 (4) $\sqrt{5}$

0387 $x^2-(-4+3)x+(-4)\cdot3=0$
$\therefore x^2+x-12=0$ 답 $x^2+x-12=0$

0388 $x^2-\{(3+\sqrt{2})+(3-\sqrt{2})\}x+(3+\sqrt{2})(3-\sqrt{2})=0$
$\therefore x^2-6x+7=0$ 답 $x^2-6x+7=0$

0389 $x^2-\{(2+i)+(2-i)\}x+(2+i)(2-i)=0$
$\therefore x^2-4x+5=0$ 답 $x^2-4x+5=0$

0390 $3\left\{x^2-\left(-\frac{1}{3}+1\right)x+\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot1\right\}=0$
$3\left(x^2-\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}\right)=0 \quad \therefore 3x^2-2x-1=0$
답 $3x^2-2x-1=0$

0391 $8\left\{x^2-\left(-\frac{3}{2}-\frac{1}{4}\right)x+\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)\right\}=0$
$8\left(x^2+\frac{7}{4}x+\frac{3}{8}\right)=0 \quad \therefore 8x^2+14x+3=0$
답 $8x^2+14x+3=0$

0392 두 수 α, β를 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은
$x^2-2x-7=0$
$\therefore x=-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-1\cdot(-7)}=1\pm2\sqrt{2}$
이때 $\alpha<\beta$이므로 $\alpha=1-2\sqrt{2}$, $\beta=1+2\sqrt{2}$
답 $\alpha=1-2\sqrt{2}$, $\beta=1+2\sqrt{2}$

0393 두 수 α, β를 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은
$x^2+3x-1=0$
$\therefore x=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot1\cdot(-1)}}{2}=\frac{-3\pm\sqrt{13}}{2}$
이때 $\alpha<\beta$이므로 $\alpha=\frac{-3-\sqrt{13}}{2}$, $\beta=\frac{-3+\sqrt{13}}{2}$
답 $\alpha=\frac{-3-\sqrt{13}}{2}$, $\beta=\frac{-3+\sqrt{13}}{2}$

04 이차방정식

0394 $x^2+x-4=0$에서 근의 공식에 의하여

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot1\cdot(-4)}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{17}}{2}$$

$$\therefore x^2+x-4=\left(x-\frac{-1+\sqrt{17}}{2}\right)\left(x-\frac{-1-\sqrt{17}}{2}\right)$$

$$=\left(x+\frac{1-\sqrt{17}}{2}\right)\left(x+\frac{1+\sqrt{17}}{2}\right)$$

답 $\left(x+\frac{1-\sqrt{17}}{2}\right)\left(x+\frac{1+\sqrt{17}}{2}\right)$

0395 $x^2+25=0$에서 $x^2=-25$ $\therefore x=\pm5i$

$\therefore x^2+25=(x+5i)(x-5i)$ 답 $(x+5i)(x-5i)$

0396 $x^2+2x-5=0$에서 근의 공식에 의하여

$x=-1\pm\sqrt{1^2-1\cdot(-5)}=-1\pm\sqrt{6}$

$\therefore x^2+2x-5=\{x-(-1+\sqrt{6})\}\{x-(-1-\sqrt{6})\}$

$=(x+1-\sqrt{6})(x+1+\sqrt{6})$

답 $(x+1-\sqrt{6})(x+1+\sqrt{6})$

0397 $3x^2-2x+2=0$에서 근의 공식에 의하여

$$x=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-3\cdot2}}{3}=\frac{1\pm\sqrt{-5}}{3}$$

$$=\frac{1\pm\sqrt{5}i}{3}$$

$$\therefore 3x^2-2x+2=3\left(x-\frac{1+\sqrt{5}i}{3}\right)\left(x-\frac{1-\sqrt{5}i}{3}\right)$$

답 $3\left(x-\frac{1+\sqrt{5}i}{3}\right)\left(x-\frac{1-\sqrt{5}i}{3}\right)$

0398 a, b가 유리수이고 주어진 이차방정식의 한 근이 $2-\sqrt{3}$이므로 다른 한 근은 $2+\sqrt{3}$이다.

따라서 근과 계수의 관계에 의하여

$(2-\sqrt{3})+(2+\sqrt{3})=-a$, $(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})=b$

$\therefore a=-4$, $b=1$ 답 $a=-4$, $b=1$

0399 a, b가 유리수이고 주어진 이차방정식의 한 근이 $5+3\sqrt{2}$이므로 다른 한 근은 $5-3\sqrt{2}$이다.

따라서 근과 계수의 관계에 의하여

$(5+3\sqrt{2})+(5-3\sqrt{2})=-a$, $(5+3\sqrt{2})(5-3\sqrt{2})=b$

$\therefore a=-10$, $b=7$ 답 $a=-10$, $b=7$

0400 a, b가 실수이고 주어진 이차방정식의 한 근이 $1-2i$이므로 다른 한 근은 $1+2i$이다.

따라서 근과 계수의 관계에 의하여

$(1-2i)+(1+2i)=-a$, $(1-2i)(1+2i)=b$

$\therefore a=-2$, $b=5$ 답 $a=-2$, $b=5$

0401 a, b가 실수이고 주어진 이차방정식의 한 근이 $3+4i$이므로 다른 한 근은 $3-4i$이다.

따라서 근과 계수의 관계에 의하여

$(3+4i)+(3-4i)=-a$, $(3+4i)(3-4i)=b$

$\therefore a=-6$, $b=25$ 답 $a=-6$, $b=25$

유형 01 이차방정식의 풀이

본책 62쪽

(i) 이차방정식을 (x에 대한 이차식)$=0$ 꼴로 정리한다.

(ii) 좌변을 인수분해하여 해를 구한다.
좌변을 인수분해하기 어려우면 근의 공식을 이용하여 해를 구한다.

0402 근의 공식을 이용하여 해를 구하면

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot1\cdot4}}{2}=\frac{-3\pm\sqrt{7}i}{2}$$

따라서 $a=-3$, $b=7$이므로

$a+b=4$ 답 4

0403 $(x+3)^2=x(3x-11)$에서

$x^2+6x+9=3x^2-11x$, $2x^2-17x-9=0$

$(2x+1)(x-9)=0$ $\therefore x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=9$ 답 ③

0404 $(x*x)+(2*x)=0$에서

$(x^2-x+x)+(2x-2+x)=0$

$x^2+3x-2=0$

$$\therefore x=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot1\cdot(-2)}}{2}=\frac{-3\pm\sqrt{17}}{2}$$ 답 ①

0405 주어진 방정식의 양변에 $\sqrt{2}+1$을 곱하면

$(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)x^2+(\sqrt{2}+1)(3-\sqrt{2})x+\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)=0$

$x^2+(1+2\sqrt{2})x+\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)=0$

$(x+\sqrt{2}+1)(x+\sqrt{2})=0$

$\therefore x=-\sqrt{2}-1$ 또는 $x=-\sqrt{2}$

답 $x=-\sqrt{2}-1$ 또는 $x=-\sqrt{2}$

참고 x^2의 계수가 무리수인 이차방정식은 x^2의 계수를 유리화한 후 인수분해 또는 근의 공식을 이용하여 해를 구한다.

유형 02 한 근이 주어진 이차방정식

본책 62쪽

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 한 근이 α이다.

➡ $x=\alpha$를 $ax^2+bx+c=0$에 대입하면 주어진 등식이 성립한다.

➡ $a\alpha^2+b\alpha+c=0$

0406 이차방정식 $x^2-2kx-k+1=0$의 한 근이 -1이므로

$(-1)^2-2k\cdot(-1)-k+1=0$ $\therefore k=-2$

$k=-2$를 주어진 이차방정식에 대입하면

$x^2+4x+3=0$, $(x+3)(x+1)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=-1$

따라서 다른 한 근은 -3이다. 답 ④

0407 이차방정식 $x^2+kx+\sqrt{2}-2=0$의 한 근이 $1-\sqrt{2}$이므로

$(1-\sqrt{2})^2+k(1-\sqrt{2})+\sqrt{2}-2=0$

$3-2\sqrt{2}+k(1-\sqrt{2})+\sqrt{2}-2=0$

$1-\sqrt{2}+(1-\sqrt{2})k=0$, $(1-\sqrt{2})k=\sqrt{2}-1$

$\therefore k=-1$ 답 -1

0408 이차방정식 $x^2+(a-1)x-5a=0$의 한 근이 -5이므로

$(-5)^2+(a-1)\cdot(-5)-5a=0$, $30-10a=0$

$\therefore a=3$ ··· ❶

이차방정식 $kx^2-7x+k+1=0$의 한 근이 3이므로

$k\cdot 3^2-7\cdot 3+k+1=0$, $10k-20=0$

$\therefore k=2$ ··· ❷

$\therefore ak=6$ ··· ❸

답 6

채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	40%
❷ k의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ ak의 값을 구할 수 있다.	20%

0409 주어진 이차방정식의 한 근이 -1이므로

$k\cdot(-1)^2-(a+1)\cdot(-1)-kb=0$

$(1-b)k+a+1=0$

이 등식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$1-b=0$, $a+1=0$

따라서 $a=-1$, $b=1$이므로 $a+b=0$ 답 ③

SSEN 특강

항등식에 대한 여러 가지 표현

다음은 모두 k에 대한 항등식을 나타낸다.

① k의 값에 관계없이 항상 성립하는 등식

② 모든 k에 대하여 성립하는 등식

③ 임의의 k에 대하여 성립하는 등식

0410 주어진 이차방정식의 한 근이 α이므로

$\alpha^2-\alpha+1=0$

$\alpha\neq 0$이므로 양변을 α로 나누면

$\alpha-1+\frac{1}{\alpha}=0$ $\therefore \alpha+\frac{1}{\alpha}=1$

$\therefore \alpha^2+\frac{1}{\alpha^2}=\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)^2-2=1^2-2=-1$ 답 -1

유형 03 절댓값 기호를 포함한 방정식 본책 63쪽

① $|x|=\begin{cases} x & (x\geq 0) \\ -x & (x<0) \end{cases}$임을 이용하여 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 x의 값을 기준으로 x의 값의 범위를 나누어서 방정식을 푼다.

② $\sqrt{x^2}$을 포함한 방정식 ➡ $\sqrt{x^2}=|x|$임을 이용한다.

0411 $x^2+|3x-2|=2$에서

(i) $x<\frac{2}{3}$일 때, $x^2-(3x-2)=2$

$x^2-3x=0$, $x(x-3)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=3$

그런데 $x<\frac{2}{3}$이므로 $x=0$

(ii) $x\geq\frac{2}{3}$일 때, $x^2+(3x-2)=2$

$x^2+3x-4=0$, $(x+4)(x-1)=0$

$\therefore x=-4$ 또는 $x=1$

그런데 $x\geq\frac{2}{3}$이므로 $x=1$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 근은

$x=0$ 또는 $x=1$

따라서 모든 근의 합은 1이다. 답 ①

0412 $2x^2+9|x|-5=0$에서

(i) $x<0$일 때, $2x^2-9x-5=0$

$(2x+1)(x-5)=0$ $\therefore x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=5$

그런데 $x<0$이므로 $x=-\frac{1}{2}$

(ii) $x\geq 0$일 때, $2x^2+9x-5=0$

$(x+5)(2x-1)=0$ $\therefore x=-5$ 또는 $x=\frac{1}{2}$

그런데 $x\geq 0$이므로 $x=\frac{1}{2}$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 근은

$x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=\frac{1}{2}$ 답 $x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=\frac{1}{2}$

다른 풀이 $x^2=|x|^2$이므로 주어진 방정식은

$2|x|^2+9|x|-5=0$, $(2|x|-1)(|x|+5)=0$

그런데 $|x|\geq 0$이므로 $|x|=\frac{1}{2}$

$\therefore x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=\frac{1}{2}$

0413 $|x\triangle 3|=x\triangle x$에서 $|x+3-3x|=x+x-x^2$

$\therefore |-2x+3|=-x^2+2x$ ··· ❶

(i) $x<\frac{3}{2}$일 때, $-2x+3=-x^2+2x$

$x^2-4x+3=0$, $(x-1)(x-3)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=3$

그런데 $x<\frac{3}{2}$이므로 $x=1$ ··· ❷

(ii) $x\ge\frac{3}{2}$일 때, $\quad -(-2x+3)=-x^2+2x$

$x^2=3 \qquad \therefore x=\pm\sqrt{3}$

그런데 $x\ge\frac{3}{2}$이므로 $\quad x=\sqrt{3}$ ··· ❸

(i), (ii)에서 구하는 x의 값은

$x=1$ 또는 $x=\sqrt{3}$ ··· ❹

답 $x=1$ 또는 $x=\sqrt{3}$

채점 기준	비율
❶ 연산의 의미를 이해하고 적용할 수 있다.	10%
❷ $x<\frac{3}{2}$일 때 x의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ $x\ge\frac{3}{2}$일 때 x의 값을 구할 수 있다.	40%
❹ x의 값을 구할 수 있다.	10%

0414 $\sqrt{(x-1)^2}+6=x^2+\sqrt{x^2}+3$에서

$|x-1|+6=x^2+|x|+3$

$\therefore x^2-|x-1|+|x|-3=0$

(i) $x<0$일 때

$x-1<0$이므로 $\quad x^2+(x-1)-x-3=0$

$x^2-4=0, \quad x^2=4 \quad \therefore x=\pm 2$

그런데 $x<0$이므로 $\quad x=-2$

(ii) $0\le x<1$일 때

$x-1<0$이므로 $\quad x^2+(x-1)+x-3=0$

$x^2+2x-4=0 \quad \therefore x=-1\pm\sqrt{5}$

그런데 $0\le x<1$이므로 $x=-1\pm\sqrt{5}$는 근이 아니다.

(iii) $x\ge 1$일 때

$x-1\ge 0$이므로 $\quad x^2-(x-1)+x-3=0$

$x^2-2=0, \quad x^2=2 \quad \therefore x=\pm\sqrt{2}$

그런데 $x\ge 1$이므로 $\quad x=\sqrt{2}$

이상에서 주어진 방정식의 근은

$x=-2$ 또는 $x=\sqrt{2}$

답 ③

유형 04 이차방정식의 근의 판별

본책 63쪽

계수가 실수인 이차방정식의 판별식을 D라 할 때,

① 서로 다른 두 실근을 가지면 ➡ $D>0$
② 중근을 가지면 ➡ $D=0$
(①, ② 실근을 가지면 ➡ $D\ge 0$)
③ 서로 다른 두 허근을 가지면 ➡ $D<0$

0415 이차방정식 $x^2-2(k+3)x+k^2-1=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\{-(k+3)\}^2-(k^2-1)>0$

$k^2+6k+9-k^2+1>0$

$6k+10>0 \qquad \therefore k>-\frac{5}{3}$

따라서 가장 작은 정수 k의 값은 -1이다.

답 ②

0416 이차방정식 $x^2+ax+a-1=0$의 판별식을 D라 하면

$D=a^2-4(a-1)=0, \qquad a^2-4a+4=0$

$(a-2)^2=0 \qquad \therefore a=2$

$a=2$를 주어진 방정식에 대입하면

$x^2+2x+1=0, \qquad (x+1)^2=0 \qquad \therefore x=-1$

따라서 $m=-1$이므로 $\quad a+m=1$

답 ③

0417 이차방정식 $2x^2-4x-(k-5)=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$\frac{D_1}{4}=(-2)^2+2(k-5)<0$

$2k-6<0 \qquad \therefore k<3$ ······ ㉠

이차방정식 $x^2-(k+1)x+k+4=0$의 판별식을 D_2라 하면

$D_2=\{-(k+1)\}^2-4(k+4)=0$

$k^2+2k+1-4k-16=0, \qquad k^2-2k-15=0$

$(k+3)(k-5)=0 \qquad \therefore k=-3$ 또는 $k=5$ ······ ㉡

㉠, ㉡에서 $\qquad k=-3$

답 -3

0418 주어진 방정식이 이차방정식이므로

$k^2-1\ne 0, \qquad (k+1)(k-1)\ne 0$

$\therefore k\ne -1,\ k\ne 1$ ······ ㉠ ··· ❶

이차방정식 $(k^2-1)x^2-2(k+1)x+1=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\{-(k+1)\}^2-(k^2-1)\ge 0$

$k^2+2k+1-k^2+1\ge 0$

$2k+2\ge 0 \qquad \therefore k\ge -1$ ······ ㉡ ··· ❷

㉠, ㉡에서 $\qquad -1<k<1$ 또는 $k>1$ ··· ❸

답 $-1<k<1$ 또는 $k>1$

채점 기준	비율
❶ 주어진 방정식이 이차방정식이기 위한 k의 조건을 구할 수 있다.	30%
❷ 판별식을 이용하여 k의 값의 범위를 구할 수 있다.	40%
❸ k의 값의 범위를 구할 수 있다.	30%

0419 이차방정식 $x^2+(a+2k)x+k^2-2k-b=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(a+2k)^2-4(k^2-2k-b)=0$

$a^2+4ak+4k^2-4k^2+8k+4b=0$

$(4a+8)k+a^2+4b=0$

이 등식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$4a+8=0,\ a^2+4b=0$

따라서 $a=-2,\ b=-1$이므로

$a+b=-3$

답 ③

유형 05 계수가 문자인 이차방정식의 근의 판별

본책 64쪽

계수가 실수인 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 근은

➡ b^2-4ac의 부호를 조사하여 판별한다.

0420 이차방정식 $ax^2-bx-c=0$의 판별식을 D라 하면

$D=b^2+4ac$ ...... ㉠

$b=a-c$를 ㉠에 대입하면

$D=(a-c)^2+4ac=(a+c)^2\geq 0$

따라서 이차방정식 $ax^2-bx-c=0$은 실근을 갖는다. 답 ①

0421 이차방정식 $x^2+2ax+a^2-2a+4=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=a^2-(a^2-2a+4)=2a-4$

이때 $a<2$에서 $2a-4<0$이므로

$\frac{D}{4}<0$

따라서 이차방정식 $x^2+2ax+a^2-2a+4=0$은 서로 다른 두 허근을 갖는다. 답 서로 다른 두 허근

0422 이차방정식 $x^2-2ax+b^2+1=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$\frac{D_1}{4}=(-a)^2-(b^2+1)=0$

$\therefore a^2=b^2+1$ ...... ㉠

이차방정식 $x^2+4ax+2b+1=0$의 판별식을 D_2라 하면

$\frac{D_2}{4}=(2a)^2-(2b+1)$

$=4(b^2+1)-(2b+1)$ ($\because$ ㉠)

$=4b^2-2b+3$

$=4\left(b-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{11}{4}>0$

따라서 이차방정식 $x^2+4ax+2b+1=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다. 답 서로 다른 두 실근

0423 $\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}=-\sqrt{\frac{b}{a}}$에서 $a<0$, $b>0$

ㄱ. $x^2+ax-b=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$D_1=a^2+4b>0$

이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.

ㄴ. $x^2+bx+a=0$의 판별식을 D_2라 하면

$D_2=b^2-4a>0$

이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.

ㄷ. $ax^2+bx+1=0$의 판별식을 D_3이라 하면

$D_3=b^2-4a>0$

이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.

ㄹ. $x^2-2ax+b=0$의 판별식을 D_4라 하면

$\frac{D_4}{4}=a^2-b$

a^2-b의 값의 부호는 알 수 없으므로 이 이차방정식의 근은 판별할 수 없다.

이상에서 항상 서로 다른 두 실근을 갖는 이차방정식은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다. 답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

유형 06 이차방정식의 판별식과 삼각형

본책 65쪽

판별식을 이용하여 주어진 이차방정식의 미정계수 사이의 관계를 파악한 후 다음을 이용하여 삼각형의 모양을 판단한다.

삼각형의 세 변의 길이가 a, b, c $(a\leq b\leq c)$일 때

① $a=b$ 또는 $b=c$ 또는 $c=a$ ➡ 이등변삼각형

② $a=b=c$ ➡ 정삼각형

③ $a^2+b^2>c^2$ ➡ 예각삼각형

④ $a^2+b^2=c^2$ ➡ 빗변의 길이가 c인 직각삼각형

⑤ $a^2+b^2<c^2$ ➡ 둔각삼각형

0424 이차방정식 $x^2+2(a+b+c)x+3(ab+bc+ca)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(a+b+c)^2-3(ab+bc+ca)=0$

$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$

양변에 2를 곱하면

$2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca=0$

$(a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)+(c^2-2ca+a^2)=0$

$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$

a, b, c가 실수이므로 $a-b=0$, $b-c=0$, $c-a=0$

$\therefore a=b=c$

따라서 a, b, c를 세 변의 길이로 하는 삼각형은 정삼각형이다.

답 ①

0425 이차방정식 $(a+c)x^2+2bx+a-c=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=b^2-(a+c)(a-c)<0$

$b^2-(a^2-c^2)<0$ $\therefore a^2>b^2+c^2$

따라서 a, b, c를 세 변의 길이로 하는 삼각형은 둔각삼각형이다.

답 둔각삼각형

0426 이차방정식 $3x^2-(a+3b)x+ab=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(a+3b)^2-4\cdot3\cdot ab=0$

$a^2+6ab+9b^2-12ab=0$, $a^2-6ab+9b^2=0$

$(a-3b)^2=0$ $\therefore a=3b$

따라서 직각삼각형의 빗변의 길이는

$\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{(3b)^2+b^2}=\sqrt{10b^2}=\sqrt{10}b$ ($\because b>0$) 답 ④

유형 07 이차식이 완전제곱식이 되는 조건

본책 65쪽

이차식 ax^2+bx+c가 완전제곱식이면

➡ 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$이 중근을 갖는다.

➡ $b^2-4ac=0$

0427 주어진 이차식이 완전제곱식이면 x에 대한 이차방정식 $x^2-2(k-1)x+k^2-5k+4=0$이 중근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=\{-(k-1)\}^2-(k^2-5k+4)=0$$
$$k^2-2k+1-k^2+5k-4=0$$
$$3k-3=0 \qquad \therefore k=1$$
답 ⑤

0428 주어진 이차식이 완전제곱식이면 x에 대한 이차방정식 $x^2-(ak+b)x+k^2+c-1=0$이 중근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면
$$D=\{-(ak+b)\}^2-4(k^2+c-1)=0$$
$$a^2k^2+2abk+b^2-4k^2-4c+4=0$$
$$(a^2-4)k^2+2abk+b^2-4c+4=0$$
이 등식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하므로
$$a^2-4=0,\ 2ab=0,\ b^2-4c+4=0$$
$$\therefore a^2=4,\ b=0,\ c=1$$
$$\therefore a^2+b^2+c^2=5$$
답 ②

0429 주어진 이차식이 $4(x+k)^2$ 꼴로 인수분해되려면 완전제곱식이 되어야 한다.
즉 x에 대한 이차방정식 $4x^2-(3a-5)x+a^2-5a+2=0$이 중근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면
$$D=\{-(3a-5)\}^2-4\cdot4\cdot(a^2-5a+2)=0 \quad \cdots ❶$$
$$9a^2-30a+25-16a^2+80a-32=0$$
$$7a^2-50a+7=0, \qquad (7a-1)(a-7)=0$$
$$\therefore a=7\ (\because a>1) \quad \cdots ❷$$
따라서 주어진 이차식은 $4x^2-16x+16$이고, 이것은 $4(x-2)^2$으로 인수분해되므로
$$k=-2 \quad \cdots ❸$$
$$\therefore a-k=9 \quad \cdots ❹$$
답 9

채점 기준	비율
❶ 판별식을 이용하여 a에 대한 식을 세울 수 있다.	40%
❷ a의 값을 구할 수 있다.	30%
❸ k의 값을 구할 수 있다.	20%
❹ $a-k$의 값을 구할 수 있다.	10%

유형 08 근과 계수의 관계를 이용하여 식의 값 구하기 (1) 본책 66쪽

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라 하면
$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a},\ \alpha\beta=\frac{c}{a}$$

0430 근과 계수의 관계에 의하여
$$\alpha+\beta=2,\ \alpha\beta=\frac{4}{3}$$
$$\therefore \alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$$
$$=2^3-3\cdot\frac{4}{3}\cdot2=0$$
답 0

0431 근과 계수의 관계에 의하여
$$\alpha+\beta=-\frac{1}{2},\ \alpha\beta=-\frac{5}{2}$$
$$\therefore (\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$$
$$=\left(-\frac{1}{2}\right)^2-4\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)$$
$$=\frac{41}{4}$$
$$\therefore |\alpha-\beta|=\frac{\sqrt{41}}{2}$$
답 ②

0432 근과 계수의 관계에 의하여
$$\alpha+\beta=5,\ \alpha\beta=1 \quad \cdots\cdots ㉠ \quad \cdots ❶$$
$$\therefore (\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2=\alpha+\beta+2\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}$$
$$=\alpha+\beta+2\sqrt{\alpha\beta}\ (\because ㉠\text{에서 } \alpha>0,\ \beta>0)$$
$$=5+2\cdot1$$
$$=7 \quad \cdots ❷$$
$$\therefore \sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=\sqrt{7} \quad \cdots ❸$$
답 $\sqrt{7}$

채점 기준	비율
❶ $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$의 값을 구할 수 있다.	30%
❷ $(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2$의 값을 구할 수 있다.	50%
❸ $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$의 값을 구할 수 있다.	20%

0433 근과 계수의 관계에 의하여
$$\alpha+\beta=-3,\ \alpha\beta=-2$$
① $\alpha^2\beta+\alpha\beta^2=\alpha\beta(\alpha+\beta)$
$$=-2\cdot(-3)=6$$
② $(\alpha+1)(\beta+1)=\alpha\beta+(\alpha+\beta)+1$
$$=-2+(-3)+1=-4$$
③ $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$
$$=(-3)^2-2\cdot(-2)=13$$
④ $\dfrac{\beta}{\alpha}+\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=-\dfrac{13}{2}$

⑤ $\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2=13-(-2)=15$

답 ④

0434 $|x^2-4x|=1$에서 $\quad x^2-4x=\pm1$

(i) $x^2-4x=1$, 즉 $x^2-4x-1=0$의 두 근을 α, β라 하면 근과 계수의 관계에 의하여
$$\alpha+\beta=4,\ \alpha\beta=-1$$
(ii) $x^2-4x=-1$, 즉 $x^2-4x+1=0$의 두 근을 γ, δ라 하면 근과 계수의 관계에 의하여
$$\gamma+\delta=4,\ \gamma\delta=1$$
(i), (ii)에서
$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\delta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}+\frac{\gamma+\delta}{\gamma\delta}$$
$$=\frac{4}{-1}+\frac{4}{1}=0$$
답 0

유형 09 근과 계수의 관계를 이용하여 식의 값 구하기 (2) 본책 66쪽

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근이 α, β일 때, 주어진 식이 이 방정식에 α 또는 β를 대입한 식을 변형한 꼴이면 식의 값은 다음과 같은 순서로 구한다.

(i) $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$, $\alpha\beta=\frac{c}{a}$임을 이용하여 $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$의 값을 구한다.

(ii) $a\alpha^2+b\alpha+c=0$, $a\beta^2+b\beta+c=0$임을 이용하여 주어진 식을 간단히 한다.

(iii) (i)의 값을 (ii)의 식에 대입하여 주어진 식의 값을 구한다.

0435 α, β가 주어진 이차방정식의 두 근이므로

$\alpha^2-(3a-2)\alpha+1=0$, $\beta^2-(3a-2)\beta+1=0$

$\therefore$ $\alpha^2-3a\alpha+1=-2\alpha$, $\beta^2-3a\beta+1=-2\beta$

근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha\beta=1$이므로

$$(\alpha^2-3a\alpha+1)(\beta^2-3a\beta+1)=(-2\alpha)\cdot(-2\beta)=4\alpha\beta=4\cdot1=4$$

답 ④

0436 α는 주어진 이차방정식의 근이므로

$\alpha^2-4\alpha+7=0$ $\therefore$ $\alpha^2=4\alpha-7$

근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=4$이므로

$$\alpha^2+4\beta=4\alpha-7+4\beta=4(\alpha+\beta)-7=4\cdot4-7=9$$

답 9

0437 α, β가 주어진 이차방정식의 두 근이므로

$\alpha^2-\alpha-3=0$, $\beta^2-\beta-3=0$

$\therefore$ $\alpha^2-\alpha=3$, $\beta^2-\beta=3$

근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=1$, $\alpha\beta=-3$

$$\therefore (\alpha^3-\alpha^2-\alpha-1)(\beta^3-\beta^2-\beta-1)$$
$$=\{\alpha(\alpha^2-\alpha)-\alpha-1\}\{\beta(\beta^2-\beta)-\beta-1\}$$
$$=(2\alpha-1)(2\beta-1)$$
$$=4\alpha\beta-2(\alpha+\beta)+1$$
$$=4\cdot(-3)-2\cdot1+1=-13$$

답 -13

0438 α, β가 주어진 이차방정식의 두 근이므로

$\alpha^2+2\alpha-4=0$, $\beta^2+2\beta-4=0$

$\therefore$ $\alpha^2+3\alpha-4=\alpha$, $\beta^2+3\beta-4=\beta$

근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-2$, $\alpha\beta=-4$

$$\therefore \frac{\beta}{\alpha^2+3\alpha-4}+\frac{\alpha}{\beta^2+3\beta-4}=\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}$$
$$=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}$$
$$=\frac{(-2)^2-2\cdot(-4)}{-4}=-3$$

답 ③

0439 α, β가 주어진 이차방정식의 두 근이므로

$\alpha^2+\alpha-1=0$, $\beta^2+\beta-1=0$

$\therefore$ $\alpha^2+\alpha=1$, $\beta^2+\beta=1$

근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-1$, $\alpha\beta=-1$

$$\therefore \alpha^5+\beta^5+\alpha^4+\beta^4+\alpha^3+\beta^3$$
$$=\alpha^3(\alpha^2+\alpha+1)+\beta^3(\beta^2+\beta+1)$$
$$=2(\alpha^3+\beta^3)=2\{(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)\}$$
$$=2\{(-1)^3-3\cdot(-1)\cdot(-1)\}=-8$$

답 ①

유형 10 미정계수의 결정; 근의 조건이 주어진 경우 본책 67쪽

① 이차방정식의 두 근의 비가 $m:n$이면 두 근은
➡ $m\alpha$, $n\alpha$ $(\alpha\neq0)$

② 이차방정식의 두 근의 차가 p이면 두 근은
➡ α, $\alpha+p$ 또는 $\alpha-p$, α

0440 주어진 이차방정식의 두 근을 2α, 3α $(\alpha\neq0)$라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$2\alpha+3\alpha=5(m+2)$ $\therefore$ $\alpha=m+2$ …… ㉠

$2\alpha\cdot3\alpha=-6m$ $\therefore$ $\alpha^2=-m$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$(m+2)^2=-m$, $m^2+5m+4=0$

$(m+4)(m+1)=0$ $\therefore$ $m=-4$ 또는 $m=-1$

따라서 모든 실수 m의 값의 곱은 4이다.

답 ⑤

0441 주어진 이차방정식의 두 근을 α, $\alpha+4$라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+(\alpha+4)=2k$ $\therefore$ $\alpha=k-2$ …… ㉠

$\alpha(\alpha+4)=k-2$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$(k-2)(k+2)=k-2$, $k^2-4=k-2$

$k^2-k-2=0$, $(k+1)(k-2)=0$

$\therefore$ $k=-1$ 또는 $k=2$

따라서 모든 실수 k의 값의 합은 1이다.

답 1

다른 풀이 주어진 이차방정식의 두 근을 α, β $(\alpha>\beta)$라 하면

$\alpha-\beta=4$

근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2k$, $\alpha\beta=k-2$

이때 $(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$이므로

$4^2=(2k)^2-4(k-2)$, $k^2-k-2=0$

$(k+1)(k-2)=0$ $\therefore$ $k=-1$ 또는 $k=2$

0442 주어진 이차방정식의 두 근을 α, 2α $(\alpha\neq0)$라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+2\alpha=-6m$ $\therefore$ $\alpha=-2m$ …… ㉠

$\alpha\cdot2\alpha=-m^2+1$ $\therefore$ $2\alpha^2=-m^2+1$ …… ㉡

04 이차방정식

㉠을 ㉡에 대입하면

$2\cdot(-2m)^2=-m^2+1, \quad 9m^2=1$

$m^2=\frac{1}{9} \quad \therefore m=\frac{1}{3} \ (\because m>0)$ 답 ①

0443 주어진 이차방정식의 두 근을 α, $\alpha+1$이라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+(\alpha+1)=-(k+2) \quad \therefore k=-2\alpha-3$ ...... ㉠

$\alpha(\alpha+1)=3k-1 \quad \therefore \alpha^2+\alpha=3k-1$ ...... ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$\alpha^2+\alpha=3(-2\alpha-3)-1, \quad \alpha^2+7\alpha+10=0$

$(\alpha+5)(\alpha+2)=0 \quad \therefore \alpha=-5$ 또는 $\alpha=-2$ ...... ㉢

㉢을 ㉠에 대입하면

$\alpha=-5$일 때, $k=7$

$\alpha=-2$일 때, $k=1$

$\therefore k=7 \ (\because k>1)$ 답 7

0444 주어진 이차방정식의 두 근을 α, $-\alpha\,(\alpha\neq0)$라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+(-\alpha)=-(k^2-k-2)$ ...... ㉠

$\alpha\cdot(-\alpha)=-2k+3$ ...... ㉡

㉠에서 $k^2-k-2=0, \quad (k+1)(k-2)=0$

$\therefore k=-1$ 또는 $k=2$ ...... ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$k=-1$일 때, $\alpha^2=-5$

$k=2$일 때, $\alpha^2=1$

주어진 이차방정식이 실근을 가지므로 $\alpha^2=1$

$\therefore k=2$ 답 2

0445 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 곱이 $-16<0$이므로 두 근의 부호는 다르다.

주어진 이차방정식의 두 근을 α, $-4\alpha\,(\alpha\neq0)$라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+(-4\alpha)=-(k-3) \quad \therefore 3\alpha=k-3$ ...... ㉠

$\alpha\cdot(-4\alpha)=-16, \quad \alpha^2=4$

$\therefore \alpha=-2$ 또는 $\alpha=2$ ...... ㉡ ··· ❶

㉡을 ㉠에 대입하면

$\alpha=-2$일 때, $k=-3$

$\alpha=2$일 때, $k=9$ ··· ❷

따라서 모든 실수 k의 값의 합은 6이다. ··· ❸

답 6

채점 기준	비율
❶ α의 값을 구할 수 있다.	50%
❷ k의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ 모든 실수 k의 값의 합을 구할 수 있다.	10%

참고 주어진 이차방정식의 두 근을 $-\alpha$, 4α로 놓고 위와 같은 방법으로 풀 수도 있다.

유형 11 미정계수의 결정; 근의 관계식이 주어진 경우 본책 68쪽

이차방정식의 두 근 α, β에 대한 식의 값이 주어지면 이 식을 $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$에 대한 식으로 변형한 후 근과 계수의 관계를 이용하여 미정계수를 구한다.

0446 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=k-2, \ \alpha\beta=k+3$

그런데 $\alpha+\beta<0$이므로

$k-2<0 \quad \therefore k<2$

한편

$$\begin{aligned}\alpha^2+\beta^2&=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\\&=(k-2)^2-2(k+3)\\&=k^2-6k-2\end{aligned}$$

이므로 $\alpha^2+\beta^2=5$에서

$k^2-6k-2=5, \quad k^2-6k-7=0$

$(k+1)(k-7)=0 \quad \therefore k=-1$ 또는 $k=7$

그런데 $k<2$이므로

$k=-1$ 답 ②

0447 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=3m, \ \alpha\beta=m^2+2m$

$$\begin{aligned}\therefore (\alpha-\beta)^2&=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\\&=(3m)^2-4(m^2+2m)\\&=5m^2-8m\end{aligned}$$

$(\alpha-\beta)^2=4$에서 $5m^2-8m=4$

$5m^2-8m-4=0, \quad (5m+2)(m-2)=0$

$\therefore m=2 \ (\because m$은 자연수$)$ 답 2

0448 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=4k+1, \ \alpha\beta=2k+1$

$$\begin{aligned}\therefore \alpha^2\beta+\alpha\beta^2-\alpha-\beta&=\alpha\beta(\alpha+\beta)-(\alpha+\beta)\\&=(\alpha\beta-1)(\alpha+\beta)\\&=2k(4k+1)\\&=8k^2+2k\end{aligned}$$

$\alpha^2\beta+\alpha\beta^2-\alpha-\beta=6$에서 $8k^2+2k=6$

$4k^2+k-3=0, \quad (k+1)(4k-3)=0$

$\therefore k=-1 \ (\because k$는 정수$)$ 답 ②

0449 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=a, \ \alpha\beta=b$ ··· ❶

$(\alpha-1)(\beta-1)=-1$에서 $\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1=-1$

$b-a+1=-1 \quad \therefore a-b=2$ ...... ㉠

$(2\alpha-1)(2\beta-1)=1$에서 $4\alpha\beta-2(\alpha+\beta)+1=1$

$4b-2a+1=1 \quad \therefore a-2b=0$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=4, \ b=2$ ··· ❷

$\therefore ab=8$ ··· ❸

답 8

채점 기준	비율
❶ 근과 계수의 관계를 이용하여 $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$를 구할 수 있다.	20%
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	70%
❸ ab의 값을 구할 수 있다.	10%

유형 12 미정계수의 결정; 두 이차방정식이 주어진 경우

본책 68쪽

두 이차방정식의 근이 모두 α, β로 나타내어져 있으면 근과 계수의 관계를 이용하여 식을 세운 후 이 연립방정식을 풀어 미정계수를 구한다.

0450 이차방정식 $x^2-2ax-4=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2a$, $\alpha\beta=-4$ …… ㉠

이차방정식 $x^2+bx-12=0$의 두 근이 $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$(\alpha+\beta)+\alpha\beta=-b$, $(\alpha+\beta)\alpha\beta=-12$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$2a-4=-b$, $-8a=-12$

두 식을 연립하여 풀면 $a=\frac{3}{2}$, $b=1$

$\therefore a+b=\frac{5}{2}$

답 ④

0451 이차방정식 $x^2-ax-b=0$의 두 근이 -2, 3이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$-2+3=a$, $(-2)\cdot3=-b$

$\therefore a=1$, $b=6$

따라서 이차방정식 $ax^2-bx-2a+b=0$에 $a=1$, $b=6$을 대입하면 $x^2-6x+4=0$이므로 두 근의 곱은 4이다.

답 ⑤

0452 이차방정식 $2x^2+ax+1=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-\frac{a}{2}$, $\alpha\beta=\frac{1}{2}$ …… ㉠

이차방정식 $x^2+3x-b=0$의 두 근이 $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=-3$, $\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta}=-b$

$\therefore \alpha+\beta=-3\alpha\beta$, $\alpha\beta=-\frac{1}{b}$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$-\frac{a}{2}=-\frac{3}{2}$, $\frac{1}{2}=-\frac{1}{b}$ $\quad\therefore a=3$, $b=-2$

$\therefore a-b=5$

답 ④

0453 이차방정식 $x^2-ax+b=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=a$, $\alpha\beta=b$ …… ㉠

이차방정식 $x^2-(2a+3)x+b+6=0$의 두 근이 α^2, β^2이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha^2+\beta^2=2a+3$, $\alpha^2\beta^2=b+6$

$\therefore (\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=2a+3$, $(\alpha\beta)^2=b+6$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$a^2-2b=2a+3$, $b^2=b+6$

$b^2=b+6$에서 $b^2-b-6=0$

$(b+2)(b-3)=0$ $\quad\therefore b=-2$ ($\because b<0$)

$a^2-2b=2a+3$에서 $a^2+4=2a+3$

$a^2-2a+1=0$, $(a-1)^2=0$ $\quad\therefore a=1$

$\therefore a^3+b^3=-7$

답 ①

유형 13 잘못 보고 푼 이차방정식

본책 69쪽

바르게 보고 푼 계수와 근과 계수의 관계를 이용하여 원래의 이차방정식을 구한다.

0454 준수는 a와 c를 바르게 보고 풀었으므로 두 근의 곱은

$\frac{c}{a}=-2\cdot6=-12$

$\therefore c=-12a$ …… ㉠

민지는 a와 b를 바르게 보고 풀었으므로 두 근의 합은

$-\frac{b}{a}=(-2+\sqrt{7})+(-2-\sqrt{7})=-4$

$\therefore b=4a$ …… ㉡

㉠, ㉡을 $ax^2+bx+c=0$에 대입하면

$ax^2+4ax-12a=0$

$a\neq0$이므로 양변을 a로 나누면

$x^2+4x-12=0$, $(x+6)(x-2)=0$

$\therefore x=-6$ 또는 $x=2$

따라서 음수인 근은 -6이다.

답 -6

0455 두 사람 A, B가 푼 이차방정식을 $x^2+ax+b=0$이라 하자. ··· ❶

A는 b를 바르게 보고 풀었으므로 두 근의 곱은

$b=(4+\sqrt{3}i)(4-\sqrt{3}i)=19$ ··· ❷

B는 a를 바르게 보고 풀었으므로 두 근의 합은

$-a=(-1+\sqrt{5})+(-1-\sqrt{5})=-2$

$\therefore a=2$ ··· ❸

따라서 구하는 이차방정식은

$x^2+2x+19=0$ ··· ❹

답 $x^2+2x+19=0$

채점 기준	비율
❶ 이차방정식을 $x^2+ax+b=0$으로 놓을 수 있다.	20%
❷ b의 값을 구할 수 있다.	30%
❸ a의 값을 구할 수 있다.	30%
❹ 이차방정식을 구할 수 있다.	20%

04 이차방정식

0456 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 근의 공식을

$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-ac}}{2a}$로 잘못 적용하여 얻은 두 근이 -2, 1이므로

$$\frac{-b+\sqrt{b^2-ac}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{b^2-ac}}{2a}=(-2)+1=-1$$

$$\frac{-2b}{2a}=-1 \qquad \therefore a=b \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$$\frac{-b+\sqrt{b^2-ac}}{2a}\cdot\frac{-b-\sqrt{b^2-ac}}{2a}=-2\cdot1=-2$$

$$\frac{b^2-(b^2-ac)}{4a^2}=\frac{c}{4a}=-2 \qquad \therefore c=-8a \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 $ax^2+bx+c=0$에 대입하면

$$ax^2+ax-8a=0$$

따라서 원래의 이차방정식의 두 근의 곱은

$$\alpha\beta=\frac{-8a}{a}=-8$$

답 ①

다른 풀이 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$에서 근의 공식은

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

이므로 c의 값을 $\frac{1}{4}c$로 잘못 대입한 것과 같다.

이때 -2, 1을 두 근으로 하고 x^2의 계수가 a인 이차방정식은

$$a\{x^2-(-2+1)x-2\}=0, \qquad ax^2+ax-2a=0$$

이므로 원래의 이차방정식의 상수항은

$$-2a\cdot4=-8a$$

즉 원래의 이차방정식은 $ax^2+ax-8a=0$이므로 두 근의 곱은

$$\alpha\beta=\frac{-8a}{a}=-8$$

유형 14 이차방정식의 작성

본책 69쪽

두 수 α, β를 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은

➡ $x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$

0457 이차방정식 $2x^2-x+7=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=\frac{1}{2},\ \alpha\beta=\frac{7}{2}$$

$$\therefore (\alpha-1)+(\beta-1)=\alpha+\beta-2=\frac{1}{2}-2=-\frac{3}{2},$$

$$(\alpha-1)(\beta-1)=\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1=\frac{7}{2}-\frac{1}{2}+1=4$$

따라서 $\alpha-1$, $\beta-1$을 두 근으로 하고 x^2의 계수가 2인 이차방정식은

$$2\left(x^2+\frac{3}{2}x+4\right)=0 \qquad \therefore 2x^2+3x+8=0$$

답 $2x^2+3x+8=0$

0458 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=-a,\ \alpha\beta=b$$

$$\therefore \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=-\frac{a}{b},\ \frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta}=\frac{1}{\alpha\beta}=\frac{1}{b}$$

따라서 $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$을 두 근으로 하는 이차방정식은

$$x^2+\frac{a}{b}x+\frac{1}{b}=0 \qquad \therefore bx^2+ax+1=0$$

답 ④

0459 이차방정식 $x^2-2x-2=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=2,\ \alpha\beta=-2 \qquad \cdots ❶$$

$$\therefore \frac{1+\alpha}{1-\beta}+\frac{1+\beta}{1-\alpha}=\frac{(1+\alpha)(1-\alpha)+(1+\beta)(1-\beta)}{(1-\beta)(1-\alpha)}$$

$$=\frac{1-\alpha^2+1-\beta^2}{1-\alpha-\beta+\alpha\beta}$$

$$=\frac{2-\{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\}}{1-(\alpha+\beta)+\alpha\beta}$$

$$=\frac{2-\{2^2-2\cdot(-2)\}}{1-2+(-2)}=2,$$

$$\frac{1+\alpha}{1-\beta}\cdot\frac{1+\beta}{1-\alpha}=\frac{1+\alpha+\beta+\alpha\beta}{1-\alpha-\beta+\alpha\beta}$$

$$=\frac{1+2+(-2)}{1-2+(-2)}=-\frac{1}{3} \qquad \cdots ❷$$

따라서 $\frac{1+\alpha}{1-\beta}$, $\frac{1+\beta}{1-\alpha}$를 두 근으로 하고 x^2의 계수가 3인 이차방정식은

$$3\left(x^2-2x-\frac{1}{3}\right)=0 \qquad \therefore 3x^2-6x-1=0 \qquad \cdots ❸$$

답 $3x^2-6x-1=0$

채점 기준	비율
❶ 근과 계수의 관계를 이용하여 $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$의 값을 구할 수 있다.	20%
❷ $\frac{1+\alpha}{1-\beta}+\frac{1+\beta}{1-\alpha}$, $\frac{1+\alpha}{1-\beta}\cdot\frac{1+\beta}{1-\alpha}$의 값을 구할 수 있다.	50%
❸ 이차방정식을 구할 수 있다.	30%

0460 이차방정식 $x^2+(a-2)x-b=0$의 두 근이 -1, α이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$-1+\alpha=-(a-2),\ -1\cdot\alpha=-b$$

$$\therefore \alpha=-a+3,\ b=\alpha \qquad \cdots\cdots ㉠$$

이차방정식 $x^2+(b+2)x-a=0$의 두 근이 3, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$3+\beta=-(b+2),\ 3\beta=-a \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$3+\beta=-(\alpha+2),\ 3\beta=\alpha-3$$

두 식을 연립하여 풀면 $\quad \alpha=-3,\ \beta=-2$

따라서 -3, -2를 두 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은

$$x^2+5x+6=0$$

이므로 $\quad p=5,\ q=6$

$$\therefore p+q=11$$

답 ⑤

유형 15 이차식의 인수분해 본책 70쪽

x에 대한 이차식 ax^2+bx+c가 쉽게 인수분해되지 않을 때는 다음과 같은 순서로 인수분해한다.
(i) 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근 α, β를 구한다.
(ii) $ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$로 인수분해한다.

0461 $x^2-2x+6=0$에서 근의 공식에 의하여
$x=-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-1\cdot6}=1\pm\sqrt{5}i$
$\therefore x^2-2x+6=\{x-(1+\sqrt{5}i)\}\{x-(1-\sqrt{5}i)\}$
$=(x-1-\sqrt{5}i)(x-1+\sqrt{5}i)$
답 ①

0462 $x^2+4x+5=0$에서 근의 공식에 의하여
$x=-2\pm\sqrt{2^2-1\cdot5}=-2\pm i$
$\therefore x^2+4x+5=\{x-(-2+i)\}\{x-(-2-i)\}$
$=(x+2-i)(x+2+i)$
따라서 인수인 것은 ⑤이다.
답 ⑤

0463 $\frac{1}{2}x^2-x+1=0$, 즉 $x^2-2x+2=0$에서 근의 공식에 의하여
$x=-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-1\cdot2}=1\pm i$
$\therefore \frac{1}{2}x^2-x+1=\frac{1}{2}\{x-(1+i)\}\{x-(1-i)\}$
$=\frac{1}{2}(x-1-i)(x-1+i)$
따라서 $a=-1$, $b=1$이므로
$a-b=-2$
답 -2

유형 16 이차방정식 $f(x)=0$과 $f(ax+b)=0$의 관계 본책 71쪽

이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이 α, β이면 $f(\alpha)=0$, $f(\beta)=0$이므로 $f(ax+b)=0$의 두 근은
➡ $ax+b=\alpha$, $ax+b=\beta$에서 $x=\frac{\alpha-b}{a}$ 또는 $x=\frac{\beta-b}{a}$

0464 $f(\alpha)=0$, $f(\beta)=0$이므로 $f(4x-3)=0$이려면
$4x-3=\alpha$ 또는 $4x-3=\beta$
$\therefore x=\frac{\alpha+3}{4}$ 또는 $x=\frac{\beta+3}{4}$
따라서 이차방정식 $f(4x-3)=0$의 두 근의 합은
$\frac{\alpha+3}{4}+\frac{\beta+3}{4}=\frac{\alpha+\beta+6}{4}=\frac{6+6}{4}=3$
답 ②

0465 방정식 $f(x)=0$이 -2를 근으로 가지므로
$f(-2)=0$
보기의 각 식의 좌변에 $x=-1$을 대입하면
① $f(x+1)=f(0)$
② $f(-x+1)=f(2)$
③ $f(x^2-1)=f(0)$
④ $f(3x+1)=f(-2)=0$
⑤ $f(x^2+1)=f(2)$
답 ④

0466 $f(\alpha)=0$, $f(\beta)=0$이므로 $f(3x-1)=0$이려면
$3x-1=\alpha$ 또는 $3x-1=\beta$
$\therefore x=\frac{\alpha+1}{3}$ 또는 $x=\frac{\beta+1}{3}$
따라서 이차방정식 $f(3x-1)=0$의 두 근의 곱은
$\frac{\alpha+1}{3}\cdot\frac{\beta+1}{3}=\frac{\alpha\beta+\alpha+\beta+1}{9}$
$=\frac{-2+5+1}{9}=\frac{4}{9}$
답 $\frac{4}{9}$

유형 17 이차방정식의 켤레근 본책 71쪽

① 계수가 모두 유리수인 이차방정식의 한 근이 $p+q\sqrt{m}$이면
➡ 다른 한 근은 $p-q\sqrt{m}$ (p, q는 유리수, $q\neq0$, $\sqrt{m}$은 무리수)
② 계수가 모두 실수인 이차방정식의 한 근이 $p+qi$이면
➡ 다른 한 근은 $p-qi$ (p, q는 실수, $q\neq0$, $i=\sqrt{-1}$)

0467 a, b가 실수이므로 $a-b$, ab도 실수이다.
즉 이차방정식 $x^2+(a-b)x+ab=0$의 한 근이 $3+\sqrt{2}i$이면 다른 한 근은 $3-\sqrt{2}i$이다.
따라서 근과 계수의 관계에 의하여
$(3+\sqrt{2}i)+(3-\sqrt{2}i)=-(a-b)$,
$(3+\sqrt{2}i)(3-\sqrt{2}i)=ab$
이므로 $a-b=-6$, $ab=11$
$\therefore a^2+b^2=(a-b)^2+2ab$
$=(-6)^2+2\cdot11=58$
답 58

0468 $\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}=1+\sqrt{2}$
a, b가 유리수이므로 이차방정식 $x^2+ax-b=0$의 한 근이 $1+\sqrt{2}$이면 다른 한 근은 $1-\sqrt{2}$이다.
따라서 근과 계수의 관계에 의하여
$(1+\sqrt{2})+(1-\sqrt{2})=-a$, $(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})=-b$
이므로 $a=-2$, $b=1$
$\therefore ab=-2$
답 -2

0469 $\frac{b+i}{1-i}=\frac{(b+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{(b-1)+(b+1)i}{2}$
a, b가 실수이므로 이차방정식 $x^2-4x+a=0$의 한 근이 $\frac{(b-1)+(b+1)i}{2}$이면 다른 한 근은 $\frac{(b-1)-(b+1)i}{2}$이다.
따라서 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 합은
$\frac{(b-1)+(b+1)i}{2}+\frac{(b-1)-(b+1)i}{2}=4$
$b-1=4$ $\therefore b=5$

즉 두 근은 $2+3i$, $2-3i$이므로 두 근의 곱은

$(2+3i)(2-3i)=13$ $\quad\therefore\ a=13$

$\therefore\ a+b=18$ 답 ⑤

0470 m, n이 실수이므로 이차방정식 $x^2+mx+n=0$의 한 근이 $-1+2i$이면 다른 한 근은 $-1-2i$이다.

따라서 근과 계수의 관계에 의하여

$(-1+2i)+(-1-2i)=-m$, $(-1+2i)(-1-2i)=n$

이므로 $\quad m=2,\ n=5$

$\therefore\ \dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{5}=\dfrac{7}{10}$, $\dfrac{1}{m}\cdot\dfrac{1}{n}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{5}=\dfrac{1}{10}$ ⋯ ❶

$\dfrac{1}{m}$, $\dfrac{1}{n}$을 두 근으로 하고 x^2의 계수가 10인 이차방정식은

$10\left(x^2-\dfrac{7}{10}x+\dfrac{1}{10}\right)=0$ $\quad\therefore\ 10x^2-7x+1=0$ ⋯ ❷

따라서 $a=-7$, $b=1$이므로

$b-a=8$ ⋯ ❸

답 8

채점 기준	비율
❶ $\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}$, $\dfrac{1}{m}\cdot\dfrac{1}{n}$의 값을 구할 수 있다.	40%
❷ $\dfrac{1}{m}$, $\dfrac{1}{n}$을 두 근으로 하고 x^2의 계수가 10인 이차방정식을 구할 수 있다.	40%
❸ $b-a$의 값을 구할 수 있다.	20%

0471 전략 $2019=a$로 놓고 주어진 방정식을 푼다.

풀이 $2019=a$로 놓으면

$(2019x)^2-2018\cdot2020x-1=0$에서

$a^2x^2-(a-1)(a+1)x-1=0$

$a^2x^2-(a^2-1)x-1=0$, $\quad(a^2x+1)(x-1)=0$

$x=-\dfrac{1}{a^2}$ 또는 $x=1$ $\quad\therefore\ x=-\dfrac{1}{2019^2}$ 또는 $x=1$

이때 $-\dfrac{1}{2019^2}<1$이므로 $\quad\alpha=1$

또 $x^2+2019x-2020=0$에서

$(x+2020)(x-1)=0$ $\quad\therefore\ x=-2020$ 또는 $x=1$

이때 $-2020<1$이므로 $\quad\beta=-2020$

$\therefore\ \alpha-\beta=2021$ 답 ⑤

0472 전략 $\overline{AP}=x$라 하고 합동인 두 삼각형을 찾아 피타고라스 정리를 이용한다.

풀이 $\triangle$PBQ는 정삼각형이므로

$\triangle$ABP와 $\triangle$CBQ에서

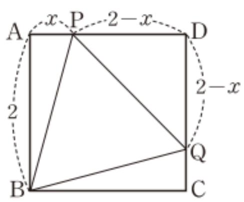
$\angle$PAB$=\angle$QCB$=90°$,

$\overline{PB}=\overline{QB}$, $\overline{AB}=\overline{CB}$

$\therefore\ \triangle$ABP$\equiv\triangle$CBQ (RHS 합동)

따라서 $\overline{AP}=x$라 하면 $\overline{CQ}=x$이므로

$\overline{PD}=\overline{QD}=2-x$



$\triangle$PQD에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{PQ}^2=(2-x)^2+(2-x)^2$

$\triangle$ABP에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{PB}^2=x^2+2^2$

$\triangle$PBQ는 정삼각형이므로 $\overline{PQ}^2=\overline{PB}^2$에서

$(2-x)^2+(2-x)^2=x^2+2^2$

$x^2-8x+4=0$ $\quad\therefore\ x=4\pm2\sqrt{3}$

그런데 $0<x<2$이므로 $\quad x=4-2\sqrt{3}$

따라서 선분 AP의 길이는 $4-2\sqrt{3}$이다. 답 $4-2\sqrt{3}$

0473 전략 $x=2+\sqrt{3}$을 주어진 이차방정식에 대입한다.

풀이 이차방정식 $ax^2+\sqrt{3}bx+c=0$의 한 근이 $2+\sqrt{3}$이므로

$a(2+\sqrt{3})^2+\sqrt{3}b(2+\sqrt{3})+c=0$

$\therefore\ (7a+3b+c)+(4a+2b)\sqrt{3}=0$

이때 a, b, c는 유리수이므로

$7a+3b+c=0$, $4a+2b=0$

$\therefore\ b=-2a$, $c=-a$

따라서 주어진 이차방정식은 $a(x^2-2\sqrt{3}x-1)=0$이고 이 이차방정식의 두 근은

$x=-(-\sqrt{3})\pm\sqrt{(-\sqrt{3})^2-1\cdot(-1)}=\sqrt{3}\pm2$

즉 $\beta=\sqrt{3}-2$이므로

$\alpha+\dfrac{1}{\beta}=2+\sqrt{3}+\dfrac{1}{\sqrt{3}-2}=0$ 답 ③

0474 전략 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 한 근이 α이면 $a\alpha^2+b\alpha+c=0$이 성립한다.

풀이 α가 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 근이므로

$\alpha^2+a\alpha+b=0$

$\alpha\neq0$이므로 양변을 α^2으로 나누면

$1+\dfrac{a}{\alpha}+\dfrac{b}{\alpha^2}=0$ ⋯⋯ ㉠

또 $\dfrac{1}{\alpha}$은 이차방정식 $3x^2+ax+1=0$의 근이므로

$\dfrac{3}{\alpha^2}+\dfrac{a}{\alpha}+1=0$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 $\dfrac{b}{\alpha^2}=\dfrac{3}{\alpha^2}$이므로 $\quad b=3$

β가 이차방정식 $x^2+ax+3=0$의 근이므로

$\beta^2+a\beta+3=0$ ⋯⋯ ㉢

$\beta\neq0$이므로 양변을 β^2으로 나누면

$1+\dfrac{a}{\beta}+\dfrac{3}{\beta^2}=0$

즉 $\dfrac{1}{\beta}$은 이차방정식 $3x^2+ax+1=0$의 근이므로

$\dfrac{1}{\beta}=\dfrac{1}{\alpha}$ 또는 $\dfrac{1}{\beta}=2\beta-1$

이때 $\alpha\neq\beta$이므로 $\quad\dfrac{1}{\beta}=2\beta-1$

$2\beta^2-\beta-1=0$, $\quad(2\beta+1)(\beta-1)=0$

$\therefore\ \beta=1\ (\because\ \beta>0)$

$\beta=1$을 ㉢에 대입하면

$1+a+3=0 \qquad \therefore a=-4$

이차방정식 $x^2-4x+3=0$에서

$(x-1)(x-3)=0 \qquad \therefore x=1$ 또는 $x=3$

따라서 $\alpha=3$이므로

$\beta-\dfrac{1}{\alpha}=1-\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{3}$ 답 ①

0475 전략 이차방정식의 판별식을 D라 할 때, 이차방정식이 중근을 가질 조건은 $D=0$임을 이용한다.

풀이 이차방정식 $x^2-2ax+10a-2b=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=a^2-10a+2b=0$

$(a^2-10a+25)-25+2b=0$

$\therefore (a-5)^2=25-2b$

b는 자연수이고 $25-2b\geq0$이므로 $\quad b\leq\dfrac{25}{2}$

$\therefore b=1, 2, 3, \cdots, 12$

또 a, $(a-5)^2$도 자연수이므로

$b=8$일 때, $\quad (a-5)^2=9 \qquad \therefore a=2$ 또는 $a=8$

$b=12$일 때, $\quad (a-5)^2=1 \qquad \therefore a=4$ 또는 $a=6$

따라서 $\underbrace{a+b\text{의 가장 큰 값은 }18}_{a=6,\ b=12\text{일 때},\quad a+b=18}$이다. 답 18

0476 전략 $P(x)=0$, $Q(x)=0$의 판별식을 a에 대한 식으로 나타낸 후 판별식의 부호를 조사한다.

풀이 이차방정식 $P(x)=0$, $Q(x)=0$의 판별식을 각각 D_1, D_2라 하면

$\dfrac{D_1}{4}=(a+1)^2-a^2=2a+1,$

$\dfrac{D_2}{4}=a^2-(a-1)^2=2a-1$

ㄱ. $P(x)=0$이 실근을 가지면 $\dfrac{D_1}{4}=2a+1\geq0$에서

$a\geq-\dfrac{1}{2}$

이때 $\dfrac{D_2}{4}=2a-1\geq-2$이므로 $Q(x)=0$이 항상 실근을 갖는다고 할 수 없다.

ㄴ. $P(x)=0$이 중근을 가지면 $\dfrac{D_1}{4}=2a+1=0$에서

$a=-\dfrac{1}{2}$

이때 $\dfrac{D_2}{4}=2a-1=-2<0$이므로 $Q(x)=0$은 서로 다른 두 허근을 갖는다.

ㄷ. $P(x)=0$이 서로 다른 두 허근을 가지면 $\dfrac{D_1}{4}=2a+1<0$에서

$a<-\dfrac{1}{2}$

이때 $\dfrac{D_2}{4}=2a-1<-2$이므로 $Q(x)=0$도 서로 다른 두 허근을 갖는다.

이상에서 옳은 것은 ㄷ뿐이다. 답 ③

0477 전략 $x=\alpha$를 각 이차방정식에 대입한 후 세 식을 더하여 a, b, c의 조건식을 찾는다.

풀이 ㄱ. 세 이차방정식이 공통인 실근 α를 가지므로

$a\alpha^2-2b\alpha+c=0$ …… ㉠

$-2b\alpha^2+c\alpha+a=0$ …… ㉡

$c\alpha^2+a\alpha-2b=0$ …… ㉢

㉠+㉡+㉢에서

$(a-2b+c)\alpha^2+(a-2b+c)\alpha+(a-2b+c)=0$

$(a-2b+c)(\alpha^2+\alpha+1)=0$

이때 $\alpha^2+\alpha+1=\left(\alpha+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}>0$이므로

$a-2b+c=0$

ㄴ. $a-2b+c=0$에서 $-2b=-(a+c)$이므로 이차방정식

$ax^2-2bx+c=0$에서 $\quad ax^2-(a+c)x+c=0$

$(ax-c)(x-1)=0 \qquad \therefore x=\dfrac{c}{a}$ 또는 $x=1$

이때 $0<c<a$이므로 $\quad \dfrac{c}{a}<1$

즉 이차방정식 $ax^2-2bx+c=0$은 1보다 작은 실근을 갖는다.

ㄷ. ㄴ에서 이차방정식 $ax^2-2bx+c=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

이차방정식 $-2bx^2+cx+a=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$D_1=c^2-4\cdot(-2b)\cdot a=c^2+8ab>0$

이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.

이차방정식 $cx^2+ax-2b=0$의 판별식을 D_2라 하면

$D_2=a^2-4c\cdot(-2b)=a^2+8bc>0$

이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.

따라서 중근을 갖는 이차방정식은 존재하지 않는다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ㄱ, ㄴ

0478 전략 주어진 이차식을 x에 대하여 내림차순으로 정리하였을 때, (이차식)$=0$의 판별식이 완전제곱식이어야 함을 이용한다.

풀이 주어진 이차식을 x에 대하여 내림차순으로 정리하면

$2x^2-(3y+5)x-2y^2+ky+3$

이때 x에 대한 이차방정식 $2x^2-(3y+5)x-2y^2+ky+3=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$D_1=\{-(3y+5)\}^2-4\cdot2\cdot(-2y^2+ky+3)$

$=9y^2+30y+25+16y^2-8ky-24$

$=25y^2+2(15-4k)y+1$

이 완전제곱식이어야 한다.

y에 대한 이차방정식 $25y^2+2(15-4k)y+1=0$의 판별식을 D_2라 하면

$\dfrac{D_2}{4}=(15-4k)^2-25=0$

$16k^2-120k+225-25=0, \qquad 2k^2-15k+25=0$

$(2k-5)(k-5)=0 \qquad \therefore k=\dfrac{5}{2}$ 또는 $k=5$

따라서 구하는 정수 k의 값은 5이다. 답 5

참고 주어진 식을 y에 대하여 내림차순으로 정리해도 같은 결과를 얻을 수 있다.

SSEN 특강

이차식이 두 일차식의 곱으로 인수분해되는 조건

① 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ (a는 상수, b, c는 y에 대한 다항식)의 근이

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

이므로 b^2-4ac가 완전제곱식일 때, ax^2+bx+c가 두 일차식의 곱으로 인수분해될 수 있다.

② x, y에 대한 이차식 A가 두 일차식의 곱으로 인수분해될 때

(i) A를 x (또는 y)에 대하여 내림차순으로 정리한다.

(ii) $A=0$의 판별식 D가 완전제곱식이어야 한다.

(iii) $D=0$의 판별식이 0이다.

0479 전략 조건 (가), (나)를 만족시키는 c, d의 값을 직접 구한 후 근과 계수의 관계를 이용하여 a, b의 값을 구한다.

풀이 조건 (나)에서 양의 약수가 3개인 것은 소수의 제곱수이고 조건 (가)에서 $c\le100$, $d\le100$이므로 c, d가 될 수 있는 수는

2^2, 3^2, 5^2, 7^2, 즉 4, 9, 25, 49

한편 이차방정식 $x^2-ax+b=0$의 두 근이 c와 d이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$a=c+d$, $b=cd$

조건 (가)에 의하여 a, b, c, d는 100 이하의 서로 다른 자연수이므로 순서쌍 (a, b)는

$(4+9, 4\cdot9)$, $(4+25, 4\cdot25)$

즉 $(13, 36)$, $(29, 100)$의 2개이다. 답 ②

0480 전략 주어진 이차방정식의 두 실근을 α, β라 하고 근과 계수의 관계를 이용하여 $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$를 구한다.

풀이 주어진 이차방정식의 두 실근을 α, β라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=4$, $\alpha\beta=-\frac{k}{3}$ …… ㉠

또 $|\alpha|+|\beta|=6$이므로 양변을 제곱하면

$\alpha^2+2|\alpha\beta|+\beta^2=36$

$(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+2|\alpha\beta|=36$

위의 식에 ㉠을 대입하면

$4^2-2\cdot\left(-\frac{k}{3}\right)+2\left|-\frac{k}{3}\right|=36$

$\frac{2}{3}k+\frac{2}{3}|k|=20$

$\therefore k+|k|=30$ …… ㉡

이때 $k\le0$이면 $k+|k|=0$이므로 ㉡이 성립하지 않는다.

따라서 $k>0$이므로 ㉡에서 $2k=30$

$\therefore k=15$ 답 15

다른 풀이 주어진 이차방정식의 두 실근을 α, β라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=4$, $\alpha\beta=-\frac{k}{3}$ …… ㉠

이때 $|\alpha|+|\beta|=6$, $\alpha+\beta=4$에서 α, β의 부호는 서로 다르다.

즉 $\alpha>0$, $\beta<0$이라 하면

$\alpha-\beta=6$, $\alpha+\beta=4$

두 식을 연립하여 풀면

$\alpha=5$, $\beta=-1$

따라서 ㉠에서 $5\cdot(-1)=-\frac{k}{3}$

$\therefore k=15$

0481 전략 잘못 적용한 근의 공식을 이용하여 두 근의 합과 곱을 먼저 구한다.

풀이 유진이가 잘못 적용한 근의 공식에 의하면 두 근의 합은

$\frac{a+\sqrt{a^2-4bc}}{2b}+\frac{a-\sqrt{a^2-4bc}}{2b}=\frac{2a}{2b}=\frac{a}{b}$ …… ㉠

두 근의 곱은

$\frac{a+\sqrt{a^2-4bc}}{2b}\cdot\frac{a-\sqrt{a^2-4bc}}{2b}=\frac{a^2-(a^2-4bc)}{4b^2}=\frac{c}{b}$ …… ㉡

[1단계]에서 이차방정식 $kX^2+X-8=0$의 두 근은 p, q이므로 ㉠, ㉡에 의하여

$p+q=k$, $pq=-8$ …… ㉢

[2단계]에서 $\alpha+4=p$, $\beta+4=q$이므로

$(\alpha+5)(\beta+5)=(p+1)(q+1)$

$=pq+p+q+1$

$=-8+k+1$ ($\because$ ㉢)

$=k-7$

즉 $k-7=2$이므로 $k=9$

따라서 $9(x+4)^2+(x+4)-8=0$, 즉 $9x^2+73x+140=0$의 두 근의 합은 $-\frac{73}{9}$이다. 답 $-\frac{73}{9}$

0482 전략 근과 계수의 관계를 이용하여 α, β를 근으로 하는 이차방정식을 $P(x)$로 나타낸다.

풀이 이차방정식 $2x^2-2x+3=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=1$, $\alpha\beta=\frac{3}{2}$

$\therefore \alpha=1-\beta$, $\beta=1-\alpha$

$P(\alpha)=\beta$, $P(\beta)=\alpha$에서 $P(\alpha)=1-\alpha$, $P(\beta)=1-\beta$이므로

$P(\alpha)+\alpha-1=0$, $P(\beta)+\beta-1=0$

따라서 α, β는 이차방정식 $P(x)+x-1=0$의 두 근이고, $P(x)$의 x^2의 계수가 1이므로

$P(x)+x-1=x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta$

$=x^2-x+\frac{3}{2}$

$\therefore P(x)=x^2-2x+\frac{5}{2}$ 답 $x^2-2x+\frac{5}{2}$

다른 풀이 $P(x)=x^2+ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$P(\alpha)=\alpha^2+a\alpha+b=\beta$ …… ㉠

$P(\beta)=\beta^2+a\beta+b=\alpha$ …… ㉡

㉠$-$㉡을 하면

$$\alpha^2-\beta^2+a(\alpha-\beta)=-(\alpha-\beta)$$
$$(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)+a(\alpha-\beta)+(\alpha-\beta)=0$$
$$(\alpha-\beta)(\alpha+\beta+a+1)=0$$

$\alpha\neq\beta$이므로 $\quad a+\beta+a+1=0,\quad a+1=-(\alpha+\beta)$

$$a+1=-1\ (\because\ \alpha+\beta=1)$$
$$\therefore\ a=-2$$

㉠$+$㉡을 하면

$$\alpha^2+\beta^2+a(\alpha+\beta)+2b=\alpha+\beta$$
$$\{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\}+a(\alpha+\beta)+2b=\alpha+\beta$$
$$1^2-2\cdot\frac{3}{2}+(-2)\cdot1+2b=1\left(\because\ \alpha+\beta=1,\ \alpha\beta=\frac{3}{2},\ a=-2\right)$$
$$\therefore\ b=\frac{5}{2}$$
$$\therefore\ P(x)=x^2-2x+\frac{5}{2}$$

0483 전략 계수가 모두 실수인 이차방정식의 한 근이 $p+qi$이면 다른 한 근은 $p-qi$이다. (단, p, q는 실수, $q\neq0$, $i=\sqrt{-1}$)

풀이 $\alpha=a+bi$ (a, b는 실수, $b\neq0$)라 하자.

이차방정식 $x^2+2kx-k+1=0$의 한 근이 $a+bi$이면 다른 한 근은 $a-bi$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$(a+bi)+(a-bi)=2a=-2k,$$
$$(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2=-k+1$$
$$\therefore\ a=-k,\ b^2=-k^2-k+1 \quad \cdots\cdots ㉠$$

한편

$$\alpha^3=(a+bi)^3=a^3+3a^2bi-3ab^2-b^3i$$
$$=(a^3-3ab^2)+(3a^2b-b^3)i$$

이고 α^3이 실수이므로 $\quad 3a^2b-b^3=b(3a^2-b^2)=0$

$b\neq0$이므로 $\quad 3a^2-b^2=0 \quad \therefore\ b^2=3a^2 \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $\quad -k^2-k+1=3k^2$

$$\therefore\ 4k^2+k-1=0$$

따라서 모든 실수 k의 값의 곱은 $-\frac{1}{4}$이다.

답 $-\frac{1}{4}$

0484 전략 $\alpha^2=1-2\alpha$임을 이용하여 주어진 α에 대한 다항식을 간단히 한다.

풀이 α가 이차방정식 $x^2+2x-1=0$의 근이므로

$$\alpha^2+2\alpha-1=0 \qquad \therefore\ \alpha^2=1-2\alpha$$
$$\therefore\ \alpha(\alpha^2+3\alpha-4)(\alpha^2+\alpha-6)$$
$$=\alpha(1-2\alpha+3\alpha-4)(1-2\alpha+\alpha-6)$$
$$=\alpha(\alpha-3)(-\alpha-5)$$
$$=-\alpha(\alpha^2+2\alpha-15)$$
$$=-\alpha(1-2\alpha+2\alpha-15)$$
$$=-\alpha\cdot(-14)=14\alpha \quad \cdots ❶$$

그런데 $x^2+2x-1=0$에서 $x=-1\pm\sqrt{2}$이므로

$$\alpha=-1+\sqrt{2}\ (\because\ \alpha>0) \quad \cdots ❷$$
$$\therefore\ \alpha(\alpha^2+3\alpha-4)(\alpha^2+\alpha-6)=14\alpha=-14+14\sqrt{2} \quad \cdots ❸$$

답 $-14+14\sqrt{2}$

채점 기준	비율
❶ 주어진 다항식을 간단히 할 수 있다.	60%
❷ α의 값을 구할 수 있다.	20%
❸ 식의 값을 구할 수 있다.	20%

0485 전략 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 x의 값을 기준으로 x의 값의 범위를 나누어서 푼다.

풀이 $\{(x-1)*(x+4)\}+|x*2|+1=0$에서

$$(x-1)(x+4)-(x-1)-(x+4)+|2x-x-2|+1=0$$
$$\therefore\ x^2+x-6+|x-2|=0 \quad \cdots ❶$$

(i) $x<2$일 때, $\quad x^2+x-6-(x-2)=0$

$$x^2=4 \qquad \therefore\ x=-2\ \text{또는}\ x=2$$

그런데 $x<2$이므로 $\quad x=-2 \quad \cdots ❷$

(ii) $x\geq2$일 때, $\quad x^2+x-6+x-2=0$

$$x^2+2x-8=0,\qquad (x+4)(x-2)=0$$
$$\therefore\ x=-4\ \text{또는}\ x=2$$

그런데 $x\geq2$이므로 $\quad x=2 \quad \cdots ❸$

(i), (ii)에서 구하는 x의 값은

$$x=-2\ \text{또는}\ x=2 \quad \cdots ❹$$

답 $x=-2$ 또는 $x=2$

채점 기준	비율
❶ 연산의 의미를 이해하고 적용할 수 있다.	10%
❷ $x<2$일 때 x의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ $x\geq2$일 때 x의 값을 구할 수 있다.	40%
❹ x의 값을 구할 수 있다.	10%

0486 전략 이차방정식의 판별식을 D라 할 때, 이차방정식이 허근을 가질 조건은 $D<0$임을 이용한다.

풀이 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 판별식을 D라 하면

$$D=a^2-4b<0 \qquad \therefore\ a^2<4b \quad \cdots ❶$$

이때 a, b가 5 이하의 자연수이므로

$b=1$일 때, $a^2<4$이므로 $\quad a=1$

$b=2$일 때, $a^2<8$이므로 $\quad a=1,\ 2$

$b=3$일 때, $a^2<12$이므로 $\quad a=1,\ 2,\ 3$

$b=4$일 때, $a^2<16$이므로 $\quad a=1,\ 2,\ 3$

$b=5$일 때, $a^2<20$이므로 $\quad a=1,\ 2,\ 3,\ 4 \quad \cdots ❷$

따라서 구하는 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는 13이다. $\cdots ❸$

답 13

채점 기준	비율
❶ 이차방정식 $x^2+ax+b=0$이 허근을 가질 조건을 구할 수 있다.	20%
❷ 조건을 만족시키는 a, b의 값을 찾을 수 있다.	60%
❸ 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수를 구할 수 있다.	20%

0487 전략 근과 계수의 관계를 이용하여 $\alpha_n+\beta_n$, $\alpha_n\beta_n$을 n에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha_n+\beta_n=6n+16,\ \alpha_n\beta_n=n^2-8 \quad \cdots ❶$$

$$\therefore \frac{1}{\alpha_n+1}+\frac{1}{\beta_n+1}=\frac{\beta_n+1+\alpha_n+1}{(\alpha_n+1)(\beta_n+1)}$$

$$=\frac{\alpha_n+\beta_n+2}{\alpha_n\beta_n+(\alpha_n+\beta_n)+1}$$

$$=\frac{(6n+16)+2}{(n^2-8)+(6n+16)+1}$$

$$=\frac{6(n+3)}{(n+3)^2}=\frac{6}{n+3} \quad \cdots ❷$$

$$\therefore \left(\frac{1}{\alpha_1+1}+\frac{1}{\alpha_2+1}+\frac{1}{\alpha_3+1}\right)+\left(\frac{1}{\beta_1+1}+\frac{1}{\beta_2+1}+\frac{1}{\beta_3+1}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{\alpha_1+1}+\frac{1}{\beta_1+1}\right)+\left(\frac{1}{\alpha_2+1}+\frac{1}{\beta_2+1}\right)+\left(\frac{1}{\alpha_3+1}+\frac{1}{\beta_3+1}\right)$$

$$=\frac{3}{2}+\frac{6}{5}+1=\frac{37}{10} \quad \cdots ❸$$

따라서 $p=10$, $q=37$이므로 $\quad p+q=47$ $\cdots$ ❹

답 47

채점 기준	비율
❶ $\alpha_n+\beta_n$, $\alpha_n\beta_n$을 n에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	20%
❷ $\frac{1}{\alpha_n+1}+\frac{1}{\beta_n+1}$을 간단히 할 수 있다.	30%
❸ $\left(\frac{1}{\alpha_1+1}+\frac{1}{\alpha_2+1}+\frac{1}{\alpha_3+1}\right)+\left(\frac{1}{\beta_1+1}+\frac{1}{\beta_2+1}+\frac{1}{\beta_3+1}\right)$의 값을 구할 수 있다.	30%
❹ $p+q$의 값을 구할 수 있다.	20%

0488 전략 $|x|=a\ (a>0)$이면 $x=\pm a$임을 이용한다.

풀이 $|x^2+x-k-2|=1$에서

$x^2+x-k-2=\pm 1$

(i) $x^2+x-k-2=1$에서 $\quad x^2+x-k-3=0$

근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 곱은 $\quad -k-3$ $\cdots$ ❶

(ii) $x^2+x-k-2=-1$에서 $\quad x^2+x-k-1=0$

근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 곱은 $\quad -k-1$ $\cdots$ ❷

주어진 방정식의 모든 근의 곱이 24이므로 (i), (ii)에 의하여

$(-k-3)(-k-1)=24$

$k^2+4k-21=0, \quad (k+7)(k-3)=0$

$\therefore k=3\ (\because k>0)$ $\cdots$ ❸

답 3

채점 기준	비율
❶ $x^2+x-k-2=1$에서 두 근의 곱을 구할 수 있다.	30%
❷ $x^2+x-k-2=-1$에서 두 근의 곱을 구할 수 있다.	30%
❸ 양수 k의 값을 구할 수 있다.	40%

참고 두 방정식 $x^2+x-k-3=0$, $x^2+x-k-1=0$을 동시에 만족시키는 x의 값은 없으므로 두 방정식의 공통인 근은 존재하지 않는다.
또 방정식 $x^2+x-k-3=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$D_1=1^2-4\cdot1\cdot(-k-3)=4k+13$

방정식 $x^2+x-k-1=0$의 판별식을 D_2라 하면

$D_2=1^2-4\cdot1\cdot(-k-1)=4k+5$

따라서 $k>0$이면 $D_1>0$, $D_2>0$이므로 주어진 방정식은 서로 다른 네 실근을 갖는다.

0489 전략 근과 계수의 관계를 이용하여 α, β, γ, a, b의 관계식을 찾는다.

풀이 이차방정식 $x^2+(a-6)x-1=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-a+6$ $\cdots\cdots$ ㉠

$\alpha\beta=-1$ $\cdots\cdots$ ㉡

이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근이 α, γ이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\gamma=-a$ $\cdots\cdots$ ㉢

$\alpha\gamma=b$ $\cdots\cdots$ ㉣ $\cdots$ ❶

㉠−㉢을 하면 $\quad \beta-\gamma=6$

이때 $2a=\beta-\gamma$이므로 $\quad 2a=6 \quad \therefore a=3$

$a=3$을 ㉠, ㉡, ㉢, ㉣에 대입하여 풀면

$\beta=-\frac{1}{3}$, $\gamma=-\frac{19}{3}$, $\alpha=\frac{10}{3}$, $b=-19$ $\cdots$ ❷

$\therefore 3a+b=-9$ $\cdots$ ❸

답 -9

채점 기준	비율
❶ 근과 계수의 관계를 이용하여 α, β, γ, a, b의 관계식을 구할 수 있다.	40%
❷ α, β, γ, a, b의 값을 구할 수 있다.	50%
❸ $3a+b$의 값을 구할 수 있다.	10%

Ⅱ. 방정식

05 이차방정식과 이차함수

0490 이차방정식 $x^2+x-2=0$에서
$(x+2)(x-1)=0$ $\therefore x=-2$ 또는 $x=1$ 답 -2, 1

0491 이차방정식 $3x^2-7x+2=0$에서
$(3x-1)(x-2)=0$ $\therefore x=\frac{1}{3}$ 또는 $x=2$ 답 $\frac{1}{3}$, 2

0492 이차방정식 $-4x^2+12x-9=0$에서
$4x^2-12x+9=0$, $(2x-3)^2=0$ $\therefore x=\frac{3}{2}$ 답 $\frac{3}{2}$

0493 이차방정식 $x^2-5x+5=0$의 판별식을 D라 하면
$D=(-5)^2-4\cdot1\cdot5=5>0$
따라서 주어진 이차함수의 그래프와 x축의 교점은 2개이다. 답 2

0494 이차방정식 $2x^2-x+5=0$의 판별식을 D라 하면
$D=(-1)^2-4\cdot2\cdot5=-39<0$
따라서 주어진 이차함수의 그래프와 x축의 교점은 없다. 답 0

0495 이차방정식 $-4x^2+4x-1=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=2^2-(-4)\cdot(-1)=0$
따라서 주어진 이차함수의 그래프와 x축의 교점은 1개이다. 답 1

0496 이차방정식 $x^2-2x-k=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=(-1)^2-1\cdot(-k)=1+k>0$
$\therefore k>-1$ 답 $k>-1$

0497 $\frac{D}{4}=1+k=0$ $\therefore k=-1$ 답 $k=-1$

0498 $\frac{D}{4}=1+k<0$ $\therefore k<-1$ 답 $k<-1$

0499 이차방정식 $x^2-4x+k=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=(-2)^2-1\cdot k=4-k$
주어진 이차함수의 그래프가 x축과 만나려면 $D\geq0$이어야 하므로
$4-k\geq0$ $\therefore k\leq4$ 답 $k\leq4$

0500 $x^2-x+5=3x+1$에서 $x^2-4x+4=0$
$(x-2)^2=0$ $\therefore x=2$ 답 2

0501 $-x^2+4x+1=-x+5$에서 $x^2-5x+4=0$
$(x-1)(x-4)=0$ $\therefore x=1$ 또는 $x=4$ 답 1, 4

0502 $-3x^2+5x+7=-x-2$에서
$3x^2-6x-9=0$, $x^2-2x-3=0$
$(x+1)(x-3)=0$ $\therefore x=-1$ 또는 $x=3$ 답 -1, 3

0503 $x^2+2x+2=-x+1$, 즉 $x^2+3x+1=0$의 판별식을 D라 하면 $D=3^2-4\cdot1\cdot1=5>0$
따라서 주어진 이차함수의 그래프와 직선은 서로 다른 두 점에서 만난다. 답 서로 다른 두 점에서 만난다.

0504 $2x^2-3x+4=x+2$, 즉 $x^2-2x+1=0$의 판별식을 D라 하면 $\frac{D}{4}=(-1)^2-1\cdot1=0$
따라서 주어진 이차함수의 그래프와 직선은 한 점에서 만난다.(접한다.) 답 한 점에서 만난다.(접한다.)

0505 $-x^2+6x+1=2x+7$, 즉 $x^2-4x+6=0$의 판별식을 D라 하면 $\frac{D}{4}=(-2)^2-1\cdot6=-2<0$
따라서 주어진 이차함수의 그래프와 직선은 만나지 않는다.
답 만나지 않는다.

0506 $x^2-3x-4=x+k$, 즉 $x^2-4x-4-k=0$의 판별식을 D라 하면 $\frac{D}{4}=(-2)^2-1\cdot(-4-k)=k+8>0$
$\therefore k>-8$ 답 $k>-8$

0507 $\frac{D}{4}=k+8=0$ $\therefore k=-8$ 답 $k=-8$

0508 $\frac{D}{4}=k+8<0$ $\therefore k<-8$ 답 $k<-8$

0509 $2x^2-x+2=x+m$, 즉 $2x^2-2x+2-m=0$의 판별식을 D라 하면 $\frac{D}{4}=(-1)^2-2\cdot(2-m)=2m-3$
주어진 이차함수의 그래프와 직선이 만나려면 $D\geq0$이어야 하므로
$2m-3\geq0$ $\therefore m\geq\frac{3}{2}$ 답 $m\geq\frac{3}{2}$

0510 (1) $y=3x^2-12x+15=3(x^2-4x+4)-12+15$
$=3(x-2)^2+3$
(2) 최솟값은 3이고, 그때의 x의 값은 2이다.
답 (1) $y=3(x-2)^2+3$ (2) 최솟값: 3, x의 값: 2

05 이차방정식과 이차함수

0511 (1) $y=-x^2-4x+5=-(x^2+4x+4)-(-4)+5$
$=-(x+2)^2+9$

(2) 최댓값은 9이고, 그때의 x의 값은 -2이다.

답 (1) $y=-(x+2)^2+9$ (2) 최댓값: 9, x의 값: -2

0512 $y=x^2+2x+3=(x+1)^2+2$

따라서 $x=-1$일 때 최솟값은 2이고, 최댓값은 없다.

답 최솟값: 2, 최댓값: 없다.

0513 $y=-\frac{1}{2}x^2+x+1=-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{3}{2}$

따라서 $x=1$일 때 최댓값은 $\frac{3}{2}$이고, 최솟값은 없다.

답 최댓값: $\frac{3}{2}$, 최솟값: 없다.

0514 $y=(x^2-8x+16)-16+a+2=(x-4)^2+a-14$

이므로 $a-14=-1$ $\therefore a=13$

답 13

0515 $y=-\frac{1}{4}(x^2-4x+4)-(-1)+2a$

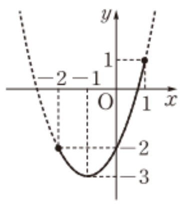
$=-\frac{1}{4}(x-2)^2+2a+1$

이므로 $2a+1=5$ $\therefore a=2$

답 2

0516 답 2, 3, 4, 3, 7, 7, 3

0517 $f(x)=x^2+2x-2$
$=(x+1)^2-3$



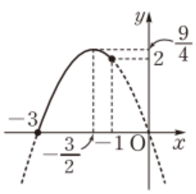
$-2\le x\le 1$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고

$f(-2)=-2$, $f(-1)=-3$,
$f(1)=1$

따라서 $f(x)$의 최댓값은 1, 최솟값은 -3이다.

답 최댓값: 1, 최솟값: -3

0518 $f(x)=-x^2-3x$
$=-\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{9}{4}$



$-3\le x\le -1$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고

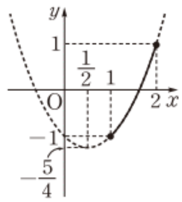
$f(-3)=0$, $f\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{9}{4}$,

$f(-1)=2$

따라서 $f(x)$의 최댓값은 $\frac{9}{4}$, 최솟값은 0이다.

답 최댓값: $\frac{9}{4}$, 최솟값: 0

0519 $f(x)=x^2-x-1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}$



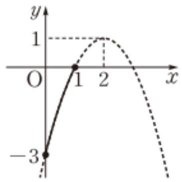
$1\le x\le 2$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고

$f(1)=-1$, $f(2)=1$

따라서 $f(x)$의 최댓값은 1, 최솟값은 -1이다.

답 최댓값: 1, 최솟값: -1

0520 $f(x)=-x^2+4x-3$
$=-(x-2)^2+1$



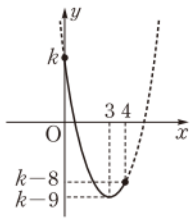
$0\le x\le 1$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고

$f(0)=-3$, $f(1)=0$

따라서 $f(x)$의 최댓값은 0, 최솟값은 -3이다.

답 최댓값: 0, 최솟값: -3

0521 $f(x)=x^2-6x+k$
$=(x-3)^2-9+k$



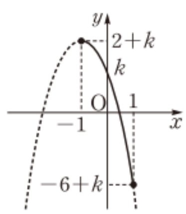
이므로 $0\le x\le 4$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 $x=0$에서 최댓값 k를 가지므로

$k=4$

답 4

0522 $f(x)=-2x^2-4x+k$
$=-2(x+1)^2+2+k$



이므로 $-1\le x\le 1$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 $x=1$에서 최솟값 $-6+k$를 가지므로 $-6+k=-4$

$\therefore k=2$

답 2

유형 01 이차함수의 그래프와 x축의 교점

본책 80쪽

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표가 α, β이다.

⇒ 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 실근이 α, β이다.

⇒ 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용한다.

$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$, $\alpha\beta=\frac{c}{a}$

0523 이차함수 $y=2x^2+ax+b$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표가 -1, 4이므로 -1, 4는 이차방정식 $2x^2+ax+b=0$의 두 근이다. 따라서 근과 계수의 관계에 의하여

$-1+4=-\frac{a}{2}$, $-1\cdot 4=\frac{b}{2}$

이므로 $a=-6$, $b=-8$

$\therefore ab=48$

답 48

0524 이차함수 $y=x^2-ax+b$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표가 -3, -2이므로 -3, -2는 이차방정식 $x^2-ax+b=0$의 두 근이다. 따라서 근과 계수의 관계에 의하여

$-3-2=a$, $(-3)\cdot(-2)=b$

이므로 $a=-5$, $b=6$

이차함수 $y=x^2-6x+5$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표는 이차방정식 $x^2-6x+5=0$의 근이므로

$(x-1)(x-5)=0$ $\therefore x=1$ 또는 $x=5$

따라서 두 점 사이의 거리는

$5-1=4$

답 ④

0525 이차방정식 $3x^2+ax-2=0$의 두 근을 α, β라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-\frac{a}{3}$, $\alpha\beta=-\frac{2}{3}$ …… ㉠

이때 주어진 이차함수의 그래프가 x축과 만나는 두 점 사이의 거리가 $\frac{5}{3}$이므로 $|\alpha-\beta|=\frac{5}{3}$

양변을 제곱하면 $(\alpha-\beta)^2=\frac{25}{9}$

$\therefore (\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=\frac{25}{9}$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $\frac{a^2}{9}+\frac{8}{3}=\frac{25}{9}$

$a^2=1$ $\therefore a=\pm1$

따라서 구하는 모든 상수 a의 값의 곱은 -1이다. 답 -1

다른 풀이 이차방정식 $3x^2+ax-2=0$의 두 근을 α, $\alpha+\frac{5}{3}$라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\left(\alpha+\frac{5}{3}\right)=-\frac{a}{3}$ …… ㉠

$\alpha\left(\alpha+\frac{5}{3}\right)=-\frac{2}{3}$ …… ㉡

㉡에서 $\alpha^2+\frac{5}{3}\alpha+\frac{2}{3}=0$

$3\alpha^2+5\alpha+2=0$, $(\alpha+1)(3\alpha+2)=0$

$\therefore \alpha=-1$ 또는 $\alpha=-\frac{2}{3}$ …… ㉢

㉢을 ㉠에 대입하면 $a=1$ 또는 $a=-1$

따라서 구하는 모든 상수 a의 값의 곱은 -1이다.

0526 꼭짓점의 좌표가 $(-2, -1)$이므로 주어진 이차함수를 $y=a(x+2)^2-1$이라 하면

$y=a(x+2)^2-1=ax^2+4ax+4a-1$ …… ㉠

이때 주어진 이차함수의 그래프의 축의 방정식이 $x=-2$이고 $\overline{PQ}=4$이므로 두 점 P, Q의 x좌표는 -4, 0이다.

-4, 0은 이차방정식 $ax^2+4ax+4a-1=0$의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$-4\cdot0=\frac{4a-1}{a}$, $4a-1=0$ $\therefore a=\frac{1}{4}$ ⋯ ❶

$a=\frac{1}{4}$을 ㉠에 대입하면 $y=\frac{1}{4}x^2+x$

따라서 $b=1$, $c=0$이므로 ⋯ ❷

$a+b+c=\frac{5}{4}$ ⋯ ❸

답 $\frac{5}{4}$

채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	60%
❷ b, c의 값을 구할 수 있다.	20%
❸ $a+b+c$의 값을 구할 수 있다.	20%

유형 02 이차함수의 그래프와 x축의 위치 관계 본책 80쪽

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 x축의 위치 관계는 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 D라 하면

① $D>0$ ➡ 서로 다른 두 점에서 만난다.
② $D=0$ ➡ 한 점에서 만난다. (접한다.)
③ $D<0$ ➡ 만나지 않는다.

0527 이차함수 $y=x^2+(2-m)x+\frac{m^2}{4}$의 그래프가 x축과 서로 다른 두 점에서 만나므로 방정식 $x^2+(2-m)x+\frac{m^2}{4}=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(2-m)^2-4\cdot\frac{m^2}{4}>0$, $-4m+4>0$

$4m<4$ $\therefore m<1$

따라서 정수 m의 최댓값은 0이다. 답 0

0528 이차함수 $y=x^2+2kx-4k$의 그래프가 x축과 한 점에서 만나므로 방정식 $x^2+2kx-4k=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$\frac{D_1}{4}=k^2-(-4k)=0$, $k^2+4k=0$

$k(k+4)=0$ $\therefore k=0$ 또는 $k=-4$ …… ㉠ ⋯ ❶

또 이차함수 $y=-2x^2+x+k$의 그래프가 x축과 만나지 않으므로 방정식 $-2x^2+x+k=0$의 판별식을 D_2라 하면

$D_2=1^2-4\cdot(-2)\cdot k<0$, $8k<-1$

$\therefore k<-\frac{1}{8}$ …… ㉡ ⋯ ❷

㉠, ㉡에서 $k=-4$ ⋯ ❸

답 -4

채점 기준	비율
❶ ㉠을 구할 수 있다.	40%
❷ ㉡을 구할 수 있다.	40%
❸ 상수 k의 값을 구할 수 있다.	20%

0529 이차함수 $y=x^2-2ax-b^2+9$의 그래프가 x축과 만나지 않으므로 방정식 $x^2-2ax-b^2+9=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-a)^2-(-b^2+9)<0$

$\therefore a^2+b^2<9$ …… ㉠

따라서 ㉠을 만족시키는 자연수 a, b의 순서쌍 (a, b)는 $(1, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 1)$, $(2, 2)$의 4개이다. 답 4

0530 이차함수 $y=x^2+ax+b$의 그래프가 점 $(2,\ 4)$를 지나므로

$4=4+2a+b$

$\therefore\ b=-2a$ ...... ㉠

또 이차함수의 그래프가 x축에 접하므로 방정식 $x^2+ax+b=0$의 판별식을 D라 하면

$D=a^2-4b=0$ ...... ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $a^2+8a=0$

$a(a+8)=0$ $\therefore\ a=-8\ (\because\ a<0)$

$a=-8$을 ㉠에 대입하면 $b=16$

$\therefore\ a+b=8$

답 ①

0531 이차함수 $y=x^2+2(a+k)x+k^2+6k+b$의 그래프가 x축에 접하므로 방정식 $x^2+2(a+k)x+k^2+6k+b=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(a+k)^2-(k^2+6k+b)=0$

$a^2+2ak+k^2-k^2-6k-b=0$

$\therefore\ (2a-6)k+a^2-b=0$

이 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$2a-6=0,\ a^2-b=0$

두 식을 연립하여 풀면 $a=3,\ b=9$

$\therefore\ ab=27$

답 ④

SSEN 특강

항등식의 성질

① $ax+b=0$이 x에 대한 항등식 ➡ $a=0,\ b=0$

② $ax^2+bx+c=0$이 x에 대한 항등식 ➡ $a=0,\ b=0,\ c=0$

③ $ax^2+bx+c=a'x^2+b'x+c'$이 x에 대한 항등식

➡ $a=a',\ b=b',\ c=c'$

유형 03 이차함수의 그래프와 직선의 교점

본책 81쪽

이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=g(x)$의 교점의 x좌표가 $\alpha,\ \beta$이다.

➡ 이차방정식 $f(x)=g(x)$의 두 실근이 $\alpha,\ \beta$이다.

➡ 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용한다.

0532 이차함수 $y=2x^2-3x+1$의 그래프와 직선 $y=ax+b$의 두 교점의 x좌표가 $-2,\ 3$이므로 $-2,\ 3$은 이차방정식

$2x^2-3x+1=ax+b$, 즉

$2x^2-(a+3)x+1-b=0$

의 두 근이다. 따라서 근과 계수의 관계에 의하여

$-2+3=\frac{a+3}{2},\ -2\cdot 3=\frac{1-b}{2}$

이므로 $a+3=2,\ 1-b=-12$

$\therefore\ a=-1,\ b=13$

$\therefore\ a+b=12$

답 ③

0533 이차함수 $y=x^2-ax+3$의 그래프와 직선 $y=-2x+b$의 두 교점의 x좌표의 합이 2이고, 곱이 -6이므로 이차방정식

$x^2-ax+3=-2x+b$, 즉 $x^2-(a-2)x+3-b=0$의 두 근의 합이 2, 곱이 -6이다.

따라서 근과 계수의 관계에 의하여

$a-2=2,\ 3-b=-6$

이므로 $a=4,\ b=9$

$\therefore\ b-a=5$

답 5

0534 이차함수 $y=x^2+px+q$의 그래프와 직선 $y=3x-1$의 한 교점의 x좌표가 $1-\sqrt{3}$이므로 $1-\sqrt{3}$은 이차방정식

$x^2+px+q=3x-1$, 즉

$x^2+(p-3)x+q+1=0$

의 한 근이다. ··· ❶

이때 이 이차방정식의 계수가 모두 유리수이고 한 근이 $1-\sqrt{3}$이므로 다른 한 근은 $1+\sqrt{3}$이다. ··· ❷

따라서 근과 계수의 관계에 의하여

$(1-\sqrt{3})+(1+\sqrt{3})=-(p-3),\ (1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})=q+1$

이므로 $2=-p+3,\ -2=q+1$

$\therefore\ p=1,\ q=-3$ ··· ❸

$\therefore\ p-q=4$ ··· ❹

답 4

채점 기준	비율
❶ $1-\sqrt{3}$을 한 근으로 갖는 이차방정식을 세울 수 있다.	20%
❷ 이차방정식의 다른 한 근이 $1+\sqrt{3}$임을 알 수 있다.	20%
❸ $p,\ q$의 값을 구할 수 있다.	40%
❹ $p-q$의 값을 구할 수 있다.	20%

SSEN 특강

이차방정식의 켤레근

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$에서 $a,\ b,\ c$가 유리수일 때, $p+q\sqrt{m}$이 근이면 $p-q\sqrt{m}$도 근이다.

(단, $p,\ q$는 유리수, $q\neq 0$, $\sqrt{m}$은 무리수)

0535 이차함수 $y=x^2-2$의 그래프와 직선 $y=mx$의 두 교점의 x좌표의 차가 4이므로 이차방정식 $x^2-2=mx$, 즉 $x^2-mx-2=0$의 두 근의 차가 4이다.

즉 두 근을 $\alpha,\ \beta$라 하면 $|\alpha-\beta|=4$ ...... ㉠

근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=m,\ \alpha\beta=-2$ ...... ㉡

㉠의 양변을 제곱하면 $(\alpha-\beta)^2=16$

$\therefore\ (\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=16$ ...... ㉢

㉡을 ㉢에 대입하면

$m^2+8=16$ $\therefore\ m=2\sqrt{2}\ (\because\ m>0)$

답 $2\sqrt{2}$

0536 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=g(x)$의 두 교점의 x좌표가 $\alpha,\ \gamma$이므로 $\alpha,\ \gamma$는 이차방정식

$f(x)=g(x)$, 즉 $f(x)-g(x)=0$

의 두 근이다.

이차항의 계수가 1인 이차함수이다.

$\therefore\ f(x)-g(x)=(x-\alpha)(x-\gamma)$

$g(x)=a(x-\alpha)(a\neq0)$라 하면

$f(x)=(x-\alpha)(x-\gamma)+a(x-\alpha)$

$f(\beta)=0$이므로

$(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)+a(\beta-\alpha)=0$ ······ ㉠

또 $\beta-\alpha=3$, $\gamma-\beta=2$이므로

$-6+3a=0$ $\therefore a=2$

즉 $g(x)=2(x-\alpha)$이고 $g(0)=-2$이므로

$-2\alpha=-2$ $\therefore \alpha=1$

$\therefore \beta=\alpha+3=4$, $\gamma=\beta+2=6$

따라서 $f(x)=(x-1)(x-6)+2(x-1)$이므로

$f(\alpha+\beta+\gamma)=f(11)=70$ 답 ④

유형 04 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계 본책 81쪽

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 직선 $y=mx+n$의 위치 관계는 이차방정식 $ax^2+bx+c=mx+n$, 즉 $ax^2+(b-m)x+c-n=0$의 판별식을 D라 하면

① $D>0$ ➡ 서로 다른 두 점에서 만난다.

② $D=0$ ➡ 한 점에서 만난다.(접한다.)

③ $D<0$ ➡ 만나지 않는다.

0537 이차함수 $y=x^2+kx+2$의 그래프와 직선 $y=x+1$이 접하므로 방정식 $x^2+kx+2=x+1$, 즉 $x^2+(k-1)x+1=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(k-1)^2-4=0$ $\therefore k^2-2k-3=0$

따라서 근과 계수의 관계에 의하여 모든 실수 k의 값의 합은 2이다.

답 ⑤

0538 직선 $y=x-m+n-1$이 이차함수 $y=x^2-1$의 그래프와 항상 서로 다른 두 점에서 만나므로 방정식 $x-m+n-1=x^2-1$, 즉 $x^2-x+m-n=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-1)^2-4(m-n)>0$

$\therefore 4m-4n-1<0$ 답 ③

0539 이차함수 $y=x^2-2x+k$의 그래프와 직선 $y=2x-1$이 적어도 한 점에서 만나야 하므로 방정식 $x^2-2x+k=2x-1$, 즉 $x^2-4x+k+1=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-2)^2-(k+1)\geq0$

$3-k\geq0$ $\therefore k\leq3$

따라서 자연수 k는 1, 2, 3의 3개이다. 답 3

0540 이차함수 $y=x^2-2kx+3$의 그래프가 직선 $y=-4x-k^2$보다 항상 위쪽에 있으려면 이차함수의 그래프와 직선이 만나지 않아야 하므로 방정식 $x^2-2kx+3=-4x-k^2$, 즉 $x^2-2(k-2)x+k^2+3=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\{-(k-2)\}^2-(k^2+3)<0$ ··· ❶

$-4k+1<0$ $\therefore k>\frac{1}{4}$ ··· ❷

따라서 구하는 정수 k의 최솟값은 1이다. ··· ❸

답 1

채점 기준	비율
❶ 주어진 이차함수의 그래프가 직선보다 항상 위쪽에 있도록 하는 조건을 구할 수 있다.	60%
❷ k의 값의 범위를 구할 수 있다.	20%
❸ 정수 k의 최솟값을 구할 수 있다.	20%

유형 05 이차함수의 그래프에 접하는 직선의 방정식 본책 82쪽

① 기울기가 m이고 이차함수 $y=f(x)$의 그래프에 접하는 직선

➡ $y=mx+b$로 놓고, 이차방정식 $f(x)=mx+b$의 판별식 D가 $D=0$임을 이용하여 b의 값을 구한다.

② 점 (p, q)를 지나고 이차함수 $y=f(x)$의 그래프에 접하는 직선

➡ $y=a(x-p)+q$로 놓고, 이차방정식 $f(x)=a(x-p)+q$의 판별식 D가 $D=0$임을 이용하여 a의 값을 구한다.

0541 직선 $y=ax+b$가 직선 $y=-2x+1$에 평행하므로

$a=-2$

직선 $y=-2x+b$가 이차함수 $y=x^2+2x-3$의 그래프와 접하므로 방정식 $x^2+2x-3=-2x+b$, 즉 $x^2+4x-3-b=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=2^2-(-3-b)=0$ $\therefore b=-7$

$\therefore a+b=-9$ 답 ③

참고 두 직선 $y=ax+b$, $y=a'x+b'$이 평행하면 $a=a'$, $b\neq b'$이다.

0542 직선 $y=x+m$을 x축의 방향으로 $2m$만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$y=(x-2m)+m=x-m$

이 직선이 이차함수 $y=x^2-x+2$의 그래프와 접하므로 방정식 $x^2-x+2=x-m$, 즉 $x^2-2x+2+m=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-1)^2-(2+m)=0$

$-1-m=0$ $\therefore m=-1$ 답 -1

0543 점 $(1, 1)$을 지나는 직선의 방정식을 $y=a(x-1)+1$이라 하면 이 직선이 이차함수 $y=2x^2-3x+2$의 그래프와 접하므로 방정식 $2x^2-3x+2=a(x-1)+1$, 즉 $2x^2-(3+a)x+1+a=0$의 판별식을 D라 하면

$D=\{-(3+a)\}^2-8(1+a)=0$

$a^2-2a+1=0$, $(a-1)^2=0$ $\therefore a=1$

따라서 구하는 직선의 방정식은 $y=x$ 답 $y=x$

0544 점 $(-3, 1)$을 지나는 직선의 방정식을 $y=a(x+3)+1$이라 하면 이 직선이 이차함수 $y=-x^2+2x+5$의 그래프와 접하므로 방정식 $-x^2+2x+5=a(x+3)+1$, 즉 $x^2+(a-2)x+3a-4=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(a-2)^2-4(3a-4)=0$ $\therefore a^2-16a+20=0$

05 이차방정식과 이차함수

이 방정식의 두 실근을 α, β라 하면 α, β는 두 직선의 기울기이므로 구하는 기울기의 곱은 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha\beta=20$ 답 ⑤

참고 이차방정식 $a^2-16a+20=0$의 판별식을 D'이라 하면

$\frac{D'}{4}=(-8)^2-20=44>0$

따라서 $a^2-16a+20=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

0545 구하는 직선의 방정식을 $y=mx+n$이라 하자.
이 직선이 이차함수 $y=x^2-2ax+a^2-1$의 그래프와 접하므로 방정식 $x^2-2ax+a^2-1=mx+n$, 즉
$x^2-(2a+m)x+a^2-1-n=0$의 판별식을 D라 하면

$D=\{-(2a+m)\}^2-4(a^2-1-n)=0$

$\therefore 4ma+(m^2+4+4n)=0$ ⋯ ❶

이 식이 a의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$4m=0,\ m^2+4+4n=0$

두 식을 연립하여 풀면 $m=0,\ n=-1$ ⋯ ❷

따라서 구하는 직선의 방정식은 $y=-1$ ⋯ ❸

답 $y=-1$

채점 기준	비율
❶ 직선이 주어진 이차함수의 그래프와 접하기 위한 조건을 이용하여 식을 세울 수 있다.	50%
❷ m, n의 값을 구할 수 있다.	30%
❸ 직선의 방정식을 구할 수 있다.	20%

유형 06 이차함수의 최대·최소 본책 83쪽

(1) 이차함수 $f(x)$가 $x=p$에서 최솟값 또는 최댓값을 갖는다.
➡ $f(x)=a(x-p)^2+q$로 놓는다.
(2) 이차함수 $y=a(x-p)^2+q$는
① $a>0$일 때, $x=p$에서 최솟값 q를 갖는다.
② $a<0$일 때, $x=p$에서 최댓값 q를 갖는다.

0546 이차함수 $y=x^2+2ax+b$가 $x=-2$에서 최솟값 -8을 가지므로

$x^2+2ax+b=(x+2)^2-8$
$\qquad\qquad=x^2+4x-4$

따라서 $2a=4,\ b=-4$이므로 $a=2,\ b=-4$

$\therefore a+b=-2$ 답 ②

0547 $y=\frac{1}{2}x^2-2x+k=\frac{1}{2}(x-2)^2-2+k$이므로 $x=2$에서 최솟값 $-2+k$를 갖는다.
$y=-2x^2-4x-3k=-2(x+1)^2+2-3k$이므로 $x=-1$에서 최댓값 $2-3k$를 갖는다.
이때 최솟값과 최댓값이 같으므로

$-2+k=2-3k\qquad\therefore k=1$ 답 1

0548 이차함수 $f(x)=ax^2+bx+c$가 $x=1$에서 최댓값 1을 가지므로 $f(x)=a(x-1)^2+1$
$f(-1)=-7$에서 $-7=a(-1-1)^2+1$

$4a=-8\qquad\therefore a=-2$

$\therefore f(x)=-2(x-1)^2+1=-2x^2+4x-1$

따라서 $a=-2,\ b=4,\ c=-1$이므로

$2a+b+c=2\cdot(-2)+4-1=-1$ 답 -1

0549 $y=x^2-2ax+4a-4=(x-a)^2-a^2+4a-4$
이므로 $x=a$에서 최솟값 $-a^2+4a-4$를 갖는다. ⋯ ❶
$m=-a^2+4a-4=-(a-2)^2$이므로 m은 $a=2$에서 최댓값 0을 갖는다. ⋯ ❷

답 0

채점 기준	비율
❶ 주어진 이차함수의 최솟값을 구할 수 있다.	50%
❷ m의 최댓값을 구할 수 있다.	50%

0550 조건 (나)에서 이차함수 $f(x)$의 최댓값은 4이므로
$f(x)=a(x-m)^2+4\ (a<0)$라 하면 조건 (가)에서 $f(1)=2$이므로

$a(1-m)^2+4=2$, 즉 $a(1-m)^2=-2$ ⋯⋯ ㉠

한편 방정식 $f(x)+10=0$에서

$a(x-m)^2+4+10=0$

즉 $ax^2-2amx+am^2+14=0$의 두 실근의 합이 6이므로

$\frac{2am}{a}=6\qquad\therefore m=3$

$m=3$을 ㉠에 대입하면

$4a=-2\qquad\therefore a=-\frac{1}{2}$

따라서 $f(x)=-\frac{1}{2}(x-3)^2+4$이므로

방정식 $\underline{-\frac{1}{2}(x-3)^2+4=0}$, 즉 $x^2-6x+1=0$의 두 실근의 곱은 근과 계수의 관계에 의하여 1이다.

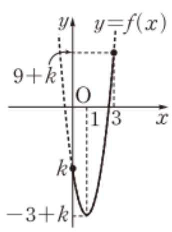
양변에 -2를 곱하면 $(x-3)^2-8=0$ $\therefore x^2-6x+1=0$

답 ①

유형 07 제한된 범위에서 이차함수의 최대·최소 본책 83쪽

$\alpha\le x\le\beta$에서 이차함수 $y=a(x-p)^2+q$의 최대·최소
① $\alpha\le p\le\beta$일 때
➡ $f(\alpha)$, $f(\beta)$, q 중 가장 큰 값이 최댓값, 가장 작은 값이 최솟값이다.
② $p<\alpha$ 또는 $p>\beta$일 때
➡ $f(\alpha)$, $f(\beta)$ 중 큰 값이 최댓값, 작은 값이 최솟값이다.

0551 $f(x)=3x^2-6x+k$
$\qquad=3(x-1)^2-3+k$
이므로 $0\le x\le3$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



$x=3$에서 최댓값 $9+k$를 가지므로

$9+k=4\qquad\therefore k=-5$

따라서 $f(x)$의 최솟값은

$-3+(-5)=-8$ 　답 ①

0552 $y=-2x^2+4x+a=-2(x-1)^2+2+a$

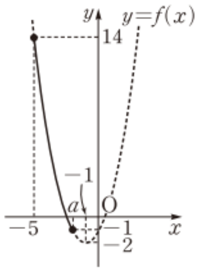
$-2\le x\le 1$에서 $x=1$일 때 최댓값은 $a+2$이고, $x=-2$일 때 최솟값은 $a-16$이다.

따라서 구하는 차는

$(a+2)-(a-16)=18$ 　답 ⑤

0553 $f(x)=x^2+2x-1=(x+1)^2-2$

라 하면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $f(-1)=-2$이므로



$a<-1$ 　$a\ge -1$이면 $f(x)$의 최솟값은 -2이다.

$f(-5)=14$이므로 $f(x)$는 $x=-5$에서 최댓값을 갖고, $x=a$에서 최솟값을 갖는다.

따라서 $f(a)=-1$이므로

$a^2+2a-1=-1,\qquad a^2+2a=0$

$a(a+2)=0\qquad \therefore a=-2\ (\because a<-1)$ 　답 -2

0554 $y=-x^2+2kx=-(x-k)^2+k^2$

(i) $k<3$일 때 　꼭짓점의 x좌표가 주어진 범위에 속하지 않는다.

주어진 함수는 $x=3$에서 최댓값 $6k-9$를 가지므로

$6k-9=15\qquad \therefore k=4$

이때 $k<3$이므로 조건을 만족시키는 k의 값은 존재하지 않는다.

(ii) $k\ge 3$일 때 　꼭짓점의 x좌표가 주어진 범위에 속한다.

주어진 함수는 $x=k$에서 최댓값 k^2을 가지므로

$k^2=15\qquad \therefore k=\pm\sqrt{15}$

이때 $k\ge 3$이므로 　$k=\sqrt{15}$

(i), (ii)에서 　$k=\sqrt{15}$ 　답 $\sqrt{15}$

0555 $f(x)=x^2+2|x|-3$이라 하면

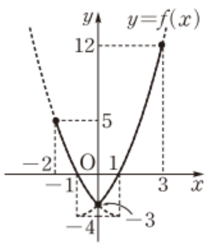
(i) $-2\le x<0$일 때

$f(x)=x^2-2x-3=(x-1)^2-4$

(ii) $0\le x\le 3$일 때

$f(x)=x^2+2x-3=(x+1)^2-4$

(i), (ii)에서 $-2\le x\le 3$일 때, $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$M=f(3)=12,\ m=f(0)=-3$

$\therefore Mm=-36$ 　답 ②

유형 08 공통부분이 있는 함수의 최대·최소 　본책 84쪽

$y=\{f(x)\}^2+af(x)+b$의 최대·최소

(i) $f(x)=t$로 놓고 t의 값의 범위를 구한다.

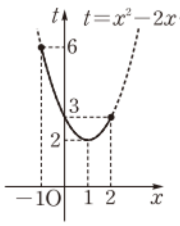
(ii) $y=t^2+at+b$를 $y=(t-p)^2+q$ 꼴로 변형한다.

(iii) (i)의 범위에서 최대·최소를 구한다.

0556 $x^2-2x+3=t$로 놓으면

$t=(x-1)^2+2$

$-1\le x\le 2$이므로 오른쪽 그림에서



$2\le t\le 6$

이때 주어진 함수는

$y=t^2-2t-4$

$=(t-1)^2-5\ (2\le t\le 6)$

따라서 $t=2$일 때 최솟값은 -4이고, $t=6$일 때 최댓값은 20이므로 최댓값과 최솟값의 합은

$20+(-4)=16$ 　답 ②

0557 $x^2+4x=t$로 놓으면

$t=(x+2)^2-4\ge -4$

이때 주어진 함수는

$y=t^2-2t-5=(t-1)^2-6\ (t\ge -4)$

따라서 $t=1$일 때 최솟값은 -6이다. 　답 -6

0558 $x^2-6x+7=t$로 놓으면

$t=(x-3)^2-2\ge -2$

이때 주어진 함수는

$y=-2t^2+4(t-7)+k+20$

$=-2t^2+4t+k-8$

$=-2(t-1)^2+k-6\ (t\ge -2)$

따라서 $t=1$일 때 최댓값 $k-6$을 가지므로

$k-6=2\qquad \therefore k=8$ 　답 ④

0559 $x^2+2x=t$로 놓으면

$t=x^2+2x=(x+1)^2-1\ge -1$

이때 주어진 함수는

$y=t^2+4t=(t+2)^2-4\ (t\ge -1)$

따라서 $t=-1$일 때 최솟값 -3을 갖는다. ··· ❶

$t=-1$에서 　$x^2+2x=-1$

$x^2+2x+1=0,\qquad (x+1)^2=0$

$\therefore x=-1$ ··· ❷

따라서 $a=-1,\ b=-3$이므로

$a+b=-4$ ··· ❸

답 -4

채점 기준	비율
❶ 주어진 함수의 최솟값을 구할 수 있다.	50%
❷ 최솟값을 가질 때의 x의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	10%

유형 09 완전제곱식을 이용한 이차식의 최대·최소 　본책 84쪽

x, y가 실수일 때, $ax^2+by^2+cx+dy+e$의 최대·최소

➡ $a(x-m)^2+b(y-n)^2+k$ 꼴로 변형한 후 (실수)$^2\ge 0$임을 이용한다.

➡ $x=m,\ y=n$일 때, 최댓값 또는 최솟값은 k이다.

0560 $2x^2-4x+y^2+6y+16=2(x-1)^2+(y+3)^2+5$
이때 x, y가 실수이므로
$(x-1)^2\ge 0$, $(y+3)^2\ge 0$
$\therefore 2x^2-4x+y^2+6y+16\ge 5$
따라서 주어진 식의 최솟값은 5이다. 답 ⑤

0561 $-x^2-y^2+10x-10=-(x-5)^2-y^2+15$
이때 x, y가 실수이므로 $\underbrace{(x-5)^2\ge 0,\ y^2\ge 0}_{-(x-5)^2\le 0,\ -y^2\le 0}$
$\therefore -x^2-y^2+10x-10\le 15$
따라서 주어진 식은 $x=5$, $y=0$에서 최댓값 15를 가지므로
$\alpha=5$, $\beta=0$, $\gamma=15$
$\therefore \alpha+\beta+\gamma=20$ 답 ⑤

0562 $x^2+2y^2+3z^2+4x-4y+6z-4$
$=(x+2)^2+2(y-1)^2+3(z+1)^2-13$
이때 x, y, z가 실수이므로
$(x+2)^2\ge 0$, $(y-1)^2\ge 0$, $(z+1)^2\ge 0$
$\therefore x^2+2y^2+3z^2+4x-4y+6z-4\ge -13$
따라서 주어진 식의 최솟값은 -13이다. 답 ①

유형 10 조건을 만족시키는 이차식의 최대·최소 본책 85쪽

(i) 주어진 등식을 한 문자에 대하여 푼다.
(ii) (i)의 식을 이차식에 대입하여 한 문자에 대한 이차식으로 나타낸다.
(iii) (ii)의 식에서 최댓값 또는 최솟값을 구한다.

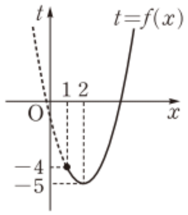
0563 $x-y+4=0$에서 $x=y-4$
$\therefore x^2+y^2-4y=(y-4)^2+y^2-4y$
$=2y^2-12y+16$
$=2(y-3)^2-2$
따라서 $y=3$일 때 최솟값은 -2이다. 답 ②

0564 점 P가 직선 $2x+y+3=0$ 위에 있으므로
$y=-2x-3$
$\therefore 2x^2+y^2=2x^2+(-2x-3)^2$
$=6x^2+12x+9$
$=6(x+1)^2+3$
따라서 $x=-1$일 때 최솟값은 3이다. 답 ⑤

0565 $a-2b=3$에서 $b=\dfrac{1}{2}a-\dfrac{3}{2}$ ··· ❶
$\therefore ab=a\left(\dfrac{1}{2}a-\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{1}{2}a^2-\dfrac{3}{2}a$
$=\dfrac{1}{2}\left(a-\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{9}{8}$ ··· ❷
이때 $-2\le a\le 1$이므로 $a=-2$일 때 최댓값은 5, $a=1$일 때 최솟값은 -1이다. ··· ❸
답 최댓값: 5, 최솟값: -1

채점 기준	비율
❶ b를 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	20%
❷ ab를 a에 대한 이차식으로 나타낼 수 있다.	40%
❸ ab의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있다.	40%

0566 $x-2y^2=1$에서
$2y^2=x-1$ ······ ㉠
y가 실수이므로 $2y^2=x-1\ge 0$
$\therefore x\ge 1$
㉠을 x^2+2y^2-5x에 대입하면
$x^2+2y^2-5x=x^2+x-1-5x$
$=(x-2)^2-5$
$f(x)=(x-2)^2-5$라 하면 $x\ge 1$에서 함수 $t=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $f(x)$는 $x=2$에서 최솟값 -5를 갖는다.
즉 x^2+2y^2-5x의 최솟값은 -5이다.



답 -5

0567 두 점 A(1, 1), B(4, -5)를 잇는 선분 AB를 나타내는 방정식은
$y-1=\dfrac{-5-1}{4-1}(x-1)$ $\therefore y=-2x+3$ $(1\le x\le 4)$
$\therefore 2x^2-y^2=2x^2-(-2x+3)^2$
$=-2x^2+12x-9$
$=-2(x-3)^2+9$
따라서 $x=3$일 때 최댓값은 9이다. 답 9

유형 11 이차함수의 최대·최소의 활용 본책 86쪽

(i) 주어진 상황을 한 문자에 대한 이차식으로 나타내고 문자의 값의 범위를 구한다.
(ii) (i)에서 구한 이차식을 완전제곱식으로 변형한다.
(iii) (i)의 범위에서 최댓값 또는 최솟값을 구한다.

0568 점 B의 좌표를 $(a, 0)$ $(a>0)$이라 하면
$C(a, -a^2+3)$
$\therefore \overline{AB}=2a$, $\overline{BC}=-a^2+3$
따라서 직사각형 ABCD의 둘레의 길이는
$2(-a^2+2a+3)=-2a^2+4a+6$
$=-2(a-1)^2+8$
이때 $0<a<\underbrace{\sqrt{3}}_{y=-x^2+3\text{의 그래프가 } x>0\text{인 부분에서 } x\text{축과 만나는 점의 } x\text{좌표}}$이므로 $a=1$일 때 직사각형 ABCD의 둘레의 길이의 최댓값은 8이다. 답 ②

0569 $h=-5t^2+4t+3=-5\left(t-\dfrac{2}{5}\right)^2+\dfrac{19}{5}$
따라서 $t=\dfrac{2}{5}$일 때 h는 최대이고, 이때의 높이는 $\dfrac{19}{5}$ m이다.
답 $\dfrac{19}{5}$ m

0570 $y=-20x^2+120x=-20(x-3)^2+180$
이때 $2\le x\le 5$이므로 $x=3$일 때 최댓값은 180, $x=5$일 때 최솟값은 100이다.
따라서 판매 수익의 최댓값은 180만 원, 최솟값은 100만 원이므로 구하는 합은 280만 원이다.
답 ③

0571 귤 한 개의 가격이 $(300-x)$원일 때 하루 판매량은 $(100+x)$개이므로 하루 판매액을 y원이라 하면
$$y=(300-x)(100+x)$$
$$=-x^2+200x+30000$$
$$=-(x-100)^2+40000$$
따라서 $x=100$일 때 y는 최대이고, 이때의 귤 한 개의 가격은 $300-100=200$(원)이다.
답 200원

0572 직각을 낀 한 변의 길이를 x m라 하면 다른 한 변의 길이는 $(80-x)$ m이다. 이때 변의 길이는 양수이므로
$$0<x<80$$
가축우리의 넓이는
$$\frac{1}{2}x(80-x)=-\frac{1}{2}(x^2-80x)=-\frac{1}{2}(x-40)^2+800$$
이때 $0<x<80$이므로 $x=40$일 때 최댓값은 800이다.
따라서 가축우리의 넓이의 최댓값은 800 m^2이다.
답 ③

0573 $\overline{BF}=a$, $\overline{EB}=b$라 하면 $\triangle ABC \backsim \triangle DFC$ (AA 닮음)이므로
$$20:b=10:(10-a) \qquad \therefore b=20-2a$$
이때 변의 길이는 양수이므로 $\quad 0<a<10$
사각형 DEBF의 넓이는
$$ab=a(20-2a)=-2(a-5)^2+50 \quad \cdots ❶$$
이때 $0<a<10$이므로 $a=5$일 때 최댓값은 50이다.
$a=5$일 때 $b=10$이므로 구하는 둘레의 길이는
$$2(a+b)=2(5+10)=30 \quad \cdots ❷$$
답 30

채점 기준	비율
❶ 사각형 DEBF의 넓이를 이차식으로 나타낼 수 있다.	50%
❷ 사각형 DEBF의 넓이가 최대일 때, 사각형 DEBF의 둘레의 길이를 구할 수 있다.	50%

0574 전략 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축의 교점의 개수는 이차방정식 $f(x)=0$의 실근의 개수와 같음을 이용한다.
풀이 ㄱ. 이차방정식 $x^2-5x+7=0$의 판별식을 D_1이라 하면
$$D_1=(-5)^2-4\cdot 7=-3<0$$
이므로 $y=f(x)$의 그래프는 x축과 만나지 않는다.
ㄴ. 이차방정식 $x^2-5x+7-n=0$의 판별식을 D_2라 하면
$$D_2=(-5)^2-4(7-n)=4n-3$$
이때 모든 자연수 n에 대하여 $4n-3>0$, 즉 $D_2>0$이므로 이차함수 $y=f(x)-n$의 그래프는 x축과 서로 다른 두 점에서 만난다.
ㄷ. 이차방정식 $x^2-5x+7-k=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여
$$\alpha+\beta=5$$
따라서 $\alpha+\beta$의 값은 k의 값에 관계없이 항상 일정하다.
이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.
답 ⑤

0575 전략 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축에 접하면 이차방정식 $f(x)=0$은 중근을 가짐을 이용한다.
풀이 이차방정식 $x^2+2ax-b^2-2a+6b-10=0$의 판별식을 D라 하면 $\quad \frac{D}{4}=a^2-(-b^2-2a+6b-10)=0$
$$a^2+b^2+2a-6b+10=0, \qquad (a+1)^2+(b-3)^2=0$$
a, b는 실수이므로
$$a+1=0,\ b-3=0$$
따라서 $a=-1$, $b=3$이므로
$$a+b=2$$
답 ⑤

> SSEN 특강
> **실수의 성질**
> 두 실수 a, b에 대하여 $a^2+b^2=0$이면 $\quad a=0,\ b=0$

0576 전략 직선 PQ의 방정식을 구하여 점 Q의 좌표를 찾는다.
풀이 점 P(2, 1)이 $y=ax^2$의 그래프 위에 있으므로
$$1=a\cdot 2^2 \qquad \therefore a=\frac{1}{4}$$
직선 PQ의 방정식은
$$y=-\frac{1}{2}(x-2)+1,\ 즉\ y=-\frac{1}{2}x+2$$
즉 점 Q는 포물선 $y=\frac{1}{4}x^2$과 직선 $y=-\frac{1}{2}x+2$의 교점이므로
$$\frac{1}{4}x^2=-\frac{1}{2}x+2, \qquad x^2+2x-8=0$$
$$(x+4)(x-2)=0 \qquad \therefore x=-4\ (\because \underbrace{x\neq 2}_{x=2인\ 점은\ 점\ P이다.})$$
$$\therefore Q(-4,\ 4)$$
따라서 $p=-4$, $q=4$이므로
$$p+q=0$$
답 0

0577 전략 두 이차함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 일차함수 $y=h(x)$의 그래프와 접하는 점의 x좌표를 이용하여 함수 $f(x)$, $g(x)$의 식을 구한다.
풀이 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 일차함수 $y=h(x)$의 그래프와 $x=\alpha$에서 접하므로 이차방정식 $f(x)-h(x)=0$은 $x=\alpha$인 중근을 갖는다. 이차함수 $y=f(x)$의 x^2의 계수는 1이므로
$$f(x)-h(x)=(x-\alpha)^2,\ 즉\ f(x)=(x-\alpha)^2+h(x)$$
같은 방법으로 $\quad g(x)=4(x-\beta)^2+h(x)$
$\alpha:\beta=1:2$에서 $\beta=2\alpha$이고 두 이차함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 만나는 점의 x좌표를 t라 하면 $f(t)=g(t)$이므로
$$(t-\alpha)^2+h(t)=4(t-2\alpha)^2+h(t)$$
$$3t^2-14\alpha t+15\alpha^2=0, \qquad (3t-5\alpha)(t-3\alpha)=0$$

05 이차방정식과 이차함수

이때 $a<t<2a$이므로 $\quad t=\frac{5}{3}a$

$\therefore \frac{t}{a}=\frac{5}{3}$

답 ④

0578 전략 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=g(x)$의 교점의 x좌표는 방정식 $f(x)=g(x)$의 실근과 같음을 이용한다.

풀이 $f(x)=a(x-1)(x-4)\ (a<0)$라 하자.

$y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{2}x$가 접하므로

방정식 $a(x-1)(x-4)=\frac{1}{2}x$, 즉 $ax^2-\left(5a+\frac{1}{2}\right)x+4a=0$의 판별식을 D라 하면

$$D=\left(5a+\frac{1}{2}\right)^2-16a^2=0,\ 즉\ 5a+\frac{1}{2}=\pm 4a$$

근의 공식에 의하여 방정식 $ax^2-\left(5a+\frac{1}{2}\right)x+4a=0$의 근은

$$x=\frac{5a+\frac{1}{2}}{2a}=\frac{\pm 4a}{2a}=\pm 2$$

이고 중근이 양수이므로 $\quad x=2$

즉 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{2}x$는 점 $(2,\ 1)$에서 접하므로

$f(2)=1$에서 $\quad -2a=1 \quad \therefore a=-\frac{1}{2}$

$\therefore f(x)=-\frac{1}{2}(x-1)(x-4)$

방정식 $f(x)=\frac{1}{4}x$에서 $\quad -\frac{1}{2}(x-1)(x-4)=\frac{1}{4}x$

$(x-1)(x-4)=-\frac{1}{2}x, \quad x^2-\frac{9}{2}x+4=0$

이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=\frac{9}{2}$

답 ⑤

0579 전략 두 점 A, B를 지나는 직선과 평행하고 주어진 이차함수의 그래프에 접하는 직선의 방정식을 구한다.

풀이 두 점 A, B를 지나는 직선과 평행한 직선이 점 C에서 이차함수 $y=-x^2+6x-5$의 그래프에 접할 때 삼각형 ABC의 넓이는 최대가 된다.

두 점 A, B를 지나는 직선의 기울기는 $\frac{3-0}{4-1}=1$이므로 기울기가 1이고 이차함수의 그래프에 접하는 직선의 방정식을 $y=x+k$라 하자. 방정식 $-x^2+6x-5=x+k$, 즉 $x^2-5x+k+5=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-5)^2-4(k+5)=0$

$-4k+5=0 \quad \therefore k=\frac{5}{4}$

즉 직선의 방정식은 $y=x+\frac{5}{4}$이다.

방정식 $x^2-5x+\frac{5}{4}+5=0$에서 $\quad 4x^2-20x+25=0$

$(2x-5)^2=0 \quad \therefore x=\frac{5}{2}$

따라서 $a=\frac{5}{2}$, $b=\underbrace{\frac{5}{2}+\frac{5}{4}}=\frac{15}{4}$이므로

점 C(a, b)는 직선 $y=x+\frac{5}{4}$ 위의 점이다.

$\frac{b}{a}=\frac{15}{4}\cdot\frac{2}{5}=\frac{3}{2}$

답 ③

0580 전략 먼저 함수 $y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식을 구한다.

풀이 조건 (가)에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=1$에 대하여 대칭이므로 $f(x)=a(x-1)^2+b$로 놓을 수 있다.

(i) $a>0$일 때

조건 (나)에서 $f(3)=4$, $f(1)=0$이므로

$4a+b=4,\ b=0$

$\therefore a=1,\ b=0$

$\therefore f(x)=(x-1)^2$

이때 함수 $y=(x-1)^2$의 그래프는 직선 $y=-1$과 만나지 않으므로 조건 (다)를 만족시키지 않는다.

(ii) $a<0$일 때

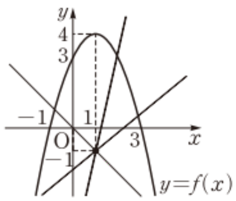
조건 (나)에서 $f(1)=4$, $f(3)=0$이므로

$b=4,\ 4a+b=0$

$\therefore a=-1,\ b=4$

$\therefore f(x)=-(x-1)^2+4$

이때 함수 $y=-(x-1)^2+4$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 점 $(1,\ -1)$을 지나는 직선과 항상 만난다.



(i), (ii)에서 $f(x)=-(x-1)^2+4$이므로

$f(4)=-9+4=-5$

답 ①

0581 전략 주어진 함수의 그래프를 그려 본다.

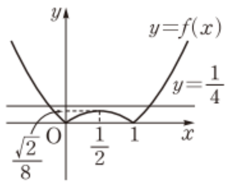
풀이 ㄱ. $2>1$이므로 $\quad f(2)=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot(2^2-2)=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

ㄴ. $0\le x\le 1$에서

$$f(x)=-\frac{1}{\sqrt{2}}(x^2-x)=-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4\sqrt{2}}$$

이므로 $x=\frac{1}{2}$일 때 최댓값은 $\frac{1}{4\sqrt{2}}$, 즉 $\frac{\sqrt{2}}{8}$이다.

ㄷ. 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고 $\frac{\sqrt{2}}{8}<\frac{1}{4}$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{4}$의 교점은 2개이다.



따라서 $f(x)=\frac{1}{4}$을 만족시키는 서로 다른 실수 x의 개수는 2이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ의 2개이다.

답 2

0582 전략 점 P$(a,\ b)$는 함수 $y=x^2-3x+2$의 그래프 위의 점임을 이용하여 $a+b+3$을 a에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 점 A는 주어진 이차함수의 그래프와 y축의 교점이므로

A$(0,\ 2)$

두 점 B, C는 주어진 이차함수의 그래프와 x축의 교점이므로

$x^2-3x+2=0$, $(x-1)(x-2)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=2$

$\therefore$ B$(1,\ 0)$, C$(2,\ 0)$

점 P$(a,\ b)$가 이차함수 $y=x^2-3x+2$의 그래프 위의 점이므로

$b=a^2-3a+2$ …… ㉠

이때 점 P가 점 A$(0,\ 2)$에서 점 C$(2,\ 0)$까지 움직이므로

$0\le a\le 2$

㉠을 $a+b+3$에 대입하면

$$a+b+3=a+(a^2-3a+2)+3=a^2-2a+5$$
$$=(a-1)^2+4\ (0\le a\le 2)$$

따라서 $a+b+3$은 $a=0$ 또는 $a=2$에서 최댓값 5를 갖고, $a=1$에서 최솟값 4를 가지므로 구하는 합은

$5+4=9$

답 9

0583 전략 $\overline{\mathrm{BQ}}=x$로 놓고, $\overline{\mathrm{PR}}$, $\overline{\mathrm{PQ}}$, $\overline{\mathrm{QC}}$의 길이를 x에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 $\overline{\mathrm{BQ}}=x$라 하면 $\overline{\mathrm{PQ}}=x$, $\overline{\mathrm{BP}}=\sqrt{2}x$

$\overline{\mathrm{AB}}=6$이므로 $\overline{\mathrm{AP}}=6-\sqrt{2}x$

또 $\overline{\mathrm{PR}}=\sqrt{2}(6-\sqrt{2}x)=6\sqrt{2}-2x$이고

$\overline{\mathrm{QC}}=\overline{\mathrm{BC}}-\overline{\mathrm{BQ}}=6\sqrt{2}-x$

이므로 사각형 PQCR의 넓이는

$$\frac{1}{2}x(6\sqrt{2}-2x+6\sqrt{2}-x)=6\sqrt{2}x-\frac{3}{2}x^2$$
$$=-\frac{3}{2}(x-2\sqrt{2})^2+12$$

따라서 $x=2\sqrt{2}$일 때, 넓이의 최댓값은 12이다.

답 12

0584 전략 $f(x)=g(x)$와 $f(x)=-g(x)$인 경우로 나누어 방정식을 푼다.

풀이 방정식 $|f(x)|=|g(x)|$에서

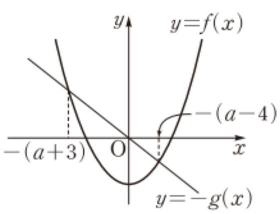
(i) $f(x)=g(x)$일 때

이 방정식의 실근은 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=g(x)$의 교점의 x좌표와 같으므로

$x=a-4$ 또는 $x=a+3$ ···➊

(ii) $f(x)=-g(x)$일 때

이 방정식의 실근은 직선 $y=g(x)$와 x축에 대하여 대칭인 직선과 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 교점의 x좌표와 같으므로 오른쪽 그림에서



$x=-(a+3)$ 또는

$x=-(a-4)$, 즉

$x=-a-3$ 또는 $x=-a+4$ ···➋

따라서 방정식 $|f(x)|=|g(x)|$를 만족시키는 서로 다른 모든 실근의 제곱의 합은

$$(-a-3)^2+(a-4)^2+(-a+4)^2+(a+3)^2$$
$$=2(a+3)^2+2(a-4)^2$$
$$=2(a^2+6a+9)+2(a^2-8a+16)$$
$$=4a^2-4a+50$$

즉 $4a^2-4a+50=60$이므로 $2a^2-2a-5=0$

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 모든 실수 a의 값의 곱은 $-\frac{5}{2}$ ···➌

답 $-\frac{5}{2}$

채점 기준	비율
➊ 방정식 $f(x)=g(x)$의 실근을 구할 수 있다.	20%
➋ 방정식 $f(x)=-g(x)$의 실근을 구할 수 있다.	40%
➌ 모든 실수 a의 값의 곱을 구할 수 있다.	40%

0585 전략 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식을 구한 후, 주어진 x의 값의 범위에서 함숫값을 비교한다.

풀이 (1) 이차함수 $f(x)=ax^2-x+\frac{1}{4}$의 그래프가 x축과 만나므로 방정식 $ax^2-x+\frac{1}{4}=0$의 판별식을 D라 하면

$$D=(-1)^2-4\cdot a\cdot\frac{1}{4}\ge 0$$

$1-a\ge 0$ $\therefore a\le 1$

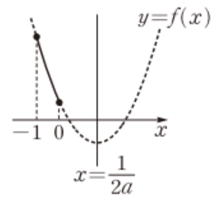
그런데 $a>0$이므로 $0<a\le 1$ ···➊

(2) $f(x)=ax^2-x+\frac{1}{4}=a\left(x-\frac{1}{2a}\right)^2+\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{a}\right)$

이므로 축의 방정식은 $x=\frac{1}{2a}$ ···➋

(3) $0<a\le 1$이므로 $0<2a\le 2$ $\therefore \frac{1}{2a}\ge\frac{1}{2}$

따라서 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로



최댓값은 $f(-1)=a+\frac{5}{4}$

최솟값은 $f(0)=\frac{1}{4}$ ···➌

답 풀이 참조

채점 기준	비율
➊ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	30%
➋ 축의 방정식을 구할 수 있다.	20%
➌ $f(x)$의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있다.	50%

0586 전략 함수 $y=f(x)$의 그래프를 그려서 $f(x)$의 값의 범위를 구한 후, $f(x)=t$로 놓고 y의 최솟값을 구한다.

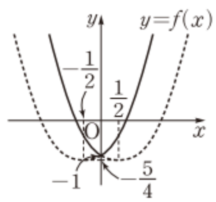
풀이 (i) $x<0$일 때

$$f(x)=x^2-x-1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}$$

(ii) $x\ge 0$일 때

$$f(x)=x^2+x-1$$
$$=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}$$

(i), (ii)에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



$\therefore f(x)\ge -1$ ···➊

$y=\{f(x)\}^2+4f(x)+5$에서 $f(x)=t$로 놓으면

$y=t^2+4t+5=(t+2)^2+1\ (t\ge -1)$

따라서 $t=-1$, 즉 $f(x)=-1$일 때 y의 최솟값은 2이다. ···➋

답 2

채점 기준	비율
➊ $f(x)$의 값의 범위를 구할 수 있다.	50%
➋ y의 최솟값을 구할 수 있다.	50%

0587 전략 근과 계수의 관계를 이용하여 $\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta$를 a에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 방정식 $x^2-2ax-3-2a+2a^2=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2a,\ \alpha\beta=-3-2a+2a^2$ ···➊

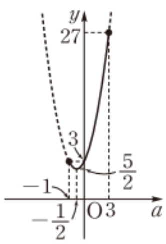
$\therefore\ \alpha^2+\beta^2+\alpha\beta=(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta$

$=(2a)^2-(-3-2a+2a^2)$

$=2a^2+2a+3$

$=2\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{2}$ ···➋

$-1\le a\le 3$에서 $y=2\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{2}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $a=-\frac{1}{2}$일 때 최솟값은 $\frac{5}{2}$, $a=3$일 때 최댓값은 27이다.



따라서 구하는 값은

$27-\frac{5}{2}=\frac{49}{2}$ ···➌

답 $\frac{49}{2}$

채점 기준	비율
➊ 근과 계수의 관계를 이용하여 $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$를 구할 수 있다.	30%
➋ $\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta$를 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30%
➌ $\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta$의 최댓값과 최솟값의 차를 구할 수 있다.	40%

0588 전략 주어진 식을 x에 대한 식으로 나타내어 최댓값을 구한다.

풀이 $(\sqrt{17+3x}+\sqrt{11+4y})^2$

$=28+3x+4y+2\sqrt{(17+3x)(11+4y)}$

이때 $3x+4y=8$에서 $4y=8-3x$이므로

(주어진 식)$=28+8+2\sqrt{(17+3x)(19-3x)}$

$=36+2\sqrt{-9x^2+6x+323}$

$=36+2\sqrt{-9\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+324}$ ···➊

따라서 $x=\frac{1}{3}$일 때 최댓값은

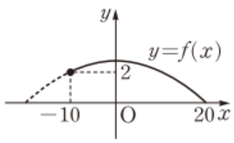
$36+2\sqrt{324}=36+2\cdot 18=72$ ···➋

답 72

채점 기준	비율
➊ 주어진 식을 x에 대한 식으로 변형할 수 있다.	80%
➋ 최댓값을 구할 수 있다.	20%

0589 전략 물 로켓이 날아가는 모양을 좌표평면 위에 놓고 이차함수의 식을 구한다.

풀이 주어진 그림을 오른쪽 그림과 같이 좌표평면 위에 놓고, 이차함수의 식을 $y=f(x)$라 하면 축의 방정식은 $x=0$, x절편은 -20, 20이므로



$f(x)=a(x+20)(x-20)\ (a<0)$ ···➊

함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(-10, 2)$를 지나므로 ─ 물 로켓을 발사한 위치

$f(-10)=a(-10+20)(-10-20)$

$=-300a=2$

$\therefore\ a=-\frac{1}{150}$ ···➋

$f(x)=-\frac{1}{150}(x+20)(x-20)=-\frac{1}{150}x^2+\frac{8}{3}$이므로 $x=0$일 때, 최댓값은 $\frac{8}{3}$이다.

따라서 물 로켓의 최고 높이는 $\frac{8}{3}$ m이다. ···➌

답 $\frac{8}{3}$ m

채점 기준	비율
➊ 이차함수의 식을 세울 수 있다.	30%
➋ a의 값을 구할 수 있다.	30%
➌ 지면으로부터의 최고 높이를 구할 수 있다.	40%

Ⅱ. 방정식

06 여러 가지 방정식

0590 $x^3-8=0$의 좌변을 인수분해하면

$(x-2)(x^2+2x+4)=0$

$\therefore x=2$ 또는 $x=-1\pm\sqrt{3}i$ 답 $x=2$ 또는 $x=-1\pm\sqrt{3}i$

0591 $x^3-x^2-6x=0$의 좌변을 인수분해하면

$x(x^2-x-6)=0,\quad x(x+2)(x-3)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=-2$ 또는 $x=3$

답 $x=0$ 또는 $x=-2$ 또는 $x=3$

0592 $x^3+4x^2-x-4=0$의 좌변을 인수분해하면

$x^2(x+4)-(x+4)=0,\quad (x+4)(x^2-1)=0$

$(x+4)(x+1)(x-1)=0$

$\therefore x=-4$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=1$

답 $x=-4$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=1$

0593 $P(x)=x^3-2x^2+1$로 놓으면

$P(1)=1-2+1=0$

조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ & & 1 & -1 & -1 \\ \hline & 1 & -1 & -1 & \boxed{0} \end{array}$$

$P(x)=(x-1)(x^2-x-1)$

따라서 주어진 방정식은

$(x-1)(x^2-x-1)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ 답 $x=1$ 또는 $x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

0594 $P(x)=2x^3-x^2-3x+2$로 놓으면

$P(1)=2-1-3+2=0$

조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 2 & -1 & -3 & 2 \\ & & 2 & 1 & -2 \\ \hline & 2 & 1 & -2 & \boxed{0} \end{array}$$

$P(x)=(x-1)(2x^2+x-2)$

따라서 주어진 방정식은

$(x-1)(2x^2+x-2)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{17}}{4}$ 답 $x=1$ 또는 $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{17}}{4}$

0595 $P(x)=x^3+4x^2+6x+4$로 놓으면

$P(-2)=-8+16-12+4=0$

조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{c|cccc} -2 & 1 & 4 & 6 & 4 \\ & & -2 & -4 & -4 \\ \hline & 1 & 2 & 2 & \boxed{0} \end{array}$$

$P(x)=(x+2)(x^2+2x+2)$

따라서 주어진 방정식은

$(x+2)(x^2+2x+2)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=-1\pm i$ 답 $x=-2$ 또는 $x=-1\pm i$

0596 $x^4-27x=0$의 좌변을 인수분해하면

$x(x^3-27)=0,\quad x(x-3)(x^2+3x+9)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=3$ 또는 $x=\dfrac{-3\pm3\sqrt{3}i}{2}$

답 $x=0$ 또는 $x=3$ 또는 $x=\dfrac{-3\pm3\sqrt{3}i}{2}$

0597 $P(x)=x^4-3x^3-x^2+5x+2$로 놓으면

$P(-1)=1+3-1-5+2=0,$

$P(2)=16-24-4+10+2=0$

조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{c|ccccc} -1 & 1 & -3 & -1 & 5 & 2 \\ & & -1 & 4 & -3 & -2 \\ \hline 2 & 1 & -4 & 3 & 2 & \boxed{0} \\ & & 2 & -4 & -2 & \\ \hline & 1 & -2 & -1 & \boxed{0} & \end{array}$$

$\therefore P(x)=(x+1)(x-2)(x^2-2x-1)$

따라서 주어진 방정식은

$(x+1)(x-2)(x^2-2x-1)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=1\pm\sqrt{2}$

답 $x=-1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=1\pm\sqrt{2}$

0598 $x^2-x=X$로 놓으면 주어진 방정식은

$X^2-3X+2=0,\quad (X-1)(X-2)=0$

$\therefore X=1$ 또는 $X=2$

(i) $X=1$일 때, $x^2-x-1=0$에서

$x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

(ii) $X=2$일 때, $x^2-x-2=0$에서

$(x+1)(x-2)=0\quad \therefore x=-1$ 또는 $x=2$

(i), (ii)에서 $x=-1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

답 $x=-1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

0599 $x^2+2x=X$로 놓으면 주어진 방정식은

$X^2-X-6=0,\quad (X+2)(X-3)=0$

$\therefore X=-2$ 또는 $X=3$

(i) $X=-2$일 때, $x^2+2x+2=0$에서

$x=-1\pm i$

(ii) $X=3$일 때, $x^2+2x-3=0$에서

$(x+3)(x-1)=0\quad \therefore x=-3$ 또는 $x=1$

(i), (ii)에서 $x=-3$ 또는 $x=1$ 또는 $x=-1\pm i$

답 $x=-3$ 또는 $x=1$ 또는 $x=-1\pm i$

0600 $x^2=X$로 놓으면 주어진 방정식은

$X^2-2X+1=0,\quad (X-1)^2=0\quad \therefore X=1$(중근)

따라서 $x^2=1$이므로 $x=1$(중근) 또는 $x=-1$(중근)

답 $x=1$(중근) 또는 $x=-1$(중근)

0601 $x^4+3x^2+4=0$에서 $(x^4+4x^2+4)-x^2=0$

$(x^2+2)^2-x^2=0$, $(x^2+x+2)(x^2-x+2)=0$

$\therefore x^2+x+2=0$ 또는 $x^2-x+2=0$

$\therefore x=\frac{-1\pm\sqrt{7}i}{2}$ 또는 $x=\frac{1\pm\sqrt{7}i}{2}$

답 $x=\frac{-1\pm\sqrt{7}i}{2}$ 또는 $x=\frac{1\pm\sqrt{7}i}{2}$

0602 방정식 $x^4-7x^3+12x^2-7x+1=0$의 양변을 x^2으로 나누면

$x^2-7x+12-\frac{7}{x}+\frac{1}{x^2}=0$

$x^2+\frac{1}{x^2}-7\left(x+\frac{1}{x}\right)+12=0$

$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-7\left(x+\frac{1}{x}\right)+10=0$

이때 $x+\frac{1}{x}=X$로 놓으면

$X^2-7X+10=0$, $(X-2)(X-5)=0$

$\therefore X=2$ 또는 $X=5$

(i) $X=2$일 때, $x+\frac{1}{x}=2$에서

$x^2-2x+1=0$, $(x-1)^2=0$ $\therefore x=1$(중근)

(ii) $X=5$일 때, $x+\frac{1}{x}=5$에서

$x^2-5x+1=0$ $\therefore x=\frac{5\pm\sqrt{21}}{2}$

(i), (ii)에서 $x=1$(중근) 또는 $x=\frac{5\pm\sqrt{21}}{2}$

답 $x=1$(중근) 또는 $x=\frac{5\pm\sqrt{21}}{2}$

0603 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

(1) $\alpha+\beta+\gamma=-4$ (2) $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=3$

(3) $\alpha\beta\gamma=5$

답 (1) -4 (2) 3 (3) 5

0604 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=1$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=2$, $\alpha\beta\gamma=1$

(1) $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$

$=1^2-2\cdot2=-3$

(2) $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}=\frac{2}{1}=2$

(3) $(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)=\alpha\beta\gamma+\alpha+\beta+\gamma+\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha+1$

$=1+1+2+1=5$

답 (1) -3 (2) 2 (3) 5

0605 x^3의 계수가 1이고 근이 1, $3+\sqrt{2}$, $3-\sqrt{2}$인 삼차방정식은

$x^3-\{1+(3+\sqrt{2})+(3-\sqrt{2})\}x^2$

$+\{1\cdot(3+\sqrt{2})+(3+\sqrt{2})(3-\sqrt{2})+(3-\sqrt{2})\cdot1\}x$

$-1\cdot(3+\sqrt{2})(3-\sqrt{2})=0$

$\therefore x^3-7x^2+13x-7=0$

답 $x^3-7x^2+13x-7=0$

0606 x^3의 계수가 1이고 근이 -3, $1+2i$, $1-2i$인 삼차방정식은

$x^3-\{-3+(1+2i)+(1-2i)\}x^2$

$+\{(-3)\cdot(1+2i)+(1+2i)(1-2i)+(1-2i)\cdot(-3)\}x$

$-(-3)\cdot(1+2i)(1-2i)=0$

$\therefore x^3+x^2-x+15=0$

답 $x^3+x^2-x+15=0$

0607 주어진 삼차방정식의 계수가 유리수이므로 $1+\sqrt{2}$가 근이면 $1-\sqrt{2}$도 근이다.

따라서 주어진 방정식의 세 근이 -2, $1+\sqrt{2}$, $1-\sqrt{2}$이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-a=-2(1+\sqrt{2})+(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})+(1-\sqrt{2})\cdot(-2)$,

$-b=-2(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})$

$\therefore a=5$, $b=-2$

답 $a=5$, $b=-2$

0608 주어진 삼차방정식의 계수가 실수이므로 $1+i$가 근이면 $1-i$도 근이다.

따라서 주어진 방정식의 세 근이 3, $1+i$, $1-i$이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$a=3(1+i)+(1+i)(1-i)+(1-i)\cdot3$,

$-b=3(1+i)(1-i)$

$\therefore a=8$, $b=-6$

답 $a=8$, $b=-6$

0609 $x^3=1$에서 $x^3-1=0$

$\therefore (x-1)(x^2+x+1)=0$

(1) ω는 $x^2+x+1=0$의 한 허근이므로 $\omega^2+\omega+1=0$

(2), (3) 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 두 허근이 ω, $\overline{\omega}$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\omega+\overline{\omega}=-1$, $\omega\overline{\omega}=1$

(4) $\omega^8+\omega^4+1=(\omega^3)^2\cdot\omega^2+\omega^3\cdot\omega+1=\omega^2+\omega+1=0$

(5) $\omega^{20}+\omega^{10}=(\omega^3)^6\cdot\omega^2+(\omega^3)^3\cdot\omega=\omega^2+\omega=-1$

(6) $\omega+\frac{1}{\omega}=\frac{\omega^2+1}{\omega}=\frac{-\omega}{\omega}=-1$

답 (1) 0 (2) -1 (3) 1 (4) 0 (5) -1 (6) -1

0610 $x^3=-1$에서 $x^3+1=0$

$\therefore (x+1)(x^2-x+1)=0$

(1) ω는 $x^2-x+1=0$의 한 허근이므로 $\omega^2-\omega+1=0$

(2), (3) 이차방정식 $x^2-x+1=0$의 두 허근이 ω, $\overline{\omega}$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\omega+\overline{\omega}=1$, $\omega\overline{\omega}=1$

(4) $\omega^8+\omega^4+1=(\omega^3)^2\cdot\omega^2+\omega^3\cdot\omega+1=\omega^2-\omega+1=0$

(5) $\omega^{20}+\omega^{10}=(\omega^3)^6\cdot\omega^2+(\omega^3)^3\cdot\omega=\omega^2-\omega=-1$

(6) $\omega+\frac{1}{\omega}=\frac{\omega^2+1}{\omega}=\frac{\omega}{\omega}=1$

답 (1) 0 (2) 1 (3) 1 (4) 0 (5) -1 (6) 1

0611 $x-y=2$에서 $\quad y=x-2 \quad \cdots\cdots$ ㉠

㉠을 $x^2+y^2=10$에 대입하면

$x^2+(x-2)^2=10, \quad 2x^2-4x-6=0$

$x^2-2x-3=0, \quad (x+1)(x-3)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=3$

$x=-1$을 ㉠에 대입하면 $\quad y=-3$

$x=3$을 ㉠에 대입하면 $\quad y=1$

따라서 구하는 해는

$\begin{cases} x=-1 \\ y=-3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$

답 $\begin{cases} x=-1 \\ y=-3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$

0612 $x+y=4$에서 $\quad y=-x+4 \quad \cdots\cdots$ ㉠

㉠을 $x^2+xy+y^2=13$에 대입하면

$x^2+x(-x+4)+(-x+4)^2=13$

$x^2-4x+3=0, \quad (x-1)(x-3)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=3$

$x=1$을 ㉠에 대입하면 $\quad y=3$

$x=3$을 ㉠에 대입하면 $\quad y=1$

따라서 구하는 해는

$\begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$

답 $\begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$

0613 $x^2-xy-2y^2=0$에서 $\quad (x+y)(x-2y)=0$

$\therefore x=-y$ 또는 $x=2y$

(i) $x=-y$를 $2x^2+y^2=9$에 대입하면

$2(-y)^2+y^2=9, \quad 3y^2=9$

$y^2=3 \quad \therefore y=\pm\sqrt{3}$

$\therefore x=\mp\sqrt{3},\ y=\pm\sqrt{3}$ (복호동순)

(ii) $x=2y$를 $2x^2+y^2=9$에 대입하면

$2(2y)^2+y^2=9, \quad 9y^2=9$

$y^2=1 \quad \therefore y=\pm 1$

$\therefore x=\pm 2,\ y=\pm 1$ (복호동순)

(i), (ii)에서 구하는 해는

$\begin{cases} x=-\sqrt{3} \\ y=\sqrt{3} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=\sqrt{3} \\ y=-\sqrt{3} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-2 \\ y=-1 \end{cases}$

답 $\begin{cases} x=-\sqrt{3} \\ y=\sqrt{3} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=\sqrt{3} \\ y=-\sqrt{3} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-2 \\ y=-1 \end{cases}$

0614 $x^2-y^2=0$에서 $\quad (x+y)(x-y)=0$

$\therefore x=-y$ 또는 $x=y$

(i) $x=-y$를 $x^2+xy+3y^2=15$에 대입하면

$(-y)^2+(-y)\cdot y+3y^2=15, \quad 3y^2=15$

$y^2=5 \quad \therefore y=\pm\sqrt{5}$

$\therefore x=\mp\sqrt{5},\ y=\pm\sqrt{5}$ (복호동순)

(ii) $x=y$를 $x^2+xy+3y^2=15$에 대입하면

$y^2+y\cdot y+3y^2=15, \quad 5y^2=15$

$y^2=3 \quad \therefore y=\pm\sqrt{3}$

$\therefore x=\pm\sqrt{3},\ y=\pm\sqrt{3}$ (복호동순)

(i), (ii)에서 구하는 해는

$\begin{cases} x=-\sqrt{5} \\ y=\sqrt{5} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=\sqrt{5} \\ y=-\sqrt{5} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=\sqrt{3} \\ y=\sqrt{3} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-\sqrt{3} \\ y=-\sqrt{3} \end{cases}$

답 $\begin{cases} x=-\sqrt{5} \\ y=\sqrt{5} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=\sqrt{5} \\ y=-\sqrt{5} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=\sqrt{3} \\ y=\sqrt{3} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-\sqrt{3} \\ y=-\sqrt{3} \end{cases}$

0615 x, y는 t에 대한 이차방정식 $t^2-2t-8=0$의 두 근이므로

$(t+2)(t-4)=0 \quad \therefore t=-2$ 또는 $t=4$

따라서 구하는 해는

$\begin{cases} x=-2 \\ y=4 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=4 \\ y=-2 \end{cases}$

답 $\begin{cases} x=-2 \\ y=4 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=4 \\ y=-2 \end{cases}$

0616 $x-xy+y=5$에서 $x+y=-1$이므로

$xy=-6$

즉 x, y는 t에 대한 이차방정식 $t^2+t-6=0$의 두 근이므로

$(t+3)(t-2)=0 \quad \therefore t=-3$ 또는 $t=2$

따라서 구하는 해는

$\begin{cases} x=-3 \\ y=2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2 \\ y=-3 \end{cases}$

답 $\begin{cases} x=-3 \\ y=2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2 \\ y=-3 \end{cases}$

유형 01 삼차방정식과 사차방정식의 풀이

본책 94쪽

$P(x)=0$ 꼴의 삼차방정식과 사차방정식은 다음과 같은 방법으로 푼다.

① $P(x)$를 공통인수로 묶어 인수분해한다.

② $P(x)$를 인수정리와 조립제법을 이용하여 인수분해한다.

➡ $ABC=0$이면 $A=0$ 또는 $B=0$ 또는 $C=0$임을 이용한다.

0617 $x^3-2x^2-x+2=0$에서

$x^2(x-2)-(x-2)=0, \quad (x-2)(x^2-1)=0$

$(x+1)(x-1)(x-2)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$

따라서 가장 큰 근은 2, 가장 작은 근은 -1이므로

$\alpha=2,\ \beta=-1$

$\therefore \alpha-\beta=3$

답 ③

0618 $P(x)=x^3-3x^2+5x-3$으로 놓으면

$P(1)=1-3+5-3=0$

조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

1	1	-3	5	-3
		1	-2	3
	1	-2	3	0

$P(x)=(x-1)(x^2-2x+3) \cdots$ ❶

이므로 주어진 방정식은

$(x-1)(x^2-2x+3)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=1\pm\sqrt{2}i$

따라서 $\alpha=1,\ \beta=1,\ \gamma=2$이므로 $\cdots$ ❷

$\alpha-\beta+\gamma=2$ $\cdots$ ❸

답 2

06 여러 가지 방정식

채점 기준	비율
❶ 인수정리와 조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해할 수 있다.	50%
❷ α, β, γ의 값을 구할 수 있다.	30%
❸ $\alpha-\beta+\gamma$의 값을 구할 수 있다.	20%

SSEN 특강

인수정리

다항식 $P(x)$에 대하여 $P(a)=0$이면 $P(x)$는 일차식 $x-a$로 나누어떨어진다.

0619 $P(x)=x^4+3x^3+3x^2-x-6$으로 놓으면

$P(1)=1+3+3-1-6=0$,

$P(-2)=16-24+12+2-6=0$

조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

1	1	3	3	-1	-6
		1	4	7	6
-2	1	4	7	6	0
		-2	-4	-6	
	1	2	3	0	

$\therefore P(x)=(x-1)(x+2)(x^2+2x+3)$

따라서 방정식 $P(x)=0$의 근은

$x=1$ 또는 $x=-2$ 또는 $x=-1\pm\sqrt{2}i$

이므로 모든 실근의 합은 -1이다. 답 ②

0620 $P(x)=x^4-2x^2-3x-2$로 놓으면

$P(2)=16-8-6-2=0$,

$P(-1)=1-2+3-2=0$

조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

2	1	0	-2	-3	-2
		2	4	4	2
-1	1	2	2	1	0
		-1	-1	-1	
	1	1	1	0	

$\therefore P(x)=(x-2)(x+1)(x^2+x+1)$

이때 방정식 $P(x)=0$의 두 허근 α, β는 방정식 $x^2+x+1=0$의 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-1$, $\alpha\beta=1$

$\therefore \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(-1)^2-2\cdot1=-1$ 답 -1

유형 02 공통부분이 있는 사차방정식의 풀이

본책 94쪽

방정식에 공통부분이 있으면 공통부분을 하나의 문자로 바꾸어 그 문자에 대한 방정식으로 변형한 후 인수분해한다.

0621 $x^2-3x=X$로 놓으면 주어진 방정식은

$X^2-2X-8=0$, $\quad(X+2)(X-4)=0$

$\therefore X=-2$ 또는 $X=4$

(i) $X=-2$일 때, $x^2-3x+2=0$에서

$(x-1)(x-2)=0 \quad \therefore x=1$ 또는 $x=2$

(ii) $X=4$일 때, $x^2-3x-4=0$에서

$(x+1)(x-4)=0 \quad \therefore x=-1$ 또는 $x=4$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 양의 근은 1, 2, 4이므로 구하는 합은 7이다. 답 ③

0622 $x^2+x=X$로 놓으면 주어진 방정식은

$(X+1)^2-4X-9=0$

$X^2-2X-8=0$, $\quad(X+2)(X-4)=0$

$\therefore X=-2$ 또는 $X=4$

(i) $X=-2$일 때

$x^2+x+2=0$이므로 이 방정식의 판별식을 D_1이라 하면

$D_1=1^2-4\cdot1\cdot2=-7<0$

즉 이 방정식은 서로 다른 두 허근을 갖는다.

(ii) $X=4$일 때

$x^2+x-4=0$이므로 이 방정식의 판별식을 D_2라 하면

$D_2=1^2-4\cdot1\cdot(-4)=17>0$

즉 이 방정식은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 두 실근은 방정식 $x^2+x-4=0$의 근이고 두 허근은 방정식 $x^2+x+2=0$의 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$a=-4$, $b=-1$

$\therefore b-a=3$ 답 ④

SSEN 특강

이차방정식의 근의 판별

계수가 실수인 이차방정식의 판별식을 D라 하면

① $D>0$ ➡ 서로 다른 두 실근을 갖는다.

② $D=0$ ➡ 중근을 갖는다.

③ $D<0$ ➡ 서로 다른 두 허근을 갖는다.

0623 $(x-1)(x-3)(x+5)(x+7)+55=0$에서

$\{(x-1)(x+5)\}\{(x-3)(x+7)\}+55=0$

$(x^2+4x-5)(x^2+4x-21)+55=0$

이때 $x^2+4x=X$로 놓으면

$(X-5)(X-21)+55=0$

$X^2-26X+160=0$, $\quad(X-10)(X-16)=0$

$\therefore X=10$ 또는 $X=16$

(i) $X=10$일 때

$x^2+4x-10=0$에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 이 방정식의 모든 근의 곱은 $\quad -10$

(ii) $X=16$일 때

$x^2+4x-16=0$에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 이 방정식의 모든 근의 곱은 $\quad -16$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 모든 근의 곱은

$(-10)\cdot(-16)=160$ 답 ⑤

유형 03 $x^4+ax^2+b=0$ 꼴의 방정식의 풀이

본책 95쪽

① $x^2=X$로 바꾸어 좌변을 인수분해한다.
② $(x^2+A)^2-(Bx)^2=0$ 꼴로 변형한 후 좌변을 인수분해한다.

0624 $x^2=X$로 놓으면 주어진 방정식은
$X^2-5X+4=0,\quad (X-1)(X-4)=0$
$\therefore X=1$ 또는 $X=4$
즉 $x^2=1$ 또는 $x^2=4$이므로
$x=\pm1$ 또는 $x=\pm2$
$\therefore |\alpha|+|\beta|+|\gamma|+|\delta|=|1|+|-1|+|2|+|-2|=6$

답 ②

0625 $x^2=X$로 놓으면 주어진 방정식은
$X^2+2X-15=0,\quad (X+5)(X-3)=0$
$\therefore X=-5$ 또는 $X=3$
즉 $x^2=-5$ 또는 $x^2=3$이므로
$x=\pm\sqrt{5}i$ 또는 $x=\pm\sqrt{3}$
따라서 주어진 방정식의 실근은 $\pm\sqrt{3}$이므로 두 실근의 곱은
$\sqrt{3}\cdot(-\sqrt{3})=-3$

답 ③

0626 $x^4-12x^2+16=0$에서
$(x^4-8x^2+16)-4x^2=0,\quad (x^2-4)^2-(2x)^2=0$
$(x^2+2x-4)(x^2-2x-4)=0$
$\therefore x^2+2x-4=0$ 또는 $x^2-2x-4=0$
$\therefore x=-1\pm\sqrt{5}$ 또는 $x=1\pm\sqrt{5}$
따라서 주어진 방정식의 양의 근은 $-1+\sqrt{5},\ 1+\sqrt{5}$이므로
$\alpha+\beta=(-1+\sqrt{5})+(1+\sqrt{5})=2\sqrt{5}$

답 $2\sqrt{5}$

0627 $x^4+3x^2+36=0$에서
$(x^4+12x^2+36)-9x^2=0,\quad (x^2+6)^2-(3x)^2=0$
$(x^2+3x+6)(x^2-3x+6)=0$
방정식 $x^2+3x+6=0$의 두 근을 $\alpha,\ \beta$, 방정식 $x^2-3x+6=0$의 두 근을 $\gamma,\ \delta$라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=-3,\ \alpha\beta=6,\ \gamma+\delta=3,\ \gamma\delta=6$

$$\therefore \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\delta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}+\frac{\gamma+\delta}{\gamma\delta}=\frac{-3}{6}+\frac{3}{6}=0$$

답 0

유형 04 $ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0$ 꼴의 방정식의 풀이

본책 95쪽

사차방정식 $ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0$은 다음과 같은 순서로 푼다.
(i) 양변을 x^2으로 나눈다.
(ii) $x+\frac{1}{x}=X$로 놓고 X에 대한 이차방정식을 푼다.
(iii) 주어진 사차방정식의 근을 구한다.

0628 방정식 $x^4+5x^3-4x^2+5x+1=0$의 양변을 x^2으로 나누면

$$x^2+5x-4+\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}=0,\quad x^2+\frac{1}{x^2}+5\left(x+\frac{1}{x}\right)-4=0$$

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+5\left(x+\frac{1}{x}\right)-6=0$$

이때 $x+\frac{1}{x}=X$로 놓으면
$X^2+5X-6=0,\quad (X+6)(X-1)=0$
$\therefore X=-6$ 또는 $X=1$
(i) $X=-6$일 때, $x+\frac{1}{x}=-6$에서
$x^2+6x+1=0\quad \therefore x=-3\pm2\sqrt{2}$
(ii) $X=1$일 때, $x+\frac{1}{x}=1$에서
$x^2-x+1=0\quad \therefore x=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$
(i), (ii)에서 주어진 방정식의 실근은 $-3\pm2\sqrt{2}$이다.

답 ②

0629 방정식 $x^4+4x^3-3x^2+4x+1=0$의 양변을 x^2으로 나누면

$$x^2+4x-3+\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}=0,\quad x^2+\frac{1}{x^2}+4\left(x+\frac{1}{x}\right)-3=0$$

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+4\left(x+\frac{1}{x}\right)-5=0$$

이때 $x+\frac{1}{x}=X$로 놓으면
$X^2+4X-5=0,\quad (X+5)(X-1)=0$
$\therefore X=-5$ 또는 $X=1$ ··· ❶
(i) $X=-5$일 때, $x+\frac{1}{x}=-5$에서
$x^2+5x+1=0$
이 방정식의 판별식을 D_1이라 하면
$D_1=5^2-4\cdot1\cdot1=21>0$
즉 방정식 $x^2+5x+1=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다. ··· ❷
(ii) $X=1$일 때, $x+\frac{1}{x}=1$에서
$x^2-x+1=0$
이 방정식의 판별식을 D_2라 하면
$D_2=(-1)^2-4\cdot1\cdot1=-3<0$
즉 방정식 $x^2-x+1=0$은 서로 다른 두 허근을 갖는다. ··· ❸
(i), (ii)에서 α는 방정식 $x^2+5x+1=0$의 한 실근이므로
$\alpha^2+5\alpha+1=0$
양변을 $\alpha(\alpha\neq0)$로 나누면
$\alpha+5+\frac{1}{\alpha}=0\quad \therefore \alpha+\frac{1}{\alpha}=-5$ ··· ❹

답 -5

채점 기준	비율
❶ $x+\frac{1}{x}=X$로 놓고 X에 대한 이차방정식의 해를 구할 수 있다.	30%
❷ $X=-5$일 때 근을 판별할 수 있다.	30%
❸ $X=1$일 때 근을 판별할 수 있다.	30%
❹ $\alpha+\frac{1}{\alpha}$의 값을 구할 수 있다.	10%

유형 05 근이 주어진 삼·사차방정식 본책 95쪽

① 삼차방정식 $P(x)=0$의 한 근이 $\alpha \Rightarrow P(\alpha)=0$
② 사차방정식 $P(x)=0$의 두 근이 $\alpha, \beta \Rightarrow P(\alpha)=0, P(\beta)=0$

0630 $x^3-kx^2+(k+2)x-9=0$의 한 근이 3이므로
$27-9k+3(k+2)-9=0, \quad 24-6k=0 \quad \therefore k=4$
따라서 주어진 방정식은 $x^3-4x^2+6x-9=0$
$P(x)=x^3-4x^2+6x-9$로 놓으면 $P(3)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 3 & 1 & -4 & 6 & -9 \\ & & 3 & -3 & 9 \\ \hline & 1 & -1 & 3 & \boxed{0} \end{array}$$

$P(x)=(x-3)(x^2-x+3)$
따라서 주어진 방정식은 $(x-3)(x^2-x+3)=0$
이때 α, β는 이차방정식 $x^2-x+3=0$의 두 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=1$
$\therefore k+\alpha+\beta=5$

답 ③

0631 주어진 방정식의 두 근이 -1, 4이므로
$-1-a-b-1+3b=0$에서
$-a+2b=2$ …… ㉠
$64-16a+4b+4+3b=0$에서
$-16a+7b=-68$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=6$, $b=4$
따라서 주어진 방정식은 $x^3-6x^2+5x+12=0$
$P(x)=x^3-6x^2+5x+12$로 놓으면 $P(-1)=0$, $P(4)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & -6 & 5 & 12 \\ & & -1 & 7 & -12 \\ \hline 4 & 1 & -7 & 12 & \boxed{0} \\ & & 4 & -12 & \\ \hline & 1 & -3 & \boxed{0} & \end{array}$$

$P(x)=(x+1)(x-4)(x-3)$
즉 주어진 방정식은
$(x+1)(x-4)(x-3)=0$
이므로 나머지 한 근은 3이다.

답 3

0632 주어진 방정식의 두 근이 1, -2이므로
$2+a+b-1+a=0$에서
$2a+b=-1$ …… ㉠
$32-8a+4b+2+a=0$에서
$-7a+4b=-34$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=-5$ ··· ❶
따라서 주어진 방정식은 $2x^4+2x^3-5x^2-x+2=0$
$P(x)=2x^4+2x^3-5x^2-x+2$로 놓으면 $P(1)=0$, $P(-2)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 2 & 2 & -5 & -1 & 2 \\ & & 2 & 4 & -1 & -2 \\ \hline -2 & 2 & 4 & -1 & -2 & \boxed{0} \\ & & -4 & 0 & 2 & \\ \hline & 2 & 0 & -1 & \boxed{0} & \end{array}$$

$\therefore P(x)=(x-1)(x+2)(2x^2-1)$
즉 주어진 방정식은 $(x-1)(x+2)(2x^2-1)=0$ ··· ❷
따라서 주어진 방정식의 나머지 두 근은 방정식 $2x^2-1=0$의 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 구하는 곱은 $-\frac{1}{2}$이다. ··· ❸

답 $-\frac{1}{2}$

채점 기준	비율
❶ a, b의 값을 구할 수 있다.	40%
❷ 주어진 방정식의 좌변을 인수분해할 수 있다.	40%
❸ 나머지 두 근의 곱을 구할 수 있다.	20%

0633 주어진 삼차방정식의 한 근이 α이므로
$a\alpha^3-b\alpha^2+c\alpha-d=0$ …… ㉠
ㄱ. ㉠의 양변에 -1을 곱하면
$-a\alpha^3+b\alpha^2-c\alpha+d=0$
$\therefore a(-\alpha)^3+b(-\alpha)^2+c(-\alpha)+d=0$
따라서 $-\alpha$는 $ax^3+bx^2+cx+d=0$의 근이다.
ㄴ. ㉠의 양변을 α^3으로 나누면
$a-\frac{b}{\alpha}+\frac{c}{\alpha^2}-\frac{d}{\alpha^3}=0$
$\therefore d\left(-\frac{1}{\alpha}\right)^3+c\left(-\frac{1}{\alpha}\right)^2+b\left(-\frac{1}{\alpha}\right)+a=0$
따라서 $-\frac{1}{\alpha}$은 $dx^3+cx^2+bx+a=0$의 근이다.
ㄷ. ㉠의 양변을 $-\alpha^3$으로 나누면
$-a+\frac{b}{\alpha}-\frac{c}{\alpha^2}+\frac{d}{\alpha^3}=0$
$\therefore d\left(\frac{1}{\alpha}\right)^3-c\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2+b\cdot\frac{1}{\alpha}-a=0$
따라서 $\frac{1}{\alpha}$은 $dx^3-cx^2+bx-a=0$의 근이다.
이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

유형 06 미정계수의 결정; 삼차방정식의 근의 조건이 주어진 경우 본책 96쪽

주어진 삼차방정식을 $(x-\alpha)(ax^2+bx+c)=0$ (α는 실수) 꼴로 변형한 후 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 이용한다.

0634 $P(x)=x^3-(1+2k)x+2k$로 놓으면
$P(1)=1-(1+2k)+2k=0$
조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 0 & -(1+2k) & 2k \\ & & 1 & 1 & -2k \\ \hline & 1 & 1 & -2k & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore P(x)=(x-1)(x^2+x-2k)$
이때 방정식 $P(x)=0$이 중근을 가지려면
(i) 방정식 $x^2+x-2k=0$이 $x=1$을 근으로 갖는 경우
$1+1-2k=0 \quad \therefore k=1$

(ⅱ) 방정식 $x^2+x-2k=0$이 중근을 갖는 경우
이 이차방정식의 판별식을 D라 하면
$$D=1^2-4\cdot1\cdot(-2k)=0$$
$$1+8k=0 \qquad \therefore k=-\frac{1}{8}$$
(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 k의 값의 합은
$$1+\left(-\frac{1}{8}\right)=\frac{7}{8}$$
답 $\frac{7}{8}$

0635 $P(x)=x^3-4x^2+(k+4)x-2k$로 놓으면
$$P(2)=8-16+2(k+4)-2k=0$$
조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면
$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 1 & -4 & k+4 & -2k \\ & & 2 & -4 & 2k \\ \hline & 1 & -2 & k & \boxed{0} \end{array}$$
$$\therefore P(x)=(x-2)(x^2-2x+k)$$
이때 방정식 $P(x)=0$의 모든 근이 실수가 되려면 이차방정식 $x^2-2x+k=0$이 실근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면
$$\frac{D}{4}=(-1)^2-k\geq0 \qquad \therefore k\leq1$$
답 ④

0636 $x^3-x^2+2kx-2k=0$에서
$$x^2(x-1)+2k(x-1)=0$$
$$\therefore (x-1)(x^2+2k)=0 \quad \cdots ❶$$
이때 주어진 방정식이 한 개의 실근과 두 개의 허근을 가지려면 이차방정식 $x^2+2k=0$이 두 개의 허근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면
$$D=0^2-4\cdot1\cdot2k<0 \qquad \therefore k>0 \quad \cdots ❷$$
따라서 정수 k의 최솟값은 1이다. ⋯ ❸

답 1

채점 기준	비율
❶ 주어진 삼차방정식의 좌변을 인수분해할 수 있다.	40%
❷ k의 값의 범위를 구할 수 있다.	40%
❸ 정수 k의 최솟값을 구할 수 있다.	20%

0637 $P(x)=x^3+3x^2-2(k+2)x+2k$로 놓으면
$$P(1)=1+3-2(k+2)+2k=0$$
조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면
$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & 3 & -2k-4 & 2k \\ & & 1 & 4 & -2k \\ \hline & 1 & 4 & -2k & \boxed{0} \end{array}$$
$$\therefore P(x)=(x-1)(x^2+4x-2k)$$
이때 방정식 $P(x)=0$의 서로 다른 실근이 한 개이려면 방정식 $x^2+4x-2k=0$이 실근을 갖지 않거나 $x=1$을 중근으로 가져야 한다.

(ⅰ) 방정식 $x^2+4x-2k=0$이 실근을 갖지 않는 경우
이 이차방정식의 판별식을 D라 하면
$$\frac{D}{4}=2^2-(-2k)<0$$
$$4+2k<0 \qquad \therefore k<-2$$
(ⅱ) 방정식 $x^2+4x-2k=0$이 $x=1$을 중근으로 갖는 경우
$$1+4-2k=0 \qquad \therefore k=\frac{5}{2}$$
$x^2+4x-2k=0$에서 $x^2+4x-5=0$이므로
$$(x+5)(x-1)=0 \qquad \therefore x=-5 \text{ 또는 } x=1$$
따라서 방정식 $x^2+4x-2k=0$은 $x=1$을 중근으로 갖지 않는다.
(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 실수 k의 값의 범위는
$$k<-2$$
답 $k<-2$

유형 07 삼차방정식의 근과 계수의 관계

본책 97쪽

삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0$의 세 근을 α, β, γ라 하면
$$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a},\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a},\ \alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}$$

0638 삼차방정식 $x^3+2x^2+x+4=0$의 세 근이 α, β, γ이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$$\alpha+\beta+\gamma=-2,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=1,\ \alpha\beta\gamma=-4$$
$$\begin{aligned}&\therefore (\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)\\&=(-2-\gamma)(-2-\alpha)(-2-\beta)\\&=-8-4(\alpha+\beta+\gamma)-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-\alpha\beta\gamma\\&=-8-4\cdot(-2)-2\cdot1-(-4)=2\end{aligned}$$
답 2

0639 삼차방정식 $x^3+ax^2-5x+3=0$의 세 근이 α, β, γ이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$$\alpha+\beta+\gamma=-a,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-5,\ \alpha\beta\gamma=-3$$
$$\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{1}{\beta\gamma}+\frac{1}{\gamma\alpha}=\frac{2}{3}\text{에서} \qquad \frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha\beta\gamma}=\frac{2}{3}$$
$$\frac{-a}{-3}=\frac{2}{3} \qquad \therefore a=2$$
답 2

0640 주어진 삼차방정식의 세 근을 α, 2α, $4\alpha(\alpha\neq0)$라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$$\alpha+2\alpha+4\alpha=14, \qquad 7\alpha=14 \qquad \therefore \alpha=2$$
따라서 세 근이 2, 4, 8이므로
$$2\cdot4+4\cdot8+8\cdot2=a,\ 2\cdot4\cdot8=-b$$
$$\therefore a=56,\ b=-64$$
$$\therefore a+b=-8$$
답 ③

0641 주어진 삼차방정식의 세 근을 α, 2α, β (α, β는 정수)라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$$\alpha+2\alpha+\beta=5 \qquad \therefore 3\alpha+\beta=5 \quad \cdots\cdots ㉠$$
$$\alpha\cdot2\alpha+2\alpha\cdot\beta+\beta\cdot\alpha=2 \qquad \therefore 2\alpha^2+3\alpha\beta=2 \quad \cdots\cdots ㉡$$
$$\alpha\cdot2\alpha\cdot\beta=-k \qquad \therefore 2\alpha^2\beta=-k \quad \cdots\cdots ㉢$$

㉠에서 $\beta=5-3\alpha$이므로 ㉡에 대입하면

$2\alpha^2+3\alpha(5-3\alpha)=2, \quad 7\alpha^2-15\alpha+2=0$

$(7\alpha-1)(\alpha-2)=0 \quad \therefore \alpha=2\ (\because \alpha$는 정수$)$

$\therefore \beta=5-3\cdot2=-1$

$\alpha=2, \beta=-1$을 ㉢에 대입하면

$k=-2\cdot2^2\cdot(-1)=8$ 답 ④

유형 08 삼차방정식의 작성 본책 97쪽

세 수 α, β, γ를 근으로 하고 x^3의 계수가 1인 삼차방정식은

$x^3-(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x-\alpha\beta\gamma=0$

0642 삼차방정식 $x^3-2x^2-x+1=0$의 세 근이 α, β, γ이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=2, \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-1, \alpha\beta\gamma=-1$

$\therefore \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}=\frac{-1}{-1}=1,$

$\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\beta}\cdot\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\gamma}\cdot\frac{1}{\alpha}=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha\beta\gamma}=\frac{2}{-1}=-2,$

$\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta}\cdot\frac{1}{\gamma}=\frac{1}{\alpha\beta\gamma}=-1$

따라서 $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}$을 세 근으로 하고 x^3의 계수가 1인 삼차방정식은

$x^3-x^2-2x+1=0$ 답 $x^3-x^2-2x+1=0$

0643 삼차방정식 $x^3+3x^2+x-2=0$의 세 근이 α, β, γ이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=-3, \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=1, \alpha\beta\gamma=2$

$\therefore (\alpha+1)+(\beta+1)+(\gamma+1)=\alpha+\beta+\gamma+3=0,$

$(\alpha+1)(\beta+1)+(\beta+1)(\gamma+1)+(\gamma+1)(\alpha+1)$

$=(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+2(\alpha+\beta+\gamma)+3$

$=1+2\cdot(-3)+3=-2,$

$(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)$

$=\alpha\beta\gamma+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+(\alpha+\beta+\gamma)+1$

$=2+1-3+1=1$

따라서 $\alpha+1, \beta+1, \gamma+1$을 세 근으로 하고 x^3의 계수가 1인 삼차방정식은

$x^3-2x-1=0$ 답 $x^3-2x-1=0$

0644 $P(1)=P(3)=P(4)=-1$에서

$P(1)+1=P(3)+1=P(4)+1=0$

이므로 삼차방정식 $P(x)+1=0$의 세 근이 1, 3, 4이다. ➊

이때 1, 3, 4를 세 근으로 하고 x^3의 계수가 1인 삼차방정식은

$x^3-(1+3+4)x^2+(1\cdot3+3\cdot4+4\cdot1)x-1\cdot3\cdot4=0$

$\therefore x^3-8x^2+19x-12=0$ ➋

즉 $P(x)+1=x^3-8x^2+19x-12$이므로

$P(x)=x^3-8x^2+19x-13$ ➌

따라서 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 방정식 $P(x)=0$의 모든 근의 곱은 13이다. ➍

답 13

채점 기준	비율
➊ 방정식 $P(x)+1=0$의 세 근을 구할 수 있다.	30%
➋ 1, 3, 4를 세 근으로 하고 x^3의 계수가 1인 삼차방정식을 구할 수 있다.	30%
➌ $P(x)$를 구할 수 있다.	20%
➍ 방정식 $P(x)=0$의 모든 근의 곱을 구할 수 있다.	20%

유형 09 삼차방정식의 켤레근 본책 97쪽

① 계수가 유리수인 삼차방정식의 한 근이 $p+q\sqrt{m}$이면

➡ $p-q\sqrt{m}$도 근이다. (단, p, q는 유리수, $q\neq0$, $\sqrt{m}$은 무리수)

② 계수가 실수인 삼차방정식의 한 근이 $p+qi$이면

➡ $p-qi$도 근이다. (단, p, q는 실수, $q\neq0$, $i=\sqrt{-1}$)

0645 주어진 삼차방정식의 계수가 유리수이므로 $1+\sqrt{2}$가 근이면 $1-\sqrt{2}$도 근이다. 나머지 한 근을 α라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+(1+\sqrt{2})+(1-\sqrt{2})=-a,$

$\alpha(1+\sqrt{2})+(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})+\alpha(1-\sqrt{2})=b,$

$\alpha(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})=3$

위의 세 식을 연립하여 풀면 $\alpha=-3, a=1, b=-7$

$\therefore a+b=-6$ 답 ③

참고 주어진 방정식에 $x=1+\sqrt{2}$를 대입한 후 무리수가 서로 같을 조건을 이용하여 a, b의 값을 구할 수도 있다.

0646 주어진 삼차방정식의 계수가 실수이므로 $-1-2i$가 근이면 $-1+2i$도 근이다. 나머지 한 근을 α라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(-1-2i)(-1+2i)\alpha=5 \quad \therefore \alpha=1$

따라서 나머지 두 근의 합은

$(-1+2i)+1=2i$ 답 $2i$

0647 주어진 삼차방정식의 계수가 유리수이므로 $2+\sqrt{3}$이 근이면 $2-\sqrt{3}$도 근이다.

따라서 주어진 방정식의 세 근이 1, $2+\sqrt{3}$, $2-\sqrt{3}$이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$1+(2+\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})=-\frac{b}{a},$

$1\cdot(2+\sqrt{3})+(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})+1\cdot(2-\sqrt{3})=\frac{c}{a},$

$1\cdot(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=\frac{1}{a}$

위의 세 식을 연립하여 풀면 $a=1, b=-5, c=5$

$\therefore abc=-25$ 답 -25

0648 주어진 삼차방정식의 계수가 실수이므로 $2-\sqrt{2}i$가 근이면 $2+\sqrt{2}i$도 근이다. 나머지 한 근이 c이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$c+(2-\sqrt{2}i)+(2+\sqrt{2}i)=3,$

$c(2-\sqrt{2}i)+(2-\sqrt{2}i)(2+\sqrt{2}i)+c(2+\sqrt{2}i)=a,$

$c(2-\sqrt{2}i)(2+\sqrt{2}i)=-b$

위의 세 식을 연립하여 풀면 $a=2,\ b=6,\ c=-1$

$\therefore a+b+c=7$

답 ⑤

0649 삼차방정식 $P(x)=0$의 계수가 유리수이므로 $-1-\sqrt{5}$가 근이면 $-1+\sqrt{5}$도 근이다. ··· ❶

따라서 방정식 $P(x)=0$의 세 근이 $2,\ -1-\sqrt{5},\ -1+\sqrt{5}$이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$2+(-1-\sqrt{5})+(-1+\sqrt{5})=-a,$

$2\cdot(-1-\sqrt{5})+(-1-\sqrt{5})(-1+\sqrt{5})+2\cdot(-1+\sqrt{5})=b,$

$2\cdot(-1-\sqrt{5})(-1+\sqrt{5})=-c$

$\therefore a=0,\ b=-8,\ c=8$ ··· ❷

따라서 $P(x)=x^3-8x+8$이므로

$P(-1)=-1+8+8=15$ ··· ❸

답 15

채점 기준	비율
❶ $-1+\sqrt{5}$도 방정식 $P(x)=0$의 근임을 알 수 있다.	30%
❷ $a,\ b,\ c$의 값을 구할 수 있다.	50%
❸ $P(-1)$의 값을 구할 수 있다.	20%

유형 10 방정식 $x^3=1,\ x^3=-1$의 허근의 성질

본책 98쪽

방정식 $x^3=1$의 한 허근을 ω라 할 때 (단, $\overline{\omega}$는 ω의 켤레복소수)

① $\omega^3=1 \Rightarrow \omega^{3n-2}=\omega,\ \omega^{3n-1}=\omega^2,\ \omega^{3n}=1$ (단, n은 자연수)

② $\omega^2+\omega+1=0 \Rightarrow \omega+\overline{\omega}=-1,\ \omega\overline{\omega}=1$

③ $\omega^2=\overline{\omega}=\dfrac{1}{\omega}$

0650 $x^3=1$에서 $x^3-1=0$, 즉 $(x-1)(x^2+x+1)=0$이므로 ω는 $x^2+x+1=0$의 한 허근이고, 방정식의 계수가 실수이므로 ω의 켤레복소수인 $\overline{\omega}$도 $x^2+x+1=0$의 근이다. 즉

$\omega^2+\omega+1=0,\ \omega^3=1,\ \omega+\overline{\omega}=-1,\ \omega\overline{\omega}=1$

ㄱ. $1+\omega+\omega^2+\omega^3+\cdots+\omega^{100}$

$=(1+\omega+\omega^2)+\omega^3(1+\omega+\omega^2)$

$\quad+\cdots+\omega^{96}(1+\omega+\omega^2)+(\omega^3)^{33}+(\omega^3)^{33}\cdot\omega$

$=\omega+1$

ㄴ. $(1+\omega)(1+\omega^2)(1+\omega^3)(1+\omega^4)(1+\omega^5)$

$=2(1+\omega)^2(1+\omega^2)^2=2(-\omega^2)^2(-\omega)^2$

$=2\omega^6=2$

ㄷ. $\dfrac{1}{1-\omega}+\dfrac{1}{1-\overline{\omega}}=\dfrac{1-\overline{\omega}+1-\omega}{(1-\omega)(1-\overline{\omega})}=\dfrac{2-(\omega+\overline{\omega})}{1-(\omega+\overline{\omega})+\omega\overline{\omega}}$

$=\dfrac{2-(-1)}{1-(-1)+1}=1$

ㄹ. $\dfrac{\omega^2}{1+\omega}+\dfrac{\overline{\omega}}{1+\overline{\omega}^2}=\dfrac{\omega^2}{-\omega^2}+\dfrac{\overline{\omega}}{-\overline{\omega}}=-1-1=-2$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ②

0651 $x^3=-1$에서 $x^3+1=0$, 즉 $(x+1)(x^2-x+1)=0$이므로 ω는 $x^2-x+1=0$의 한 허근이다.

따라서 $\omega^2-\omega+1=0$이므로 $\omega^2=\omega-1$

$\therefore \dfrac{\omega-1}{\omega^2}+\dfrac{\omega^2}{\omega-1}=\dfrac{\omega^2}{\omega^2}+\dfrac{\omega^2}{\omega^2}=2$

답 2

0652 $\omega=\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}$에서 $2\omega-1=-\sqrt{3}i$

양변을 제곱하면 $4\omega^2-4\omega+1=-3$

$4\omega^2-4\omega+4=0 \quad \therefore \omega^2-\omega+1=0$

양변에 $\omega+1$을 곱하면

$(\omega+1)(\omega^2-\omega+1)=0, \quad \omega^3+1=0$

$\therefore \omega^3=-1$

$\therefore \omega^{2019}+\dfrac{1}{\omega^{2019}}=(\omega^3)^{673}+\dfrac{1}{(\omega^3)^{673}}$

$=-1-1=-2$

답 ①

0653 $x^3+1=0$에서 $(x+1)(x^2-x+1)=0$이므로 ω는 $x^2-x+1=0$의 한 허근이고, ω의 켤레복소수인 $\overline{\omega}$도 $x^2-x+1=0$의 근이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\omega+\overline{\omega}=1,\ \omega\overline{\omega}=1$

$\therefore \dfrac{(\omega-1)\overline{(\omega-1)}}{(3\omega+1)\overline{(3\omega+1)}}=\dfrac{(\omega-1)(\overline{\omega}-1)}{(3\omega+1)(3\overline{\omega}+1)}$

$=\dfrac{\omega\overline{\omega}-(\omega+\overline{\omega})+1}{9\omega\overline{\omega}+3(\omega+\overline{\omega})+1}$

$=\dfrac{1-1+1}{9\cdot1+3\cdot1+1}=\dfrac{1}{13}$

답 ④

SSEN 특강

켤레복소수의 성질

두 복소수 $z_1,\ z_2$의 켤레복소수를 각각 $\overline{z_1},\ \overline{z_2}$라 할 때

① $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$ ② $\overline{z_1-z_2}=\overline{z_1}-\overline{z_2}$

③ $\overline{z_1z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$ ④ $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ (단, $z_2\neq0$)

0654 $x^3=1$에서 $x^3-1=0$, 즉 $(x-1)(x^2+x+1)=0$이므로 ω는 $x^2+x+1=0$의 한 허근이다.

$\therefore \omega^2+\omega+1=0,\ \omega^3=1$ ··· ❶

이때

$f(1)=\dfrac{\omega}{1+\omega^2}=\dfrac{\omega}{-\omega}=-1,$

$f(2)=\dfrac{\omega^2}{1+\omega^4}=\dfrac{\omega^2}{1+\omega}=\dfrac{\omega^2}{-\omega^2}=-1,$

$f(3)=\dfrac{\omega^3}{1+\omega^6}=\dfrac{1}{2},$

$$f(4)=\frac{\omega^4}{1+\omega^8}=\frac{\omega}{1+\omega^2}=f(1),$$
$$f(5)=\frac{\omega^5}{1+\omega^{10}}=\frac{\omega^2}{1+\omega^4}=f(2),$$
$$f(6)=\frac{\omega^6}{1+\omega^{12}}=\frac{\omega^3}{1+\omega^6}=f(3),$$
$$\vdots$$

이므로

$f(1)=f(4)=f(7)=\cdots=f(16)=-1,$

$f(2)=f(5)=f(8)=\cdots=f(17)=-1,$

$f(3)=f(6)=f(9)=\cdots=f(18)=\frac{1}{2}$ ⋯ ❷

$\therefore f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(18)$

$=\left(-1-1+\frac{1}{2}\right)\cdot 6=-9$ ⋯ ❸

답 -9

채점 기준	비율
❶ $\omega^2+\omega+1=0$, $\omega^3=1$임을 알 수 있다.	20%
❷ $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $\cdots$, $f(18)$의 값을 구할 수 있다.	60%
❸ $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(18)$의 값을 구할 수 있다.	20%

유형 11 삼차방정식과 사차방정식의 활용

본책 99쪽

(ⅰ) 문제의 의미를 파악하여 구하는 것을 x로 놓는다.
(ⅱ) 주어진 조건을 이용하여 방정식을 세운다.
(ⅲ) 방정식을 풀고 구한 해가 문제의 뜻에 맞는지 확인한다.

0655 처음 정육면체의 한 모서리의 길이를 $x$cm라 하면

$(x-1)(x+2)(x+3)=\frac{5}{2}x^3$

$3x^3-8x^2-2x+12=0$

$(x-2)(3x^2-2x-6)=0$

$\therefore x=2$ 또는 $x=\frac{1\pm\sqrt{19}}{3}$

그런데 x는 자연수이므로 $x=2$

따라서 처음 정육면체의 한 모서리의 길이는 2cm이다. 답 ①

0656 $\pi x^2(x-2)=75\pi$이므로

$x^3-2x^2-75=0,\quad (x-5)(x^2+3x+15)=0$

$\therefore x=5$ 또는 $x=\frac{-3\pm\sqrt{51}i}{2}$

그런데 x는 실수이므로 $x=5$ 답 5

0657 $\frac{1}{24}(n^4-6n^3+23n^2-18n+24)=31$이므로

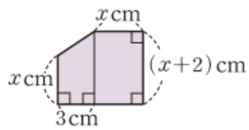
$n^4-6n^3+23n^2-18n-720=0$

$(n-6)(n^3+23n+120)=0$

그런데 n은 자연수이므로 $n=6$ $n^3+23n+120>0$ $\therefore n-6=0$

따라서 원 위의 6개의 점을 선분으로 연결해야 한다. 답 6개

0658 밑면인 오각형은 오른쪽 그림과 같이 직사각형과 사다리꼴로 나눌 수 있으므로



(밑넓이)

$=x(x+2)+\frac{1}{2}\cdot 3\cdot\{x+(x+2)\}$

$=x^2+2x+\frac{3}{2}(2x+2)$

$=x^2+5x+3(\text{cm}^2)$

이때 오각기둥의 높이는 $(x+1)$cm이고, 부피가 195cm³이므로

$(x^2+5x+3)(x+1)=195$

$x^3+6x^2+8x-192=0$

$(x-4)(x^2+10x+48)=0$

$\therefore x=4$ 또는 $x=-5\pm\sqrt{23}i$

그런데 x는 실수이므로 $x=4$ 답 ③

유형 12 {일차방정식, 이차방정식} 꼴의 연립이차방정식

본책 100쪽

(ⅰ) 일차방정식을 x 또는 y에 대하여 정리한다.
(ⅱ) (ⅰ)의 식을 이차방정식에 대입하여 푼다.

0659 $\begin{cases}2x+y=1 & \cdots\cdots ㉠\\ x^2+y^2=13 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$

㉠에서 $y=1-2x$ ⋯⋯ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$x^2+(1-2x)^2=13,\quad 5x^2-4x-12=0$

$(5x+6)(x-2)=0$

$\therefore x=-\frac{6}{5}$ 또는 $x=2$

이것을 ㉢에 대입하면 주어진 연립방정식의 해는

$x=-\frac{6}{5}$, $y=\frac{17}{5}$ 또는 $x=2$, $y=-3$

$\therefore \alpha+\beta=\frac{11}{5}$ 또는 $\alpha+\beta=-1$

따라서 $\alpha+\beta$의 값이 될 수 있는 것은 ③이다. 답 ③

0660 $\begin{cases}x-y=2 & \cdots\cdots ㉠\\ (x-2)^2+y^2=18 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$

㉠에서 $y=x-2$ ⋯⋯ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$y^2+y^2=18,\quad y^2=9$

$\therefore y=\pm 3$

이것을 ㉢에 대입하면 주어진 연립방정식의 해는

$x=5$, $y=3$ 또는 $x=-1$, $y=-3$

따라서 $\alpha=5$, $\beta=3$이므로 $\alpha\beta=15$ 답 ④

0661 $\begin{cases}x-3y=1 & \cdots\cdots ㉠\\ x^2-xy=2 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$

㉠에서 $x=3y+1$ ⋯⋯ ㉢

ⓒ을 ⓛ에 대입하면

$(3y+1)^2-(3y+1)y=2$

$6y^2+5y-1=0, \quad (y+1)(6y-1)=0$

$\therefore y=-1$ 또는 $y=\frac{1}{6}$

이것을 ⓒ에 대입하면 주어진 연립방정식의 해는

$x=-2, y=-1$ 또는 $x=\frac{3}{2}, y=\frac{1}{6}$

$\therefore x+y=-3$ 또는 $x+y=\frac{5}{3}$

따라서 $x+y$의 최솟값은 -3이다. 답 -3

0662 두 연립방정식의 공통인 해는 연립방정식

$$\begin{cases} x-y=-1 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-3y^2=-11 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

의 해와 같다.

㉠에서 $y=x+1$ ······ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$x^2-3(x+1)^2=-11, \quad x^2+3x-4=0$

$(x+4)(x-1)=0 \quad \therefore x=-4$ 또는 $x=1$

이것을 ㉢에 대입하면 위의 연립방정식의 해는

$x=-4, y=-3$ 또는 $x=1, y=2$ ··· ❶

(i) $x=-4, y=-3$을 $x^2+ay^2=9$, $2x+by=8$에 각각 대입하면

$16+9a=9, \ -8-3b=8$

$\therefore a=-\frac{7}{9}, b=-\frac{16}{3}$

(ii) $x=1, y=2$를 $x^2+ay^2=9$, $2x+by=8$에 각각 대입하면

$1+4a=9, \ 2+2b=8$

$\therefore a=2, b=3$

(i), (ii)에서 a, b는 자연수이므로 $a=2, b=3$ ··· ❷

$\therefore a^2+b^2=13$ ··· ❸

답 13

채점 기준	비율
❶ 주어진 두 연립방정식의 공통인 해를 구할 수 있다.	40%
❷ 자연수 a, b의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ a^2+b^2의 값을 구할 수 있다.	20%

유형 13 $\begin{cases}\text{이차방정식}\\\text{이차방정식}\end{cases}$ 꼴의 연립이차방정식 본책 100쪽

(i) 인수분해가 되는 이차방정식을 두 일차식의 곱으로 인수분해하여 일차방정식을 얻는다.
(ii) (i)의 일차방정식을 다른 이차방정식에 대입하여 푼다.

0663 $\begin{cases} x^2-y^2=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-xy+2y^2=8 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $(x-y)(x+y)=0$

$\therefore y=x$ 또는 $y=-x$

(i) $y=x$를 ㉡에 대입하면

$x^2-x^2+2x^2=8, \quad x^2=4$

$\therefore x=\pm2, y=\pm2$ (복호동순)

(ii) $y=-x$를 ㉡에 대입하면

$x^2+x^2+2x^2=8, \quad x^2=2$

$\therefore x=\pm\sqrt{2}, y=\mp\sqrt{2}$ (복호동순)

(i), (ii)에서 해가 아닌 것은 ⑤이다. 답 ⑤

0664 $\begin{cases} 3x^2-4xy+y^2=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+y^2=10 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $(3x-y)(x-y)=0$

$\therefore y=3x$ 또는 $y=x$

(i) $y=3x$를 ㉡에 대입하면

$x^2+9x^2=10, \quad x^2=1$

$\therefore x=\pm1, y=\pm3$ (복호동순)

(ii) $y=x$를 ㉡에 대입하면

$x^2+x^2=10, \quad x^2=5$

$\therefore x=\pm\sqrt{5}, y=\pm\sqrt{5}$ (복호동순)

(i), (ii)에서 x, y는 정수이므로 $xy=3$ 답 3

0665 $\begin{cases} 2x^2-xy-y^2=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+xy+y^2=3 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $(2x+y)(x-y)=0$

$\therefore y=-2x$ 또는 $y=x$

(i) $y=-2x$를 ㉡에 대입하면

$x^2-2x^2+4x^2=3, \quad x^2=1$

$\therefore x=\pm1, y=\mp2$ (복호동순)

(ii) $y=x$를 ㉡에 대입하면

$x^2+x^2+x^2=3, \quad x^2=1$

$\therefore x=\pm1, y=\pm1$ (복호동순)

(i), (ii)에서 $\alpha=1, \beta=-2$이므로 $\alpha-\beta=3$ 답 3

유형 14 대칭형의 연립이차방정식 본책 100쪽

(i) $x+y=u$, $xy=v$로 놓는다.
(ii) 주어진 식을 u, v에 대한 식으로 변형하여 연립방정식을 푼다.
(iii) x, y가 이차방정식 $t^2-ut+v=0$의 두 근임을 이용한다.

0666 $x+y=u$, $xy=v$로 놓으면 주어진 연립방정식은

$$\begin{cases} u-v=1 & \cdots\cdots ㉠ \\ u^2-v=7 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $v=u-1$ ······ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$u^2-u-6=0, \quad (u+2)(u-3)=0$

$\therefore u=-2$ 또는 $u=3$

이것을 ㉢에 대입하면

$u=-2, v=-3$ 또는 $u=3, v=2$

06 여러 가지 방정식

(ⅰ) $u=-2,\ v=-3$, 즉 $x+y=-2,\ xy=-3$일 때

x, y는 이차방정식 $t^2+2t-3=0$의 두 근이므로

$(t+3)(t-1)=0 \qquad \therefore t=-3$ 또는 $t=1$

$\therefore \begin{cases} x=-3 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=1 \\ y=-3 \end{cases}$

(ⅱ) $u=3,\ v=2$, 즉 $x+y=3,\ xy=2$일 때

x, y는 이차방정식 $t^2-3t+2=0$의 두 근이므로

$(t-1)(t-2)=0 \qquad \therefore t=1$ 또는 $t=2$

$\therefore \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 순서쌍 $(x,\ y)$는

$(-3,\ 1),\ (1,\ -3),\ (1,\ 2),\ (2,\ 1)$

답 $(-3,\ 1),\ (1,\ -3),\ (1,\ 2),\ (2,\ 1)$

0667 $x+y=u,\ xy=v$로 놓으면 주어진 연립방정식은

$\begin{cases} u^2-2v=58 & \cdots\cdots ㉠ \\ v=21 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉡을 ㉠에 대입하면

$u^2-42=58, \qquad u^2=100 \qquad \therefore u=\pm 10$ ⋯ ❶

(ⅰ) $u=10,\ v=21$, 즉 $x+y=10,\ xy=21$일 때

x, y는 이차방정식 $t^2-10t+21=0$의 두 근이므로

$(t-3)(t-7)=0 \qquad \therefore t=3$ 또는 $t=7$

$\therefore \begin{cases} x=3 \\ y=7 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=7 \\ y=3 \end{cases}$ ⋯ ❷

(ⅱ) $u=-10,\ v=21$, 즉 $x+y=-10,\ xy=21$일 때

x, y는 이차방정식 $t^2+10t+21=0$의 두 근이므로

$(t+3)(t+7)=0 \qquad \therefore t=-3$ 또는 $t=-7$

$\therefore \begin{cases} x=-3 \\ y=-7 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-7 \\ y=-3 \end{cases}$ ⋯ ❸

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 해는

$\begin{cases} x=3 \\ y=7 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=7 \\ y=3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-3 \\ y=-7 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-7 \\ y=-3 \end{cases}$ ⋯ ❹

답 $\begin{cases} x=3 \\ y=7 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=7 \\ y=3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-3 \\ y=-7 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-7 \\ y=-3 \end{cases}$

채점 기준	비율
❶ $x+y=u,\ xy=v$로 놓고 u, v의 값을 구할 수 있다.	30%
❷ $u=10,\ v=21$인 경우의 해를 구할 수 있다.	30%
❸ $u=-10,\ v=21$인 경우의 해를 구할 수 있다.	30%
❹ 연립방정식의 해를 모두 구할 수 있다.	10%

유형 15 연립이차방정식의 해의 조건

본책 101쪽

일차방정식을 이차방정식에 대입한 후 이차방정식의 판별식을 이용한다.

0668 $\begin{cases} x^2+y^2=5 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x+y=k & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉡에서 $\quad y=-2x+k$

이것을 ㉠에 대입하면 $\quad x^2+(-2x+k)^2=5$

$\therefore 5x^2-4kx+k^2-5=0$

이를 만족시키는 x의 값이 오직 한 개 존재해야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=(-2k)^2-5(k^2-5)=0$

$4k^2-5k^2+25=0, \qquad k^2=25$

$\therefore k=\pm 5$

따라서 모든 실수 k의 값의 곱은

$5\cdot(-5)=-25$

답 ⑤

0669 $\begin{cases} x-y=3 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+xy+k=0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $\quad y=x-3$

이것을 ㉡에 대입하면 $\quad x^2+x(x-3)+k=0$

$\therefore 2x^2-3x+k=0$

이를 만족시키는 실수 x의 값이 존재해야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(-3)^2-4\cdot 2\cdot k\ge 0$

$9-8k\ge 0 \qquad \therefore k\le \dfrac{9}{8}$

따라서 실수 k의 최댓값은 $\dfrac{9}{8}$이다.

답 $\dfrac{9}{8}$

0670 주어진 연립방정식을 만족시키는 실수 x, y는 이차방정식 $t^2-2(a-2)t+a^2-4=0$의 두 실근이므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=\{-(a-2)\}^2-(a^2-4)\ge 0$

$-4a+8\ge 0 \qquad \therefore a\le 2$

따라서 자연수 a는 1, 2이므로 구하는 합은 3이다.

답 3

유형 16 연립이차방정식의 활용

본책 101쪽

(ⅰ) 구하려는 것을 미지수로 놓고 연립방정식을 세운다.
(ⅱ) 연립방정식을 풀고 구한 해가 문제의 뜻에 맞는지 확인한다.

0671 처음 땅의 가로의 길이를 x km, 세로의 길이를 y km라 하면

$\begin{cases} x^2+y^2=13 & \cdots\cdots ㉠ \\ (x+1)(y+1)=xy+6 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉡에서 $\quad y=5-x \quad \cdots\cdots ㉢$

㉢을 ㉠에 대입하면

$x^2+(5-x)^2=13, \qquad x^2-5x+6=0$

$(x-2)(x-3)=0 \qquad \therefore x=2$ 또는 $x=3$

이것을 ㉢에 대입하면

$x=2,\ y=3$ 또는 $x=3,\ y=2$

따라서 처음 땅의 가로의 길이와 세로의 길이의 차는

$3-2=1\,(\text{km})$

답 ①

다른 풀이 $(x+y)^2=x^2+y^2+2xy$이므로 ㉠, ㉡에서

$2xy=(x+y)^2-(x^2+y^2)=5^2-13=12$

$\therefore xy=6$

이때 $(x-y)^2=(x+y)^2-4xy$이므로

$(x-y)^2=5^2-4\cdot 6=1 \qquad \therefore |x-y|=1$

따라서 처음 땅의 가로의 길이와 세로의 길이의 차는 1 km이다.

0672 두 자리 자연수의 십의 자리의 숫자를 x, 일의 자리의 숫자를 y라 하면

$$\begin{cases} x^2+y^2=40 & \cdots\cdots ㉠ \\ (10y+x)+(10x+y)=88 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉡에서 $\quad y=8-x \qquad \cdots\cdots$ ㉢

㉢을 ㉠에 대입하면

$x^2+(8-x)^2=40, \qquad x^2-8x+12=0$

$(x-2)(x-6)=0 \qquad \therefore x=2$ 또는 $x=6$

이것을 ㉢에 대입하면

$x=2,\ y=6$ 또는 $x=6,\ y=2$

그런데 $x>y$이므로 $\qquad x=6,\ y=2$

따라서 처음 수는 62이다. 답 62

0673 직각삼각형의 빗변이 아닌 두 변의 길이를 각각 x cm, y cm라 하면 직각삼각형의 빗변의 길이가 20 cm이고 둘레의 길이가 48 cm이므로

$$\begin{cases} x^2+y^2=400 & \cdots\cdots ㉠ \\ x+y+20=48 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉡에서 $\quad y=28-x \qquad \cdots\cdots$ ㉢

㉢을 ㉠에 대입하면

$x^2+(28-x)^2=400, \qquad x^2-28x+192=0$

$(x-12)(x-16)=0 \qquad \therefore x=12$ 또는 $x=16$

이것을 ㉢에 대입하면

$x=12,\ y=16$ 또는 $x=16,\ y=12$

따라서 직각삼각형의 빗변이 아닌 두 변의 길이는 12 cm, 16 cm이다. 답 12 cm, 16 cm

0674 **전략** $3x-1=\alpha$, $3x-1=\beta$, $3x-1=\gamma$임을 이용한다.

풀이 방정식 $P(x)=0$의 세 근이 α, β, γ이므로 방정식 $P(3x-1)=0$에서

$3x-1=\alpha$ 또는 $3x-1=\beta$ 또는 $3x-1=\gamma$

$\therefore x=\dfrac{\alpha+1}{3}$ 또는 $x=\dfrac{\beta+1}{3}$ 또는 $x=\dfrac{\gamma+1}{3}$

$\therefore \dfrac{\alpha+1}{3}+\dfrac{\beta+1}{3}+\dfrac{\gamma+1}{3}=\dfrac{(\alpha+\beta+\gamma)+3}{3}=6$ 답 ②

> **SSEN 특강**
>
> **방정식 $P(ax+b)=0$의 근**
>
> 방정식 $P(x)=0$의 한 근이 α일 때, 방정식 $P(ax+b)=0$의 한 근은 $ax+b=\alpha$에서 $x=\dfrac{\alpha-b}{a}$이다. (단, $a\neq 0$)

0675 **전략** 주어진 방정식에 $x=1$을 대입하여 m의 값이 될 수 있는 수를 찾는다.

풀이 주어진 방정식에 $x=1$을 대입하면

$1+(2m+1)+4-(m^2+3)=0$

$m^2-2m-3=0, \qquad (m+1)(m-3)=0$

$\therefore m=-1$ 또는 $m=3$

(i) $m=-1$일 때, $\qquad x^3-x^2+4x-4=0$

$x^2(x-1)+4(x-1)=0, \qquad (x-1)(x^2+4)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=\pm 2i$

그런데 이것은 두 개의 음의 정수인 근을 갖는다는 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $m=3$일 때, $\qquad x^3+7x^2+4x-12=0$

$P(x)=x^3+7x^2+4x-12$로 놓으면

$P(1)=1+7+4-12=0$

조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 7 & 4 & -12 \\ & & 1 & 8 & 12 \\ \hline & 1 & 8 & 12 & 0 \end{array}$$

$P(x)=(x-1)(x^2+8x+12)$

$\quad=(x-1)(x+6)(x+2)$

이므로 주어진 방정식은

$(x-1)(x+6)(x+2)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=-6$ 또는 $x=-2$

(i), (ii)에서 $\qquad m=3$ 답 ⑤

0676 **전략** a, b, c를 세 근으로 하는 삼차방정식을 찾은 후, 삼차방정식의 근과 계수의 관계를 이용한다.

풀이 조건 (가)에서 $\quad a^3-5a^2+2a+33-(a^2+b^2+c^2)=0$

조건 (나)에서 $\quad b^3-5b^2+2b+33-(a^2+b^2+c^2)=0$

조건 (다)에서 $\quad c^3-5c^2+2c+33-(a^2+b^2+c^2)=0$

따라서 a, b, c는 x에 대한 삼차방정식

$x^3-5x^2+2x+33-(a^2+b^2+c^2)=0$

의 세 근이다.

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$a+b+c=5,\ ab+bc+ca=2,\ abc=-33+a^2+b^2+c^2$

이므로

$abc=-33+(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$

$\quad=-33+5^2-2\cdot 2=-12$ 답 -12

0677 **전략** 사차방정식의 좌변을 인수분해한 후 삼차방정식의 근과 계수의 관계를 이용한다.

풀이 $Q(x)=x^4-x^3-x^2-4$로 놓으면

$Q(2)=16-8-4-4=0$

조립제법을 이용하여 $Q(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} 2 & 1 & -1 & -1 & 0 & -4 \\ & & 2 & 2 & 2 & 4 \\ \hline & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}$$

$Q(x)$

$=(x-2)(x^3+x^2+x+2)$

이므로 주어진 방정식은

$(x-2)(x^3+x^2+x+2)=0$

06 여러 가지 방정식

$a=2$라 하면 나머지 세 근 b, c, d는 삼차방정식 $x^3+x^2+x+2=0$의 근이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\quad b+c+d=-1$

한편

$$\begin{aligned}P(x)&=x^6-x^5-x^4-4x^2-x\\&=x^2(x^4-x^3-x^2-4)-x\\&=x^2Q(x)-x\end{aligned}$$

이고 $Q(a)=0$, $Q(b)=0$, $Q(c)=0$, $Q(d)=0$이므로

$P(a)=-a$, $P(b)=-b$, $P(c)=-c$, $P(d)=-d$

$$\begin{aligned}\therefore P(a)+P(b)+P(c)+P(d)&=-a-b-c-d\\&=-2-(b+c+d)\\&=-2-(-1)=-1\end{aligned}$$

답 -1

0678 전략 계수가 실수이므로 $3-4i$도 방정식 $P(x)=0$의 한 근이다.

풀이 방정식 $P(x)=0$의 계수가 실수이므로 $3+4i$가 근이면 $3-4i$도 근이다.

나머지 한 근을 α라 하면 방정식 $P(2x+1)=0$에서

$2x+1=\alpha$ 또는 $2x+1=3+4i$ 또는 $2x+1=3-4i$

$\therefore x=\dfrac{\alpha-1}{2}$ 또는 $x=1+2i$ 또는 $x=1-2i$

이때 방정식 $P(2x+1)=0$의 세 근의 곱이 15이므로

$\dfrac{\alpha-1}{2}\cdot(1+2i)\cdot(1-2i)=15$

$\dfrac{\alpha-1}{2}=3 \qquad \therefore \alpha=7$

x^3의 계수가 1이고 세 근이 7, $3+4i$, $3-4i$인 삼차방정식은

$$\begin{aligned}&x^3-\{7+(3+4i)+(3-4i)\}x^2\\&+\{7\cdot(3+4i)+(3+4i)(3-4i)+(3-4i)\cdot7\}x\\&-7\cdot(3+4i)(3-4i)=0\end{aligned}$$

에서 $\quad x^3-13x^2+67x-175=0$

$\therefore P(x)=x^3-13x^2+67x-175$

따라서 삼차식 $P(x)$의 이차항의 계수와 일차항의 계수의 합은

$-13+67=54$

답 54

0679 전략 계수가 유리수인 삼차방정식의 한 근이 $p+q\sqrt{m}$(p, q는 유리수, $q\neq0$, $\sqrt{m}$은 무리수)이면 $p-q\sqrt{m}$도 근임을 이용한다.

풀이 조건 (가)에서 $P(x)$는 $x-2$를 인수로 가지므로 2는 방정식 $P(x)=0$의 한 근이다.

조건 (나)에서 방정식 $P(x)=0$의 한 근이 $\sqrt{2}-1$이고 계수가 유리수이므로 $-\sqrt{2}-1$도 근이다.

삼차방정식 $(2x-1)^3+a(2x-1)^2+b(2x-1)+c=0$, 즉 $P(2x-1)=0$에서

$2x-1=2$ 또는 $2x-1=\sqrt{2}-1$ 또는 $2x-1=-\sqrt{2}-1$

$\therefore x=\dfrac{3}{2}$ 또는 $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 또는 $x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

따라서 모든 근의 곱은

$\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\dfrac{3}{4}$

답 ③

0680 전략 입체도형의 부피와 겉넓이를 x에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 정육면체 5개를 쌓은 입체도형이므로

$a=5x^3 \qquad \cdots\cdots ㉠$

앞쪽과 뒤쪽에 보이는 도형의 겉넓이는 $\quad 5x^2+5x^2=10x^2(\text{cm}^2)$

왼쪽과 오른쪽에 보이는 도형의 겉넓이는 $\quad 2x^2+2x^2=4x^2(\text{cm}^2)$

위쪽과 아래쪽에 보이는 도형의 겉넓이는 $\quad 3x^2+3x^2=6x^2(\text{cm}^2)$

$\therefore b=10x^2+4x^2+6x^2=20x^2 \qquad \cdots\cdots ㉡$

㉠, ㉡을 $a=2b-320$에 대입하면

$5x^3=2\cdot20x^2-320, \qquad x^3-8x^2+64=0$

$P(x)=x^3-8x^2+64$로 놓으면

$P(4)=64-128+64=0$

조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr}4 & 1 & -8 & 0 & 64\\ & & 4 & -16 & -64\\\hline & 1 & -4 & -16 & \boxed{0}\end{array}$$

$P(x)=(x-4)(x^2-4x-16)$

따라서 방정식 $P(x)=0$의 근은

$x=4$ 또는 $x=2\pm2\sqrt{5}$

이때 x는 자연수이므로 $\quad x=4$

답 ③

0681 전략 겉넓이를 x에 대한 식으로 나타낸 후 인수분해를 이용한다.

풀이 처음 직육면체의 겉넓이는

$2\cdot x\cdot x^2+2\cdot x(x-2)+2\cdot x^2(x-2)=4x^3-2x^2-4x$

정육면체를 잘라내면서 없어진 겉넓이는 $\quad 2(x-2)^2$

정육면체를 붙이면서 추가된 겉넓이는 $\quad 4(x-2)^2$

이므로

$4x^3-2x^2-4x-2(x-2)^2+4(x-2)^2=80$

$4x^3-2x^2-4x+2(x-2)^2-80=0$

$4x^3-12x-72=0, \qquad x^3-3x-18=0$

$P(x)=x^3-3x-18$로 놓으면

$P(3)=27-9-18=0$

조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr}3 & 1 & 0 & -3 & -18\\ & & 3 & 9 & 18\\\hline & 1 & 3 & 6 & \boxed{0}\end{array}$$

$P(x)=(x-3)(x^2+3x+6)$

따라서 방정식 $P(x)=0$의 근은

$x=3$ 또는 $x=\dfrac{-3\pm\sqrt{15}\,i}{2}$

이때 x는 실수이므로 $\quad x=3$

답 ②

0682 전략 $x\geq y$, $x<y$인 경우로 나누어 연립방정식을 푼다.

풀이 (i) $x\geq y$일 때

$\max(x, y)=x$, $\min(x, y)=y$이므로 주어진 연립방정식은

$$\begin{cases}x-y-2=2y & \cdots\cdots ㉠\\ x^2-xy+y^2=x+16 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$$

㉠에서 $\quad x=3y+2 \qquad \cdots\cdots ㉢$

㉢을 ㉡에 대입하면

$(3y+2)^2-(3y+2)y+y^2=(3y+2)+16$

$7y^2+7y-14=0, \qquad y^2+y-2=0$

$(y+2)(y-1)=0 \qquad \therefore y=-2$ 또는 $y=1$

이것을 ㉢에 대입하면

$x=-4,\ y=-2$ 또는 $x=5,\ y=1$

그런데 $x \geq y$이므로 $\quad x=5,\ y=1$

(ii) $x<y$일 때

$\max(x,\ y)=y$, $\min(x,\ y)=x$이므로 주어진 연립방정식은

$$\begin{cases} x-y-2=2x & \cdots\cdots ㉣ \\ x^2-xy+y^2=y+16 & \cdots\cdots ㉤ \end{cases}$$

㉣에서 $\quad y=-x-2 \quad \cdots\cdots$ ㉥

㉥을 ㉤에 대입하면

$x^2-x(-x-2)+(-x-2)^2=(-x-2)+16$

$3x^2+7x-10=0, \quad (3x+10)(x-1)=0$

$\therefore x=-\dfrac{10}{3}$ 또는 $x=1$

이것을 ㉥에 대입하면

$x=-\dfrac{10}{3},\ y=\dfrac{4}{3}$ 또는 $x=1,\ y=-3$

그런데 $x<y$이므로 $\quad x=-\dfrac{10}{3},\ y=\dfrac{4}{3}$

(i), (ii)에서 순서쌍 $(x,\ y)$는 $\quad (5,\ 1),\ \left(-\dfrac{10}{3},\ \dfrac{4}{3}\right)$

$\therefore \alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2=5+\left(-\dfrac{40}{9}\right)=\dfrac{5}{9}$

답 ③

0683 전략 $\overline{AD}=2n$(n은 자연수)으로 놓고 $\overline{AC}$, $\overline{BC}$, $\overline{AB}$의 길이를 구한다.

풀이 $\overline{AD}$, $\overline{AC}$, $\overline{BC}$, $\overline{AB}$가 이 순서대로 네 개의 연속된 짝수이므로 $\overline{AD}=2n$(n은 자연수)이라 하면

$\overline{AC}=2n+2,\ \overline{BC}=2n+4,\ \overline{AB}=2n+6$

$\overline{BD}=x,\ \overline{CD}=y$라 하면 $\quad x+y=2n+4 \quad \cdots\cdots$ ㉠

두 삼각형 ABD, ACD는 직각삼각형이므로 피타고라스 정리에 의하여

$(2n+6)^2-x^2=(2n+2)^2-y^2$

$(x+y)(x-y)=8(2n+4) \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $\quad x-y=8 \quad \cdots\cdots$ ㉢

㉠, ㉢을 연립하여 풀면 $\quad x=n+6,\ y=n-2$

삼각형 ACD에서 피타고라스 정리에 의하여

$(2n+2)^2=(2n)^2+(n-2)^2, \quad n^2-12n=0$

$n(n-12)=0 \quad \therefore n=12$ ($\because$ n은 자연수)

따라서 $\overline{AB}=30$, $\overline{AC}=26$이므로

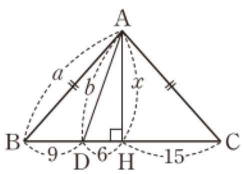
$S=\pi\cdot 15^2+\pi\cdot 13^2=394\pi$

$\therefore \dfrac{S}{\pi}=394$

답 394

0684 전략 점 A에서 변 BC에 수선의 발을 내린 후 피타고라스 정리를 이용한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 점 A에서 변 BC에 내린 수선의 발을 H라 하면 삼각형 ABC는 이등변삼각형이므로



$\overline{BH}=\overline{CH}=15$

$\therefore \overline{DH}=15-9=6$

또 $\overline{AH}=x$, $\overline{AB}=a$, $\overline{AD}=b$라 하면 두 삼각형 ABH, ADH에서 피타고라스 정리에 의하여

$a^2=x^2+15^2=x^2+225 \quad \cdots\cdots$ ㉠

$b^2=x^2+6^2=x^2+36 \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠$-$㉡을 하면

$a^2-b^2=189, \quad (a+b)(a-b)=189$

이때 $a>15$, $b>6$이므로 $a+b>21$이고, $189=3^3\cdot 7$이므로

$\begin{cases} a+b=27 \\ a-b=7 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} a+b=63 \\ a-b=3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} a+b=189 \\ a-b=1 \end{cases}$

$\therefore a=17$ 또는 $a=33$ 또는 $a=95$

따라서 가능한 모든 삼각형 ABC의 둘레의 길이의 합은

$(17\cdot 2+30)+(33\cdot 2+30)+(95\cdot 2+30)=380$

답 ④

0685 전략 이차방정식의 해만을 해로 가지므로 삼차방정식은 $(x-a)^2(x-b)=0$ 꼴이다.

풀이 $x^2-3x-4=0$에서 $\quad (x+1)(x-4)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=4$ ··· ❶

이것이 삼차방정식 $x^3+ax^2+bx+c=0$의 해이므로

$x^3+ax^2+bx+c=(x+1)(x-4)^2$

또는 $x^3+ax^2+bx+c=(x+1)^2(x-4)$

이때 $c>0$이므로

$x^3+ax^2+bx+c=(x+1)(x-4)^2$ ··· ❷

따라서 $Q(x)=x-4$이므로

$Q(10)=10-4=6$ ··· ❸

답 6

채점 기준	비율
❶ 이차방정식 $x^2-3x-4=0$의 해를 구할 수 있다.	20%
❷ $x^3+ax^2+bx+c=(x+1)(x-4)^2$임을 알 수 있다.	50%
❸ $Q(10)$의 값을 구할 수 있다.	30%

0686 전략 삼차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 α, β, γ 사이의 관계식을 구한다.

풀이 삼차방정식 $x^3-3x^2+2x-1=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여

$\dfrac{1}{\alpha\beta}+\dfrac{1}{\beta\gamma}+\dfrac{1}{\gamma\alpha}=3,$

$\dfrac{1}{\alpha\beta}\cdot\dfrac{1}{\beta\gamma}+\dfrac{1}{\beta\gamma}\cdot\dfrac{1}{\gamma\alpha}+\dfrac{1}{\gamma\alpha}\cdot\dfrac{1}{\alpha\beta}=2,$

$\dfrac{1}{\alpha\beta}\cdot\dfrac{1}{\beta\gamma}\cdot\dfrac{1}{\gamma\alpha}=1$

$\therefore \dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha\beta\gamma}=3 \quad \cdots\cdots$ ㉠

$\dfrac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{(\alpha\beta\gamma)^2}=2 \quad \cdots\cdots$ ㉡

$\dfrac{1}{(\alpha\beta\gamma)^2}=1 \quad \cdots\cdots$ ㉢ ··· ❶

이때 α, β, γ가 삼차방정식 $x^3+ax^2+bx+c=0$의 세 근이므로

$\alpha+\beta+\gamma=-a,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=b,\ \alpha\beta\gamma=-c$

이것을 ㉠, ㉡, ㉢에 각각 대입하면

$$\frac{a}{c}=3,\ \frac{b}{c^2}=2,\ \frac{1}{c^2}=1$$

따라서 $a=3c$, $b=2c^2$, $c^2=1$이므로

$$a^2=9,\ b^2=4,\ c^2=1$$

$$\therefore a^2+b^2+c^2=14$$ ···→ ❷

답 14

채점 기준	비율
❶ 삼차방정식의 근과 계수의 관계를 이용할 수 있다.	50%
❷ $a^2+b^2+c^2$의 값을 구할 수 있다.	50%

0687 전략 주어진 식을 $A^2+B^2=0$ 꼴로 정리한다.

풀이 $x^2y^2+x^2+9y^2-8xy+1=0$에서

$$(x^2y^2-2xy+1)+(x^2-6xy+9y^2)=0$$

$$(xy-1)^2+(x-3y)^2=0$$ ···→ ❶

이때 x, y는 실수이므로

$xy-1=0$ ······ ㉠

$x-3y=0$ ······ ㉡

㉡에서 $x=3y$

이것을 ㉠에 대입하면 $y^2=\frac{1}{3}$

이때 $x^2=9y^2$이므로 $x^2=3$ ···→ ❷

$$\therefore 6(x^2+y^2)=6\left(3+\frac{1}{3}\right)=20$$ ···→ ❸

답 20

채점 기준	비율
❶ 주어진 식을 $A^2+B^2=0$ 꼴로 정리할 수 있다.	40%
❷ x^2, y^2의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ $6(x^2+y^2)$의 값을 구할 수 있다.	20%

0688 전략 두 원 A, B의 반지름의 길이를 각각 x, y로 놓고 x, y에 대한 연립방정식을 세운다.

풀이 두 원 A, B의 반지름의 길이를 각각 x, y라 하면 두 원 A, B의 지름의 길이의 합이 32이므로

$2x+2y=32$, $x+y=16$

$\therefore x=16-y$ ······ ㉠ ···→ ❶

또 원 C의 지름의 길이는 $2x-2y$이므로 원 D의 반지름의 길이는

$$\frac{1}{2}\{2y-(2x-2y)\}=-x+2y$$

두 원 A, D의 넓이의 차가 96π이므로

$$\pi x^2-\pi(-x+2y)^2=96\pi$$

$$x^2-(x^2-4xy+4y^2)=96$$

$$4xy-4y^2=96$$

$\therefore xy-y^2=24$ ······ ㉡ ···→ ❷

㉠을 ㉡에 대입하면

$(16-y)y-y^2=24$, $y^2-8y+12=0$

$(y-2)(y-6)=0$ $\therefore y=2$ 또는 $y=6$

이것을 ㉠에 대입하면

$x=14$, $y=2$ 또는 $x=10$, $y=6$

그런데 $x=14$, $y=2$이면 원 D의 반지름의 길이가 음수이므로

$x=10$, $y=6$

따라서 원 B의 반지름의 길이는 6이다. ···→ ❸

답 6

채점 기준	비율
❶ 두 원 A, B의 지름의 길이의 합이 32임을 이용하여 식을 세울 수 있다.	30%
❷ 두 원 A, D의 넓이의 차가 96π임을 이용하여 식을 세울 수 있다.	40%
❸ 원 B의 반지름의 길이를 구할 수 있다.	30%

Ⅲ. 부등식

07 부등식

0689 ⑤ $a=1$, $b=-2$이면 $a>b$이지만 $a^2=1$, $b^2=4$이므로 $a^2<b^2$이다. 답 ⑤

0690 $a>b>0$에서 $a+b>0$, $a-b>0$
$c>d>0$에서 $c-d>0$, $cd>0$
(1) $a^2-b^2=(a+b)(a-b)>0$ $\therefore a^2>b^2$
(2) $c>d>0$에서 $d-c<0$이므로
$$\frac{1}{c}-\frac{1}{d}=\frac{d-c}{cd}<0 \quad \therefore \frac{1}{c}<\frac{1}{d}$$
(3) $(a+c)-(b+d)=(a-b)+(c-d)>0$
$\therefore a+c>b+d$
(4) $3a-2d-(3b-2c)=3(a-b)+2(c-d)>0$
$\therefore 3a-2d>3b-2c$
답 (1) $>$ (2) $<$ (3) $>$ (4) $>$

다른 풀이 (1) $a>b>0$이므로 $|a|>|b|$ $\therefore a^2>b^2$
(2) $c>d>0$이므로 $c>d$의 양변의 역수를 취하면 $\frac{1}{c}<\frac{1}{d}$

0691 $2\le x\le 4$의 각 변에서 2를 빼면
$0\le x-2\le 2$ 답 $0\le x-2\le 2$

0692 $2\le x\le 4$의 각 변에 3을 곱하면
$6\le 3x\le 12$ 답 $6\le 3x\le 12$

0693 $2\le x\le 4$의 각 변에 -1을 곱하면
$-4\le -x\le -2$ 답 $-4\le -x\le -2$

0694 $2\le x\le 4$의 각 변의 역수를 취하면
$\frac{1}{4}\le\frac{1}{x}\le\frac{1}{2}$ 답 $\frac{1}{4}\le\frac{1}{x}\le\frac{1}{2}$

0695 $4(x-3)<2x$에서 $4x-12<2x$
$2x<12$ $\therefore x<6$ 답 $x<6$

0696 $\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}\le\frac{1}{2}x+1$의 양변에 6을 곱하면
$2x+3\le 3x+6$, $-x\le 3$ $\therefore x\ge -3$ 답 $x\ge -3$

0697 $0.2x>0.42-0.01x$의 양변에 100을 곱하면
$20x>42-x$, $21x>42$ $\therefore x>2$ 답 $x>2$

0698 $ax<a+2$에서
(i) $a>0$일 때 $x<\frac{a+2}{a}$
(ii) $a<0$일 때 $x>\frac{a+2}{a}$
(iii) $a=0$일 때 $0\cdot x<2$이므로 해는 모든 실수이다. 답 풀이 참조

0699 $(a-1)x>a$에서
(i) $a>1$일 때 $x>\frac{a}{a-1}$
(ii) $a<1$일 때 $x<\frac{a}{a-1}$
(iii) $a=1$일 때 $0\cdot x>1$이므로 해가 없다. 답 풀이 참조

0700 $ax+1\ge a^2-x$에서 $(a+1)x\ge a^2-1$
$(a+1)x\ge(a+1)(a-1)$
(i) $a>-1$일 때 $x\ge a-1$
(ii) $a<-1$일 때 $x\le a-1$
(iii) $a=-1$일 때 $0\cdot x\ge 0$이므로 해는 모든 실수이다. 답 풀이 참조

0701 답 $-4<x\le 5$

0702 답 $x\ge 3$

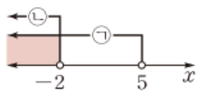
0703 답 $x<-2$

0704 답 $-3<x<2$

0705 답 $-5<x\le 1$

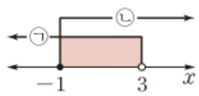
0706 답 $x\ge 7$

0707 $x+1<6$에서 $x<5$ …… ㉠
$5x-2<2x-8$에서 $3x<-6$
$\therefore x<-2$ …… ㉡
㉠, ㉡의 공통부분을 구하면
$x<-2$



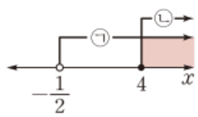
답 $x<-2$

0708 $2x+3<9$에서 $2x<6$
$\therefore x<3$ …… ㉠
$4x+1\ge x-2$에서 $3x\ge -3$
$\therefore x\ge -1$ …… ㉡
㉠, ㉡의 공통부분을 구하면
$-1\le x<3$



답 $-1\le x<3$

0709 $5(x+1)>x+3$에서 $5x+5>x+3$
$4x>-2$ $\therefore x>-\frac{1}{2}$ …… ㉠
$x+5\le 3(x-1)$에서 $x+5\le 3x-3$
$-2x\le -8$ $\therefore x\ge 4$ …… ㉡
㉠, ㉡의 공통부분을 구하면
$x\ge 4$



답 $x\ge 4$

0710 $\frac{1}{3}x-2<\frac{1}{2}$의 양변에 6을 곱하면

$2x-12<3$, $\quad 2x<15$

$\therefore x<\frac{15}{2}$ …… ㉠

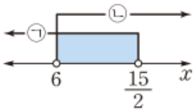
$1.3x-3.6>0.7x$의 양변에 10을 곱하면

$13x-36>7x$, $\quad 6x>36$

$\therefore x>6$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$6<x<\frac{15}{2}$



답 $6<x<\frac{15}{2}$

0711 $0.4(x+1)\le 0.2(x+2)$의 양변에 10을 곱하면

$4(x+1)\le 2(x+2)$, $\quad 4x+4\le 2x+4$

$2x\le 0 \quad \therefore x\le 0$ …… ㉠

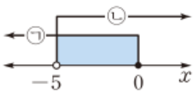
$\frac{x}{5}-\frac{x+5}{4}<-1$의 양변에 20을 곱하면

$4x-5(x+5)<-20$, $\quad 4x-5x-25<-20$

$-x<5 \quad \therefore x>-5$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$-5<x\le 0$



답 $-5<x\le 0$

0712 $4x+7\le -5$에서 $\quad 4x\le -12$

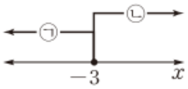
$\therefore x\le -3$ …… ㉠

$2x+10\ge 1-x$에서 $\quad 3x\ge -9$

$\therefore x\ge -3$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$x=-3$



답 $x=-3$

0713 $x-1\le -6$에서 $\quad x\le -5$ …… ㉠

$3(x-4)<5x-8$에서 $\quad 3x-12<5x-8$

$-2x<4 \quad \therefore x>-2$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분이 없으므로 주어진 연립부등식의 해는 없다.

답 해는 없다.

0714 $\frac{1}{2}(x+4)\le 3x-13$의 양변에 2를 곱하면

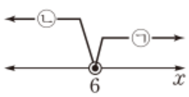
$x+4\le 6x-26$, $\quad -5x\le -30$

$\therefore x\ge 6$ …… ㉠

$-2x+11>x-7$에서 $\quad -3x>-18$

$\therefore x<6$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분이 없으므로 주어진 연립부등식의 해는 없다.



답 해는 없다.

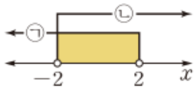
0715 (1) $5x-3<4x-1$에서 $\quad x<2$ …… ㉠

(2) $4x-1<7x+5$에서 $\quad -3x<6$

$\therefore x>-2$ …… ㉡

(3) ㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$-2<x<2$



답 (1) $x<2$ (2) $x>-2$ (3) $-2<x<2$

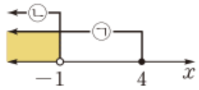
0716 $3x+1\le 2x+5$에서 $\quad x\le 4$ …… ㉠

$2x+5<3$에서 $\quad 2x<-2$

$\therefore x<-1$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$x<-1$



답 $x<-1$

0717 $2x-1\le 3x+4$에서 $\quad -x\le 5$

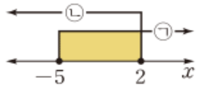
$\therefore x\ge -5$ …… ㉠

$3x+4\le x+8$에서 $\quad 2x\le 4$

$\therefore x\le 2$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$-5\le x\le 2$



답 $-5\le x\le 2$

0718 $|5-x|<4$에서 $\quad -4<5-x<4$

$-9<-x<-1 \quad \therefore 1<x<9$

답 $1<x<9$

0719 $|3x-2|\ge 5$에서 $\quad 3x-2\le -5$ 또는 $3x-2\ge 5$

$3x\le -3$ 또는 $3x\ge 7 \quad \therefore x\le -1$ 또는 $x\ge \frac{7}{3}$

답 $x\le -1$ 또는 $x\ge \frac{7}{3}$

0720 $1<|4x+1|<6$에서

$1<4x+1<6$ 또는 $-6<4x+1<-1$

(i) $1<4x+1<6$에서 $\quad 0<4x<5 \quad \therefore 0<x<\frac{5}{4}$

(ii) $-6<4x+1<-1$에서 $\quad -7<4x<-2$

$\therefore -\frac{7}{4}<x<-\frac{1}{2}$

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는

$-\frac{7}{4}<x<-\frac{1}{2}$ 또는 $0<x<\frac{5}{4}$

답 $-\frac{7}{4}<x<-\frac{1}{2}$ 또는 $0<x<\frac{5}{4}$

0721 $|x+1|-|x-4|<3$ …… ㉠

(1) $x<-1$일 때, $x+1<0$, $x-4<0$이므로 부등식 ㉠은

$-(x+1)-\{-(x-4)\}<3$, $\quad -x-1+x-4<3$

$\therefore 0\cdot x<8$

따라서 부등식의 해는 모든 실수이다.

그런데 $x<-1$이므로 $\quad x<-1$

(2) $-1\le x<4$일 때, $x+1\ge 0$, $x-4<0$이므로 부등식 ㉠은

$x+1-\{-(x-4)\}<3$, $x+1+x-4<3$

$2x<6$ $\therefore x<3$

그런데 $-1\le x<4$이므로 $-1\le x<3$

(3) $x\ge 4$일 때, $x+1>0$, $x-4\ge 0$이므로 부등식 ㉠은

$x+1-(x-4)<3$, $x+1-x+4<3$

$\therefore 0\cdot x<-2$

따라서 해는 없다.

(4) (1) ~ (3)에서 부등식 ㉠의 해는 $x<3$

답 (1) $x<-1$ (2) $-1\le x<3$ (3) 해는 없다. (4) $x<3$

유형 01 부등식의 기본 성질

본책 110쪽

① $a>b$, $b>c$ ➡ $a>c$

② $a>b$ ➡ $a+c>b+c$, $a-c>b-c$

③ $a>b$, $c>0$ ➡ $ac>bc$, $\frac{a}{c}>\frac{b}{c}$

④ $a>b$, $c<0$ ➡ $ac<bc$, $\frac{a}{c}<\frac{b}{c}$

0722 ㄴ. $c>b>0$이므로 $c>b$의 양변의 역수를 취하면

$\frac{1}{c}<\frac{1}{b}$

$a>0$이므로 양변에 a를 곱하면 $\frac{a}{c}<\frac{a}{b}$

ㄷ. $a>b$에서 $a-c>b-c$ …… ㉠

$c<d$에서 $-c>-d$

$\therefore b-c>b-d$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $a-c>b-d$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

다른 풀이 ㄴ. $\frac{a}{c}-\frac{a}{b}=\frac{ab-ac}{bc}=\frac{a(b-c)}{bc}$

이때 $0<a<b<c$에서 $a>0$, $bc>0$, $b-c<0$이므로

$\frac{a(b-c)}{bc}<0$ $\therefore \frac{a}{c}<\frac{a}{b}$

ㄷ. $(a-c)-(b-d)=(a-b)-(c-d)$

이때 $a>b$에서 $a-b>0$, $c<d$에서 $c-d<0$이므로

$(a-b)-(c-d)>0$ $\therefore a-c>b-d$

0723 ① $ac>bc$에서 $c<0$이면 $a<b$이다.

② $c^2>0$이므로 $\frac{a}{c^2}>\frac{b}{c^2}$의 양변에 c^2을 곱하면 $a>b$

③ $a=1$, $b=-1$, $c=1$이면 $\frac{c^2}{a}>\frac{c^2}{b}$이지만 $a>b$이다.

④ $a=1$, $b=-1$, $c=-2$이면 $a>b>c$이지만 $ab<c^2$이다.

⑤ $a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{1}{4}$이면 $a>b>0$이지만 $ab<b$이다.

답 ②

0724 ㄱ. $a<b$에서 $-a>-b$

이때 $-a>0$, $-b>0$이므로 $-\frac{1}{a}<-\frac{1}{b}$

양변에 -1을 곱하면 $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$

ㄴ. $|a|>|b|$이므로 $a^2>b^2$

$ab>0$이므로 양변을 ab로 나누면 $\frac{a}{b}>\frac{b}{a}$

ㄷ. $a<b<0$에서 $a^3<b^3$

$ab>0$이므로 양변을 ab로 나누면 $\frac{a^2}{b}<\frac{b^2}{a}$

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

유형 02 부등식 $ax>b$의 풀이

본책 110쪽

부등식 $ax>b$의 해가

① $x>\alpha$ ➡ $a>0$, $\frac{b}{a}=\alpha$

② $x<\alpha$ ➡ $a<0$, $\frac{b}{a}=\alpha$

③ 없다. ➡ $a=0$, $b\ge 0$

④ 모든 실수이다. ➡ $a=0$, $b<0$

0725 $(1-a)x>a+b$의 해가 $x<-2$이므로

$1-a<0$ $\therefore x<\frac{a+b}{1-a}$

따라서 $\frac{a+b}{1-a}=-2$이므로 $a+b=-2+2a$

$\therefore a-b=2$

이것을 $(a-b)x\ge 6$에 대입하면

$2x\ge 6$ $\therefore x\ge 3$

답 ④

0726 $bx-2a>ax-2b$에서 $(b-a)x>-2(b-a)$

이때 $a>b$에서 $b-a<0$이므로 양변을 $b-a$로 나누면

$x<-2$

답 $x<-2$

0727 $a+b=0$에서 $b=-a$ …… ㉠

이것을 주어진 부등식에 대입하면

$(2a+a)x>3a-2a+8$ $\therefore 3ax>a+8$

이 부등식의 해가 $x<-1$이므로 $a<0$

$\therefore x<\frac{a+8}{3a}$

따라서 $\frac{a+8}{3a}=-1$이므로 $a+8=-3a$

$4a=-8$ $\therefore a=-2$

$a=-2$를 ㉠에 대입하면 $b=2$

$\therefore ab=-4$

답 -4

0728 $a^2x-a^2\ge x+b$에서 $(a^2-1)x\ge a^2+b$

이 부등식의 해가 모든 실수이므로

$a^2-1=0$, $a^2+b\le 0$ $\therefore a^2=1$, $b\le -a^2$

$\therefore b\le -1$

따라서 b의 최댓값은 -1이다.

답 ③

0729 $(a-b)x+a-2b\le 0$에서 $(a-b)x\le -a+2b$

이 부등식을 만족시키는 x가 존재하지 않으려면

$a-b=0$, $-a+2b<0$ ⋯➝ ❶

$a-b=0$에서 $b=a$이므로

$-a+2a<0 \quad \therefore a<0$ ··· ❷

$b=a$를 $(a-3b)x+a-5b>0$에 대입하면

$(a-3a)x+a-5a>0 \quad \therefore -2ax>4a$

이때 $-2a>0$이므로 $\quad x>-2$ ··· ❸

답 $x>-2$

채점 기준	비율
❶ 부등식 $(a-b)x+a-2b\le0$을 만족시키는 x가 존재하지 않을 조건을 구할 수 있다.	40%
❷ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	20%
❸ 부등식 $(a-3b)x+a-5b>0$의 해를 구할 수 있다.	40%

유형 03 연립일차부등식의 풀이

본책 111쪽

(i) 각각의 일차부등식의 해를 구한다.
(ii) (i)에서 구한 해를 수직선 위에 나타내어 공통부분을 구한다.

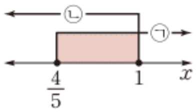
0730 $1-2x\le3x-3$에서 $\quad -5x\le-4$

$\therefore x\ge\frac{4}{5}$ ······ ㉠

$4x-1\le x+2$에서 $\quad 3x\le3$

$\therefore x\le1$ ······ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면



$\frac{4}{5}\le x\le1$

따라서 $a=\frac{4}{5}$, $b=1$이므로

$b-a=\frac{1}{5}$

답 ①

0731 $\frac{2}{3}x+0.4\ge x-0.6$에서 $\quad 20x+12\ge30x-18$

$-10x\ge-30 \quad \therefore x\le3$

$5x<3(x+3)-1$에서 $\quad 5x<3x+9-1$

$2x<8 \quad \therefore x<4$

따라서 주어진 연립부등식의 해를 수직선 위에 나타내면 ④와 같다.

답 ④

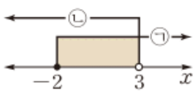
0732 $x+2\le3(x+2)$에서 $\quad x+2\le3x+6$

$-2x\le4 \quad \therefore x\ge-2$ ······ ㉠

$8-x>4(x-3)+5$에서 $\quad 8-x>4x-12+5$

$-5x>-15 \quad \therefore x<3$ ······ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면



$-2\le x<3$ ··· ❶

이때 $-3<-x\le2$이므로

$-1<-x+2\le4$

$\therefore -1<A\le4$ ··· ❷

따라서 A의 최댓값은 4이다. ··· ❸

답 4

채점 기준	비율
❶ 주어진 연립부등식의 해를 구할 수 있다.	50%
❷ A의 값의 범위를 구할 수 있다.	40%
❸ A의 최댓값을 구할 수 있다.	10%

0733 $2(3-x)+8>5x-7$에서 $\quad 6-2x+8>5x-7$

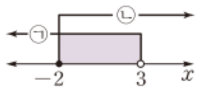
$-7x>-21 \quad \therefore x<3$ ······ ㉠

$\frac{-x-6}{4}\le\frac{2x+1}{3}$에서 $\quad 3(-x-6)\le4(2x+1)$

$-3x-18\le8x+4, \quad -11x\le22$

$\therefore x\ge-2$ ······ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면



$-2\le x<3$

$\therefore a=-2,\ b=3$

이것을 $ax-b<0$에 대입하면

$-2x-3<0, \quad -2x<3 \quad \therefore x>-\frac{3}{2}$

따라서 해가 아닌 것은 ①이다.

답 ①

유형 04 $A<B<C$ 꼴의 부등식의 풀이

본책 111쪽

$A<B<C$ 꼴의 부등식은 연립부등식 $\begin{cases}A<B\\B<C\end{cases}$ 꼴로 고쳐서 푼다.

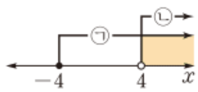
0734 $2x-3\le3x+1$에서 $\quad -x\le4$

$\therefore x\ge-4$ ······ ㉠

$3x+1<5x-7$에서 $\quad -2x<-8$

$\therefore x>4$ ······ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면



$x>4$

답 ④

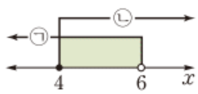
0735 $2(x-1)<x+4$에서 $\quad 2x-2<x+4$

$\therefore x<6$ ······ ㉠

$x+4\le2+3(x-2)$에서 $\quad x+4\le3x-4$

$-2x\le-8 \quad \therefore x\ge4$ ······ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면



$4\le x<6$

따라서 정수 x는 4, 5이므로 구하는 합은

$4+5=9$

답 9

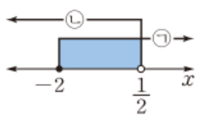
0736 $-3x+4\le10$에서 $\quad -3x\le6$

$\therefore x\ge-2$ ······ ㉠

$10<-2x+11$에서 $\quad 2x<1$

$\therefore x<\frac{1}{2}$ ······ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면



$-2\le x<\frac{1}{2}$

ㄱ. 정수인 해는 $-2,\ -1,\ 0$의 3개이다.

ㄷ. $x=\frac{1}{2}$은 부등식의 해가 아니다.

이상에서 옳은 것은 ㄴ뿐이다. 답 ②

0737 $3x-2<x+6$에서 $2x<8$

$\therefore x<4$ …… ㉠

$\frac{x-1}{3}+\frac{3}{2}\le\frac{3x+7}{2}$에서 $2(x-1)+9\le3(3x+7)$

$2x-2+9\le9x+21,\quad -7x\le14$

$\therefore x\ge-2$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$-2\le x<4$

이므로 $M=3$ ··· ❶

$\therefore a-6<3<\frac{a-1}{2}$

$a-6<3$에서 $a<9$ …… ㉢

$3<\frac{a-1}{2}$에서 $6<a-1\quad\therefore a>7$ …… ㉣

㉢, ㉣의 공통부분을 구하면 $7<a<9$

이때 a는 정수이므로 $a=8$ ··· ❷

답 8

채점 기준	비율
❶ M의 값을 구할 수 있다.	50%
❷ 정수 a의 값을 구할 수 있다.	50%

유형 05 특수한 해를 갖는 연립일차부등식 본책 112쪽

① 연립부등식의 해가 한 개인 경우
➡ 수직선에서 공통부분이 한 점뿐이다.
② 연립부등식의 해가 없는 경우
➡ 수직선에서 공통부분이 없다.

0738 ① $x=11$

② $-2x<-6$에서 $x>3$

따라서 연립부등식의 해는 $x>3$

③ $5x-12<8$에서 $x<4$

따라서 연립부등식의 해는 $x<4$

④ $0.5(x+6)\ge1.5$에서

$x+6\ge3\quad\therefore x\ge-3$

따라서 연립부등식의 해는 $x=-3$

⑤ $7x-1<x-3$에서 $x<-\frac{1}{3}$

$\frac{1}{3}x-\frac{1}{2}\ge\frac{x-5}{12}$에서 $4x-6\ge x-5$

$3x\ge1\quad\therefore x\ge\frac{1}{3}$

따라서 해가 없다. 답 ⑤

0739 $\frac{5}{3}x-1\le x+\frac{7}{3}$에서 $5x-3\le3x+7$

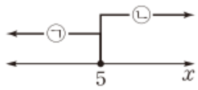
$2x\le10\quad\therefore x\le5$ …… ㉠

$0.3(x-2)\ge0.2x-0.1$에서 $3(x-2)\ge2x-1$

$3x-6\ge2x-1\quad\therefore x\ge5$ …… ㉡

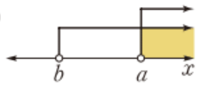
㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$x=5$

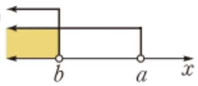


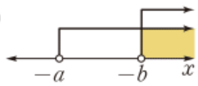
답 $x=5$

0740 $a>b$이므로 $-a<-b$

①  $\therefore x>a$

②  $\therefore$ 해는 없다.

③  $\therefore x<b$

④  $\therefore x>-b$

⑤  $\therefore$ 해는 없다.

답 ⑤

유형 06 연립일차부등식의 해가 주어진 경우 본책 112쪽

각 일차부등식을 풀어 연립부등식의 해가 주어진 해가 되기 위한 조건을 생각한다.

0741 $6x-1\le2x+a$에서 $4x\le a+1\quad\therefore x\le\frac{a+1}{4}$

$x-3<2x+1$에서 $-x<4\quad\therefore x>-4$

주어진 연립부등식의 해가 $b<x\le3$이므로

$\frac{a+1}{4}=3,\ b=-4\quad\therefore a=11,\ b=-4$

$\therefore a+b=7$ 답 ②

0742 $x+2a>0$에서 $x>-2a$

$3x-b\ge0$에서 $x\ge\frac{b}{3}$

주어진 그림에서 $x>-2,\ x\ge1$이므로

$-2a=-2,\ \frac{b}{3}=1\quad\therefore a=1,\ b=3$

$\therefore ab=3$ 답 ⑤

0743 $\frac{5x+a}{2}\le\frac{x}{4}+2$에서

$2(5x+a)\le x+8,\quad 10x+2a\le x+8$

$9x\le-2a+8\quad\therefore x\le\frac{-2a+8}{9}$

$\frac{x}{2}-\frac{3x+1}{6}\ge\frac{x-2}{3}$에서

$3x-(3x+1)\ge2(x-2),\quad 3x-3x-1\ge2x-4$

$-2x\ge-3\quad\therefore x\le\frac{3}{2}$

주어진 연립부등식의 해가 $x\le-\frac{1}{3}$이므로

$\frac{-2a+8}{9}=-\frac{1}{3}$, $\quad -2a+8=-3$

$-2a=-11 \qquad \therefore a=\frac{11}{2}$

답 $\frac{11}{2}$

0744 $-x+7\ge 2x+a$에서 $\quad -3x\ge a-7$

$\therefore x\le\frac{7-a}{3}$

$3(x-1)\le 5x+b$에서 $\quad 3x-3\le 5x+b$

$-2x\le b+3 \qquad \therefore x\ge-\frac{b+3}{2}$

주어진 연립부등식의 해가 $x=-1$이므로

$\frac{7-a}{3}=-1$, $-\frac{b+3}{2}=-1$

$7-a=-3$, $b+3=2 \qquad \therefore a=10$, $b=-1$

$\therefore a-b=11$

답 ③

0745 $2x+a\le -x+5$에서 $\quad 3x\le 5-a$

$\therefore x\le\frac{5-a}{3}$

$-x+5\le b(x+3)$에서 $\quad -x+5\le bx+3b$

$(-1-b)x\le 3b-5$

이때 $-1-b<0$이므로 $\quad x\ge\frac{3b-5}{-1-b}$

주어진 부등식의 해가 $-1\le x\le 2$이므로

$\frac{5-a}{3}=2$, $\frac{3b-5}{-1-b}=-1$

$5-a=6$, $3b-5=1+b$

$\therefore a=-1$, $b=3$

답 $a=-1$, $b=3$

참고 $(-1-b)x\le 3b-5$에서

$-1-b>0$이면 $\quad x\le\frac{3b-5}{-1-b}$

$-1-b=0$이면 $\quad 0\cdot x\le -8$

이므로 주어진 부등식의 해가 $-1\le x\le 2$가 될 수 없다.

유형 07 연립일차부등식이 해를 갖거나 갖지 않는 경우 본책 113쪽

연립부등식에서 각각의 부등식의 해를 구한 후 이를 주어진 해의 조건에 맞게 수직선 위에 나타낸다.

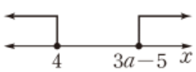
① 연립부등식의 해가 없는 경우
➡ 공통부분이 없도록 해를 수직선 위에 나타낸다.

② 연립부등식이 해를 갖는 경우
➡ 공통부분이 있도록 해를 수직선 위에 나타낸다.

0746 $4x-3\le 13$에서 $\quad 4x\le 16 \quad \therefore x\le 4$

$x+5\ge 3a$에서 $\quad x\ge 3a-5$

주어진 연립부등식이 해를 갖지 않으려면 오른쪽 그림에서



$3a-5>4$, $\quad 3a>9$

$\therefore a>3$

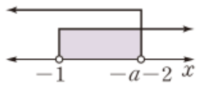
답 ④

0747 $\frac{8x+5}{3}<3x+2$에서 $\quad 8x+5<9x+6$

$-x<1 \qquad \therefore x>-1$

$3x+2<2x-a$에서 $\quad x<-a-2$

주어진 부등식이 해를 가지려면 오른쪽 그림에서



$-a-2>-1$, $\quad -a>1$

$\therefore a<-1$

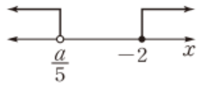
답 ②

0748 $a+5x<2a$에서 $\quad 5x<a \qquad \therefore x<\frac{a}{5}$

$2(x-1)\ge -6$에서 $\quad x-1\ge -3$

$\therefore x\ge -2$ ··· ❶

주어진 연립부등식이 해를 갖지 않으려면 오른쪽 그림에서



$\frac{a}{5}\le -2 \qquad \therefore a\le -10$ ··· ❷

따라서 정수 a의 최댓값은 -10이다. ··· ❸

답 -10

채점 기준	비율
❶ 각 일차부등식의 해를 구할 수 있다.	40%
❷ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	50%
❸ 정수 a의 최댓값을 구할 수 있다.	10%

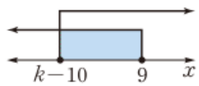
0749 $0.3x-1.7\le 1$에서 $\quad 3x-17\le 10$

$3x\le 27 \qquad \therefore x\le 9$

$2(x-5)\le 3x-k$에서 $\quad 2x-10\le 3x-k$

$-x\le -k+10 \qquad \therefore x\ge k-10$

주어진 연립부등식이 해를 가지려면 오른쪽 그림에서



$k-10\le 9 \qquad \therefore k\le 19$

답 $k\le 19$

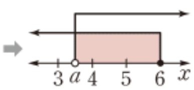
유형 08 연립일차부등식의 정수인 해의 개수가 주어진 경우 본책 114쪽

연립부등식의 정수인 해가 n개이면

(i) 각 부등식의 해를 수직선 위에 나타낸다.

(ii) 공통부분이 n개의 정수를 포함하도록 하는 미지수의 값의 범위를 구한다.

예 연립부등식 $\begin{cases} x\le 6 \\ x>a \end{cases}$의 정수인 해가 3개이다.

➡ 

➡ $3\le a<4$

$a=3$이면 정수인 해는 4, 5, 6의 3개
$a=4$이면 정수인 해는 5, 6의 2개

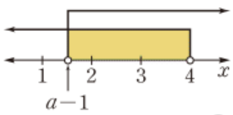
0750 $0.4(x+1)>x-2$에서 $\quad 4(x+1)>10(x-2)$

$4x+4>10x-20$, $\quad -6x>-24 \qquad \therefore x<4$

$2x+a<3x+1$에서 $\quad -x<-a+1 \qquad \therefore x>a-1$

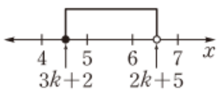
주어진 연립부등식을 만족시키는 정수 x가 2개이므로 오른쪽 그림에서

$1 \le a-1 < 2 \qquad \therefore 2 \le a < 3$



답 ④

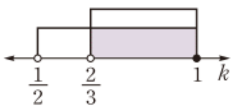
0751 주어진 부등식을 만족시키는 정수 x가 5와 6뿐이려면



$4 < 3k+2 \le 5,\ 6 < 2k+5 \le 7$

을 동시에 만족시켜야 한다.

즉 $\frac{2}{3} < k \le 1$, $\frac{1}{2} < k \le 1$이므로 오른쪽 그림에서



$\frac{2}{3} < k \le 1$

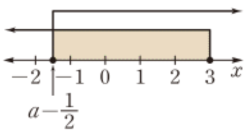
답 ③

0752 $\frac{x}{2} - \frac{a}{4} \ge \frac{x}{4} - \frac{1}{8}$에서 $\quad 4x-2a \ge 2x-1$

$2x \ge 2a-1 \qquad \therefore x \ge a - \frac{1}{2}$

$3x-1 \ge 5x-7$에서 $\quad -2x \ge -6 \qquad \therefore x \le 3$

주어진 연립부등식을 만족시키는 음의 정수 x가 1개뿐이므로 오른쪽 그림에서



$-2 < a - \frac{1}{2} \le -1$

$\therefore -\frac{3}{2} < a \le -\frac{1}{2}$

답 ③

유형 09 연립일차부등식의 활용

본책 114쪽

(i) 문제의 뜻을 이해하고 구하려는 것을 x로 놓는다.
(ii) 연립부등식을 세운다.
(iii) 연립부등식을 풀어 문제의 답을 구한다.

0753 빵 A의 개수를 x라 하면 빵 B의 개수는 $10-x$이므로

$$\begin{cases} 80x+100(10-x) \le 900 \\ 30x+25(10-x) \le 285 \end{cases}$$

$80x+100(10-x) \le 900$에서

$-20x+1000 \le 900, \qquad -20x \le -100$

$\therefore x \ge 5$ …… ㉠

$30x+25(10-x) \le 285$에서

$5x+250 \le 285, \qquad 5x \le 35$

$\therefore x \le 7$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$5 \le x \le 7$

따라서 빵 A는 최대 7개까지 만들 수 있다. 답 ④

0754 초콜릿을 x개 산다고 하면 사탕은 $(14-x)$개 살 수 있으므로

$9400 \le 600(14-x)+800x \le 10000$

$9400 \le 8400+200x \le 10000, \qquad 1000 \le 200x \le 1600$

$\therefore 5 \le x \le 8$

따라서 초콜릿은 5개 이상 8개 이하 살 수 있다. 답 ③

0755 책의 전체 쪽수를 x라 하면

$$\begin{cases} \frac{x}{6} \ge 25 \\ 9 \cdot 10 > x - 9 \cdot 10 \end{cases}$$

$\frac{x}{6} \ge 25$에서 $\quad x \ge 150$ …… ㉠

$9 \cdot 10 > x - 9 \cdot 10$에서 $\quad x < 180$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$150 \le x < 180$

따라서 이 책은 150쪽 이상 180쪽 미만이다.

답 150쪽 이상 180쪽 미만

0756 농도가 30 %인 소금물 300 g에 들어 있는 소금의 양은

$\frac{30}{100} \cdot 300 = 90(\text{g})$

농도가 10 %인 소금물을 x g 섞는다고 하면

$\frac{15}{100} \times (300+x) \le 90 + \frac{10}{100} \times x \le \frac{18}{100} \times (300+x)$ ··· ❶

이 식의 양변에 100을 곱하면

$15(300+x) \le 9000+10x \le 18(300+x)$

$15(300+x) \le 9000+10x$에서

$4500+15x \le 9000+10x, \qquad 5x \le 4500$

$\therefore x \le 900$ …… ㉠

$9000+10x \le 18(300+x)$에서

$9000+10x \le 5400+18x, \qquad -8x \le -3600$

$\therefore x \ge 450$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$450 \le x \le 900$ ··· ❷

따라서 농도가 10 %인 소금물을 450 g 이상 900 g 이하로 섞어야 한다. ··· ❸

답 450 g 이상 900 g 이하

채점 기준	비율
❶ 부등식을 세울 수 있다.	40%
❷ 부등식의 해를 구할 수 있다.	40%
❸ 농도가 10%인 소금물의 양의 범위를 구할 수 있다.	20%

0757 의자의 개수를 x라 하면 학생은 $(4x+10)$명이므로

$5(x-8)+1 \le 4x+10 \le 5(x-8)+5$

$5(x-8)+1 \le 4x+10$에서

$5x-39 \le 4x+10 \qquad \therefore x \le 49$ …… ㉠

$4x+10 \le 5(x-8)+5$에서

$4x+10 \le 5x-35 \qquad \therefore x \ge 45$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$45 \le x \le 49$

따라서 의자의 개수가 될 수 있는 것은 ②이다. 답 ②

과부족에 대한 문제 (SSEN 특강)

한 의자에 a명씩 앉으면 n개의 의자가 남는다.

➡ 의자의 개수를 x라 하면

(i) 빈 의자의 개수: n

(ii) a명씩 앉은 의자의 개수: $x-(n+1)$

(iii) 마지막 1개의 의자에는 최소 1명에서 최대 a명까지 앉을 수 있다.

➡ $\begin{cases} \text{최소 인원: } a\{x-(n+1)\}+1(\text{명}) \\ \text{최대 인원: } a\{x-(n+1)\}+a(\text{명}) \end{cases}$

유형 10 $|ax+b|<c$, $|ax+b|>c$ 꼴의 부등식

본책 115쪽

양수 c에 대하여

① $|ax+b|<c$ ➡ $-c<ax+b<c$

② $|ax+b|>c$ ➡ $ax+b<-c$ 또는 $ax+b>c$

0758 $|8-3x|>11$에서

$8-3x<-11$ 또는 $8-3x>11$

$\therefore x>\frac{19}{3}$ 또는 $x<-1$

따라서 10 이하의 자연수 x는 7, 8, 9, 10의 4개이다. 답 4

0759 $|x-a|\le 2$에서 $-2\le x-a\le 2$

$\therefore a-2\le x\le a+2$

주어진 부등식의 해가 $-1\le x\le b$이므로

$a-2=-1$, $a+2=b$

따라서 $a=1$, $b=3$이므로 $ab=3$ 답 ⑤

0760 $|ax+3|>b$의 해가 $x<1$ 또는 $x>4$이므로 $b>0$

$|ax+3|>b$에서 $ax+3<-b$ 또는 $ax+3>b$

(i) $ax+3<-b$에서 $ax<-b-3$

이때 $a<0$이므로 $x>\frac{-b-3}{a}$

(ii) $ax+3>b$에서 $ax>b-3$

이때 $a<0$이므로 $x<\frac{b-3}{a}$

(i), (ii)에서 부등식의 해는

$x>\frac{-b-3}{a}$ 또는 $x<\frac{b-3}{a}$ ··· ❶

그런데 주어진 부등식의 해가 $x<1$ 또는 $x>4$이므로

$\frac{b-3}{a}=1$, $\frac{-b-3}{a}=4$

$a-b=-3$, $4a+b=-3$

두 식을 연립하여 풀면

$a=-\frac{6}{5}$, $b=\frac{9}{5}$ ··· ❷

$\therefore a+b=\frac{3}{5}$ ··· ❸

답 $\frac{3}{5}$

채점 기준	비율
❶ 부등식 $\lvert ax+3\rvert>b$의 해를 구할 수 있다.	40%
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	20%

유형 11 $|ax+b|<cx+d$ 꼴의 부등식

본책 115쪽

$|ax+b|<cx+d$ 꼴의 부등식은 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 x의 값인 $-\frac{b}{a}$를 경계로 하여 x의 값의 범위를

$x<-\frac{b}{a}$, $x\ge -\frac{b}{a}$

로 나누어 푼다.

0761 $|3x-1|-5\le x$, 즉 $|3x-1|\le x+5$에서

(i) $x<\frac{1}{3}$일 때, $3x-1<0$이므로

$-(3x-1)\le x+5$, $-4x\le 4$ $\therefore x\ge -1$

그런데 $x<\frac{1}{3}$이므로 $-1\le x<\frac{1}{3}$

(ii) $x\ge\frac{1}{3}$일 때, $3x-1\ge 0$이므로

$3x-1\le x+5$, $2x\le 6$ $\therefore x\le 3$

그런데 $x\ge\frac{1}{3}$이므로 $\frac{1}{3}\le x\le 3$

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는 $-1\le x\le 3$

따라서 $a=-1$, $b=3$이므로 $a-b=-4$ 답 ①

0762 $|3-x|\le 10-x$에서

(i) $x<3$일 때, $3-x>0$이므로

$3-x\le 10-x$ $\therefore 0\cdot x\le 7$

따라서 해는 모든 실수이다.

그런데 $x<3$이므로 $x<3$

(ii) $x\ge 3$일 때, $3-x\le 0$이므로

$-(3-x)\le 10-x$, $2x\le 13$ $\therefore x\le\frac{13}{2}$

그런데 $x\ge 3$이므로 $3\le x\le\frac{13}{2}$

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는 $x\le\frac{13}{2}$

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 자연수 x는 1, 2, 3, 4, 5, 6의 6개이다. 답 ④

0763 $|x-1|<2x-3$에서

(i) $x<1$일 때, $x-1<0$이므로

$-(x-1)<2x-3$, $-3x<-4$ $\therefore x>\frac{4}{3}$

그런데 $x<1$이므로 해는 없다.

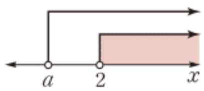
(ii) $x\ge 1$일 때, $x-1\ge 0$이므로

$x-1<2x-3$, $-x<-2$ $\therefore x>2$

그런데 $x\ge 1$이므로 $x>2$

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는 $x>2$

따라서 $x>2$가 $x>a$에 포함되려면 오른쪽 그림에서



$a\le 2$

답 $a\le 2$

유형 12 절댓값 기호가 두 개인 부등식 본책 116쪽

일차식 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $f(a)=0$, $g(b)=0$ $(a<b)$일 때, 부등식 $|f(x)|+|g(x)|<c$ $(c>0)$의 해는 x의 값의 범위를

$x<a$, $a\le x<b$, $x\ge b$

로 나누어 푼다.

0764 $|x|+|x-3|\ge 5$에서

(i) $x<0$일 때

$-x-(x-3)\ge 5,\qquad -x-x+3\ge 5$

$-2x\ge 2\qquad \therefore x\le -1$

그런데 $x<0$이므로 $\quad x\le -1$

(ii) $0\le x<3$일 때

$x-(x-3)\ge 5,\qquad x-x+3\ge 5\qquad \therefore 0\cdot x\ge 2$

따라서 해는 없다.

(iii) $x\ge 3$일 때

$x+(x-3)\ge 5,\qquad 2x\ge 8\qquad \therefore x\ge 4$

그런데 $x\ge 3$이므로 $\quad x\ge 4$

이상에서 주어진 부등식의 해는

$x\le -1$ 또는 $x\ge 4$

따라서 $a=-1$, $b=4$이므로 $\quad a+b=3$

답 3

0765 $4|x+1|-|4x-3|\le -7$에서

(i) $x<-1$일 때

$-4(x+1)+(4x-3)\le -7,\qquad -4x-4+4x-3\le -7$

$\therefore 0\cdot x\le 0$

따라서 해는 모든 실수이다.

그런데 $x<-1$이므로 $\quad x<-1$

(ii) $-1\le x<\frac{3}{4}$일 때

$4(x+1)+(4x-3)\le -7,\qquad 4x+4+4x-3\le -7$

$8x\le -8\qquad \therefore x\le -1$

그런데 $-1\le x<\frac{3}{4}$이므로 $\quad x=-1$

(iii) $x\ge \frac{3}{4}$일 때

$4(x+1)-(4x-3)\le -7,\qquad 4x+4-4x+3\le -7$

$\therefore 0\cdot x\le -14$

따라서 해는 없다.

이상에서 주어진 부등식의 해는 $\quad x\le -1$

부등식 $5x+k\le 1$에서 $\quad 5x\le 1-k\qquad \therefore x\le \frac{1-k}{5}$

따라서 $\frac{1-k}{5}=-1$이므로 $\quad 1-k=-5$

$\therefore k=6$

답 ③

0766 $\sqrt{x^2-4x+4}=\sqrt{(x-2)^2}=|x-2|$이므로 주어진 부등식은

$|x+1|+|x-2|<x+2$

(i) $x<-1$일 때

$-(x+1)-(x-2)<x+2$

$-x-1-x+2<x+2$

$-3x<1\qquad \therefore x>-\frac{1}{3}$

그런데 $x<-1$이므로 해는 없다.

(ii) $-1\le x<2$일 때

$x+1-(x-2)<x+2,\qquad x+1-x+2<x+2$

$\therefore x>1$

그런데 $-1\le x<2$이므로 $\quad 1<x<2$

(iii) $x\ge 2$일 때

$(x+1)+(x-2)<x+2\qquad \therefore x<3$

그런데 $x\ge 2$이므로 $\quad 2\le x<3$

이상에서 주어진 부등식의 해는

$1<x<3$

답 ③

0767 $||x-1|-2|\le 3$에서 $\quad -3\le |x-1|-2\le 3$

$\therefore -1\le |x-1|\le 5$ ··· ❶

그런데 $|x-1|\ge 0$이므로 $\quad 0\le |x-1|\le 5$

$-5\le x-1\le 5\qquad \therefore -4\le x\le 6$ ··· ❷

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 정수 x는

$-4,\ -3,\ \cdots,\ 5,\ 6$

의 11개이다. ··· ❸

답 11

채점 기준	비율
❶ 주어진 부등식에서 $\lvert x-1\rvert$의 값의 범위를 구할 수 있다.	40%
❷ 부등식의 해를 구할 수 있다.	40%
❸ 부등식을 만족시키는 정수 x의 개수를 구할 수 있다.	20%

다른 풀이 (i) $x<1$일 때, $x-1<0$이므로

$|-(x-1)-2|\le 3,\qquad |-x-1|\le 3$

$-3\le -x-1\le 3,\qquad -2\le -x\le 4$

$\therefore -4\le x\le 2$

그런데 $x<1$이므로 $\quad -4\le x<1$

(ii) $x\ge 1$일 때, $x-1\ge 0$이므로

$|(x-1)-2|\le 3,\qquad |x-3|\le 3$

$-3\le x-3\le 3\qquad \therefore 0\le x\le 6$

그런데 $x\ge 1$이므로 $\quad 1\le x\le 6$

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는 $\quad -4\le x\le 6$

유형 13 절댓값 기호를 포함한 부등식의 해가 없거나 무수히 많은 경우 본책 116쪽

① $|ax+b|<c$의 해가 없다. ➡ $c\le 0$

② $|ax+b|\le c$의 해가 없다. ➡ $c<0$

③ $|ax+b|>c$의 해가 모든 실수이다. ➡ $c<0$

④ $|ax+b|\ge c$의 해가 모든 실수이다. ➡ $c\le 0$

0768 $|2x-3|+1>a$에서 $\quad |2x-3|>a-1$

이 부등식의 해가 모든 실수이려면

$a-1<0 \qquad \therefore a<1$

답 ④

0769 주어진 부등식의 해가 존재하지 않으려면

$\frac{1}{2}a+1<0, \qquad \frac{1}{2}a<-1 \qquad \therefore a<-2$

따라서 정수 a의 최댓값은 -3이다.

답 ③

0770 $\left|\frac{1}{3}x+2\right|+k\le 0$에서 $\qquad \left|\frac{1}{3}x+2\right|\le -k$

이 부등식의 해가 존재하려면

$-k\ge 0 \qquad \therefore k\le 0$

답 ④

0771 전략 부등식의 기본 성질을 이용한다.

풀이 ㄱ. 부등식 $\frac{1}{a}<1<\frac{1}{b}$에서 $a>0$, $b>0$이므로

$\frac{1}{a}<1$의 양변에 a를 곱하면 $\qquad 1<a$

$1<\frac{1}{b}$의 양변에 b를 곱하면 $\qquad b<1$

그런데 $b>0$이므로 $\qquad 0<b<1$

ㄴ. ㄱ에서 $a>b$이고, $ab>0$이므로 $a>b$의 양변에 ab를 곱하면

$a^2b>ab^2$

ㄷ. $(ab+1)-(a+b)=ab-a-b+1$

$=a(b-1)-(b-1)$

$=(a-1)(b-1)$

그런데 $a>1$, $0<b<1$이므로 $\qquad a-1>0$, $b-1<0$

따라서 $(a-1)(b-1)<0$이므로

$(ab+1)-(a+b)<0 \qquad \therefore ab+1<a+b$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

0772 전략 $A\le B\le C$ 꼴의 부등식의 해는 두 부등식 $A\le B$, $B\le C$의 해의 공통부분이다.

풀이 $\begin{cases} m\le 2n\le 40 & \cdots\cdots ㉠ \\ n\le 2m\le 20 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $2n\le 40$이므로 $\qquad n\le 20$

㉡에서 $2m\le 20$이므로 $\qquad m\le 10$

또 ㉠에서 $m\le 2n$이고, ㉡에서 $n\le 2m$, 즉 $2n\le 4m$이므로

$m\le 2n\le 4m \qquad \therefore \frac{m}{2}\le n\le 2m \qquad \cdots\cdots ㉢$

(i) $m=2k$($k=1$, 2, 3, 4, 5)일 때

㉢에서 $\qquad k\le n\le 4k$

이를 만족시키는 자연수 n의 개수는

$4k-k+1=3k+1$

따라서 $k=1$, 2, 3, 4, 5, 즉 $m=2$, 4, 6, 8, 10일 때, 주어진 조건을 만족시키는 자연수 n의 개수는 각각 4, 7, 10, 13, 16이므로 순서쌍 (m, n)의 개수는

$4+7+10+13+16=50$

(ii) $m=2k-1$($k=1$, 2, 3, 4, 5)일 때

㉢에서 $\qquad \frac{2k-1}{2}\le n\le 2(2k-1)$

$\therefore k-\frac{1}{2}\le n\le 4k-2$

이를 만족시키는 자연수 n의 개수는

$(4k-2)-k+1=3k-1$

따라서 $k=1$, 2, 3, 4, 5, 즉 $m=1$, 3, 5, 7, 9일 때, 주어진 조건을 만족시키는 자연수 n의 개수는 각각 2, 5, 8, 11, 14이므로 순서쌍 (m, n)의 개수는

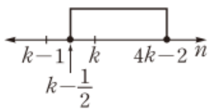
$2+5+8+11+14=40$

(i), (ii)에서 구하는 순서쌍 (m, n)의 개수는

$50+40=90$

답 90

참고 (ii)에서 부등식 $k-\frac{1}{2}\le n\le 4k-2$를 만족시키는 자연수 n은 오른쪽 그림과 같이 부등식



$k\le n\le 4k-2$

를 만족시키는 자연수 n과 같으므로 그 개수는

$4k-2-k+1=3k-1$

0773 전략 부등식 $ax+b<0$에서 $a>0$이면 $x<-\frac{b}{a}$, $a<0$이면 $x>-\frac{b}{a}$임을 이용한다.

풀이 $ax+b<0$에서 $\qquad ax<-b$

이 부등식의 해가 $x<5$이므로

$a>0$, $-\frac{b}{a}=5 \qquad \therefore \frac{b}{a}=-5$

$cx+d\ge 0$에서 $\qquad cx\ge -d$

이 부등식의 해가 $x\ge -3$이므로

$c>0$, $-\frac{d}{c}=-3 \qquad \therefore \frac{d}{c}=3$

$ax-b<0$에서 $\qquad x<\frac{b}{a} \qquad \therefore x<-5$

$cx-d\ge 0$에서 $\qquad x\ge\frac{d}{c} \qquad \therefore x\ge 3$

따라서 연립부등식 $\begin{cases} ax-b<0 \\ cx-d\ge 0 \end{cases}$의 해는 없다.

답 ⑤

0774 전략 연립부등식의 해는 각 부등식의 해의 공통부분임을 이용한다.

풀이 연립부등식 $\begin{cases} ax+2\le -x-2a \\ bx+10<2ax+5b \end{cases}$의 해가 $x<\frac{5}{3}$이므로 각 부등식의 해의 공통부분이 $x<\frac{5}{3}$이다.

$ax+2\le -x-2a$에서

$(a+1)x\le -2(a+1) \qquad \cdots\cdots ㉠$

(i) $a>-1$일 때, $a+1>0$이므로 부등식 ㉠의 해는 $x\le -2$이고 이때 연립부등식의 해는 $x<\frac{5}{3}$가 될 수 없다.

(ii) $a=-1$일 때, $0\cdot x\le 0$이므로 부등식 ㉠의 해는 모든 실수이고 이때 연립부등식의 해는 $x<\frac{5}{3}$가 될 수 있다.

(iii) $a<-1$일 때, $a+1<0$이므로 부등식 ㉠의 해는 $x\geq-2$이고 이 때 연립부등식의 해는 $x<\frac{5}{3}$가 될 수 없다.

(i), (ii), (iii)에서 $\quad a=-1$

$a=-1$을 $bx+10<2ax+5b$에 대입하면

$\quad bx+10<-2x+5b \qquad \therefore (b+2)x<5b-10$

이 부등식의 해가 $x<\frac{5}{3}$이어야 하므로 $\quad b+2>0$

$\quad \therefore x<\frac{5b-10}{b+2}$

따라서 $\frac{5b-10}{b+2}=\frac{5}{3}$이므로 $\quad 15b-30=5b+10$

$\quad 10b=40 \qquad \therefore b=4$

$\quad \therefore a+b=3$

답 3

0775 전략 부등식의 해를 수직선 위에 나타내어 정수 x가 3개가 되도록 하는 a의 값의 범위를 구한다.

풀이 $\frac{x-a}{2}\leq\frac{5-x}{3}$에서 $\quad 3(x-a)\leq2(5-x)$

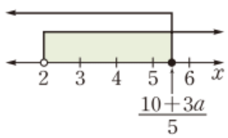
$\quad 3x-3a\leq10-2x, \qquad 5x\leq10+3a$

$\quad \therefore x\leq\frac{10+3a}{5}$

$\frac{5-x}{3}<2x-3$에서 $\quad 5-x<6x-9$

$\quad -7x<-14 \qquad \therefore x>2$

주어진 부등식을 만족시키는 정수 x가 3개이므로 오른쪽 그림에서



$\quad 5\leq\frac{10+3a}{5}<6$

$\quad 25\leq10+3a<30, \qquad 15\leq3a<20$

$\quad \therefore 5\leq a<\frac{20}{3}$

따라서 a의 최솟값은 5이다.

답 5

0776 전략 정수 n에 대하여 $n-0.5\leq x<n+0.5$일 때 $f(x)=n$임을 이용한다. (단, $x>0$)

풀이 $3<f\left(\frac{x}{2}-1\right)<6$에서

$\quad f\left(\frac{x}{2}-1\right)=4$ 또는 $f\left(\frac{x}{2}-1\right)=5$

즉 $4-0.5\leq\frac{x}{2}-1<5+0.5$이어야 하므로

$\quad 3.5\leq\frac{x}{2}-1<5.5, \qquad 7\leq x-2<11$

$\quad \therefore 9\leq x<13$

답 $9\leq x<13$

0777 전략 피자 조각의 개수를 학생 수로 나타낸다.

풀이 학생 수를 x라 하면 피자 조각의 개수는 $3(x-5)$이므로

$\quad 2x+1\leq3(x-5)\leq2x+6$

$2x+1\leq3(x-5)$에서 $\qquad 2x+1\leq3x-15$

$\quad \therefore x\geq16 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$3(x-5)\leq2x+6$에서 $\qquad 3x-15\leq2x+6$

$\quad \therefore x\leq21 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$\quad 16\leq x\leq21$

이때 x는 자연수이고, $3(x-5)$가 6의 배수이어야 하므로
한 판이 6조각

$\quad x=17,\ 19,\ 21$

따라서 최소 학생 수는 17이다.

답 ②

0778 전략 $|x-k|<k^2$의 해를 구하여 $-6<x<12$와 비교한다.

풀이 $|x-k|<k^2$에서

$\quad -k^2<x-k<k^2 \qquad \therefore -k^2+k<x<k^2+k$

부등식의 해가 $-6<x<12$이므로

$\quad -k^2+k=-6,\ k^2+k=12$

(i) $-k^2+k=-6$에서 $\qquad k^2-k-6=0$

$\qquad (k+2)(k-3)=0 \qquad \therefore k=-2$ 또는 $k=3$

(ii) $k^2+k=12$에서 $\qquad k^2+k-12=0$

$\qquad (k+4)(k-3)=0 \qquad \therefore k=-4$ 또는 $k=3$

(i), (ii)에서 $k=3$이므로 $|x-1|<k$에서

$\quad |x-1|<3, \qquad -3<x-1<3$

$\quad \therefore -2<x<4$

따라서 정수 x는 $-1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3$이므로 구하는 합은

$\quad (-1)+0+1+2+3=5$

답 ①

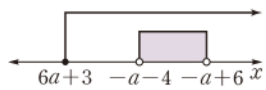
0779 전략 연립부등식의 해는 각 부등식의 해의 공통부분임을 이용한다.

풀이 ㉠에서 $\qquad x\geq6a+3$

㉡에서 $\qquad -5<x+a-1<5$

$\quad \therefore -a-4<x<-a+6$

주어진 연립부등식의 해가 부등식 ㉡의 해와 같으려면 오른쪽 그림에서



$\quad 6a+3\leq-a-4$

$\quad 7a\leq-7 \qquad \therefore a\leq-1$

답 $a\leq-1$

0780 전략 부등식 $ax<b$에서 $a>0$이면 $x<\frac{b}{a}$, $a<0$이면 $x>\frac{b}{a}$임을 이용한다.

풀이 $|5-3x|<x+1$에서

$x<\frac{5}{3}$일 때, $5-3x>0$이므로

$\quad 5-3x<x+1, \qquad -4x<-4 \qquad \therefore x>1$

그런데 $x<\frac{5}{3}$이므로 $\qquad 1<x<\frac{5}{3} \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$x\geq\frac{5}{3}$일 때, $5-3x\leq0$이므로

$\quad -(5-3x)<x+1, \qquad 2x<6 \qquad \therefore x<3$

그런데 $x\geq\frac{5}{3}$이므로 $\qquad \frac{5}{3}\leq x<3 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $|5-3x|<x+1$의 해는

$\quad 1<x<3$

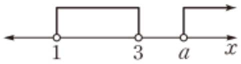
$a(x+3)>a^2+3x$에서 $\qquad ax+3a>a^2+3x$

$\quad \therefore (a-3)x>a(a-3) \qquad \cdots\cdots$ ㉢

(ⅰ) $a>3$일 때, $a-3>0$이므로 ㉢에서

$x>a$

주어진 연립부등식의 해가 없으려면 오른쪽 그림에서



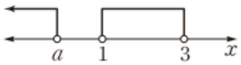
$a\ge3$

그런데 $a>3$이므로 $\quad a>3$

(ⅱ) $a<3$일 때, $a-3<0$이므로 ㉢에서

$x<a$

주어진 연립부등식의 해가 없으려면 오른쪽 그림에서



$a\le1$

그런데 $a<3$이므로 $\quad a\le1$

(ⅲ) $a=3$일 때, ㉢에서 $0\cdot x>0$이므로 해는 없다.

따라서 주어진 연립부등식의 해는 없다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 $\quad a\le1$ 또는 $a\ge3$

답 $a\le1$ 또는 $a\ge3$

0781 전략 $\sqrt{(a-b)^2}=|a-b|$임을 이용한다.

풀이 $\sqrt{x^2-2x+1}=\sqrt{(x-1)^2}=|x-1|$

이므로 주어진 부등식은 $\quad ||x+2|+|x-1||\le4$

$\therefore 0\le|x+2|+|x-1|\le4$

(ⅰ) $x<-2$일 때

$0\le-(x+2)-(x-1)\le4,\quad 0\le-2x-1\le4$

$1\le-2x\le5 \quad \therefore -\frac{5}{2}\le x\le-\frac{1}{2}$

그런데 $x<-2$이므로 $\quad -\frac{5}{2}\le x<-2$

(ⅱ) $-2\le x<1$일 때

$0\le x+2-(x-1)\le4 \quad \therefore 0\le0\cdot x+3\le4$

즉 해는 모든 실수이다.

그런데 $-2\le x<1$이므로 $\quad -2\le x<1$

(ⅲ) $x\ge1$일 때

$0\le x+2+x-1\le4,\quad 0\le2x+1\le4$

$-1\le2x\le3 \quad \therefore -\frac{1}{2}\le x\le\frac{3}{2}$

그런데 $x\ge1$이므로 $\quad 1\le x\le\frac{3}{2}$

이상에서 주어진 부등식의 해는

$-\frac{5}{2}\le x\le\frac{3}{2}$

따라서 $a=-\frac{5}{2}$, $b=\frac{3}{2}$이므로

$a+b=-1$

답 ②

참고 $||x+2|+|x-1||\le4$에서

$-4\le|x+2|+|x-1|\le4$

그런데 $|x+2|\ge0$, $|x-1|\ge0$이므로

$|x+2|+|x-1|\ge0$

$\therefore 0\le|x+2|+|x-1|\le4$

0782 전략 $|x-1|+2|x+1|$의 최솟값을 구한다.

풀이 (ⅰ) $x<-1$일 때

$|x-1|+2|x+1|=-(x-1)-2(x+1)=-3x-1$

그런데 $x<-1$이므로 $\quad -3x>3 \quad \therefore -3x-1>2$

(ⅱ) $-1\le x<1$일 때

$|x-1|+2|x+1|=-(x-1)+2(x+1)=x+3$

그런데 $-1\le x<1$이므로 $\quad 2\le x+3<4$

(ⅲ) $x\ge1$일 때

$|x-1|+2|x+1|=x-1+2(x+1)=3x+1$

그런데 $x\ge1$이므로 $\quad 3x\ge3 \quad \therefore 3x+1\ge4$

이상에서 $|x-1|+2|x+1|\ge2$이므로 $\quad k\ge2$

따라서 k의 최솟값은 2이다.

답 ③

0783 전략 부등식 $ax<b$에서 $a>0$이면 $x<\frac{b}{a}$, $a<0$이면 $x>\frac{b}{a}$임을 이용한다.

풀이 부등식 $(a+b)x<a$의 해가 $x>\frac{1}{3}$이므로

$a+b<0 \quad \cdots\cdots$ ㉠ $\quad$ ⋯❶

$\therefore x>\frac{a}{a+b}$

따라서 $\frac{a}{a+b}=\frac{1}{3}$이므로

$3a=a+b \quad \therefore b=2a \quad \cdots\cdots$ ㉡ $\quad$ ⋯❷

㉡을 ㉠에 대입하면

$a+2a<0,\quad 3a<0 \quad \therefore a<0$ $\quad$ ⋯❸

㉡을 부등식 $ax+a>bx-2b$에 대입하면

$ax+a>2ax-4a,\quad ax<5a$

$\therefore x>5$ ($\because a<0$) $\quad$ ⋯❹

답 $x>5$

채점 기준	비율
❶ $a+b$의 부호를 구할 수 있다.	20%
❷ b를 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30%
❸ a의 부호를 구할 수 있다.	20%
❹ 부등식 $ax+a>bx-2b$의 해를 구할 수 있다.	30%

0784 전략 연립부등식의 해를 a, b로 나타낸다.

풀이 (1) $3x+a<2x+b$에서 $\quad x<b-a$

$x+1\le2x+b$에서 $\quad x\ge1-b$

따라서 연립부등식의 해가 $1-b\le x<b-a$이므로

$1-b=-1,\ b-a=3$

$\therefore a=-1,\ b=2$ $\quad$ ⋯❶

(2) 주어진 부등식은 $3x-1<x+1\le2x+2$이므로

$3x-1<x+1$에서 $\quad 2x<2 \quad \therefore x<1$

$x+1\le2x+2$에서 $\quad x\ge-1$

$\therefore -1\le x<1$ $\quad$ ⋯❷

답 (1) $a=-1$, $b=2$ $\quad$ (2) $-1\le x<1$

채점 기준	비율
❶ a, b의 값을 구할 수 있다.	50%
❷ 원래 부등식의 해를 구할 수 있다.	50%

0785 전략 십의 자리의 숫자가 a, 일의 자리의 숫자가 b인 수는 $10a+b$임을 이용한다.

풀이 구하는 자연수의 십의 자리의 숫자를 x라 하면 일의 자리의 숫자는 $x+3$이므로

$$\begin{cases} x+(x+3)\ge 10 \\ \underbrace{10(x+3)+x}_{\text{십의 자리의 숫자와 일의 자리의 숫자를 바꾼 수}}>2\{\overbrace{10x+(x+3)}^{\text{처음 수}}\}-30 \end{cases}$$ ⋯ ❶

$x+(x+3)\ge 10$에서 $\quad 2x+3\ge 10 \quad \therefore x\ge \frac{7}{2}$ ⋯⋯ ㉠

$10(x+3)+x>2\{10x+(x+3)\}-30$에서

$11x+30>22x-24 \quad \therefore x<\frac{54}{11}$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$\frac{7}{2}\le x<\frac{54}{11}$ ⋯ ❷

이때 x는 자연수이므로 $\quad x=4$

따라서 구하는 자연수는 47이다. ⋯ ❸

답 47

채점 기준	비율
❶ 연립부등식을 세울 수 있다.	40%
❷ 연립부등식의 해를 구할 수 있다.	40%
❸ 처음 자연수를 구할 수 있다.	20%

0786 **전략** $(\text{소금의 양})=\frac{(\text{소금물의 농도})}{100}\times(\text{소금물의 양})$임을 이용하여 연립부등식을 세운다.

풀이 농도가 12 %인 소금물의 양을 a g, 농도가 10 %인 소금물의 양을 b g이라 하고, 소금물 A의 농도를 x %라 하면

$$\begin{cases} \frac{12}{100}\times a+\frac{x}{100}\times a\ge \frac{8}{100}\times 2a \\ \frac{10}{100}\times b+\frac{x}{100}\times b\le \frac{8}{100}\times 2b \end{cases}$$ ⋯ ❶

$\frac{12}{100}\times a+\frac{x}{100}\times a\ge \frac{8}{100}\times 2a$에서

$12a+ax\ge 16a \quad \therefore x\ge 4\ (\because a>0)$ ⋯⋯ ㉠

$\frac{10}{100}\times b+\frac{x}{100}\times b\le \frac{8}{100}\times 2b$에서

$10b+bx\le 16b \quad \therefore x\le 6\ (\because b>0)$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$4\le x\le 6$

따라서 소금물 A의 농도는 4 % 이상 6 % 이하이다. ⋯ ❷

답 4 % 이상 6 % 이하

채점 기준	비율
❶ 연립부등식을 세울 수 있다.	50%
❷ 소금물 A의 농도의 범위를 구할 수 있다.	50%

0787 **전략** a, b의 부호를 구한 후 부등식 $|ax-4|\ge b$의 해를 구한다.

풀이 $b<0$이면 부등식 $|ax-4|\ge b$의 해는 모든 실수가 되므로

$\underbrace{b>0}_{ab>0\text{이므로 } b\neq 0}$

이때 $ab>0$이므로 $\quad a>0$ ⋯ ❶

$|ax-4|\ge b$에서 $\quad ax-4\le -b$ 또는 $ax-4\ge b$

$\therefore x\le \frac{-b+4}{a}$ 또는 $x\ge \frac{b+4}{a}$ ⋯ ❷

부등식의 해가 $x\le -1$ 또는 $x\ge 9$이므로

$\frac{-b+4}{a}=-1,\ \frac{b+4}{a}=9$

$\therefore a-b=-4,\ 9a-b=4$

두 식을 연립하여 풀면 $\quad a=1,\ b=5$ ⋯ ❸

$\therefore a+b=6$ ⋯ ❹

답 6

채점 기준	비율
❶ a, b의 부호를 구할 수 있다.	30%
❷ 부등식의 해를 a, b에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30%
❸ a, b의 값을 구할 수 있다.	30%
❹ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	10%

0788 **전략** $|x-k|\ge 0$임을 이용한다.

풀이 $|x-k|\ge 0$이므로 주어진 부등식이 오직 한 개의 해를 가지려면

$k^2+k=0, \quad k(k+1)=0$

$\therefore k=-1\ (\because k\neq 0)$ ⋯ ❶

따라서 주어진 부등식은 $|x+1|\le 0$이므로 구하는 해는

$x=-1$ ⋯ ❷

답 $x=-1$

채점 기준	비율
❶ k의 값을 구할 수 있다.	70%
❷ 부등식의 해를 구할 수 있다.	30%

08 이차부등식

0789 답 $x<-1$ 또는 $x>3$

0790 답 $-1\le x\le 3$

0791 답 $\alpha<x<\gamma$

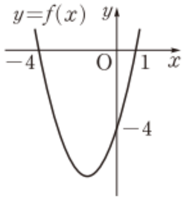
0792 답 $x\le\beta$ 또는 $x\ge\delta$

0793 $f(x)=x^2+3x-4$라 하면

$f(x)=(x+4)(x-1)$

따라서 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로 부등식 $f(x)<0$의 해는

$-4<x<1$



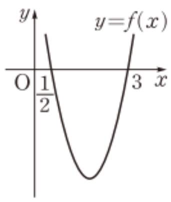
답 $-4<x<1$

0794 $f(x)=2x^2-7x+3$이라 하면

$f(x)=(2x-1)(x-3)$

따라서 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로 부등식 $f(x)\ge 0$의 해는

$x\le\frac{1}{2}$ 또는 $x\ge 3$

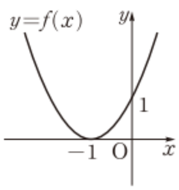


답 $x\le\frac{1}{2}$ 또는 $x\ge 3$

0795 $f(x)=x^2+2x+1$이라 하면

$f(x)=(x+1)^2$

따라서 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로 부등식 $f(x)\ge 0$의 해는 모든 실수이다.

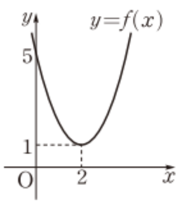


답 모든 실수

0796 $f(x)=x^2-4x+5$라 하면

$f(x)=(x-2)^2+1$

따라서 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로 부등식 $f(x)<0$의 해는 없다.

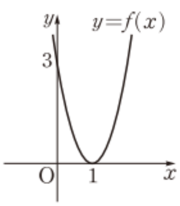


답 해는 없다.

0797 $f(x)=3x^2-6x+3$이라 하면

$f(x)=3(x-1)^2$

따라서 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로 부등식 $f(x)>0$의 해는 $x\ne 1$인 모든 실수이다.

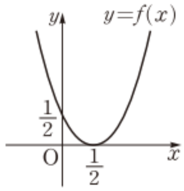


답 $x\ne 1$인 모든 실수

0798 $f(x)=2x^2-2x+\frac{1}{2}$이라 하면

$f(x)=2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$

따라서 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로 부등식 $f(x)\le 0$의 해는 $x=\frac{1}{2}$이다.



답 $x=\frac{1}{2}$

0799 $x^2+2x-8\le 0$에서 $(x+4)(x-2)\le 0$

$\therefore -4\le x\le 2$

답 $-4\le x\le 2$

0800 $-3x^2+2x+1<0$에서 $3x^2-2x-1>0$

$(3x+1)(x-1)>0$

$\therefore x<-\frac{1}{3}$ 또는 $x>1$

답 $x<-\frac{1}{3}$ 또는 $x>1$

0801 $x^2-8x+16>0$에서 $(x-4)^2>0$

따라서 주어진 부등식의 해는 $x\ne 4$인 모든 실수이다.

답 $x\ne 4$인 모든 실수

0802 $x^2+4\le 4x$에서 $x^2-4x+4\le 0$

그런데 $x^2-4x+4=(x-2)^2\ge 0$이므로 주어진 부등식의 해는 $x=2$이다.

답 $x=2$

0803 $-x^2<x+1$에서 $x^2+x+1>0$

그런데 $x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\ge\frac{3}{4}$이므로 주어진 부등식의 해는 모든 실수이다.

답 모든 실수

0804 $2x-4>x^2$에서 $x^2-2x+4<0$

그런데 $x^2-2x+4=(x-1)^2+3\ge 3$이므로 주어진 부등식의 해는 없다.

답 해는 없다.

0805 $(x+1)(x-7)<0$에서 $x^2-6x-7<0$

답 $x^2-6x-7<0$

0806 $(x+2)(x-4)>0$에서 $x^2-2x-8>0$

답 $x^2-2x-8>0$

0807 $(x+3)(x-1)\le 0$에서 $x^2+2x-3\le 0$

답 $x^2+2x-3\le 0$

0808 $(x-3)(x-5)\ge 0$에서 $x^2-8x+15\ge 0$

답 $x^2-8x+15\ge 0$

0809 $(x-5)^2>0$에서 $\quad x^2-10x+25>0$

답 $x^2-10x+25>0$

0810 $(x+2)^2\le0$에서 $\quad x^2+4x+4\le0$

답 $x^2+4x+4\le0$

0811 모든 실수 x에 대하여 주어진 부등식이 성립하려면 이차함수 $y=x^2-4x+k+2$의 그래프가 x축보다 항상 위쪽에 있어야 하므로 이차방정식 $x^2-4x+k+2=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-2)^2-1\cdot(k+2)<0$

$4-k-2<0 \qquad \therefore k>2$

답 $k>2$

0812 모든 실수 x에 대하여 주어진 부등식이 성립하려면 이차함수 $y=x^2-kx+3k$의 그래프가 x축에 접하거나 x축보다 항상 위쪽에 있어야 하므로 이차방정식 $x^2-kx+3k=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-k)^2-4\cdot1\cdot3k\le0$

$k^2-12k\le0, \qquad k(k-12)\le0$

$\therefore 0\le k\le12$

답 $0\le k\le12$

0813 모든 실수 x에 대하여 주어진 부등식이 성립하려면 이차함수 $y=-x^2-kx+k-3$의 그래프가 x축보다 항상 아래쪽에 있어야 하므로 이차방정식 $-x^2-kx+k-3=0$, 즉 $x^2+kx-k+3=0$의 판별식을 D라 하면

$D=k^2-4\cdot1\cdot(-k+3)<0$

$k^2+4k-12<0, \qquad (k+6)(k-2)<0$

$\therefore -6<k<2$

답 $-6<k<2$

0814 모든 실수 x에 대하여 주어진 부등식이 성립하려면 이차함수 $y=-2x^2-(k+1)x-k+1$의 그래프가 x축에 접하거나 x축보다 항상 아래쪽에 있어야 하므로 이차방정식

$-2x^2-(k+1)x-k+1=0$, 즉 $2x^2+(k+1)x+k-1=0$

의 판별식을 D라 하면

$D=(k+1)^2-4\cdot2\cdot(k-1)\le0$

$k^2-6k+9\le0, \qquad (k-3)^2\le0$

$\therefore k=3$

답 $k=3$

0815 $4x+10\ge6$에서 $\quad 4x\ge-4$

$\therefore x\ge-1 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$2x^2-5x-3\le0$에서 $\quad (2x+1)(x-3)\le0$

$\therefore -\frac{1}{2}\le x\le3 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$-\frac{1}{2}\le x\le3$

답 $-\frac{1}{2}\le x\le3$

0816 $2x+3>6x-1$에서 $\quad -4x>-4$

$\therefore x<1 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$6-x\ge x^2$에서 $\quad x^2+x-6\le0$

$(x+3)(x-2)\le0 \qquad \therefore -3\le x\le2 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$-3\le x<1$

답 $-3\le x<1$

0817 $x^2+2x-15\le0$에서 $\quad (x+5)(x-3)\le0$

$\therefore -5\le x\le3 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$x^2-7x+10>0$에서 $\quad (x-2)(x-5)>0$

$\therefore x<2$ 또는 $x>5 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$-5\le x<2$

답 $-5\le x<2$

0818 $2x^2-9x+10>0$에서 $\quad (x-2)(2x-5)>0$

$\therefore x<2$ 또는 $x>\frac{5}{2} \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$3x^2-10x+3<0$에서 $\quad (3x-1)(x-3)<0$

$\therefore \frac{1}{3}<x<3 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$\frac{1}{3}<x<2$ 또는 $\frac{5}{2}<x<3$

답 $\frac{1}{3}<x<2$ 또는 $\frac{5}{2}<x<3$

0819 $-5\le x^2+5x-1$에서

$x^2+5x+4\ge0, \qquad (x+4)(x+1)\ge0$

$\therefore x\le-4$ 또는 $x\ge-1 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$x^2+5x-1\le5$에서 $\quad x^2+5x-6\le0$

$(x+6)(x-1)\le0 \qquad \therefore -6\le x\le1 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$-6\le x\le-4$ 또는 $-1\le x\le1$

답 $-6\le x\le-4$ 또는 $-1\le x\le1$

0820 $5x-1<x^2+5$에서

$x^2-5x+6>0, \qquad (x-2)(x-3)>0$

$\therefore x<2$ 또는 $x>3 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$x^2+5<6x$에서 $\quad x^2-6x+5<0$

$(x-1)(x-5)<0 \qquad \therefore 1<x<5 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$1<x<2$ 또는 $3<x<5$

답 $1<x<2$ 또는 $3<x<5$

0821 이차방정식 $x^2-2x+k+2=0$의 판별식을 D, 두 근을 α, β라 하면

(i) $\frac{D}{4}=(-1)^2-1\cdot(k+2)\ge0, \qquad -1-k\ge0 \qquad \therefore k\le-1$

(ii) $\alpha+\beta=2>0$

(iii) $\alpha\beta=k+2>0 \qquad \therefore k>-2$

이상에서 공통부분을 구하면

$-2<k\le-1$

답 $-2<k\le-1$

0822 이차방정식 $x^2+(k+1)x+1=0$의 판별식을 D, 두 근을 α, β라 하면

(i) $D=(k+1)^2-4\cdot1\cdot1\geq0$

$k^2+2k-3\geq0$, $\quad (k+3)(k-1)\geq0$

$\therefore k\leq-3$ 또는 $k\geq1$

(ii) $\alpha+\beta=-k-1<0 \quad \therefore k>-1$

(iii) $\alpha\beta=1>0$

이상에서 공통부분을 구하면 $\quad k\geq1$ 　답 $k\geq1$

0823 이차방정식 $x^2-(k+2)x+k^2-1=0$의 두 근을 α, β라 하면 $\alpha\beta<0$이므로

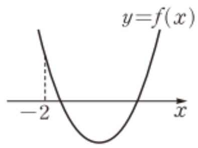
$k^2-1<0$, $\quad (k+1)(k-1)<0$

$\therefore -1<k<1$ 　답 $-1<k<1$

0824 답 $\geq$, $>$, $>$ 　　**0825** 답 $\geq$, $>$, $<$

0826 답 $<$

0827 $f(x)=x^2-4x+k-3$이라 하면 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이 모두 -2보다 크므로 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



(i) 이차방정식 $f(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-2)^2-(k-3)\geq0$

$7-k\geq0 \quad \therefore k\leq7$

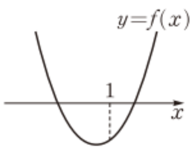
(ii) $f(-2)=4+8+k-3>0 \quad \therefore k>-9$

(iii) 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식은 $x=2$이고 $2>-2$이다.

이상에서 공통부분을 구하면

$-9<k\leq7$ 　답 $-9<k\leq7$

0828 $f(x)=x^2+(k^2+2)x-3k-13$이라 하면 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근 사이에 1이 있으므로 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



따라서 $f(1)<0$이어야 하므로

$1+k^2+2-3k-13<0$, $\quad k^2-3k-10<0$

$(k+2)(k-5)<0 \quad \therefore -2<k<5$ 　답 $-2<k<5$

유형 01 그래프를 이용한 부등식의 풀이 　본책 124쪽

① 부등식 $f(x)>0$의 해

⇒ $y=f(x)$의 그래프에서 x축보다 위쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위

② 부등식 $f(x)>g(x)$의 해

⇒ $y=f(x)$의 그래프에서 $y=g(x)$의 그래프보다 위쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위

0829 $f(x)g(x)>0$에서

$f(x)>0$, $g(x)>0$ 또는 $f(x)<0$, $g(x)<0$

(i) $f(x)>0$, $g(x)>0$을 만족시키는 x의 값의 범위는

$0<x<d$

(ii) $f(x)<0$, $g(x)<0$을 만족시키는 x의 값의 범위는

$a<x<b$

(i), (ii)에서 부등식 $f(x)g(x)>0$의 해는

$a<x<b$ 또는 $0<x<d$ 　답 ⑤

0830 $ax^2+(b-m)x+c-n\leq0$에서

$ax^2+bx+c-(mx+n)\leq0$

$\therefore ax^2+bx+c\leq mx+n$

부등식 $ax^2+bx+c\leq mx+n$의 해는 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프에서 직선 $y=mx+n$보다 아래쪽에 있거나 만나는 부분의 x의 값의 범위이므로

$x\leq-2$ 또는 $x\geq3$ 　답 ③

0831 부등식 $0<f(x)<g(x)$의 해는 $y=f(x)$의 그래프에서 x축보다 위쪽에 있고 $y=g(x)$의 그래프보다 아래쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위이므로

$3<x<4$

따라서 $\alpha=3$, $\beta=4$이므로

$\alpha+\beta=7$ 　답 7

유형 02 이차부등식의 풀이 　본책 124쪽

이차방정식 $f(x)=0$의 판별식을 D라 할 때, 이차부등식 $f(x)>0$의 해는 다음과 같이 구한다.

① $D>0$일 때 ⇒ $f(x)$를 인수분해하거나 근의 공식을 이용한다.

② $D=0$ 또는 $D<0$일 때 ⇒ $f(x)$를 $a(x-p)^2+q$ 꼴로 변형한다.

0832 $(3x-2)(x+4)<2x-5$에서

$3x^2+10x-8<2x-5$, $\quad 3x^2+8x-3<0$

$(x+3)(3x-1)<0 \quad \therefore -3<x<\frac{1}{3}$

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 정수 x는 -2, -1, 0의 3개이다. 　답 3

0833 이차방정식 $x^2-6x+1=0$의 해는

$x=3\pm2\sqrt{2}$

이므로 이차부등식 $x^2-6x+1<0$의 해는

$3-2\sqrt{2}<x<3+2\sqrt{2}$

따라서 $\alpha=3-2\sqrt{2}$, $\beta=3+2\sqrt{2}$이므로

$\alpha-\beta=-4\sqrt{2}$ 　답 ①

다른 풀이 α, β가 이차방정식 $x^2-6x+1=0$의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=6$, $\alpha\beta=1$

$\therefore (\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=36-4=32$

이때 $\alpha<\beta$에서 $\alpha-\beta<0$이므로

$\alpha-\beta=-\sqrt{32}=-4\sqrt{2}$

0834 ㄱ. $x^2+2x+5=(x+1)^2+4\geq 4$

따라서 $x^2+2x+5\leq 0$의 해는 없다.

ㄴ. $x^2-4x+4=(x-2)^2\geq 0$

따라서 $x^2-4x+4\leq 0$의 해는 $x=2$이다.

ㄷ. $-3x^2+3x-1<0$에서 $\quad 3x^2-3x+1>0$

그런데 $3x^2-3x+1=3\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\geq\frac{1}{4}$이므로 주어진 부등식의 해는 모든 실수이다.

ㄹ. $-2x^2+x-2>0$에서 $\quad 2x^2-x+2<0$

그런데 $2x^2-x+2=2\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{15}{8}\geq\frac{15}{8}$이므로 주어진 부등식의 해는 없다.

이상에서 해가 없는 부등식은 ㄱ, ㄹ이다. 답 ㄱ, ㄹ

0835 $x^2-4x-21\leq 0$에서 $\quad (x+3)(x-7)\leq 0$

$\therefore -3\leq x\leq 7$

① $|x-1|\leq 4$에서 $\quad -4\leq x-1\leq 4 \quad \therefore -3\leq x\leq 5$

② $|x-1|\leq 5$에서 $\quad -5\leq x-1\leq 5 \quad \therefore -4\leq x\leq 6$

③ $|x-2|\leq 5$에서 $\quad -5\leq x-2\leq 5 \quad \therefore -3\leq x\leq 7$

④ $|x+1|\leq 4$에서 $\quad -4\leq x+1\leq 4 \quad \therefore -5\leq x\leq 3$

⑤ $|x+1|\leq 5$에서 $\quad -5\leq x+1\leq 5 \quad \therefore -6\leq x\leq 4$

따라서 주어진 이차부등식과 해가 같은 것은 ③이다. 답 ③

0836 ㄱ. $a>0$일 때 주어진 부등식의 양변을 a로 나누면

$x^2-4x+6\leq 0$

이때 $x^2-4x+6=(x-2)^2+2\geq 2$이므로 부등식의 해는 없다.

ㄴ. $a=0$이면 주어진 부등식은 $\quad 0\leq 0$

이 부등식은 모든 실수 x에 대하여 성립하므로 부등식의 해는 모든 실수이다.

ㄷ. $a<0$일 때 주어진 부등식의 양변을 a로 나누면

$x^2-4x+6\geq 0$

이때 $x^2-4x+6=(x-2)^2+2\geq 2$이므로 부등식의 해는 모든 실수이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

유형 03 절댓값 기호를 포함한 부등식 본책 125쪽

$|A|=\begin{cases}A\ (A\geq 0)\\-A\ (A<0)\end{cases}$임을 이용하여 절댓값 기호를 없앤다.

이때 A가 x에 대한 다항식이면 $A=0$이 되는 x의 값을 기준으로 범위를 나누어 푼다.

0837 $x^2-2x-2<2|x-1|$에서

(i) $x<1$일 때

$x^2-2x-2<-2(x-1), \quad x^2-4<0$

$(x+2)(x-2)<0 \quad \therefore -2<x<2$

그런데 $x<1$이므로 $\quad -2<x<1$

(ii) $x\geq 1$일 때

$x^2-2x-2<2(x-1), \quad x^2-4x<0$

$x(x-4)<0 \quad \therefore 0<x<4$

그런데 $x\geq 1$이므로 $\quad 1\leq x<4$

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는 $\quad -2<x<4$

따라서 $\alpha=-2$, $\beta=4$이므로 $\quad \beta-2\alpha=8$ 답 ④

0838 $x^2-2|x|-15<0$에서

(i) $x<0$일 때

$x^2+2x-15<0, \quad (x+5)(x-3)<0$

$\therefore -5<x<3$

그런데 $x<0$이므로 $\quad -5<x<0$

(ii) $x\geq 0$일 때

$x^2-2x-15<0, \quad (x+3)(x-5)<0$

$\therefore -3<x<5$

그런데 $x\geq 0$이므로 $\quad 0\leq x<5$

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는 $\quad -5<x<5$

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 정수 x는 $-4, -3, \cdots, 4$의 9개이다. 답 9

다른 풀이 $x^2=|x|^2$이므로 주어진 부등식은

$|x|^2-2|x|-15<0, \quad (|x|-5)(|x|+3)<0$

$\therefore -3<|x|<5$

그런데 $|x|\geq 0$이므로 $\quad 0\leq|x|<5$

$|x|<5$에서 $-5<x<5$이므로 구하는 정수 x의 개수는 9이다.

0839 $|x^2-2|>4$에서

$x^2-2<-4$ 또는 $x^2-2>4$ ⋯ ❶

(i) $x^2-2<-4$에서 $\quad x^2+2<0$

이때 모든 실수 x에 대하여 $x^2+2\geq 2$이므로 $x^2+2<0$의 해는 없다.

(ii) $x^2-2>4$에서 $\quad x^2-6>0$

$(x+\sqrt{6})(x-\sqrt{6})>0$

$\therefore x<-\sqrt{6}$ 또는 $x>\sqrt{6}$ ⋯ ❷

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는

$x<-\sqrt{6}$ 또는 $x>\sqrt{6}$ ⋯ ❸

답 $x<-\sqrt{6}$ 또는 $x>\sqrt{6}$

채점 기준	비율
❶ 주어진 부등식을 변형할 수 있다.	40%
❷ 각 부등식의 해를 구할 수 있다.	40%
❸ 주어진 부등식의 해를 구할 수 있다.	20%

유형 04 해가 주어진 이차부등식 본책 125쪽

① 해가 $\alpha<x<\beta$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식

➡ $(x-\alpha)(x-\beta)<0$

② 해가 $x<\alpha$ 또는 $x>\beta$ $(\alpha<\beta)$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식

➡ $(x-\alpha)(x-\beta)>0$

08 이차부등식

0840 $ax^2+bx-3<0$의 해가 $-\frac{1}{3}<x<\frac{3}{2}$이므로 $a>0$

해가 $-\frac{1}{3}<x<\frac{3}{2}$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{3}{2}\right)<0$ $\therefore x^2-\frac{7}{6}x-\frac{1}{2}<0$

양변에 a를 곱하면 $ax^2-\frac{7}{6}ax-\frac{1}{2}a<0$

이 부등식이 $ax^2+bx-3<0$과 같으므로

$b=-\frac{7}{6}a$, $-3=-\frac{1}{2}a$

따라서 $a=6$, $b=-7$이므로 $a+b=-1$ 답 ②

다른 풀이 이차방정식 $ax^2+bx-3=0$의 두 근이 $-\frac{1}{3}$, $\frac{3}{2}$이므로

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-\frac{1}{3}+\frac{3}{2}=-\frac{b}{a}$, $-\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}=-\frac{3}{a}$

$\therefore a=6$, $b=-7$

0841 해가 $x<b$ 또는 $x>-1$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x-b)(x+1)>0$ $\therefore x^2+(-b+1)x-b>0$

이 부등식이 $x^2+ax+2>0$과 같으므로

$-b+1=a$, $-b=2$

따라서 $a=3$, $b=-2$이므로 $ab=-6$ 답 ①

다른 풀이 이차방정식 $x^2+ax+2=0$의 두 근이 b, -1이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$b+(-1)=-a$, $-b=2$

$\therefore a=3$, $b=-2$

0842 해가 $x=3$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x-3)^2\le 0$ $\therefore x^2-6x+9\le 0$

이 부등식이 $x^2+ax+b\le 0$과 같으므로

$a=-6$, $b=9$ ··· ❶

이것을 $bx^2-ax-8<0$에 대입하면

$9x^2+6x-8<0$, $(3x+4)(3x-2)<0$

$\therefore -\frac{4}{3}<x<\frac{2}{3}$ ··· ❷

따라서 정수 x는 -1, 0이므로 구하는 합은 -1이다. ··· ❸

답 -1

채점 기준	비율
❶ a, b의 값을 구할 수 있다.	40%
❷ 이차부등식 $bx^2-ax-8<0$의 해를 구할 수 있다.	40%
❸ 정수 x의 값의 합을 구할 수 있다.	20%

0843 $ax^2+bx+c>0$의 해가 $\frac{1}{3}<x<\frac{1}{2}$이므로 $a<0$

해가 $\frac{1}{3}<x<\frac{1}{2}$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)<0$ $\therefore x^2-\frac{5}{6}x+\frac{1}{6}<0$

양변에 a를 곱하면 $ax^2-\frac{5}{6}ax+\frac{a}{6}>0$

이 부등식이 $ax^2+bx+c>0$과 같으므로

$b=-\frac{5}{6}a$, $c=\frac{a}{6}$

이것을 $cx^2+bx+a>0$에 대입하면

$\frac{a}{6}x^2-\frac{5}{6}ax+a>0$, $x^2-5x+6<0$ ← $a<0$이므로 양변에 $\frac{6}{a}$을 곱하면 부등호의 방향이 바뀐다.

$(x-2)(x-3)<0$ $\therefore 2<x<3$ 답 ②

유형 05 부등식 $f(x)<0$과 부등식 $f(ax+b)<0$의 관계

본책 126쪽

$f(x)=p(x-\alpha)(x-\beta)$

➡ $f(ax+b)=p(ax+b-\alpha)(ax+b-\beta)$

0844 $f(x)<0$의 해가 $2<x<9$이므로 양수 a에 대하여

$f(x)=a(x-2)(x-9)$

라 하면

$f(2x+1)=a(2x+1-2)(2x+1-9)$

$=2a(2x-1)(x-4)$

부등식 $f(2x+1)<0$, 즉 $2a(2x-1)(x-4)<0$에서

$(2x-1)(x-4)<0$

$\therefore \frac{1}{2}<x<4$ 답 $\frac{1}{2}<x<4$

0845 $f(x)\le 0$의 해가 $-2\le x\le 2$이므로 양수 a에 대하여

$f(x)=a(x+2)(x-2)$

라 하면

$f(2020-x)=a(2020-x+2)(2020-x-2)$

$=a(-x+2022)(-x+2018)$

$=a(x-2022)(x-2018)$

부등식 $f(2020-x)\ge 0$, 즉 $a(x-2022)(x-2018)\ge 0$에서

$(x-2018)(x-2022)\ge 0$

$\therefore x\le 2018$ 또는 $x\ge 2022$

따라서 x의 값이 될 수 없는 것은 ④이다. 답 ④

0846 $f(x)<0$의 해가 $x<-4$ 또는 $x>3$이므로 음수 a에 대하여

$f(x)=a(x+4)(x-3)$ ··· ❶

이라 하면

$f(-x)=a(-x+4)(-x-3)=a(x-4)(x+3)$

부등식 $f(-x)>0$, 즉 $a(x+3)(x-4)>0$에서

$(x+3)(x-4)<0$ $\therefore -3<x<4$ ··· ❷

따라서 정수 x는 -2, -1, 0, 1, 2, 3의 6개이다. ··· ❸

답 6

채점 기준	비율
❶ $f(x)$를 이차식으로 나타낼 수 있다.	40%
❷ 부등식 $f(-x)>0$의 해를 구할 수 있다.	40%
❸ 정수 x의 개수를 구할 수 있다.	20%

0847 주어진 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 두 점 $(1,\ 0)$, $(5,\ 0)$에서 만나므로

$$f(x)=a(x-1)(x-5)\ (a>0)$$

라 하면

$$f\left(\frac{x+1}{2}\right)=a\left(\frac{x+1}{2}-1\right)\left(\frac{x+1}{2}-5\right)$$
$$=\frac{a}{4}(x-1)(x-9)$$

부등식 $f\left(\frac{x+1}{2}\right)\le 0$, 즉 $\frac{a}{4}(x-1)(x-9)\le 0$에서

$(x-1)(x-9)\le 0$ $\quad\therefore\ 1\le x\le 9$ 　　답 ④

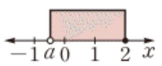
다른 풀이 $f\left(\frac{x+1}{2}\right)\le 0$에서 $\frac{x+1}{2}=t$로 놓으면 주어진 그래프에서 $f(t)\le 0$을 만족시키는 t의 값의 범위는 $1\le t\le 5$이므로

$1\le \frac{x+1}{2}\le 5$, $\quad 2\le x+1\le 10$

$\therefore\ 1\le x\le 9$

유형 06 정수인 해의 조건이 주어진 이차부등식 　본책 126쪽

이차부등식의 정수인 해가 n개이면
(ⅰ) 주어진 부등식을 풀어 해를 수직선 위에 나타낸다.
(ⅱ) n개의 정수를 포함하도록 하는 미지수의 값의 범위를 구한다.
예 부등식 $a<x\le 2$의 정수인 해가 3개이다.

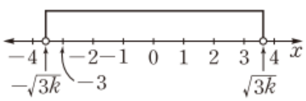
➡ 

➡ $-1\le a<0$
$a=-1$이면 정수인 해는 0, 1, 2의 3개
$a=0$이면 정수인 해는 1, 2의 2개

0848 $x^2-3k<0$에서 $\quad(x+\sqrt{3k})(x-\sqrt{3k})<0$

$\therefore\ -\sqrt{3k}<x<\sqrt{3k}$

이때 $-\sqrt{3k}<x<\sqrt{3k}$를 만족시키는 정수 x가 7개이므로 오른쪽 그림에서



$3<\sqrt{3k}\le 4$

$9<3k\le 16$ $\quad\therefore\ 3<k\le \frac{16}{3}$

따라서 자연수 k는 4, 5이므로 그 합은

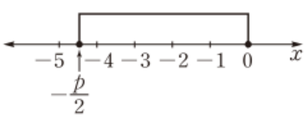
$4+5=9$ 　　답 ④

0849 $2x^2+px\le 0$에서 $\quad x(2x+p)\le 0$

(ⅰ) $p>0$일 때

$x(2x+p)\le 0$에서 $\quad -\frac{p}{2}\le x\le 0$

이 부등식을 만족시키는 정수 x가 5개이므로 오른쪽 그림에서



$-5<-\frac{p}{2}\le -4$

$\therefore\ 8\le p<10$

즉 정수 p는 8 또는 9이다.

(ⅱ) $p=0$일 때

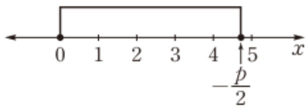
$x(2x+p)\le 0$에서 $\quad x^2\le 0$

이 부등식을 만족시키는 정수 x는 0뿐이므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(ⅲ) $p<0$일 때

$x(2x+p)\le 0$에서 $\quad 0\le x\le -\frac{p}{2}$

이 부등식을 만족시키는 정수 x가 5개이므로 오른쪽 그림에서



$4\le -\frac{p}{2}<5$

$\therefore\ -10<p\le -8$

즉 정수 p는 -9 또는 -8이다.

이상에서 정수 p의 최댓값은 9, 최솟값은 -9이므로

$M=9,\ m=-9$

$\therefore\ M-m=18$ 　　답 18

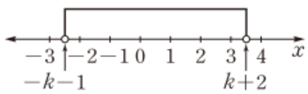
0850 $x^2-x-(k^2+3k+2)<0$에서

$(x+k+1)(x-k-2)<0$

$\therefore\ -k-1<x<k+2\ (\because\ k>0)$ 　　$\cdots\cdots$ ㉠

이때 $k>0$에서 $-k-1<-1$, $k+2>2$이므로 주어진 이차부등식의 정수인 해의 합이 3이려면 ㉠의 정수인 해가 -2, -1, 0, 1, 2, 3이어야 한다.

따라서 오른쪽 그림에서



$-3\le -k-1<-2$,

$3<k+2\le 4$

이어야 하므로

$1<k\le 2$ 　　답 $1<k\le 2$

유형 07 이차부등식이 해를 한 개만 가질 조건 　본책 127쪽

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 D라 할 때
① $ax^2+bx+c\le 0$이 해를 한 개만 가질 조건
➡ $a>0,\ D=0$
② $ax^2+bx+c\ge 0$이 해를 한 개만 가질 조건
➡ $a<0,\ D=0$

0851 이차부등식 $(a+2)x^2-6x+a+2\ge 0$의 해가 오직 한 개 존재하려면

$a+2<0$ $\quad\therefore\ a<-2$ 　　$\cdots\cdots$ ㉠

또 이차방정식 $(a+2)x^2-6x+a+2=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-3)^2-(a+2)^2=0$

$a^2+4a-5=0$, $\quad(a+5)(a-1)=0$

$\therefore\ a=-5$ 또는 $a=1$ 　　$\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $\quad a=-5$ 　　답 ①

0852 이차부등식 $x^2-(k-8)x+k\le0$의 해가 오직 한 개 존재하므로 이차방정식 $x^2-(k-8)x+k=0$의 판별식을 D라 하면

$D=\{-(k-8)\}^2-4k=0$

$k^2-20k+64=0,\quad (k-4)(k-16)=0$

$\therefore k=4$ 또는 $k=16$

따라서 모든 실수 k의 값의 합은

$4+16=20$ 답 ⑤

0853 이차부등식 $-ax^2+8x-a<0$을 만족시키지 않는 x의 값이 오직 하나뿐이면 부등식 $-ax^2+8x-a\ge0$이 단 한 개의 실근을 가져야 한다. ⋯ ❶

즉 $ax^2-8x+a\le0$이 단 한 개의 실근을 가져야 하므로

$a>0$ ⋯⋯ ㉠

또 이차방정식 $ax^2-8x+a=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-4)^2-a^2=0$

$a^2-16=0,\quad (a+4)(a-4)=0$

$\therefore a=-4$ 또는 $a=4$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 $a=4$ ⋯ ❷

따라서 $-4x^2+8x-4=-4(x-1)^2<0$을 만족시키지 않는 x의 값은 오직 1뿐이므로 $k=1$ ⋯ ❸

$\therefore a+k=5$ ⋯ ❹

답 5

채점 기준	비율
❶ 부등식 $-ax^2+8x-a\ge0$이 단 한 개의 실근을 가짐을 알 수 있다.	30%
❷ a의 값을 구할 수 있다.	30%
❸ k의 값을 구할 수 있다.	30%
❹ $a+k$의 값을 구할 수 있다.	10%

유형 08 이차부등식이 해를 가질 조건 본책 127쪽

이차부등식 $ax^2+bx+c>0$이 해를 가질 조건

① $a>0$이면

➡ 이차부등식은 항상 해를 갖는다.

② $a<0$이면

➡ $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 D라 할 때, $D>0$이어야 한다.

0854 (i) $a>0$일 때

이차함수 $y=ax^2+2x+a$의 그래프는 아래로 볼록하므로 주어진 이차부등식은 항상 해를 갖는다.

(ii) $a<0$일 때

주어진 이차부등식이 해를 가지려면 이차방정식 $ax^2+2x+a=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=1^2-a\cdot a>0,\quad a^2-1<0$

$(a+1)(a-1)<0\quad \therefore -1<a<1$

그런데 $a<0$이므로 $-1<a<0$

(i), (ii)에서 구하는 a의 값의 범위는

$a>0$ 또는 $-1<a<0$ 답 ②

참고 $a=0$이면 주어진 부등식은 이차부등식이 아니다.

$\therefore a\ne0$

0855 이차부등식 $2x^2+x-a<0$이 해를 가지려면 이차방정식 $2x^2+x-a=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=1^2-4\cdot2\cdot(-a)>0$

$1+8a>0\quad \therefore a>-\frac{1}{8}$

따라서 구하는 정수 a의 최솟값은 0이다. 답 ③

0856 (i) $a>2$일 때

이차함수 $y=(a-2)x^2+2(a-2)x-5$의 그래프는 아래로 볼록하므로 주어진 부등식의 해는 항상 존재한다.

(ii) $a=2$일 때

$0\cdot x^2+0\cdot x-5=-5<0$이므로 주어진 부등식의 해는 존재하지 않는다.

(iii) $a<2$일 때

주어진 부등식의 해가 존재하려면 이차방정식 $(a-2)x^2+2(a-2)x-5=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(a-2)^2-(a-2)\cdot(-5)>0$

$(a-2)(a+3)>0\quad \therefore a<-3$ 또는 $a>2$

그런데 $a<2$이므로 $a<-3$

이상에서 조건을 만족시키는 a의 값의 범위는

$a<-3$ 또는 $a>2$

따라서 a의 값이 아닌 것은 ③이다. 답 ③

유형 09 이차부등식이 항상 성립할 조건 본책 128쪽

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 D라 할 때, 모든 실수 x에 대하여

① $ax^2+bx+c>0$이 성립할 조건 ➡ $a>0,\ D<0$

② $ax^2+bx+c\ge0$이 성립할 조건 ➡ $a>0,\ D\le0$

③ $ax^2+bx+c<0$이 성립할 조건 ➡ $a<0,\ D<0$

④ $ax^2+bx+c\le0$이 성립할 조건 ➡ $a<0,\ D\le0$

0857 모든 실수 x에 대하여 $x^2+4ax+3a(a-1)\ge0$이 성립해야 하므로 이차방정식 $x^2+4ax+3a(a-1)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(2a)^2-3a(a-1)\le0,\quad a^2+3a\le0$

$a(a+3)\le0\quad \therefore -3\le a\le0$ 답 ②

0858 모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $ax^2+4ax+2a-5<0$이 성립해야 하므로

$a<0$ ⋯⋯ ㉠

이차방정식 $ax^2+4ax+2a-5=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(2a)^2-a(2a-5)<0,\quad 2a^2+5a<0$

$a(2a+5)<0 \quad \therefore -\frac{5}{2}<a<0$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $-\frac{5}{2}<a<0$

따라서 $\alpha=-\frac{5}{2}$, $\beta=0$이므로

$\alpha+\beta=-\frac{5}{2}$ 답 $-\frac{5}{2}$

0859 모든 실수 x에 대하여 $\sqrt{x^2+kx+k+3}$이 실수가 되려면 모든 실수 x에 대하여 $x^2+kx+k+3\geq 0$이 성립해야 한다.
이차방정식 $x^2+kx+k+3=0$의 판별식을 D라 하면

$D=k^2-4(k+3)\leq 0,\quad k^2-4k-12\leq 0$

$(k+2)(k-6)\leq 0 \quad \therefore -2\leq k\leq 6$ 답 ②

0860 (i) $m=1$일 때

$0\cdot x^2-0\cdot x+3=3>0$이므로 주어진 부등식은 모든 실수 x에 대하여 성립한다. ··· ❶

(ii) $m\neq 1$일 때

모든 실수 x에 대하여 $(m-1)x^2-2(m-1)x+3>0$이 성립하려면

$m-1>0 \quad \therefore m>1$ …… ㉠

또 이차방정식 $(m-1)x^2-2(m-1)x+3=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\{-(m-1)\}^2-3(m-1)<0$

$m^2-5m+4<0,\quad (m-1)(m-4)<0$

$\therefore 1<m<4$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $1<m<4$ ··· ❷

(i), (ii)에서 $1\leq m<4$ ··· ❸

답 $1\leq m<4$

채점 기준	비율
❶ $m=1$일 때, 주어진 부등식이 모든 실수 x에 대하여 성립함을 알 수 있다.	40%
❷ $m\neq 1$일 때, 조건을 만족시키는 m의 값의 범위를 구할 수 있다.	50%
❸ m의 값의 범위를 구할 수 있다.	10%

유형 10 이차부등식이 해를 갖지 않을 조건

본책 128쪽

이차부등식 $ax^2+bx+c>0$이 해를 갖지 않을 조건
➡ 이차부등식 $ax^2+bx+c\leq 0$의 해는 모든 실수이다.
➡ $a<0$, $(ax^2+bx+c=0$의 판별식$)\leq 0$

0861 $-x^2+2(n+3)x+4(n+3)>0$에서

$x^2-2(n+3)x-4(n+3)<0$

이 부등식의 해가 존재하지 않으려면 모든 실수 x에 대하여

$x^2-2(n+3)x-4(n+3)\geq 0$

이 성립해야 한다.
이차방정식 $x^2-2(n+3)x-4(n+3)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\{-(n+3)\}^2+4(n+3)\leq 0$

$n^2+10n+21\leq 0,\quad (n+7)(n+3)\leq 0$

$\therefore -7\leq n\leq -3$

따라서 정수 n은 -7, -6, -5, -4, -3의 5개이다. 답 5

SSEN 특강

이차부등식이 해를 갖지 않을 조건

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 D라 할 때
① $ax^2+bx+c>0$을 만족시키는 x가 존재하지 않을 조건
➡ $a<0$, $D\leq 0$
② $ax^2+bx+c\geq 0$을 만족시키는 x가 존재하지 않을 조건
➡ $a<0$, $D<0$
③ $ax^2+bx+c<0$을 만족시키는 x가 존재하지 않을 조건
➡ $a>0$, $D\leq 0$
④ $ax^2+bx+c\leq 0$을 만족시키는 x가 존재하지 않을 조건
➡ $a>0$, $D<0$

0862 주어진 부등식이 해를 갖지 않으려면 모든 실수 x에 대하여

$x^2-(m+4)x+m+7\geq 0$

이 성립해야 한다.
이차방정식 $x^2-(m+4)x+m+7=0$의 판별식을 D라 하면

$D=\{-(m+4)\}^2-4(m+7)\leq 0$

$m^2+4m-12\leq 0,\quad (m+6)(m-2)\leq 0$

$\therefore -6\leq m\leq 2$

따라서 m의 최댓값은 2, 최솟값은 -6이므로 구하는 합은

$2+(-6)=-4$ 답 ①

0863 주어진 부등식의 해가 존재하지 않으려면 모든 실수 x에 대하여

$(k-3)x^2-2(k-3)x-2\leq 0$ …… ㉠

이 성립해야 한다.

(i) $k=3$일 때

$0\cdot x^2-0\cdot x-2=-2<0$이므로 ㉠은 모든 실수 x에 대하여 성립한다.

(ii) $k\neq 3$일 때

모든 실수 x에 대하여 ㉠이 성립하려면

$k-3<0 \quad \therefore k<3$ …… ㉡

또 이차방정식 $(k-3)x^2-2(k-3)x-2=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\{-(k-3)\}^2-(k-3)\cdot(-2)\leq 0$

$(k-1)(k-3)\leq 0 \quad \therefore 1\leq k\leq 3$ …… ㉢

㉡, ㉢의 공통부분을 구하면 $1\leq k<3$

(i), (ii)에서 $1\leq k\leq 3$ 답 ④

유형 11 제한된 범위에서 항상 성립하는 이차부등식

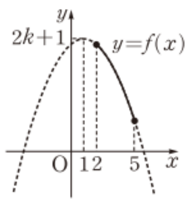
본책 128쪽

① $a\le x\le b$에서 이차부등식 $f(x)>0$이 항상 성립한다.
➡ $a\le x\le b$에서 $(f(x)$의 최솟값$)>0$이다.
② $a\le x\le b$에서 이차부등식 $f(x)<0$이 항상 성립한다.
➡ $a\le x\le b$에서 $(f(x)$의 최댓값$)<0$이다.

0864 $f(x)=-x^2+2x+2k$라 하면

$f(x)=-(x-1)^2+2k+1$

$2\le x\le 5$에서 $f(x)\ge 0$이어야 하므로 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 한다.



$f(5)\ge 0$에서

$-25+10+2k\ge 0,\qquad 2k\ge 15$

$\therefore k\ge \frac{15}{2}$

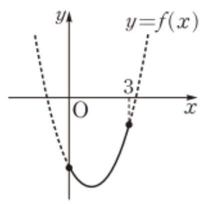
따라서 정수 k의 최솟값은 8이다.

답 8

0865 $x^2-ax\le -a^2+9$에서

$x^2-ax+a^2-9\le 0$

$f(x)=x^2-ax+a^2-9$라 하면 $0\le x\le 3$에서 $f(x)\le 0$이어야 하므로 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 한다.



$f(0)\le 0$에서

$a^2-9\le 0,\qquad (a+3)(a-3)\le 0$

$\therefore -3\le a\le 3$ …… ㉠

$f(3)\le 0$에서 $\qquad 9-3a+a^2-9\le 0$

$a^2-3a\le 0,\qquad a(a-3)\le 0$

$\therefore 0\le a\le 3$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $\qquad 0\le a\le 3$

답 ④

유형 12 두 그래프의 위치 관계와 이차부등식 ; 만나는 경우

본책 129쪽

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프에서 직선 $y=mx+n$보다 위쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위
➡ 이차부등식 $ax^2+bx+c>mx+n$의 해

0866 $y=-x^2+ax+b$의 그래프에서 직선 $y=x+2$보다 위쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위는

$-x^2+ax+b>x+2$, 즉 $x^2+(1-a)x+2-b<0$ …… ㉠

의 해이다.

해가 $1<x<3$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x-1)(x-3)<0$

$\therefore x^2-4x+3<0$ …… ㉡

㉠과 ㉡이 같아야 하므로 $\qquad 1-a=-4,\ 2-b=3$

$\therefore a=5,\ b=-1$

$\therefore a+2b=3$

답 ③

0867 $y=2x^2-2x-3$의 그래프에서 $y=x^2+x+7$의 그래프보다 아래쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위는

$2x^2-2x-3<x^2+x+7$ ··· ❶

의 해이므로

$x^2-3x-10<0,\qquad (x+2)(x-5)<0$

$\therefore -2<x<5$ ··· ❷

답 $-2<x<5$

채점 기준	비율
❶ 주어진 조건을 만족시키는 이차부등식을 세울 수 있다.	50%
❷ x의 값의 범위를 구할 수 있다.	50%

0868 $y=x^2+5x+a$의 그래프에서 직선 $y=x+2$보다 아래쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위는

$x^2+5x+a<x+2$, 즉 $x^2+4x+a-2<0$ …… ㉠

의 해이다.

해가 $b<x<1$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x-b)(x-1)<0$

$\therefore x^2-(b+1)x+b<0$ …… ㉡

㉠과 ㉡이 같아야 하므로 $\qquad 4=-(b+1),\ a-2=b$

$\therefore a=-3,\ b=-5$

$\therefore a+b=-8$

답 ①

0869 $y=mx^2+nx+mn+17$의 그래프에서 x축보다 위쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위는

$mx^2+nx+mn+17>0$ …… ㉠

의 해이다.

㉠의 해가 $-3<x<5$이므로 $\qquad m<0$

해가 $-3<x<5$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x+3)(x-5)<0\qquad \therefore x^2-2x-15<0$

양변에 m을 곱하면

$mx^2-2mx-15m>0$ …… ㉡

㉠과 ㉡이 같아야 하므로

$n=-2m,\ mn+17=-15m$

$n=-2m$을 $mn+17=-15m$에 대입하면

$m\cdot(-2m)+17=-15m,\qquad 2m^2-15m-17=0$

$(m+1)(2m-17)=0\qquad \therefore m=-1$ 또는 $m=\frac{17}{2}$

이때 $m<0$이므로 $\qquad m=-1,\ n=-2\cdot(-1)=2$

$\therefore m+n=1$

답 1

유형 13 두 그래프의 위치 관계와 이차부등식 ; 만나지 않는 경우

본책 129쪽

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 직선 $y=mx+n$보다 항상 위쪽에 있다.
➡ 모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $ax^2+bx+c>mx+n$, 즉 $ax^2+(b-m)x+c-n>0$이 성립한다.

0870 $y=x^2-2x+1$의 그래프가 직선 $y=mx-8$보다 항상 위쪽에 있으려면 모든 실수 x에 대하여 $x^2-2x+1>mx-8$, 즉 $x^2-(2+m)x+9>0$이 성립해야 한다.
이차방정식 $x^2-(2+m)x+9=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(2+m)^2-4\cdot 9<0$

$m^2+4m-32<0,\quad (m+8)(m-4)<0$

$\therefore -8<m<4$

따라서 정수 m의 최댓값은 3, 최솟값은 -7이므로 구하는 합은

$3+(-7)=-4$

답 ②

0871 $y=x^2+(2-m)x+1$의 그래프가 x축과 만나지 않으려면 모든 실수 x에 대하여 $x^2+(2-m)x+1>0$이 성립해야 한다.
따라서 이차방정식 $x^2+(2-m)x+1=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(2-m)^2-4\cdot 1<0$

$m^2-4m<0,\quad m(m-4)<0$

$\therefore 0<m<4$

답 $0<m<4$

0872 이차함수 $y=ax^2-6x-3$의 그래프가 직선 $y=2ax+1$보다 항상 아래쪽에 있으려면 모든 실수 x에 대하여 $ax^2-6x-3<2ax+1$, 즉 $ax^2-2(a+3)x-4<0$이 성립해야 하므로 $\quad a<0$ …… ㉠
또 이차방정식 $ax^2-2(a+3)x-4=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=\{-(a+3)\}^2-a\cdot(-4)<0$

$a^2+10a+9<0,\quad (a+9)(a+1)<0$

$\therefore -9<a<-1$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$-9<a<-1$

따라서 정수 a는 $-8, -7, \cdots, -2$의 7개이다.

답 7

0873 함수 $y=kx^2-4x+4$의 그래프가 $y=-2x^2+2kx$의 그래프보다 항상 위쪽에 있으려면 모든 실수 x에 대하여 $kx^2-4x+4>-2x^2+2kx$, 즉 $(k+2)x^2-2(k+2)x+4>0$이 성립해야 한다.

(i) $k=-2$일 때
$0\cdot x^2-0\cdot x+4=4>0$이므로 모든 실수 x에 대하여 부등식이 성립한다.

(ii) $k>-2$일 때
이차방정식 $(k+2)x^2-2(k+2)x+4=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=\{-(k+2)\}^2-(k+2)\cdot 4<0$

$k^2-4<0,\quad (k+2)(k-2)<0$

$\therefore -2<k<2$

(i), (ii)에서 구하는 k의 값의 범위는

$-2\le k<2$

답 ④

유형 14 최대·최소와 이차부등식 본책 130쪽

(i) 주어진 식을 한 문자에 대한 이차방정식으로 생각한다.
(ii) (판별식)≥ 0임을 이용하여 부등식을 세운다.
(iii) (ii)에서 최댓값 또는 최솟값을 구한다.

0874 주어진 식을 y에 대하여 내림차순으로 정리하면

$y^2+2xy+2x^2-9=0$

이 식을 y에 대한 이차방정식으로 생각하면 이 방정식을 만족시키는 실수 y가 존재해야 한다. 이 방정식의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=x^2-(2x^2-9)\ge 0$

$x^2-9\le 0,\quad (x+3)(x-3)\le 0$

$\therefore -3\le x\le 3$

따라서 x의 최댓값은 3이다.

답 ③

0875 $x+y=k$라 하면 $\quad y=-x+k$
이것을 $2x^2+y^2=1$에 대입하면

$2x^2+(-x+k)^2=1$

$\therefore 3x^2-2kx+k^2-1=0$ … ❶

이 식을 x에 대한 이차방정식으로 생각하면 이 방정식을 만족시키는 실수 x가 존재해야 한다. 이 방정식의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=(-k)^2-3(k^2-1)\ge 0,\quad -2k^2+3\ge 0$

$2k^2-3\le 0,\quad (\sqrt{2}k+\sqrt{3})(\sqrt{2}k-\sqrt{3})\le 0$

$\therefore -\dfrac{\sqrt{6}}{2}\le k\le \dfrac{\sqrt{6}}{2}$ … ❷

따라서 $x+y$의 최댓값은 $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$이다. … ❸

답 $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

채점 기준	비율
❶ $x+y=k$로 놓고 주어진 식을 x, k에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40%
❷ k의 값의 범위를 구할 수 있다.	50%
❸ $x+y$의 최댓값을 구할 수 있다.	10%

유형 15 이차부등식의 활용 본책 130쪽

(i) 주어진 조건에 맞게 부등식을 세운다.
(ii) 부등식을 풀어 해를 구한다. 이때 미지수의 범위에 주의한다.

0876 새로 만든 직사각형의 가로, 세로의 길이는 각각

$(40-x)$ cm, $(25+x)$ cm

이므로 넓이가 750 cm^2 이상이 되려면

$(40-x)(25+x)\ge 750,\quad x^2-15x-250\le 0$

$(x+10)(x-25)\le 0\quad \therefore -10\le x\le 25$

그런데 $0\le \underbrace{x<40}_{\substack{40-x>0\text{이어야 하므로}\\ x<40}}$이어야 하므로 $\quad 0\le x\le 25$

따라서 x의 최댓값은 25이다.

답 ①

0877 축구공의 높이가 4 m 이상이려면

$-5t^2+12t\geq 4,\quad 5t^2-12t+4\leq 0$

$(5t-2)(t-2)\leq 0\quad \therefore \frac{2}{5}\leq t\leq 2$

따라서 높이가 4 m 이상인 시간은 $2-\frac{2}{5}=\frac{8}{5}$(초) 동안이다.

답 $\frac{8}{5}$초

0878 가격을 $1000x$원 할인한다고 하면 하루에 판매량이 $5x$장 늘어나므로 하루 판매액은

$(20000-1000x)(30+5x)$(원)

$20000-1000x>0$이어야 하므로 $x<20$

하루 판매액이 80만 원 이상이려면

$(20000-1000x)(30+5x)\geq 800000$

$(20-x)(6+x)\geq 160,\quad x^2-14x+40\leq 0$

$(x-4)(x-10)\leq 0\quad \therefore 4\leq x\leq 10$

이때 $4000\leq 1000x\leq 10000$이므로 할인할 수 있는 금액의 범위는 4000원 이상 10000원 이하이다.

따라서 할인할 수 있는 금액의 최솟값은 4000원이다.

답 4000원

유형 16 연립이차부등식의 풀이

본책 131쪽

(i) 각각의 이차부등식의 해를 구한다.

(ii) (i)에서 구한 해의 공통부분을 구한다.

0879 $x^2-3x+2>0$에서 $\quad (x-1)(x-2)>0$

$\therefore x<1$ 또는 $x>2$ ······ ㉠

$x^2-x-12\leq 0$에서 $\quad (x+3)(x-4)\leq 0$

$\therefore -3\leq x\leq 4$ ······ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$-3\leq x<1$ 또는 $2<x\leq 4$

따라서 정수 x는 $-3, -2, -1, 0, 3, 4$의 6개이다.

답 ③

0880 $x^2-6x+8\geq 0$에서 $\quad (x-2)(x-4)\geq 0$

$\therefore x\leq 2$ 또는 $x\geq 4$ ······ ㉠

$3x^2-5x-12<0$에서 $\quad (3x+4)(x-3)<0$

$\therefore -\frac{4}{3}<x<3$ ······ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$-\frac{4}{3}<x\leq 2$

답 $-\frac{4}{3}<x\leq 2$

0881 $2x^2-5x+1\leq x^2+3x+10$에서

$x^2-8x-9\leq 0,\quad (x+1)(x-9)\leq 0$

$\therefore -1\leq x\leq 9$ ······ ㉠ ··· ❶

$x^2+3x+10<3x^2-11x+30$에서

$-2x^2+14x-20<0,\quad x^2-7x+10>0$

$(x-2)(x-5)>0$

$\therefore x<2$ 또는 $x>5$ ······ ㉡ ··· ❷

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$-1\leq x<2$ 또는 $5<x\leq 9$ ··· ❸

따라서 자연수 x는 1, 6, 7, 8, 9이므로 구하는 합은

$1+6+7+8+9=31$ ··· ❹

답 31

채점 기준	비율
❶ $2x^2-5x+1\leq x^2+3x+10$의 해를 구할 수 있다.	30%
❷ $x^2+3x+10<3x^2-11x+30$의 해를 구할 수 있다.	30%
❸ 주어진 부등식의 해를 구할 수 있다.	20%
❹ 자연수 x의 값의 합을 구할 수 있다.	20%

0882 $x^2+x-6\leq 0$에서 $\quad (x+3)(x-2)\leq 0$

$\therefore -3\leq x\leq 2$ ······ ㉠

$x^2+5\geq 2x^2+4x$에서

$x^2+4x-5\leq 0,\quad (x+5)(x-1)\leq 0$

$\therefore -5\leq x\leq 1$ ······ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$-3\leq x\leq 1$

해가 $-3\leq x\leq 1$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x+3)(x-1)\leq 0\quad \therefore x^2+2x-3\leq 0$

양변에 -3을 곱하면 $\quad -3x^2-6x+9\geq 0$

이 부등식이 $ax^2+bx+9\geq 0$과 같으므로

$a=-3,\ b=-6$

$\therefore a+b=-9$

답 ①

유형 17 절댓값 기호를 포함한 연립부등식의 풀이

본책 131쪽

양수 c에 대하여

① $|f(x)|<c \Rightarrow -c<f(x)<c$

② $|f(x)|>c \Rightarrow f(x)<-c$ 또는 $f(x)>c$

0883 $|2x+3|>4$에서 $\quad 2x+3<-4$ 또는 $2x+3>4$

$\therefore x<-\frac{7}{2}$ 또는 $x>\frac{1}{2}$ ······ ㉠

$2x^2-5x-3<0$에서 $\quad (2x+1)(x-3)<0$

$\therefore -\frac{1}{2}<x<3$ ······ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $\quad \frac{1}{2}<x<3$

따라서 정수 x는 1, 2의 2개이다.

답 ②

0884 $|x^2+2x-4|<4$에서 $\quad -4<x^2+2x-4<4$

$-4<x^2+2x-4$에서

$x^2+2x>0,\quad x(x+2)>0$

$\therefore x<-2$ 또는 $x>0$ ······ ㉠

$x^2+2x-4<4$에서 $\quad x^2+2x-8<0$

$(x+4)(x-2)<0\quad \therefore -4<x<2$ ······ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$-4<x<-2$ 또는 $0<x<2$

답 $-4<x<-2$ 또는 $0<x<2$

0885 $x^2+2x-8>0$에서 $(x+4)(x-2)>0$

$\therefore x<-4$ 또는 $x>2$ ⋯⋯ ㉠

$x^2-5|x|+6\le 0$에서

(i) $x\ge 0$일 때

$x^2-5x+6\le 0$, $(x-2)(x-3)\le 0$

$\therefore 2\le x\le 3$

그런데 $x\ge 0$이므로 $2\le x\le 3$

(ii) $x<0$일 때

$x^2+5x+6\le 0$, $(x+3)(x+2)\le 0$

$\therefore -3\le x\le -2$

그런데 $x<0$이므로 $-3\le x\le -2$

(i), (ii)에서 $x^2-5|x|+6\le 0$의 해는

$-3\le x\le -2$ 또는 $2\le x\le 3$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $2<x\le 3$

따라서 $\alpha=2$, $\beta=3$이므로 $\alpha\beta=6$ 답 6

다른 풀이 $x^2=|x|^2$이므로 주어진 부등식은

$|x|^2-5|x|+6\le 0$, $(|x|-2)(|x|-3)\le 0$

$\therefore 2\le |x|\le 3$

$|x|\ge 2$에서 $x\le -2$ 또는 $x\ge 2$ ⋯⋯ ㉠

$|x|\le 3$에서 $-3\le x\le 3$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$-3\le x\le -2$ 또는 $2\le x\le 3$

유형 18 해가 주어진 연립이차부등식 본책 131쪽

(i) 연립부등식을 풀어 해를 수직선 위에 나타낸다.
(ii) 주어진 해와 비교하여 미지수의 값의 범위를 구한다.

0886 $x^2-x-2<0$에서 $(x+1)(x-2)<0$

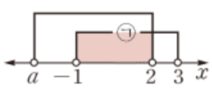
$\therefore -1<x<2$

즉 주어진 연립부등식의 해는 $-1<x<2$이다.

$x^2-2x-3<0$에서 $(x+1)(x-3)<0$

$\therefore -1<x<3$ ⋯⋯ ㉠

따라서 ㉠과 $(x-2)(x-a)<0$의 해의 공통부분이 $-1<x<2$이므로 오른쪽 그림에서



$a\le -1$ 답 $a\le -1$

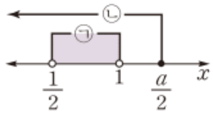
참고 $a=-1$이면 $(x-2)(x-a)<0$의 해는 $-1<x<2$이므로 ㉠과의 공통부분은 $-1<x<2$
따라서 주어진 조건을 만족시킨다.

0887 $2x^2+1<3x$에서 $2x^2-3x+1<0$

$(2x-1)(x-1)<0$ $\therefore \frac{1}{2}<x<1$ ⋯⋯ ㉠

$3x\le x+a$에서 $2x\le a$ $\therefore x\le \frac{a}{2}$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분이 $\frac{1}{2}<x<1$이므로 오른쪽 그림에서



$\frac{a}{2}\ge 1$ $\therefore a\ge 2$

답 ⑤

0888 $a<b<c$이므로

$(x-a)(x-b)>0$에서 $x<a$ 또는 $x>b$ ⋯⋯ ㉠

$(x-b)(x-c)>0$에서 $x<b$ 또는 $x>c$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$x<a$ 또는 $x>c$

이므로 $a=-3$, $c=4$

즉 이차부등식 $x^2+ax-c\le 0$은 $x^2-3x-4\le 0$이므로

$(x+1)(x-4)\le 0$ $\therefore -1\le x\le 4$

따라서 x의 최댓값은 4, 최솟값은 -1이므로 구하는 합은

$4+(-1)=3$ 답 3

0889 $2|x-2|<a$에서 $|x-2|<\frac{a}{2}$

$-\frac{a}{2}<x-2<\frac{a}{2}$

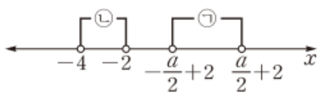
$\therefore -\frac{a}{2}+2<x<\frac{a}{2}+2$ ⋯⋯ ㉠ ⋯ ❶

$x^2+6x+8<0$에서 $(x+4)(x+2)<0$

$\therefore -4<x<-2$ ⋯⋯ ㉡ ⋯ ❷

주어진 연립부등식이 해를 갖지 않으려면 ㉠, ㉡의 공통부분이 존재하지 않아야 한다.

이때 $a>0$에서 $\frac{a}{2}+2>0$이므로 오른쪽 그림에서



$-\frac{a}{2}+2\ge -2$, $-\frac{a}{2}\ge -4$

$\therefore a\le 8$

그런데 $a>0$이므로 $0<a\le 8$ ⋯ ❸

답 $0<a\le 8$

채점 기준	비율
❶ $2\|x-2\|<a$의 해를 구할 수 있다.	20%
❷ $x^2+6x+8<0$의 해를 구할 수 있다.	20%
❸ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	60%

유형 19 정수인 해의 조건이 주어진 연립부등식 본책 132쪽

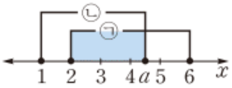
연립부등식의 정수인 해의 조건이 주어지면
(i) 각 부등식의 해를 수직선 위에 나타낸다.
(ii) 공통부분이 주어진 조건을 만족하도록 하는 미지수의 값의 범위를 구한다.

0890 $x^2-8x+12\le 0$에서 $\quad (x-2)(x-6)\le 0$

$\therefore 2\le x\le 6$ …… ㉠

$x^2-(a+1)x+a\le 0$에서 $\quad (x-1)(x-a)\le 0$ …… ㉡

㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 정수 x가 3개이므로 오른쪽 그림에서



$4\le a<5$

답 $4\le a<5$

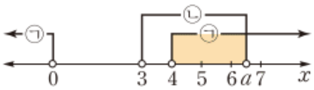
참고 $a\le 1$이면 주어진 연립부등식을 만족시키는 정수 x는 존재하지 않으므로 $a>1$이다. 따라서 부등식 $(x-1)(x-a)\le 0$의 해는 $1\le x\le a$이다.

0891 $x^2-4x>0$에서 $\quad x(x-4)>0$

$\therefore x<0$ 또는 $x>4$ …… ㉠

$x^2-(a+3)x+3a<0$에서 $\quad (x-3)(x-a)<0$ …… ㉡

㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 정수 x의 값이 5와 6뿐이려면 오른쪽 그림에서



$6<a\le 7$

답 ④

참고 $a\le 3$이면 두 부등식을 동시에 만족시키는 정수 x의 값이 5, 6이 될 수 없으므로 $a>3$이다. 따라서 부등식 $(x-3)(x-a)<0$의 해는 $3<x<a$이다.

0892 $x^2-4|x|<0$에서

$x\ge 0$일 때, $\quad x^2-4x<0$

$x(x-4)<0 \quad \therefore 0<x<4$

그런데 $x\ge 0$이므로 $\quad 0<x<4$ …… ㉠

$x<0$일 때, $\quad x^2+4x<0$

$x(x+4)<0 \quad \therefore -4<x<0$

그런데 $x<0$이므로 $\quad -4<x<0$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $x^2-4|x|<0$의 해는

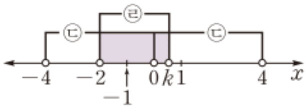
$-4<x<0$ 또는 $0<x<4$ …… ㉢

$x^2+(2-k)x-2k<0$에서 $\quad (x+2)(x-k)<0$

(i) $k>-2$일 때

$(x+2)(x-k)<0$에서 $\quad -2<x<k$ …… ㉣

㉢, ㉣을 동시에 만족시키는 정수 x가 오직 한 개이려면 오른쪽 그림에서

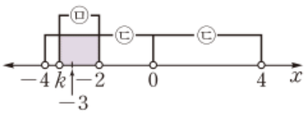


$-1<k\le 1$

(ii) $k<-2$일 때

$(x+2)(x-k)<0$에서 $\quad k<x<-2$ …… ㉤

㉢, ㉤을 동시에 만족시키는 정수 x가 오직 한 개이려면 오른쪽 그림에서



$k<-3$

(i), (ii)에서 $\quad k<-3$ 또는 $-1<k\le 1$

따라서 k의 최댓값은 1이다.

답 1

유형 20 연립이차부등식의 활용

본책 132쪽

(i) 구하는 값을 x로 놓고 연립부등식을 세운다.

(ii) 각 부등식의 해를 구하여 공통부분을 찾는다.

0893 주어진 그림에서 길의 넓이는

$(2x+8)(2x+5)-8\cdot 5=4x^2+26x\,(\mathrm{m}^2)$

길의 넓이가 90 m^2 이상 140 m^2 이하이어야 하므로

$90\le 4x^2+26x\le 140 \quad \therefore 45\le 2x^2+13x\le 70$

$45\le 2x^2+13x$에서

$2x^2+13x-45\ge 0, \quad (x+9)(2x-5)\ge 0$

$\therefore x\le -9$ 또는 $x\ge \dfrac{5}{2}$

그런데 $x>0$이므로 $\quad x\ge \dfrac{5}{2}$ …… ㉠

$2x^2+13x\le 70$에서

$2x^2+13x-70\le 0, \quad (x+10)(2x-7)\le 0$

$\therefore -10\le x\le \dfrac{7}{2}$

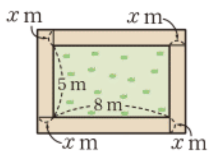
그런데 $x>0$이므로 $\quad 0<x\le \dfrac{7}{2}$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$\dfrac{5}{2}\le x\le \dfrac{7}{2}$

답 ③

참고 오른쪽 그림과 같이 길을 네 개의 직사각형으로 나누어 넓이를 구할 수도 있다.



$2(5+x)x+2(8+x)x$

$=4x^2+26x\,(\mathrm{m}^2)$

0894 세 변 중 가장 긴 변의 길이는 $2x+1$이므로 삼각형이 만들어질 조건에 의하여

$2x+1<(2x-1)+x$

$\therefore x>2$ …… ㉠

둔각삼각형이려면 $\quad (2x+1)^2>(2x-1)^2+x^2$

$x^2-8x<0, \quad x(x-8)<0$

$\therefore 0<x<8$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $\quad 2<x<8$

따라서 자연수 x는 3, 4, 5, 6, 7의 5개이다.

답 5

SSEN 특강

삼각형의 세 변의 길이가 a, b, $c\,(a\le b\le c)$일 때

① $c^2<a^2+b^2$ ➡ 예각삼각형

② $c^2=a^2+b^2$ ➡ 빗변의 길이가 c인 직각삼각형

③ $c^2>a^2+b^2$ ➡ 둔각삼각형

0895 직사각형의 둘레의 길이가 36 cm이므로 가로의 길이를 x cm라 하면 세로의 길이는 $(18-x)$ cm이다. ··· ❶

직사각형의 넓이가 56 cm^2 이상이므로

$x(18-x)\ge 56$

$x^2-18x+56\le 0, \quad (x-4)(x-14)\le 0$

$\therefore 4\le x\le 14$ …… ㉠

이때 가로의 길이가 세로의 길이보다 길거나 같으므로

$x\ge 18-x, \quad 2x\ge 18 \quad \therefore x\ge 9$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$9\le x\le 14$ ⋯ ❷

따라서 가로의 길이의 최댓값은 14 cm, 최솟값은 9 cm이다. ⋯ ❸

답 최댓값: 14 cm, 최솟값: 9 cm

채점 기준	비율
❶ 가로, 세로의 길이를 미지수 x에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30%
❷ x의 값의 범위를 구할 수 있다.	60%
❸ 가로의 길이의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있다.	10%

유형 21 이차방정식의 근의 판별

본책 133쪽

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 D라 할 때

① 서로 다른 두 실근을 가지면 ➡ $D>0$

② 중근을 가지면 ➡ $D=0$

③ 서로 다른 두 허근을 가지면 ➡ $D<0$

0896 이차방정식 $4x^2-2(a-1)x-a^2+2=0$이 허근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\{-(a-1)\}^2-4(-a^2+2)<0$

$5a^2-2a-7<0,\quad (a+1)(5a-7)<0$

$\therefore -1<a<\frac{7}{5}$

따라서 정수 a의 값은 0, 1이므로 구하는 합은 1이다. 답 ④

0897 이차방정식 $x^2-2(k+1)x+k+7=0$이 서로 다른 두 실근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D_1이라 하면

$\frac{D_1}{4}=\{-(k+1)\}^2-(k+7)>0$

$k^2+k-6>0,\quad (k+3)(k-2)>0$

$\therefore k<-3$ 또는 $k>2$ ⋯⋯ ㉠

이차방정식 $x^2+kx-k^2+5k=0$이 허근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D_2라 하면

$D_2=k^2-4(-k^2+5k)<0$

$5k^2-20k<0,\quad 5k(k-4)<0$

$\therefore 0<k<4$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $2<k<4$

따라서 정수 k는 3의 1개이다. 답 ①

0898 $kx^2-4kx-(k-1)=0$이 이차방정식이므로

$k\ne 0$

이차방정식 $kx^2-4kx-(k-1)=0$이 실근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-2k)^2+k(k-1)\ge 0$

$5k^2-k\ge 0,\quad k(5k-1)\ge 0$

$\therefore k<0$ 또는 $k\ge\frac{1}{5}$ ($\because k\ne 0$) 답 $k<0$ 또는 $k\ge\frac{1}{5}$

0899 이차방정식 $x^2+2(2k-1)x+k^2+ak+1=0$이 실근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D_1이라 하면

$\frac{D_1}{4}=(2k-1)^2-(k^2+ak+1)\ge 0$

$3k^2-(4+a)k\ge 0$ ⋯⋯ ㉠

㉠이 실수 k의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므로 k에 대한 이차방정식 $3k^2-(4+a)k=0$의 판별식을 D_2라 하면

$D_2=\{-(4+a)\}^2-4\cdot 3\cdot 0\le 0$

$(a+4)^2\le 0\qquad \therefore a=-4$ 답 -4

유형 22 이차방정식의 실근의 부호

본책 133쪽

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 D라 하면

① 두 근이 모두 양수일 조건 ➡ $D\ge 0,\ -\frac{b}{a}>0,\ \frac{c}{a}>0$

② 두 근이 모두 음수일 조건 ➡ $D\ge 0,\ -\frac{b}{a}<0,\ \frac{c}{a}>0$

③ 두 근이 서로 다른 부호일 조건 ➡ $\frac{c}{a}<0$

0900 이차방정식 $x^2+2(m-1)x+m+5=0$의 두 근을 α, β라 하고 판별식을 D라 할 때, 두 근이 모두 음수이므로

(i) $\frac{D}{4}=(m-1)^2-(m+5)\ge 0$

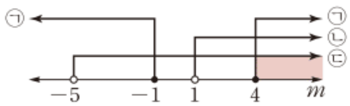
$m^2-3m-4\ge 0,\quad (m+1)(m-4)\ge 0$

$\therefore m\le -1$ 또는 $m\ge 4$ ⋯⋯ ㉠

(ii) $\alpha+\beta=-2(m-1)<0$

$m-1>0\qquad \therefore m>1$ ⋯⋯ ㉡

(iii) $\alpha\beta=m+5>0\qquad \therefore m>-5$ ⋯⋯ ㉢



이상에서 공통부분을 구하면 $m\ge 4$ 답 $m\ge 4$

0901 이차방정식 $x^2+(k+3)x+k+6=0$의 두 근을 α, β라 하고 판별식을 D라 할 때, 두 근이 모두 양수이려면

(i) $D=(k+3)^2-4(k+6)\ge 0$

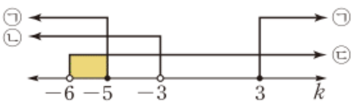
$k^2+2k-15\ge 0,\quad (k+5)(k-3)\ge 0$

$\therefore k\le -5$ 또는 $k\ge 3$ ⋯⋯ ㉠

(ii) $\alpha+\beta=-(k+3)>0$

$k+3<0\qquad \therefore k<-3$ ⋯⋯ ㉡

(iii) $\alpha\beta=k+6>0\qquad \therefore k>-6$ ⋯⋯ ㉢



이상에서 공통부분을 구하면 $-6<k\le -5$

따라서 실수 k의 최댓값은 -5이다. 답 ①

0902 이차방정식 $3x^2+(m^2+m-6)x+m^2-9=0$의 두 근을 α, β라 하면 두 근의 부호가 서로 다르므로

$\alpha\beta=\dfrac{m^2-9}{3}<0$, $\quad m^2-9<0$

$(m+3)(m-3)<0 \quad \therefore -3<m<3 \quad \cdots\cdots$ ㉠

또 두 근의 절댓값이 같으므로

$\alpha+\beta=-\dfrac{m^2+m-6}{3}=0$, $\quad m^2+m-6=0$

$(m+3)(m-2)=0$

$\therefore m=-3$ 또는 $m=2 \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 구하는 m의 값은 2이다. 답 2

SSEN 특강

근의 절댓값에 대한 조건

이차방정식의 두 근이 서로 다른 부호일 때

① |양수인 근|=|음수인 근|
➡ (두 근의 합)=0, (두 근의 곱)<0

② |양수인 근|>|음수인 근|
➡ (두 근의 합)>0, (두 근의 곱)<0

③ |양수인 근|<|음수인 근|
➡ (두 근의 합)<0, (두 근의 곱)<0

0903 이차방정식 $x^2-(k^2-4k+3)x-3k+5=0$의 두 근을 α, β라 하면 두 근의 부호가 서로 다르므로

$\alpha\beta=-3k+5<0 \quad \therefore k>\dfrac{5}{3} \quad \cdots\cdots$ ㉠ ➊

또 음수인 근의 절댓값이 양수인 근보다 크므로

$\alpha+\beta=k^2-4k+3<0$

$(k-1)(k-3)<0 \quad \therefore 1<k<3 \quad \cdots\cdots$ ㉡ ➋

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $\dfrac{5}{3}<k<3$ ➌

답 $\dfrac{5}{3}<k<3$

채점 기준	비율
➊ 두 근의 부호가 서로 다르도록 하는 k의 값의 범위를 구할 수 있다.	40%
➋ 음수인 근의 절댓값이 양수인 근보다 크도록 하는 k의 값의 범위를 구할 수 있다.	40%
➌ 조건을 모두 만족시키는 k의 값의 범위를 구할 수 있다.	20%

유형 23 이차방정식의 근의 분리

본책 134쪽

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ $(a>0)$의 판별식을 D라 하고, $f(x)=ax^2+bx+c$라 할 때

① 두 근이 모두 p보다 크다. ➡ $D\ge0$, $f(p)>0$, $-\dfrac{b}{2a}>p$

② 두 근이 모두 p보다 작다. ➡ $D\ge0$, $f(p)>0$, $-\dfrac{b}{2a}<p$

③ 두 근 사이에 p가 있다. ➡ $f(p)<0$

0904 $f(x)=x^2-2kx+2-k$라 하면 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이 모두 1보다 작으므로 $f(x)=0$의 판별식을 D라 하면

(i) $\dfrac{D}{4}=(-k)^2-(2-k)\ge0$에서

$k^2+k-2\ge0$, $\quad (k+2)(k-1)\ge0$

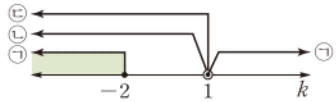
$\therefore k\le-2$ 또는 $k\ge1 \quad \cdots\cdots$ ㉠

(ii) $f(1)=1-2k+2-k>0$에서

$-3k+3>0 \quad \therefore k<1 \quad \cdots\cdots$ ㉡

(iii) 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식이 $x=k$이므로

$k<1 \quad \cdots\cdots$ ㉢



이상에서 공통부분을 구하면 $\quad k\le-2$ 답 $k\le-2$

0905 $f(x)=x^2+3px+3p-1$이라 하면 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이 모두 -3보다 크므로 $f(x)=0$의 판별식을 D라 하면

(i) $D=(3p)^2-4(3p-1)\ge0$에서

$9p^2-12p+4\ge0 \quad \therefore (3p-2)^2\ge0$

따라서 p는 모든 실수이다.

(ii) $f(-3)=9-9p+3p-1>0$에서

$-6p+8>0 \quad \therefore p<\dfrac{4}{3}$

(iii) 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식이 $x=-\dfrac{3}{2}p$이므로

$-\dfrac{3}{2}p>-3 \quad \therefore p<2$

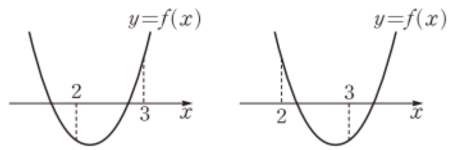
이상에서 공통부분을 구하면 $\quad p<\dfrac{4}{3}$

따라서 정수 p의 최댓값은 1이다. 답 ②

0906 $x^2-5x+6=0$에서 $\quad (x-2)(x-3)=0$

$\therefore x=2$ 또는 $x=3$

즉 $x^2+ax-8=0$의 한 근만이 2와 3 사이에 있어야 하므로 $f(x)=x^2+ax-8$이라 하면 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같아야 한다.



따라서 $f(2)f(3)<0$이므로 $\quad (4+2a-8)(9+3a-8)<0$

$(2a-4)(3a+1)<0$

$\therefore -\dfrac{1}{3}<a<2$ 답 $-\dfrac{1}{3}<a<2$

0907 $f(x)=x^2+2(k-1)x-k+3$이라 하면 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이 모두 0과 3 사이에 있으므로 이차방정식 $f(x)=0$의 판별식을 D라 하면

(i) $\frac{D}{4}=(k-1)^2-(-k+3)\geq 0$에서

$k^2-k-2\geq 0,\quad (k+1)(k-2)\geq 0$

$\therefore k\leq -1$ 또는 $k\geq 2$ …… ㉠

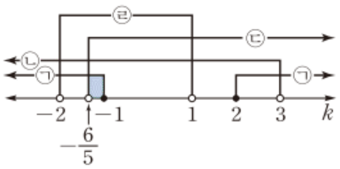
(ii) $f(0)=-k+3>0$에서 $\quad k<3$ …… ㉡

$f(3)=9+6(k-1)-k+3>0$에서

$5k+6>0\quad \therefore k>-\frac{6}{5}$ …… ㉢

(iii) 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식이 $x=-k+1$이므로

$0<-k+1<3\quad \therefore -2<k<1$ …… ㉣



이상에서 공통부분을 구하면 $\quad -\frac{6}{5}<k\leq -1$

답 $-\frac{6}{5}<k\leq -1$

유형 24 사차방정식의 근의 판별

본책 134쪽

사차방정식 $x^4+ax^2+b=0$이

① 서로 다른 네 실근을 갖는다.

➡ $x^2=X$로 놓으면 이차방정식 $X^2+aX+b=0$의 두 근이 모두 양수이다.

➡ $a^2-4b>0,\ -a>0,\ b>0$

② 서로 다른 두 실근과 두 허근을 갖는다.

➡ $x^2=X$로 놓으면 이차방정식 $X^2+aX+b=0$의 두 근이 서로 다른 부호이다.

➡ $b<0$

0908 $x^2=X$로 놓으면 주어진 방정식은

$X^2+mX-m+3=0$ …… ㉠

이때 사차방정식이 서로 다른 네 실근을 가지려면 방정식 ㉠의 두 근이 모두 양수이어야 하므로 ㉠의 판별식을 D라 하면

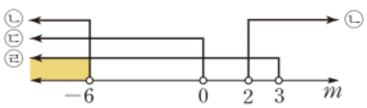
(i) $D=m^2-4(-m+3)>0$에서

$m^2+4m-12>0,\quad (m+6)(m-2)>0$

$\therefore m<-6$ 또는 $m>2$ …… ㉡

(ii) (두 근의 합)$=-m>0\quad \therefore m<0$ …… ㉢

(iii) (두 근의 곱)$=-m+3>0\quad \therefore m<3$ …… ㉣



이상에서 공통부분을 구하면 $\quad m<-6$ 답 $m<-6$

0909 $x^2=X$로 놓으면 주어진 방정식은

$X^2-kX+k^2-2k-8=0$ …… ㉠

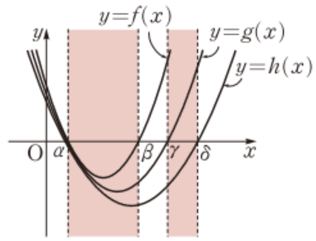
이때 사차방정식이 서로 다른 두 실근과 서로 다른 두 허근을 가지려면 방정식 ㉠의 두 근이 서로 다른 부호이어야 하므로

(두 근의 곱)$=k^2-2k-8<0$

$(k+2)(k-4)<0\quad \therefore -2<k<4$

따라서 자연수 k는 1, 2, 3의 3개이다. 답 ③

0910 전략 $abc\leq 0$이면 $a\leq 0,\ b\leq 0,\ c\leq 0$ 또는 $a\geq 0,\ b\geq 0,\ c\leq 0$ 또는 $a\geq 0,\ b\leq 0,\ c\geq 0$ 또는 $a\leq 0,\ b\geq 0,\ c\geq 0$임을 이용한다.



풀이 주어진 그래프에서 부등식 $f(x)g(x)h(x)\leq 0$의 해는

$\alpha\leq x\leq\beta$ 또는 $\gamma\leq x\leq\delta$ ($f(x)\geq 0,\ g(x)\geq 0,\ h(x)\leq 0$)

이때 $\alpha\leq\frac{\alpha+\beta}{2}\leq\beta$,

$\gamma\leq\frac{\gamma+\delta}{2}\leq\delta$이므로 해가 아닌 것은 ③이다. 답 ③

다른 풀이 ① $f(\alpha)=g(\alpha)=h(\alpha)=0$이므로

$f(\alpha)g(\alpha)h(\alpha)=0$

② $f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)<0,\ g\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)<0,\ h\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)<0$이므로

$f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)g\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)h\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)<0$

③ $f\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right)>0,\ g\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right)<0,\ h\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right)<0$이므로

$f\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right)g\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right)h\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right)>0$

④ $f\left(\frac{\gamma+\delta}{2}\right)>0,\ g\left(\frac{\gamma+\delta}{2}\right)>0,\ h\left(\frac{\gamma+\delta}{2}\right)<0$이므로

$f\left(\frac{\gamma+\delta}{2}\right)g\left(\frac{\gamma+\delta}{2}\right)h\left(\frac{\gamma+\delta}{2}\right)<0$

⑤ $h(\delta)=0$이므로 $\quad f(\delta)g(\delta)h(\delta)=0$

따라서 부등식 $f(x)g(x)h(x)\leq 0$의 해가 아닌 것은 ③이다.

0911 전략 $f(x)\geq 0$, $f(x)<0$일 때로 나누어 $g(x)$를 구한다.

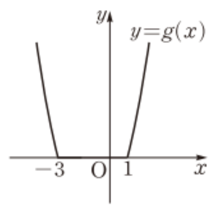
풀이 (i) $f(x)\geq 0$, 즉 $x\leq -3$ 또는 $x\geq 1$일 때

$g(x)=\frac{f(x)+f(x)}{2}=f(x)$

(ii) $f(x)<0$, 즉 $-3<x<1$일 때

$g(x)=\frac{f(x)-f(x)}{2}=0$

(i), (ii)에서 $\quad g(x)=\begin{cases} f(x) & (x\leq -3 \text{ 또는 } x\geq 1) \\ 0 & (-3<x<1)\end{cases}$



따라서 $y=g(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

ㄱ. $f(x)=x^2+2x-3=(x+1)^2-4$이므로 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=-1$에 대하여 대칭이다.

따라서 $y=g(x)$의 그래프도 직선 $x=-1$에 대하여 대칭이다.

ㄴ. 직선 $y=3$은 $y=g(x)$의 그래프와 서로 다른 두 점에서 만나므로 방정식 $g(x)=3$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.
ㄷ. 부등식 $g(x)\le 0$의 해는 $-3\le x\le 1$이다.
이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

0912 전략 두 이차함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프의 축이 일치함을 이용한다.

풀이 두 이차함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프의 교점의 좌표가 $(-1,\ k)$, $(5,\ k)$이므로 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프의 축이 일치한다. 그런데 $y=f(x)$의 x^2의 계수가 1이고 $y=g(x)$의 x^2의 계수가 -1이므로 x의 계수의 절댓값이 같고 부호는 반대이다.
따라서 $f(x)=x^2+ax+b$, $g(x)=-x^2-ax+c$ (a, b, c는 상수)라 하면 방정식 $f(x)=g(x)$, 즉 $2x^2+2ax+b-c=0$의 두 근이 -1, 5이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$-1+5=-\frac{2a}{2},\ (-1)\cdot 5=\frac{b-c}{2}$$

$$\therefore a=-4,\ b-c=-10 \quad \cdots\cdots ㉠$$

이때 $g(0)=c$이므로 $f(x)<g(0)+2$에서

$$x^2+ax+b<c+2 \qquad \therefore x^2+ax+b-c-2<0$$

이 식에 ㉠을 대입하면

$$x^2-4x-12<0, \qquad (x+2)(x-6)<0$$

$$\therefore -2<x<6$$

따라서 $\alpha=-2$, $\beta=6$이므로 $\alpha+\beta=4$ 답 4

0913 전략 $a<0$, $a=0$, $a>0$인 경우로 나누어 주어진 부등식의 해를 구해 본다.

풀이 (i) $a<0$일 때

$a(x-a)(x-a^2)<0$에서 $(x-a)(x-a^2)>0$

$\therefore x<a$ 또는 $x>a^2$

즉 $a<0$일 때 주어진 부등식을 만족시키는 정수 x는 무수히 많다.

(ii) $a=0$일 때

$a(x-a)(x-a^2)<0$에서 $0<0$이므로 주어진 부등식을 만족시키는 정수 x는 존재하지 않는다.

(iii) $a>0$일 때

$a(x-a)(x-a^2)<0$에서 $(x-a)(x-a^2)<0$

$\therefore a<x<a^2$

즉 $a>0$일 때 주어진 부등식을 만족시키는 정수 x가 오직 한 개뿐이려면 $a=2$이어야 한다.

이상에서 구하는 정수 a의 값은 2이다. 답 2

참고 $a=2$일 때 주어진 부등식의 해는 $2<x<4$이므로 주어진 부등식을 만족시키는 정수 x는 3뿐이다.

0914 전략 주어진 이차부등식의 해를 구한 후 조건을 만족시키도록 a에 대한 부등식을 세운다.

풀이 $2x^2-(3a+8)x-2a^2+a+6<0$에서

$$2x^2-(3a+8)x-(a-2)(2a+3)<0$$

$$(2x+a-2)(x-2a-3)<0$$

이때 $a>0$이므로 주어진 이차부등식의 해는

$$-\frac{a-2}{2}<x<2a+3$$

이 부등식을 만족시키는 정수 x가 9개이므로

$$(2a+3)-10\le -\frac{a-2}{2}<(2a+3)-9$$

$$\therefore 2a-7\le -\frac{a-2}{2}<2a-6$$

$2a-7\le -\dfrac{a-2}{2}$에서 $\quad 4a-14\le -a+2$

$$5a\le 16 \qquad \therefore a\le \frac{16}{5} \quad \cdots\cdots ㉠$$

$-\dfrac{a-2}{2}<2a-6$에서 $\quad -a+2<4a-12$

$$-5a<-14 \qquad \therefore a>\frac{14}{5} \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $\quad \dfrac{14}{5}<a\le \dfrac{16}{5}$

따라서 양의 정수 a의 값은 3이다. 답 3

0915 전략 $\sqrt{A}$가 순허수가 되려면 $A<0$이어야 함을 이용한다.

풀이 모든 실수 x에 대하여 $\sqrt{(k+1)x^2-(k+1)x-1}$이 순허수가 되려면 모든 실수 x에 대하여 부등식

$$(k+1)x^2-(k+1)x-1<0 \quad \cdots\cdots ㉠$$

이 성립해야 한다.

(i) $k=-1$일 때

$0\cdot x^2-0\cdot x-1=-1<0$이므로 ㉠은 모든 실수 x에 대하여 성립한다.

(ii) $k\ne -1$일 때

모든 실수 x에 대하여 ㉠이 성립하려면

$$k+1<0 \qquad \therefore k<-1 \quad \cdots\cdots ㉡$$

또 이차방정식 $(k+1)x^2-(k+1)x-1=0$의 판별식을 D라 하면

$$D=\{-(k+1)\}^2+4(k+1)<0$$

$$k^2+6k+5<0, \qquad (k+5)(k+1)<0$$

$$\therefore -5<k<-1 \quad \cdots\cdots ㉢$$

㉡, ㉢의 공통부분을 구하면 $\quad -5<k<-1$

(i), (ii)에서 $\quad -5<k\le -1$ 답 ②

0916 전략 이차부등식 $x^2+ax+b\ge 0$이 항상 성립하려면 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 판별식 D에 대하여 $D\le 0$이어야 함을 이용한다.

풀이 모든 실수 x에 대하여 $-x^2+3x+2\le mx+n$, 즉 $x^2+(m-3)x+n-2\ge 0$이 성립하므로 이차방정식 $x^2+(m-3)x+n-2=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$$D_1=(m-3)^2-4(n-2)\le 0$$

$$m^2-6m-4n+17\le 0$$

$$\therefore 4n\ge m^2-6m+17 \quad \cdots\cdots ㉠$$

모든 실수 x에 대하여 $mx+n\le x^2-x+4$, 즉 $x^2-(m+1)x+4-n\ge 0$이 성립하므로 이차방정식 $x^2-(m+1)x+4-n=0$의 판별식을 D_2라 하면

$D_2=\{-(m+1)\}^2-4(4-n)\le 0$

$m^2+2m+4n-15\le 0$

$\therefore\ 4n\le -m^2-2m+15$ …… ㉡

㉠, ㉡에 의하여

$m^2-6m+17\le 4n\le -m^2-2m+15$ …… ㉢

이므로

$m^2-6m+17\le -m^2-2m+15$

$2m^2-4m+2\le 0,\quad 2(m-1)^2\le 0$

$\therefore\ m=1$

이것을 ㉢에 대입하면

$12\le 4n\le 12,\quad 3\le n\le 3\quad \therefore\ n=3$

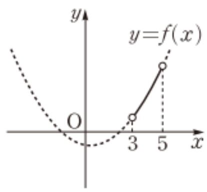
$\therefore\ m^2+n^2=10$ 답 ②

0917 전략 $f(x)=x^2+2ax-3a^2$으로 놓고 $y=f(x)$의 그래프를 그려 본다.

풀이 $x^2+2ax>3a^2$에서 $x^2+2ax-3a^2>0$

$f(x)=x^2+2ax-3a^2$이라 하면

$f(0)=-3a^2\le 0$



이므로 $3<x<5$에서 $f(x)>0$이려면

$f(3)\ge 0$이어야 한다. 즉

$f(3)=9+6a-3a^2\ge 0$에서

$a^2-2a-3\le 0,\quad (a+1)(a-3)\le 0$

$\therefore\ -1\le a\le 3$ 답 ③

다른 풀이 $3<x<5$에서 이차부등식 $x^2+2ax>3a^2$이 항상 성립하려면 $3<x<5$가 $x^2+2ax>3a^2$의 해에 포함되어야 한다.

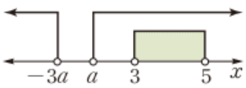
$x^2+2ax>3a^2$에서 $x^2+2ax-3a^2>0$

$\therefore\ (x+3a)(x-a)>0$

(i) $a\ge 0$일 때

$x<-3a$ 또는 $x>a$

이므로 오른쪽 그림에서



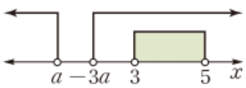
$a\le 3$

그런데 $a\ge 0$이므로 $0\le a\le 3$

(ii) $a<0$일 때

$x<a$ 또는 $x>-3a$

이므로 오른쪽 그림에서



$-3a\le 3\quad \therefore\ a\ge -1$

그런데 $a<0$이므로 $-1\le a<0$

(i), (ii)에서 $-1\le a\le 3$

0918 전략 임의의 실수 x_1, x_2에 대하여 $f(x_1)>g(x_2)$가 성립하려면 $f(x)$의 최솟값이 $g(x)$의 최댓값보다 커야 함을 이용한다.

풀이 $f(x)=x^2+x-a^2=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-a^2-\frac{1}{4}$이므로 $f(x)$의 최솟값은 $-a^2-\frac{1}{4}$이다.

또 $g(x)=-x^2-2x+3a=-(x+1)^2+3a+1$이므로 $g(x)$의 최댓값은 $3a+1$이다.

임의의 실수 x_1, x_2에 대하여 $f(x_1)>g(x_2)$가 성립하려면

$-a^2-\frac{1}{4}>3a+1,\quad 4a^2+12a+5<0$

$(2a+5)(2a+1)<0\quad \therefore\ -\frac{5}{2}<a<-\frac{1}{2}$

따라서 정수 a의 최댓값은 -1이다. 답 -1

참고 모든 실수 x에 대하여 부등식 $x^2+x-a^2>-x^2-2x+3a$가 성립할 조건을 구하지 않도록 주의한다.

0919 전략 A지점과 보관창고 사이의 거리를 x km라 하고 운송비의 조건을 이용하여 x에 대한 부등식을 세운다.

풀이 보관창고가 A지점에서 x km 떨어져 있다고 하면 보관창고와 B지점 사이의 거리는 $10+x$ (km)

보관창고와 C지점 사이의 거리는 $20-x$ (km)

이때 $\overline{AC}=20$ km이므로 $0<x<20$ …… ㉠

공장과 보관창고와의 거리가 x km일 때, 제품 한 개당 운송비는 x^2원이므로 B의 공장에서 하루에 생산된 제품의 운송비는

$200(10+x)^2$ (원)

A의 공장에서 하루에 생산된 제품의 운송비는

$100x^2$ (원)

C의 공장에서 하루에 생산된 제품의 운송비는

$300(20-x)^2$ (원)

하루 운송비가 155000원 이하가 되어야 하므로

$200(10+x)^2+100x^2+300(20-x)^2\le 155000$

$3x^2-40x-75\le 0,\quad (3x+5)(x-15)\le 0$

$\therefore\ -\frac{5}{3}\le x\le 15$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $0<x\le 15$

따라서 보관창고는 A지점에서 최대 15 km 떨어진 지점까지 지을 수 있다. 답 ④

0920 전략 $[x]=n$일 때 $n\le x<n+1$임을 이용한다.

풀이 $[x]^2-7[x]+10\le 0$에서 $([x]-2)([x]-5)\le 0$

$\therefore\ 2\le [x]\le 5$

이때 $[x]$의 값은 정수이므로 $[x]=2,\ 3,\ 4,\ 5$

$[x]=2$에서 $2\le x<3$

$[x]=3$에서 $3\le x<4$

$[x]=4$에서 $4\le x<5$

$[x]=5$에서 $5\le x<6$

$\therefore\ 2\le x<6$ …… ㉠

$x^2-5x\le 6x-24$에서 $x^2-11x+24\le 0$

$(x-3)(x-8)\le 0\quad \therefore\ 3\le x\le 8$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $3\le x<6$

따라서 정수 x는 3, 4, 5의 3개이다. 답 3

0921 전략 각 부등식에 $x=1$을 대입하여 n의 값을 구한다.

풀이 $6x^2-11nx+3n^2\le 0$에 $x=1$을 대입하면

$6-11n+3n^2\le 0,\quad 3n^2-11n+6\le 0$

$(3n-2)(n-3)\le 0\quad \therefore\ \frac{2}{3}\le n\le 3$

08 이차부등식

그런데 n은 정수이므로

$n=1$ 또는 $n=2$ 또는 $n=3$ …… ㉠

$|3x-2n|\ge 2$에 $x=1$을 대입하면

$|3-2n|\ge 2$

$3-2n\le -2$ 또는 $3-2n\ge 2$

$-2n\le -5$ 또는 $-2n\ge -1$

$\therefore n\le \frac{1}{2}$ 또는 $n\ge \frac{5}{2}$

그런데 n은 정수이므로 $n\le 0$ 또는 $n\ge 3$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $n=3$

따라서 연립부등식 $\begin{cases} 6x^2-33x+27\le 0 \\ |3x-6|\ge 2 \end{cases}$를 풀면

$6x^2-33x+27\le 0$에서 $2x^2-11x+9\le 0$

$(x-1)(2x-9)\le 0$ $\therefore 1\le x\le \frac{9}{2}$ …… ㉢

$|3x-6|\ge 2$에서 $3x-6\le -2$ 또는 $3x-6\ge 2$

$3x\le 4$ 또는 $3x\ge 8$

$\therefore x\le \frac{4}{3}$ 또는 $x\ge \frac{8}{3}$ …… ㉣

㉢, ㉣의 공통부분을 구하면 $1\le x\le \frac{4}{3}$ 또는 $\frac{8}{3}\le x\le \frac{9}{2}$

답 $1\le x\le \frac{4}{3}$ 또는 $\frac{8}{3}\le x\le \frac{9}{2}$

0922 전략 각 이차부등식을 풀어 해의 공통부분을 생각한다.

풀이 $x^2+x+n-n^2>0$에서

$(x+n)(x-n+1)>0$

이때 $-n<n-1$이므로 부등식의 해는

$x<-n$ 또는 $x>n-1$ …… ㉠

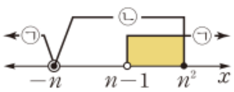
$x^2+(n-n^2)x-n^3\le 0$에서

$(x+n)(x-n^2)\le 0$

이때 $-n<n^2$이므로 부등식의 해는

$-n\le x\le n^2$ …… ㉡

$-n<n-1<n^2$이므로 ㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 x의 값의 범위는 오른쪽 그림에서



$n-1<x\le n^2$

이때 정수인 해의 개수가 13 이하가 되어야 하므로

$n^2-(n-1)\le 13$, $n^2-n-12\le 0$

$(n+3)(n-4)\le 0$ $\therefore -3\le n\le 4$

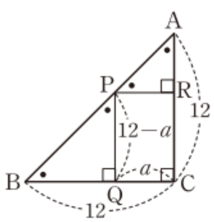
따라서 자연수 n은 1, 2, 3, 4이므로 구하는 합은

$1+2+3+4=10$

답 ④

0923 전략 □PQCR, △APR, △PBQ의 넓이를 각각 a에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 오른쪽 그림에서 △ABC, △APR, △PBQ는 모두 직각이등변삼각형이다.



$\overline{QC}=a$이므로

$0<a<12$

$\overline{PR}=a$, $\overline{BQ}=12-a$이므로

$\overline{AR}=\overline{PR}=a$, $\overline{PQ}=\overline{BQ}=12-a$

$\therefore$ □PQCR$=a(12-a)$,

△APR$=\frac{1}{2}a^2$, △PBQ$=\frac{1}{2}(12-a)^2$

이때 □PQCR>△APR, □PQCR>△PBQ이므로

$\begin{cases} a(12-a)>\frac{1}{2}a^2 & \cdots\cdots ㉠ \\ a(12-a)>\frac{1}{2}(12-a)^2 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $\frac{3}{2}a^2-12a<0$, $\frac{3}{2}a(a-8)<0$

$\therefore 0<a<8$ …… ㉢

㉡에서 $12a-a^2>\frac{1}{2}(144-24a+a^2)$

$a^2-16a+48<0$, $(a-4)(a-12)<0$

$\therefore 4<a<12$ …… ㉣

㉢, ㉣의 공통부분을 구하면 $4<a<8$

따라서 자연수 a는 5, 6, 7이므로 구하는 합은

$5+6+7=18$

답 18

0924 전략 두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프의 교점의 개수는 방정식 $f(x)=g(x)$의 서로 다른 실근의 개수와 같다.

풀이 이차함수 $y=x^2+kx+2$의 그래프와 직선 $y=x+1$의 교점의 개수는 이차방정식 $x^2+kx+2=x+1$, 즉 $x^2+(k-1)x+1=0$의 서로 다른 실근의 개수와 같다.

이차방정식 $x^2+(k-1)x+1=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(k-1)^2-4=k^2-2k-3=(k+1)(k-3)$

(i) $D=(k+1)(k-3)>0$, 즉 $k<-1$ 또는 $k>3$일 때

서로 다른 실근의 개수는 2이므로 $f(k)=2$

(ii) $D=(k+1)(k-3)=0$, 즉 $k=-1$ 또는 $k=3$일 때

서로 다른 실근의 개수는 1이므로 $f(k)=1$

(iii) $D=(k+1)(k-3)<0$, 즉 $-1<k<3$일 때

실근의 개수는 0이므로 $f(k)=0$

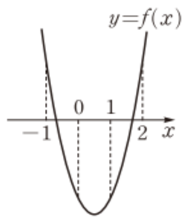
이상에서 함수 $y=f(k)$의 그래프는 ②이다.

답 ②

0925 전략 a가 양수인 경우와 음수인 경우로 나누어 생각한다.

풀이 $f(x)=ax^2-(a^2-4)x-2$라 하면 이차방정식 $f(x)=0$의 한 근은 -1과 0 사이에 있고, 다른 한 근은 1과 2 사이에 있다.

(i) $a>0$일 때, $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$f(-1)=a+a^2-4-2>0$에서

$a^2+a-6>0$

$(a+3)(a-2)>0$

$\therefore a<-3$ 또는 $a>2$

$f(0)=-2<0$

$f(1)=a-(a^2-4)-2<0$에서

$a^2-a-2>0$, $(a+1)(a-2)>0$

$\therefore a<-1$ 또는 $a>2$

$f(2)=4a-2(a^2-4)-2>0$에서

$a^2-2a-3<0$, $(a+1)(a-3)<0$

$\therefore -1<a<3$

따라서 a의 값의 범위는 $2<a<3$

(ii) $a<0$일 때, $f(0)=-2$이므로 조건을 만족시키는 $y=f(x)$의 그래프를 그릴 수 없다.

(i), (ii)에서 $2<a<3$ 답 $2<a<3$

참고 주어진 방정식이 이차방정식이므로 $a\neq0$이다. 따라서 $a>0$일 때와 $a<0$일 때로 나누어 생각한다.

0926 전략 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 x의 값을 기준으로 구간을 나눈다.

풀이 $x^2+x-2=0$에서 $(x+2)(x-1)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=1$

$3x+1=0$에서 $x=-\dfrac{1}{3}$

부등식 $|x^2+x-2|-|3x+1|\geq x^2-1$에서

(i) $x<-2$일 때

$(x^2+x-2)+(3x+1)\geq x^2-1$, $4x\geq0$

$\therefore x\geq0$

그런데 $x<-2$이므로 해는 없다.

(ii) $-2\leq x<-\dfrac{1}{3}$일 때

$-(x^2+x-2)+(3x+1)\geq x^2-1$

$x^2-x-2\leq0$, $(x+1)(x-2)\leq0$

$\therefore -1\leq x\leq2$

그런데 $-2\leq x<-\dfrac{1}{3}$이므로

$-1\leq x<-\dfrac{1}{3}$ ··· ❶

(iii) $-\dfrac{1}{3}\leq x<1$일 때

$-(x^2+x-2)-(3x+1)\geq x^2-1$

$x^2+2x-1\leq0$

$\therefore -1-\sqrt{2}\leq x\leq-1+\sqrt{2}$

그런데 $-\dfrac{1}{3}\leq x<1$이므로

$-\dfrac{1}{3}\leq x\leq-1+\sqrt{2}$

(iv) $x\geq1$일 때

$(x^2+x-2)-(3x+1)\geq x^2-1$

$-2x\geq2$ $\therefore x\leq-1$

그런데 $x\geq1$이므로 해는 없다. ··· ❷

이상에서 주어진 부등식의 해는

$-1\leq x\leq-1+\sqrt{2}$ ··· ❸

따라서 정수 x는 -1, 0의 2개이다. ··· ❹

답 2

채점 기준	비율
❶ $x<-2$, $-2\leq x<-\frac{1}{3}$일 때의 해를 각각 구할 수 있다.	30%
❷ $-\frac{1}{3}\leq x<1$, $x\geq1$일 때의 해를 각각 구할 수 있다.	30%
❸ 주어진 부등식의 해를 구할 수 있다.	20%
❹ 정수 x의 개수를 구할 수 있다.	20%

0927 전략 주어진 식을 한 문자에 대하여 내림차순으로 정리한 후 이차부등식이 항상 성립할 조건을 이용한다.

풀이 주어진 식을 x에 대하여 내림차순으로 정리하면

$x^2+2(2y-2)x+(4y^2+ay+b)>0$ ··· ❶

이차방정식 $x^2+2(2y-2)x+(4y^2+ay+b)=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=(2y-2)^2-(4y^2+ay+b)<0$

$-8y+4-ay-b<0$

$\therefore (8+a)y>4-b$ ··· ❷

위의 부등식이 임의의 실수 y에 대하여 성립하려면

$8+a=0$, $4-b<0$

$\therefore a=-8$, $b>4$ ··· ❸

답 $a=-8$, $b>4$

채점 기준	비율
❶ 주어진 식을 x에 대하여 내림차순으로 정리할 수 있다.	20%
❷ 이차부등식이 항상 성립할 조건을 이용하여 y에 대한 부등식을 세울 수 있다.	40%
❸ a, b의 조건을 구할 수 있다.	40%

참고 y에 대하여 내림차순으로 정리한 후 이차부등식이 항상 성립할 조건을 이용하여도 그 결과는 같다.

0928 전략 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=2x-1$을 그려 본다.

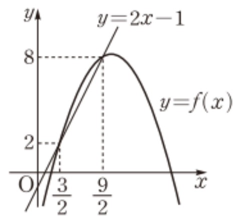
풀이 $y=2x-1$에 $y=2$를 대입하면

$2=2x-1$ $\therefore x=\dfrac{3}{2}$

$y=8$을 대입하면

$8=2x-1$ $\therefore x=\dfrac{9}{2}$

따라서 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=2x-1$의 교점의 좌표가 $\left(\dfrac{3}{2}, 2\right)$, $\left(\dfrac{9}{2}, 8\right)$이므로 그 그래프는 오른쪽 그림과 같다. ··· ❶



부등식 $f(x)-2x+1>0$에서

$f(x)>2x-1$

이 부등식의 해는 $y=f(x)$의 그래프에서 직선 $y=2x-1$보다 위쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위이므로

$\dfrac{3}{2}<x<\dfrac{9}{2}$ ··· ❷

따라서 정수 x는 2, 3, 4이므로 구하는 합은

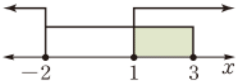
$2+3+4=9$ ··· ❸

답 9

채점 기준	비율
❶ $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=2x-1$의 교점의 좌표를 알고 그래프를 그릴 수 있다.	40%
❷ $f(x)-2x+1>0$을 만족시키는 x의 값의 범위를 구할 수 있다.	40%
❸ 정수 x의 값의 합을 구할 수 있다.	20%

0929 전략 주어진 연립부등식의 해를 수직선 위에 나타내어 본다.

풀이 해가 $x=-2$ 또는 $1\le x\le3$이므로 주어진 연립부등식의 각 부등식의 해를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같아야 한다.



따라서 이차부등식 $x^2+ax+b\le0$의 해는 $-2\le x\le3$이고, 이차부등식 $x^2+cx+d\ge0$의 해는 $x\le-2$ 또는 $x\ge1$이다. ⋯→ ❶

$x^2+ax+b\le0$의 해가 $-2\le x\le3$이므로

$(x+2)(x-3)\le0$ $\quad\therefore x^2-x-6\le0$

$\therefore a=-1,\ b=-6$ ⋯→ ❷

$x^2+cx+d\ge0$의 해가 $x\le-2$ 또는 $x\ge1$이므로

$(x+2)(x-1)\ge0$ $\quad\therefore x^2+x-2\ge0$

$\therefore c=1,\ d=-2$ ⋯→ ❸

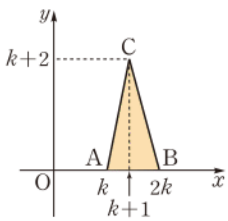
$\therefore ad-bc=8$ ⋯→ ❹

답 8

채점 기준	비율
❶ 이차부등식 $x^2+ax+b\le0$과 $x^2+cx+d\ge0$의 해를 구할 수 있다.	50%
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	20%
❸ c, d의 값을 구할 수 있다.	20%
❹ $ad-bc$의 값을 구할 수 있다.	10%

0930 전략 세 점 A, B, C를 좌표평면 위에 나타낸 후 삼각형 ABC의 넓이를 구한다.

풀이 오른쪽 그림에서



$\triangle ABC=\frac{1}{2}(2k-k)(k+2)$

$=\frac{1}{2}k(k+2)$ ⋯→ ❶

삼각형 ABC의 넓이가 4 이상 24 이하이므로 $\quad 4\le\frac{1}{2}k(k+2)\le24$

$\therefore 8\le k^2+2k\le48$ ⋯→ ❷

$8\le k^2+2k$에서 $\quad k^2+2k-8\ge0$

$(k+4)(k-2)\ge0$ $\quad\therefore k\le-4$ 또는 $k\ge2$

그런데 k는 자연수이므로 $\quad k\ge2$ ⋯⋯ ㉠

$k^2+2k\le48$에서 $\quad k^2+2k-48\le0$

$(k+8)(k-6)\le0$ $\quad\therefore -8\le k\le6$

그런데 k는 자연수이므로 $\quad 1\le k\le6$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $\quad 2\le k\le6$ ⋯→ ❸

따라서 자연수 k는 2, 3, 4, 5, 6의 5개이다. ⋯→ ❹

답 5

채점 기준	비율
❶ △ABC의 넓이를 k에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	20%
❷ k에 대한 부등식을 세울 수 있다.	30%
❸ k의 값의 범위를 구할 수 있다.	40%
❹ 자연수 k의 개수를 구할 수 있다.	10%

0931 전략 이차방정식이 실근을 가지므로 (판별식)≥0임을 이용한다.

풀이 이차방정식 $x^2+kx-k=0$이 실근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=k^2+4k\ge0,\quad k(k+4)\ge0$

$\therefore k\le-4$ 또는 $k\ge0$ ⋯⋯ ㉠ ⋯→ ❶

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-k,\ \alpha\beta=-k$

$\therefore |\alpha-\beta|^2=(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$

$=k^2+4k$

$|\alpha-\beta|\le2\sqrt{3}$에서 $|\alpha-\beta|^2\le12$이므로

$k^2+4k\le12,\quad k^2+4k-12\le0$

$(k+6)(k-2)\le0$ $\quad\therefore -6\le k\le2$ ⋯⋯ ㉡ ⋯→ ❷

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$-6\le k\le-4$ 또는 $0\le k\le2$

따라서 구하는 정수 k는 -6, -5, -4, 0, 1, 2의 6개이다. ⋯→ ❸

답 6

채점 기준	비율
❶ $x^2+kx-k=0$이 실근을 갖도록 하는 k의 값의 범위를 구할 수 있다.	30%
❷ $|\alpha-\beta|\le2\sqrt{3}$을 만족시키는 k의 값의 범위를 구할 수 있다.	40%
❸ 정수 k의 개수를 구할 수 있다.	30%

Ⅳ. 도형의 방정식

09 평면좌표와 직선의 방정식

0932 $\overline{AB}=\sqrt{(3-2)^2+\{2-(-1)\}^2}=\sqrt{10}$ 답 $\sqrt{10}$

0933 $\overline{AB}=\sqrt{\{1-(-4)\}^2+\{-1-(-2)\}^2}=\sqrt{26}$ 답 $\sqrt{26}$

0934 $\overline{OA}=\sqrt{3^2+(-4)^2}=5$ 답 5

0935 구하는 점을 $P(a,\ 0)$이라 하면 $\overline{AP}=\overline{BP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로

$(a-3)^2+(-4)^2=(a-2)^2+5^2$

$a^2-6a+25=a^2-4a+29$

$2a=-4 \qquad \therefore a=-2$

따라서 구하는 점 P의 좌표는 $(-2,\ 0)$이다. 답 $P(-2,\ 0)$

0936 $\dfrac{2\cdot(-2)+3\cdot6}{2+3}=\dfrac{14}{5} \qquad \therefore P\left(\dfrac{14}{5}\right)$ 답 $P\left(\dfrac{14}{5}\right)$

0937 $\dfrac{1\cdot(-2)-2\cdot6}{1-2}=14 \qquad \therefore Q(14)$ 답 $Q(14)$

0938 $\dfrac{6-2}{2}=2 \qquad \therefore M(2)$ 답 $M(2)$

0939 $\dfrac{5\cdot3+3\cdot5}{5+3}=\dfrac{15}{4},\ \dfrac{5\cdot(-6)+3\cdot2}{5+3}=-3$

$\therefore P\left(\dfrac{15}{4},\ -3\right)$ 답 $P\left(\dfrac{15}{4},\ -3\right)$

0940 $\dfrac{2\cdot3-1\cdot5}{2-1}=1,\ \dfrac{2\cdot(-6)-1\cdot2}{2-1}=-14$

$\therefore Q(1,\ -14)$ 답 $Q(1,\ -14)$

0941 $\dfrac{5+3}{2}=4,\ \dfrac{2-6}{2}=-2 \qquad \therefore M(4,\ -2)$

답 $M(4,\ -2)$

0942 $\dfrac{2-1+3}{3}=\dfrac{4}{3},\ \dfrac{1+0-4}{3}=-1 \qquad \therefore G\left(\dfrac{4}{3},\ -1\right)$

답 $G\left(\dfrac{4}{3},\ -1\right)$

0943 $\dfrac{-2+4+1}{3}=1,\ \dfrac{3-5+8}{3}=2 \qquad \therefore G(1,\ 2)$

답 $G(1,\ 2)$

0944 $y-10=-3\{x-(-3)\} \qquad \therefore y=-3x+1$

답 $y=-3x+1$

0945 답 $x=-9$

0946 답 $y=2$

0947 $y-1=\dfrac{-5-1}{4-1}(x-1) \qquad \therefore y=-2x+3$

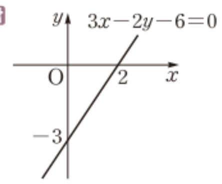
답 $y=-2x+3$

0948 $y-(-7)=\dfrac{-4-(-7)}{1-(-2)}\{x-(-2)\}$

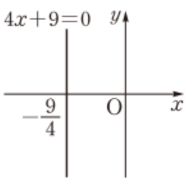
$\therefore y=x-5$ 답 $y=x-5$

0949 답 $\dfrac{x}{3}-\dfrac{y}{6}=1$

0950 답



0951 답 $4x+9=0$



0952 주어진 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$x+2y+4=0,\ 3x-y-9=0$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $\quad x=2,\ y=-3$

따라서 구하는 점의 좌표는 $\quad (2,\ -3)$ 답 $(2,\ -3)$

0953 주어진 식을 k에 대하여 정리하면

$(x+1)k+y-1=0$

이 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$x+1=0,\ y-1=0 \qquad \therefore x=-1,\ y=1$

따라서 구하는 점의 좌표는 $\quad (-1,\ 1)$ 답 $(-1,\ 1)$

0954 주어진 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식을

$3x-2y+3+k(x-3y-3)=0$ (k는 실수) …… ㉠

으로 놓으면 이 직선이 원점을 지나므로

$3-3k=0 \qquad \therefore k=1$

$k=1$을 ㉠에 대입하면

$3x-2y+3+(x-3y-3)=0$

$\therefore 4x-5y=0$ 답 $4x-5y=0$

0955 $2m+1=-2$이므로 $\quad m=-\dfrac{3}{2}$ 답 $-\dfrac{3}{2}$

0956 $-2(2m+1)=-1$이므로 $\quad m=-\dfrac{1}{4}$ 　답 $-\dfrac{1}{4}$

0957 (2) $\dfrac{1}{2}=\dfrac{-3}{-6}\neq\dfrac{4}{-1}$이므로 직선 $x-3y+4=0$과 평행하다.
(3) $1\cdot3+(-3)\cdot1=0$이므로 직선 $x-3y+4=0$과 수직이다.
답 평행한 직선: (2), 수직인 직선: (3)

0958 $\dfrac{a}{1}=\dfrac{3}{-(a+4)}\neq\dfrac{-1}{1}$에서 $\quad a^2+4a+3=0,\ a\neq-1$
$(a+3)(a+1)=0,\ a\neq-1 \quad \therefore a=-3$ 　답 -3

0959 $a\cdot1+3\{-(a+4)\}=0$에서
$2a=-12 \quad \therefore a=-6$ 　답 -6

0960 직선 $y=\dfrac{1}{3}x-2$에 수직인 직선의 기울기는 -3이므로 구하는 직선의 방정식은
$y-(-3)=-3\{x-(-5)\} \quad \therefore y=-3x-18$
답 $y=-3x-18$

0961 $2x-5y+3=0$에서 $\quad y=\dfrac{2}{5}x+\dfrac{3}{5}$
이 직선과 평행한 직선의 기울기는 $\dfrac{2}{5}$이므로 구하는 직선의 방정식은
$y-(-2)=\dfrac{2}{5}(x-10) \quad \therefore y=\dfrac{2}{5}x-6$
답 $y=\dfrac{2}{5}x-6$

0962 $6x-3y+4=0$에서 $\quad y=2x+\dfrac{4}{3}$
이 직선과 수직인 직선의 기울기는 $-\dfrac{1}{2}$이고 x절편이 -4, 즉 점 $(-4,\ 0)$을 지나므로 구하는 직선의 방정식은
$y=-\dfrac{1}{2}\{x-(-4)\} \quad \therefore y=-\dfrac{1}{2}x-2$
답 $y=-\dfrac{1}{2}x-2$

0963 $\dfrac{|3\cdot(-1)+4\cdot5-8|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\dfrac{9}{5}$ 　답 $\dfrac{9}{5}$

0964 $\dfrac{|2\cdot7-1\cdot3+4|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\dfrac{15}{\sqrt{5}}=3\sqrt{5}$ 　답 $3\sqrt{5}$

0965 점 $(2,\ -4)$와 직선 $y=\dfrac{1}{3}x+2$, 즉 $x-3y+6=0$ 사이의 거리는
$\dfrac{|1\cdot2-3\cdot(-4)+6|}{\sqrt{1^2+(-3)^2}}=\dfrac{20}{\sqrt{10}}=2\sqrt{10}$ 　답 $2\sqrt{10}$

0966 $\dfrac{|20|}{\sqrt{1^2+7^2}}=\dfrac{20}{5\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$ 　답 $2\sqrt{2}$

0967 두 직선 $2x+3y=0$, $2x+3y-13=0$은 평행하므로 두 직선 사이의 거리는 직선 $2x+3y=0$ 위의 한 점 $(0,\ 0)$과 직선 $2x+3y-13=0$ 사이의 거리와 같다.
$\therefore \dfrac{|-13|}{\sqrt{2^2+3^2}}=\dfrac{13}{\sqrt{13}}=\sqrt{13}$ 　답 $\sqrt{13}$

0968 두 직선 $3x+4y-3=0$, $6x+8y+5=0$은 평행하므로 두 직선 사이의 거리는 직선 $3x+4y-3=0$ 위의 한 점 $(1,\ 0)$과 직선 $6x+8y+5=0$ 사이의 거리와 같다.
$\therefore \dfrac{|6\cdot1+8\cdot0+5|}{\sqrt{6^2+8^2}}=\dfrac{11}{10}$ 　답 $\dfrac{11}{10}$

유형 01 두 점 사이의 거리

본책 144쪽

좌표평면 위의 두 점 $A(x_1,\ y_1)$, $B(x_2,\ y_2)$ 사이의 거리는
$\overline{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

0969 $\overline{AB}=5\sqrt{2}$이므로
$\sqrt{(a+1-3)^2+(-2-3)^2}=5\sqrt{2}$
양변을 제곱하면
$(a-2)^2+25=50, \quad a^2-4a-21=0$
$(a+3)(a-7)=0 \quad \therefore a=-3$ 또는 $a=7$
따라서 구하는 모든 실수 a의 값의 합은 $\quad -3+7=4$ 　답 ②

0970 $\overline{AB}=2\overline{CD}$에서 $\overline{AB}^2=4\overline{CD}^2$이므로
$(a-1)^2+(-1+a)^2=4\{2^2+(-2)^2\}$
$2a^2-4a+2=32, \quad a^2-2a-15=0$
$(a+3)(a-5)=0 \quad \therefore a=5\ (\because a>0)$ 　답 5

0971 $\overline{AB}\leq4$에서 $\overline{AB}^2\leq4^2$이므로
$(t-3)^2+(7-t)^2\leq16, \quad t^2-10t+21\leq0$
$(t-3)(t-7)\leq0 \quad \therefore 3\leq t\leq7$
따라서 정수 t는 3, 4, 5, 6, 7의 5개이다. 　답 ⑤

유형 02 같은 거리에 있는 점

본책 144쪽

두 점 A, B에서 같은 거리에 있는 점 P의 좌표는
$\overline{PA}=\overline{PB}$, 즉 $\overline{PA}^2=\overline{PB}^2$
임을 이용하여 구한다. 이때 점 P의 위치에 따라 좌표를 다음과 같이 놓는다.
① x축 위의 점 ➡ $(a,\ 0)$
② y축 위의 점 ➡ $(0,\ b)$
③ 직선 $y=mx+n$ 위의 점 ➡ $(a,\ am+n)$

0972 점 $P(a,\ b)$가 직선 $y=x+1$ 위의 점이므로
$b=a+1$ 　…… ㉠

또 $\overline{AP}=\overline{BP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로

$(a-1)^2+(b+2)^2=(a-5)^2+(b-2)^2$

$a^2-2a+b^2+4b+5=a^2-10a+b^2-4b+29$

$\therefore a+b=3$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1,\ b=2$

$\therefore a^2+b^2=5$ 답 5

0973 구하는 점을 $P(0,\ a)$라 하면 $\overline{AP}=\overline{BP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로

$(-2)^2+(a-2)^2=1^2+(a-1)^2$

$a^2-4a+8=a^2-2a+2$

$2a=6 \qquad \therefore a=3$

따라서 구하는 점 P의 좌표는 $(0,\ 3)$이다. 답 $P(0,\ 3)$

0974 삼각형 ABC의 외심을 $P(a,\ b)$라 하면 $\overline{PA}=\overline{PB}=\overline{PC}$이므로 $\overline{PA}^2=\overline{PB}^2=\overline{PC}^2$

$\overline{PA}^2=\overline{PC}^2$에서 $(a+2)^2+(b-1)^2=(a+1)^2+b^2$

$4a-2b+5=2a+1 \qquad \therefore a-b=-2$ …… ㉠

$\overline{PB}^2=\overline{PC}^2$에서 $(a-3)^2+(b+1)^2=(a+1)^2+b^2$

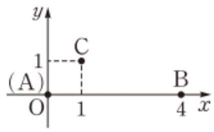
$-6a+2b+10=2a+1 \qquad \therefore 8a-2b=9$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=\dfrac{13}{6},\ b=\dfrac{25}{6}$

따라서 구하는 외심의 좌표는 $\left(\dfrac{13}{6},\ \dfrac{25}{6}\right)$이다. 답 $\left(\dfrac{13}{6},\ \dfrac{25}{6}\right)$

> **SSEN 특강**
>
> **삼각형의 외심**
>
> ① 삼각형의 세 변의 수직이등분선의 교점이다.
>
> ② 삼각형의 외심에서 세 꼭짓점에 이르는 거리는 같다.

0975 오른쪽 그림과 같이 지점 A가 원점, 지점 B가 x축 위에 오도록 좌표평면을 정하면



$A(0,\ 0),\ B(4,\ 0),\ C(1,\ 1)$ ⋯➊

분수대를 만들려는 지점을 $P(a,\ b)$라 하면

$\overline{PA}=\overline{PB}=\overline{PC}$이므로 $\overline{PA}^2=\overline{PB}^2=\overline{PC}^2$

$\overline{PA}^2=\overline{PB}^2$에서 $a^2+b^2=(a-4)^2+b^2$

$8a=16 \qquad \therefore a=2$

$\overline{PA}^2=\overline{PC}^2$에서 $a^2+b^2=(a-1)^2+(b-1)^2$

$2b=-2 \qquad \therefore b=-1$

따라서 $P(2,\ -1)$이므로 구하는 거리는 ⋯➋

$\overline{PA}=\overline{PB}=\overline{PC}=\sqrt{2^2+(-1)^2}=\sqrt{5}\,(\text{km})$ ⋯➌

답 $\sqrt{5}$ km

채점 기준	비율
➊ 세 지점 A, B, C의 위치를 좌표로 나타낼 수 있다.	30%
➋ 분수대를 만들려는 지점의 좌표를 구할 수 있다.	50%
➌ 분수대와 각 지점 사이의 거리를 구할 수 있다.	20%

유형 03 두 점 사이의 거리의 활용; 식의 값 본책 144쪽

$a,\ b,\ x,\ y$가 실수일 때, $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$은 두 점 $(a,\ b),\ (x,\ y)$ 사이의 거리임을 이용하여 식의 값의 최솟값을 구한다.

0976 $O(0,\ 0),\ P(a,\ b),\ Q(1,\ 3)$이라 하면

$\sqrt{a^2+b^2}=\overline{OP},\ \sqrt{(a-1)^2+(b-3)^2}=\overline{PQ}$

$\therefore \sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{(a-1)^2+(b-3)^2}=\overline{OP}+\overline{PQ}$

$\geq \overline{OQ}=\sqrt{1^2+3^2}$

$=\sqrt{10}$

따라서 구하는 최솟값은 $\sqrt{10}$이다. 답 ②

0977 $P(2,\ -1),\ Q(x,\ y),\ R(5,\ 3)$이라 하면

$\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2}=\overline{PQ},\ \sqrt{(x-5)^2+(y-3)^2}=\overline{QR}$

$\therefore \sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2}+\sqrt{(x-5)^2+(y-3)^2}$

$=\overline{PQ}+\overline{QR}$ ⋯➊

$\geq \overline{PR}=\sqrt{(5-2)^2+(3+1)^2}=5$

따라서 구하는 최솟값은 5이다. ⋯➋

답 5

채점 기준	비율
➊ 주어진 식을 두 선분의 길이의 합으로 표현할 수 있다.	60%
➋ 최솟값을 구할 수 있다.	40%

유형 04 두 점 사이의 거리의 활용 ; 거리의 제곱의 합의 최솟값 본책 145쪽

두 점 사이의 거리를 구하는 공식을 이용하여 이차식을 세운 후 이차함수의 최솟값을 구한다.

0978 $P(a,\ 0)$이라 하면

$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2=(a-4)^2+(-1)^2+(a+2)^2+(-5)^2$

$=2a^2-4a+46$

$=2(a-1)^2+44$

따라서 $a=1$일 때 주어진 식의 최솟값은 44이다. 답 44

0979 $P(a,\ b)$라 하면

$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2$

$=(a+1)^2+(b-2)^2+(a-4)^2+(b-6)^2+a^2+(b-1)^2$

$=3a^2-6a+3b^2-18b+58$

$=3(a-1)^2+3(b-3)^2+28$

이때 $a,\ b$가 실수이므로 $(a-1)^2\geq 0,\ (b-3)^2\geq 0$

$\therefore \overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2\geq 28$

따라서 $a=1,\ b=3$일 때 주어진 식의 최솟값이 28이므로

$P(1,\ 3)$ 답 $P(1,\ 3)$

0980 $P(a,\ a-1)$이라 하면

$$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2=(a-3)^2+(a+3)^2+(a-4)^2+(a-10)^2$$
$$=4a^2-28a+134$$
$$=4\left(a-\frac{7}{2}\right)^2+85$$

따라서 $a=\frac{7}{2}$일 때 주어진 식의 최솟값이 85이므로 점 P의 x좌표는 $\frac{7}{2}$이다.

답 ①

유형 05 두 점 사이의 거리의 활용; 삼각형의 모양

본책 145쪽

(i) 주어진 세 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 모양을 결정할 때는 먼저 두 점 사이의 거리를 구하는 공식을 이용하여 세 변의 길이를 각각 구한다.

(ii) 삼각형 ABC의 세 변의 길이 $\overline{BC}=a$, $\overline{CA}=b$, $\overline{AB}=c$ 중 c가 가장 클 때 다음을 이용한다.

① $c^2>a^2+b^2$ ➡ $\angle C>90°$인 둔각삼각형

② $c^2=a^2+b^2$ ➡ $\angle C=90°$인 직각삼각형

③ $c^2<a^2+b^2$ ➡ 예각삼각형

0981 $\overline{AB}^2=(-3-1)^2+(1+1)^2=20$

$\overline{BC}^2=(3+3)^2+(3-1)^2=40$

$\overline{CA}^2=(1-3)^2+(-1-3)^2=20$

$\therefore \overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{CA}^2,\ \overline{AB}^2=\overline{CA}^2$

따라서 삼각형 ABC는 $\angle A=90°$인 직각이등변삼각형이다.

답 ③

0982 $\overline{AC}=\overline{BC}$에서 $\overline{AC}^2=\overline{BC}^2$이므로

$(1-2)^2+(a-5)^2=(1+1)^2+(a-4)^2$

$a^2-10a+26=a^2-8a+20$

$-2a=-6 \qquad \therefore a=3$

답 ⑤

0983 $C(x,\ y)$라 하면 $\overline{AB}=\overline{BC}$에서 $\overline{AB}^2=\overline{BC}^2$이므로

$(-1-1)^2+(-2-2)^2=(x+1)^2+(y+2)^2$

$x^2+2x+y^2+4y=15$ …… ㉠

또 $\overline{AB}=\overline{CA}$에서 $\overline{AB}^2=\overline{CA}^2$이므로

$(-1-1)^2+(-2-2)^2=(1-x)^2+(2-y)^2$

$x^2-2x+y^2-4y=15$ …… ㉡

㉠−㉡을 하면 $\quad 4x+8y=0 \qquad \therefore x=-2y$

이것을 ㉠에 대입하면

$4y^2-4y+y^2+4y=15, \qquad y^2=3$

$\therefore y=\pm\sqrt{3},\ x=\mp 2\sqrt{3}$ (복호동순)

그런데 점 C가 제4사분면 위의 점이므로

$C(2\sqrt{3},\ -\sqrt{3})$

답 $C(2\sqrt{3},\ -\sqrt{3})$

0984 (1) $\overline{OA}^2=a^2+b^2$

$\overline{AB}^2=\{(a+b)-a\}^2+\{(b-a)-b\}^2=a^2+b^2$

$\overline{OB}^2=(a+b)^2+(b-a)^2=2a^2+2b^2$

$\therefore \overline{OB}^2=\overline{OA}^2+\overline{AB}^2,\ \overline{OA}^2=\overline{AB}^2$ ··· ❶

따라서 △OAB는 $\angle A=90°$인 직각이등변삼각형이다. ··· ❷

(2) $\triangle OAB=\frac{1}{2}\overline{OA}\cdot\overline{AB}=\frac{1}{2}\overline{OA}^2=\frac{1}{2}(a^2+b^2)$ ··· ❸

답 (1) $\angle A=90°$인 직각이등변삼각형 (2) $\frac{1}{2}(a^2+b^2)$

채점 기준	비율
❶ 삼각형의 세 변의 길이의 제곱 사이의 관계를 알 수 있다.	50%
❷ △OAB가 어떤 삼각형인지 알 수 있다.	20%
❸ △OAB의 넓이를 a, b에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30%

유형 06 좌표를 이용하여 도형의 성질 확인하기

본책 146쪽

(i) 도형의 한 변이 좌표축 위에 오도록 도형을 좌표평면 위에 놓는다.

(ii) 도형의 꼭짓점에 해당하는 점의 좌표를 미지수를 사용하여 나타낸다.

(iii) 두 점 사이의 거리를 구하는 공식을 이용하여 주어진 등식이 성립함을 확인한다.

0985 △ABC의 세 꼭짓점의 좌표를 각각 $A(a,\ b)$, $B(-c,\ 0)$, $C(c,\ 0)$이라 하면

$$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=\{(\boxed{a+c})^2+b^2\}+\{(\boxed{a-c})^2+b^2\}$$
$$=(a^2+2ac+c^2+b^2)+(a^2-2ac+c^2+b^2)$$
$$=2a^2+2b^2+2c^2$$
$$=2(\boxed{a^2+b^2+c^2})$$

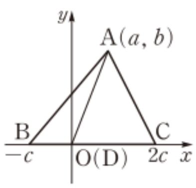
또 $\overline{AM}^2=a^2+b^2$, $\overline{BM}^2=\boxed{c^2}$이므로

$\overline{AM}^2+\overline{BM}^2=a^2+b^2+\boxed{c^2}$

$\therefore \overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{AM}^2+\overline{BM}^2)$

답 (가) $a+c$ (나) $a-c$ (다) $a^2+b^2+c^2$ (라) c^2

0986 오른쪽 그림과 같이 직선 BC를 x축으로 하고, 점 D를 지나고 직선 BC에 수직인 직선을 y축으로 하는 좌표평면을 잡으면 점 D는 원점이다.



이때 △ABC의 세 꼭짓점의 좌표를 각각

$A(a,\ b)$, $B(-c,\ 0)$, $C(2c,\ 0)$ ··· ❶

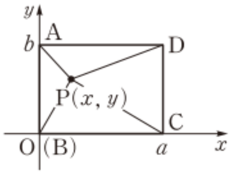
이라 하면

$$2\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2\{(a+c)^2+b^2\}+\{(a-2c)^2+b^2\}$$
$$=3a^2+3b^2+6c^2$$
$$=3(a^2+b^2+2c^2) \quad \cdots ❷$$
$$\overline{AD}^2+2\overline{BD}^2=(a^2+b^2)+2c^2$$
$$=a^2+b^2+2c^2 \quad \cdots ❸$$
$$\therefore 2\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=3(\overline{AD}^2+2\overline{BD}^2) \quad \cdots ❹$$

답 풀이 참조

채점 기준	비율
❶ 세 점 A, B, C의 좌표를 정할 수 있다.	30%
❷ $2\overline{AB}^2+\overline{AC}^2$을 a, b, c에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30%
❸ $\overline{AD}^2+2\overline{BD}^2$을 a, b, c에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30%
❹ $2\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=3(\overline{AD}^2+2\overline{BD}^2)$이 성립함을 확인할 수 있다.	10%

0987 오른쪽 그림과 같이 직선 BC를 x축으로 하고, 직선 AB를 y축으로 하는 좌표평면을 잡으면 점 B는 원점이다. 이때 나머지 세 꼭짓점의 좌표를 각각 A$(0,\ b)$, C$(a,\ 0)$, D$(a,\ b)$라 하고 점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면



$$\overline{PA}^2+\overline{PC}^2=\{x^2+(y-b)^2\}+\{(x-a)^2+y^2\}$$
$$\overline{PB}^2+\overline{PD}^2=(x^2+y^2)+\{(x-a)^2+(y-b)^2\}$$
$$=\{x^2+(y-b)^2\}+\{(x-a)^2+y^2\}$$
$$\therefore\ \overline{PA}^2+\overline{PC}^2=\overline{PB}^2+\overline{PD}^2$$

답 풀이 참조

유형 07~09 선분의 내분점과 외분점

본책 146, 147쪽

좌표평면 위의 두 점 A$(x_1,\ y_1)$, B$(x_2,\ y_2)$를 잇는 선분 AB를 $m:n(m>0,\ n>0)$으로 내분하는 점 P, 외분하는 점 Q의 좌표는

$$\mathrm{P}\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n},\ \frac{my_2+ny_1}{m+n}\right),\ \mathrm{Q}\left(\frac{mx_2-nx_1}{m-n},\ \frac{my_2-ny_1}{m-n}\right)$$

(단, $m\neq n$)

0988 $\dfrac{3\cdot(-2)+2\cdot 8}{3+2}=2,\ \dfrac{3\cdot 7+2\cdot 2}{3+2}=5$이므로 P$(2,\ 5)$

$\dfrac{3\cdot(-2)-2\cdot 8}{3-2}=-22,\ \dfrac{3\cdot 7-2\cdot 2}{3-2}=17$이므로 Q$(-22,\ 17)$

따라서 $\overline{PQ}$의 중점의 좌표는

$\left(\dfrac{2-22}{2},\ \dfrac{5+17}{2}\right)$, 즉 $(-10,\ 11)$

답 $(-10,\ 11)$

0989 $\overline{AB}$를 $3:b$로 내분하는 점의 좌표가 $(2,\ -1)$이므로

$\dfrac{3\cdot 12+b\cdot(-4)}{3+b}=2,\ \dfrac{3\cdot a+b\cdot 8}{3+b}=-1$

$36-4b=6+2b,\ 3a+8b=-3-b$

$\therefore\ a=-16,\ b=5$

$\therefore\ a+b=-11$

답 -11

0990 $\overline{AB}$를 $4:1$로 외분하는 점의 좌표가 $(9,\ 4)$이므로

$\dfrac{4\cdot 8-(a+2)}{4-1}=9,\ \dfrac{4b-1\cdot 0}{4-1}=4$

$30-a=27,\ 4b=12\qquad\therefore\ a=3,\ b=3$ ➊

$\therefore$ B$(8,\ 3)$, C$(3,\ -2)$ ➋

따라서 $\overline{BC}$를 $2:3$으로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\dfrac{2\cdot 3+3\cdot 8}{2+3},\ \dfrac{2\cdot(-2)+3\cdot 3}{2+3}\right)$, 즉 $(6,\ 1)$ ➌

답 $(6,\ 1)$

채점 기준	비율
➊ a, b의 값을 구할 수 있다.	50%
➋ 두 점 B, C의 좌표를 구할 수 있다.	20%
➌ $\overline{BC}$를 $2:3$으로 내분하는 점의 좌표를 구할 수 있다.	30%

0991 점 P$(a,\ b)$는 $\overline{AB}$를 $1:2$로 내분하는 점이므로

$a=\dfrac{1\cdot 9+2\cdot(-3)}{1+2}=1,\ b=\dfrac{1\cdot 8+2\cdot 2}{1+2}=4$

점 Q$(c,\ d)$는 $\overline{AB}$를 $2:1$로 내분하는 점이므로

$c=\dfrac{2\cdot 9+1\cdot(-3)}{2+1}=5,\ d=\dfrac{2\cdot 8+1\cdot 2}{2+1}=6$

$\therefore\ ac-bd=1\cdot 5-4\cdot 6=-19$

답 ①

0992 $\overline{AB}$를 $a:(1-a)$로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\dfrac{a\cdot 6+(1-a)\cdot(-3)}{a+1-a},\ \dfrac{a\cdot(-2)+(1-a)\cdot 5}{a+1-a}\right)$

$\therefore\ (9a-3,\ -7a+5)$

이 점이 제1사분면 위에 있으므로

$9a-3>0,\ -7a+5>0$

$\therefore\ \dfrac{1}{3}<a<\dfrac{5}{7}$

답 $\dfrac{1}{3}<a<\dfrac{5}{7}$

0993 $\overline{PQ}$를 $k:5$로 외분하는 점의 좌표는

$\left(\dfrac{2k+5}{k-5},\ \dfrac{4k-5}{k-5}\right)$

이 점이 직선 $x+y=-4$ 위에 있으므로

$\dfrac{2k+5}{k-5}+\dfrac{4k-5}{k-5}=-4,\qquad 6k=-4k+20$

$10k=20\qquad\therefore\ k=2$

답 2

0994 $\overline{AB}$를 $m:n$으로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\dfrac{2m-5n}{m+n},\ \dfrac{8m-n}{m+n}\right)$ ➊

이 점이 y축 위에 있으므로 $\dfrac{2m-5n}{m+n}=0$

$2m-5n=0\qquad\therefore\ 2m=5n$ ➋

이때 m, n은 서로소인 자연수이므로

$m=5,\ n=2$ ➌

답 $m=5,\ n=2$

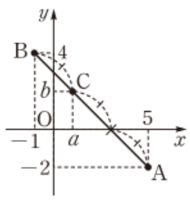
채점 기준	비율
➊ $\overline{AB}$를 $m:n$으로 내분하는 점의 좌표를 구할 수 있다.	40%
➋ m과 n 사이의 관계식을 구할 수 있다.	30%
➌ m, n의 값을 구할 수 있다.	30%

0995 $\overline{AB}=3\overline{BC}$에서 $\quad\overline{AB}:\overline{BC}=3:1\quad\cdots\cdots$ ㉠

㉠을 만족시키는 점 C의 좌표를 $(a,\ b)$라 하자.

(i) $a>0$일 때

점 C는 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AB}$를 $2:1$로 내분하는 점이므로



$a=\dfrac{2\cdot(-1)+1\cdot 5}{2+1}=1,$

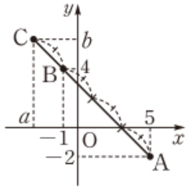
$b=\dfrac{2\cdot 4+1\cdot(-2)}{2+1}=2$

(ii) $a<0$일 때

점 C는 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AB}$를 $4:1$로 외분하는 점이므로

$$a=\frac{4\cdot(-1)-1\cdot5}{4-1}=-3,$$

$$b=\frac{4\cdot4-1\cdot(-2)}{4-1}=6$$



(i), (ii)에서 구하는 점 C의 좌표는 $(-3,\ 6)$, $(1,\ 2)$이다.

답 $(-3,\ 6)$, $(1,\ 2)$

다른 풀이 $a<0$에서 점 B는 $\overline{AC}$를 $3:1$로 내분하는 점이므로

$$\frac{3a+5}{3+1}=-1,\ \frac{3b-2}{3+1}=4$$

$3a+5=-4$, $3b-2=16$

$\therefore\ a=-3,\ b=6$

0996 $3\overline{AB}=2\overline{BC}$에서 $\overline{AB}:\overline{BC}=2:3$

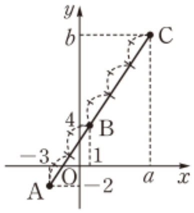
$a>0$에서 점 C는 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AB}$를 $5:3$으로 외분하는 점이므로

$$a=\frac{5\cdot1-3\cdot(-3)}{5-3}=7,$$

$$b=\frac{5\cdot4-3\cdot(-2)}{5-3}=13$$

$\therefore\ b-a=6$

답 6



0997 삼각형 OAC의 넓이가 삼각형 OBC의 넓이의 2배이므로

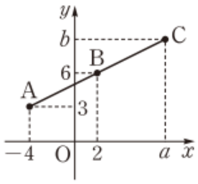
$\overline{AC}:\overline{BC}=2:1$

$a>0$에서 점 C는 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AB}$를 $2:1$로 외분하는 점이므로

$$a=\frac{2\cdot2-1\cdot(-4)}{2-1}=8,$$

$$b=\frac{2\cdot6-1\cdot3}{2-1}=9$$

$\therefore\ a+b=17$



답 ③

0998 $\triangle OAB=\frac{1}{2}\cdot6\cdot3=9$이므로

$\triangle OBC=\triangle OAC-\triangle OAB$

$=45-9=36$

즉 $\triangle OAB:\triangle OBC=1:4$이므로

$\overline{AB}:\overline{BC}=1:4$

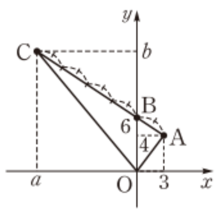
$a<0$에서 점 C는 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AB}$를 $5:4$로 외분하는 점이므로

$$a=\frac{5\cdot0-4\cdot3}{5-4}=-12,$$

$$b=\frac{5\cdot6-4\cdot4}{5-4}=14$$

$\therefore\ -2a+b=-2\cdot(-12)+14$

$=38$



답 38

유형 10 삼각형의 무게중심

본책 148쪽

좌표평면 위의 세 점 $A(x_1,\ y_1)$, $B(x_2,\ y_2)$, $C(x_3,\ y_3)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 무게중심 G의 좌표는

$$G\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\ \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$$

0999 $\frac{3+a+2b+3}{3}=2,\ \frac{-2-3b+a+1}{3}=-2$

이므로 $a+2b=0$, $a-3b=-5$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=-2$, $b=1$

$\therefore\ ab=-2$

답 -2

1000 $\frac{0+x_1+x_2}{3}=4,\ \frac{0+y_1+y_2}{3}=2$

이므로 $x_1+x_2=12$, $y_1+y_2=6$

$\therefore\ \frac{x_1+x_2}{2}=6,\ \frac{y_1+y_2}{2}=3$

따라서 $\overline{AB}$의 중점의 좌표는 $(6,\ 3)$이다.

답 ③

1001 $\overline{AB}$의 중점을 M, 삼각형 ABC의 무게중심을 G라 하면 점 G는 $\overline{CM}$을 $2:1$로 내분하는 점이다.

$C(a,\ b)$라 하면 $\frac{2\cdot2+1\cdot a}{2+1}=4,\ \frac{2\cdot5+1\cdot b}{2+1}=2$

$a+4=12$, $b+10=6$

$\therefore\ a=8,\ b=-4$

따라서 점 C의 좌표는 $(8,\ -4)$이다.

답 $C(8,\ -4)$

다른 풀이 $\overline{AB}$의 중점을 M, 삼각형 ABC의 무게중심을 G라 하면 점 C는 $\overline{MG}$를 $3:2$로 외분하는 점이므로 $C(a,\ b)$라 하면

$$a=\frac{3\cdot4-2\cdot2}{3-2}=8,\ b=\frac{3\cdot2-2\cdot5}{3-2}=-4$$

$\therefore\ C(8,\ -4)$

1002 세 점 D, E, F의 좌표는 각각

$$D\left(\frac{2\cdot(-2)+1\cdot4}{2+1},\ \frac{2\cdot1+1\cdot10}{2+1}\right),\ \text{즉 } D(0,\ 4)$$

$$E\left(\frac{2\cdot7+1\cdot(-2)}{2+1},\ \frac{2\cdot(-5)+1\cdot1}{2+1}\right),\ \text{즉 } E(4,\ -3)$$

$$F\left(\frac{2\cdot4+1\cdot7}{2+1},\ \frac{2\cdot10+1\cdot(-5)}{2+1}\right),\ \text{즉 } F(5,\ 5)$$

따라서 삼각형 DEF의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{0+4+5}{3},\ \frac{4-3+5}{3}\right),\ \text{즉 } (3,\ 2)$$

답 $(3,\ 2)$

다른 풀이 삼각형 DEF의 무게중심은 삼각형 ABC의 무게중심과 일치하므로 구하는 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{4-2+7}{3},\ \frac{10+1-5}{3}\right),\ \text{즉 } (3,\ 2)$$

1003 P(x, y)라 하면

$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2$

$=(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(x-x_2)^2+(y-y_2)^2+(x-x_3)^2+(y-y_3)^2$

$=3x^2-2(x_1+x_2+x_3)x+x_1^2+x_2^2+x_3^2+3y^2-2(y_1+y_2+y_3)y+y_1^2+y_2^2+y_3^2$

$=3\left(x-\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3}\right)^2+3\left(y-\dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)^2+x_1^2+x_2^2+x_3^2+y_1^2+y_2^2+y_3^2-\dfrac{(x_1+x_2+x_3)^2}{3}-\dfrac{(y_1+y_2+y_3)^2}{3}$

따라서 $x=\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3}$, $y=\dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}$일 때 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2$의 값이 최소이므로 점 P는 삼각형 ABC의 무게중심이다.

답 풀이 참조

유형 11 평행사변형의 성질 본책 148쪽

① 좌표평면 위의 두 점 A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)에 대하여 선분 AB의 중점의 좌표는 $\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}, \dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$

② 평행사변형 ABCD의 두 대각선은 서로를 이등분한다.
➡ $\overline{AC}$의 중점과 $\overline{BD}$의 중점이 일치한다.

1004 D(a, b)라 하면 두 대각선 AC, BD의 중점이 일치하므로

$\dfrac{-1+8}{2}=\dfrac{5+a}{2}$, $\dfrac{4+4}{2}=\dfrac{0+b}{2}$

$\therefore a=2, b=8$

따라서 꼭짓점 D의 좌표는 $(2, 8)$이다. 답 D$(2, 8)$

1005 C(x_1, y_1), D(x_2, y_2)라 하면 두 대각선 AC, BD의 교점은 $\overline{AC}$, $\overline{BD}$ 각각의 중점과 일치한다. ··· ❶

$\overline{AC}$의 중점의 좌표는 $\left(\dfrac{2+x_1}{2}, \dfrac{4+y_1}{2}\right)$이므로

$\dfrac{2+x_1}{2}=8$, $\dfrac{4+y_1}{2}=2$

$\therefore x_1=14, y_1=0$

$\therefore$ C$(14, 0)$ ··· ❷

또 $\overline{BD}$의 중점의 좌표는 $\left(\dfrac{-2+x_2}{2}, \dfrac{-4+y_2}{2}\right)$이므로

$\dfrac{-2+x_2}{2}=8$, $\dfrac{-4+y_2}{2}=2$

$\therefore x_2=18, y_2=8$

$\therefore$ D$(18, 8)$ ··· ❸

답 C$(14, 0)$, D$(18, 8)$

채점 기준	비율
❶ 두 대각선 AC, BD의 교점이 $\overline{AC}$, $\overline{BD}$ 각각의 중점과 일치함을 알 수 있다.	20%
❷ 점 C의 좌표를 구할 수 있다.	40%
❸ 점 D의 좌표를 구할 수 있다.	40%

1006 두 대각선 AC, BD의 중점이 일치하므로 중점의 x좌표는

$\dfrac{a+5}{2}=\dfrac{2+b}{2}$ $\therefore b=a+3$ ······ ㉠

또 $\overline{AB}=\overline{BC}$에서 $\overline{AB}^2=\overline{BC}^2$이므로

$(2-a)^2+(4-1)^2=(5-2)^2+(1-4)^2$

$a^2-4a-5=0$, $(a+1)(a-5)=0$

$\therefore a=-1$ ($\because a\neq5$)

$a=5$이면 점 A와 점 C는 일치하므로 사각형 ABCD가 만들어지지 않는다.

$a=-1$을 ㉠에 대입하면 $b=2$

$\therefore a+b=1$ 답 ①

다른 풀이 마름모의 두 대각선은 서로를 수직이등분하므로

$\dfrac{a+5}{2}=\dfrac{2+b}{2}$, $b=2$

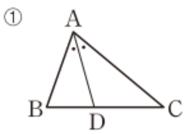
직선 AC와 직선 BD가 수직이고 직선 AC의 방정식이 $y=1$이므로 직선 BD의 방정식은 $x=2$

두 식을 연립하여 풀면

$a=-1, b=2$

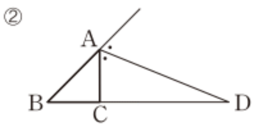
유형 12 각의 이등분선의 성질 본책 149쪽

①



$\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{BD}:\overline{CD}$
➡ 점 D는 $\overline{BC}$를 $\overline{AB}:\overline{AC}$로 내분하는 점이다.

②



$\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{BD}:\overline{CD}$
➡ 점 D는 $\overline{BC}$를 $\overline{AB}:\overline{AC}$로 외분하는 점이다.

1007 $\overline{AD}$는 $\angle$A의 이등분선이므로

$\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{BD}:\overline{CD}$

$\overline{AB}=\sqrt{(-4-1)^2+(-7-5)^2}=13$,

$\overline{AC}=\sqrt{(5-1)^2+(2-5)^2}=5$이므로

$\overline{BD}:\overline{CD}=13:5$

따라서 점 D는 $\overline{BC}$를 $13:5$로 내분하는 점이므로

$\dfrac{13\cdot5+5\cdot(-4)}{13+5}=\dfrac{5}{2}$, $\dfrac{13\cdot2+5\cdot(-7)}{13+5}=-\dfrac{1}{2}$

$\therefore$ D$\left(\dfrac{5}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$ 답 D$\left(\dfrac{5}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$

1008 높이가 같은 두 삼각형의 넓이의 비는 밑변의 길이의 비와 같으므로 $\triangle ABD:\triangle ACD=p:q$에서

$\overline{BD}:\overline{CD}=p:q$

이때 $\overline{AD}$는 $\angle$A의 이등분선이므로

$\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{BD}:\overline{CD}$

$\overline{AB}=\sqrt{(-6-2)^2+(3+3)^2}=10$,

$\overline{AC}=\sqrt{(10-2)^2+(12+3)^2}=17$이므로

$\overline{BD}:\overline{CD}=10:17$

따라서 $p=10$, $q=17$이므로

$q-p=7$ 답 7

1009 $\overline{AD}$는 $\angle A$의 외각의 이등분선이므로

$\overline{AO}:\overline{AB}=\overline{OD}:\overline{BD}$ ··· ❶

$\overline{AO}=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$,

$\overline{AB}=\sqrt{(2-3)^2+(-1-1)^2}=\sqrt{5}$이므로

$\overline{OD}:\overline{BD}=\sqrt{10}:\sqrt{5}=\sqrt{2}:1$ ··· ❷

따라서 점 D는 선분 OB를 $\sqrt{2}:1$로 외분하는 점이므로

$a=\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}=4+2\sqrt{2}$,

$b=\dfrac{-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}=-2-\sqrt{2}$ ··· ❸

$\therefore a+b=2+\sqrt{2}$ ··· ❹

답 $2+\sqrt{2}$

채점 기준	비율
❶ $\overline{AO}:\overline{AB}=\overline{OD}:\overline{BD}$임을 알 수 있다.	30%
❷ $\overline{OD}:\overline{BD}$를 구할 수 있다.	30%
❸ a, b의 값을 구할 수 있다.	30%
❹ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	10%

유형 13 자취의 방정식; 점의 자취

본책 149쪽

① 점 $P(a, b)$가 직선 $y=mx+n$ 위를 움직인다.
➡ $b=ma+n$

② 점 P가 등식 ㉠을 만족시킨다.
➡ $P(x, y)$로 놓고 좌표를 등식 ㉠에 대입한다.

1010 $P(a, b)$라 하면 점 P는 직선 $2x-y-4=0$ 위의 점이므로

$2a-b-4=0$ ······ ㉠

$Q(x, y)$라 하면 점 Q는 $\overline{AP}$를 $1:2$로 내분하는 점이므로

$x=\dfrac{1\cdot a+2\cdot 2}{1+2}=\dfrac{a+4}{3}$,

$y=\dfrac{1\cdot b+2\cdot 4}{1+2}=\dfrac{b+8}{3}$

$\therefore a=3x-4,\ b=3y-8$ ······ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $2(3x-4)-(3y-8)-4=0$

$\therefore 6x-3y-4=0$ 답 $6x-3y-4=0$

1011 $P(x, y)$라 하면 $\overline{PA}^2-\overline{PB}^2=3$이므로

$(x-1)^2+(y-1)^2-\{(x-3)^2+(y-2)^2\}=3$

$x^2-2x+1+y^2-2y+1-(x^2-6x+9+y^2-4y+4)=3$

$4x+2y-11=3 \quad \therefore 2x+y-7=0$ 답 $2x+y-7=0$

1012 두 점 A, B로부터 같은 거리에 있는 점을 $P(x, y)$라 하면 $\overline{AP}=\overline{BP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로

$(x-2)^2+(y-4)^2=(x-4)^2+(y-1)^2$

$x^2-4x+y^2-8y+20=x^2-8x+y^2-2y+17$

$\therefore 4x-6y+3=0$ 답 $4x-6y+3=0$

유형 14 직선의 방정식 ; 한 점과 기울기가 주어질 때

본책 149쪽

① 점 (a, b)를 지나고 기울기가 m인 직선의 방정식은
$y-b=m(x-a)$

② 점 (a, b)를 지나고 x축에 평행한 직선의 방정식은
$y=b$ (단, $b\neq 0$)

③ x축의 양의 부분과 이루는 각의 크기가 θ인 직선의 기울기 m은
$m=\tan\theta$

1013 두 점 $(-3, 1)$, $(5, 7)$을 이은 선분의 중점의 좌표는

$\left(\dfrac{-3+5}{2}, \dfrac{1+7}{2}\right)$, 즉 $(1, 4)$

따라서 기울기가 2이고 점 $(1, 4)$를 지나는 직선의 방정식은

$y-4=2(x-1) \quad \therefore y=2x+2$ 답 $y=2x+2$

1014 $4x-3y+1=0$에서 $y=\dfrac{4}{3}x+\dfrac{1}{3}$

따라서 기울기가 $\dfrac{4}{3}$이고 점 $(-2, 5)$를 지나는 직선의 방정식은

$y-5=\dfrac{4}{3}\{x-(-2)\}$, $y=\dfrac{4}{3}x+\dfrac{23}{3}$

$\therefore 4x-3y+23=0$

따라서 $a=4$, $b=23$이므로 $b-a=19$ 답 19

1015 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는

$\left(\dfrac{-1+2+5}{3}, \dfrac{3-2+2}{3}\right)$, 즉 $(2, 1)$

따라서 점 $(2, 1)$을 지나고 x축에 평행한 직선의 방정식은

$y=1$ 답 $y=1$

1016 점 $(2, -1)$을 지나고 기울기가 $\tan 60°=\sqrt{3}$인 직선의 방정식은 $y-(-1)=\sqrt{3}(x-2) \quad \therefore \sqrt{3}x-y-1-2\sqrt{3}=0$

따라서 $a=-1$, $b=-1-2\sqrt{3}$이므로

$a+b=-2-2\sqrt{3}$ 답 ①

유형 15 직선의 방정식; 두 점이 주어질 때

본책 150쪽

두 점 (x_1, y_1), (x_2, y_2)를 지나는 직선의 방정식은

$y-y_1=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$ (단, $x_1\neq x_2$)

1017 두 점 $(3, 3)$, $(-1, -5)$를 지나는 직선의 방정식은

$y-3=\dfrac{-5-3}{-1-3}(x-3) \quad \therefore y=2x-3$

두 점 $(a, -7)$, $(5, b)$가 직선 $y=2x-3$ 위의 점이므로

$-7=2a-3$, $b=2\cdot5-3$

따라서 $a=-2$, $b=7$이므로 $a+b=5$ 답 ⑤

1018 $\overline{AB}$를 $2:3$으로 외분하는 점의 좌표는

$\left(\dfrac{2\cdot4-3\cdot3}{2-3},\ \dfrac{2\cdot(-7)-3\cdot(-6)}{2-3}\right)$, 즉 $(1,\ -4)$

따라서 두 점 $(1,\ -4)$, $(4,\ 2)$를 지나는 직선의 방정식은

$y-(-4)=\dfrac{2-(-4)}{4-1}(x-1)$

$\therefore\ y=2x-6$ 답 $y=2x-6$

1019 직선 AC의 방정식은 $y=\dfrac{6-0}{1-5}(x-5)$

$\therefore\ y=-\dfrac{3}{2}x+\dfrac{15}{2}$ …… ㉠

직선 OB의 방정식은 $y=x$ …… ㉡

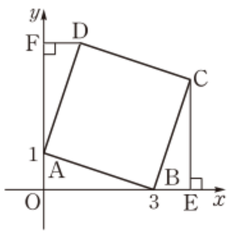
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x=3$, $y=3$

따라서 두 대각선의 교점의 좌표는 $(3,\ 3)$이다. 답 ④

1020 점 C에서 x축에 내린 수선의 발을 E, 점 D에서 y축에 내린 수선의 발을 F라 하면

$\triangle AOB\equiv\triangle BEC\equiv\triangle DFA$

(RHA 합동)



이므로 $C(4,\ 3)$, $D(1,\ 4)$ ⋯ ❶

따라서 직선 CD의 방정식은

$y-3=\dfrac{4-3}{1-4}(x-4)$, 즉 $y=-\dfrac{1}{3}x+\dfrac{13}{3}$ ⋯ ❷

이므로 구하는 x절편은 13이다. ⋯ ❸

답 13

채점 기준	비율
❶ 두 점 C, D의 좌표를 구할 수 있다.	50%
❷ 직선 CD의 방정식을 구할 수 있다.	30%
❸ 직선 CD의 x절편을 구할 수 있다.	20%

유형 16 직선의 방정식 ; x절편, y절편이 주어질 때

본책 150쪽

x절편이 a, y절편이 b인 직선의 방정식은

$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$ (단, $a\neq0$, $b\neq0$)

1021 y절편을 $a(a\neq0)$라 하면 x절편은 $2a$이므로 직선 l의 방정식은 $\dfrac{x}{2a}+\dfrac{y}{a}=1$

이 직선이 점 $(2,\ 3)$을 지나므로

$\dfrac{2}{2a}+\dfrac{3}{a}=1$, $\dfrac{4}{a}=1$ $\therefore\ a=4$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$\dfrac{x}{8}+\dfrac{y}{4}=1$ 답 $\dfrac{x}{8}+\dfrac{y}{4}=1$

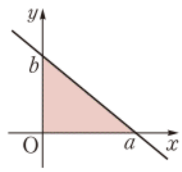
1022 직선 $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}=1$의 x절편이 2이므로 $P(2,\ 0)$

직선 $\dfrac{x}{3}-\dfrac{y}{4}=2$, 즉 $\dfrac{x}{6}-\dfrac{y}{8}=1$의 y절편이 -8이므로

$Q(0,\ -8)$

따라서 직선 PQ의 방정식은 $\dfrac{x}{2}-\dfrac{y}{8}=1$ 답 ①

1023 직선 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$의 x절편은 a, y절편은 b이고, 제3사분면을 지나지 않으므로 직선의 개형은 오른쪽 그림과 같다.



이때 색칠한 부분의 넓이가 4이므로

$\dfrac{1}{2}ab=4$ $\therefore\ ab=8$ 답 8

유형 17 세 점이 한 직선 위에 있을 조건

본책 151쪽

세 점 $A(x_1,\ y_1)$, $B(x_2,\ y_2)$, $C(x_3,\ y_3)$이 한 직선 위에 있다.

➡ (직선 AB의 기울기)=(직선 BC의 기울기)=(직선 AC의 기울기)

➡ $\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y_3-y_2}{x_3-x_2}=\dfrac{y_3-y_1}{x_3-x_1}$ (단, $x_1\neq x_2$, $x_2\neq x_3$, $x_1\neq x_3$)

1024 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으려면 직선 AC와 직선 BC의 기울기가 같아야 하므로

$\dfrac{11-k}{5-1}=\dfrac{11-7}{5-k}$, 즉 $\dfrac{11-k}{4}=\dfrac{4}{5-k}$

$(11-k)(5-k)=16$, $k^2-16k+39=0$

$(k-3)(k-13)=0$ $\therefore\ k=3$ 또는 $k=13$

따라서 구하는 모든 실수 k의 값의 합은

$3+13=16$ 답 ⑤

1025 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으려면 직선 AB와 직선 AC의 기울기가 같아야 하므로

$\dfrac{a+1}{1+1}=\dfrac{-5+1}{-a+1}$ …… ㉠ ⋯ ❶

$(a+1)(1-a)=2\cdot(-4)$, $a^2=9$

$\therefore\ a=3\ (\because\ a>0)$ ⋯ ❷

㉠에서 직선 l은 기울기가 2이고 점 $A(-1,\ -1)$을 지나므로 직선 l의 방정식은

$y+1=2(x+1)$ $\therefore\ y=2x+1$ ⋯ ❸

답 $y=2x+1$

채점 기준	비율
❶ 기울기를 이용하여 a에 대한 식을 세울 수 있다.	40%
❷ a의 값을 구할 수 있다.	30%
❸ 직선 l의 방정식을 구할 수 있다.	30%

1026 세 점 A, B, C가 삼각형을 이루지 않으려면 세 점이 한 직선 위에 있어야 한다.

즉 직선 AB와 직선 AC의 기울기가 같아야 하므로

$\frac{3}{a-4}=\frac{a+3}{6}$, $\quad(a-4)(a+3)=18$

$a^2-a-30=0$, $\quad(a+5)(a-6)=0$

$\therefore a=6\ (\because a>0)$

답 ④

유형 18 도형의 넓이를 분할하는 직선 본책 151쪽

① 삼각형 ABC의 꼭짓점 A를 지나면서 그 넓이를 이등분하는 직선

➡ $\overline{BC}$의 중점을 지난다.

② 직사각형의 넓이를 이등분하는 직선

➡ 두 대각선의 교점을 지난다.

1027 직선 l이 삼각형 ABC의 넓이를 이등분하려면 $\overline{BC}$의 중점을 지나야 한다. $\overline{BC}$의 중점의 좌표는

$\left(\frac{8+0}{2}, \frac{-6+2}{2}\right)$, 즉 $(4, -2)$

따라서 직선 l은 두 점 $(1, 4)$, $(4, -2)$를 지나므로 직선 l의 방정식은 $\quad y-4=\frac{-2-4}{4-1}(x-1)$

$\therefore y=-2x+6$

답 ②

1028 두 직사각형의 넓이를 동시에 이등분하는 직선은 각 직사각형의 대각선의 교점을 지나야 한다. ⋯ ❶

두 직사각형의 대각선의 교점의 좌표는 각각

$\left(\frac{-1-3}{2}, \frac{-1-2}{2}\right)$, $\left(\frac{1+3}{2}, \frac{4+1}{2}\right)$

$\therefore \left(-2, -\frac{3}{2}\right)$, $\left(2, \frac{5}{2}\right)$ ⋯ ❷

따라서 두 점 $\left(-2, -\frac{3}{2}\right)$, $\left(2, \frac{5}{2}\right)$를 지나는 직선의 기울기는

$\frac{\frac{5}{2}-\left(-\frac{3}{2}\right)}{2-(-2)}=1$ ⋯ ❸

답 1

채점 기준	비율
❶ 조건을 만족시키는 직선은 각 직사각형의 대각선의 교점을 지나야 함을 알 수 있다.	40%
❷ 두 직사각형의 대각선의 교점의 좌표를 구할 수 있다.	30%
❸ 직선의 기울기를 구할 수 있다.	30%

1029 $\triangle ABD:\triangle ADC=2:1$이므로 점 D는 $\overline{BC}$를 $2:1$로 내분하는 점이다.

$B(-4, -1)$, $C(5, -4)$이고, $D(a, b)$라 하면

$a=\frac{2\cdot5+1\cdot(-4)}{2+1}=2$, $b=\frac{2\cdot(-4)+1\cdot(-1)}{2+1}=-3$

$\therefore D(2, -3)$

따라서 두 점 $A(1, 3)$, $D(2, -3)$을 지나는 직선의 방정식은

$y-3=\frac{-3-3}{2-1}(x-1)$

$\therefore y=-6x+9$

답 $y=-6x+9$

유형 19 직선의 개형 본책 152쪽

직선 $ax+by+c=0\,(b\neq0)$의 개형은 다음과 같은 순서로 알아본다.

(i) $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$ 꼴로 변형한다.

(ii) 기울기 $-\frac{a}{b}$와 y절편 $-\frac{c}{b}$의 부호를 정한다.

$ab>0$ ➡ a, b의 부호가 같다.

$ab=0$ ➡ $a=0$ 또는 $b=0$

$ab<0$ ➡ a, b의 부호가 다르다.

1030 $b\neq0$이므로 $ax+by+c=0$에서

$y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$

이때 $ac>0$, $bc<0$에서 a, b의 부호는 서로 다르므로

$-\frac{a}{b}>0$, $-\frac{c}{b}>0$

따라서 주어진 직선의 기울기와 y절편이 모두 양수이므로 직선의 개형은 ①이다.

답 ①

1031 직선 $ax+by+c=0$, 즉 $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$의 기울기는 양수, y절편은 음수이므로

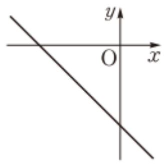
$-\frac{a}{b}>0$, $-\frac{c}{b}<0 \qquad \therefore ac<0$

$c\neq0$이므로 $bx+cy-a=0$에서

$y=-\frac{b}{c}x+\frac{a}{c}$

이때 $-\frac{b}{c}<0$, $\frac{a}{c}<0$이므로 직선 $bx+cy-a=0$의 기울기와 y절편은 모두 음수이다.

따라서 직선 $bx+cy-a=0$은 오른쪽 그림과 같이 제1사분면을 지나지 않는다.



답 ①

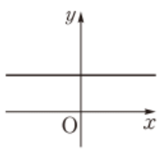
1032 직선 $ax+by+c=0$에서 $b\neq0$이면

$y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$ ⋯⋯ ㉠

ㄱ. $a=0$, $bc<0$이면

$-\frac{a}{b}=0$, $-\frac{c}{b}>0$

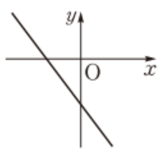
따라서 직선 ㉠은 오른쪽 그림과 같으므로 제1사분면과 제2사분면을 지난다.



ㄴ. $ab>0$, $bc>0$이면

$-\frac{a}{b}<0$, $-\frac{c}{b}<0$ 기울기와 y절편 모두 음수

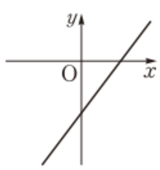
따라서 직선 ㉠은 오른쪽 그림과 같으므로 제1사분면을 지나지 않는다.



ㄷ. $ab<0$, $c<0$에서 $a>0$, $b<0$, $c<0$이면

$-\frac{a}{b}>0$, $-\frac{c}{b}<0$ 기울기는 양수, y절편은 음수

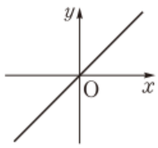
따라서 직선 ㉠은 오른쪽 그림과 같으므로 제4사분면을 지난다.



ㄹ. $ab<0$, $c=0$이면

$-\dfrac{a}{b}>0$, $-\dfrac{c}{b}=0$ 기울기는 양수, y절편은 0

따라서 직선 ㉠은 오른쪽 그림과 같으므로 제1사분면과 제3사분면을 지난다.



이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄹ이다. 답 ㄴ, ㄹ

유형 20 정점을 지나는 직선 본책 152쪽

직선 $ax+by+c+k(a'x+b'y+c')=0$이 실수 k의 값에 관계없이 항상 지나는 점의 좌표

➡ 연립방정식 $\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{cases}$의 해

1033 주어진 식을 k에 대하여 정리하면

$(2x+y+3)k-(x-2y+4)=0$

이 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$2x+y+3=0$, $x-2y+4=0$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $x=-2$, $y=1$

따라서 $\mathrm{P}(-2,\ 1)$이므로 점 P와 원점 사이의 거리는

$\sqrt{(-2)^2+1^2}=\sqrt{5}$ 답 ③

1034 주어진 식을 k에 대하여 정리하면

$(2x-y+5)k+(4x-y+3)=0$

이 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$2x-y+5=0$, $4x-y+3=0$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $x=1$, $y=7$

따라서 $\mathrm{P}(1,\ 7)$이므로 기울기가 4이고 점 P를 지나는 직선의 방정식은 $y-7=4(x-1)$

$\therefore y=4x+3$ 답 $y=4x+3$

1035 직선 $x-3y+1=0$이 점 $(a,\ b)$를 지나므로

$a-3b+1=0$ $\therefore a=3b-1$ ⋯⋯ ㉠

㉠을 $ax-by=2$에 대입하면 $(3b-1)x-by=2$

이 식을 b에 대하여 정리하면 $(3x-y)b-x-2=0$

이 식이 b의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$3x-y=0$, $-x-2=0$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $x=-2$, $y=-6$

즉 직선 $ax-by=2$는 항상 점 $(-2,\ -6)$을 지난다.

따라서 $p=-2$, $q=-6$이므로 $p+q=-8$ 답 -8

유형 21 정점을 지나는 직선의 활용 본책 153쪽

직선 $y-b=m(x-a)$

➡ m의 값에 관계없이 항상 점 $(a,\ b)$를 지난다.

1036 $mx-y+m+1=0$에서

$(x+1)m-(y-1)=0$ ⋯⋯ ㉠

이므로 직선 ㉠은 m의 값에 관계없이 항상 점 $(-1,\ 1)$을 지난다.

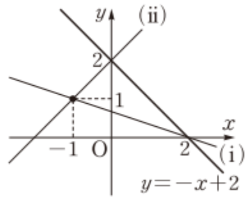
오른쪽 그림에서

(i) 직선 ㉠이 점 $(2,\ 0)$을 지날 때

$3m+1=0$ $\therefore m=-\dfrac{1}{3}$

(ii) 직선 ㉠이 점 $(0,\ 2)$를 지날 때

$m-1=0$ $\therefore m=1$



(i), (ii)에서 구하는 m의 값의 범위는

$-\dfrac{1}{3}<m<1$ 답 $-\dfrac{1}{3}<m<1$

1037 $y=mx-m+1$에서

$(x-1)m-(y-1)=0$ ⋯⋯ ㉠

이므로 직선 ㉠은 m의 값에 관계없이 항상 점 $(1,\ 1)$을 지난다.

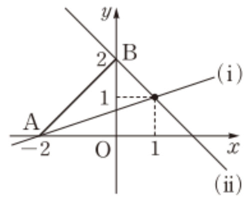
오른쪽 그림에서

(i) 직선 ㉠이 점 $\mathrm{A}(-2,\ 0)$을 지날 때

$-3m+1=0$ $\therefore m=\dfrac{1}{3}$

(ii) 직선 ㉠이 점 $\mathrm{B}(0,\ 2)$를 지날 때

$-m-1=0$ $\therefore m=-1$



(i), (ii)에서 m의 값의 범위는

$-1\le m\le\dfrac{1}{3}$

따라서 $a=-1$, $b=\dfrac{1}{3}$이므로 $ab=-\dfrac{1}{3}$ 답 ②

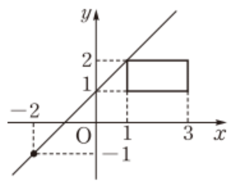
1038 $mx-y+2m-1=0$에서

$(x+2)m-(y+1)=0$ ⋯⋯ ㉠

이므로 직선 ㉠은 m의 값에 관계없이 항상 점 $(-2,\ -1)$을 지난다. ⋯ ❶

m은 직선 ㉠의 기울기이므로 오른쪽 그림과 같이 직선 ㉠이 점 $(1,\ 2)$를 지날 때 최대이다.

$3m-3=0$에서 $m=1$이므로 m의 최댓값은 1이다. ⋯ ❷



답 1

채점 기준	비율
❶ 직선 $mx-y+2m-1=0$이 m의 값에 관계없이 항상 지나는 점의 좌표를 구할 수 있다.	40%
❷ m의 최댓값을 구할 수 있다.	60%

1039 직선 $y=mx+3m+2$가 직사각형 ABCD의 넓이를 이등분하려면 $\overline{\mathrm{AC}}$의 중점을 지나야 한다.

$\mathrm{C}(a,\ b)$라 하면 $\overline{\mathrm{AC}}$의 중점의 좌표는 $\left(\dfrac{1+a}{2},\ \dfrac{3+b}{2}\right)$이므로

$\dfrac{3+b}{2}=m\cdot\dfrac{1+a}{2}+3m+2$ $\therefore (7+a)m+1-b=0$

이 식이 m의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$7+a=0$, $1-b=0$ $\therefore a=-7$, $b=1$

따라서 점 C의 좌표는 $(-7,\ 1)$이다. 답 $\mathrm{C}(-7,\ 1)$

1040 $mx+y-m+2=0$에서

$m(x-1)+(y+2)=0$ ...... ㉠

이므로 직선 ㉠은 m의 값에 관계없이 항상 점 $(1,\ -2)$를 지난다.

$A(1,\ -2)$이므로 직선 ㉠이 삼각형 ABC의 넓이를 이등분하려면 직선 ㉠은 $\overline{BC}$의 중점 $(2,\ 1)$을 지나야 한다.

즉 $m+3=0$이므로 $m=-3$ 답 -3

유형 22 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식 본책 153쪽

두 직선 $ax+by+c=0$, $a'x+b'y+c'=0$의 교점과 점 $(p,\ q)$를 지나는 직선의 방정식

➡ $ax+by+c+k(a'x+b'y+c')=0$ (k는 실수) ...... ㉠

으로 놓고 ㉠에 $x=p$, $y=q$를 대입하여 k의 값을 구한다.

1041 주어진 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식을

$2x+y-4+k(2x-3y+4)=0$ (k는 실수) ...... ㉠

으로 놓으면 이 직선이 점 $(4,\ -1)$을 지나므로

$8-1-4+k(8+3+4)=0$

$3+15k=0$ $\therefore k=-\dfrac{1}{5}$

$k=-\dfrac{1}{5}$을 ㉠에 대입하면

$2x+y-4-\dfrac{1}{5}(2x-3y+4)=0$

$\dfrac{8}{5}x+\dfrac{8}{5}y-\dfrac{24}{5}=0$ $\therefore x+y-3=0$

즉 $a=1$, $b=1$이므로 $2a+b=3$ 답 ④

다른 풀이 • 두 직선 $2x+y-4=0$, $2x-3y+4=0$의 교점의 좌표는 $(1,\ 2)$

두 점 $(4,\ -1)$, $(1,\ 2)$를 지나는 직선의 방정식은

$y-(-1)=\dfrac{2-(-1)}{1-4}(x-4)$

$\therefore x+y-3=0$

1042 주어진 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식을

$4x+3y+8+k(-x+2y+2)=0$ (k는 실수) ...... ㉠

으로 놓으면 이 직선이 원점을 지나므로

$8+2k=0$ $\therefore k=-4$

$k=-4$를 ㉠에 대입하면

$4x+3y+8-4(-x+2y+2)=0$

$\therefore 8x-5y=0$ 답 $8x-5y=0$

1043 주어진 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식을

$x-3y+7+k(3x-2y-1)=0$ (k는 실수) ...... ㉠

으로 놓으면 이 직선이 점 $(6,\ -4)$를 지나므로

$6+12+7+k(18+8-1)=0$

$25+25k=0$ $\therefore k=-1$

$k=-1$을 ㉠에 대입하면

$x-3y+7-(3x-2y-1)=0$

$\therefore -2x-y+8=0$ ···➊

따라서 $A(4,\ 0)$, $B(0,\ 8)$이므로 ···➋

$\overline{AB}=\sqrt{(0-4)^2+(8-0)^2}=4\sqrt{5}$ ···➌

답 $4\sqrt{5}$

채점 기준	비율
➊ 두 직선의 교점과 점 $(6,\ -4)$를 지나는 직선의 방정식을 구할 수 있다.	60%
➋ 두 점 A, B의 좌표를 구할 수 있다.	20%
➌ 선분 AB의 길이를 구할 수 있다.	20%

유형 23 두 직선의 위치 관계 본책 154쪽

두 직선 $ax+by+c=0$, $a'x+b'y+c'=0$ $(abc\neq0,\ a'b'c'\neq0)$이

① 평행하다. ➡ $\dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'}\neq\dfrac{c}{c'}$ ② 수직이다. ➡ $aa'+bb'=0$

1044 직선 $(k-2)x+3y-1=0$과 직선 $kx-y+3=0$이

(i) 평행하려면 $\dfrac{k-2}{k}=\dfrac{3}{-1}\neq\dfrac{-1}{3}$

$-k+2=3k$ $\therefore k=\dfrac{1}{2}$

(ii) 수직이려면 $(k-2)k+3\cdot(-1)=0$

$k^2-2k-3=0,$ $(k+1)(k-3)=0$

$\therefore k=-1$ 또는 $k=3$

(i), (ii)에서 $\alpha=\dfrac{1}{2}$, $\beta=3$ ($\because \beta>0$)이므로 $\alpha\beta=\dfrac{3}{2}$ 답 $\dfrac{3}{2}$

1045 두 직선 $y=ax+b$, $y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{2}$이 수직이므로

$\dfrac{1}{2}a=-1$ $\therefore a=-2$

따라서 직선 $y=-2x+b$가 점 $(1,\ 2)$를 지나므로

$2=-2+b$ $\therefore b=4$

$\therefore ab=-8$ 답 ①

1046 직선 $3x+ay+1=0$이 점 $(1,\ -2)$를 지나므로

$3-2a+1=0$ $\therefore a=2$

직선 $bx+cy-8=0$도 점 $(1,\ -2)$를 지나므로

$b-2c-8=0$ $\therefore b-2c=8$ ...... ㉠

두 직선 $3x+2y+1=0$, $bx+cy-8=0$이 수직이므로

$3b+2c=0$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $b=2$, $c=-3$

$\therefore a+b-c=7$ 답 7

1047 직선 $x+ay+1=0$과 직선 $2x-by+1=0$이 수직이므로

$1\cdot2+a\cdot(-b)=0$ $\therefore ab=2$ ···➊

또 직선 $x+ay+1=0$과 직선 $x-(b-3)y-1=0$이 평행하므로

$\dfrac{1}{1}=\dfrac{a}{-b+3}\neq\dfrac{1}{-1}$

$a=-b+3$ $\therefore a+b=3$ ···➋

$\therefore a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$

$=3^3-3\cdot2\cdot3=9$ ··· ③

답 9

채점 기준	비율
① ab의 값을 구할 수 있다.	40%
② $a+b$의 값을 구할 수 있다.	40%
③ a^3+b^3의 값을 구할 수 있다.	20%

유형 24 세 직선의 위치 관계

본책 154쪽

서로 다른 세 직선이 삼각형을 이루지 않는 경우
① 세 직선이 한 점에서 만날 때
➡ 두 직선의 교점을 다른 한 직선이 지난다.
② 세 직선 중 두 직선이 평행할 때
➡ 두 직선의 기울기는 같고, 다른 한 직선의 기울기는 다르다.
③ 세 직선이 모두 평행할 때
➡ 세 직선의 기울기가 모두 같다.

1048 주어진 세 직선이 삼각형을 이루지 않는 경우는 다음과 같다.
(i) 직선 $y=ax+2$가 직선 $y=-x$ 또는 $y=x-2$와 평행할 때

$a=-1$ 또는 $a=1$

(ii) 직선 $y=ax+2$가 두 직선 $y=-x$, $y=x-2$의 교점을 지날 때
$y=-x$, $y=x-2$를 연립하여 풀면

$x=1$, $y=-1$

직선 $y=ax+2$가 점 $(1, -1)$을 지나려면

$-1=a+2 \qquad \therefore a=-3$

(i), (ii)에서 모든 실수 a의 값의 합은

$-1+1+(-3)=-3$

답 ④

1049 두 직선 $4x-3y+2=0$, $2x-y+1=0$이 한 점에서 만나므로 직선 $ax-y+5=0$이 위의 두 직선 중 하나와 평행해야 한다.

$\frac{4}{a}=\frac{-3}{-1}\neq\frac{2}{5}$에서 $\qquad a=\frac{4}{3}$

$\frac{2}{a}=\frac{-1}{-1}\neq\frac{1}{5}$에서 $\qquad a=2$

답 $\frac{4}{3}$, 2

1050 주어진 세 직선이 좌표평면을 4개의 영역으로 나누려면 오른쪽 그림과 같이 세 직선이 모두 평행해야 한다.

두 직선 $ax+y+1=0$, $2x+y+5=0$이 평행하려면 $\quad \frac{a}{2}=\frac{1}{1}\neq\frac{1}{5} \qquad \therefore a=2$

두 직선 $x+by+3=0$, $2x+y+5=0$이 평행하려면

$\frac{1}{2}=\frac{b}{1}\neq\frac{3}{5} \qquad \therefore b=\frac{1}{2}$

$\therefore a+b=\frac{5}{2}$

답 $\frac{5}{2}$

유형 25 직선의 방정식 ; 수직 또는 평행 조건이 주어질 때

본책 154쪽

① 수직인 두 직선 ➡ 기울기의 곱이 -1이다.
② 평행한 두 직선 ➡ 기울기는 같고, y절편은 다르다.

1051 두 점 A, B를 지나는 직선의 기울기는

$\frac{-5-(-2)}{2-(-4)}=-\frac{1}{2}$

이므로 직선 AB에 수직인 직선의 기울기는 2이다.
한편 $\overline{AB}$를 $1:2$로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{1\cdot2+2\cdot(-4)}{1+2}, \frac{1\cdot(-5)+2\cdot(-2)}{1+2}\right)$, 즉 $(-2, -3)$

따라서 기울기가 2이고 점 $(-2, -3)$을 지나는 직선의 방정식은

$y-(-3)=2\{x-(-2)\}$

$\therefore y=2x+1$

답 $y=2x+1$

1052 두 점 $(2, 3)$, $(5, 4)$를 지나는 직선의 기울기는

$\frac{4-3}{5-2}=\frac{1}{3}$

기울기가 $\frac{1}{3}$이고 x절편이 -5, 즉 점 $(-5, 0)$을 지나는 직선의 방정식은 $\quad y=\frac{1}{3}\{x-(-5)\}$

$\therefore x-3y+5=0$

따라서 $a=-3$, $b=5$이므로 $\qquad a+b=2$

답 2

1053 $\angle OAB=\angle OCA$에서

$\angle BAC=\angle OAB+\angle OAC=\angle OCA+\angle OAC=90°$

이므로 직선 l은 직선 m에 수직이다. 이때 직선 l의 기울기는

$\frac{0-4}{6-0}=-\frac{2}{3}$

이므로 직선 m의 기울기는 $\frac{3}{2}$이다.

따라서 직선 m은 기울기가 $\frac{3}{2}$이고 점 $A(6, 0)$을 지나므로 직선의 방정식은 $\quad y=\frac{3}{2}(x-6)$

$\therefore y=\frac{3}{2}x-9$

답 $y=\frac{3}{2}x-9$

1054 직선 $x+2y-2=0$, 즉 $y=-\frac{1}{2}x+1$의 기울기가 $-\frac{1}{2}$이므로 직선 AH의 기울기는 2이다. ··· ①

따라서 직선 AH의 방정식은

$y-\frac{5}{2}=2(x-2) \qquad \therefore 4x-2y-3=0$ ··· ②

$x+2y-2=0$, $4x-2y-3=0$을 연립하여 풀면

수선의 발 H는 직선 AH와 직선 $x+2y-2=0$의 교점이다.

$x=1$, $y=\frac{1}{2}$

따라서 점 H의 좌표는 $\left(1, \frac{1}{2}\right)$이다. ··· ③

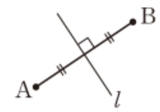
답 $H\left(1, \frac{1}{2}\right)$

채점 기준	비율
❶ 직선 AH의 기울기를 구할 수 있다.	30%
❷ 직선 AH의 방정식을 구할 수 있다.	30%
❸ 점 H의 좌표를 구할 수 있다.	40%

유형 26 직선의 방정식; 수직이등분선

본책 155쪽

선분 AB의 수직이등분선을 l이라 하면
① 직선 l은 선분 AB의 중점을 지난다.
② 직선 l과 직선 AB의 기울기의 곱은 -1이다.



1055 $\overline{\text{AB}}$의 중점의 좌표는 $\quad(-1,\ 1)$

두 점 A, B를 지나는 직선의 기울기는 $\quad\dfrac{-1-3}{2-(-4)}=-\dfrac{2}{3}$

따라서 $\overline{\text{AB}}$의 수직이등분선의 기울기는 $\dfrac{3}{2}$이고 점 $(-1,\ 1)$을 지나므로 직선의 방정식은 $\quad y-1=\dfrac{3}{2}(x+1)$

$\therefore\ 3x-2y+5=0$

즉 $a=3,\ b=-2$이므로 $\quad a+b=1$ 답 1

1056 직선 $x-2y+4=0$의 x절편은 -4, y절편은 2이므로

$\mathrm{A}(-4,\ 0),\ \mathrm{B}(0,\ 2)$ ··· ❶

$\overline{\text{AB}}$의 중점의 좌표는 $\quad(-2,\ 1)$ ··· ❷

또 직선 $x-2y+4=0$의 기울기는 $\dfrac{1}{2}$이므로 $\overline{\text{AB}}$의 수직이등분선의 기울기는 -2이다. ··· ❸

따라서 구하는 직선의 방정식은

$y-1=-2(x+2)\quad\therefore\ 2x+y+3=0$ ··· ❹

답 $2x+y+3=0$

채점 기준	비율
❶ 두 점 A, B의 좌표를 구할 수 있다.	30%
❷ $\overline{\text{AB}}$의 중점의 좌표를 구할 수 있다.	20%
❸ $\overline{\text{AB}}$의 수직이등분선의 기울기를 구할 수 있다.	20%
❹ $\overline{\text{AB}}$의 수직이등분선의 방정식을 구할 수 있다.	30%

1057 $\overline{\text{AB}}$의 중점의 좌표는 $\quad\left(3,\ \dfrac{a+b}{2}\right)$

직선 $x-3y=0$이 이 점을 지나므로

$3-3\cdot\dfrac{a+b}{2}=0\quad\therefore\ a+b=2$ ······ ㉠

또 직선 $x-3y=0$의 기울기가 $\dfrac{1}{3}$이므로 직선 AB의 기울기는

$\dfrac{b-a}{5-1}=-3\quad\therefore\ a-b=12$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad a=7,\ b=-5$

$\therefore\ ab=-35$ 답 ①

1058 $\overline{\text{AC}}=13$이므로 $\quad\sqrt{(n-1)^2+(-5)^2}=13$

양변을 제곱하면 $\quad n^2-2n+1+25=169$

$n^2-2n-143=0,\quad(n+11)(n-13)=0$

$\therefore\ n=13\ (\because\ n>0)\quad\therefore\ \mathrm{C}(13,\ 0)$

사각형 ABCD가 마름모이므로 직선 l은 대각선 AC의 수직이등분선이다.

대각선 AC의 중점의 좌표는 $\quad\left(\dfrac{1+13}{2},\ \dfrac{5}{2}\right)$, 즉 $\left(7,\ \dfrac{5}{2}\right)$

직선 AC의 기울기는 $\quad\dfrac{0-5}{13-1}=-\dfrac{5}{12}$

따라서 직선 l은 기울기가 $\dfrac{12}{5}$이고 점 $\left(7,\ \dfrac{5}{2}\right)$를 지나므로 직선의 방정식은 $\quad y-\dfrac{5}{2}=\dfrac{12}{5}(x-7)$

$\therefore\ 24x-10y-143=0$

즉 $a=-10,\ b=-143$이므로 $\quad a-b=133$ 답 133

유형 27 점과 직선 사이의 거리

본책 156쪽

점 $(x_1,\ y_1)$과 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

1059 직선 l의 기울기를 m이라 하면 직선 l의 방정식은

$y=m(x+1)\quad\therefore\ mx-y+m=0$

점 $(0,\ 2)$와 직선 l 사이의 거리가 $\sqrt{5}$이므로

$\dfrac{|-2+m|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\sqrt{5},\quad|m-2|=\sqrt{5(m^2+1)}$

양변을 제곱하여 정리하면

$4m^2+4m+1=0,\quad(2m+1)^2=0\quad\therefore\ m=-\dfrac{1}{2}$

따라서 직선 l의 기울기는 $-\dfrac{1}{2}$이다. 답 ①

1060 $\dfrac{|3\cdot(-5)+a+1|}{\sqrt{3^2+a^2}}=2$이므로

$|a-14|=2\sqrt{9+a^2}$

양변을 제곱하여 정리하면 $\quad 3a^2+28a-160=0$

$(3a+40)(a-4)=0\quad\therefore\ a=-\dfrac{40}{3}$ 또는 $a=4$

이때 a는 정수이므로 $\quad a=4$ 답 ⑤

1061 직선 $x+7y-1=0$, 즉 $y=-\dfrac{1}{7}x+\dfrac{1}{7}$에 수직인 직선의 기울기는 7이므로 구하는 직선의 방정식을 $y=7x+a$, 즉 $7x-y+a=0$으로 놓을 수 있다.

원점과 이 직선 사이의 거리가 $\sqrt{2}$이므로

$\dfrac{|a|}{\sqrt{7^2+(-1)^2}}=\sqrt{2},\quad|a|=\sqrt{100}$

$|a|=10\quad\therefore\ a=\pm10$

따라서 제2사분면을 지나지 않는 직선의 방정식은 $y=7x-10$이다.

y절편이 음수이어야 한다.

답 $y=7x-10$

1062 점 $(0,\ k)$에서 두 직선 $x+2y-5=0$, $2x-y-2=0$에 이르는 거리가 같으므로

$$\frac{|2k-5|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{|-k-2|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}},\qquad |2k-5|=|k+2|$$

$$2k-5=\pm(k+2)\qquad \therefore k=1 \text{ 또는 } k=7$$

따라서 모든 실수 k의 값의 합은 $\quad 1+7=8$ 답 ⑤

유형 28 삼각형의 넓이 본책 156쪽

세 점 A, B, C를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 넓이 구하기
(i) $\overline{AB}$의 길이와 직선 AB의 방정식을 구한다.
(ii) 점 C와 직선 AB 사이의 거리 h를 구한다.
(iii) $\triangle ABC=\frac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot h$

1063 $\overline{AB}=\sqrt{(-2-2)^2+(-1-7)^2}=4\sqrt{5}$

직선 AB의 방정식은

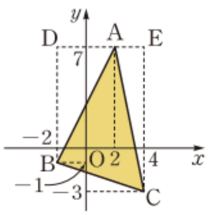
$$y-7=\frac{-1-7}{-2-2}(x-2)\qquad \therefore 2x-y+3=0$$

점 $C(4,\ -3)$과 직선 AB 사이의 거리는

$$\frac{|2\cdot4-(-3)+3|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{14}{\sqrt{5}}=\frac{14\sqrt{5}}{5}$$

$$\therefore \triangle ABC=\frac{1}{2}\cdot4\sqrt{5}\cdot\frac{14\sqrt{5}}{5}=28$$ 답 ③

다른 풀이 오른쪽 그림에서



$\triangle ABC$
$=\square DBCE-(\triangle ACE+\triangle ADB)$
$=\frac{1}{2}(8+10)\cdot6-\frac{1}{2}(2\cdot10+4\cdot8)$
$=54-26$
$=28$

1064 (1) 직선 AC의 방정식은

$$y-3=\frac{1-3}{-1-2}(x-2)$$

$$\therefore y=\frac{2}{3}x+\frac{5}{3},\ \text{즉 } 2x-3y+5=0$$ ··· ❶

따라서 점 $B(1,\ 4)$와 직선 $2x-3y+5=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|2\cdot1-3\cdot4+5|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}}=\frac{|-5|}{\sqrt{13}}=\frac{5\sqrt{13}}{13}$$ ··· ❷

(2) $\overline{AC}=\sqrt{(-1-2)^2+(1-3)^2}=\sqrt{13}$이므로

$$\triangle ABC=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{13}\cdot\frac{5\sqrt{13}}{13}=\frac{5}{2}$$

$$\therefore \square OABC=2\triangle ABC=5$$ ··· ❸

답 (1) $\frac{5\sqrt{13}}{13}$ (2) 5

채점 기준	비율
❶ 직선 AC의 방정식을 구할 수 있다.	30%
❷ 점 B와 직선 AC 사이의 거리를 구할 수 있다.	30%
❸ 평행사변형 OABC의 넓이를 구할 수 있다.	40%

1065 $\overline{AB}=\sqrt{(0-2)^2+(-2-5)^2}=\sqrt{53}$

직선 AB의 방정식은

$$y-5=\frac{-2-5}{0-2}(x-2)\qquad \therefore 7x-2y-4=0$$

점 $C(a,\ 0)$과 직선 AB 사이의 거리는

$$\frac{|7a-4|}{\sqrt{7^2+(-2)^2}}=\frac{|7a-4|}{\sqrt{53}}$$

$\triangle ABC$의 넓이가 12이므로

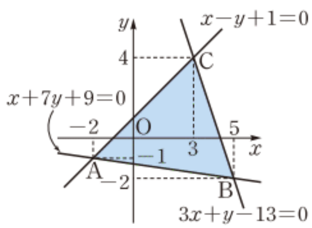
$$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{53}\cdot\frac{|7a-4|}{\sqrt{53}}=12,\qquad |7a-4|=24$$

$$7a-4=\pm24\qquad \therefore a=4 \text{ 또는 } a=-\frac{20}{7}$$

이때 a는 정수이므로 $\quad a=4$ 답 ⑤

1066
$$\begin{cases} x-y+1=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x+7y+9=0 & \cdots\cdots ㉡ \\ 3x+y-13=0 & \cdots\cdots ㉢ \end{cases}$$

직선 ㉠, ㉡의 교점의 좌표는
$(-2,\ -1)$
직선 ㉡, ㉢의 교점의 좌표는
$(5,\ -2)$
직선 ㉠, ㉢의 교점의 좌표는
$(3,\ 4)$



$A(-2,\ -1)$, $B(5,\ -2)$, $C(3,\ 4)$로 놓으면 $\quad \overline{AC}=\sqrt{(3+2)^2+(4+1)^2}=5\sqrt{2}$

점 $B(5,\ -2)$와 직선 $x-y+1=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|5+2+1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{8}{\sqrt{2}}=4\sqrt{2}$$

$$\therefore \triangle ABC=\frac{1}{2}\cdot5\sqrt{2}\cdot4\sqrt{2}=20$$ 답 20

유형 29 평행한 두 직선 사이의 거리 본책 157쪽

평행한 두 직선 l_1, l_2 사이의 거리는 다음과 같은 순서로 구한다.
(i) 직선 l_1 위의 한 점의 좌표 $(x_1,\ y_1)$을 구한다.
(ii) 점 $(x_1,\ y_1)$과 직선 l_2 사이의 거리를 구한다.

1067 두 직선이 평행하므로 직선 $3x+y=8$ 위의 한 점 $(0,\ 8)$과 직선 $3x+y=k$, 즉 $3x+y-k=0$ 사이의 거리가 $\sqrt{10}$이다.

즉 $\frac{|8-k|}{\sqrt{3^2+1^2}}=\sqrt{10}$이므로 $\quad |8-k|=10$

$$8-k=\pm10\qquad \therefore k=18\ (\because k>0)$$ 답 ⑤

1068 두 직선 l, l'이 평행하므로 $\overline{AB}$의 길이의 최솟값은 평행한 두 직선 사이의 거리와 같다.

이때 직선 l: $2x-y+6=0$ 위의 한 점 $(0,\ 6)$과 직선 l': $2x-y-9=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|-6-9|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{15}{\sqrt{5}}=3\sqrt{5}$$

따라서 $\overline{AB}$의 길이의 최솟값은 $3\sqrt{5}$이다. 답 $3\sqrt{5}$

1069 두 직선이 평행하므로 $\dfrac{m}{1}=\dfrac{-2}{1-m}\neq\dfrac{m+3}{2-m}$

$\dfrac{m}{1}=\dfrac{-2}{1-m}$에서 $m(m-1)=2$

$m^2-m-2=0,\quad (m+1)(m-2)=0$

$\therefore m=-1\ (\because m<0)$

따라서 두 직선의 방정식은

$x+2y-2=0,\ x+2y+3=0$

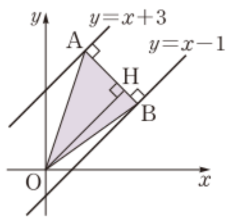
이므로 직선 $x+2y-2=0$ 위의 한 점 $(0,\ 1)$과 직선 $x+2y+3=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|2+3|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\dfrac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$ 답 ⑤

1070 직선 $y=x+3$ 위의 한 점 $(0,\ 3)$과 직선 $y=x-1$, 즉 $x-y-1=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|-3-1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\dfrac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$

$\therefore \overline{AB}=2\sqrt{2}$ ⋯ ❶



점 O에서 $\overline{AB}$에 내린 수선의 발을 H라 하면 △OBA의 넓이가 6이므로

$\dfrac{1}{2}\cdot 2\sqrt{2}\cdot\overline{OH}=6$

$\therefore \overline{OH}=3\sqrt{2}$ ⋯ ❷

이때 직선 AB는 직선 $y=x+3$과 수직이므로 $y=-x+k$, 즉 $x+y-k=0$으로 놓을 수 있다.

이 직선과 원점 사이의 거리가 $3\sqrt{2}$이므로

$\dfrac{|-k|}{\sqrt{1^2+1^2}}=3\sqrt{2},\quad |-k|=6\quad \therefore k=\pm 6$

두 점 A, B가 제1사분면 위의 점이므로 $k=6$

따라서 직선 AB의 방정식은 $y=-x+6$ ⋯ ❸

답 $y=-x+6$

채점 기준	비율
❶ $\overline{AB}$의 길이를 구할 수 있다.	30%
❷ $\overline{OH}$의 길이를 구할 수 있다.	30%
❸ 직선 AB의 방정식을 구할 수 있다.	40%

유형 30 자취의 방정식; 점과 직선 사이의 거리 본책 157쪽

(i) 점 P의 좌표를 $(x,\ y)$로 놓는다.

(ii) 점 P와 주어진 직선 사이의 거리를 구하는 공식을 이용하여 자취의 방정식을 구한다.

1071 $P(x,\ y)$라 하면

$\dfrac{|x+2y-1|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\dfrac{|2x+y+1|}{\sqrt{2^2+1^2}}$

$|x+2y-1|=|2x+y+1|$

$x+2y-1=\pm(2x+y+1)$

$\therefore x-y+2=0$ 또는 $x+y=0$

따라서 원점을 지나는 점 P의 자취의 방정식은

$x+y=0$ 답 ④

다른 풀이 점 P의 자취는 주어진 두 직선의 교점을 지나는 직선이다.

두 직선 $x+2y-1=0$, $2x+y+1=0$의 교점의 좌표는

$(-1,\ 1)$

따라서 원점과 점 $(-1,\ 1)$을 지나는 직선의 방정식은

$y=-x$, 즉 $x+y=0$

1072 두 직선이 이루는 각의 이등분선 위의 점을 $P(x,\ y)$라 하면 점 P에서 두 직선에 이르는 거리가 같으므로

$\dfrac{|3x-4y+9|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\dfrac{|4x+3y+12|}{\sqrt{4^2+3^2}}$

$|3x-4y+9|=|4x+3y+12|$

$3x-4y+9=\pm(4x+3y+12)$

$\therefore x+7y+3=0$ 또는 $7x-y+21=0$

따라서 주어진 두 직선이 이루는 각을 이등분하는 직선의 방정식은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ②

1073 $P(x,\ y)$라 하면 $\overline{PR}=2\overline{PS}$이므로

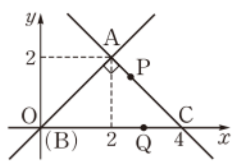
$\dfrac{|2x-y-1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=2\cdot\dfrac{|x+2y-1|}{\sqrt{1^2+2^2}}$

$2x-y-1=\pm 2(x+2y-1)$

$\therefore y=\dfrac{1}{5}$ 또는 $4x+3y-3=0$

답 $y=\dfrac{1}{5}$ 또는 $4x+3y-3=0$

1074 전략 도로를 좌표평면 위에 나타내어 본다.



풀이 오른쪽 그림과 같이 지점 B를 원점으로, 두 지점 B, C를 연결한 도로를 x축으로 하는 좌표평면을 잡으면

$A(2,\ 2),\ B(0,\ 0),\ C(4,\ 0)$

민아와 승우의 t시간 후의 위치를 각각 P, Q라 하면 $P(2+t,\ 2-t)$, $Q(4-2t,\ 0)$이므로 t시간 후의 두 사람 사이의 거리는

$$\begin{aligned}\overline{PQ}&=\sqrt{\{(4-2t)-(2+t)\}^2+\{0-(2-t)\}^2}\\&=\sqrt{10t^2-16t+8}\\&=\sqrt{10\left(t-\frac{4}{5}\right)^2+\frac{8}{5}}\end{aligned}$$

따라서 두 사람 사이의 거리는 $\dfrac{4}{5}$시간 후에 최소가 되고, 그때의 거리는 $\sqrt{\dfrac{8}{5}}=\dfrac{2\sqrt{10}}{5}$(km)이다. 답 ②

1075 전략 평행선 사이의 선분의 길이의 비를 이용하여 두 선분 PB와 PC의 길이의 비를 구한다.

풀이 △ABP에서 $\overline{AP}\,/\!/\,\overline{DC}$이므로

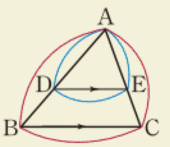
$\overline{AB}:\overline{AD}=\overline{PB}:\overline{PC}$

이때 $\overline{AB}=\sqrt{(-5)^2+(-9-3)^2}=13$,
$\overline{AD}=\overline{AC}=\sqrt{4^2+(-3)^2}=5$이므로
$13:5=\overline{PB}:\overline{PC}$
따라서 점 P는 $\overline{BC}$를 $13:5$로 외분하는 점이므로 점 P의 좌표는
$\left(\dfrac{13\cdot4-5\cdot(-5)}{13-5}, \dfrac{-5\cdot(-9)}{13-5}\right)$, 즉 $\left(\dfrac{77}{8}, \dfrac{45}{8}\right)$ 답 ⑤

sSEN 특강

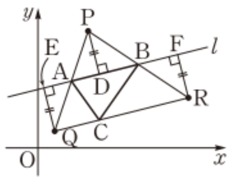
평행선 사이의 선분의 길이의 비

삼각형 ABC에서 두 점 D, E가 각각 $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ 위의 점일 때, $\overline{BC}\,/\!/\,\overline{DE}$이면
$\overline{AB}:\overline{AD}=\overline{AC}:\overline{AE}=\overline{BC}:\overline{DE}$



1076 전략 세 점 P, Q, R에서 직선 l에 이르는 거리가 같음을 이용하여 두 점 A, B의 좌표를 구하고, 점 C가 $\overline{QR}$의 내분점임을 이용하여 점 C의 좌표를 구한다.

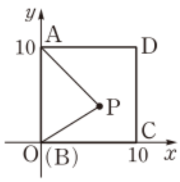
풀이 오른쪽 그림과 같이 세 점 P, Q, R에서 직선 l에 내린 수선의 발을 각각 D, E, F라 하자.



$\triangle ADP\equiv\triangle AEQ$(ASA 합동)이므로
$\overline{AP}=\overline{AQ}$
따라서 점 A는 $\overline{PQ}$의 중점이므로
$A(2, 4)$
같은 방법으로 $\triangle BDP\equiv\triangle BFR$(ASA 합동)에서 점 B는 $\overline{PR}$의 중점이므로 $B(6, 5)$
또 점 C는 $\overline{QR}$를 $1:2$로 내분하는 점이므로
$C\left(\dfrac{1\cdot9+2\cdot1}{1+2}, \dfrac{1\cdot3+2\cdot1}{1+2}\right)$
$\therefore C\left(\dfrac{11}{3}, \dfrac{5}{3}\right)$
$\triangle ABC$의 무게중심의 좌표가 (a, b)이므로
$a=\dfrac{1}{3}\left(2+6+\dfrac{11}{3}\right)=\dfrac{35}{9}$, $b=\dfrac{1}{3}\left(4+5+\dfrac{5}{3}\right)=\dfrac{32}{9}$
$\therefore 9(a+b)=9\left(\dfrac{35}{9}+\dfrac{32}{9}\right)=67$ 답 ③

1077 전략 점 P의 좌표를 (x, y)로 놓고, 자취의 방정식을 구한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 좌표평면 위에 정사각형 ABCD를 점 B가 원점, 변 BC가 x축, 변 AB가 y축에 오도록 놓고 $P(x, y)$라 하자.



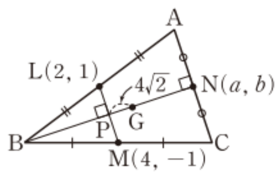
$A(0, 10)$, $B(0, 0)$이므로 $\overline{AP}^2-\overline{BP}^2=20$에서
$\{x^2+(y-10)^2\}-(x^2+y^2)=20$
$-20y+100=20 \qquad \therefore y=4$
따라서 점 P의 자취는 ①과 같다. 답 ①

1078 전략 점 A를 지나고 삼각형 ABC의 넓이를 이등분하는 직선은 $\overline{BC}$의 중점을 지나야 함을 이용한다.

풀이 점 C의 좌표를 $(\alpha, 0)$이라 하면 점 $B(4, 4)$가 이차함수의 그래프의 꼭짓점이므로
$\dfrac{1+\alpha}{2}=4 \qquad \therefore \alpha=7 \qquad \therefore C(7, 0)$
점 A를 지나는 직선이 삼각형 ABC의 넓이를 이등분하려면 $\overline{BC}$의 중점을 지나야 한다. $\overline{BC}$의 중점의 좌표는
$\left(\dfrac{4+7}{2}, \dfrac{4+0}{2}\right)$, 즉 $\left(\dfrac{11}{2}, 2\right)$
따라서 두 점 $(1, 0)$, $\left(\dfrac{11}{2}, 2\right)$를 지나는 직선의 기울기는
$\dfrac{2-0}{\dfrac{11}{2}-1}=\dfrac{4}{9}$
이므로 $p=9$, $q=4$
$\therefore p+q=13$ 답 13

1079 전략 삼각형의 무게중심의 성질을 이용하여 $\overline{BN}$, $\overline{LM}$의 교점과 점 N 사이의 거리를 구하고, $\overline{BN}\perp\overline{LM}$임을 이용하여 a, b에 대한 식을 세운다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 두 직선 BN, LM의 교점을 P라 하면
$\overline{BN}\perp\overline{LM}$이므로 $\overline{AC}\perp\overline{BN}$



이때 $\overline{AN}=\overline{CN}$이므로
$\overline{LP}=\overline{MP}$
즉 점 P가 $\overline{LM}$의 중점이므로 점 P의 좌표는
$\left(\dfrac{2+4}{2}, \dfrac{1-1}{2}\right)$, 즉 $(3, 0)$
또 삼각형 ABC의 무게중심 G에 대하여
$\overline{BG}:\overline{GN}=2:1$, $\overline{BP}=\overline{NP}$
이므로 $(\overline{NP}+4\sqrt{2}):(\overline{NP}-4\sqrt{2})=2:1$
$\therefore \overline{NP}=12\sqrt{2}$
이때 $\overline{NP}^2=(a-3)^2+b^2$이므로
$(a-3)^2+b^2=(12\sqrt{2})^2=288$ ...... ㉠
한편 $\overline{LM}\perp\overline{NP}$이므로
$\dfrac{-1-1}{4-2}\cdot\dfrac{b}{a-3}=-1, \qquad \dfrac{b}{a-3}=1$
$\therefore a-3=b$ ...... ㉡
㉡을 ㉠에 대입하여 정리하면
$2b^2=288, \qquad b^2=144 \qquad \therefore b=\pm12$
이때 무게중심 G가 제1사분면에 있으므로
$a=15$, $b=12 \qquad \therefore ab=180$ 답 ⑤

1080 전략 세 직선의 위치 관계를 생각해 본다.

풀이 주어진 세 직선이 좌표평면을 6개의 영역으로 나누는 경우는 다음과 같다.

(i) 직선 $x+ay=4$가 직선 $x-y=1$ 또는 $x+y=3$과 평행할 때
$a=-1$ 또는 $a=1$

(ii) 직선 $x+ay=4$가 두 직선 $x-y=1$, $x+y=3$의 교점을 지날 때

$x-y=1$, $x+y=3$을 연립하여 풀면

$x=2$, $y=1$

따라서 직선 $x+ay=4$가 점 $(2, 1)$을 지나려면

$2+a=4 \qquad \therefore a=2$

(i), (ii)에서 모든 실수 a의 값의 곱은

$(-1)\cdot 1\cdot 2=-2$

답 ①

1081 전략 직사각형의 두 대각선의 교점을 지나는 직선은 직사각형의 넓이를 이등분함을 이용한다.

풀이 직사각형 ABCD의 두 대각선의 교점의 좌표는

$\left(3, \frac{9}{2}\right)$

직선 $y=mx$가 직사각형 ABCD의 넓이를 이등분하려면 점 $\left(3, \frac{9}{2}\right)$를 지나야 하므로 $\quad \frac{9}{2}=3m \qquad \therefore m=\frac{3}{2}$

따라서 직선 $y=ax+b$는 기울기가 $-\frac{2}{3}$이고 점 $\left(3, \frac{9}{2}\right)$를 지나므로 직선의 방정식은 $\quad y-\frac{9}{2}=-\frac{2}{3}(x-3)$

$\therefore y=-\frac{2}{3}x+\frac{13}{2}$

즉 $a=-\frac{2}{3}$, $b=\frac{13}{2}$이므로

$a+b+m=\frac{22}{3}$

답 $\frac{22}{3}$

1082 전략 수직인 두 직선의 기울기의 곱은 -1임을 이용한다.

풀이 직선 AC의 기울기는 $-\frac{a}{c}$이고 $\overline{AC}\perp\overline{BD}$이므로 직선 BD의 기울기는 $\frac{c}{a}$이고, 점 $(b, 0)$을 지나므로 그 방정식은

$y=\boxed{\frac{c}{a}}(x-b) \qquad \therefore y=\frac{c}{a}x-\frac{bc}{a} \qquad \cdots\cdots ㉠$

또 직선 AB의 기울기는 $-\frac{a}{b}$이고 $\overline{AB}\perp\overline{CE}$이므로 직선 CE의 기울기는 $\frac{b}{a}$이고, 점 $(c, 0)$을 지나므로 그 방정식은

$y=\boxed{\frac{b}{a}}(x-c) \qquad \therefore y=\frac{b}{a}x-\frac{bc}{a} \qquad \cdots\cdots ㉡$

두 직선 ㉠, ㉡의 y절편이 $\boxed{-\frac{bc}{a}}$로 같으므로 두 직선의 교점은 y축 위에 있다.

이때 y축은 $\overline{BC}$의 수선이므로 삼각형 ABC의 세 꼭짓점에서 각각의 대변에 내린 세 수선은 한 점 $\left(0, \boxed{-\frac{bc}{a}}\right)$에서 만난다.

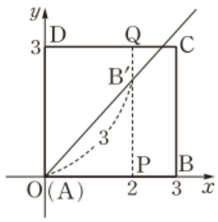
따라서 $X=\frac{c}{a}$, $Y=\frac{b}{a}$, $Z=-\frac{bc}{a}$이므로

$\frac{Z}{XY}=-\frac{bc}{a}\cdot\frac{a}{c}\cdot\frac{a}{b}=-a$

답 $-a$

1083 전략 정사각형 모양의 종이를 좌표평면 위에 나타낸 후 $\overline{AB'}=\overline{AB}$임을 이용하여 직선 AB′의 방정식을 구한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 좌표평면 위에 정사각형 ABCD를 점 A가 원점, $\overline{AB}$가 x축, $\overline{AD}$가 y축에 오도록 놓으면



$\overline{AB'}=\overline{AB}=3$이므로

$\overline{B'P}=\sqrt{3^2-2^2}=\sqrt{5}$

따라서 $B'(2, \sqrt{5})$이므로 직선 AB′의 방정식은

$y=\frac{\sqrt{5}}{2}x \qquad \therefore \sqrt{5}x-2y=0$

세 점 $B(3, 0)$, $C(3, 3)$, $D(0, 3)$과 직선 $\sqrt{5}x-2y=0$ 사이의 거리를 각각 d_1, d_2, d_3이라 하면

$d_1=\frac{|\sqrt{5}\cdot 3-2\cdot 0|}{\sqrt{(\sqrt{5})^2+(-2)^2}}=\sqrt{5}$

$d_2=\frac{|\sqrt{5}\cdot 3-2\cdot 3|}{\sqrt{(\sqrt{5})^2+(-2)^2}}=\sqrt{5}-2$

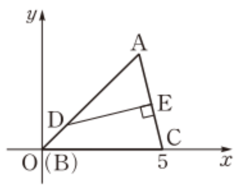
$d_3=\frac{|\sqrt{5}\cdot 0-2\cdot 3|}{\sqrt{(\sqrt{5})^2+(-2)^2}}=2$

$\therefore d_1+d_2+d_3=2\sqrt{5}$

답 $2\sqrt{5}$

1084 전략 도형을 좌표평면 위에 나타내어 본다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 좌표평면 위에 삼각형 ABC를 점 B가 원점, $\overline{BC}$가 x축, 점 A가 제1사분면 위에 오도록 놓고 $A(a, b)$라 하면



$\overline{AB}^2=a^2+b^2=32 \qquad \cdots\cdots ㉠$

$\overline{AC}^2=(a-5)^2+b^2=17 \qquad \cdots\cdots ㉡$

㉠$-$㉡을 하면 $\quad 10a-25=15 \qquad \therefore a=4$

이것을 ㉠에 대입하면

$16+b^2=32 \qquad \therefore b=4\ (\because b>0) \qquad \therefore A(4, 4)$

점 D는 $\overline{AB}$를 $3:1$로 내분하는 점이므로

$D\left(\frac{3\cdot 0+1\cdot 4}{3+1}, \frac{3\cdot 0+1\cdot 4}{3+1}\right)$, 즉 $D(1, 1)$

두 점 $A(4, 4)$, $C(5, 0)$을 지나는 직선의 방정식은

$y=\frac{0-4}{5-4}(x-5)$, 즉 $y=-4x+20$

이므로 점 $D(1, 1)$과 직선 $4x+y-20=0$ 사이의 거리는

$\overline{DE}=\frac{|4\cdot 1+1\cdot 1-20|}{\sqrt{4^2+1^2}}=\frac{15}{\sqrt{17}}=\frac{15}{17}\sqrt{17}$

따라서 $p=17$, $q=15$이므로 $\quad p+q=32$

답 32

1085 전략 두 직선의 기울기와 절편을 이용하여 두 직선의 위치 관계를 알아본다.

풀이 $x+\frac{y}{a^2}=\frac{1}{a}$에서 $\quad a^2x+y-a=0 \qquad \cdots\cdots ㉠$

$x-\frac{y}{a^2}=\frac{1}{a}$에서 $\quad a^2x-y-a=0 \qquad \cdots\cdots ㉡$

ㄱ. ㉠－㉡을 하면 $2y=0$ $\therefore y=0$

이것을 ㉠에 대입하면 $a^2x=a$ $\therefore x=\frac{1}{a}$

따라서 두 직선은 x축에서 만난다.

ㄴ. 두 직선이 수직이려면 $a^2\cdot a^2+1\cdot(-1)=0$이어야 한다.

$a^4=1$에서 $a=1$ ($\because a>0$)

따라서 $a=1$일 때만 두 직선은 서로 수직이다.

ㄷ. 원점에서 두 직선 ㉠, ㉡에 이르는 거리를 각각 d_1, d_2라 하면

$$d_1=\frac{|-a|}{\sqrt{(a^2)^2+1^2}}=\frac{a}{\sqrt{a^4+1}}$$

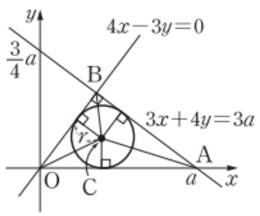
$$d_2=\frac{|-a|}{\sqrt{(a^2)^2+(-1)^2}}=\frac{a}{\sqrt{a^4+1}}$$

$\therefore d_1=d_2$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ④

1086 전략 삼각형의 넓이를 a에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 직선 $3x+4y=3a$가 x축과 만나는 점을 A, 두 직선 $4x-3y=0$과 $3x+4y=3a$의 교점을 B라 하자.



두 직선 $4x-3y=0$과 $3x+4y=3a$는 수직이므로 원점과 직선 $3x+4y-3a=0$ 사이의 거리는

$$\overline{OB}=\frac{|-3a|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{3}{5}a\ (\because a>0)$$

또 점 $A(a, 0)$과 직선 $4x-3y=0$ 사이의 거리는

$$\overline{AB}=\frac{|4a|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\frac{4}{5}a\ (\because a>0)$$

$\triangle OAB$에 내접하는 원의 반지름의 길이를 r라 하면

$\pi r^2=4\pi$ $\therefore r=2$ ($\because r>0$)

내접원의 중심을 C라 하면

$\triangle OAB=\triangle OAC+\triangle ABC+\triangle BOC$

$\frac{1}{2}\cdot\overline{OB}\cdot\overline{AB}=\frac{1}{2}r(\overline{OA}+\overline{AB}+\overline{OB})$

$\frac{3}{5}a\cdot\frac{4}{5}a=2\cdot\left(a+\frac{4}{5}a+\frac{3}{5}a\right)$, $a^2=10a$

$a(a-10)=0$ $\therefore a=10$ ($\because a>0$) 답 ③

1087 전략 이차함수의 그래프에 접하고 주어진 직선과 평행한 직선의 방정식을 구한다.

풀이 이차함수 $y=x^2+2x+3$의 그래프에 접하고 직선 $y=2x+a$와 평행한 직선의 방정식을 $y=2x+k$라 하자.

$x^2+2x+3=2x+k$, 즉 $x^2+3-k=0$의 판별식을 D라 하면

$D=-4(3-k)=0$ $\therefore k=3$

따라서 접선의 방정식은 $y=2x+3$

이 직선 위의 한 점 $(0, 3)$과 직선 $y=2x+a$, 즉 $2x-y+a=0$ 사이의 거리가 $\sqrt{5}$이므로

$$\frac{|0-3+a|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\sqrt{5},\quad |a-3|=5$$

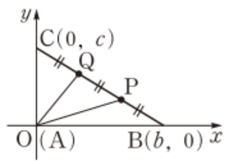
$a-3=\pm5$ $\therefore a=-2$ 또는 $a=8$

그런데 $a=8$이면 이차함수 $y=x^2+2x+3$의 그래프와 직선 $y=2x+a$가 서로 다른 두 점에서 만나므로 거리의 최솟값이 0이 된다.

$\therefore a=-2$ 답 -2

1088 전략 점 A가 원점에 오도록 직각삼각형 ABC를 좌표평면 위에 놓은 후 점 P, Q의 좌표를 구한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 좌표평면 위에 직각삼각형 ABC를 점 A가 원점, 변 AB가 x축, 변 AC가 y축에 오도록 놓고 두 점 B, C의 좌표를 각각 $(b, 0)$, $(0, c)$라 하자.



점 P는 선분 BC를 $1:2$로 내분하는 점이므로

$$P\left(\frac{1\cdot0+2\cdot b}{1+2}, \frac{1\cdot c+2\cdot0}{1+2}\right),\ 즉\ P\left(\frac{2b}{3}, \frac{c}{3}\right)$$

점 Q는 선분 BC를 $2:1$로 내분하는 점이므로

$$Q\left(\frac{2\cdot0+1\cdot b}{2+1}, \frac{2\cdot c+1\cdot0}{2+1}\right),\ 즉\ Q\left(\frac{b}{3}, \frac{2c}{3}\right) \quad \cdots ❶$$

$$\therefore l=\overline{AB}^2+\overline{AP}^2+\overline{AQ}^2+\overline{AC}^2$$
$$=b^2+\left\{\left(\frac{2b}{3}\right)^2+\left(\frac{c}{3}\right)^2\right\}+\left\{\left(\frac{b}{3}\right)^2+\left(\frac{2c}{3}\right)^2\right\}+c^2$$
$$=\frac{14}{9}(b^2+c^2) \quad \cdots ❷$$

이때 $\overline{BC}=\sqrt{b^2+c^2}=\sqrt{6}$이므로 $b^2+c^2=6$

$$\therefore 3l=3\cdot\frac{14}{9}\cdot6=28 \quad \cdots ❸$$

답 28

채점 기준	비율
❶ 두 점 P, Q의 좌표를 두 점 B, C의 좌표를 이용하여 나타낼 수 있다.	40%
❷ l의 값을 두 점 B, C의 좌표를 이용하여 나타낼 수 있다.	30%
❸ $3l$의 값을 구할 수 있다.	30%

1089 전략 세 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$에 대하여 $\overline{AB}$의 중점의 좌표는 $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$, 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는 $\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$임을 이용한다.

풀이 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$이라 하면 $\overline{AB}$의 중점의 좌표가 $(1, 2)$이므로

$\frac{x_1+x_2}{2}=1$, $\frac{y_1+y_2}{2}=2$

$\therefore x_1+x_2=2$, $y_1+y_2=4$ ...... ㉠

$\overline{BC}$의 중점의 좌표가 $(5, 3)$이므로

$\frac{x_2+x_3}{2}=5$, $\frac{y_2+y_3}{2}=3$

$\therefore x_2+x_3=10$, $y_2+y_3=6$ ...... ㉡

$\overline{CA}$의 중점의 좌표가 $(3, 7)$이므로

$\frac{x_3+x_1}{2}=3$, $\frac{y_3+y_1}{2}=7$

$\therefore x_3+x_1=6$, $y_3+y_1=14$ ...... ㉢

㉠, ㉡, ㉢에서

$2(x_1+x_2+x_3)=18,\ 2(y_1+y_2+y_3)=24$

$\therefore\ x_1+x_2+x_3=9,\ y_1+y_2+y_3=12$ ⋯ ❶

삼각형 ABC의 무게중심의 좌표가 (a, b)이므로

$a=\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3}=3,\ b=\dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}=4$ ⋯ ❷

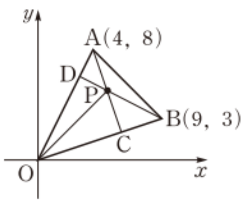
$\therefore\ a+b=7$ ⋯ ❸

답 7

채점 기준	비율
❶ 세 변의 중점의 좌표를 이용하여 세 점 A, B, C의 좌표에 대한 식을 구할 수 있다.	60%
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	30%
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	10%

1090 전략 두 삼각형의 높이가 같으면 삼각형의 넓이의 비는 밑변의 길이의 비와 같음을 이용한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 직선 AP가 변 OB와 만나는 점을 C라 하면



$\triangle PAO : \triangle PBA=2:1$이므로

$\overline{OC}:\overline{CB}=\triangle POC:\triangle PBC$
$=2:1$

즉 점 C는 선분 OB를 $2:1$로 내분하는 점이므로

$C\left(\dfrac{2\cdot 9+1\cdot 0}{2+1}, \dfrac{2\cdot 3+1\cdot 0}{2+1}\right)$, 즉 $C(6, 2)$ ⋯ ❶

또 직선 BP가 변 OA와 만나는 점을 D라 하면

$\triangle POB : \triangle PBA=3:1$이므로

$\overline{OD}:\overline{DA}=\triangle POD:\triangle PAD=3:1$

즉 점 D는 선분 OA를 $3:1$로 내분하는 점이므로

$D\left(\dfrac{3\cdot 4+1\cdot 0}{3+1}, \dfrac{3\cdot 8+1\cdot 0}{3+1}\right)$, 즉 $D(3, 6)$ ⋯ ❷

직선 AC의 방정식은 $\quad y-8=\dfrac{2-8}{6-4}(x-4)$

$\therefore\ 3x+y-20=0$ ⋯⋯ ㉠

직선 BD의 방정식은 $\quad y-3=\dfrac{6-3}{3-9}(x-9)$

$\therefore\ x+2y-15=0$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad x=5,\ y=5$

$\therefore\ P(5, 5)$ ⋯ ❸

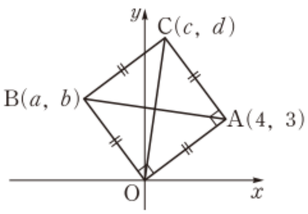
따라서 $a=5$, $b=5$이므로 $\quad a+b=10$ ⋯ ❹

답 10

채점 기준	비율
❶ 점 C의 좌표를 구할 수 있다.	30%
❷ 점 D의 좌표를 구할 수 있다.	30%
❸ 점 P의 좌표를 구할 수 있다.	30%
❹ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	10%

1091 전략 사각형 OACB가 정사각형임을 알고 정사각형의 두 대각선은 서로를 이등분함을 이용한다.

풀이 직선 OA의 기울기는 $\dfrac{3}{4}$이므로 직선 OB의 방정식은



$y=-\dfrac{4}{3}x$

$\therefore\ b=-\dfrac{4}{3}a$ ⋯⋯ ㉠

$\overline{OB}^2=\overline{OA}^2=25$이므로

$a^2+\left(-\dfrac{4}{3}a\right)^2=25,\qquad a^2=9\qquad \therefore\ a=-3\ (\because\ a<0)$

이것을 ㉠에 대입하면 $\qquad b=4$ ⋯ ❶

사각형 OACB는 정사각형이므로 두 대각선의 중점이 일치한다.

대각선 AB의 중점의 좌표는 $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{7}{2}\right)$이고 대각선 OC의 중점의 좌표는 $\left(\dfrac{c}{2}, \dfrac{d}{2}\right)$이므로

$\dfrac{1}{2}=\dfrac{c}{2},\ \dfrac{7}{2}=\dfrac{d}{2}$

$\therefore\ c=1,\ d=7$ ⋯ ❷

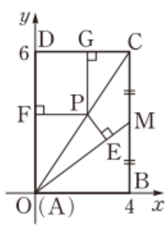
$\therefore\ ab+cd=(-3)\cdot 4+1\cdot 7=-5$ ⋯ ❸

답 -5

채점 기준	비율
❶ a, b의 값을 구할 수 있다.	40%
❷ c, d의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ $ab+cd$의 값을 구할 수 있다.	20%

1092 전략 직사각형을 좌표평면 위에 놓고 점과 직선 사이의 거리를 구하는 공식을 이용한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 좌표평면 위에 직사각형 ABCD를 점 A가 원점, 변 AB가 x축, 변 AD가 y축에 오도록 놓으면



$B(4, 0)$, $C(4, 6)$, $D(0, 6)$, $M(4, 3)$

따라서 직선 AC와 직선 AM의 방정식은 각각

$y=\dfrac{3}{2}x,\ y=\dfrac{3}{4}x$ ⋯ ❶

점 P가 직선 AC 위에 있으므로 점 P의 x좌표를 $a(a>0)$라 하면

$P\left(a, \dfrac{3}{2}a\right)$

점 P와 직선 $y=\dfrac{3}{4}x$, 즉 $3x-4y=0$ 사이의 거리는

$\overline{PE}=\dfrac{|3a-6a|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\dfrac{3}{5}a\ (\because\ a>0)$ ⋯ ❷

$\overline{PG}=2\overline{PE}$에서 $\qquad 6-\dfrac{3}{2}a=2\cdot\dfrac{3}{5}a\qquad \therefore\ a=\dfrac{20}{9}$

$\therefore\ \overline{PF}=a=\dfrac{20}{9}$ ⋯ ❸

답 $\dfrac{20}{9}$

채점 기준	비율
❶ 두 직선 AC, AM의 방정식을 구할 수 있다.	40%
❷ $\overline{PE}$의 길이를 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30%
❸ $\overline{PF}$의 길이를 구할 수 있다.	30%

1093 전략 정삼각형의 무게중심의 성질을 이용한다.

풀이 원점을 O라 하고, 직선 OA가 $\overline{\mathrm{BC}}$와 만나는 점을 D라 하면 삼각형 ABC가 정삼각형이므로

$\overline{\mathrm{AD}}\perp\overline{\mathrm{BC}}$ 직선 AD는 $\overline{\mathrm{BC}}$의 수직이등분선이다.

직선 AD의 기울기가 2이므로 직선 BC의 기울기는 $-\frac{1}{2}$이다.

따라서 직선 BC의 방정식을

$y=-\frac{1}{2}x+b$, 즉 $x+2y-2b=0$

으로 놓을 수 있다. ⋯ ❶

또 정삼각형 ABC의 무게중심이 O이므로

$\overline{\mathrm{OA}}:\overline{\mathrm{OD}}=2:1$

이때 $\overline{\mathrm{OA}}=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$, $\overline{\mathrm{OD}}=\frac{|-2b|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{|2b|}{\sqrt{5}}$이므로

$2\sqrt{5}:\frac{|2b|}{\sqrt{5}}=2:1$

$|2b|=5$ $\quad\therefore b=\pm\frac{5}{2}$ ⋯ ❷

$b=\frac{5}{2}$이면 직선 $x+2y-5=0$은 제3사분면을 지나지 않으므로 원점이 삼각형 ABC의 외부에 존재한다.

따라서 $b=-\frac{5}{2}$이므로 구하는 직선의 방정식은

$x+2y+5=0$ ⋯ ❸

답 $x+2y+5=0$

채점 기준	비율
❶ 직선 BC의 방정식을 미지수를 이용하여 나타낼 수 있다.	30%
❷ $\overline{\mathrm{OA}}:\overline{\mathrm{OD}}=2:1$임을 이용하여 ❶의 미지수의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ 직선 BC의 방정식을 구할 수 있다.	30%

1094 전략 $\overline{\mathrm{AP}}=\frac{1}{3}\overline{\mathrm{AB}}$임을 이용하여 $\overline{\mathrm{AP}}$의 길이를 구하고, $\overline{\mathrm{BC}}$를 $2:1$로 외분하는 점 Q의 좌표를 구한다.

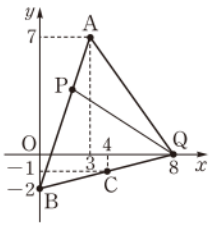
풀이 (1) $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(-3)^2+(-2-7)^2}=3\sqrt{10}$이므로

$\overline{\mathrm{AP}}=\frac{1}{3}\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{10}$ ⋯ ❶

(2) 점 Q의 좌표는

$\left(\frac{2\cdot4-1\cdot0}{2-1}, \frac{2\cdot(-1)-1\cdot(-2)}{2-1}\right)$

$\therefore (8, 0)$



직선 AB의 방정식은

$y-7=\frac{-2-7}{0-3}(x-3)$

$\therefore y=3x-2$ ⋯ ❷

따라서 점 Q(8, 0)과 직선 $y=3x-2$, 즉 $3x-y-2=0$ 사이의 거리는

$\frac{|3\cdot8-2|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\frac{11\sqrt{10}}{5}$ ⋯ ❸

(3) 삼각형 APQ의 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{10}\cdot\frac{11\sqrt{10}}{5}=11$ ⋯ ❹

답 (1) $\sqrt{10}$ (2) $\frac{11\sqrt{10}}{5}$ (3) 11

채점 기준	비율
❶ $\overline{\mathrm{AP}}$의 길이를 구할 수 있다.	20%
❷ 점 Q의 좌표와 직선 AB의 방정식을 구할 수 있다.	30%
❸ 점 Q와 직선 AB 사이의 거리를 구할 수 있다.	30%
❹ 삼각형 APQ의 넓이를 구할 수 있다.	20%

10 원의 방정식

1095 답 $x^2+y^2=9$

1096 답 $(x-2)^2+(y+1)^2=36$

1097 답 $(x+5)^2+(y-2)^2=4$

1098 답 $(x-4)^2+(y-1)^2=16$

1099 반지름의 길이를 r라 하면 원의 방정식은

$(x-3)^2+(y+4)^2=r^2$

이 원이 원점을 지나므로

$(-3)^2+4^2=r^2 \quad \therefore r^2=25$

따라서 구하는 원의 방정식은

$(x-3)^2+(y+4)^2=25$ 답 $(x-3)^2+(y+4)^2=25$

1100 반지름의 길이를 r라 하면 원의 방정식은

$(x+3)^2+(y-2)^2=r^2$

이 원이 점 $(-2, 0)$을 지나므로

$1^2+(-2)^2=r^2 \quad \therefore r^2=5$

따라서 구하는 원의 방정식은

$(x+3)^2+(y-2)^2=5$ 답 $(x+3)^2+(y-2)^2=5$

1101 $\overline{AB}$의 중점이 두 점 A, B를 지름의 양 끝 점으로 하는 원의 중심이므로 그 좌표는

$\left(\frac{5-1}{2}, \frac{-2+4}{2}\right)$, 즉 $(2, 1)$

또 $\overline{AB}$가 원의 지름이므로 원의 반지름의 길이는

$\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}\sqrt{(-1-5)^2+(4+2)^2}=3\sqrt{2}$

따라서 구하는 원의 방정식은

$(x-2)^2+(y-1)^2=18$ 답 $(x-2)^2+(y-1)^2=18$

1102 원의 중심을 $P(a, b)$라 하면 $\overline{PA}=\overline{PB}=\overline{PC}$

$\overline{PA}=\overline{PB}$에서 $\overline{PA}^2=\overline{PB}^2$이므로

$a^2+b^2=(a+1)^2+(b-1)^2$

$\therefore a-b+1=0$ …… ㉠

$\overline{PA}=\overline{PC}$에서 $\overline{PA}^2=\overline{PC}^2$이므로

$a^2+b^2=(a-4)^2+b^2$

$-8a+16=0 \quad \therefore a=2$

$a=2$를 ㉠에 대입하면 $b=3$

따라서 원의 중심은 $P(2, 3)$이고 반지름의 길이는

$\overline{PA}=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$

이므로 구하는 원의 방정식은

$(x-2)^2+(y-3)^2=13$ 답 $(x-2)^2+(y-3)^2=13$

1103 원의 중심을 $P(a, b)$라 하면 $\overline{PA}=\overline{PB}=\overline{PC}$

$\overline{PA}=\overline{PB}$에서 $\overline{PA}^2=\overline{PB}^2$이므로

$(a-3)^2+b^2=(a+3)^2+(b-2)^2$

$\therefore 3a-b+1=0$ …… ㉠

$\overline{PA}=\overline{PC}$에서 $\overline{PA}^2=\overline{PC}^2$이므로

$(a-3)^2+b^2=(a-1)^2+(b-4)^2$

$\therefore a-2b+2=0$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=0, b=1$

따라서 원의 중심은 $P(0, 1)$이고 반지름의 길이는

$\overline{PA}=\sqrt{(-3)^2+1^2}=\sqrt{10}$

이므로 구하는 원의 방정식은

$x^2+(y-1)^2=10$ 답 $x^2+(y-1)^2=10$

1104 $x^2+y^2-10y-11=0$에서 $x^2+(y-5)^2=36$

따라서 중심의 좌표는 $(0, 5)$, 반지름의 길이는 6이다.

답 $(0, 5)$, 6

1105 $x^2+y^2+6x-4y+12=0$에서 $(x+3)^2+(y-2)^2=1$

따라서 중심의 좌표는 $(-3, 2)$, 반지름의 길이는 1이다.

답 $(-3, 2)$, 1

1106 $2x^2+2y^2+6x-2y+1=0$에서

$2(x^2+3x)+2(y^2-y)+1=0, \quad 2\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+2\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=4$

$\therefore \left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=2$

따라서 중심의 좌표는 $\left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$, 반지름의 길이는 $\sqrt{2}$이다.

답 $\left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $\sqrt{2}$

1107 $x^2+y^2+6x-2y+k=0$에서

$(x+3)^2+(y-1)^2=10-k$

이 방정식이 원을 나타내려면

$10-k>0 \quad \therefore k<10$ 답 $k<10$

1108 $x^2+y^2-4x+2ky+7=0$에서

$(x-2)^2+(y+k)^2=k^2-3$

이 방정식이 원을 나타내려면

$k^2-3>0 \quad \therefore k<-\sqrt{3}$ 또는 $k>\sqrt{3}$

답 $k<-\sqrt{3}$ 또는 $k>\sqrt{3}$

1109 구하는 직선의 방정식은

$x^2+y^2+4x-3-(x^2+y^2-2x+10y+10)=0$

$\therefore 6x-10y-13=0$ 답 $6x-10y-13=0$

1110 구하는 현의 방정식은

$x^2+y^2+8x-2y+14-(x^2+y^2+4x-6y+9)=0$

$\therefore 4x+4y+5=0$ 답 $4x+4y+5=0$

1111 두 원의 교점을 지나는 원의 방정식을

$x^2+y^2-8x+2y-5+k(x^2+y^2+2x-4y+2)=0\ (k\neq-1)$

이라 하면 이 원이 점 $(1,\ 3)$을 지나므로

$3+2k=0 \qquad \therefore k=-\dfrac{3}{2}$

따라서 구하는 원의 방정식은

$x^2+y^2-8x+2y-5-\dfrac{3}{2}(x^2+y^2+2x-4y+2)=0$

$\therefore x^2+y^2+22x-16y+16=0$

답 $x^2+y^2+22x-16y+16=0$

1112 답 (가) $(0,\ 0)$ (나) -5 (다) $\sqrt{5}$ (라) $=$
(마) 한 점에서 만난다.(접한다.)

1113 원의 중심 $(3,\ -2)$와 직선 $3x-y-1=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|9+2-1|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\sqrt{10}$

원의 반지름의 길이가 $\sqrt{6}$이고 $\sqrt{10}>\sqrt{6}$이므로 원 O와 직선 l은 만나지 않는다.

답 만나지 않는다.

1114 $x^2+y^2+10x+2y+17=0$에서 $\quad (x+5)^2+(y+1)^2=9$

원의 중심 $(-5,\ -1)$과 직선 $x+2y+3=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|-5-2+3|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$

원의 반지름의 길이가 3이고 $\dfrac{4\sqrt{5}}{5}<3$이므로 원 O와 직선 l은 서로 다른 두 점에서 만난다.

답 서로 다른 두 점에서 만난다.

1115 $x-2y+1=0$에서 $\quad x=2y-1$

이것을 $x^2+y^2+4x-3y-6=0$에 대입하면

$(2y-1)^2+y^2+4(2y-1)-3y-6=0$

$\therefore 5y^2+y-9=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=1^2-4\cdot5\cdot(-9)=181>0$

따라서 교점의 개수는 2이다.

답 2

1116 $x-y-3=0$에서 $\quad y=x-3$

이것을 $x^2+y^2+2x-4y-13=0$에 대입하면

$x^2+(x-3)^2+2x-4(x-3)-13=0$

$2x^2-8x+8=0 \qquad \therefore x^2-4x+4=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=(-2)^2-1\cdot4=0$

따라서 교점의 개수는 1이다.

답 1

1117 원의 중심 $(0,\ 0)$과 직선 $x-y+k=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|k|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\dfrac{|k|}{\sqrt{2}}$

(1) 서로 다른 두 점에서 만나려면

$\dfrac{|k|}{\sqrt{2}}<3, \qquad |k|<3\sqrt{2}$

$\therefore -3\sqrt{2}<k<3\sqrt{2}$

(2) 한 점에서 만나려면

$\dfrac{|k|}{\sqrt{2}}=3, \qquad |k|=3\sqrt{2}$

$\therefore k=-3\sqrt{2}$ 또는 $k=3\sqrt{2}$

(3) 만나지 않으려면

$\dfrac{|k|}{\sqrt{2}}>3, \qquad |k|>3\sqrt{2}$

$\therefore k<-3\sqrt{2}$ 또는 $k>3\sqrt{2}$

답 풀이 참조

1118 $y=x\pm\sqrt{2}\cdot\sqrt{1^2+1}$에서 $\qquad y=x\pm2$

답 $y=x\pm2$

1119 $y=-3x\pm\sqrt{10}\cdot\sqrt{(-3)^2+1}$에서 $\qquad y=-3x\pm10$

답 $y=-3x\pm10$

1120 답 $2x-y=5$

1121 $-2x+4y=20$에서 $\qquad x-2y=-10$

답 $x-2y=-10$

1122 (1) $x_1x+y_1y=2$

(2) 직선 $x_1x+y_1y=2$가 점 $(0,\ 2)$를 지나므로

$2y_1=2 \qquad \therefore y_1=1$

또 점 $(x_1,\ 1)$이 원 $x^2+y^2=2$ 위의 점이므로

$x_1{}^2+1^2=2, \qquad x_1{}^2=1 \qquad \therefore x_1=\pm1$

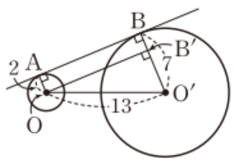
$\therefore x_1=1,\ y_1=1$ 또는 $x_1=-1,\ y_1=1$

(3) $x_1=1,\ y_1=1$일 때, $\qquad x+y=2$

$x_1=-1,\ y_1=1$일 때, $\qquad -x+y=2$

답 풀이 참조

1123 점 O에서 $\overline{\mathrm{BO'}}$에 내린 수선의 발을 B′이라 하면 오른쪽 그림에서



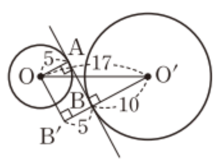
$\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{OB'}}$

$=\sqrt{13^2-(7-2)^2}$

$=12$

답 12

1124 점 O에서 $\overline{\mathrm{O'B}}$의 연장선에 내린 수선의 발을 B′이라 하면 오른쪽 그림에서



$\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{OB'}}$

$=\sqrt{17^2-(10+5)^2}$

$=8$

답 8

10 원의 방정식

유형 01 중심에 대한 조건이 주어진 원의 방정식 본책 166쪽

① 중심이 x축 위에 있는 원의 방정식 ➡ $(x-a)^2+y^2=r^2$
② 중심이 y축 위에 있는 원의 방정식 ➡ $x^2+(y-b)^2=r^2$
③ 중심이 $y=f(x)$의 그래프 위에 있는 원의 방정식
➡ $(x-a)^2+\{y-f(a)\}^2=r^2$

1125 원의 중심의 좌표를 $(a,\ 0)$, 반지름의 길이를 r라 하면 원의 방정식은

$(x-a)^2+y^2=r^2$

이 원이 점 $(-1,\ 2)$를 지나므로

$(-1-a)^2+4=r^2$

$\therefore\ a^2+2a+5=r^2$ ······㉠

또 이 원이 점 $(0,\ 1)$을 지나므로

$(-a)^2+1=r^2$

$\therefore\ a^2+1=r^2$ ······㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-2,\ r^2=5$

따라서 구하는 원의 방정식은

$(x+2)^2+y^2=5$ 답 $(x+2)^2+y^2=5$

1126 원의 중심의 좌표를 $(0,\ a)$, 반지름의 길이를 r라 하면 원의 방정식은 $x^2+(y-a)^2=r^2$

이 원이 점 $(-4,\ 1)$을 지나므로

$16+(1-a)^2=r^2$

$\therefore\ a^2-2a+17=r^2$ ······㉠

또 이 원이 점 $(3,\ 0)$을 지나므로

$9+(-a)^2=r^2$

$\therefore\ a^2+9=r^2$ ······㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=4,\ r^2=25$

따라서 주어진 원의 방정식은 $x^2+(y-4)^2=25$

ㄱ. $4^2+(7-4)^2=25$이므로 주어진 원은 점 $(4,\ 7)$을 지난다.

ㄷ. 원의 반지름의 길이가 5이므로 둘레의 길이는 10π이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ③

다른 풀이 원의 중심을 $\mathrm{A}(0,\ a)$라 하고 $\mathrm{B}(-4,\ 1)$, $\mathrm{C}(3,\ 0)$이라 하면 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AC}}$이므로

$\sqrt{(-4)^2+(1-a)^2}=\sqrt{3^2+(-a)^2}$

양변을 제곱하여 정리하면 $a=4$

따라서 원의 반지름의 길이는

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(-4)^2+(1-4)^2}=5$

1127 원의 중심의 좌표를 $(a,\ a-2)$, 반지름의 길이를 r라 하면 원의 방정식은 $(x-a)^2+(y-a+2)^2=r^2$

이 원이 점 $(0,\ -4)$를 지나므로

$a^2+(-a-2)^2=r^2$ ······㉠

또 이 원이 점 $(4,\ 0)$을 지나므로

$(4-a)^2+(-a+2)^2=r^2$ ······㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1,\ r^2=10$

따라서 구하는 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{10}$이다. 답 ③

1128 원의 중심의 좌표를 $(a,\ a)$, 반지름의 길이를 r라 하면 원의 방정식은 $(x-a)^2+(y-a)^2=r^2$

이 원이 점 $(2,\ 10)$을 지나므로

$(2-a)^2+(10-a)^2=r^2$ ······㉠

또 이 원이 점 $(8,\ -2)$를 지나므로

$(8-a)^2+(-2-a)^2=r^2$ ······㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3,\ r^2=50$

따라서 주어진 원의 방정식은 $(x-3)^2+(y-3)^2=50$ ··· ❶

$x=4$를 원의 방정식에 대입하면

$(y-3)^2=49$ $\therefore\ y=-4$ 또는 $y=10$

$\therefore\ \mathrm{A}(4,\ -4),\ \mathrm{B}(4,\ 10)$ 또는 $\mathrm{A}(4,\ 10),\ \mathrm{B}(4,\ -4)$ ··· ❷

따라서 선분 AB의 길이는

$\overline{\mathrm{AB}}=|10-(-4)|=14$ ··· ❸

답 14

채점 기준	비율
❶ 원의 방정식을 구할 수 있다.	70%
❷ 점 A, B의 좌표를 구할 수 있다.	20%
❸ 선분 AB의 길이를 구할 수 있다.	10%

유형 02 두 점을 지름의 양 끝 점으로 하는 원의 방정식 본책 166쪽

두 점 A, B를 지름의 양 끝 점으로 하는 원
➡ (원의 중심) = ($\overline{\mathrm{AB}}$의 중점), (반지름의 길이) = $\frac{1}{2}\overline{\mathrm{AB}}$

1129 $\overline{\mathrm{AB}}$의 중점이 두 점 A, B를 지름의 양 끝 점으로 하는 원의 중심이므로

$a=\dfrac{-1+5}{2}=2,\ b=\dfrac{-7+1}{2}=-3$

또 $\overline{\mathrm{AB}}$가 원의 지름이므로 원의 반지름의 길이는

$\frac{1}{2}\overline{\mathrm{AB}}=\frac{1}{2}\sqrt{(5+1)^2+(1+7)^2}=5$ $\therefore\ r=5$

$\therefore\ a+b+r=4$ 답 ②

1130 $\overline{\mathrm{AB}}$의 중점이 두 점 A, B를 지름의 양 끝 점으로 하는 원의 중심이므로 그 좌표는

$\left(\dfrac{3-7}{2},\ \dfrac{8+4}{2}\right)$, 즉 $(-2,\ 6)$

또 $\overline{\mathrm{AB}}$가 원의 지름이므로 원의 반지름의 길이는

$\frac{1}{2}\overline{\mathrm{AB}}=\frac{1}{2}\sqrt{(-7-3)^2+(4-8)^2}=\sqrt{29}$

따라서 구하는 원의 방정식은

$(x+2)^2+(y-6)^2=29$ 답 $(x+2)^2+(y-6)^2=29$

1131 $\mathrm{P}(8,\ 0)$, $\mathrm{Q}(0,\ 8)$이고 $\overline{\mathrm{PQ}}$의 중점이 두 점 P, Q를 지름의 양 끝 점으로 하는 원의 중심이므로 그 좌표는

$\left(\dfrac{8}{2},\ \dfrac{8}{2}\right)$, 즉 $(4,\ 4)$

또 $\overline{PQ}$가 원의 지름이므로 원의 반지름의 길이는

$$\frac{1}{2}\overline{PQ}=\frac{1}{2}\sqrt{8^2+8^2}=4\sqrt{2}$$

따라서 구하는 원의 방정식은

$(x-4)^2+(y-4)^2=32$ 답 $(x-4)^2+(y-4)^2=32$

유형 03 원의 방정식이 되기 위한 조건 본책 167쪽

방정식 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$이 원을 나타낸다.
➡ 주어진 방정식을 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 꼴로 변형하면 $r^2>0$이다.

1132 $x^2+y^2-2ax+4ay+5=0$에서

$(x-a)^2+(y+2a)^2=5(a^2-1)$

이 방정식이 원을 나타내려면 $a^2-1>0$

$(a+1)(a-1)>0$ $\therefore a<-1$ 또는 $a>1$ 답 ④

1133 ① $x^2+y^2+x+y-1=0$에서

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{2}$$

② $x^2+y^2+2x+y+1=0$에서 $(x+1)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$

③ $x^2+y^2+2x+2y+1=0$에서 $(x+1)^2+(y+1)^2=1$

④ $x^2+y^2+4x-2y+5=0$에서 $(x+2)^2+(y-1)^2=0$

⑤ $x^2+y^2+4x+4y+4=0$에서 $(x+2)^2+(y+2)^2=4$

따라서 원의 방정식이 아닌 것은 ④이다. 답 ④

참고 ④ 방정식 $(x+2)^2+(y-1)^2=0$은 점 $(-2, 1)$을 나타낸다.

1134 $x^2+y^2+2(k-1)x-5k^2+3k+1=0$에서

$\{x+(k-1)\}^2+y^2=6k^2-5k$

이 방정식이 반지름의 길이가 1 이하인 원을 나타내려면

$0<\sqrt{6k^2-5k}\le 1$ $\therefore 0<6k^2-5k\le 1$

$6k^2-5k>0$에서 $k(6k-5)>0$

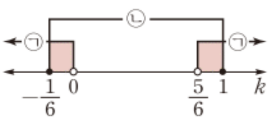
$\therefore k<0$ 또는 $k>\frac{5}{6}$ …… ㉠

$6k^2-5k\le 1$에서 $6k^2-5k-1\le 0$

$(6k+1)(k-1)\le 0$ $\therefore -\frac{1}{6}\le k\le 1$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 공통부분을 구하면

$-\frac{1}{6}\le k<0$ 또는 $\frac{5}{6}<k\le 1$



따라서 실수 k의 값이 될 수 있는 것은 ②이다. 답 ②

1135 $x^2+y^2-2y+k^2-8k+13=0$에서

$x^2+(y-1)^2=-k^2+8k-12$ ➊

이 방정식이 원을 나타내려면

$-k^2+8k-12>0$, $k^2-8k+12<0$

$(k-2)(k-6)<0$ $\therefore 2<k<6$ ➋

원의 넓이가 최대이려면 반지름의 길이가 최대이어야 하므로

$-k^2+8k-12=-(k-4)^2+4$

따라서 $2<k<6$에서 $k=4$일 때 반지름의 길이는 최대이고 그때의 반지름의 길이는 2이다. ➌

답 2

채점 기준	비율
➊ 주어진 원의 방정식을 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 꼴로 변형할 수 있다.	20%
➋ 원의 방정식이 되기 위한 k의 값의 범위를 구할 수 있다.	40%
➌ 원의 넓이가 최대가 되도록 하는 원의 반지름의 길이를 구할 수 있다.	40%

유형 04 세 점을 지나는 원의 방정식 본책 167쪽

(i) 원의 중심을 $P(a, b)$로 놓는다.
(ii) $\overline{PA}=\overline{PB}=\overline{PC}$임을 이용하여 a, b에 대한 방정식을 세운다.
(iii) (ii)의 방정식을 연립하여 a, b의 값을 구한다.
(iv) 반지름의 길이는 $\overline{PA}$임을 이용하여 반지름의 길이를 구한다.

1136 원의 중심을 $P(a, b)$라 하면

$\overline{PA}=\overline{PB}=\overline{PC}$

$\overline{PA}=\overline{PC}$에서 $\overline{PA}^2=\overline{PC}^2$이므로

$(a+3)^2+(b+2)^2=(a-1)^2+b^2$

$\therefore 2a+b+3=0$ …… ㉠

$\overline{PB}=\overline{PC}$에서 $\overline{PB}^2=\overline{PC}^2$이므로

$(a+2)^2+(b-1)^2=(a-1)^2+b^2$

$\therefore 3a-b+2=0$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=-1$

따라서 원의 중심은 $P(-1, -1)$이고 반지름의 길이는

$\overline{PA}=\sqrt{(-3+1)^2+(-2+1)^2}=\sqrt{5}$

이므로 구하는 원의 넓이는 5π이다. 답 ④

1137 원의 중심을 $P(a, b)$라 하면

$\overline{PA}=\overline{PB}=\overline{PC}$

$\overline{PA}=\overline{PB}$에서 $\overline{PA}^2=\overline{PB}^2$이므로

$(a+4)^2+b^2=(a+2)^2+(b+4)^2$

$\therefore a-2b-1=0$ …… ㉠

$\overline{PA}=\overline{PC}$에서 $\overline{PA}^2=\overline{PC}^2$이므로

$(a+4)^2+b^2=(a-5)^2+(b-3)^2$

$\therefore 3a+b-3=0$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=0$

따라서 원의 중심은 $P(1, 0)$이고 반지름의 길이는

$\overline{PA}=|1-(-4)|=5$

이므로 원의 방정식은 $(x-1)^2+y^2=25$

이 원이 점 $(1, k)$를 지나므로

$k^2=25$ $\therefore k=\pm 5$

따라서 모든 실수 k의 값의 곱은 -25이다. 답 ①

1138 $x+3y-10=0$ ······ ㉠

$7x+y-30=0$ ······ ㉡

$2x+y-5=0$ ······ ㉢

두 직선 ㉠, ㉡의 교점을 A, 두 직선 ㉡, ㉢의 교점을 B, 두 직선 ㉠, ㉢의 교점을 C라 하면

$A(4,\ 2),\ B(5,\ -5),\ C(1,\ 3)$

외접원의 중심을 $P(a,\ b)$라 하면

$\overline{PA}=\overline{PB}=\overline{PC}$

$\overline{PA}=\overline{PB}$에서 $\overline{PA}^2=\overline{PB}^2$이므로

$(a-4)^2+(b-2)^2=(a-5)^2+(b+5)^2$

$\therefore\ a-7b-15=0$ ······ ㉣

$\overline{PB}=\overline{PC}$에서 $\overline{PB}^2=\overline{PC}^2$이므로

$(a-5)^2+(b+5)^2=(a-1)^2+(b-3)^2$

$\therefore\ a-2b-5=0$ ······ ㉤

㉣, ㉤을 연립하여 풀면 $a=1,\ b=-2$

따라서 외접원의 중심은 $P(1,\ -2)$이고 반지름의 길이는

$\overline{PA}=\sqrt{(4-1)^2+(2+2)^2}=5$

이므로 구하는 외접원의 방정식은

$(x-1)^2+(y+2)^2=25$ 답 $(x-1)^2+(y+2)^2=25$

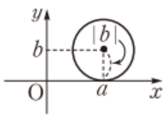
유형 05 x축 또는 y축에 접하는 원의 방정식 본책 168쪽

원 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$이

① x축에 접할 때

➡ (반지름의 길이)$=|$(중심의 y좌표)$|=|b|$

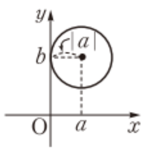
➡ $(x-a)^2+(y-b)^2=b^2$



② y축에 접할 때

➡ (반지름의 길이)$=|$(중심의 x좌표)$|=|a|$

➡ $(x-a)^2+(y-b)^2=a^2$



1139 $x^2+y^2+4x+ky+9=0$에서

$(x+2)^2+\left(y+\frac{k}{2}\right)^2=\frac{k^2}{4}-5$

원의 중심 $\left(-2,\ -\frac{k}{2}\right)$가 제2사분면 위에 있으므로

$-\frac{k}{2}>0 \qquad \therefore\ k<0$

또 원이 y축에 접하므로 $\sqrt{\frac{k^2}{4}-5}=|-2|$

$\frac{k^2}{4}-5=4, \qquad k^2=36$

$\therefore\ k=-6\ (\because\ k<0)$ 답 ①

1140 원의 반지름의 길이를 r라 하면 원의 넓이가 16π이므로

$\pi r^2=16\pi \qquad \therefore\ r=4\ (\because\ r>0)$

이 원이 점 $(-5,\ 0)$에서 x축에 접하고, 중심이 제3사분면 위에 있으므로 원의 중심의 좌표는 $(-5,\ -4)$이다.

따라서 구하는 원의 방정식은

$(x+5)^2+(y+4)^2=16$ 답 $(x+5)^2+(y+4)^2=16$

1141 원 $x^2+y^2+2ax-2y+b=0$이 점 $(3,\ -2)$를 지나므로

$9+4+6a+4+b=0$

$\therefore\ 6a+b=-17$ ······ ㉠ ··· ❶

$x^2+y^2+2ax-2y+b=0$에서

$(x+a)^2+(y-1)^2=a^2-b+1$ ··· ❷

이 원이 y축에 접하므로 $\sqrt{a^2-b+1}=|-a|$

양변을 제곱하면

$a^2-b+1=a^2 \qquad \therefore\ b=1$

$b=1$을 ㉠에 대입하면

$6a+1=-17 \qquad \therefore\ a=-3$ ··· ❸

$\therefore\ a+b=-2$ ··· ❹

답 -2

채점 기준	비율
❶ 원이 점 $(3,\ -2)$를 지남을 이용할 수 있다.	30%
❷ 주어진 원의 방정식을 $(x-p)^2+(y-q)^2=r^2$ 꼴로 변형할 수 있다.	20%
❸ $a,\ b$의 값을 구할 수 있다.	40%
❹ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	10%

1142 원의 방정식을 $\underbrace{(x-a)^2+(y-b)^2=a^2}_{y\text{축에 접하는 원의 방정식}}$이라 하면 이 원이 점 $(4,\ 2)$를 지나므로

$(4-a)^2+(2-b)^2=a^2$

$\therefore\ b^2-8a-4b+20=0$ ······ ㉠

또 점 $(2,\ 0)$을 지나므로

$(2-a)^2+(0-b)^2=a^2$

$b^2-4a+4=0$

$\therefore\ a=\frac{1}{4}b^2+1$ ······ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하여 정리하면

$b^2+4b-12=0, \qquad (b+6)(b-2)=0$

$\therefore\ b=-6$ 또는 $b=2$

이것을 ㉡에 대입하면 $a=10$ 또는 $a=2$

따라서 두 원의 반지름의 길이의 합은

$10+2=12$ 답 ④

1143 $\overline{AB}=2,\ \overline{BC}=\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}=2,$

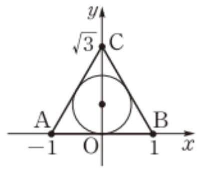
$\overline{CA}=\sqrt{(-1)^2+(-\sqrt{3})^2}=2$

이므로 삼각형 ABC는 정삼각형이다. ··· ❶

정삼각형의 내심은 무게중심과 일치하므로 삼각형 ABC의 내심의 좌표는

$\left(\frac{-1+1+0}{3},\ \frac{0+0+\sqrt{3}}{3}\right)$, 즉 $\left(0,\ \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ ··· ❷

따라서 원의 중심의 좌표는 $\left(0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$이고,



오른쪽 그림과 같이 원이 x축에 접하므로 구하는 원의 방정식은

$$x^2+\left(y-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2$$

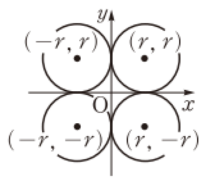
$$\therefore x^2+\left(y-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2=\frac{1}{3}$$ ··· ❸

답 $x^2+\left(y-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2=\frac{1}{3}$

채점 기준	비율
❶ 삼각형 ABC가 정삼각형임을 알 수 있다.	30%
❷ 삼각형 ABC의 내심의 좌표를 구할 수 있다.	30%
❸ 내접원의 방정식을 구할 수 있다.	40%

유형 06 x축, y축에 동시에 접하는 원의 방정식 본책 168쪽

x축, y축에 동시에 접하고 반지름의 길이가 r인 원의 방정식



① 중심이 제1사분면 위에 있으면
➡ $(x-r)^2+(y-r)^2=r^2$

② 중심이 제2사분면 위에 있으면
➡ $(x+r)^2+(y-r)^2=r^2$

③ 중심이 제3사분면 위에 있으면 ➡ $(x+r)^2+(y+r)^2=r^2$

④ 중심이 제4사분면 위에 있으면 ➡ $(x-r)^2+(y+r)^2=r^2$

1144 원의 방정식을 $(x-a)^2+(y-a)^2=a^2\,(a>0)$이라 하면 이 원이 점 $(4, 2)$를 지나므로

$(4-a)^2+(2-a)^2=a^2$, $\quad a^2-12a+20=0$

$(a-2)(a-10)=0 \qquad \therefore a=2$ 또는 $a=10$

따라서 두 원의 중심의 좌표는 $(2, 2)$, $(10, 10)$이므로 중심 사이의 거리는

$\sqrt{(10-2)^2+(10-2)^2}=8\sqrt{2}$

답 $8\sqrt{2}$

1145 $x^2+y^2-6x+2ay-2+b=0$에서

$(x-3)^2+(y+a)^2=a^2-b+11$

이 원이 x축, y축에 동시에 접하므로

$3=|-a|=\sqrt{a^2-b+11}$

$3=|-a|$에서 $\quad a=3\ (\because a>0)$

$\sqrt{a^2-b+11}=3$에서 $\quad a^2-b+11=9$

위의 식에 $a=3$을 대입하면 $\quad b=11$

$\therefore b-a=8$

답 8

1146 원의 중심이 제1사분면 위에 있으므로 반지름의 길이를 r라 하면 중심의 좌표는 (r, r)이다.

이때 중심 (r, r)가 직선 $3x+2y=10$ 위에 있으므로

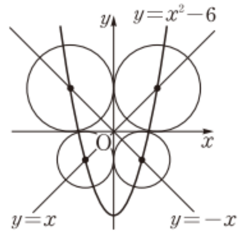
$3r+2r=10 \qquad \therefore r=2$

따라서 구하는 원의 방정식은

$(x-2)^2+(y-2)^2=4$

답 $(x-2)^2+(y-2)^2=4$

1147 x축과 y축에 동시에 접하는 원의 중심은 직선 $y=x$ 또는 직선 $y=-x$ 위에 있다.



따라서 주어진 원의 중심은 곡선 $y=x^2-6$과 직선 $y=x$ 또는 $y=-x$의 교점이다.

(i) $x^2-6=x$에서 $\qquad x^2-x-6=0$

$(x+2)(x-3)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=3$

(ii) $x^2-6=-x$에서 $\qquad x^2+x-6=0$

$(x+3)(x-2)=0 \qquad \therefore x=-3$ 또는 $x=2$

(i), (ii)에서 $\qquad m=4$

또 네 원의 중심의 좌표는 각각 $(-3, 3)$, $(-2, -2)$, $(2, -2)$, $(3, 3)$이고, 반지름의 길이는 각각 3, 2, 2, 3이다.

따라서 네 원의 넓이의 합은

$\pi\cdot3^2+\pi\cdot2^2+\pi\cdot2^2+\pi\cdot3^2=26\pi$

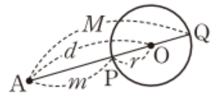
이므로 $\qquad n=26$

$\therefore m+n=30$

답 ③

유형 07 원 밖의 점과 원 위의 점 사이의 거리 본책 169쪽

원 밖의 한 점 A와 원 위의 점 사이의 거리의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하면



① $M=\overline{AO}+\overline{OQ}=d+r$

② $m=\overline{AO}-\overline{OP}=d-r$

1148 $x^2+y^2+2x-2y-7=0$에서

$(x+1)^2+(y-1)^2=9$

점 $A(-3, -5)$와 원의 중심 $(-1, 1)$ 사이의 거리는

$\sqrt{(-1+3)^2+(1+5)^2}=2\sqrt{10}$

이때 원의 반지름의 길이가 3이므로

$M=2\sqrt{10}+3$, $m=2\sqrt{10}-3$

$\therefore Mm=(2\sqrt{10}+3)(2\sqrt{10}-3)=31$

답 31

1149 점 $A(3, 4)$와 원 $x^2+y^2=r^2$의 중심 $(0, 0)$ 사이의 거리는

$\sqrt{3^2+4^2}=5$

이때 원의 반지름의 길이는 r이고 선분 AP의 길이의 최댓값이 $4+\sqrt{5}$이므로

$5+r=4+\sqrt{5} \qquad \therefore r=\sqrt{5}-1$

답 $\sqrt{5}-1$

1150 (1) $\frac{0+4}{2}=2$, $\frac{3+0}{2}=\frac{3}{2} \qquad \therefore M\left(2, \frac{3}{2}\right)$ ··· ❶

(2) 평행사변형의 성질에 의하여 $\overline{PQ}$의 중점이 M이므로

$\overline{PQ}=2\overline{MP}$ ··· ❷

$\overline{OM}=\sqrt{2^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{5}{2}$이고 원의 반지름의 길이가 1이므로

$\overline{PQ}$의 길이의 최댓값은 $\qquad 2\overline{MP}=2(\overline{OM}+1)=2\cdot\frac{7}{2}=7$

최솟값은 $2\overline{MP}=2(\overline{OM}-1)=2\cdot\frac{3}{2}=3$ ··· ❸

답 (1) $M\left(2,\ \frac{3}{2}\right)$ (2) 최댓값: 7, 최솟값: 3

채점 기준	비율
❶ 점 M의 좌표를 구할 수 있다.	20%
❷ 평행사변형의 성질을 이용할 수 있다.	20%
❸ $\overline{PQ}$의 길이의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있다.	60%

유형 08~09 자취의 방정식

본책 169, 170쪽

조건을 만족시키는 점의 좌표를 $(x,\ y)$로 놓고 주어진 조건을 이용하여 $x,\ y$ 사이의 관계식을 구한다.

1151 $P(a,\ b)$라 하고, $\overline{AP}$의 중점을 $Q(x,\ y)$라 하면

$x=\frac{2+a}{2},\ y=\frac{4+b}{2}$

$\therefore\ a=2(x-1),\ b=2(y-2)$ ······ ㉠

점 $P(a,\ b)$가 원 $x^2+y^2-4x-2y+1=0$ 위의 점이므로

$a^2+b^2-4a-2b+1=0$ ······ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$4(x-1)^2+4(y-2)^2-8(x-1)-4(y-2)+1=0$

$x^2+y^2-4x-5y+\frac{37}{4}=0$

$\therefore\ (x-2)^2+\left(y-\frac{5}{2}\right)^2=1$

따라서 점 Q의 자취는 중심의 좌표가 $\left(2,\ \frac{5}{2}\right)$, 반지름의 길이가 1인 원이므로 구하는 자취의 길이는

$2\pi\cdot 1=2\pi$

답 ④

1152 $P(x,\ y)$라 하면 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2+\overline{CP}^2$에서

$x^2+(y-1)^2=(x-1)^2+(y-1)^2+(x-1)^2+(y-2)^2$

$x^2+y^2-4x-4y+6=0$

$\therefore\ (x-2)^2+(y-2)^2=2$

따라서 점 P가 나타내는 도형은 중심의 좌표가 $(2,\ 2)$, 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$인 원이므로 구하는 넓이는

$\pi\cdot(\sqrt{2})^2=2\pi$

답 2π

1153 $P(\alpha,\ \beta)$, $G(x,\ y)$라 하면

$x=\frac{10+8+\alpha}{3},\ y=\frac{0+9+\beta}{3}$

$\therefore\ \alpha=3(x-6),\ \beta=3(y-3)$ ······ ㉠

점 $P(\alpha,\ \beta)$가 원 $x^2+y^2=36$ 위의 점이므로

$\alpha^2+\beta^2=36$ ······ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$9(x-6)^2+9(y-3)^2=36$

$\therefore\ (x-6)^2+(y-3)^2=4$

따라서 $a=6,\ b=3,\ r=2$이므로

$a+b+r=11$

답 11

1154 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{OA}^2=\overline{OP}^2+\overline{AP}^2$

$P(x,\ y)$라 하면

$4^2=x^2+y^2+(x-4)^2+y^2,\qquad x^2+y^2-4x=0$

$\therefore\ (x-2)^2+y^2=4$

이때 세 점 O, A, P가 삼각형을 이루려면 세 점이 한 직선 위에 있지 않아야 한다.

따라서 $y\neq0$이어야 하므로 구하는 자취의 방정식은

$(x-2)^2+y^2=4\ (y\neq0)$

답 ③

다른 풀이 $\angle OPA=90°$이므로 점 $P(x,\ y)$는 선분 OA를 지름으로 하는 원 위의 점이다. 선분 OA의 중점 M의 좌표는 $(2,\ 0)$이고 $\overline{OM}=2$이므로 점 P의 자취의 방정식은

$(x-2)^2+y^2=4\ (y\neq0)$

1155 주어진 조건을 만족시키는 점을 $P(x,\ y)$라 하면

$\overline{AP}:\overline{BP}=1:2$이므로

$2\overline{AP}=\overline{BP},\qquad 4\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$

$4\{(x-3)^2+(y+1)^2\}=(x+3)^2+(y-5)^2$

$x^2+y^2-10x+6y+2=0$

$\therefore\ (x-5)^2+(y+3)^2=32$

따라서 원의 반지름의 길이는 $4\sqrt{2}$이다.

답 ④

SSEN 특강

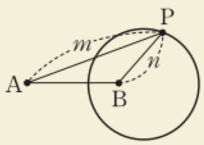
평면 위의 두 점 A, B에 대하여

$\overline{AP}:\overline{BP}=m:n$

$(m>0,\ n>0,\ m\neq n)$

인 점 P의 자취는 선분 AB를 $m:n$으로 내분하는 점과 $m:n$으로 외분하는 점을 지름의 양 끝 점으로 하는 원이다.

이 원을 아폴로니오스(Apollonios)의 원이라 한다.



1156 $P(x,\ y)$라 하면 $\overline{AP}:\overline{BP}=2:1$이므로

$\overline{AP}=2\overline{BP},\qquad \overline{AP}^2=4\overline{BP}^2$

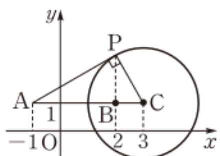
$(x+1)^2+(y-1)^2=4\{(x-2)^2+(y-1)^2\}$

$x^2+y^2-6x-2y+6=0$

$\therefore\ (x-3)^2+(y-1)^2=4$ ··· ❶

따라서 점 P는 중심의 좌표가 $(3,\ 1)$, 반지름의 길이가 2인 원 위를 움직인다.

$\angle PAB$의 크기가 최대가 되는 것은 오른쪽 그림과 같이 직선 AP가 원에 접할 때이므로 원의 중심을 C라 하면 직각삼각형 PAC에서



$\overline{AP}=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$ ··· ❷

답 $2\sqrt{3}$

채점 기준	비율
❶ 점 P의 자취의 방정식을 구할 수 있다.	50%
❷ $\angle PAB$의 크기가 최대일 때 선분 AP의 길이를 구할 수 있다.	50%

유형 10 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식 본책 170쪽

두 점에서 만나는 두 원 $x^2+y^2+ax+by+c=0$,
$x^2+y^2+a'x+b'y+c'=0$의 교점을 지나는 직선의 방정식은
$(a-a')x+(b-b')y+c-c'=0$

1157 $x^2+(y+a)^2=4$에서 $\quad x^2+y^2+2ay+a^2-4=0$
$(x+1)^2+y^2=9$에서 $\quad x^2+y^2+2x-8=0$
따라서 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은
$x^2+y^2+2ay+a^2-4-(x^2+y^2+2x-8)=0$
$-2x+2ay+a^2+4=0 \quad \therefore 2x-2ay-a^2-4=0$
이 직선이 직선 $2x+y=1$과 수직이므로
$2\cdot 2+(-2a)\cdot 1=0 \quad \therefore a=2$
답 ④

SSEN 특강

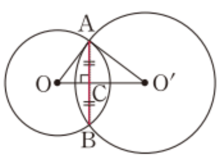
두 직선이 수직일 조건
두 직선 $ax+by+c=0$, $a'x+b'y+c'=0$이 수직이면
$aa'+bb'=0$

1158 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은
$x^2+y^2+ax+y-1-(x^2+y^2-x+ay+1)=0$
$\therefore (a+1)x+(1-a)y-2=0$
이 직선이 점 $(2, 3)$을 지나므로
$2(a+1)+3(1-a)-2=0$
$-a+3=0 \quad \therefore a=3$
답 3

1159 원 $x^2+y^2+3ax+2y+a=0$이 원 $x^2+y^2+6x-2y+6=0$의 둘레를 이등분하려면 두 원의 공통인 현이 원 $x^2+y^2+6x-2y+6=0$의 지름이어야 한다.
두 원의 공통인 현의 방정식은
$x^2+y^2+3ax+2y+a-(x^2+y^2+6x-2y+6)=0$
$\therefore (3a-6)x+4y+a-6=0$ …… ㉠
$x^2+y^2+6x-2y+6=0$에서
$(x+3)^2+(y-1)^2=4$ …… ㉡
직선 ㉠이 원 ㉡의 중심 $(-3, 1)$을 지나야 하므로
$-3(3a-6)+4+a-6=0 \quad \therefore a=2$
답 2

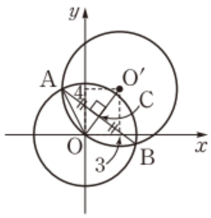
유형 11 공통인 현의 길이 본책 171쪽

두 원 O, O'의 교점을 A, B, $\overline{OO'}$과 $\overline{AB}$의 교점을 C라 할 때, $\overline{AB}$의 길이는 다음과 같은 순서로 구한다.



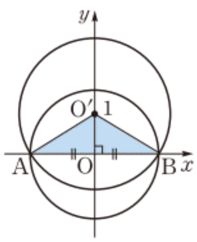
(i) 직선 AB의 방정식을 구한다.
(ii) 점과 직선 사이의 거리를 구하는 공식을 이용하여 $\overline{OC}$ 또는 $\overline{O'C}$의 길이를 구한다.
(iii) 삼각형 OAC 또는 삼각형 O′AC에서 피타고라스 정리를 이용하여 $\overline{AC}$의 길이를 구한다.
(iv) $\overline{AB}=2\overline{AC}$임을 이용한다.

1160 오른쪽 그림과 같이 두 원 $x^2+y^2=20$, $(x-3)^2+(y-4)^2=25$의 중심을 각각 O, O′이라 하고, 두 원의 교점을 A, B, $\overline{OO'}$과 $\overline{AB}$의 교점을 C라 하자.



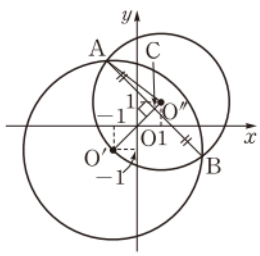
$(x-3)^2+(y-4)^2=25$에서
$x^2+y^2-6x-8y=0$
이므로 두 원의 공통인 현의 방정식은
$x^2+y^2-20-(x^2+y^2-6x-8y)=0$
$6x+8y-20=0 \quad \therefore 3x+4y-10=0$
$\therefore \overline{OC}=\dfrac{|-10|}{\sqrt{3^2+4^2}}=2$
직각삼각형 OAC에서
$\overline{AC}=\sqrt{(2\sqrt{5})^2-2^2}=4$ — 원 $x^2+y^2=20$의 반지름의 길이는 $\overline{OA}=2\sqrt{5}$
따라서 공통인 현의 길이는
$\overline{AB}=2\overline{AC}=8$
답 ④

1161 $x^2+(y-1)^2=4$에서
$x^2+y^2-2y-3=0$
이므로 두 원의 공통인 현의 방정식은
$x^2+y^2-3-(x^2+y^2-2y-3)=0$
$2y=0 \quad \therefore y=0$



원 O의 반지름의 길이가 $\sqrt{3}$이므로
$\overline{AO}=\sqrt{3}$
$\therefore \overline{AB}=2\overline{AO}=2\sqrt{3}$
$\therefore \triangle O'AB=\dfrac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{OO'}=\dfrac{1}{2}\cdot 2\sqrt{3}\cdot 1=\sqrt{3}$
답 $\sqrt{3}$

1162 오른쪽 그림과 같이 두 원 $x^2+y^2+2x+2y-k=0$, $x^2+y^2-2x-2y-6=0$의 중심을 각각 O′, O″이라 하고, 두 원의 교점을 A, B, $\overline{O'O''}$과 $\overline{AB}$의 교점을 C라 하자.



$x^2+y^2-2x-2y-6=0$에서
$(x-1)^2+(y-1)^2=8$
$\therefore \overline{O''A}=2\sqrt{2}$, $O''(1, 1)$
$\overline{AB}=2\sqrt{6}$이므로 $\quad \overline{AC}=\dfrac{1}{2}\overline{AB}=\sqrt{6}$
직각삼각형 O″AC에서
$\overline{O''C}=\sqrt{(2\sqrt{2})^2-(\sqrt{6})^2}=\sqrt{2}$ …… ㉠
한편 두 원의 공통인 현의 방정식은
$x^2+y^2+2x+2y-k-(x^2+y^2-2x-2y-6)=0$
$\therefore 4x+4y-k+6=0$
$\therefore \overline{O''C}=\dfrac{|4+4-k+6|}{\sqrt{4^2+4^2}}=\dfrac{|14-k|}{4\sqrt{2}}$ …… ㉡
㉠, ㉡에서 $\quad \dfrac{|14-k|}{4\sqrt{2}}=\sqrt{2}$, $\quad |14-k|=8$
$14-k=\pm 8 \quad \therefore k=6$ 또는 $k=22$
따라서 모든 실수 k의 값의 합은 28이다.
답 ④

유형 12 두 원의 교점을 지나는 원의 방정식
본책 171쪽

두 원 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$, $x^2+y^2+A'x+B'y+C'=0$의 교점을 지나는 원의 방정식을

$$x^2+y^2+Ax+By+C+k(x^2+y^2+A'x+B'y+C')=0(k\neq-1)$$

으로 놓고 원이 지나는 점의 좌표를 대입하여 k의 값을 구한다.

1163 두 원의 교점을 지나는 원의 방정식을

$$x^2+y^2-4x-6y+8+k(x^2+y^2-2x)=0\ (k\neq-1) \quad \cdots\cdots ㉠$$

이라 하면 이 원이 점 $(0,\ 1)$을 지나므로

$3+k=0 \quad \therefore k=-3$

$k=-3$을 ㉠에 대입하여 정리하면

$x^2+y^2-x+3y-4=0$

$\therefore \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2=\frac{13}{2}$

따라서 구하는 원의 넓이는 $\frac{13}{2}\pi$이다. 답 $\frac{13}{2}\pi$

1164 두 원의 교점을 지나는 원의 방정식을

$$x^2+y^2+2x-4+k(x^2+y^2+ax-4y+4)=0\ (k\neq-1) \quad \cdots\cdots ㉠$$

이라 하면 이 원이 원점을 지나므로

$-4+4k=0 \quad \therefore k=1$

$k=1$을 ㉠에 대입하여 정리하면

$2x^2+2y^2+(2+a)x-4y=0$

$\therefore \left(x+\frac{2+a}{4}\right)^2+(y-1)^2=\frac{a^2+4a+20}{16}$ ··· ❶

원의 넓이가 5π이므로

$\frac{a^2+4a+20}{16}=5, \quad a^2+4a-60=0$

$(a+10)(a-6)=0 \quad \therefore a=6\ (\because a>0)$ ··· ❷

답 6

채점 기준	비율
❶ 주어진 두 원의 교점과 원점을 지나는 원의 방정식을 구할 수 있다.	60%
❷ 양수 a의 값을 구할 수 있다.	40%

1165 두 원의 교점을 지나는 원의 방정식을

$$x^2+y^2-4x+ay+2a+k(x^2+y^2-2x)=0\ (k\neq-1) \quad \cdots\cdots ㉠$$

이라 하면 이 원이 두 점 $(0,\ 2)$, $(2,\ 1)$을 지나므로

$4+4a+4k=0 \quad \therefore a+k=-1 \quad \cdots\cdots ㉡$

$-3+3a+k=0 \quad \therefore 3a+k=3 \quad \cdots\cdots ㉢$

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=2,\ k=-3$

$a=2,\ k=-3$을 ㉠에 대입하여 정리하면

$x^2+y^2-x-y-2=0$

따라서 $A=-1,\ B=-1,\ C=-2$이므로

$A+B-C=0$ 답 ①

유형 13 원과 직선의 위치 관계 ; 서로 다른 두 점에서 만날 때
본책 171쪽

원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면

① 원의 중심과 직선 사이의 거리를 d, 원의 반지름의 길이를 r라 할 때 ➡ $d<r$

② 원의 방정식과 직선의 방정식을 연립한 이차방정식의 판별식을 D라 할 때 ➡ $D>0$

1166 원의 중심 $(3,\ 0)$과 직선 $y=-2x+k$, 즉 $2x+y-k=0$ 사이의 거리는 $\frac{|6-k|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{|6-k|}{\sqrt{5}}$

원의 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$이므로 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면 $\frac{|6-k|}{\sqrt{5}}<\sqrt{5}$

$|6-k|<5, \quad -5<6-k<5$

$-11<-k<-1 \quad \therefore 1<k<11$

따라서 정수 k는 $2,\ 3,\ 4,\ \cdots,\ 10$의 9개이다. 답 9

다른 풀이 $y=-2x+k$를 $(x-3)^2+y^2=5$에 대입하면

$(x-3)^2+(-2x+k)^2=5$

$\therefore 5x^2-2(2k+3)x+k^2+4=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나므로

$\frac{D}{4}=(2k+3)^2-5(k^2+4)>0, \quad k^2-12k+11<0$

$(k-1)(k-11)<0 \quad \therefore 1<k<11$

1167 원의 중심 $(3,\ 2)$와 직선 $3x+4y+5=0$ 사이의 거리는

$\frac{|3\cdot3+4\cdot2+5|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{22}{5}$

원의 반지름의 길이가 r이므로 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면 $r>\frac{22}{5}$

따라서 자연수 r의 최솟값은 5이다. 답 ③

1168 원의 중심 $(0,\ 0)$과 직선 $y=mx-4$, 즉 $mx-y-4=0$ 사이의 거리는 $\frac{|-4|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\frac{4}{\sqrt{m^2+1}}$

원의 반지름의 길이가 2이므로 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면

$\frac{4}{\sqrt{m^2+1}}<2, \quad \sqrt{m^2+1}>2, \quad m^2>3$

$\therefore m<-\sqrt{3}$ 또는 $m>\sqrt{3}$ 답 $m<-\sqrt{3}$ 또는 $m>\sqrt{3}$

다른 풀이 $y=mx-4$를 $x^2+y^2=4$에 대입하면

$x^2+(mx-4)^2=4$

$\therefore (1+m^2)x^2-8mx+12=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나므로

$\frac{D}{4}=(-4m)^2-12(1+m^2)>0$

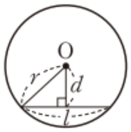
$m^2>3 \quad \therefore m<-\sqrt{3}$ 또는 $m>\sqrt{3}$

유형 14 현의 길이

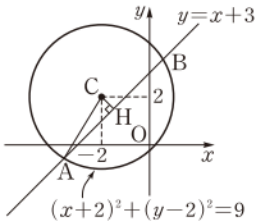
본책 172쪽

반지름의 길이가 r인 원의 중심에서 d만큼 떨어진 현의 길이를 l이라 하면

$l=2\sqrt{r^2-d^2}$



1169 오른쪽 그림과 같이 주어진 원의 중심을 $C(-2,\ 2)$라 하고, 점 C에서 직선 $y=x+3$, 즉 $x-y+3=0$에 내린 수선의 발을 H라 하면



$$\overline{CH}=\frac{|-2-2+3|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

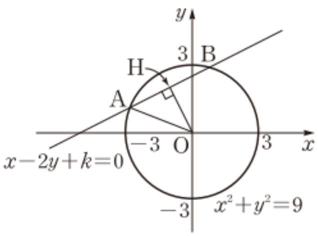
직각삼각형 CAH에서

$$\overline{AH}=\sqrt{3^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{34}}{2}$$

$\therefore\ \overline{AB}=2\overline{AH}=\sqrt{34}$

답 ②

1170 오른쪽 그림과 같이 주어진 원과 직선의 두 교점을 A, B라 하고, 원의 중심 O에서 직선 $x-2y+k=0$에 내린 수선의 발을 H라 하면



$$\overline{AH}=\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}\cdot 4=2$$

직각삼각형 OAH에서

$\overline{OH}=\sqrt{3^2-2^2}=\sqrt{5}$ ...... ㉠

또 점 $O(0,\ 0)$과 직선 $x-2y+k=0$ 사이의 거리는

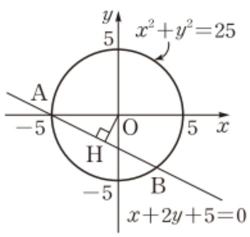
$\overline{OH}=\dfrac{|k|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\dfrac{|k|}{\sqrt{5}}$ ...... ㉡

㉠, ㉡에서 $\dfrac{|k|}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$, $\quad |k|=5$

$\therefore\ k=5\ (\because\ k>0)$

답 ⑤

1171 오른쪽 그림과 같이 주어진 원과 직선의 두 교점을 A, B라 하면 두 점 A, B를 지나는 원 중에서 넓이가 최소인 것은 $\overline{AB}$를 지름으로 하는 원이다. ⋯➊



원의 중심 O에서 직선 $x+2y+5=0$에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{OH}=\dfrac{|5|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\sqrt{5}$ ⋯➋

직각삼각형 OAH에서

$\overline{AH}=\sqrt{5^2-(\sqrt{5})^2}=2\sqrt{5}$ ⋯➌

따라서 구하는 원의 넓이는 (중심이 점 H이고, 반지름이 $\overline{AH}$인 원)

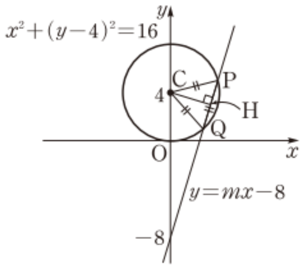
$\pi\cdot(2\sqrt{5})^2=20\pi$ ⋯➍

답 20π

채점 기준	비율
➊ $\overline{AB}$를 지름으로 하는 원이 넓이가 최소인 원임을 알 수 있다.	30%
➋ $\overline{OH}$의 길이를 구할 수 있다.	30%
➌ $\overline{AH}$의 길이를 구할 수 있다.	30%
➍ 넓이가 최소인 원의 넓이를 구할 수 있다.	10%

1172 $x^2+y^2-8y=0$에서

$x^2+(y-4)^2=16$



오른쪽 그림과 같이 원 $x^2+(y-4)^2=16$과 직선 $y=mx-8$의 두 교점 P, Q와 원의 중심 $C(0,\ 4)$를 세 꼭짓점으로 하는 삼각형 CPQ를 좌표평면 위에 나타내면 $\overline{CP}$, $\overline{CQ}$는 원의 반지름이므로

$\overline{CP}=\overline{CQ}=4$

따라서 삼각형 CPQ가 정삼각형이려면 $\overline{PQ}=4$이어야 한다.

원의 중심 C에서 $\overline{PQ}$에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{PH}=\frac{1}{2}\overline{PQ}=2$$

직각삼각형 CPH에서

$\overline{CH}=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$ ...... ㉠

또 점 $C(0,\ 4)$와 직선 $mx-y-8=0$ 사이의 거리는

$\overline{CH}=\dfrac{|-4-8|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\dfrac{12}{\sqrt{m^2+1}}$ ...... ㉡

㉠, ㉡에서 $\dfrac{12}{\sqrt{m^2+1}}=2\sqrt{3}$, $\quad 6=\sqrt{3m^2+3}$

양변을 제곱하면

$36=3m^2+3$, $\quad m^2=11$

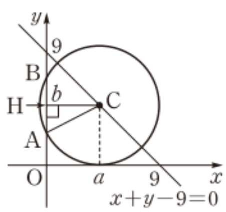
$\therefore\ m=\sqrt{11}\ (\because\ m>0)$

답 $\sqrt{11}$

1173 원 C가 x축에 접하므로 원의 방정식을

$(x-a)^2+(y-b)^2=b^2\ (a>0,\ b>0)$

이라 하자.



오른쪽 그림과 같이 원 C와 y축의 두 교점을 A, B라 하고, 원의 중심 C에서 y축에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{AH}=\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}\cdot 6=3$$

직각삼각형 ACH에서

$b^2=a^2+9$ ...... ㉠

또 점 $C(a,\ b)$가 직선 $x+y-9=0$ 위에 있으므로

$a+b-9=0$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=4,\ b=5$

따라서 구하는 원의 반지름의 길이는 5이다.

답 ①

유형 15 원과 직선의 위치 관계; 접할 때

본책 172쪽

원과 직선이 접하려면

① 원의 중심과 직선 사이의 거리를 d, 원의 반지름의 길이를 r라 할 때
➡ $d=r$

② 원의 방정식과 직선의 방정식을 연립한 이차방정식의 판별식을 D라 할 때 ➡ $D=0$

1174 원의 중심 $(1,\ -3)$과 직선 $x+3y+k=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|1-9+k|}{\sqrt{1^2+3^2}}=\frac{|-8+k|}{\sqrt{10}}$$

원의 반지름의 길이가 $\sqrt{10}$이므로 원과 직선이 접하려면

$$\frac{|-8+k|}{\sqrt{10}}=\sqrt{10},\qquad |-8+k|=10$$

$$-8+k=\pm10 \qquad \therefore k=18\ (\because k>0)$$

답 ⑤

다른 풀이 $x=-3y-k$를 $(x-1)^2+(y+3)^2=10$에 대입하면

$$(-3y-k-1)^2+(y+3)^2=10$$

$$\therefore 10y^2+6(k+2)y+k^2+2k=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면 원과 직선이 접하므로

$$\frac{D}{4}=9(k+2)^2-10(k^2+2k)=0$$

$$k^2-16k-36=0,\qquad (k+2)(k-18)=0$$

$$\therefore k=18\ (\because k>0)$$

1175 원의 중심 $(0,\ 0)$과 직선 $y=x+2\sqrt{2}$, 즉 $x-y+2\sqrt{2}=0$ 사이의 거리가

$$\frac{|2\sqrt{2}|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=2$$

이므로 원과 직선이 접하려면 $\qquad r=2$

답 2

1176 원의 반지름의 길이를 r라 하면

$$\pi r^2=12\pi \qquad \therefore r=2\sqrt{3}\ (\because r>0)$$

원의 중심 $(1,\ -3)$과 직선 $x+y+k=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|1-3+k|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{|-2+k|}{\sqrt{2}}$$

이므로 원과 직선이 접하려면

$$\frac{|-2+k|}{\sqrt{2}}=2\sqrt{3},\qquad |-2+k|=2\sqrt{6}$$

$$-2+k=\pm2\sqrt{6}\qquad \therefore k=2\pm2\sqrt{6}$$

따라서 모든 k의 값의 합은

$$(2+2\sqrt{6})+(2-2\sqrt{6})=4$$

답 ⑤

1177 a, b는 0 또는 1 또는 2이므로 $a+b=3$이려면

$a=1$, $b=2$ 또는 $a=2$, $b=1$

이어야 한다.

(i) $a=1$, $b=2$일 때

직선 $y=-x+k$, 즉 $x+y-k=0$이 원 $(x-1)^2+y^2=1$에 접해야 하므로

$$\frac{|1-k|}{\sqrt{1^2+1^2}}=1,\qquad |1-k|=\sqrt{2}$$

$$1-k=\pm\sqrt{2}\qquad \therefore k=1\pm\sqrt{2} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

또 직선 $x+y-k=0$이 원 $(x+1)^2+(y-1)^2=1$과 서로 다른 두 점에서 만나야 하므로

$$\frac{|-1+1-k|}{\sqrt{1^2+1^2}}<1,\qquad |k|<\sqrt{2}$$

$$\therefore -\sqrt{2}<k<\sqrt{2} \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서 $\qquad k=1-\sqrt{2}$

(ii) $a=2$, $b=1$일 때

직선 $y=-x+k$, 즉 $x+y-k=0$이 원 $(x+1)^2+(y-1)^2=1$에 접해야 하므로

$$\frac{|-1+1-k|}{\sqrt{1^2+1^2}}=1,\qquad |k|=\sqrt{2}$$

$$\therefore k=\pm\sqrt{2} \qquad \cdots\cdots ㉢$$

또 직선 $x+y-k=0$이 원 $(x-1)^2+y^2=1$과 서로 다른 두 점에서 만나야 하므로

$$\frac{|1-k|}{\sqrt{1^2+1^2}}<1,\qquad |1-k|<\sqrt{2},\qquad -\sqrt{2}<1-k<\sqrt{2}$$

$$\therefore -\sqrt{2}+1<k<\sqrt{2}+1 \qquad \cdots\cdots ㉣$$

㉢, ㉣에서 $\qquad k=\sqrt{2}$

(i), (ii)에서 구하는 모든 k의 값의 합은

$$(1-\sqrt{2})+\sqrt{2}=1$$

답 1

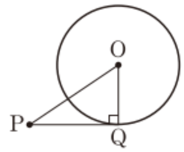
유형 16 접선의 길이

본책 173쪽

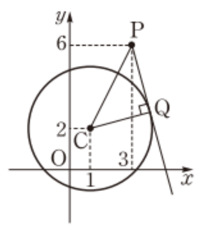
원 밖의 한 점 P에서 원에 그은 접선의 접점을 Q라 하면

➡ 직각삼각형 OPQ에서

$$\overline{PQ}=\sqrt{\overline{OP}^2-\overline{OQ}^2}$$



1178 원의 중심을 C라 하면 C$(1,\ 2)$이므로



$$\overline{CP}=\sqrt{(3-1)^2+(6-2)^2}=2\sqrt{5}$$

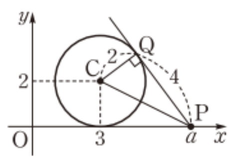
직각삼각형 CQP에서

$$\overline{PQ}=\sqrt{\overline{CP}^2-\overline{CQ}^2}$$

$$=\sqrt{(2\sqrt{5})^2-3^2}=\sqrt{11}$$

답 ②

1179 $x^2+y^2-6x-4y+9=0$에서



$$(x-3)^2+(y-2)^2=4$$

원의 중심을 C라 하면 C$(3,\ 2)$이므로

$$\overline{CP}=\sqrt{(a-3)^2+(-2)^2}$$

$$=\sqrt{a^2-6a+13}$$

접점을 Q라 하면 직각삼각형 CPQ에서 $\overline{CP}^2=\overline{CQ}^2+\overline{PQ}^2$이므로

$$a^2-6a+13=2^2+4^2,\qquad a^2-6a-7=0$$

$$(a+1)(a-7)=0 \qquad \therefore a=7\ (\because a>0)$$

답 7

다른 풀이 R$(3,\ 0)$이라 하면 $\overline{PR}=4$이므로

$$|a-3|=4,\qquad a-3=\pm4\qquad \therefore a=7\ (\because a>0)$$

1180 원의 중심이 O(0, 0)이므로

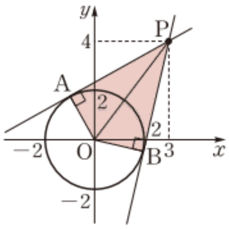
$\overline{OP}=\sqrt{3^2+4^2}=5$

직각삼각형 OPA에서

$\overline{AP}=\sqrt{\overline{OP}^2-\overline{OA}^2}$

$=\sqrt{5^2-2^2}=\sqrt{21}$

이때 $\triangle OPA \equiv \triangle OPB$(RHS 합동)이므로



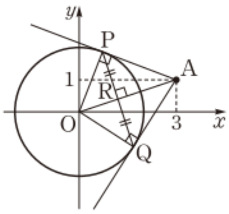
$\square AOBP = 2\triangle OPA$

$=2\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\sqrt{21}=2\sqrt{21}$

답 ②

1181 원의 중심이 O(0, 0)이고 반지름의 길이가 2이므로

$\overline{OP}=2,\ \overline{OA}=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$



직각삼각형 OAP에서

$\overline{AP}=\sqrt{\overline{OA}^2-\overline{OP}^2}$

$=\sqrt{(\sqrt{10})^2-2^2}=\sqrt{6}$ ··· ①

$\overline{OA}$와 $\overline{PQ}$의 교점을 R라 하면

$\overline{OA}\perp\overline{PQ}$이므로

$\underbrace{\frac{1}{2}\cdot\overline{AP}\cdot\overline{OP}=\frac{1}{2}\cdot\overline{OA}\cdot\overline{PR}}_{\triangle OAP\text{의 넓이}}$

$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{6}\cdot 2=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{10}\cdot\overline{PR}$ $\quad\therefore \overline{PR}=\frac{2\sqrt{15}}{5}$

$\therefore \overline{PQ}=2\overline{PR}=\frac{4\sqrt{15}}{5}$ ··· ②

답 $\frac{4\sqrt{15}}{5}$

채점 기준	비율
① $\overline{AP}$의 길이를 구할 수 있다.	50%
② $\overline{PQ}$의 길이를 구할 수 있다.	50%

유형 17 원과 직선의 위치 관계; 만나지 않을 때

본책 173쪽

원과 직선이 만나지 않으려면

① 원의 중심과 직선 사이의 거리를 d, 원의 반지름의 길이를 r라 할 때 ➡ $d>r$

② 원의 방정식과 직선의 방정식을 연립한 이차방정식의 판별식을 D라 할 때 ➡ $D<0$

1182 원의 중심 (0, 0)과 직선 $y=k(x-3)$, 즉 $kx-y-3k=0$ 사이의 거리는

$\frac{|-3k|}{\sqrt{k^2+(-1)^2}}=\frac{|3k|}{\sqrt{k^2+1}}$

원의 반지름의 길이가 1이므로 원과 직선이 만나지 않으려면

$\frac{|3k|}{\sqrt{k^2+1}}>1,\quad |3k|>\sqrt{k^2+1}$

양변을 제곱하면 $\quad 9k^2>k^2+1,\quad k^2>\frac{1}{8}$

$\therefore k<-\frac{\sqrt{2}}{4}$ 또는 $k>\frac{\sqrt{2}}{4}$ $\quad$ 답 $k<-\frac{\sqrt{2}}{4}$ 또는 $k>\frac{\sqrt{2}}{4}$

다른 풀이 $y=k(x-3)$을 $x^2+y^2=1$에 대입하면

$x^2+k^2(x-3)^2=1$

$\therefore (1+k^2)x^2-6k^2x+9k^2-1=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면 원과 직선이 만나지 않으므로

$\frac{D}{4}=(-3k^2)^2-(1+k^2)(9k^2-1)<0$

$-8k^2+1<0,\quad k^2>\frac{1}{8}\quad \therefore k<-\frac{\sqrt{2}}{4}$ 또는 $k>\frac{\sqrt{2}}{4}$

1183 원의 중심 $(0,\ k)$와 직선 $x-y-1=0$ 사이의 거리는

$\frac{|-k-1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{|k+1|}{\sqrt{2}}$

원의 반지름의 길이가 $3\sqrt{2}$이므로 원과 직선이 만나지 않으려면

$\frac{|k+1|}{\sqrt{2}}>3\sqrt{2},\quad |k+1|>6$

$k+1<-6$ 또는 $k+1>6$

$\therefore k<-7$ 또는 $k>5$

따라서 $\alpha=-7,\ \beta=5$이므로 $\quad \alpha^2+\beta^2=74$ $\quad$ 답 ④

1184 두 점 $(0,\ -3),\ (4,\ 1)$을 지름의 양 끝 점으로 하는 원의 중심의 좌표는 $\quad\left(\frac{4}{2},\ \frac{-3+1}{2}\right)$, 즉 $(2,\ -1)$

반지름의 길이는 $\quad\frac{\sqrt{4^2+(1+3)^2}}{2}=2\sqrt{2}$ ··· ①

원의 중심 $(2,\ -1)$과 직선 $y=x+k$, 즉 $x-y+k=0$ 사이의 거리는 $\quad\frac{|2+1+k|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{|3+k|}{\sqrt{2}}$ ··· ②

원의 반지름의 길이가 $2\sqrt{2}$이므로 원과 직선이 만나지 않으려면

$\frac{|3+k|}{\sqrt{2}}>2\sqrt{2},\quad |3+k|>4$

$3+k<-4$ 또는 $3+k>4$

$\therefore k<-7$ 또는 $k>1$

따라서 구하는 자연수 k의 최솟값은 2이다. ··· ③

답 2

채점 기준	비율
① 주어진 원의 중심의 좌표와 반지름의 길이를 구할 수 있다.	40%
② 원의 중심과 직선 사이의 거리를 식으로 나타낼 수 있다.	20%
③ 자연수 k의 최솟값을 구할 수 있다.	40%

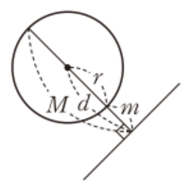
유형 18 원 위의 점과 직선 사이의 거리

본책 174쪽

원의 중심과 직선 사이의 거리를 d, 원의 반지름의 길이를 r라 할 때, 원 위의 점과 직선 사이의 거리의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하면

① $M=d+r$

② $m=d-r$



1185 $x^2+y^2-2x+4y-11=0$에서

$(x-1)^2+(y+2)^2=16$

원의 중심 $(1,\ -2)$와 직선 $3x-4y+14=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|3+8+14|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=5$$

원의 반지름의 길이가 4이므로

$M=5+4=9,\ m=5-4=1$

$\therefore\ Mm=9$ 답 ③

1186 원의 중심 $(0,\ 0)$과 직선 $4x-3y+k=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|k|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\frac{|k|}{5}$$

원의 반지름의 길이가 5이므로 점과 직선 사이의 거리의 최댓값이 9이려면 $\frac{|k|}{5}+5=9$

$|k|=20\qquad \therefore\ k=20\ (\because\ k>0)$ 답 20

1187 $x^2+y^2-6x+4y=0$에서

$(x-3)^2+(y+2)^2=13$

원의 중심 $(3,\ -2)$와 직선 $2x-3y+14=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|6+6+14|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}}=2\sqrt{13}$$ ⋯ ❶

원의 반지름의 길이가 $\sqrt{13}$이므로 원 위의 점 P와 직선 $2x-3y+14=0$ 사이의 거리를 d라 하면

$2\sqrt{13}-\sqrt{13}\le d\le 2\sqrt{13}+\sqrt{13}$

$\therefore\ \sqrt{13}\le d\le 3\sqrt{13}$ ⋯ ❷

따라서 정수 d는 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10이고 각각의 거리에 해당하는 점 P가 2개씩 있으므로 구하는 점 P의 개수는 14이다. ⋯ ❸

답 14

채점 기준	비율
❶ 원의 중심과 직선 사이의 거리를 구할 수 있다.	30%
❷ d의 값의 범위를 구할 수 있다.	40%
❸ 점 P의 개수를 구할 수 있다.	30%

1188 원점 O와 직선 $y=-x-4$, 즉 $x+y+4=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|4|}{\sqrt{1^2+1^2}}=2\sqrt{2}$$

원의 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$이므로 정삼각형 ABC의 넓이가 최소일 때의 높이는 $2\sqrt{2}-\sqrt{2}=\sqrt{2}$

넓이가 최대일 때의 높이는 $2\sqrt{2}+\sqrt{2}=3\sqrt{2}$

따라서 정삼각형 ABC의 넓이의 최솟값과 최댓값의 비는

$(\sqrt{2})^2:(3\sqrt{2})^2$, 즉 $1:9$ 답 ②

다른 풀이 높이가 $\sqrt{2}$일 때, 정삼각형의 한 변의 길이를 a라 하면

$\frac{\sqrt{3}}{2}a=\sqrt{2}\qquad \therefore\ a=\frac{2\sqrt{6}}{3}$

이 정삼각형의 넓이는 $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\left(\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)^2=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

마찬가지로 높이가 $3\sqrt{2}$일 때, 정삼각형의 넓이는 $6\sqrt{3}$

따라서 정삼각형 ABC의 넓이의 최솟값과 최댓값의 비는

$\frac{2\sqrt{3}}{3}:6\sqrt{3}=1:9$

유형 19 원의 접선의 방정식; 기울기가 주어질 때 본책 174쪽

① 원 $x^2+y^2=r^2(r>0)$에 접하고 기울기가 m인 직선의 방정식은

$y=mx\pm r\sqrt{m^2+1}$

② 원 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2(r>0)$에 접하고 기울기가 m인 직선의 방정식

➡ 접선의 방정식을 $y=mx+k$(k는 상수)로 놓고 이 직선과 원의 중심 $(a,\ b)$ 사이의 거리가 반지름의 길이 r와 같음을 이용한다.

1189 직선 $x+2y+1=0$, 즉 $y=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$에 수직인 직선의 기울기는 2이고, 원 $x^2+y^2=5$의 반지름의 길이는 $\sqrt{5}$이므로 구하는 접선의 방정식은

$y=2x\pm\sqrt{5}\cdot\sqrt{2^2+1}\qquad \therefore\ y=2x\pm5$ 답 $y=2x\pm5$

1190 직선 $y=3x-2$에 평행한 직선의 기울기는 3이고, 원 $x^2+y^2=10$의 반지름의 길이는 $\sqrt{10}$이므로 접선의 방정식은

$y=3x\pm\sqrt{10}\cdot\sqrt{3^2+1}\qquad \therefore\ y=3x\pm10$

따라서 두 직선이 y축과 만나는 점의 좌표는 각각 $(0,\ 10)$, $(0,\ -10)$이므로 $\overline{PQ}=20$ 답 20

1191 접선의 방정식을 $y=2x+k$라 하면 원의 중심 $(-1,\ 4)$와 직선 $y=2x+k$, 즉 $2x-y+k=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|-2-4+k|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{|k-6|}{\sqrt{5}}$$

원의 반지름의 길이가 3이므로 원과 직선이 접하려면

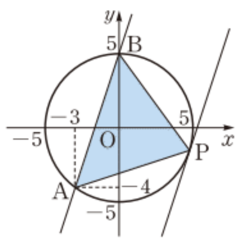
$\frac{|k-6|}{\sqrt{5}}=3,\qquad |k-6|=3\sqrt{5}$

$k-6=\pm3\sqrt{5}\qquad \therefore\ k=6\pm3\sqrt{5}$

따라서 구하는 y절편의 곱은

$(6+3\sqrt{5})(6-3\sqrt{5})=-9$ 답 ③

1192 삼각형 ABP의 넓이가 최대일 때는 오른쪽 그림과 같이 점 P에서의 접선이 직선 AB와 평행할 때이다. 직선 AB의 기울기는



$$\frac{5-(-4)}{0-(-3)}=3$$

이므로 기울기가 3인 접선의 방정식은

$y=3x\pm5\sqrt{3^2+1}\qquad \therefore\ y=3x\pm5\sqrt{10}$

위의 그림에서 점 P를 지나는 접선의 방정식은 $y=3x-5\sqrt{10}$이고 점 $B(0,\ 5)$와 직선 $3x-y-5\sqrt{10}=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|-5-5\sqrt{10}|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\frac{5+5\sqrt{10}}{\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{10}}{2}+5$$

이때 $\overline{AB}=\sqrt{3^2+(5+4)^2}=\sqrt{90}=3\sqrt{10}$이므로 삼각형 ABP의 넓이의 최댓값은

$$\frac{1}{2}\cdot3\sqrt{10}\cdot\left(\frac{\sqrt{10}}{2}+5\right)=\frac{15}{2}+\frac{15}{2}\sqrt{10}$$

따라서 $a=\frac{15}{2}$, $b=\frac{15}{2}$이므로 $a+b=15$ 답 15

유형 20 원의 접선의 방정식 ; 원 위의 한 점이 주어질 때

본책 175쪽

① 원 $x^2+y^2=r^2$ 위의 점 (x_1, y_1)에서의 접선의 방정식은
$x_1x+y_1y=r^2$
② 원 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 위의 점 (x_1, y_1)에서의 접선의 방정식
➡ 원의 접선이 두 점 (a, b), (x_1, y_1)을 지나는 직선과 수직임을 이용한다.

1193 원 $x^2+y^2=20$ 위의 점 (a, b)에서의 접선의 방정식은

$ax+by=20$

$\therefore y=-\dfrac{a}{b}x+\dfrac{20}{b}$

$-\dfrac{a}{b}=2$이므로 $a=-2b$ ...... ㉠

한편 점 (a, b)는 원 $x^2+y^2=20$ 위에 있으므로

$a^2+b^2=20$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=4$, $b=-2$ 또는 $a=-4$, $b=2$

$\therefore ab=-8$

답 -8

1194 원 $x^2+y^2=5$ 위의 점 $(1, 2)$에서의 접선의 방정식은

$x+2y=5$

$\therefore x+2y-5=0$ ...... ㉠ ⋯➊

$x^2+y^2+2x+4y+k=0$에서

$(x+1)^2+(y+2)^2=5-k$ ...... ㉡

원 ㉡의 중심 $(-1, -2)$와 직선 ㉠ 사이의 거리는

$\dfrac{|-1-4-5|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\dfrac{10}{\sqrt{5}}=2\sqrt{5}$ ⋯➋

이때 직선 ㉠과 원 ㉡이 접하므로

$5-k=(2\sqrt{5})^2$ $\therefore k=-15$ ⋯➌

답 -15

채점 기준	비율
➊ 원 위의 점에서의 접선의 방정식을 구할 수 있다.	30%
➋ 원의 중심과 직선 사이의 거리를 구할 수 있다.	50%
➌ k의 값을 구할 수 있다.	20%

1195 원 $x^2+y^2=10$ 위의 점 $P(3, 1)$에서의 접선의 방정식은

$3x+y=10$ ...... ㉠

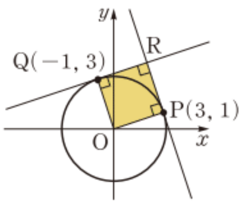
원 $x^2+y^2=10$ 위의 점 $Q(-1, 3)$에서의 접선의 방정식은

$-x+3y=10$ ...... ㉡

㉠, ㉡에서 $3\cdot(-1)+1\cdot3=0$이므로 두 접선은 수직이다.

따라서 오른쪽 그림에서 사각형 OPRQ는 원의 반지름의 길이 $\sqrt{10}$을 한 변의 길이로 하는 정사각형이므로 구하는 넓이는

$\sqrt{10}\cdot\sqrt{10}=10$



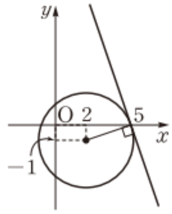
답 ⑤

1196 $x^2+y^2-4x+2y-5=0$에서

$(x-2)^2+(y+1)^2=10$

원의 중심 $(2, -1)$과 점 $(5, 0)$을 지나는 직선의 기울기는

$\dfrac{0+1}{5-2}=\dfrac{1}{3}$



따라서 점 $(5, 0)$에서의 접선의 기울기는 -3이므로 접선의 방정식은

$y=-3(x-5)$ $\therefore y=-3x+15$

이 직선이 점 $(a, 9)$를 지나므로

$9=-3a+15$ $\therefore a=2$

답 ②

1197 점 $P(a, b)$에서의 접선의 방정식은 $ax+by=4$

$\therefore Q\left(\dfrac{4}{a}, 0\right)$, $R\left(0, \dfrac{4}{b}\right)$

$\overline{QR}=8$이므로 $\dfrac{16}{a^2}+\dfrac{16}{b^2}=64$, $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}=4$

$\therefore a^2+b^2=4a^2b^2$ ...... ㉠

점 $P(a, b)$는 원 $x^2+y^2=4$ 위의 점이므로

$a^2+b^2=4$ ...... ㉡

㉡을 ㉠에 대입하여 정리하면 $a^2b^2=1$

$\therefore ab=1$ ($\because a>0, b>0$)

답 ③

유형 21 원의 접선의 방정식 ; 원 밖의 한 점이 주어질 때

본책 176쪽

원 밖의 점 (a, b)에서 원에 그은 접선의 기울기를 m이라 하면 접선의 방정식은 $y-b=m(x-a)$, 즉 $y=mx-ma+b$ ...... ㉠

이므로 원의 중심과 직선 ㉠ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이와 같음을 이용하여 m의 값을 구한다.

1198 접선의 기울기를 m이라 하면 기울기가 m이고 점 $(2, 5)$를 지나는 직선의 방정식은

$y-5=m(x-2)$ $\therefore mx-y-2m+5=0$

원의 중심의 좌표가 $(-1, 4)$이므로 원과 직선이 접하려면

$\dfrac{|-m-4-2m+5|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\sqrt{5}$

$\dfrac{|-3m+1|}{\sqrt{m^2+1^2}}=\sqrt{5}$

$|-3m+1|=\sqrt{5}\cdot\sqrt{m^2+1}$

양변을 제곱하면 $9m^2-6m+1=5m^2+5$

$4m^2-6m-4=0$, $2m^2-3m-2=0$

$(2m+1)(m-2)=0$ $\therefore m=-\dfrac{1}{2}$ 또는 $m=2$

따라서 구하는 기울기의 곱은

$-\dfrac{1}{2}\cdot2=-1$

답 ②

1199 직선 l이 원 O'의 넓이를 이등분하므로 직선 l은 원 O'의 중심 $(-2,\ 0)$을 지난다.
직선 l의 기울기를 m이라 하면 직선 l의 방정식은

$$y=m(x+2) \qquad \therefore mx-y+2m=0$$

원 O와 직선 l이 접하려면

$$\frac{|2m|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=1, \qquad |2m|=\sqrt{m^2+1}$$

양변을 제곱하면 $\quad 4m^2=m^2+1$

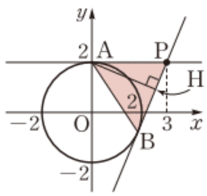
$$3m^2=1 \qquad \therefore m=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

따라서 구하는 직선 l의 방정식은

$$y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{2\sqrt{3}}{3},\ y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x-\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

답 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{2\sqrt{3}}{3}$, $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x-\frac{2\sqrt{3}}{3}$

1200 (1) 접선의 기울기를 m이라 하면



접선의 방정식은

$$y-2=m(x-3)$$
$$\therefore mx-y-3m+2=0$$

원과 직선이 접하려면

$$\frac{|-3m+2|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=2$$
$$|-3m+2|=2\sqrt{m^2+1}$$

양변을 제곱하면 $\quad 9m^2-12m+4=4m^2+4$

$$5m^2-12m=0, \qquad m(5m-12)=0$$
$$\therefore m=0 \text{ 또는 } m=\frac{12}{5}$$

따라서 접선의 방정식은

$y=2$ 또는 $12x-5y-26=0$ ⋯ ❶

(2) 점 $\mathrm{A}(0,\ 2)$에서 직선 $12x-5y-26=0$에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{\mathrm{AH}}=\frac{|-10-26|}{\sqrt{12^2+(-5)^2}}=\frac{36}{13}$ ⋯ ❷

(3) $\overline{\mathrm{BP}}=\overline{\mathrm{AP}}=3$이므로

$$\triangle\mathrm{ABP}=\frac{1}{2}\cdot\overline{\mathrm{BP}}\cdot\overline{\mathrm{AH}}$$
$$=\frac{1}{2}\cdot3\cdot\frac{36}{13}$$

$=\frac{54}{13}$ ⋯ ❸

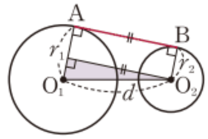
답 (1) $y=2$ 또는 $12x-5y-26=0$ (2) $\frac{36}{13}$ (3) $\frac{54}{13}$

채점 기준	비율
❶ 접선의 방정식을 구할 수 있다.	50%
❷ 점 A와 직선 BP 사이의 거리를 구할 수 있다.	20%
❸ 삼각형 ABP의 넓이를 구할 수 있다.	30%

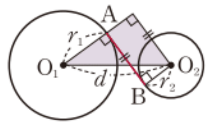
유형 22 두 원에 동시에 접하는 접선의 길이

본책 176쪽

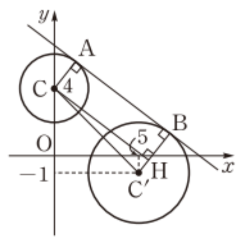
① 두 원 O_1, O_2의 반지름의 길이가 각각 r_1, $r_2(r_1>r_2)$이고, $\overline{\mathrm{O_1O_2}}=d$일 때
$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{d^2-(r_1-r_2)^2}$



② 두 원 O_1, O_2의 반지름의 길이가 각각 r_1, r_2이고, $\overline{\mathrm{O_1O_2}}=d$일 때
$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{d^2-(r_1+r_2)^2}$



1201 두 원 $x^2+(y-4)^2=4$, $(x-5)^2+(y+1)^2=9$의 중심을 각각 C, C′이라 하면



$$\mathrm{C}(0,\ 4),\ \mathrm{C'}(5,\ -1)$$
$$\therefore \overline{\mathrm{CC'}}=\sqrt{5^2+(-1-4)^2}=5\sqrt{2}$$

점 C에서 $\overline{\mathrm{C'B}}$에 내린 수선의 발을 H라 하면

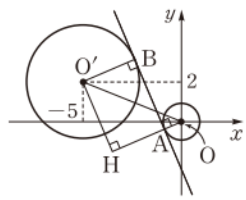
$$\overline{\mathrm{C'H}}=3-2=1$$

직각삼각형 CC′H에서

$$\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{CH}}=\sqrt{(5\sqrt{2})^2-1^2}=7$$

답 ①

1202 두 원 O: $x^2+y^2=1$, O': $(x+5)^2+(y-2)^2=r^2$의 중심 O, O′의 좌표는



$$\mathrm{O}(0,\ 0),\ \mathrm{O'}(-5,\ 2)$$
$$\therefore \overline{\mathrm{OO'}}=\sqrt{(-5)^2+2^2}=\sqrt{29}$$

점 O′에서 $\overline{\mathrm{OA}}$의 연장선에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{\mathrm{OH}}=r+1$$

직각삼각형 OHO′에서

$$r+1=\sqrt{(\sqrt{29})^2-(\sqrt{13})^2}=4$$
$$\therefore r=3$$

답 3

1203 $x^2+y^2-8x+10y+32=0$에서

$$(x-4)^2+(y+5)^2=9$$

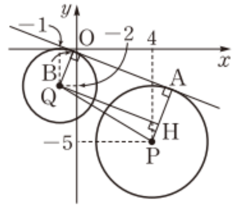
$x^2+y^2+2x+4y+1=0$에서

$$(x+1)^2+(y+2)^2=4$$

두 원의 중심을 각각 P, Q라 하면

$$\mathrm{P}(4,\ -5),\ \mathrm{Q}(-1,\ -2)$$
$$\therefore \overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{(-1-4)^2+(-2+5)^2}=\sqrt{34}$$

점 Q에서 $\overline{\mathrm{PA}}$에 내린 수선의 발을 H라 하면



$$\overline{\mathrm{PH}}=3-2=1$$

직각삼각형 QPH에서

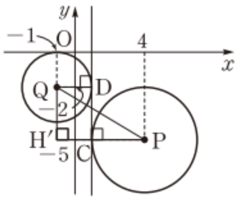
$$\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{QH}}=\sqrt{(\sqrt{34})^2-1^2}=\sqrt{33}$$

점 Q에서 $\overline{PC}$의 연장선에 내린 수선의 발을 H′이라 하면

$\overline{PH'}=3+2=5$

직각삼각형 QH′P에서

$\overline{CD}=\overline{QH'}=\sqrt{(\sqrt{34})^2-5^2}=3$



답 $\sqrt{33}$, 3

1204 전략 두 점 P, Q는 직선 $y=x-2$와 $\overline{AB}$를 지름으로 하는 원의 교점임을 이용한다.

풀이 $\angle APB=\angle AQB=90°$이므로 두 점 P, Q는 $\overline{AB}$를 지름으로 하는 원 위에 있다.

$\overline{AB}$의 중점은 $\overline{AB}$를 지름으로 하는 원의 중심이므로 그 좌표는

$\left(\dfrac{-\sqrt{5}+\sqrt{5}}{2}, \dfrac{-1+3}{2}\right)$, 즉 $(0, 1)$

또 $\overline{AB}$가 원의 지름이므로 원의 반지름의 길이는

$\dfrac{1}{2}\overline{AB}=\dfrac{1}{2}\sqrt{(\sqrt{5}+\sqrt{5})^2+(3+1)^2}=3$

따라서 원의 방정식은 $x^2+(y-1)^2=9$이고, 직선 $y=x-2$와 원 $x^2+(y-1)^2=9$의 교점의 좌표는 $(0, -2)$, $(3, 1)$이므로

$l=\sqrt{(3-0)^2+(1+2)^2}=3\sqrt{2}$

$y=x-2$를 $x^2+(y-1)^2=9$에 대입하여 정리하면 $x^2-3x=0$ $\therefore x=0$ 또는 $x=3$

$\therefore l^2=18$

답 18

1205 전략 중심의 좌표가 (a, b)이고 x축에 접하는 원의 반지름의 길이는 $|b|$임을 이용한다.

풀이 중심이 점 (a, b)이고 x축에 접하는 원의 방정식은

$(x-a)^2+(y-b)^2=b^2$

이 원이 점 A(0, 5)를 지나므로

$(-a)^2+(5-b)^2=b^2$

$\therefore a^2-10b+25=0$ ······ ㉠

또 점 B(9, 2)를 지나므로

$(9-a)^2+(2-b)^2=b^2$

$\therefore a^2-18a-4b+85=0$ ······ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하여 정리하면

$a^2-30a+125=0$, $(a-5)(a-25)=0$

$\therefore a=5$ ($\because 0\le a\le 9$)

$a=5$를 ㉠에 대입하면 $b=5$

두 점 A, B를 지나는 직선의 방정식은

$y=\dfrac{2-5}{9-0}x+5$ $\therefore y=-\dfrac{1}{3}x+5$

따라서 원의 중심 $(5, 5)$와 직선 $y=-\dfrac{1}{3}x+5$, 즉 $x+3y-15=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|5+15-15|}{\sqrt{1^2+3^2}}=\dfrac{5}{\sqrt{10}}=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$

답 $\dfrac{\sqrt{10}}{2}$

1206 전략 주어진 조건을 만족시키는 원의 중심은 제4사분면 위에 있어야 한다.

풀이 점 P가 제4사분면 위의 점이므로 반지름의 길이가 r이고, x축, y축에 동시에 접하는 원의 중심은 제4사분면 위에 있어야 한다.

따라서 원의 방정식은

$(x-r)^2+(y+r)^2=r^2$

이고, 점 P$(3, -5)$가 이 원의 내부에 있어야 하므로

$\sqrt{(3-r)^2+(-5+r)^2}<r$ 원의 중심과 점 P 사이의 거리

양변을 제곱하여 정리하면

$(3-r)^2+(-5+r)^2<r^2$, $r^2-16r+34<0$

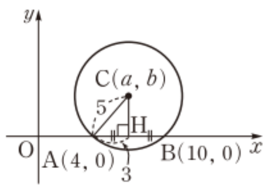
$\therefore 8-\sqrt{30}<r<8+\sqrt{30}$

이때 $5<\sqrt{30}<6$이므로 자연수 r는 3, 4, 5, ⋯, 13의 11개이다.

답 ④

1207 전략 원점과 원 위의 점 사이의 거리의 최댓값과 최솟값을 구한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 원의 중심을 C(a, b)라 하고 점 C에서 현 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 H는 선분 AB의 중점이므로



H$\left(\dfrac{4+10}{2}, 0\right)$, 즉 H$(7, 0)$

$\therefore a=7$

한편 $\overline{AB}=6$이므로 $\overline{AH}=\dfrac{1}{2}\overline{AB}=3$

따라서 직각삼각형 CAH에서

$\overline{CH}=\sqrt{5^2-3^2}=4$ $\therefore b=4$

즉 주어진 원의 방정식은

$(x-7)^2+(y-4)^2=25$

원점과 원의 중심 $(7, 4)$ 사이의 거리는

$\sqrt{7^2+4^2}=\sqrt{65}$

이므로 $\overline{OP}$의 길이의 최댓값은 $\sqrt{65}+5$

$\overline{OP}$의 길이의 최솟값은 $\sqrt{65}-5$

$\therefore \sqrt{65}-5\le\overline{OP}\le\sqrt{65}+5$

이때 $8<\sqrt{65}<9$이므로 $\overline{OP}$의 길이가 될 수 있는 정수는 4, 5, ⋯, 13이고 각각의 길이에 해당하는 점 P는 2개씩 있으므로 구하는 점 P의 개수는 20이다.

답 20

1208 전략 C(x, y) $(x>0, y>0)$라 하고 각의 이등분선의 성질을 이용하여 x, y 사이의 관계를 식으로 나타낸다.

풀이 $\overline{AO}=3$, $\overline{BO}=2$이고, $\overline{OC}$는 $\angle C$의 이등분선이므로

$\overline{CA}:\overline{CB}=\overline{AO}:\overline{BO}=3:2$

$2\overline{CA}=3\overline{CB}$에서 $4\overline{CA}^2=9\overline{CB}^2$

점 C의 좌표를 (x, y) $(x>0, y>0)$라 하면

$4\{(x+3)^2+y^2\}=9\{(x-2)^2+y^2\}$

$4x^2+24x+36+4y^2=9x^2-36x+36+9y^2$

$5x^2-60x+5y^2=0$

$x^2-12x+y^2=0$

$\therefore (x-6)^2+y^2=36$

따라서 점 C가 나타내는 도형은 중심의 좌표가 $(6, 0)$, 반지름의 길이가 6인 원에서 $x>0$, $y>0$인 부분이므로 구하는 길이는

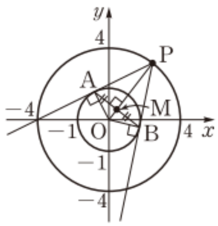
$\dfrac{1}{2}\cdot 2\pi\cdot 6=6\pi$

답 ③

10 원의 방정식

1209 전략 $\mathrm{M}(x,\ y)$라 하고 x와 y 사이의 관계를 식으로 나타낸다.

풀이 오른쪽 그림에서 $\overline{\mathrm{OP}}\perp\overline{\mathrm{AB}}$



$\triangle\mathrm{OAM}\backsim\triangle\mathrm{OPA}$(AA 닮음)이므로

$\overline{\mathrm{OA}}:\overline{\mathrm{OP}}=\overline{\mathrm{OM}}:\overline{\mathrm{OA}}$

$1:4=\overline{\mathrm{OM}}:1\qquad\therefore\ \overline{\mathrm{OM}}=\dfrac{1}{4}$

이때 $\mathrm{M}(x,\ y)$라 하면

$\overline{\mathrm{OM}}=\sqrt{x^2+y^2}$

이므로 $\quad\sqrt{x^2+y^2}=\dfrac{1}{4}$

$\therefore\ x^2+y^2=\left(\dfrac{1}{4}\right)^2$

따라서 점 M은 중심이 원점이고 반지름의 길이가 $\dfrac{1}{4}$인 원 위를 움직이므로 구하는 넓이는

$\pi\cdot\left(\dfrac{1}{4}\right)^2=\dfrac{\pi}{16}$ 답 ④

1210 전략 원의 방정식과 직선의 방정식을 연립하여 얻은 x에 대한 이차방정식의 두 근이 원과 직선의 교점의 x좌표임을 이용한다.

풀이 $y=mx$를 $x^2+y^2+2ax+2by-16=0$에 대입하여 정리하면

$(1+m^2)x^2+2(a+bm)x-16=0$ $\cdots\cdots$ ㉠

$\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{Q}(x_2,\ y_2)$라 하면 x_1, x_2는 이차방정식 ㉠의 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$x_1x_2=-\dfrac{16}{1+m^2}$

한편 두 점 P, Q는 직선 $y=mx$ 위에 있으므로

$y_1=mx_1$, $y_2=mx_2$

$\therefore\ \overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{{x_1}^2+{y_1}^2}=\sqrt{{x_1}^2+m^2{x_1}^2}=\sqrt{1+m^2}|x_1|$

$\overline{\mathrm{OQ}}=\sqrt{{x_2}^2+{y_2}^2}=\sqrt{{x_2}^2+m^2{x_2}^2}=\sqrt{1+m^2}|x_2|$

$\therefore\ \overline{\mathrm{OP}}\cdot\overline{\mathrm{OQ}}=(1+m^2)|x_1x_2|$

$=(1+m^2)\cdot\left|-\dfrac{16}{1+m^2}\right|$

$=(1+m^2)\cdot\dfrac{16}{1+m^2}=16$ 답 ③

1211 전략 원의 중심의 좌표를 $(n,\ n^2)$으로 놓고 원과 직선이 접함을 이용한다.

풀이 원의 중심이 $y=x^2$의 그래프 위에 있으므로 원의 중심의 좌표를 $(n,\ n^2)$이라 하면 이 원이 y축에 접하므로 반지름의 길이는 $|n|$이다.

원의 중심 $(n,\ n^2)$과 직선 $y=\sqrt{3}x-2$, 즉 $\sqrt{3}x-y-2=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|\sqrt{3}n-n^2-2|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}}=\dfrac{|\sqrt{3}n-n^2-2|}{2}$

이므로 원과 직선이 접하려면

$\dfrac{|\sqrt{3}n-n^2-2|}{2}=|n|,\qquad|\sqrt{3}n-n^2-2|=2|n|$

$\sqrt{3}n-n^2-2=\pm2n$

이때 실근을 갖는 이차방정식은 (판별식 $D\geq0$)

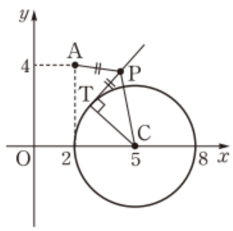
$n^2-(2+\sqrt{3})n+2=0$

이 이차방정식의 두 근이 a, b이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\quad ab=2$

$\therefore\ 100ab=100\cdot2=200$ 답 200

1212 전략 $\mathrm{P}(x,\ y)$로 놓고 접선의 길이를 이용하여 x, y 사이의 관계를 식으로 나타낸다.

풀이 $x^2+y^2-10x+16=0$에서



$(x-5)^2+y^2=9$

원의 중심을 C라 하고 $\mathrm{P}(x,\ y)$라 하면

$\overline{\mathrm{PT}}^2=\overline{\mathrm{PC}}^2-\overline{\mathrm{CT}}^2$

$=(x-5)^2+y^2-3^2$

$=x^2+y^2-10x+16$

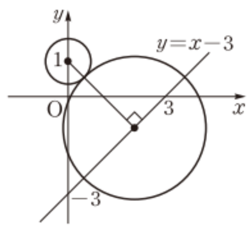
$\overline{\mathrm{PT}}=\overline{\mathrm{PA}}$에서 $\overline{\mathrm{PT}}^2=\overline{\mathrm{PA}}^2$이므로

$x^2+y^2-10x+16=(x-2)^2+(y-4)^2$

$\therefore\ 3x-4y+2=0$ 답 $3x-4y+2=0$

1213 전략 점 $(a,\ a-3)$은 직선 $y=x-3$ 위의 점임을 이용한다.

풀이 두 원이 외접하려면 두 원의 중심 사이의 거리와 두 원의 반지름의 길이의 합이 같아야 하므로 외접하는 원의 반지름의 길이가 최소이려면 두 원의 중심 사이의 거리가 최소이어야 한다.



이때 점 $(a,\ a-3)$은 직선 $y=x-3$ 위의 점이므로 원 $x^2+(y-1)^2=\dfrac{1}{2}$의 중심 $(0,\ 1)$과 직선 $y=x-3$, 즉 $x-y-3=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|-1-3|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\dfrac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$

따라서 외접하는 원의 반지름의 길이의 최솟값은

$2\sqrt{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

이므로 구하는 넓이는 $\quad\pi\cdot\left(\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2=\dfrac{9}{2}\pi$ 답 ③

1214 전략 직선 l은 원점과 점 $(3,\ 4)$를 연결한 직선과 수직임을 이용한다.

풀이 원점에서의 거리가 최대인 직선 l은 원점과 점 $(3,\ 4)$를 연결한 직선과 수직으로 만나야 한다.

원점과 점 $(3,\ 4)$를 연결한 직선의 기울기는 $\dfrac{4}{3}$이므로 직선 l의 기울기는 $-\dfrac{3}{4}$이다.

따라서 직선 l의 방정식은

$y-4=-\dfrac{3}{4}(x-3)$

$\therefore\ 3x+4y-25=0$

원의 중심 $(7,\ 5)$와 직선 $3x+4y-25=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|21+20-25|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\dfrac{16}{5}$

원의 반지름의 길이가 1이므로 점 P와 직선 l 사이의 거리의 최솟값은

$$m=\frac{16}{5}-1=\frac{11}{5}$$

$$\therefore 10m=10\cdot\frac{11}{5}=22$$

답 22

1215 전략 $a^2+b^2+2b+1=a^2+(b+1)^2=k(k>0)$로 놓으면 $\sqrt{k}$는 두 점 $(a,\ b)$와 $(0,\ -1)$ 사이의 거리임을 이용한다.

풀이 직선 OP의 기울기는 $\tan 45°=1$이므로 직선 OP의 방정식은 $y=x$

$\mathrm{P}(p,\ p)$라 하면 점 P는 원 $x^2+y^2=1$ 위의 점이므로

$$p^2+p^2=1, \qquad 2p^2=1$$

$$p^2=\frac{1}{2} \qquad \therefore p=\frac{\sqrt{2}}{2}\ (\because p>0)$$

$$\therefore \mathrm{P}\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

점 $\mathrm{P}\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$에서의 접선의 방정식은

$$\frac{\sqrt{2}}{2}x+\frac{\sqrt{2}}{2}y=1$$

$$\therefore x+y=\sqrt{2}$$

$$\therefore \mathrm{A}(\sqrt{2},\ 0),\ \mathrm{B}(0,\ \sqrt{2})$$

$a^2+b^2+2b+1=k\ (k>0)$라 하면

$$a^2+(b+1)^2=k$$

따라서 $\sqrt{k}$는 $\overline{\mathrm{AB}}$ 위의 점 $(a,\ b)$와 점 $(0,\ -1)$ 사이의 거리와 같다. k의 최솟값은 점 $(0,\ -1)$과 직선 $x+y=\sqrt{2}$, 즉 $x+y-\sqrt{2}=0$ 사이의 거리의 제곱과 같으므로

$$m=\left(\frac{|-1-\sqrt{2}|}{\sqrt{1^2+1^2}}\right)^2=\frac{3+2\sqrt{2}}{2}$$

또 k의 최댓값은 점 $(0,\ -1)$과 점 B 사이의 거리의 제곱과 같으므로

$$M=(\sqrt{2}+1)^2=3+2\sqrt{2}$$

$$\therefore \frac{m}{M}=\frac{3+2\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{3+2\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$$

답 ②

1216 전략 직선 $\mathrm{OO_1}$과 직선 l이 평행함을 이용한다.

풀이 점 P에서의 원의 접선의 방정식은

$$3x-4y=25 \qquad \therefore y=\frac{3}{4}x-\frac{25}{4}$$

직선 $\mathrm{OO_1}$과 직선 l이 평행하므로 직선 $\mathrm{OO_1}$의 방정식은

$$y=\frac{3}{4}x \qquad \therefore 3x-4y=0$$

이때 원 O_2는 y축에 접하므로 $\mathrm{O_2}(6,\ a)$라 하면

$\overline{\mathrm{OQ}}=\underbrace{a}_{\text{원점에서 원 }O_2\text{에 그은 접선의 길이}}$

원 O_2와 직선 $3x-4y=0$이 접하므로

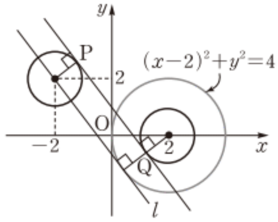
$$\frac{|18-4a|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=6, \qquad |18-4a|=30$$

$$18-4a=\pm 30 \qquad \therefore a=12\ (\because a>0)$$

$$\therefore \overline{\mathrm{OQ}}=12$$

답 12

1217 전략 좌표평면 위에 기울기가 최소가 되는 직선 PQ를 그려 본다.



풀이 오른쪽 그림과 같이 직선 PQ가 두 원에 동시에 접하는 접선일 때 직선 PQ의 기울기가 최소가 된다.

직선 PQ와 평행하고 점 $(-2,\ 2)$를 지나는 직선을 l이라 하면 중심의 좌표가 $(2,\ 0)$이고 직선 l에 접하는 원의 방정식은

$$(x-2)^2+y^2=4$$

즉 직선 l은 점 $(-2,\ 2)$에서 원 $(x-2)^2+y^2=4$에 그은 접선과 같다.

따라서 직선 l의 기울기를 a라 하면 직선 l의 방정식은

$$y-2=a(x+2) \qquad \therefore ax-y+2a+2=0$$

원 $(x-2)^2+y^2=4$와 직선 l이 접하려면

$$\frac{|2a+2a+2|}{\sqrt{a^2+(-1)^2}}=2, \qquad |2a+1|=\sqrt{a^2+1}$$

양변을 제곱하면 $4a^2+4a+1=a^2+1$

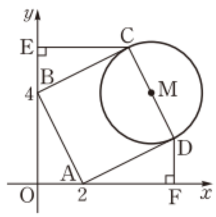
$$3a^2+4a=0, \qquad a(3a+4)=0$$

$$\therefore a=0 \text{ 또는 } a=-\frac{4}{3}$$

직선 PQ의 기울기는 직선 l의 기울기와 같으므로 구하는 기울기의 최솟값은 $-\frac{4}{3}$이다.

답 ④

1218 전략 삼각형 OAB와 합동인 삼각형을 찾아 두 점 C, D의 좌표를 구한다.



풀이 점 C에서 y축에 내린 수선의 발을 E, 점 D에서 x축에 내린 수선의 발을 F라 하면

$$\triangle\mathrm{OAB}\equiv\triangle\mathrm{EBC}\equiv\triangle\mathrm{FDA}$$

(ASA 합동)

따라서 $\overline{\mathrm{EB}}=\overline{\mathrm{FD}}=\overline{\mathrm{OA}}=2$, $\overline{\mathrm{EC}}=\overline{\mathrm{FA}}=\overline{\mathrm{OB}}=4$이므로

$\mathrm{C}(4,\ 6),\ \mathrm{D}(6,\ 2)$ ···➊

선분 CD의 중점을 M이라 하면

$$\mathrm{M}\left(\frac{4+6}{2},\ \frac{6+2}{2}\right),\text{ 즉 M}(5,\ 4)$$

$\therefore \overline{\mathrm{CM}}=\sqrt{(5-4)^2+(4-6)^2}=\sqrt{5}$ ···➋

즉 원의 방정식은

$$(x-5)^2+(y-4)^2=(\sqrt{5})^2$$

$$\therefore x^2+y^2-10x-8y+36=0$$

따라서 $a=-10,\ b=-8,\ c=36$이므로 ···➌

$a+b+c=18$ ···➍

답 18

채점 기준	비율
➊ 두 점 C, D의 좌표를 구할 수 있다.	40%
➋ 원의 중심의 좌표와 반지름의 길이를 구할 수 있다.	30%
➌ $a,\ b,\ c$의 값을 구할 수 있다.	20%
➍ $a+b+c$의 값을 구할 수 있다.	10%

1219 전략 주어진 조건을 이용하여 점 P가 나타내는 도형의 방정식을 구한다.

풀이 $\overline{AP}:\overline{BP}=1:2$에서 $2\overline{AP}=\overline{BP}$이므로

$4\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$

$P(x,\ y)$라 하면

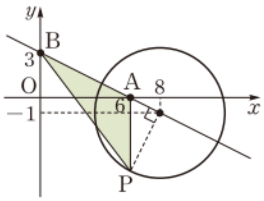
$4\{(x-6)^2+y^2\}=x^2+(y-3)^2$

$4(x^2-12x+36+y^2)=x^2+y^2-6y+9$

$3x^2+3y^2-48x+6y+135=0$

$x^2+y^2-16x+2y+45=0$

$\therefore (x-8)^2+(y+1)^2=20$ …… ㉠ ··· ❶



따라서 점 P는 중심의 좌표가 $(8,\ -1)$, 반지름의 길이가 $2\sqrt{5}$인 원 위를 움직인다.

이때 두 점 A, B를 지나는 직선의 방정식은 $\frac{x}{6}+\frac{y}{3}=1$이고 원 ㉠의 중심 $(8,\ -1)$이 이 직선 위의 점이므로 직선 AB와 점 P 사이의 거리의 최댓값은 원 ㉠의 반지름의 길이와 같다. ··· ❷

$\overline{AB}=\sqrt{(-6)^2+3^2}=3\sqrt{5}$

이므로 삼각형 ABP의 넓이의 최댓값은

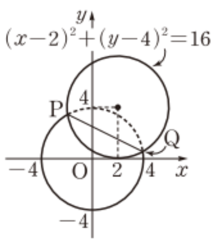
$\frac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot2\sqrt{5}=\frac{1}{2}\cdot3\sqrt{5}\cdot2\sqrt{5}=15$ ··· ❸

답 15

채점 기준	비율
❶ 점 P의 자취의 방정식을 구할 수 있다.	30%
❷ 직선 AB와 점 P 사이의 거리의 최댓값은 원 ㉠의 반지름의 길이와 같음을 알 수 있다.	30%
❸ 삼각형 ABP의 넓이의 최댓값을 구할 수 있다.	40%

1220 전략 호 PQ를 일부로 하는 원은 점 $(2,\ 0)$에서 x축에 접함을 이용한다.

풀이 호 PQ는 오른쪽 그림과 같이 점 $(2,\ 0)$에서 x축에 접하고 반지름의 길이가 4인 원의 일부이므로 원의 방정식은



$(x-2)^2+(y-4)^2=16$ ··· ❶

이때 선분 PQ는 두 원 $x^2+y^2=16$, $(x-2)^2+(y-4)^2=16$의 공통인 현이므로 직선 PQ의 방정식은

$x^2+y^2-16-\{(x-2)^2+(y-4)^2-16\}=0$

$\therefore x+2y-5=0$ ··· ❷

따라서 두 점 P, Q를 지나는 직선의 x절편은 5이다. ··· ❸

답 5

채점 기준	비율
❶ 호 PQ를 일부로 하는 원의 방정식을 구할 수 있다.	40%
❷ 직선 PQ의 방정식을 구할 수 있다.	40%
❸ 직선 PQ의 x절편을 구할 수 있다.	20%

1221 전략 두 원의 중심을 지나는 직선이 두 원의 공통인 현을 수직이등분함을 이용한다.

풀이 $x+2y=10$에서 $y=-\frac{1}{2}x+5$

이 직선이 $\overline{AB}$를 수직이등분하므로 직선 AB의 기울기는 2이다.

즉 $\frac{b-a}{3-1}=2$이므로 $b-a=4$

$\therefore \overline{C_1B}=\frac{1}{2}\overline{AB}$

$=\frac{1}{2}\sqrt{(3-1)^2+(b-a)^2}$

$=\frac{1}{2}\sqrt{2^2+4^2}=\sqrt{5}$

따라서 원 C_1의 넓이는 5π이다. ··· ❶

$\overline{AC_1}=\overline{BC_1}=\overline{C_1C_2}=\sqrt{5}$이므로 직각삼각형 BC_1C_2에서

$\overline{BC_2}=\sqrt{5+5}=\sqrt{10}$

따라서 원 C_2의 넓이는 10π이다. ··· ❷

두 원 C_1, C_2의 넓이의 합은

$5\pi+10\pi=15\pi$ ··· ❸

답 15π

채점 기준	비율
❶ 원 C_1의 넓이를 구할 수 있다.	50%
❷ 원 C_2의 넓이를 구할 수 있다.	40%
❸ 두 원 C_1, C_2의 넓이의 합을 구할 수 있다.	10%

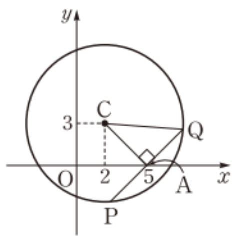
1222 전략 먼저 $\overline{PQ}$의 길이가 최대, 최소가 되는 경우를 생각해 본다.

풀이 $x^2+y^2-4x-6y-17=0$에서

$(x-2)^2+(y-3)^2=30$

원의 중심을 C라 하면 $C(2,\ 3)$

$\overline{PQ}$가 원의 지름일 때 $\overline{PQ}$의 길이는 최대이므로 $\overline{PQ}$의 길이의 최댓값은 $2\sqrt{30}$ ··· ❶



또 오른쪽 그림에서 $\overline{CA}\perp\overline{PQ}$일 때 $\overline{PQ}$의 길이는 최소이고

$\overline{CA}=\sqrt{(5-2)^2+(-3)^2}=3\sqrt{2}$,

$\overline{CQ}=\sqrt{30}$

이므로 직각삼각형 CAQ에서

$\overline{AQ}=\sqrt{(\sqrt{30})^2-(3\sqrt{2})^2}=2\sqrt{3}$

따라서 $\overline{PQ}$의 길이의 최솟값은

$\overline{PQ}=2\overline{AQ}=4\sqrt{3}$ ··· ❷

$\therefore 4\sqrt{3}\le\overline{PQ}\le2\sqrt{30}$ ··· ❸

이때 $6<4\sqrt{3}<7$, $10<2\sqrt{30}<11$이므로

$M=10$, $m=7$

$\therefore M+m=17$ ··· ❹

답 17

채점 기준	비율
❶ $\overline{PQ}$의 길이의 최댓값을 구할 수 있다.	40%
❷ $\overline{PQ}$의 길이의 최솟값을 구할 수 있다.	40%
❸ $\overline{PQ}$의 길이의 범위를 구할 수 있다.	10%
❹ $M+m$의 값을 구할 수 있다.	10%

1223 전략 원의 중심에서 현에 그은 수선은 그 현을 이등분함을 이용한다.

풀이 원 $x^2+y^2=25$ 위의 점 P$(4, 3)$에서의 접선의 방정식은

$$4x+3y=25 \quad \cdots ❶$$

이므로 점 Q의 x좌표는 $4x=25$에서 $\quad x=\frac{25}{4}$

즉 Q$\left(\frac{25}{4}, 0\right)$이므로

$$\overline{PQ}=\sqrt{\left(\frac{25}{4}-4\right)^2+(-3)^2}=\frac{15}{4} \quad \cdots ❷$$

이때 $\overline{PQ}=\overline{QR}$이므로 점 R의 좌표는

$$\left(\frac{25}{4}-\frac{15}{4}, 0\right), \text{ 즉 } \left(\frac{5}{2}, 0\right) \quad \cdots ❸$$

$\overline{QH}$는 $\overline{PR}$를 수직이등분하므로

$$\overline{PH}=\frac{1}{2}\overline{PR}=\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{5}{2}-4\right)^2+(-3)^2}=\frac{3\sqrt{5}}{4} \quad \cdots ❹$$

답 $\frac{3\sqrt{5}}{4}$

채점 기준	비율
❶ 점 P에서의 접선의 방정식을 구할 수 있다.	20%
❷ $\overline{PQ}$의 길이를 구할 수 있다.	30%
❸ 점 R의 좌표를 구할 수 있다.	30%
❹ $\overline{PH}$의 길이를 구할 수 있다.	20%

1224 전략 원의 중심에서 접선에 이르는 거리는 원의 반지름의 길이와 같음을 이용하여 직선 l의 방정식을 구한다.

풀이 직선 l의 방정식을 $y=mx+2$라 하면 원 $(x-1)^2+y^2=1$과 직선 $y=mx+2$, 즉 $mx-y+2=0$이 접하므로

$$\frac{|m+2|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=1, \qquad |m+2|=\sqrt{m^2+1}$$

양변을 제곱하면 $\quad m^2+4m+4=m^2+1$

$$4m+3=0 \qquad \therefore m=-\frac{3}{4}$$

따라서 직선 l의 방정식은 $\quad 3x+4y-8=0 \quad \cdots ❶$

x축과 y축에 동시에 접하면서 중심이 제1사분면 위에 있는 원의 중심의 좌표를 $(r, r)(r>0)$라 하면 이 원과 직선 l이 접하므로

$$\frac{|3r+4r-8|}{\sqrt{3^2+4^2}}=r, \qquad |7r-8|=5r$$

$$7r-8=\pm5r \qquad \therefore r=4 \text{ 또는 } r=\frac{2}{3} \quad \cdots ❷$$

따라서 두 원의 중심의 좌표는 각각 $(4, 4)$, $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$이므로 두 원의 중심 사이의 거리는

$$\sqrt{\left(\frac{2}{3}-4\right)^2+\left(\frac{2}{3}-4\right)^2}=\frac{10\sqrt{2}}{3} \quad \cdots ❸$$

답 $\frac{10\sqrt{2}}{3}$

채점 기준	비율
❶ 직선 l의 방정식을 구할 수 있다.	40%
❷ 두 원의 반지름의 길이를 구할 수 있다.	40%
❸ 두 원의 중심 사이의 거리를 구할 수 있다.	20%

11 도형의 이동

1225 답 $(-3,\ 4)$

1226 답 $(2,\ -14)$

1227 답 $(4,\ -6)$

1228 답 $(-5,\ 3)$

1229 답 $(6,\ 0)$

1230 답 $(1,\ -8)$

1231 $x-5=-5$, $y+5=8$이므로
$x=0$, $y=3$ $\quad\therefore (0,\ 3)$ 답 $(0,\ 3)$

1232 $x-5=0$, $y+5=2$이므로
$x=5$, $y=-3$ $\quad\therefore (5,\ -3)$ 답 $(5,\ -3)$

1233 $x-5=2$, $y+5=-11$이므로
$x=7$, $y=-16$ $\quad\therefore (7,\ -16)$ 답 $(7,\ -16)$

1234 $x-5=-7$, $y+5=-8$이므로
$x=-2$, $y=-13$ $\quad\therefore (-2,\ -13)$ 답 $(-2,\ -13)$

1235 $-2+m=3$, $5+n=8$이므로
$m=5$, $n=3$ 답 $m=5$, $n=3$

1236 $(x-3)-5(y+1)+1=0$
$\therefore x-5y-7=0$ 답 $x-5y-7=0$

1237 $(x-5)^2+\{(y+4)-5\}^2=9$
$\therefore (x-5)^2+(y-1)^2=9$ 답 $(x-5)^2+(y-1)^2=9$

1238 $5(x+1)-2(y-3)+1=0$
$\therefore 5x-2y+12=0$ 답 $5x-2y+12=0$

1239 $y-3=-(x+1)^2+6(x+1)+7$
$\therefore y=-x^2+4x+15$ 답 $y=-x^2+4x+15$

1240 구하는 직선은 주어진 직선을 x축의 방향으로 -6만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로
$3(x+6)-2(y-2)-4=0$ $\quad\therefore 3x-2y+18=0$
답 $3x-2y+18=0$

1241 $2(x+4)+7(y-1)-6=0$
$\therefore 2x+7y-5=0$ 답 $2x+7y-5=0$

1242 구하는 원은 주어진 원을 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -5만큼 평행이동한 것이므로
$\{(x-3)+4\}^2+\{(y+5)-3\}^2=4$
$\therefore (x+1)^2+(y+2)^2=4$ 답 $(x+1)^2+(y+2)^2=4$

1243 답 $(2,\ 3)$

1244 답 $(-2,\ -3)$

1245 답 $(-2,\ 3)$

1246 답 $(-3,\ 2)$

1247 답 $(3,\ -2)$

1248 $-y=-4x+5$
$\therefore y=4x-5$ 답 $y=4x-5$

1249 $-y=2x^2-7x+3$
$\therefore y=-2x^2+7x-3$ 답 $y=-2x^2+7x-3$

1250 $(x+4)^2+(-y-2)^2=9$
$\therefore (x+4)^2+(y+2)^2=9$ 답 $(x+4)^2+(y+2)^2=9$

1251 $3\cdot(-x)-2y+4=0$
$\therefore 3x+2y-4=0$ 답 $3x+2y-4=0$

1252 $y=-(-x)^2+7$ $\quad\therefore y=-x^2+7$ 답 $y=-x^2+7$

1253 $(-x)^2+y^2-4\cdot(-x)+4y-12=0$
$\therefore x^2+y^2+4x+4y-12=0$ 답 $x^2+y^2+4x+4y-12=0$

1254 $-x-4\cdot(-y)-5=0$
$\therefore x-4y+5=0$ 답 $x-4y+5=0$

1255 $-y=(-x)^2-(-x)+2$
$\therefore y=-x^2-x-2$ 답 $y=-x^2-x-2$

1256 $(-x+3)^2+\left(-y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{5}$
$\therefore (x-3)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{5}$ 답 $(x-3)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{5}$

1257 $x=-2y+3$ $\quad\therefore y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$ 답 $y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$

1258 $y-3x^2+6x-5=0$
$\therefore y=3x^2-6x+5$ 답 $y=3x^2-6x+5$

1259 답 $(x-2)^2+(y+3)^2=9$

1260 $-x=\frac{4}{3}\cdot(-y)+2$ $\quad\therefore y=\frac{3}{4}x+\frac{3}{2}$ 답 $y=\frac{3}{4}x+\frac{3}{2}$

1261 $-x=2\cdot(-y)^2-(-y)+5$
$\therefore x=-2y^2-y-5$ 답 $x=-2y^2-y-5$

1262 $(-y)^2+(-x)^2-2\cdot(-y)-4\cdot(-x)+4=0$
$\therefore x^2+y^2+4x+2y+4=0$ 답 $x^2+y^2+4x+2y+4=0$

1263 P(x, y)라 하면
$x=\frac{4-6}{2}=-1,\ y=\frac{3+9}{2}=6$
$\therefore$ P$(-1, 6)$ 답 P$(-1, 6)$

1264 구하는 점의 좌표를 (p, q)라 하면
$\frac{-2+p}{2}=1,\ \frac{-5+q}{2}=-1$
$\therefore p=4,\ q=3$
따라서 구하는 점의 좌표는 $(4, 3)$ 답 $(4, 3)$

1265 (1) 두 점 (a, b), (p, q)를 이은 선분의 중점의 좌표가 $(3, -7)$이므로
$\frac{a+p}{2}=3,\ \frac{b+q}{2}=-7$
$\therefore a=6-p,\ b=-14-q$ …… ㉠
(2) 점 (a, b)가 직선 $3x+4y+5=0$ 위의 점이므로
$3a+4b+5=0$
위의 식에 ㉠을 대입하면
$3(6-p)+4(-14-q)+5=0$
$\therefore 3p+4q+33=0$
따라서 점 (p, q)는 직선 $3x+4y+33=0$ 위의 점이므로 구하는 도형의 방정식은 $3x+4y+33=0$
답 (1) $a=6-p,\ b=-14-q$ (2) $3x+4y+33=0$

1266 (1) $\left(\frac{-4+p}{2}, \frac{3+q}{2}\right)$
(2) 두 점 A, B를 지나는 직선은 직선 $3x+y+4=0$과 수직이다. 직선 $3x+y+4=0$의 기울기가 -3이므로 두 점 A, B를 지나는 직선의 기울기는 $\frac{1}{3}$이다.
(3) 선분 AB의 중점 $\left(\frac{-4+p}{2}, \frac{3+q}{2}\right)$가 직선 $3x+y+4=0$ 위의 점이므로
$3\cdot\frac{-4+p}{2}+\frac{3+q}{2}+4=0$
$\therefore 3p+q-1=0$ …… ㉠
또 직선 AB의 기울기가 $\frac{1}{3}$이므로
$\frac{q-3}{p+4}=\frac{1}{3}$ $\quad\therefore p-3q+13=0$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $p=-1,\ q=4$
$\therefore$ B$(-1, 4)$
답 (1) $\left(\frac{-4+p}{2}, \frac{3+q}{2}\right)$ (2) $\frac{1}{3}$ (3) B$(-1, 4)$

유형 01 점의 평행이동; 평행이동이 주어진 경우 본책 186쪽

점 (x, y)를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동
➡ $(x, y) \longrightarrow (x+m, y+n)$

1267 점 $(3, a)$가 주어진 평행이동에 의하여 옮겨지는 점의 좌표는
$(3-4, a+5)$, 즉 $(-1, a+5)$
이 점이 직선 $y=3x+10$ 위의 점이므로
$a+5=3\cdot(-1)+10$ $\quad\therefore a=2$ 답 ②

1268 P(a, b)라 하면 P$'(a-2, b+3)$
$\therefore \overline{\mathrm{PP'}}=\sqrt{(a-2-a)^2+(b+3-b)^2}$
$=\sqrt{(-2)^2+3^2}=\sqrt{13}$ 답 ④

1269 점 $(a, -1)$을 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 점의 좌표는
$(a+2, -2)$ ⋯ ❶
한편 $x^2+y^2-2x+by+b^2-15=0$에서
$(x-1)^2+\left(y+\frac{b}{2}\right)^2=16-\frac{3b^2}{4}$
이므로 원의 중심의 좌표는 $\left(1, -\frac{b}{2}\right)$ ⋯ ❷
따라서 $a+2=1,\ -2=-\frac{b}{2}$이므로
$a=-1,\ b=4$ ⋯ ❸
$\therefore a+b=3$ ⋯ ❹
답 3

채점 기준	비율
❶ 평행이동한 점의 좌표를 구할 수 있다.	30%
❷ 원의 중심의 좌표를 구할 수 있다.	30%
❸ a, b의 값을 구할 수 있다.	30%
❹ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	10%

유형 02 점의 평행이동 ; 평행이동이 주어지지 않은 경우 본책 186쪽

평행이동 $(x, y) \longrightarrow (x+m, y+n)$에 의하여 점 (a, b)가 점 (p, q)로 옮겨진다.
➡ $p=a+m,\ q=b+n$

1270 점 $(3,\ 1)$을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 점의 좌표가 $(-2,\ 4)$라 하면

$3+a=-2,\ 1+b=4$

$\therefore\ a=-5,\ b=3$

따라서 점 $(2,\ 5)$를 x축의 방향으로 -5만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 점의 좌표는

$(2-5,\ 5+3)$, 즉 $(-3,\ 8)$ 답 ④

1271 $3+a=1,\ 5-2=b$이므로

$a=-2,\ b=3 \quad \therefore\ ab=-6$ 답 -6

1272 주어진 평행이동을 $(x,\ y) \longrightarrow (x+m,\ y+n)$이라 하면

$a+m=4,\ 2+n=5,\ -3+m=-7,\ b+n=1$

따라서 $m=-4,\ n=3$이므로

$a=8,\ b=-2$ ··· ❶

$2a=16,\ 3b=-6$이므로 점 $(16,\ -6)$이 주어진 평행이동에 의하여 옮겨지는 점의 좌표는

$(16-4,\ -6+3)$, 즉 $(12,\ -3)$ ··· ❷

답 $(12,\ -3)$

채점 기준	비율
❶ $a,\ b$의 값을 구할 수 있다.	60%
❷ 점 $(2a,\ 3b)$가 옮겨지는 점의 좌표를 구할 수 있다.	40%

1273 점 $\mathrm{A}(4,\ 2)$를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 -6만큼 평행이동한 점을 A'이라 하면 점 A'의 좌표는

$\mathrm{A}'(4+a,\ 2-6)$, 즉 $\mathrm{A}'(4+a,\ -4)$

한편 $\overline{\mathrm{OA}'}=2\overline{\mathrm{OA}}$에서 $\overline{\mathrm{OA}'}^2=4\overline{\mathrm{OA}}^2$이므로

$(4+a)^2+(-4)^2=4(4^2+2^2)$

$a^2+8a-48=0, \quad (a+12)(a-4)=0$

$\therefore\ a=4\ (\because\ a>0)$ 답 ②

1274 도형을 평행이동해도 그 모양은 변하지 않으므로 △OAB는 정삼각형이다. 정삼각형 OAB의 한 변의 길이는 $\overline{\mathrm{OA}}=2$이므로

$\overline{\mathrm{OB}}=\overline{\mathrm{OA}}=2$

$\therefore\ |a|=2\cos 60°=1,\ |b|=2\sin 60°=\sqrt{3}$

$ab>0$, $\mathrm{A}(2,\ 0)$이므로 $\quad a=1,\ b=\sqrt{3}$

$\mathrm{B}'(3,\ 2\sqrt{3})$이므로 $\quad 1+m=3,\ \sqrt{3}+n=2\sqrt{3}$

$\therefore\ m=2,\ n=\sqrt{3}$

$\therefore\ mn=2\sqrt{3}$ 답 $2\sqrt{3}$

유형 03 도형의 평행이동; 직선

본책 187쪽

직선 $y=mx+n$을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 직선의 방정식

⇒ $y-b=m(x-a)+n$, 즉 $y=mx-ma+n+b$

1275 평행이동한 직선의 방정식은

$k(x-m)-(y-3)+k-1=0$

$\therefore\ kx-y-km+k+2=0$

이 직선이 직선 $2x-y+1=0$과 일치하므로

$k=2,\ -km+k+2=1$

따라서 $k=2,\ m=\frac{3}{2}$이므로 $\quad k+m=\frac{7}{2}$ 답 ④

1276 평행이동한 직선의 방정식은

$4(x+5)+3(y-2)-6=0$

$\therefore\ 4x+3y+8=0$

따라서 $p=3,\ q=8$이므로 $\quad p+q=11$ 답 11

1277 직선 $y=x-1$을 평행이동한 직선의 방정식은

$y-m=(x-2)-1 \quad \therefore\ y=x+m-3$ ······ ㉠

직선 $y=-x+3$을 평행이동한 직선의 방정식은

$y=-(x-n)+3 \quad \therefore\ y=-x+n+3$ ······ ㉡

두 직선 ㉠, ㉡이 모두 점 $(0,\ 2)$를 지나므로

$2=m-3,\ 2=n+3 \quad \therefore\ m=5,\ n=-1$

$\therefore\ mn=-5$ 답 ①

1278 직선 l'의 방정식은

$y-5=a(x+1)+b$

$\therefore\ y=ax+a+b+5$

이 직선이 직선 $y=-\frac{1}{3}x+4$와 y축 위의 점에서 수직으로 만나므로 기울기는 3이고, y절편은 4이다.

따라서 $a=3,\ a+b+5=4$이므로

$a=3,\ b=-4 \quad \therefore\ a-b=7$ 답 7

유형 04 도형의 평행이동; 곡선

본책 187쪽

① 원 $x^2+y^2=r^2$을 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 원의 방정식 ⇒ $(x-m)^2+(y-n)^2=r^2$

② 포물선 $y=ax^2+bx+c$를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 포물선의 방정식

⇒ $y-n=a(x-m)^2+b(x-m)+c$

③ 원의 평행이동은 원의 중심의 평행이동으로, 포물선의 평행이동은 꼭짓점의 평행이동으로 생각할 수 있다.

1279 $x^2+y^2-10x+4y+4=0$에서

$(x-5)^2+(y+2)^2=25$

이 원을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 원의 방정식은

$(x-a-5)^2+(y-b+2)^2=25$

이 원이 원 $x^2+y^2=c$와 일치하므로

$-a-5=0,\ -b+2=0,\ c=25$

따라서 $a=-5,\ b=2,\ c=25$이므로

$a+b+c=22$ 답 ③

다른 풀이 원 $x^2+y^2-10x+4y+4=0$에서

$(x-5)^2+(y+2)^2=25$

이므로 중심의 좌표는 $(5,\ -2)$이다.

따라서 중심 $(5,\ -2)$가 중심 $(0,\ 0)$으로 옮겨졌으므로

$a=0-5=-5,\ b=0-(-2)=2$

원은 평행이동해도 반지름의 길이가 변하지 않으므로 $c=25$

$\therefore\ a+b+c=22$

1280 평행이동한 포물선의 방정식은

$y-1=(x+3)^2+4(x+3)-5$

$\therefore\ y=x^2+10x+17=(x+5)^2-8$

따라서 $a=-5,\ b=-8$이므로

$a-b=3$ 답 3

다른 풀이 포물선 $y=x^2+4x-5$, 즉 $y=(x+2)^2-9$의 꼭짓점의 좌표는 $(-2,\ -9)$이므로

$a=-2-3=-5,\ b=-9+1=-8$

$\therefore\ a-b=3$

1281 $x^2+y^2-2x-2y+a=0$에서

$(x-1)^2+(y-1)^2=2-a$

주어진 평행이동에 의하여 이 원이 옮겨지는 원의 방정식은

$(x+1-1)^2+(y-3-1)^2=2-a$

$\therefore\ x^2+(y-4)^2=2-a$

따라서 중심의 좌표가 $(0,\ 4)$, 반지름의 길이가 $\sqrt{2-a}$이므로

$b=0,\ \sqrt{2-a}=2 \qquad \therefore\ a=-2,\ b=0$

$\therefore\ a+b=-2$ 답 ②

1282 포물선 $y=-2x^2+8x-3$, 즉 $y=-2(x-2)^2+5$를 평행이동한 포물선의 방정식은

$y-a=-2(x-a-4-2)^2+5$

$\therefore\ y=-2(x-a-6)^2+5+a$ ··· ❶

이 포물선의 꼭짓점 $(a+6,\ 5+a)$가 x축 위에 있으므로

$5+a=0 \qquad \therefore\ a=-5$ ··· ❷

따라서 꼭짓점의 좌표는 $(1,\ 0)$ ··· ❸

답 $(1,\ 0)$

채점 기준	비율
❶ 평행이동한 포물선의 방정식을 구할 수 있다.	50%
❷ a의 값을 구할 수 있다.	30%
❸ 꼭짓점의 좌표를 구할 수 있다.	20%

1283 $x^2+y^2-4x+6y+4=0$에서

$(x-2)^2+(y+3)^2=9$

이 원을 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 원의 방정식은

$(x-m-2)^2+(y-n+3)^2=9$

이 원이 원 $x^2+y^2=9$와 일치하려면

$-m-2=0,\ -n+3=0$

$\therefore\ m=-2,\ n=3$

원 $x^2+y^2-6x-8y+24=0$, 즉 $(x-3)^2+(y-4)^2=1$을 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 원의 방정식은

$(x+2-3)^2+(y-3-4)^2=1$

$\therefore\ (x-1)^2+(y-7)^2=1$

따라서 원의 중심 $(1,\ 7)$과 원점 사이의 거리는

$\sqrt{1^2+7^2}=5\sqrt{2}$ 답 $5\sqrt{2}$

유형 05 평행이동의 활용

본책 188쪽

평행이동한 도형의 방정식을 구한 후 주어진 조건을 이용한다.

1284 평행이동한 원의 방정식은

$(x-3)^2+(y-a)^2=20$

이 원이 직선 $4x+2y-7=0$과 접하므로 원의 중심 $(3,\ a)$와 직선 $4x+2y-7=0$ 사이의 거리는 원의 반지름의 길이인 $\sqrt{20}$과 같다.

즉

$\dfrac{|12+2a-7|}{\sqrt{4^2+2^2}}=\sqrt{20}, \qquad |5+2a|=20$

$5+2a=\pm20 \qquad \therefore\ a=\dfrac{15}{2}\ (\because\ a>0)$ 답 ⑤

1285 평행이동한 직선의 방정식은

$x-a+3(y+a)=-4$

$\therefore\ x+3y+2a+4=0$

이 직선이 원 $(x-2)^2+(y+4)^2=25$의 넓이를 이등분하려면 직선이 원의 중심 $(2,\ -4)$를 지나야 하므로

$2-12+2a+4=0 \qquad \therefore\ a=3$ 답 ③

1286 평행이동한 직선의 방정식은

$x-5-(y+3)+k=0$

$\therefore\ x-y+k-8=0$ ··· ❶

이 직선과 직선 $y=x-5$ 위의 한 점 $(0,\ -5)$ 사이의 거리가 $4\sqrt{2}$이므로

$\dfrac{|5+k-8|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=4\sqrt{2}, \qquad |k-3|=8$

$k-3=\pm8 \qquad \therefore\ k=11$ 또는 $k=-5$ ··· ❷

따라서 모든 k의 값의 합은 6이다. ··· ❸

답 6

채점 기준	비율
❶ 평행이동한 직선의 방정식을 구할 수 있다.	40%
❷ k의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ 모든 k의 값의 합을 구할 수 있다.	20%

1287 $x^2+y^2+2x-4y-11=0$에서

$(x+1)^2+(y-2)^2=16$

이 원을 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 원의 방정식은

$(x-m+1)^2+(y-n-2)^2=16$

이 원의 중심의 좌표는 $(m-1,\ n+2)$이다.
이때 원의 중심이 제1사분면 위에 있고 이 원이 x축, y축에 동시에 접하므로

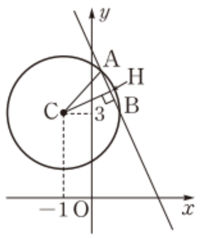
$m-1=4,\ n+2=4$

$\therefore\ m=5,\ n=2$

$\therefore\ m-n=3$ 답 3

1288 평행이동한 원의 방정식은

$(x+1)^2+(y-3)^2=4$



오른쪽 그림과 같이 원의 중심을 $C(-1,\ 3)$이라 하고, 점 C에서 직선 $2x+y-5=0$에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{CH}=\frac{|-2+3-5|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{4\sqrt{5}}{5}$$

직각삼각형 CAH에서

$$\overline{AH}=\sqrt{\overline{CA}^2-\overline{CH}^2}=\sqrt{2^2-\left(\frac{4\sqrt{5}}{5}\right)^2}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\therefore\ \overline{AB}=2\overline{AH}=\frac{4\sqrt{5}}{5}$$ 답 ④

유형 06 점의 대칭이동 본책 189쪽

점 $(x,\ y)$를 대칭이동한 점의 좌표
① x축 ➡ y좌표의 부호를 반대로 바꾼다.
② y축 ➡ x좌표의 부호를 반대로 바꾼다.
③ 원점 ➡ x좌표, y좌표의 부호를 반대로 바꾼다.
④ 직선 $y=x$ ➡ x좌표와 y좌표를 서로 바꾼다.
⑤ 직선 $y=-x$ ➡ x좌표, y좌표의 부호를 반대로 바꾼 후 이들을 서로 바꾼다.

1289 $P(3,\ -2)$, $Q(2,\ 3)$이므로

$\overline{PQ}=\sqrt{(2-3)^2+(3+2)^2}=\sqrt{26}$ 답 ⑤

1290 점 $(a,\ b)$를 y축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$(-a,\ b)$

이 점이 제3사분면 위의 점이므로

$-a<0,\ b<0$

$\therefore\ a>0,\ b<0$ …… ㉠ ⋯➊

점 $(a-b,\ ab)$를 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$(-a+b,\ -ab)$

이 점을 y축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$(a-b,\ -ab)$

이때 ㉠에서 $a-b>0$, $-ab>0$이므로 점 $(a-b,\ -ab)$는 제1사분면 위에 있다. ⋯➋

답 제1사분면

채점 기준	비율
➊ a, b의 부호를 알 수 있다.	40%
➋ 대칭이동한 점이 어느 사분면 위에 있는지 구할 수 있다.	60%

1291 $Q(a,\ -b)$, $R(-a,\ b)$, $S(-a,\ -b)$이고, 네 점 P, Q, R, S를 꼭짓점으로 하는 사각형의 넓이가 4이므로

$2|a|\cdot 2|b|=4 \qquad \therefore\ |ab|=1$ 답 ①

1292 점 $P_1(-2,\ 3)$을 원점에 대하여 대칭이동한 점 P_2의 좌표는

$P_2(2,\ -3)$

점 $P_2(2,\ -3)$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점 P_3의 좌표는

$P_3(-3,\ 2)$

점 $P_3(-3,\ 2)$를 원점에 대하여 대칭이동한 점 P_4의 좌표는

$P_4(3,\ -2)$

점 $P_4(3,\ -2)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점 P_5의 좌표는

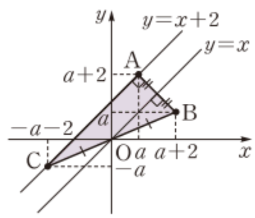
$P_5(-2,\ 3)$

즉 점 P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, …는 4개의 점 $(-2,\ 3)$, $(2,\ -3)$, $(-3,\ 2)$, $(3,\ -2)$의 순서로 반복된다.
이때 $2018=4\cdot 504+2$이므로 점 P_{2018}의 좌표는 점 P_2의 좌표인 $(2,\ -3)$과 같다.
따라서 $a=2$, $b=-3$이므로

$a+b=-1$ 답 -1

1293 점 A의 좌표를 $(a,\ a+2)\ (a>0)$라 하면

$B(a+2,\ a)$, $C(-a-2,\ -a)$



점 C는 직선 $y=x+2$ 위의 점이고, $\triangle ABC$는 $\angle A=90°$인 직각삼각형이므로

$$\frac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot\overline{AC}=16$$

이때

$$\overline{AB}=\sqrt{(a+2-a)^2+(a-a-2)^2}=2\sqrt{2},$$

$$\overline{AC}=\sqrt{(-a-2-a)^2+(-a-a-2)^2}=2\sqrt{2}(a+1)$$

이므로

$$\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}(a+1)=16, \qquad 4(a+1)=16$$

$a+1=4 \qquad \therefore\ a=3$

따라서 점 A의 좌표는 $(3,\ 5)$이다. 답 $(3,\ 5)$

유형 07~08 도형의 대칭이동 본책 190쪽

도형 $f(x,\ y)=0$을 대칭이동한 도형의 방정식
① x축 ➡ y 대신 $-y$를 대입한다.
② y축 ➡ x 대신 $-x$를 대입한다.
③ 원점 ➡ x 대신 $-x$를, y 대신 $-y$를 대입한다.
④ 직선 $y=x$ ➡ x 대신 y를, y 대신 x를 대입한다.
⑤ 직선 $y=-x$ ➡ x 대신 $-y$를, y 대신 $-x$를 대입한다.

1294 직선 $y=-x+1$을 y축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$y=-(-x)+1 \qquad \therefore\ y=x+1$

이 직선과 수직인 직선의 기울기는 -1이므로 구하는 직선의 방정식을 $y=-x+a$, 즉 $x+y-a=0$이라 하면 이 직선과 원점 사이의 거리가 $\sqrt{2}$이므로

$$\frac{|-a|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\sqrt{2}, \qquad |a|=2$$

$\therefore a=\pm 2$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$x+y+2=0$ 또는 $x+y-2=0$ 답 ①

1295 직선 l_1의 방정식은

$-y=-3x-2 \qquad \therefore y=3x+2$

직선 l_2의 방정식은

$x=3y+2 \qquad \therefore x-3y-2=0$

따라서 구하는 x절편은 2이다. 답 2

1296 직선 $ax+y-4=0$을 x축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$ax-y-4=0$ ⋯ ❶

이 직선을 원점에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$a\cdot(-x)-(-y)-4=0 \qquad \therefore -ax+y-4=0$ ⋯ ❷

이 직선이 점 $(3, -5)$를 지나므로

$-3a-5-4=0 \qquad \therefore a=-3$ ⋯ ❸

답 -3

채점 기준	비율
❶ x축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식을 구할 수 있다.	40%
❷ 원점에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식을 구할 수 있다.	40%
❸ a의 값을 구할 수 있다.	20%

1297 점 $(-3, 7)$을 직선 $y=-x$에 대하여 대칭이동하면 점 $(-7, 3)$으로 옮겨지므로 구하는 직선의 방정식은

$3\cdot(-y)+2\cdot(-x)-2=0 \qquad \therefore 2x+3y+2=0$ 답 ①

1298 중심의 좌표가 $(-2, 3)$이고 반지름의 길이가 k인 원의 방정식은 $\quad (x+2)^2+(y-3)^2=k^2$

이 원을 x축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$(x+2)^2+(-y-3)^2=k^2$

$\therefore (x+2)^2+(y+3)^2=k^2$

이 원이 점 $(-3, -3)$을 지나므로

$(-3+2)^2+(-3+3)^2=k^2$

$k^2=1 \qquad \therefore k=1\ (\because k>0)$ 답 ①

1299 포물선 $y=x^2-2ax+3$을 y축에 대하여 대칭이동한 포물선의 방정식은

$y=(-x)^2-2a\cdot(-x)+3=x^2+2ax+3$

$\quad =(x+a)^2+3-a^2$

이때 포물선의 꼭짓점 $(-a, 3-a^2)$이 직선 $y=x-3$ 위에 있으므로

$3-a^2=-a-3, \qquad a^2-a-6=0$

$(a+2)(a-3)=0 \qquad \therefore a=3\ (\because a>0)$ 답 3

1300 $x^2+y^2-6x+8y-16=0$에서

$(x-3)^2+(y+4)^2=41$

이 원을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$(x+4)^2+(y-3)^2=41$

이 원이 y축과 만나는 점의 y좌표는

$(0+4)^2+(y-3)^2=41, \qquad (y-3)^2=25$

$y-3=\pm 5$

$\therefore y=-2$ 또는 $y=8$

따라서 두 점 사이의 거리는

$8-(-2)=10$ 답 ③

1301 $x^2+y^2-4x+2y+1=0$에서

$(x-2)^2+(y+1)^2=4$

이 원을 원점에 대하여 대칭이동한 원 O'의 방정식은

$(-x-2)^2+(-y+1)^2=4$

$\therefore (x+2)^2+(y-1)^2=4$

$\overline{PQ}$의 최솟값은 두 원의 중심 $(2, -1)$, $(-2, 1)$을 이은 선분의 길이에서 두 원의 반지름의 길이의 합을 뺀 것이므로 구하는 최솟값은

$\sqrt{(-2-2)^2+(1+1)^2}-4=2\sqrt{5}-4$ 답 $2\sqrt{5}-4$

유형 09 대칭이동의 활용

본책 191쪽

대칭이동한 도형의 방정식을 구한 후 주어진 조건을 이용한다.

1302 직선 $3x+4y+a=0$을 원점에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$-3x-4y+a=0 \qquad \therefore 3x+4y-a=0$ ⋯⋯ ㉠

직선 ㉠이 원 $(x-4)^2+(y+1)^2=4$에 접하므로 원의 중심 $(4, -1)$과 직선 ㉠ 사이의 거리는 원의 반지름의 길이인 2와 같다.

즉

$$\frac{|12-4-a|}{\sqrt{3^2+4^2}}=2, \qquad |8-a|=10$$

$8-a=\pm 10$

$\therefore a=-2$ 또는 $a=18$

따라서 모든 a의 값의 합은

$-2+18=16$ 답 ⑤

1303 원 C의 방정식은 $\quad (x+3)^2+(y+2)^2=4$

직선 l의 방정식은 $\quad 2x-my+3=0$

직선 l이 원 C의 중심 $(-3, -2)$를 지나므로

$-6+2m+3=0, \qquad 2m=3$

$\therefore m=\frac{3}{2}$ 답 ③

1304 $x^2+y^2+2x-6y=0$에서

$(x+1)^2+(y-3)^2=10$

이 원을 y축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$(-x+1)^2+(y-3)^2=10$

$\therefore (x-1)^2+(y-3)^2=10$ ⋯ ❶

이 원이 직선 $y=x+k$, 즉 $x-y+k=0$과 서로 다른 두 점에서 만나려면 원의 중심 $(1, 3)$과 직선 $x-y+k=0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이인 $\sqrt{10}$보다 작아야 하므로

$\frac{|1-3+k|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}<\sqrt{10}$, $|-2+k|<2\sqrt{5}$

$-2\sqrt{5}<-2+k<2\sqrt{5}$

$\therefore 2-2\sqrt{5}<k<2+2\sqrt{5}$ ⋯ ❷

따라서 $a=2-2\sqrt{5}$, $b=2+2\sqrt{5}$이므로

$ab=-16$ ⋯ ❸

답 -16

채점 기준	비율
❶ y축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식을 구할 수 있다.	40%
❷ k의 값의 범위를 구할 수 있다.	50%
❸ ab의 값을 구할 수 있다.	10%

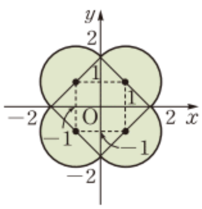
1305 원 $(x+1)^2+(y+1)^2=2$를 x축, y축, 원점에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은 각각

$(x+1)^2+(y-1)^2=2$,

$(x-1)^2+(y+1)^2=2$,

$(x-1)^2+(y-1)^2=2$

따라서 구하는 넓이는 오른쪽 그림의 색칠한 부분의 넓이와 같으므로



$2\cdot\pi\cdot(\sqrt{2})^2+(2\sqrt{2})^2=4\pi+8$

답 $4\pi+8$

유형 10 점과 도형의 평행이동과 대칭이동

본책 192쪽

도형 $f(x, y)=0 \xrightarrow[y\text{축의 방향으로 } n\text{만큼 평행이동}]{x\text{축의 방향으로 } m\text{만큼,}} f(x-m, y-n)=0$

$\xrightarrow[\text{대하여 대칭이동}]{\text{직선 } y=x\text{에}} f(y-m, x-n)=0$

1306 원 $(x-4)^2+(y+1)^2=16$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$(y-4)^2+(x+1)^2=16$

$\therefore (x+1)^2+(y-4)^2=16$ ⋯⋯ ㉠

원 $(x-4)^2+(y+1)^2=16$을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 원의 방정식은

$(x-a-4)^2+(y-b+1)^2=16$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡이 겹쳐지므로

$-a-4=1$, $-b+1=-4$ $\therefore a=-5$, $b=5$

$\therefore ab=-25$

답 -25

1307 점 $(a, -5)$를 직선 $y=-x$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(5, -a)$

이 점을 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 점의 좌표는 $(4, -a+2)$

이 점이 점 $(4, b)$와 일치하므로

$-a+2=b$ $\therefore a+b=2$

답 2

1308 포물선 $y=2x^2+4x+a$를 원점에 대하여 대칭이동한 포물선의 방정식은 $-y=2\cdot(-x)^2-4x+a$

$\therefore y=-2x^2+4x-a$

이 포물선을 y축의 방향으로 5만큼 평행이동한 포물선의 방정식은

$y-5=-2x^2+4x-a$

$\therefore y=-2x^2+4x+5-a$

이 포물선과 y축의 교점의 y좌표가 $5-a$이므로

$5-a=4$ $\therefore a=1$

답 ①

1309 직선 l의 기울기를 m이라 하면 직선 l의 방정식은

$y-3=m(x+6)$ $\therefore y=mx+6m+3$

이 직선을 y축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$y+4=mx+6m+3$ $\therefore y=mx+6m-1$

이 직선을 원점에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$-y=-mx+6m-1$ $\therefore y=mx-6m+1$

이 직선이 점 $(9, -5)$를 지나므로

$-5=9m-6m+1$, $3m=-6$ $\therefore m=-2$

답 ④

1310 원 $(x+1)^2+(y+2)^2=25$를 x축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 원의 방정식은

$(x+3+1)^2+(y+2)^2=25$

$\therefore (x+4)^2+(y+2)^2=25$ ⋯ ❶

이 원을 직선 $y=-x$에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$(-y+4)^2+(-x+2)^2=25$

$\therefore (x-2)^2+(y-4)^2=25$ ⋯ ❷

이 원이 x축과 만나는 점의 x좌표는

$(x-2)^2+(-4)^2=25$, $(x-2)^2=9$

$x-2=\pm3$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=5$

따라서 이 원이 x축과 만나는 점의 좌표는 각각 $(-1, 0)$, $(5, 0)$이므로 ⋯ ❸

$\overline{PQ}=5-(-1)=6$ ⋯ ❹

답 6

채점 기준	비율
❶ 평행이동한 원의 방정식을 구할 수 있다.	30%
❷ 직선 $y=-x$에 대하여 대칭이동한 원의 방정식을 구할 수 있다.	30%
❸ x축과 만나는 점의 좌표를 구할 수 있다.	30%
❹ $\overline{PQ}$의 길이를 구할 수 있다.	10%

유형 11 도형의 평행이동과 대칭이동; $f(x, y)=0$ 본책 192쪽

① 도형 $f(x, y)=0$과 $f(x, -y)=0$ ➡ x축에 대하여 대칭
② 도형 $f(x, y)=0$과 $f(-x, y)=0$ ➡ y축에 대하여 대칭
③ 도형 $f(x, y)=0$과 $f(-x, -y)=0$ ➡ 원점에 대하여 대칭
④ 도형 $f(x, y)=0$과 $f(y, x)=0$ ➡ 직선 $y=x$에 대하여 대칭
⑤ 도형 $f(x, y)=0$과 $f(-y, -x)=0$
➡ 직선 $y=-x$에 대하여 대칭

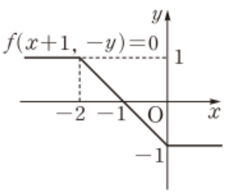
1311 방정식 $f(x, y)=0$이 나타내는 도형을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동하면 $f(y, x)=0$
방정식 $f(y, x)=0$이 나타내는 도형을 y축의 방향으로 -1만큼 평행이동하면 $f(y-(-1), x)=0$
$\therefore f(y+1, x)=0$
따라서 방정식 $f(y+1, x)=0$이 나타내는 도형은 주어진 도형을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 다음 y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 ③이다. 답 ③

다른 풀이 주어진 도형은 네 직선
$x=1, x=3, y=1, y=2$ …… ㉠
로 둘러싸인 도형이다.
㉠에 x 대신 $y+1$, y 대신 x를 각각 대입하면
$y+1=1, y+1=3, x=1, x=2$
$\therefore x=1, x=2, y=0, y=2$
따라서 방정식 $f(y+1, x)=0$이 나타내는 도형은 ③이다.

1312 방정식 $f(x, y)=0$이 나타내는 도형을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동하면
$f(y, x)=0$
방정식 $f(y, x)=0$이 나타내는 도형을 x축에 대하여 대칭이동하면
$f(-y, x)=0$
따라서 방정식 $f(-y, x)=0$이 나타내는 도형은 주어진 도형을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 다음 x축에 대하여 대칭이동한 것이므로 ①이다. 답 ①

다른 풀이 주어진 도형은 세 직선
$y=x, x=1, y=0$ …… ㉠
으로 둘러싸인 도형이다.
㉠에 x 대신 $-y$, y 대신 x를 각각 대입하면
$x=-y, -y=1, x=0$
$\therefore y=-x, y=-1, x=0$
따라서 방정식 $f(-y, x)=0$이 나타내는 도형은 ①이다.

1313 ㄱ. 방정식 $f(x, y)=0$이 나타내는 도형을 x축에 대하여 대칭이동하면 $f(x, -y)=0$
방정식 $f(x, -y)=0$이 나타내는 도형을 x축의 방향으로 -1만큼 평행이동하면
$f(x+1, -y)=0$
따라서 이 방정식이 나타내는 도형은 오른쪽 그림과 같다.



ㄴ. 방정식 $f(x, y)=0$이 나타내는 도형을 x축에 대하여 대칭이동하면 $f(x, -y)=0$
방정식 $f(x, -y)=0$이 나타내는 도형을 x축의 방향으로 1만큼 평행이동하면 $f(x-1, -y)=0$
따라서 이 방정식이 나타내는 도형은 [그림 2]와 같다.
ㄷ. 방정식 $f(x, y)=0$이 나타내는 도형을 y축에 대하여 대칭이동하면 $f(-x, y)=0$
방정식 $f(-x, y)=0$이 나타내는 도형을 x축의 방향으로 1만큼 평행이동하면
$f(-(x-1), y)=0 \quad \therefore f(1-x, y)=0$
따라서 이 방정식이 나타내는 도형은 [그림 2]와 같다.
이상에서 [그림 2]와 같은 도형을 나타내는 방정식인 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ⑤

유형 12 점에 대한 대칭이동 본책 193쪽

점 P를 점 A에 대하여 대칭이동한 점을 P′이라 하면 점 A는 $\overline{PP'}$의 중점임을 이용한다.

1314 두 점 $(a, 5)$, $(-3, b)$를 이은 선분의 중점의 좌표가 $(2, 1)$이므로
$\frac{a-3}{2}=2, \frac{5+b}{2}=1$
$\therefore a=7, b=-3$
$\therefore ab=-21$ 답 ②

1315 포물선 $y=x^2-2x+3=(x-1)^2+2$의 꼭짓점의 좌표는
$(1, 2)$
포물선 $y=-x^2+6x-11=-(x-3)^2-2$의 꼭짓점의 좌표는
$(3, -2)$
두 포물선이 점 (α, β)에 대하여 대칭이므로 두 포물선의 꼭짓점도 점 (α, β)에 대하여 대칭이다.
따라서 두 꼭짓점을 이은 선분의 중점의 좌표가 (α, β)이므로
$\alpha=\frac{1+3}{2}=2, \beta=\frac{2-2}{2}=0$
$\therefore \alpha+\beta=2$ 답 2

1316 $x^2+y^2-6x+8=0$에서
$(x-3)^2+y^2=1$
원의 중심 $(3, 0)$을 점 $(2, 1)$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 (a, b)라 하면
$\frac{3+a}{2}=2, \frac{b}{2}=1$
$\therefore a=1, b=2$
원은 대칭이동해도 반지름의 길이가 변하지 않으므로 대칭이동한 원의 중심의 좌표는 $(1, 2)$이고 반지름의 길이는 1이다.
따라서 구하는 원의 방정식은
$(x-1)^2+(y-2)^2=1$ 답 ③

유형 13 직선 $y=mx+n$에 대한 대칭이동 본책 194쪽

점 P를 직선 $y=mx+n$에 대하여 대칭이동한 점을 P′이라 하면
① $\overline{PP'}$의 중점은 직선 $y=mx+n$ 위의 점이다.
② 직선 PP′은 직선 $y=mx+n$과 수직이다.

1317 두 점 $(2,\ -3)$, $(-4,\ 5)$를 이은 선분의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{2-4}{2},\ \frac{-3+5}{2}\right),\ 즉\ (-1,\ 1)$$

이 점이 직선 $y=ax+b$ 위의 점이므로

$1=-a+b$ …… ㉠

또 두 점 $(2,\ -3)$, $(-4,\ 5)$를 지나는 직선이 직선 $y=ax+b$와 수직이므로

수직인 두 직선의 기울기의 곱은 -1이다.

$$\frac{5-(-3)}{-4-2}\cdot a=-1 \qquad \therefore\ a=\frac{3}{4}$$

$a=\frac{3}{4}$을 ㉠에 대입하면 $\quad b=\frac{7}{4}$

$\therefore\ a+b=\frac{5}{2}$

답 $\frac{5}{2}$

1318 원 $(x-1)^2+(y-2)^2=1$의 중심 $(1,\ 2)$를 직선 $y=x-1$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면 두 점 $(1,\ 2)$, $(a,\ b)$를 이은 선분의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{1+a}{2},\ \frac{2+b}{2}\right)$$

이 점이 직선 $y=x-1$ 위의 점이므로

$$\frac{2+b}{2}=\frac{1+a}{2}-1$$

$\therefore\ a-b=3$ …… ㉠

또 두 점 $(1,\ 2)$, $(a,\ b)$를 지나는 직선이 직선 $y=x-1$과 수직이므로 $\quad \frac{b-2}{a-1}=-1$

$\therefore\ a+b=3$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad a=3,\ b=0$

원은 대칭이동해도 반지름의 길이가 변하지 않으므로 구하는 도형은 중심의 좌표가 $(3,\ 0)$이고 반지름의 길이가 1인 원이다.

$\therefore\ (x-3)^2+y^2=1$

답 $(x-3)^2+y^2=1$

1319 $C(a,\ b)$라 하면 $\overline{BC}$의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{2+a}{2},\ \frac{1+b}{2}\right)$$

이 점이 직선 $y=2x+1$ 위의 점이므로

$$\frac{1+b}{2}=2\cdot\frac{2+a}{2}+1$$

$\therefore\ 2a-b=-5$ …… ㉠

또 직선 BC가 직선 $y=2x+1$과 수직이므로

$\frac{b-1}{a-2}=-\frac{1}{2} \qquad \therefore\ a+2b=4$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad a=-\frac{6}{5},\ b=\frac{13}{5}$

$\therefore\ C\left(-\frac{6}{5},\ \frac{13}{5}\right)$

$\overline{AB}=2-(-1)=3$이고 점 C와 직선 AB 사이의 거리가 ($y=1$)

$\frac{13}{5}-1=\frac{8}{5}$이므로

$\triangle ABC=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot\frac{8}{5}=\frac{12}{5}$

답 ①

1320 $x^2+y^2-4x-10y+28=0$에서

$(x-2)^2+(y-5)^2=1$

$x^2+y^2-8x-6y+c=0$에서

$(x-4)^2+(y-3)^2=25-c$

두 원의 반지름의 길이가 같아야 하므로

$1=\sqrt{25-c} \qquad \therefore\ c=24$

두 원의 중심 $(2,\ 5)$, $(4,\ 3)$을 이은 선분의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{2+4}{2},\ \frac{5+3}{2}\right),\ 즉\ (3,\ 4)$$

이 점이 직선 $y=ax+b$ 위의 점이므로

$4=3a+b$ …… ㉠

또 두 원의 중심 $(2,\ 5)$, $(4,\ 3)$을 지나는 직선이 직선 $y=ax+b$와 수직이므로

$\frac{3-5}{4-2}\cdot a=-1 \qquad \therefore\ a=1$

$a=1$을 ㉠에 대입하면 $\quad 4=3+b \qquad \therefore\ b=1$

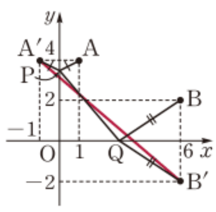
$\therefore\ a+b+c=26$

답 26

유형 14 대칭이동을 이용한 거리의 최솟값 본책 194쪽

두 점 A, B와 x축 (또는 y축 또는 직선 $y=x$) 위의 점 P에 대하여 $\overline{AP}+\overline{BP}$의 최솟값 구하기
(i) 점 A를 x축 (또는 y축 또는 직선 $y=x$)에 대하여 대칭이동한 점 A′의 좌표를 구한다.
(ii) $\overline{AP}+\overline{BP}=\overline{A'P}+\overline{BP}\geq\overline{A'B}$이므로 구하는 최솟값은 $\overline{A'B}$의 길이와 같음을 이용한다.

1321 점 A를 y축에 대하여 대칭이동한 점을 A′, 점 B를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 B′이라 하면



$A'(-1,\ 4)$, $B'(6,\ -2)$

$\therefore\ \overline{AP}+\overline{PQ}+\overline{QB}$

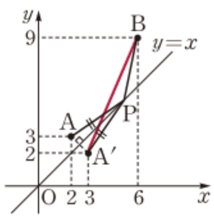
$=\overline{A'P}+\overline{PQ}+\overline{QB'}$

$\geq\overline{A'B'}$

$=\sqrt{(6+1)^2+(-2-4)^2}=\sqrt{85}$

답 $\sqrt{85}$

1322 점 $A(2,\ 3)$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 A′이라 하면



$A'(3,\ 2)$

$\therefore\ \overline{AP}+\overline{BP}=\overline{A'P}+\overline{BP}$

$\geq\overline{A'B}$

$=\sqrt{(6-3)^2+(9-2)^2}$

$=\sqrt{58}$

답 ③

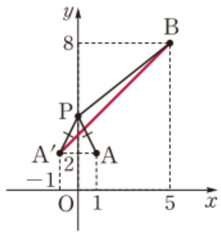
1323 점 A를 y축에 대하여 대칭이동한 점을 A′이라 하면

$A'(-1,\ 2)$

이때 $\overline{AP}=\overline{A'P}$이므로

$\overline{AP}+\overline{BP}=\overline{A'P}+\overline{BP}$

$\geq \overline{A'B}$ ⋯ ❶



직선 A′B의 방정식은

$$y-2=\frac{8-2}{5+1}(x+1)$$

$\therefore\ y=x+3$ ⋯ ❷

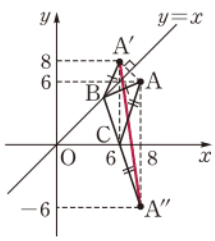
따라서 점 P의 좌표는 $(0,\ 3)$이다. ⋯ ❸

답 $(0,\ 3)$

채점 기준	비율
❶ $\overline{AP}+\overline{BP}$의 최솟값이 $\overline{A'B}$의 길이임을 알 수 있다.	50%
❷ 직선 A′B의 방정식을 구할 수 있다.	30%
❸ 점 P의 좌표를 구할 수 있다.	20%

1324 점 $A(8,\ 6)$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 A′, x축에 대하여 대칭이동한 점을 A″이라 하면

$A'(6,\ 8),\ A''(8,\ -6)$



$\overline{AB}=\overline{A'B},\ \overline{CA}=\overline{CA''}$이므로

$\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}$

$=\overline{A'B}+\overline{BC}+\overline{CA''}$

$\geq \overline{A'A''}$

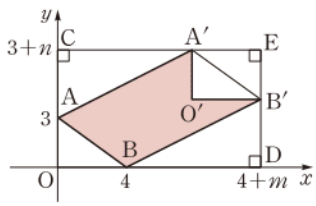
따라서 △ABC의 둘레의 길이의 최솟값은

$\overline{A'A''}=\sqrt{(8-6)^2+(-6-8)^2}=10\sqrt{2}$

답 $10\sqrt{2}$

1325 전략 색칠한 도형의 넓이를 m, n에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 점 A′에서 y축에 내린 수선의 발을 C, 점 B′에서 x축에 내린 수선의 발을 D, 직선 CA′과 직선 B′D의 교점을 E라 하면



$C(0,\ 3+n)$,

$D(4+m,\ 0)$,

$E(4+m,\ 3+n)$

색칠한 도형의 넓이를 S라 하면

$S=\square CODE-2\triangle AA'C-3\triangle OAB$

$=(4+m)(3+n)-2\cdot\frac{1}{2}mn-3\cdot\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 3$

$=3m+4n-6$

따라서 $3m+4n-6=32$이므로 $\quad 3m+4n=38$

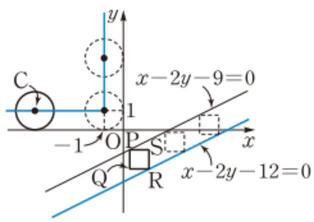
답 38

1326 전략 좌표평면에 원의 중심 C와 점 R의 자취를 각각 나타낸다.

풀이 점 R의 자취는 직선 $x-2y-9=0$을 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 직선이므로 그 방정식은

$(x-1)-2(y+1)-9=0 \qquad \therefore\ x-2y-12=0$

또 원 C의 중심 C의 자취는 직선 $x=-1(y\geq 1)$과 직선 $y=1(x\leq -1)$이다.



따라서 두 점 C, R 사이의 거리의 최솟값은 점 $(-1,\ 1)$과 직선 $x-2y-12=0$ 사이의 거리와 같으므로

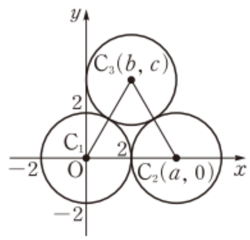
$$\frac{|-1-2-12|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=3\sqrt{5}$$

답 ④

1327 전략 세 원이 서로 외접하므로 두 원의 중심 사이의 거리는 두 원의 반지름의 길이의 합과 같음을 이용한다.

풀이 세 원 C_1, C_2, C_3의 중심을 각각 C_1, C_2, C_3이라 하면

$C_1(0,\ 0),\ C_2(a,\ 0),\ C_3(b,\ c)$



두 원 C_1, C_2가 외접하므로

$|a|=4$ ⋯⋯ ㉠

두 원 C_1, C_3이 외접하므로

$\sqrt{b^2+c^2}=4$

$\therefore\ b^2+c^2=16$ ⋯⋯ ㉡

두 원 C_2, C_3이 외접하므로

$\sqrt{(b-a)^2+c^2}=4$

$\therefore\ (b-a)^2+c^2=16$ ⋯⋯ ㉢

㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $\quad |a|=4,\ |b|=2,\ |c|=2\sqrt{3}$

$\therefore\ |abc|=|a||b||c|=16\sqrt{3}$

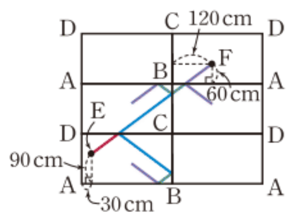
답 ③

다른 풀이 $\overline{C_1C_2}=\overline{C_2C_3}=\overline{C_3C_1}=4$이므로 $\triangle C_1C_2C_3$은 정삼각형이다.

$\therefore\ |a|=4,\ |b|=4\cos 60°=2,\ |c|=4\sin 60°=2\sqrt{3}$

1328 전략 당구대의 각 변에 대한 대칭이동을 이용하여 공이 움직인 거리를 구한다.

풀이 □ABCD를 변 BC와 변 DC에 대하여 대칭이동하여 오른쪽 그림과 같이 나타내면 노란 공이 움직인 거리는 $\overline{EF}$의 길이와 같다.



따라서 구하는 거리는

$\overline{EF}$

$=\sqrt{(240+120)^2+(60+150+60)^2}$

$=\sqrt{360^2+270^2}=450\,(\text{cm})$

답 450 cm

1329 전략 주어진 규칙에 따라 점 P_1, P_2, P_3, P_4, ⋯의 좌표를 차례대로 구하여 규칙을 찾는다.

풀이 주어진 규칙에 따라 점 P_2, P_3, P_4, ⋯를 구하면 점 $P_1(3,\ 2)$에서 $3\cdot 2=6>0$, $3>2$이므로 규칙 ㈎에 의하여 점 P_1을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점 P_2의 좌표는

$P_2(2,\ 3)$

점 $P_2(2,\ 3)$에서 $2\cdot 3=6>0$, $2<3$이므로 규칙 ㈏에 의하여 점 P_2를 x축에 대하여 대칭이동한 점 P_3의 좌표는

$P_3(2,\ -3)$

11 도형의 이동

점 $P_3(2,\ -3)$에서 $2\cdot(-3)=-6<0$이므로 규칙 ㈐에 의하여 점 P_3을 y축에 대하여 대칭이동한 점 P_4의 좌표는

$P_4(-2,\ -3)$

점 $P_4(-2,\ -3)$에서 $(-2)\cdot(-3)=6>0$, $-2>-3$이므로 규칙 ㈎에 의하여 점 P_4를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점 P_5의 좌표는

$P_5(-3,\ -2)$

점 $P_5(-3,\ -2)$에서 $(-3)\cdot(-2)=6>0$, $-3<-2$이므로 규칙 ㈏에 의하여 점 P_5를 x축에 대하여 대칭이동한 점 P_6의 좌표는

$P_6(-3,\ 2)$

점 $P_6(-3,\ 2)$에서 $(-3)\cdot 2=-6<0$이므로 규칙 ㈐에 의하여 점 P_6을 y축에 대하여 대칭이동한 점 P_7의 좌표는

$P_7(3,\ 2)$

즉 점 P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7, $\cdots$은 6개의 점 $(3,\ 2)$, $(2,\ 3)$, $(2,\ -3)$, $(-2,\ -3)$, $(-3,\ -2)$, $(-3,\ 2)$의 순서로 반복된다.

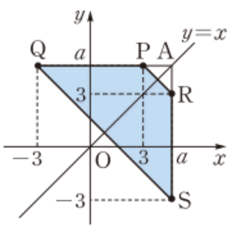
이때 $50=6\cdot 8+2$이므로 점 P_{50}의 좌표는 점 P_2의 좌표인 $(2,\ 3)$과 같다.

따라서 $x_{50}=2$, $y_{50}=3$이므로

$10x_{50}+y_{50}=10\cdot 2+3=23$ 답 23

1330 전략 세 점 Q, R, S의 좌표를 구한 후 좌표평면 위에 나타내어 본다.

풀이 점 $P(3,\ a)$를 y축에 대하여 대칭이동한 점은 $Q(-3,\ a)$이고, 두 점 $P(3,\ a)$, $Q(-3,\ a)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점은 각각 $R(a,\ 3)$, $S(a,\ -3)$이므로 오른쪽 그림과 같이 직선 QP와 직선 RS의 교점을 A라 하면 $A(a,\ a)$



$\therefore\ \square PQSR=\triangle AQS-\triangle APR$

$=\frac{1}{2}(a+3)^2-\frac{1}{2}(a-3)^2$

$=\frac{1}{2}\{(a+3+a-3)(a+3-a+3)\}$

$=\frac{1}{2}(2a\cdot 6)$

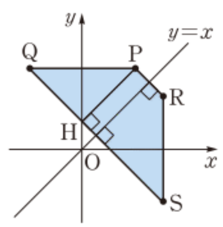
$=6a$

따라서 $6a=42$이므로

$a=7$ 답 7

다른 풀이 $\overline{PR}=\sqrt{(a-3)^2+(3-a)^2}=\sqrt{2}(a-3)$, $\overline{QS}=\sqrt{(a+3)^2+(-3-a)^2}=\sqrt{2}(a+3)$

두 직선 PR, QS는 각각 직선 $y=x$와 수직이므로 두 직선 PR, QS는 서로 평행하다. 즉 $\square PQSR$는 사다리꼴이다.



이때 직선 QS의 기울기는 -1이므로 직선 QS의 방정식은

$y-a=-(x+3)$

$\therefore\ y=-x-3+a$

점 P에서 직선 QS에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 P와 직선 $y=-x-3+a$, 즉 $x+y+3-a=0$ 사이의 거리는

$\overline{PH}=\frac{|3+a+3-a|}{\sqrt{1^2+1^2}}=3\sqrt{2}$

따라서 $\square PQSR$의 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot\{\sqrt{2}(a-3)+\sqrt{2}(a+3)\}\cdot 3\sqrt{2}=6a$

이므로 $6a=42$ $\therefore\ a=7$

1331 전략 세 원 O_1, O_2, O_3의 방정식을 구한 후 그림을 그려 공통부분을 찾는다.

풀이 원 O_1의 방정식은

$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+y^2=1$

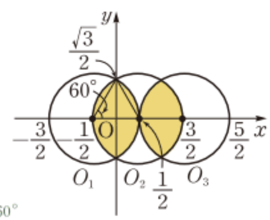
원 O_1을 y축에 대하여 대칭이동한 원 O_2의 방정식은

$\left(-x+\frac{1}{2}\right)^2+y^2=1$ $\therefore\ \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=1$

원 O_1을 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 원 O_3의 방정식은

$\left(x-2+\frac{1}{2}\right)^2+y^2=1$ $\therefore\ \left(x-\frac{3}{2}\right)^2+y^2=1$

따라서 원 O_1의 내부와 원 O_2의 내부의 공통부분, 원 O_2의 내부와 원 O_3의 내부의 공통부분은 오른쪽 그림의 색칠한 부분과 같으므로 그 넓이는



$8\left(\pi\cdot 1^2\cdot\frac{60}{360}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\underbrace{\frac{\sqrt{3}}{2}}_{1\cdot\sin 60^\circ}\right)$

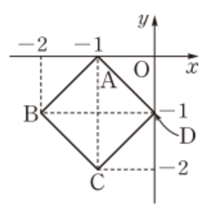
$=\frac{4}{3}\pi-\sqrt{3}$ 답 ③

1332 전략 방정식 $f(-x,\ -y+1)=0$이 나타내는 도형은 방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형을 평행이동 또는 대칭이동한 도형임을 이용한다.

풀이 방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형을 y축의 방향으로 -1만큼 평행이동하면 $f(x,\ y+1)=0$

방정식 $f(x,\ y+1)=0$이 나타내는 도형을 원점에 대하여 대칭이동하면 $f(-x,\ -y+1)=0$

따라서 방정식 $f(-x,\ -y+1)=0$이 나타내는 도형은 주어진 도형을 y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 후 원점에 대하여 대칭이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



이 도형 위의 점과 원점 사이의 거리의 최댓값은 원점과 점 B 또는 점 C 사이의 거리이므로 $\sqrt{(-2)^2+(-1)^2}=\sqrt{5}$

또 최솟값은 원점과 직선 AD 사이의 거리이고 직선 AD의 방정식은 $x+y+1=0$이므로 $\frac{|1|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

따라서 구하는 곱은 $\sqrt{5}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{10}}{2}$ 답 $\frac{\sqrt{10}}{2}$

1333 전략 점 A를 원 위의 임의의 점 P에 대하여 대칭이동한 점을 A′이라 할 때, 선분 AA′의 중점이 점 P임을 이용한다.

풀이 원 위의 임의의 점을 $\mathrm{P}(a, b)$, 점 $\mathrm{A}(-2, 0)$을 점 P에 대하여 대칭이동한 점을 $\mathrm{A}'(x, y)$라 하면

$$a=\frac{x-2}{2},\ b=\frac{y}{2}$$

이때 점 $\mathrm{P}(a, b)$는 원 $x^2+y^2=1$ 위의 점이므로

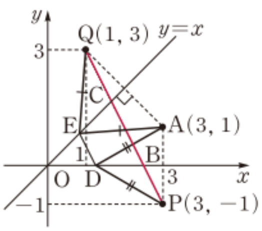
$$a^2+b^2=1$$

따라서 $\left(\frac{x-2}{2}\right)^2+\left(\frac{y}{2}\right)^2=1$이므로

$$(x-2)^2+y^2=4$$

답 ④

1334 전략 직선 l을 x축, 지점 O를 지나고 직선 l에 수직인 직선을 y축으로 정하여 점의 대칭이동을 이용한다.



풀이 직선 l을 x축, 지점 O를 지나고 직선 l에 수직인 직선을 y축으로 하는 좌표평면을 정하면 오른쪽 그림과 같다.

점 $\mathrm{A}(3, 1)$을 x축에 대하여 대칭이동한 점을 P, 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 Q라 하면

$$\mathrm{P}(3, -1),\ \mathrm{Q}(1, 3)$$

이때 만들려고 하는 도로의 길이는

$$\overline{\mathrm{AD}}+\overline{\mathrm{DE}}+\overline{\mathrm{EA}}=\overline{\mathrm{PD}}+\overline{\mathrm{DE}}+\overline{\mathrm{EQ}}$$
$$\geq\overline{\mathrm{PQ}}$$

한편 두 점 $\mathrm{P}(3, -1)$, $\mathrm{Q}(1, 3)$을 지나는 직선의 방정식은

$$y-3=\frac{3-(-1)}{1-3}(x-1)$$

$$\therefore\ y=-2x+5$$

x축과 직선 $y=-2x+5$의 교점의 좌표는

$0=-2x+5$에서 $\quad x=\frac{5}{2}\qquad\therefore\ \mathrm{B}\left(\frac{5}{2}, 0\right)$

직선 $y=x$와 직선 $y=-2x+5$의 교점의 좌표는

$x=-2x+5$에서 $\quad x=\frac{5}{3}\qquad\therefore\ \mathrm{C}\left(\frac{5}{3}, \frac{5}{3}\right)$

$$\therefore\ \overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{\left(\frac{5}{3}-\frac{5}{2}\right)^2+\left(\frac{5}{3}-0\right)^2}=\frac{5\sqrt{5}}{6}$$

따라서 두 정류소 B와 C 사이의 거리는 $\frac{5\sqrt{5}}{6}$ km이다.

답 ⑤

1335 전략 △AOB의 무게중심을 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동하면 △A′O′B′의 무게중심과 일치함을 이용한다.

풀이 △AOB의 무게중심을 G라 하면 $\quad \mathrm{G}\left(\frac{a+b}{3}, 1\right)$

점 G를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 점의 좌표가 $(7, 5)$이므로

$$\frac{a+b}{3}+m=7 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$$1+n=5 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

점 $\mathrm{O}'(m, n)$은 직선 $3x-2y=4$ 위의 점이므로

$$3m-2n=4 \qquad \cdots\cdots ㉢$$

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $\quad m=4,\ n=4$ ··· ❶

한편 직선 OA와 직선 O′A′은 평행하므로

$$\frac{3}{a}=\frac{3}{2}\qquad\therefore\ a=2$$

$a=2$, $m=4$를 ㉠에 대입하면

$$\frac{2+b}{3}+4=7\qquad\therefore\ b=7$$ ··· ❷

$$\therefore\ ab=14$$ ··· ❸

답 14

채점 기준	비율
❶ m, n의 값을 구할 수 있다.	50%
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	40%
❸ ab의 값을 구할 수 있다.	10%

1336 전략 평행이동한 포물선의 방정식과 직선의 방정식을 연립하여 얻은 이차방정식의 두 실근이 두 점 P, Q의 x좌표임을 이용한다.

풀이 평행이동한 포물선의 방정식은

$$y-2=(x+3)^2-4(x+3)\qquad\therefore\ y=x^2+2x-1$$ ··· ❶

두 점 P, Q의 x좌표를 각각 p, q라 하면 p, q는 이차방정식

$$x^2+2x-1=ax,\ \text{즉}\ x^2+(2-a)x-1=0$$

의 두 실근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$p+q=a-2 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

선분 PQ의 중점이 원점이므로

$$\frac{p+q}{2}=0\qquad\therefore\ p+q=0 \qquad \cdots\cdots ㉡$$ ··· ❷

㉠, ㉡에서 $\quad a-2=0\qquad\therefore\ a=2$ ··· ❸

답 2

채점 기준	비율
❶ 평행이동한 포물선의 방정식을 구할 수 있다.	30%
❷ $p+q$의 값을 구할 수 있다.	50%
❸ a의 값을 구할 수 있다.	20%

1337 전략 $n=1, 2, 3, \cdots$일 때 두 점 A_n, B_n의 좌표를 차례대로 구한다.

풀이 주어진 규칙에 따라 점 A_n, B_n(n은 자연수)의 좌표를 구하면

$\mathrm{A}_1(1, 0)$, $\mathrm{B}_1(0, 1)$,

$\mathrm{A}_2(1, 2)$, $\mathrm{B}_2(2, 1)$, — 점 B_1을 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 점

$\mathrm{A}_3(4, 2)$, $\mathrm{B}_3(2, 4)$,

$\mathrm{A}_4(3, 7)$, $\mathrm{B}_4(7, 3)$, — 점 B_2를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 점

$\mathrm{A}_5(11, 4)$, $\mathrm{B}_5(4, 11)$ ··· ❶

$$\therefore\ l=\overline{\mathrm{A}_5\mathrm{B}_5}=\sqrt{(4-11)^2+(11-4)^2}=\sqrt{98}=7\sqrt{2}$$ ··· ❷

$$\therefore\ l^2=98$$ ··· ❸

답 98

채점 기준	비율
❶ 점 A_1, A_2, $\cdots$, A_5, B_1, B_2, $\cdots$, B_5의 좌표를 구할 수 있다.	70%
❷ l의 값을 구할 수 있다.	20%
❸ l^2의 값을 구할 수 있다.	10%

1338 전략 원 O'의 방정식을 구한 후 두 원의 공통인 현의 방정식을 구한다.

풀이 원 O'의 방정식은 $(x+1)^2+y^2=1$ ··· ❶

두 원 O, O'의 공통인 현 AB의 방정식은

$x^2+(y-1)^2-1-\{(x+1)^2+y^2-1\}=0$

$\therefore y=-x$ ··· ❷

따라서 점 $(6,\ 2)$를 직선 $y=-x$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(-2,\ -6)$이므로 $a=-2$, $b=-6$ ··· ❸

$\therefore a+b=-8$ ··· ❹

답 -8

채점 기준	비율
❶ 원 O'의 방정식을 구할 수 있다.	20%
❷ 직선 AB의 방정식을 구할 수 있다.	30%
❸ a, b의 값을 구할 수 있다.	40%
❹ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	10%

1339 전략 점 A를 접은 선에 대하여 대칭이동한 점이 B임을 이용하여 접은 선의 방정식을 구한다.

풀이 두 점 A, B를 이은 선분의 중점의 좌표는 $(3,\ 1)$이고, 직선 AB의 기울기는 $-\frac{1}{3}$이므로 접은 선의 방정식은

직선 AB와 수직이다.

$y-1=3(x-3)$ $\therefore y=3x-8$ ··· ❶

두 점 C, D를 이은 선분의 중점 $\left(\frac{m+3}{2},\ \frac{n+2}{2}\right)$가 직선 $y=3x-8$ 위의 점이므로

$\frac{n+2}{2}=3\cdot\frac{m+3}{2}-8$

$\therefore 3m-n=9$ ······ ㉠

또 두 점 C, D를 지나는 직선이 직선 $y=3x-8$과 수직이므로

$\frac{n-2}{m-3}=-\frac{1}{3}$ $\therefore m+3n=9$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $m=\frac{18}{5}$, $n=\frac{9}{5}$ ··· ❷

$\therefore \frac{m}{n}=\frac{18}{5}\cdot\frac{5}{9}=2$ ··· ❸

답 2

채점 기준	비율
❶ 접은 선의 방정식을 구할 수 있다.	30%
❷ m, n의 값을 구할 수 있다.	60%
❸ $\frac{m}{n}$의 값을 구할 수 있다.	10%

1340 전략 점 A를 직선 $y=2x-2$에 대하여 대칭이동한 점 A'의 좌표를 구하고, 두 직선 $A'B$와 $y=2x-2$의 교점의 좌표를 구한다.

풀이 점 $A(4,\ 1)$을 직선 $y=2x-2$에 대하여 대칭이동한 점을 $A'(a,\ b)$라 하자.

선분 AA'의 중점 $\left(\frac{a+4}{2},\ \frac{b+1}{2}\right)$이 직선 $y=2x-2$ 위에 있으므로 $\frac{b+1}{2}=2\cdot\frac{a+4}{2}-2$

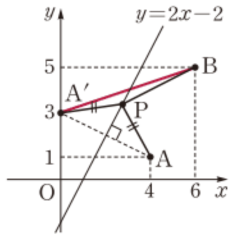
$\therefore 2a-b=-3$ ······ ㉠

직선 AA'과 직선 $y=2x-2$가 수직이므로

$\frac{b-1}{a-4}=-\frac{1}{2}$ $\therefore a+2b=6$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=0$, $b=3$

$\therefore A'(0,\ 3)$ ··· ❶



$\therefore \overline{AP}+\overline{BP}=\overline{A'P}+\overline{BP}$

$\geq \overline{A'B}$

$=\sqrt{6^2+(5-3)^2}$

$=2\sqrt{10}$

따라서 $\overline{AP}+\overline{BP}$의 최솟값은 $2\sqrt{10}$이다. ··· ❷

또 직선 $A'B$의 방정식은

$y=\frac{5-3}{6-0}x+3$

$\therefore y=\frac{1}{3}x+3$

따라서 두 직선 $y=\frac{1}{3}x+3$, $y=2x-2$의 교점의 좌표는 $(3,\ 4)$이므로 $\overline{AP}+\overline{BP}$의 값이 최소일 때의 점 P의 좌표는

$P(3,\ 4)$ ··· ❸

답 $2\sqrt{10}$, $P(3,\ 4)$

채점 기준	비율
❶ 점 A'의 좌표를 구할 수 있다.	40%
❷ $\overline{AP}+\overline{BP}$의 최솟값을 구할 수 있다.	30%
❸ 점 P의 좌표를 구할 수 있다.	30%

참고 점 B를 직선 $y=2x-2$에 대하여 대칭이동한 점을 B'이라 하면 $B'(2,\ 7)$이고

$\overline{AP}+\overline{BP}=\overline{AP}+\overline{B'P}\geq\overline{AB'}=2\sqrt{10}$

이므로 $\overline{AP}+\overline{BP}$의 최솟값은 $2\sqrt{10}$이다.

MEMO

MEMO