개념과 유형이 하나로

개념 PLUS 유형

미적분

정답과 해설

I-1. 수열의 극한

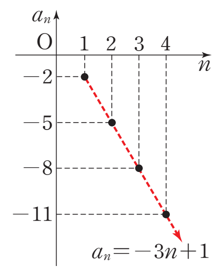
01 수열의 극한

1 유제 & 문제 p.10

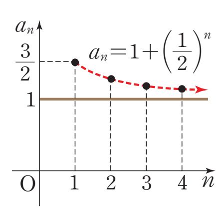
유제 01 답 (1) **발산** (2) **수렴, 1** (3) **발산**
(4) **수렴, 2** (5) **발산** (6) **수렴, 0**

일반항을 a_n이라 하고 $n=1, 2, 3, 4, \cdots$를 차례로 대입하여 a_n의 값의 변화를 그래프로 나타낸다.

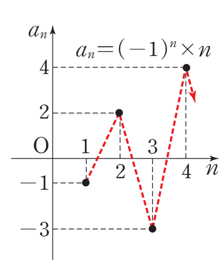
(1) 오른쪽 그림과 같이 n의 값이 한없이 커질 때, $-3n+1$의 값은 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지므로 수열 $\{-3n+1\}$은 음의 무한대로 발산한다.



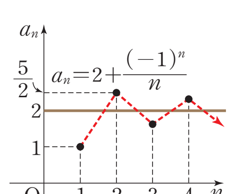
(2) 오른쪽 그림과 같이 n의 값이 한없이 커질 때, $1+\left(\frac{1}{2}\right)^n$의 값은 1에 한없이 가까워지므로 수열 $\left\{1+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$은 수렴하고, 그 극한값은 1이다.



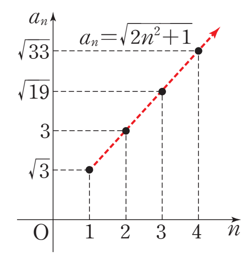
(3) 오른쪽 그림과 같이 n의 값이 한없이 커질 때, $(-1)^n\times n$의 절댓값은 한없이 커지고 그 부호는 양과 음이 교대로 나타나므로 수열 $\{(-1)^n\times n\}$은 발산(진동)한다.



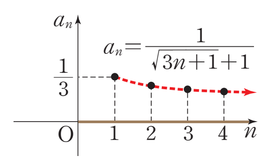
(4) 오른쪽 그림과 같이 n의 값이 한없이 커질 때, $2+\frac{(-1)^n}{n}$의 값은 2에 한없이 가까워지므로 수열 $\left\{2+\frac{(-1)^n}{n}\right\}$은 수렴하고, 그 극한값은 2이다.



(5) 오른쪽 그림과 같이 n의 값이 한없이 커질 때, $\sqrt{2n^2+1}$의 값도 한없이 커지므로 수열 $\{\sqrt{2n^2+1}\}$은 양의 무한대로 발산한다.



(6) 오른쪽 그림과 같이 n의 값이 한없이 커질 때, $\frac{1}{\sqrt{3n+1}+1}$의 값은 0에 한없이 가까워지므로 수열 $\left\{\frac{1}{\sqrt{3n+1}+1}\right\}$은 수렴하고, 그 극한값은 0이다.



2 개념 CHECK p.12

1. 답 (1) **6** (2) **−1** (3) **−30** (4) **−1**

(1) $\lim_{n\to\infty}(-a_n+3)=-\lim_{n\to\infty}a_n+\lim_{n\to\infty}3$
$=-(-3)+3=6$

(2) $\lim_{n\to\infty}(3a_n+4b_n)=3\lim_{n\to\infty}a_n+4\lim_{n\to\infty}b_n$
$=3\times(-3)+4\times2=-1$

(3) $\lim_{n\to\infty}5a_nb_n=5\lim_{n\to\infty}a_n\times\lim_{n\to\infty}b_n$
$=5\times(-3)\times2=-30$

(4) $\lim_{n\to\infty}\frac{2a_n}{3b_n}=\frac{2\lim_{n\to\infty}a_n}{3\lim_{n\to\infty}b_n}=\frac{2\times(-3)}{3\times2}=-1$

2. 답 (1) **0** (2) **2** (3) **−3** (4) $\frac{1}{2}$

(1) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)=3\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}$
$=0+0=0$

(2) $\lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{3}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}2-3\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}$
$=2-0=2$

(3) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n}-3\right)\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$
$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n}-3\right)\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$
$=\left(2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}-\lim_{n\to\infty}3\right)\left(\lim_{n\to\infty}1+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\right)$
$=(0-3)(1+0)=-3$

(4) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{1-\dfrac{1}{n}}{2+\dfrac{1}{n}}=\dfrac{\lim_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)}{\lim_{n\to\infty}\left(2+\dfrac{1}{n}\right)}$

$=\dfrac{\lim_{n\to\infty}1-\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}}{\lim_{n\to\infty}2+\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}}$

$=\dfrac{1-0}{2+0}=\dfrac{1}{2}$

2 유제 & 문제 p.13∼20

유제 02 답 (1) ∞ (2) $\dfrac{3}{2}$ (3) 0 (4) $\dfrac{1}{2}$

(1) 분모, 분자를 분모의 최고차항인 n^2으로 각각 나누면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^3+n}{3n^2-3n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+\frac{1}{n}}{3-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}=\infty$$

(2) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)(3n-5)}{(2n+1)(n-2)}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+n-10}{2n^2-3n-2}$이므로 분모, 분자를 분모의 최고차항인 n^2으로 각각 나누면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+n-10}{2n^2-3n-2}=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{1}{n}-\frac{10}{n^2}}{2-\frac{3}{n}-\frac{2}{n^2}}$$

$$=\frac{3+0-0}{2-0-0}=\frac{3}{2}$$

(3) 분모, 분자를 분모의 최고차항인 n으로 각각 나누면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{2n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{\frac{1}{n}}}{2+\frac{1}{n}}=\frac{0}{2+0}=0$$

(4) 분모, 분자를 분모의 최고차항인 $\sqrt{n}$으로 각각 나누면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1-0}}=\frac{1}{2}$$

문제 02-1 답 (1) $\dfrac{1}{2}$ (2) $\dfrac{1}{3}$

(1) $1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\cdots+n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n}{2n^2}$$

분모, 분자를 분모의 최고차항인 n^2으로 각각 나누면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n}{2n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{2}=\frac{1+0}{2}=\frac{1}{2}$$

(2) $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}{n^3}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^3+3n^2+n}{6n^3}$$

분모, 분자를 분모의 최고차항인 n^3으로 각각 나누면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^3+3n^2+n}{6n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}{6}$$

$$=\frac{2+0+0}{6}=\frac{1}{3}$$

다른 풀이

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n^3}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)}{6}$$

$$=\frac{1\times(1+0)\times(2+0)}{6}=\frac{1}{3}$$

문제 02-2 답 $\dfrac{1}{2}$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\cdots\left\{1-\frac{1}{(n+1)^2}\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{2^2-1}{2^2}\times\frac{3^2-1}{3^2}\times\frac{4^2-1}{4^2}\times\cdots\times\frac{(n+1)^2-1}{(n+1)^2}\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1\times\cancel{3}}{2\times\cancel{2}}\times\frac{\cancel{2}\times\cancel{4}}{\cancel{3}\times\cancel{3}}\times\frac{\cancel{3}\times\cancel{5}}{\cancel{4}\times\cancel{4}}\times\cdots\times\frac{\cancel{n}(n+2)}{(\cancel{n+1})(n+1)}\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\times\frac{n+2}{n+1}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{2n+2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{2}{n}}{2+\frac{2}{n}}$$

$$=\frac{1+0}{2+0}=\frac{1}{2}$$

문제 02-3 답 1

주어진 수열의 일반항을 a_n이라 하면

$$a_n=\frac{2+4+6+\cdots+2n}{n^2}=\frac{\sum_{k=1}^{n}2k}{n^2}$$

$$=\frac{2\times\frac{n(n+1)}{2}}{n^2}=\frac{n+1}{n}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{1}=\frac{1+0}{1}=1$$

문제 02-4 답 1

$\lim_{n\to\infty}\frac{an^2+bn+1}{n+1}$은 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴이므로 분모, 분자를 분모의 최고차항인 n으로 각각 나누면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{an^2+bn+1}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{an+b+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}=1 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

이때 $a\neq0$이면 $\lim_{n\to\infty}\left(an+b+\frac{1}{n}\right)$은 ∞ 또는 $-\infty$이고

$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=1$이므로 극한값이 1이 될 수 없다.

$\therefore a=0$

이를 ㉠에 대입하면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}=\frac{b+0}{1+0}=b$$

$\therefore b=1$

$\therefore a+b=1$

유제 03 답 (1) $\frac{3}{2}$ (2) $\frac{1}{2}$

(1) 분모를 1로 보고 분자를 유리화하면

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+3n}-\sqrt{n^2+1})$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+3n}-\sqrt{n^2+1})(\sqrt{n^2+3n}+\sqrt{n^2+1})}{\sqrt{n^2+3n}+\sqrt{n^2+1}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3n-1}{\sqrt{n^2+3n}+\sqrt{n^2+1}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3-\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{3}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}$$
$$=\frac{3-0}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1+0}}$$
$$=\frac{3}{2}$$

(2) 분모를 유리화하면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+4n}-n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+4n}+n}{(\sqrt{n^2+4n}-n)(\sqrt{n^2+4n}+n)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+4n}+n}{4n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{4}{n}}+1}{4}$$
$$=\frac{\sqrt{1+0}+1}{4}$$
$$=\frac{1}{2}$$

문제 03-1 답 -1

$2+4+6+\cdots+2n=2\times\frac{n(n+1)}{2}=n(n+1)$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\{\sqrt{2+4+6+\cdots+2n}-\sqrt{2+4+6+\cdots+2(n+1)}\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\{\sqrt{n(n+1)}-\sqrt{(n+1)(n+2)}\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2+3n+2})$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2+3n+2})(\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+3n+2})}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+3n+2}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-2n-2}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+3n+2}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-2-\frac{2}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}}$$
$$=\frac{-2-0}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1+0+0}}=-1$$

문제 03-2 답 $\frac{1}{2}$

주어진 수열은

$\sqrt{1\times2}-1,\ \sqrt{2\times3}-2,\ \sqrt{3\times4}-3,\ \sqrt{4\times5}-4,\ \cdots$

이므로 일반항을 a_n이라 하면

$a_n=\sqrt{n(n+1)}-n=\sqrt{n^2+n}-n$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-n)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+n}-n)(\sqrt{n^2+n}+n)}{\sqrt{n^2+n}+n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{1+0}+1}=\frac{1}{2}$$

문제 03-3 답 4

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+an}-\sqrt{n^2+3})$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+an}-\sqrt{n^2+3})(\sqrt{n^2+an}+\sqrt{n^2+3})}{\sqrt{n^2+an}+\sqrt{n^2+3}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{an-3}{\sqrt{n^2+an}+\sqrt{n^2+3}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{a-\frac{3}{n}}{\sqrt{1+\frac{a}{n}}+\sqrt{1+\frac{3}{n^2}}}$$
$$=\frac{a-0}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1+0}}=\frac{a}{2}$$

따라서 $\frac{a}{2}=2$이므로 $a=4$

문제 **03-4** 답 -2

이차방정식 $x^2-x+n-\sqrt{n^2+n}=0$의 두 근이 α_n, β_n이므로 근과 계수의 관계에 의해

$\alpha_n+\beta_n=1$, $\alpha_n\beta_n=n-\sqrt{n^2+n}$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\alpha_n}+\frac{1}{\beta_n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha_n+\beta_n}{\alpha_n\beta_n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n-\sqrt{n^2+n}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+\sqrt{n^2+n}}{(n-\sqrt{n^2+n})(n+\sqrt{n^2+n})}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+\sqrt{n^2+n}}{-n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\sqrt{1+\frac{1}{n}}}{-1}$$
$$=\frac{1+\sqrt{1+0}}{-1}$$
$$=-2$$

유제 **04** 답 (1) **3** (2) **1**

(1) $\dfrac{3a_n-2}{2a_n+1}=b_n$이라 하면

$3a_n-2=b_n(2a_n+1)$

$a_n(3-2b_n)=b_n+2$

$\therefore a_n=\dfrac{b_n+2}{3-2b_n}$

이때 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1$이므로

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{b_n+2}{3-2b_n}$$
$$=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}b_n+\lim\limits_{n\to\infty}2}{\lim\limits_{n\to\infty}3-2\lim\limits_{n\to\infty}b_n}$$
$$=\frac{1+2}{3-2\times1}=3$$

(2) $(2n^2+n+1)a_n=b_n$이라 하면

$a_n=\dfrac{b_n}{2n^2+n+1}$

이때 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=2$이므로

$$\lim_{n\to\infty}n^2a_n=\lim_{n\to\infty}\left(n^2\times\frac{b_n}{2n^2+n+1}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{2n^2+n+1}\times\lim_{n\to\infty}b_n$$
$$=\frac{1}{2}\times2=1$$

다른 풀이

$$\lim_{n\to\infty}n^2a_n=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{n^2}{2n^2+n+1}\times(2n^2+n+1)a_n\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{2n^2+n+1}\times\lim_{n\to\infty}(2n^2+n+1)a_n$$
$$=\frac{1}{2}\times2=1$$

유제 **05** 답 **5**

$5n^2+2n-3<a_n<5n^2+3n+1$의 각 변을 $(n+1)^2$으로 나누면

$$\frac{5n^2+2n-3}{(n+1)^2}<\frac{a_n}{(n+1)^2}<\frac{5n^2+3n+1}{(n+1)^2}$$

이때 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n^2+2n-3}{n^2+2n+1}=5$, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n^2+3n+1}{n^2+2n+1}=5$이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의해

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{(n+1)^2}=5$$

문제 **05-1** 답 **1**

$2n-1<na_n<\sqrt{4n^2+2n}$의 각 변을 n으로 나누면

$$\frac{2n-1}{n}<a_n<\frac{\sqrt{4n^2+2n}}{n}$$

이때 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n-1}{n}=2$, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{4n^2+2n}}{n}=2$이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의해

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=2$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{n^2a_n}{2n^2-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{2n^2-1}\times\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{1}{2}\times2=1$$

유제 **06** 답 ㄱ, ㅁ

ㄱ. $a_n<b_n$이면 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\le\lim\limits_{n\to\infty}b_n$이므로

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty$이면 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\infty$

ㄴ. [반례] $\{a_n\}$: 1, 0, 1, 0, 1, $\cdots$

$\{b_n\}$: 0, 1, 0, 1, 0, $\cdots$

이라 하면 $\lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n=0$이지만 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\neq0$, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n\neq0$이다.

ㄷ. [반례] $a_n=\dfrac{1}{n^2}$, $b_n=n$이라 하면

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\infty$(발산)이지만

$$\lim_{n\to\infty}a_nb_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}\times n\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$$

따라서 수열 $\{a_nb_n\}$은 수렴한다.

ㄹ. [반례] $a_n=2+(-1)^n$, $b_n=4$라 하면 $0<a_n<b_n$이고 수열 $\{b_n\}$은 4로 수렴하지만 수열 $\{a_n\}$은 발산(진동)한다.

ㅁ. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{a_n-b_n\}$이 모두 수렴하므로

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\alpha$, $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\beta$ (α, β는 실수)

라 하면 수열의 극한에 대한 성질에 의해

$$\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\{a_n-(a_n-b_n)\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}a_n-\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)$$
$$=\alpha-\beta$$

따라서 수열 $\{b_n\}$도 수렴한다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㅁ이다.

유제 **07** 답 $\frac{4}{3}$

$P(n,\ 2n^2)$, $Q(n+1,\ 2n^2+4n+2)$이므로

$a_n=\overline{PQ}=\sqrt{\{(n+1)-n\}^2+\{(2n^2+4n+2)-2n^2\}^2}$

$=\sqrt{16n^2+16n+5}$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\sqrt{9n^2+n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{16n^2+16n+5}}{\sqrt{9n^2+n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{16+\frac{16}{n}+\frac{5}{n^2}}}{\sqrt{9+\frac{1}{n}}}=\frac{\sqrt{16+0+0}}{\sqrt{9+0}}=\frac{4}{3}$$

문제 **07-1** 답 $\frac{1}{4}$

직선 $y=nx$와 $\overline{P_nH_n}$이 수직으로 만나므로 직선 P_nH_n은 기울기가 $-\frac{1}{n}$이고, 점 $P_n\left(\frac{n}{2},\ \frac{n^2}{4}\right)$을 지나므로 직선 P_nH_n의 방정식은

$$y-\frac{n^2}{4}=-\frac{1}{n}\left(x-\frac{n}{2}\right)$$

$$\therefore y=-\frac{1}{n}x+\frac{1}{2}+\frac{n^2}{4}$$

이 직선과 직선 $y=nx$가 만나는 점 H_n의 x좌표는

$$nx=-\frac{1}{n}x+\frac{1}{2}+\frac{n^2}{4}$$

$$\frac{n^2+1}{n}x=\frac{n^2+2}{4}$$

$$\therefore x=\frac{n(n^2+2)}{4(n^2+1)}$$

따라서 $h=\frac{n(n^2+2)}{4(n^2+1)}$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{h}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2}{4(n^2+1)}=\frac{1}{4}$$

3 개념 CHECK p.21

1. 답 (1) **발산** (2) **수렴, 0** (3) **발산**

(1) 수열 $\{(\sqrt{2})^n\}$의 공비는 $\sqrt{2}$이고, $\sqrt{2}>1$이므로

$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{2})^n=\infty$ (발산)

(2) 수열 $\left\{\left(-\frac{1}{4}\right)^n\right\}$의 공비는 $-\frac{1}{4}$이고, $-1<-\frac{1}{4}<1$이므로

$\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{4}\right)^n=0$ (수렴)

(3) 수열 $\{(-3)^n\}$의 공비는 -3이고, $-3<-1$이므로

$\lim_{n\to\infty}(-3)^n$은 발산(진동)한다.

2. 답 (1) $-\frac{1}{2}\le r<\frac{1}{2}$ (2) $-2<r\le 2$

(1) 주어진 등비수열의 공비는 $-2r$이므로 이 등비수열이 수렴하려면

$-1<-2r\le 1$

$\therefore -\frac{1}{2}\le r<\frac{1}{2}$

(2) 주어진 등비수열의 공비는 $\frac{r}{2}$이므로 이 등비수열이 수렴하려면

$-1<\frac{r}{2}\le 1$

$\therefore -2<r\le 2$

3 유제 & 문제 p.22~24

유제 **08** 답 (1) **4** (2) $-\infty$

(1) 분모, 분자를 4^n으로 각각 나누면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4^{n+1}+3^n}{4^n-3^{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{4+\left(\frac{3}{4}\right)^n}{1-\frac{1}{3}\times\left(\frac{3}{4}\right)^n}=\frac{4+0}{1-\frac{1}{3}\times 0}=4$$

(2) 주어진 식을 7^n으로 묶으면

$$\lim_{n\to\infty}\{(-3)^n-7^n\}=\lim_{n\to\infty}7^n\left\{\left(-\frac{3}{7}\right)^n-1\right\}=-\infty$$

문제 **08-1** 답 (1) **0** (2) $\frac{8}{9}$

(1) $1+3+3^2+\cdots+3^n=\frac{3^{n+1}-1}{3-1}=\frac{3^{n+1}-1}{2}$

$1+5+5^2+\cdots+5^n=\frac{5^{n+1}-1}{5-1}=\frac{5^{n+1}-1}{4}$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{1+3+3^2+\cdots+3^n}{1+5+5^2+\cdots+5^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3^{n+1}-1}{2}}{\frac{5^{n+1}-1}{4}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2(3^{n+1}-1)}{5^{n+1}-1}$$

분모, 분자를 5^n으로 각각 나누면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2(3^{n+1}-1)}{5^{n+1}-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\left\{3\times\left(\frac{3}{5}\right)^n-\left(\frac{1}{5}\right)^n\right\}}{5-\left(\frac{1}{5}\right)^n}=\frac{2(3\times 0-0)}{5-0}=0$$

(2) $1+9+9^2+\cdots+9^n=\dfrac{9^{n+1}-1}{9-1}=\dfrac{9^{n+1}-1}{8}$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{2^{3n+1}+3^{2n}}{1+9+9^2+\cdots+9^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{3n+1}+3^{2n}}{\frac{9^{n+1}-1}{8}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{8(2^{3n+1}+3^{2n})}{9^{n+1}-1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{8(2\times 8^n+9^n)}{9^{n+1}-1}$$

분모, 분자를 9^n으로 각각 나누면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{8(2\times 8^n+9^n)}{9^{n+1}-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{8\times\left\{2\times\left(\frac{8}{9}\right)^n+1\right\}}{9-\left(\frac{1}{9}\right)^n}$$

$$=\frac{8(2\times 0+1)}{9-0}=\frac{8}{9}$$

문제 08-2 답 b

$0<a<b$이므로 $0<\dfrac{a}{b}<1$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a}{b}\right)^n=0$$

따라서 주어진 식의 분모, 분자를 b^n으로 각각 나누면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^{n+1}+b^{n+1}}{a^n+b^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a\times\left(\frac{a}{b}\right)^n+b}{\left(\frac{a}{b}\right)^n+1}$$

$$=\frac{a\times 0+b}{0+1}=b$$

유제 09 답 (1) $-1-\sqrt{2}\le x<-1$ 또는 $-1<x\le -1+\sqrt{2}$

(2) $x=5$ 또는 $-5<x\le 3$

(1) 등비수열 $\{x^n(x+2)^n\}$의 공비가

$x(x+2)=x^2+2x$이므로 이 등비수열이 수렴하려면

$-1<x^2+2x\le 1$

(i) $x^2+2x>-1$을 풀면

$x^2+2x+1>0$, $(x+1)^2>0$

따라서 $x\ne -1$인 모든 실수 x에 대하여 성립한다.

(ii) $x^2+2x\le 1$을 풀면

$x^2+2x-1\le 0$

$\therefore -1-\sqrt{2}\le x\le -1+\sqrt{2}$

따라서 구하는 x의 값의 범위는 (i), (ii)의 공통 범위이므로

$-1-\sqrt{2}\le x<-1$ 또는 $-1<x\le -1+\sqrt{2}$

(2) 등비수열 $\left\{(x-5)\left(\dfrac{x+1}{4}\right)^{n-1}\right\}$의 첫째항이 $x-5$,

공비가 $\dfrac{x+1}{4}$이므로 이 등비수열이 수렴하려면

$x-5=0$ 또는 $-1<\dfrac{x+1}{4}\le 1$

(i) $x-5=0$에서 $x=5$

(ii) $-1<\dfrac{x+1}{4}\le 1$을 풀면

$-4<x+1\le 4$

$\therefore -5<x\le 3$

따라서 구하는 x의 값의 범위는

$x=5$ 또는 $-5<x\le 3$

유제 10 답 $\begin{cases} |r|>1\text{일 때, } 0 \\ r=1\text{일 때, } -2 \\ |r|<1\text{일 때, } -\frac{1}{2} \\ r=-1\text{일 때, 극한값이 없다.}\end{cases}$

(i) $|r|>1$일 때

$\lim\limits_{n\to\infty}|r^n|=\infty$이므로 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{r^n}=0$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{1}{r^{2n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{r^n}\times\lim_{n\to\infty}\frac{1}{r^n}=0$$

이때 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{r^n+1}{r^{2n}-2}$의 분모, 분자를 r^{2n}으로 각각 나누면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^n+1}{r^{2n}-2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{r^n}+\frac{1}{r^{2n}}}{1-\frac{2}{r^{2n}}}=\frac{0+0}{1-2\times 0}=0$$

(ii) $r=1$일 때

$\lim\limits_{n\to\infty}r^n=\lim\limits_{n\to\infty}r^{2n}=1$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^n+1}{r^{2n}-2}=\frac{1+1}{1-2}=-2$$

(iii) $|r|<1$일 때

$\lim\limits_{n\to\infty}r^n=\lim\limits_{n\to\infty}r^{2n}=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^n+1}{r^{2n}-2}=\frac{0+1}{0-2}=-\frac{1}{2}$$

(iv) $r=-1$일 때

n이 짝수이면 $\lim\limits_{n\to\infty}r^n=1$, $\lim\limits_{n\to\infty}r^{2n}=1$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^n+1}{r^{2n}-2}=\frac{1+1}{1-2}=-2$$

n이 홀수이면 $\lim\limits_{n\to\infty}r^n=-1$, $\lim\limits_{n\to\infty}r^{2n}=1$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^n+1}{r^{2n}-2}=\frac{-1+1}{1-2}=0$$

따라서 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{r^n+1}{r^{2n}-2}$은 진동하므로 극한값이 없다.

(i)~(iv)에 의해

$\begin{cases} |r|>1\text{일 때, } 0 \\ r=1\text{일 때, } -2 \\ |r|<1\text{일 때, } -\frac{1}{2} \\ r=-1\text{일 때, 극한값이 없다.}\end{cases}$

문제 **10**-1 답 $\dfrac{9}{2}$

(i) $|x|>1$일 때

$\lim_{n\to\infty}|x^n|=\infty$이므로 $\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{x^n}=0$

이때 $\lim_{n\to\infty}\dfrac{1+2x^n}{1+x^n}$의 분모, 분자를 x^n으로 각각 나누면

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1+2x^n}{1+x^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{x^n}+2}{\frac{1}{x^n}+1}=\frac{0+2}{0+1}=2$$

(ii) $x=1$일 때

$\lim_{n\to\infty}x^n=1$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1+2x^n}{1+x^n}=\frac{1+2\times1}{1+1}=\frac{3}{2}$$

(iii) $|x|<1$일 때

$\lim_{n\to\infty}x^n=0$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1+2x^n}{1+x^n}=\frac{1+2\times0}{1+0}=1$$

(i), (ii), (iii)에 의해

$$f(-2)+f\left(\frac{1}{2}\right)+f(1)=2+1+\frac{3}{2}=\frac{9}{2}$$

기본 연습문제

p.25~27

1 수렴, 0	**2** 3	**3** -4	**4** $\frac{165}{2}$	**5** 5
6 $\frac{1}{2}$	**7** ㄹ	**8** ③	**9** $-\frac{1}{2}$	**10** 1
11 4	**12** $\frac{3}{2}$	**13** ②	**14** $\frac{8}{3}$	

1 수열 $\left\{\dfrac{\cos n\pi}{3^n}\right\}$에 $n=1, 2, 3, 4, \cdots$를 차례로 대입하면

$-\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{9}, -\dfrac{1}{27}, \dfrac{1}{81}, \cdots$

따라서 n의 값이 한없이 커질 때, $\dfrac{\cos n\pi}{3^n}$의 값은 0에 한없이 가까워지므로 주어진 수열은 수렴하고, 그 극한값은 0이다.

2 $1\times2+2\times3+3\times4+\cdots+n(n+1)$

$$=\sum_{k=1}^{n}k(k+1)=\sum_{k=1}^{n}(k^2+k)$$
$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}$$
$$=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$
$$=\frac{n^3+3n^2+2n}{3}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{n^3+1}{1\times2+2\times3+3\times4+\cdots+n(n+1)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+1}{\frac{n^3+3n^2+2n}{3}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3(n^3+1)}{n^3+3n^2+2n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{3}{n^3}}{1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}=3$$

3 $f(n)=an+b\,(a\neq0,\ a, b$는 상수)라 하면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{2n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{an+b}{2n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{a+\frac{b}{n}}{2-\frac{1}{n}}=\frac{a}{2}$$

따라서 $\dfrac{a}{2}=-3$에서 $a=-6$

또 $f(1)=2$에서 $a+b=2$

$-6+b=2 \qquad \therefore b=8$

따라서 $f(n)=-6n+8$이므로

$f(2)=-4$

4 $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+3n}+\sqrt{n^2+6n}+\cdots+\sqrt{n^2+30n}-10n)$

$$=\lim_{n\to\infty}\{(\sqrt{n^2+3n}-n)+(\sqrt{n^2+6n}-n)+\cdots+(\sqrt{n^2+30n}-n)\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n}{\sqrt{n^2+3n}+n}+\frac{6n}{\sqrt{n^2+6n}+n}+\cdots+\frac{30n}{\sqrt{n^2+30n}+n}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{\sqrt{1+\frac{3}{n}}+1}+\lim_{n\to\infty}\frac{6}{\sqrt{1+\frac{6}{n}}+1}+\cdots+\lim_{n\to\infty}\frac{30}{\sqrt{1+\frac{30}{n}}+1}$$
$$=\frac{3}{2}+\frac{6}{2}+\cdots+\frac{30}{2}=\frac{3}{2}(1+2+\cdots+10)$$
$$=\frac{3}{2}\times\frac{10\times11}{2}=\frac{165}{2}$$

5 $a_n^2+b_n^2=(a_n+b_n)^2-2a_nb_n$이고, 두 수열 $\{a_n+b_n\}$, $\{a_nb_n\}$은 수렴하므로

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(a_n^2+b_n^2)&=\lim_{n\to\infty}\{(a_n+b_n)^2-2a_nb_n\}\\&=\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)^2-2\lim_{n\to\infty}a_nb_n\\&=\{\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)\}^2-2\lim_{n\to\infty}a_nb_n\\&=3^2-2\times2=5\end{aligned}$$

6 $n-1<a_n<n+3$에서

$$\sum_{k=1}^{n}(k-1)<a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n<\sum_{k=1}^{n}(k+3)$$

$$\frac{n(n+1)}{2}-n<a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n<\frac{n(n+1)}{2}+3n$$

$$\frac{n^2-n}{2}<a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n<\frac{n^2+7n}{2}$$

$$\therefore \frac{n^2-n}{2n^2}<\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}{n^2}<\frac{n^2+7n}{2n^2}$$

이때 $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-n}{2n^2}=\frac{1}{2}$, $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+7n}{2n^2}=\frac{1}{2}$이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의해

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}{n^2}=\frac{1}{2}$$

7 ㄱ. [반례] $a_n=n^2$, $b_n=\frac{1}{n}$이라 하면 $\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$이고 $\lim_{n\to\infty}b_n=0$이지만 $\lim_{n\to\infty}a_nb_n=\lim_{n\to\infty}n=\infty$이다.

ㄴ. [반례] $a_n=(-1)^n$이라 하면 $\lim_{n\to\infty}a_n^2=1$이지만 수열 $\{a_n\}$은 발산(진동)한다.

ㄷ. [반례] $a_n=n$, $b_n=1$이라 하면 $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$이고 $\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$(발산)이지만 $\lim_{n\to\infty}b_n=1$

따라서 수열 $\{b_n\}$은 수렴한다.

ㄹ. $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$ (α는 실수)라 하면 수열의 극한에 대한 성질에 의해

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}b_n&=\lim_{n\to\infty}\{(a_n+b_n)-a_n\}\\&=\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)-\lim_{n\to\infty}a_n\\&=0-\alpha=-\alpha\end{aligned}$$

따라서 수열 $\{a_n+b_n\}$이 0에 수렴하고 수열 $\{a_n\}$이 수렴하면 수열 $\{b_n\}$도 수렴한다.

따라서 옳은 것은 ㄹ이다.

8 ㄱ. 주어진 식을 4^n으로 묶으면

$$\lim_{n\to\infty}(3^n-4^n)=\lim_{n\to\infty}4^n\left\{\left(\frac{3}{4}\right)^n-1\right\}=-\infty$$

ㄴ. 분모, 분자를 2^n으로 각각 나누면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}}{2^n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{3\times\left(\frac{3}{2}\right)^n}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}=\infty$$

ㄷ. 분모, 분자를 3^n으로 각각 나누면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{5^n}+1}{3^n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{\left(\frac{5}{9}\right)^n}+\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}=\frac{0+0}{1-0}=0$$

ㄹ. 분모, 분자를 5^n으로 각각 나누면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5^{n+1}+4^{n+1}}{5^n+4^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{5+4\times\left(\frac{4}{5}\right)^n}{1+\left(\frac{4}{5}\right)^n}=\frac{5+4\times0}{1+0}=5$$

따라서 극한값이 존재하는 것은 ㄷ, ㄹ이다.

9 $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$ (α는 실수)로 놓으면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{7^{n+1}+5^n\times a_n}{5^n-7^n\times a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{7+\left(\frac{5}{7}\right)^n\times a_n}{\left(\frac{5}{7}\right)^n-1\times a_n}=\frac{7+0\times\alpha}{0-1\times\alpha}=-\frac{7}{\alpha}$$

따라서 $-\frac{7}{\alpha}=14$이므로 $\alpha=-\frac{1}{2}$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n=-\frac{1}{2}$$

10 $a_n+b_n=5^n$ ...... ㉠

$a_n-b_n=3^{n+1}$ ...... ㉡

㉠+㉡을 하면

$2a_n=5^n+3^{n+1}$ $\quad\therefore a_n=\frac{5^n+3^{n+1}}{2}$

㉠−㉡을 하면

$2b_n=5^n-3^{n+1}$ $\quad\therefore b_n=\frac{5^n-3^{n+1}}{2}$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{5^n-3^{n+1}}{2}}{\frac{5^n+3^{n+1}}{2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{5^n-3^{n+1}}{5^n+3^{n+1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1-3\times\left(\frac{3}{5}\right)^n}{1+3\times\left(\frac{3}{5}\right)^n}=\frac{1-3\times0}{1+3\times0}=1$$

11 $3^n+4^n>0$이므로 $4^{n+1}+3^{n-1}<(3^n+4^n)a_n<4^{n+1}+3^{n+1}$의 각 변을 3^n+4^n으로 나누면

$$\frac{4^{n+1}+3^{n-1}}{3^n+4^n}<a_n<\frac{4^{n+1}+3^{n+1}}{3^n+4^n}$$

이때

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4^{n+1}+3^{n-1}}{3^n+4^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{4+\frac{1}{3}\times\left(\frac{3}{4}\right)^n}{\left(\frac{3}{4}\right)^n+1}=4$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4^{n+1}+3^{n+1}}{3^n+4^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{4+3\times\left(\frac{3}{4}\right)^n}{\left(\frac{3}{4}\right)^n+1}=4$$

이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의해

$\lim_{n\to\infty}a_n=4$

12 $n\geq 2$일 때, $a_n=S_n-S_{n-1}$이므로

$$\begin{aligned}a_n&=S_n-S_{n-1}\\&=\{(n-1)3^{n-1}\}-\{(n-2)3^{n-2}\}\\&=\{3(n-1)3^{n-2}\}-\{(n-2)3^{n-2}\}\\&=\{(3n-3)-(n-2)\}3^{n-2}\\&=(2n-1)3^{n-2}\end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)3^{n-1}}{(2n-1)3^{n-2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3(n-1)}{2n-1}=\frac{3}{2}$$

13 등비수열 $\{r^n\}$의 공비는 r이고, 이 수열이 수렴하므로

$-1<r\leq 1$ …… ㉠

ㄱ. 등비수열 $\{r^{2n}\}$의 공비는 r^2이므로 ㉠에서

$0\leq r^2\leq 1$

따라서 등비수열 $\{r^{2n}\}$은 반드시 수렴한다.

ㄴ. 등비수열 $\left\{\left(\frac{1}{r}\right)^n\right\}$ $(r\neq 0)$의 공비는 $\frac{1}{r}$이므로 ㉠에서

$\frac{1}{r}<-1$ 또는 $\frac{1}{r}\geq 1$

따라서 등비수열 $\left\{\left(\frac{1}{r}\right)^n\right\}$은 $\frac{1}{r}=1$일 때만 수렴한다.

ㄷ. 등비수열 $\{(-r)^n\}$의 공비는 $-r$이므로 ㉠에서

$-1\leq -r<1$

따라서 등비수열 $\{(-r)^n\}$은 $r=-1$일 때는 수렴하지 않는다.

ㄹ. 등비수열 $\left\{\left(\frac{1-r}{2}\right)^n\right\}$의 공비는 $\frac{1-r}{2}$이므로 ㉠에서

$-1\leq -r<1$, $0\leq 1-r<2$

$\therefore 0\leq\frac{1-r}{2}<1$

따라서 등비수열 $\left\{\left(\frac{1-r}{2}\right)^n\right\}$은 반드시 수렴한다.

따라서 반드시 수렴하는 것은 ㄱ, ㄹ이다.

14 $r>0$이므로 r의 값의 범위를

$0<r<1$, $r=1$, $r>1$

인 경우로 나누어 구한다.

(i) $0<r<1$일 때

$\lim_{n\to\infty}r^n=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^{n+1}+r+2}{r^n+1}=r+2=\frac{7}{3}$$

$\therefore r=\frac{1}{3}$

(ii) $r=1$일 때

$\lim_{n\to\infty}r^n=1$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^{n+1}+r+2}{r^n+1}=\frac{1+1+2}{1+1}=2\neq\frac{7}{3}$$

(iii) $r>1$일 때

$\lim_{n\to\infty}r^n=\infty$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^{n+1}+r+2}{r^n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{r+\frac{1}{r^{n-1}}+\frac{2}{r^n}}{1+\frac{1}{r^n}}=r=\frac{7}{3}$$

(i), (ii), (iii)에 의해 조건을 만족하는 모든 r의 값의 합은

$\frac{1}{3}+\frac{7}{3}=\frac{8}{3}$

실전 연습문제

p.28

1 -2 **2** $\frac{3}{4}$ **3** ⑤ **4** ③

1 $a_nb_n=c_n$이라 하면

$\lim_{n\to\infty}c_n=3$, $b_n=\frac{c_n}{a_n}$

이때 $\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$이므로

$\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\frac{c_n}{a_n}=0$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{n\to\infty}(a_nb_n^2-a_nb_n-b_n+1)&=\lim_{n\to\infty}\{a_nb_n(b_n-1)-(b_n-1)\}\\&=\lim_{n\to\infty}(a_nb_n-1)(b_n-1)\\&=\lim_{n\to\infty}(a_nb_n-1)\times\lim_{n\to\infty}(b_n-1)\\&=(3-1)\times(0-1)\\&=-2\end{aligned}$$

다른 풀이

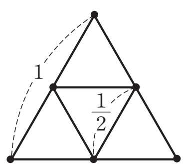
$\lim\limits_{n\to\infty} a_nb_n=3$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\infty$이므로

$\lim\limits_{n\to\infty} b_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_nb_n}{a_n}=0$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{n\to\infty}(a_nb_n{}^2-a_nb_n-b_n+1)&=\lim_{n\to\infty}(a_nb_n-1)(b_n-1)\\&=\lim_{n\to\infty}(a_nb_n-1)\times\lim_{n\to\infty}(b_n-1)\\&=(3-1)\times(0-1)=-2\end{aligned}$$

2 (i) $n=2$일 때

다음 삼각형에서 길이가 1인 선분이 3개, 길이가 $\dfrac{1}{2}$인 선분이 3개이므로



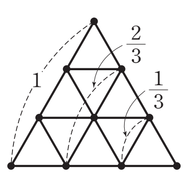
$a_2=3\left(\dfrac{1}{2}+1\right)=3\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{2}\right)$

꼭짓점의 개수는 위에서부터 차례로 1개, 2개, 3개이므로

$b_2=1+2+3$

(ii) $n=3$일 때

다음 삼각형에서 길이가 1인 선분이 3개, 길이가 $\dfrac{2}{3}$인 선분이 3개, 길이가 $\dfrac{1}{3}$인 선분이 3개이므로



$a_3=3\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{3}+1\right)=3\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{3}+\dfrac{3}{3}\right)$

꼭짓점의 개수는 위에서부터 차례로 1개, 2개, 3개, 4개이므로

$b_3=1+2+3+4$

같은 방법으로 a_n, b_n을 구하면

$$\begin{aligned}a_n&=3\left(\frac{1}{n}+\frac{2}{n}+\frac{3}{n}+\cdots+\frac{n}{n}\right)\\&=3\times\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n}\\&=\frac{3(n+1)}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}b_n&=1+2+3+\cdots+n+(n+1)\\&=\frac{(n+1)(n+2)}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_nb_n}{n^3}&=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3(n+1)}{2}\times\frac{(n+1)(n+2)}{2}}{n^3}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{3(n^3+4n^2+5n+2)}{4n^3}\\&=\frac{3}{4}\end{aligned}$$

3 이차방정식 $x^2-6x+4=0$을 풀면 $x=3\pm\sqrt{5}$

이때 $\alpha=3+\sqrt{5}$, $\beta=3-\sqrt{5}$라 하면

$0<\dfrac{\beta}{\alpha}<1$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^n=0$

따라서 주어진 식의 분모, 분자를 α^n으로 각각 나누면

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha^{n+1}+\beta^{n+1}}{\alpha^n+\beta^n}&=\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha+\beta\times\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n}{1+\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n}\\&=\alpha=3+\sqrt{5}\end{aligned}$$

참고 $\alpha=3-\sqrt{5}$, $\beta=3+\sqrt{5}$라 하면

$0<\dfrac{\alpha}{\beta}<1$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^n=0$

따라서 주어진 식의 분모, 분자를 β^n으로 각각 나누면

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha^{n+1}+\beta^{n+1}}{\alpha^n+\beta^n}&=\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha\times\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n+\beta}{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n+1}\\&=\beta=3+\sqrt{5}\end{aligned}$$

4 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^na_n}{2^n+5}=\alpha\ (\alpha\neq0)$로 놓고

$\dfrac{3^na_n}{2^n+5}=b_n$이라 하면

$\lim\limits_{n\to\infty} b_n=\alpha\ (\alpha\neq0)$ $\therefore \lim\limits_{n\to\infty} b_{n+1}=\alpha$

이때 $a_n=\dfrac{2^n+5}{3^n}b_n$이므로

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}&=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2^n+5}{3^n}b_n}{\frac{2^{n+1}+5}{3^{n+1}}b_{n+1}}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{3(2^n+5)b_n}{(2^{n+1}+5)b_{n+1}}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{3\left(1+\frac{5}{2^n}\right)b_n}{\left(2+\frac{5}{2^n}\right)b_{n+1}}\\&=\frac{3\alpha}{2\alpha}\\&=\frac{3}{2}\ (\because \alpha\neq0)\end{aligned}$$

01 급수

1 개념 CHECK p.31

1. 답 (1) $\frac{2}{3}$ (2) 5

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{2n-1}{3n+1} = \frac{2}{3}$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n$

$= \lim_{n\to\infty} \left\{5-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\} = 5$

1 유제 & 문제 p.33~34

유제 01 답 (1) 발산 (2) 수렴, 1 (3) 발산

주어진 급수의 제n항을 a_n, 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

(1) $a_n=3n-8$이므로

$$S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k$$
$$=\sum_{k=1}^{n}(3k-8)$$
$$=3\times\frac{n(n+1)}{2}-8n$$
$$=\frac{3n^2-13n}{2}$$

$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2-13n}{2}=\infty$

따라서 주어진 급수는 발산한다.

(2) $a_n=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$이므로

$$S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$
$$=\left(1-\cancel{\frac{1}{2}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{4}}\right)+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{n}}-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$=1-\frac{1}{n+1}$$

$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$

따라서 주어진 급수는 수렴하고, 그 합은 1이다.

(3) $a_n=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

$$=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}$$
$$=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$$

이므로

$$S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k=\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$$
$$=(\cancel{\sqrt{2}}-\sqrt{1})+(\cancel{\sqrt{3}}-\cancel{\sqrt{2}})+(\cancel{\sqrt{4}}-\cancel{\sqrt{3}})+\cdots+(\sqrt{n+1}-\cancel{\sqrt{n}})$$
$$=\sqrt{n+1}-1$$

$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-1)=\infty$

따라서 주어진 급수는 발산한다.

문제 01-1 답 (1) 2 (2) $\frac{3}{4}$

주어진 급수의 제n항을 a_n, 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

(1) $a_n=\frac{1}{1+2+3+\cdots+n}=\frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}}$

$$=\frac{2}{n(n+1)}=2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$\therefore S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k=2\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$

$$=2\left\{\left(1-\cancel{\frac{1}{2}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{4}}\right)+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{n}}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$$
$$=2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} a_n=\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty} 2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=2$

(2) $a_n=\frac{1}{n^2+2n}=\frac{1}{n(n+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$

$\therefore S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$

$$=\frac{1}{2}\left\{\left(1-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\left(\frac{1}{2}-\cancel{\frac{1}{4}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{5}}\right)+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{n-1}}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{n}}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} a_n=\lim_{n\to\infty} S_n$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}=\frac{3}{4}$$

문제 01-2 답 1

주어진 급수의 제n항을 a_n, 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$$a_n=\frac{\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}}{\sqrt{4n^2-1}}$$
$$=\frac{\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}}{\sqrt{2n-1}\sqrt{2n+1}}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2n-1}}-\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$
$$\therefore S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{2k-1}}-\frac{1}{\sqrt{2k+1}}\right)$$
$$=\left(1-\cancel{\frac{1}{\sqrt{3}}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{\sqrt{3}}}-\cancel{\frac{1}{\sqrt{5}}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{\sqrt{5}}}-\cancel{\frac{1}{\sqrt{7}}}\right)+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{\sqrt{2n-1}}}-\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\right)$$
$$=1-\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$
$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\right)=1$$

문제 01-3 답 $\frac{1}{4}$

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=n^2+n$$

(i) $n\ge2$일 때

$$a_n=S_n-S_{n-1}$$
$$=n^2+n-\{(n-1)^2+(n-1)\}=2n \quad \cdots\cdots ㉠$$

(ii) $n=1$일 때

$$a_1=S_1=1^2+1=2 \quad \cdots\cdots ㉡$$

이때 ㉡은 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로 일반항 a_n은

$a_n=2n$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_na_{n+1}}$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n\times2(n+1)}$$
$$=\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$=\frac{1}{4}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$
$$=\frac{1}{4}\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1-\cancel{\frac{1}{2}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{n}}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{4}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$=\frac{1}{4}\times1=\frac{1}{4}$$

유제 02 답 (1) **수렴, 0** (2) **발산**

주어진 급수의 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면 자연수 k에 대하여

(1) (i) $n=2k$일 때

$$S_{2k}=(\cancel{1}-\cancel{1})+\left(\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{2}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{k}}-\cancel{\frac{1}{k}}\right)=0$$
$$\therefore \lim_{k\to\infty}S_{2k}=0$$

(ii) $n=2k-1$일 때

$$S_{2k-1}=\cancel{1}+\left(-\cancel{1}+\cancel{\frac{1}{2}}\right)+\left(-\cancel{\frac{1}{2}}+\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\cdots+\left(-\cancel{\frac{1}{k-1}}+\frac{1}{k}\right)$$
$$=\frac{1}{k}$$
$$\therefore \lim_{k\to\infty}S_{2k-1}=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}=0$$

(i), (ii)에 의해 $\lim_{k\to\infty}S_{2k}=\lim_{k\to\infty}S_{2k-1}=0$이므로 주어진 급수는 수렴하고, 그 합은 0이다.

(2) (i) $n=2k$일 때

$$S_{2k}=\left(-\frac{1}{2}+\cancel{\frac{2}{3}}\right)+\left(-\cancel{\frac{2}{3}}+\cancel{\frac{3}{4}}\right)+\left(-\cancel{\frac{3}{4}}+\cancel{\frac{4}{5}}\right)+\cdots+\left(-\cancel{\frac{k}{k+1}}+\frac{k+1}{k+2}\right)$$
$$=-\frac{1}{2}+\frac{k+1}{k+2}$$
$$\therefore \lim_{k\to\infty}S_{2k}=\lim_{k\to\infty}\left(-\frac{1}{2}+\frac{k+1}{k+2}\right)=-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}$$

(ii) $n=2k-1$일 때

$$S_{2k-1}=-\frac{1}{2}+\left(\cancel{\frac{2}{3}}-\cancel{\frac{2}{3}}\right)+\left(\cancel{\frac{3}{4}}-\cancel{\frac{3}{4}}\right)+\cdots+\left(\cancel{\frac{k}{k+1}}-\cancel{\frac{k}{k+1}}\right)$$
$$=-\frac{1}{2}$$
$$\therefore \lim_{k\to\infty}S_{2k-1}=-\frac{1}{2}$$

(i), (ii)에 의해 $\lim_{k\to\infty}S_{2k}\neq\lim_{k\to\infty}S_{2k-1}$이므로 주어진 급수는 발산한다.

문제 02-1 답 **수렴,** $\frac{1}{6}$

주어진 급수의 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$$S_n=\left(-\frac{1}{3}+\cancel{\frac{2}{5}}\right)+\left(-\cancel{\frac{2}{5}}+\cancel{\frac{3}{7}}\right)+\left(-\cancel{\frac{3}{7}}+\cancel{\frac{4}{9}}\right)+\cdots+\left(-\cancel{\frac{n}{2n+1}}+\frac{n+1}{2n+3}\right)$$
$$=-\frac{1}{3}+\frac{n+1}{2n+3}$$
$$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{3}+\frac{n+1}{2n+3}\right)=-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$$

따라서 주어진 급수는 수렴하고, 그 합은 $\frac{1}{6}$이다.

개념편

2 개념 CHECK p.35

1. 답 (1) **5** (2) **4**

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}(3a_n+b_n)=3\sum_{n=1}^{\infty}a_n+\sum_{n=1}^{\infty}b_n$

$=3\times2+(-1)=5$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-2b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n-2\sum_{n=1}^{\infty}b_n$

$=2-2\times(-1)=4$

2 유제 & 문제 p.36~39

유제 03 답 (1) **발산** (2) **발산**

(1) $a_n=\dfrac{n}{n+1}$이라 하면

$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}=1\neq0$

따라서 주어진 급수는 발산한다.

(2) $a_n=\sqrt{n^2+2n}-n$이라 하면

$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+2n}-n)$

$=\lim_{n\to\infty}\dfrac{(\sqrt{n^2+2n}-n)(\sqrt{n^2+2n}+n)}{\sqrt{n^2+2n}+n}$

$=\lim_{n\to\infty}\dfrac{2n}{\sqrt{n^2+2n}+n}$

$=\lim_{n\to\infty}\dfrac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1}=1\neq0$

따라서 주어진 급수는 발산한다.

문제 03-1 답 (1) **풀이 참조** (2) **풀이 참조**

(1) 주어진 급수는 첫째항이 1, 공차가 3인 등차수열의 합이므로 일반항 a_n은

$a_n=1+(n-1)\times3=3n-2$

$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}(3n-2)=\infty\neq0$

따라서 주어진 급수는 발산한다.

(2) 주어진 급수의 제n항인 a_n은

$a_n=\dfrac{n}{2n-1}$

$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\dfrac{n}{2n-1}=\dfrac{1}{2}\neq0$

따라서 주어진 급수는 발산한다.

유제 04 답 **2**

$a_n-\dfrac{1}{\sqrt{n^2+3n}-\sqrt{n^2+2n}}=b_n$이라 하면

$a_n=b_n+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+3n}-\sqrt{n^2+2n}}$

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}b_n=0$

이때

$\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n^2+3n}-\sqrt{n^2+2n}}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+3n}+\sqrt{n^2+2n}}{n}$

$=\lim_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{1+\frac{3}{n}}+\sqrt{1+\frac{2}{n}}}{1}=2$

이므로

$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left(b_n+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+3n}-\sqrt{n^2+2n}}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}b_n+\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n^2+3n}-\sqrt{n^2+2n}}$

$=0+2=2$

문제 04-1 답 **1**

$\dfrac{a_n+3}{a_n}-4=b_n$이라 하면 $a_n=\dfrac{3}{b_n+3}$

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$이 5로 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}b_n=0$

$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\dfrac{3}{b_n+3}=\dfrac{3}{0+3}=1$

문제 04-2 답 $-\dfrac{30}{23}$

$\dfrac{a_n}{n}-3=b_n$이라 하면 $a_n=n(b_n+3)$

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$이 2020으로 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}b_n=0$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\dfrac{3n^3+a_n^3}{4n^3-a_n^3}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{3n^3+n^3(b_n+3)^3}{4n^3-n^3(b_n+3)^3}$

$=\lim_{n\to\infty}\dfrac{3+(b_n+3)^3}{4-(b_n+3)^3}$

$=\dfrac{3+(0+3)^3}{4-(0+3)^3}$

$=\dfrac{3+27}{4-27}=-\dfrac{30}{23}$

유제 05 답 **3**

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\alpha,\ \sum_{n=1}^{\infty}b_n=\beta$ ($\alpha,\ \beta$는 실수)라 하면

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-3b_n)=11$에서

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n-3\sum_{n=1}^{\infty}b_n=11 \qquad \therefore \alpha-3\beta=11$ …… ㉠

$\sum_{n=1}^{\infty}(2a_n+b_n)=8$에서

$2\sum_{n=1}^{\infty}a_n+\sum_{n=1}^{\infty}b_n=8 \qquad \therefore 2\alpha+\beta=8$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\alpha=5,\ \beta=-2$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n+\sum_{n=1}^{\infty}b_n$

$=\alpha+\beta=5+(-2)=3$

문제 **05**-1 답 8

$3a_n-2b_n=c_n$이라 하면 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n=20$

또 $3a_n-2b_n=c_n$을 a_n에 대하여 풀면

$a_n=\frac{2}{3}b_n+\frac{1}{3}c_n$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}b_n+\frac{1}{3}c_n\right)$$
$$=\frac{2}{3}\sum_{n=1}^{\infty} b_n+\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty} c_n$$
$$=\frac{2}{3}\times 2+\frac{1}{3}\times 20$$
$$=8$$

유제 **06** 답 ㄱ, ㄴ

ㄱ. $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-1)$이 수렴하므로

$\lim_{n\to\infty}(a_n-1)=0$

$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n=1\neq 0$

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$은 발산한다.

ㄴ. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 수렴하므로

$\lim_{n\to\infty} a_n=0$, $\lim_{n\to\infty} b_n=0$

$\therefore \lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim_{n\to\infty} a_n+\lim_{n\to\infty} b_n=0$

ㄷ. [반례] $a_n=\frac{1}{n(n+1)}$, $b_n=n^2$이라 하면

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$은 1로 수렴하고 $\lim_{n\to\infty} b_n=\infty$이지만

$\lim_{n\to\infty} a_nb_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n(n+1)}=1\neq 0$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

3 개념 CHECK

p.41

1. 답 (1) $-\frac{1}{3}<r<\frac{1}{3}$ (2) $-3<r<3$

(1) 주어진 등비급수의 공비가 $-3r$이므로

$-1<-3r<1$

$\therefore -\frac{1}{3}<r<\frac{1}{3}$

(2) 주어진 등비급수의 공비가 $\frac{r}{3}$이므로

$-1<\frac{r}{3}<1$

$\therefore -3<r<3$

3 유제 & 문제

p.42~49

유제 **07** 답 (1) 발산 (2) 수렴, $-\frac{1}{4}$ (3) 발산 (4) 수렴, $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (5) 수렴, $4+2\sqrt{2}$

(1) 주어진 등비급수의 공비는 -2이고, $|-2|>1$이므로 이 등비급수는 발산한다.

(2) 주어진 등비급수의 공비는 $-\frac{1}{3}$이고, $\left|-\frac{1}{3}\right|<1$이므로 이 등비급수는 수렴한다.

따라서 첫째항이 $-\frac{1}{3}$, 공비가 $-\frac{1}{3}$인 등비급수의 합은

$$\frac{-\frac{1}{3}}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}=-\frac{1}{4}$$

(3) 주어진 등비급수의 공비는 $-\frac{3}{2}$이고, $\left|-\frac{3}{2}\right|>1$이므로 이 등비급수는 발산한다.

(4) 주어진 등비급수의 공비는 $\sqrt{2}-1$이고, $|\sqrt{2}-1|<1$이므로 이 등비급수는 수렴한다.

따라서 첫째항이 $\sqrt{2}-1$, 공비가 $\sqrt{2}-1$인 등비급수의 합은

$$\frac{\sqrt{2}-1}{1-(\sqrt{2}-1)}=\frac{\sqrt{2}-1}{2-\sqrt{2}}=\frac{(\sqrt{2}-1)(2+\sqrt{2})}{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})}$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

(5) 주어진 등비급수의 공비는 $\frac{\sqrt{2}}{2(\sqrt{2}+1)}=\frac{1}{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)}$이고, $\left|\frac{1}{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)}\right|<1$이므로 이 등비급수는 수렴한다.

따라서 첫째항이 $2(\sqrt{2}+1)$, 공비가 $\frac{1}{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)}$인 등비급수의 합은

$$\frac{2(\sqrt{2}+1)}{1-\frac{1}{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)}}=\frac{2(\sqrt{2}+1)}{\frac{1}{\sqrt{2}}}=2\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)$$
$$=4+2\sqrt{2}$$

유제 **08** 답 (1) $\frac{1}{2}$ (2) $\frac{22}{5}$

(1) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n-2^n}{6^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{6}\right)^n-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{6}\right)^n$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n$$
$$=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}-\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}$$
$$=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

개념편

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}(4\times3^{-n}+12\times6^{-n})=4\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n+12\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{6}\right)^n$

$$=4\times\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}+12\times\frac{\frac{1}{6}}{1-\frac{1}{6}}$$

$$=2+\frac{12}{5}=\frac{22}{5}$$

문제 **08-1** 답 $-\frac{3}{2}$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+1}-3^{2n-1}}{18^{n-1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+1}}{18^{n-1}}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{2n-1}}{18^{n-1}}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\times2^n}{\frac{1}{18}\times18^n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{1}{3}\times9^n}{\frac{1}{18}\times18^n}$$

$$=36\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{9}\right)^n-6\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$=36\times\frac{\frac{1}{9}}{1-\frac{1}{9}}-6\times\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{9}{2}-6=-\frac{3}{2}$$

문제 **08-2** 답 $\frac{5}{8}$

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\frac{2}{3^4}+\frac{1}{3^5}+\frac{2}{3^6}+\cdots$$

$$=\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{3^5}+\cdots\right)+\left(\frac{2}{3^2}+\frac{2}{3^4}+\frac{2}{3^6}+\cdots\right)$$

$$=\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{9}}+\frac{\frac{2}{9}}{1-\frac{1}{9}}=\frac{3}{8}+\frac{2}{8}=\frac{5}{8}$$

문제 **08-3** 답 $\frac{7}{12}$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1+5+5^2+\cdots+5^{k-1}}{7^k}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{5^k-1}{5-1}}{7^k}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n-1}{4\times7^n}$$

$$=\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{5}{7}\right)^n-\left(\frac{1}{7}\right)^n\right\}$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{\frac{5}{7}}{1-\frac{5}{7}}-\frac{\frac{1}{7}}{1-\frac{1}{7}}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{5}{2}-\frac{1}{6}\right)=\frac{7}{12}$$

유제 **09** 답 **(1) $x=-2$ 또는 $-\sqrt{2}<x<0$ 또는 $0<x<\sqrt{2}$**
(2) $2\le x<4$

(1) 주어진 등비급수의 첫째항이 $x+2$, 공비가 x^2-1이므로 이 등비급수가 수렴하려면

$x+2=0$ 또는 $-1<x^2-1<1$

(i) $x+2=0$을 풀면 $x=-2$

(ii) $-1<x^2-1<1$을 풀면

$0<x^2<2$ $\quad\therefore -\sqrt{2}<x<0$ 또는 $0<x<\sqrt{2}$

따라서 구하는 x의 값의 범위는 (i), (ii)를 합한 범위이므로

$x=-2$ 또는 $-\sqrt{2}<x<0$ 또는 $0<x<\sqrt{2}$

(2) 주어진 등비급수의 첫째항이 $(x-2)(x-3)$, 공비가 $x-3$이므로 이 등비급수가 수렴하려면

$(x-2)(x-3)=0$ 또는 $-1<x-3<1$

(i) $(x-2)(x-3)=0$을 풀면 $x=2$ 또는 $x=3$

(ii) $-1<x-3<1$을 풀면 $2<x<4$

따라서 구하는 x의 값의 범위는 (i), (ii)를 합한 범위이므로

$2\le x<4$

문제 **09-1** 답 ④

등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}r^n$이 수렴하므로

$-1<r<1$ …… ㉠

① $\sum_{n=1}^{\infty}r^{2n}=\sum_{n=1}^{\infty}(r^2)^n$은 공비가 r^2인 등비급수이므로 ㉠에서

$0\le r^2<1$

따라서 주어진 급수는 수렴한다.

② $\sum_{n=1}^{\infty}(-r)^n$은 공비가 $-r$인 등비급수이므로 ㉠에서

$-1<-r<1$

따라서 주어진 급수는 수렴한다.

③ $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r-1}{2}\right)^n$은 공비가 $\frac{r-1}{2}$인 등비급수이므로 ㉠에서

$-2<r-1<0$ $\quad\therefore -1<\frac{r-1}{2}<0$

따라서 주어진 급수는 수렴한다.

④ $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{2}-1\right)^n$은 공비가 $\frac{r}{2}-1$인 등비급수이므로 ㉠에서

$-\frac{1}{2}<\frac{r}{2}<\frac{1}{2}$ $\quad\therefore -\frac{3}{2}<\frac{r}{2}-1<-\frac{1}{2}$

따라서 주어진 급수는 반드시 수렴한다고 할 수 없다.

⑤ $\sum_{n=1}^{\infty}r^n$, $\sum_{n=1}^{\infty}(-r)^n$이 수렴하므로 $\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}r^n$, $\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}(-r)^n$도 수렴한다.

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n+(-r)^n}{3}=\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}r^n+\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}(-r)^n$에서 주어진 급수는 수렴한다.

유제 **10** 답 $\frac{5}{2}$

수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 a, 공비가 r인 등비수열이므로

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n=2$에서

$\frac{a}{1-r}=2 \quad \therefore a=2(1-r) \quad \cdots\cdots ㉠$

수열 $\{a_n^3\}$은 첫째항이 a^3, 공비가 r^3인 등비수열이므로

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^3=24$에서

$\frac{a^3}{1-r^3}=24 \quad \therefore a^3=24(1-r^3) \quad \cdots\cdots ㉡$

㉠을 ㉡에 대입하면

$8(1-r)^3=24(1-r^3)$

$(1-r)^3=3(1-r)(1+r+r^2)$

$(1-r)^2=3(1+r+r^2)$ ($\because -1<r<1$)

$2r^2+5r+2=0$, $(r+2)(2r+1)=0$

$\therefore r=-\frac{1}{2}$ ($\because -1<r<1$)

이를 ㉠에 대입하면

$a=2\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)\right\}=3$

$\therefore a+r=3+\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{2}$

문제 **10-1** 답 **3**

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r, 등비수열 $\{b_n\}$의 공비를 s라 하면 두 수열의 첫째항이 1이므로

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n=4$에서 $\frac{1}{1-r}=4 \quad \therefore r=\frac{3}{4}$

$\therefore a_n=\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n=2$에서 $\frac{1}{1-s}=2 \quad \therefore s=\frac{1}{2}$

$\therefore b_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$$\therefore \frac{b_1}{a_1}+\frac{b_2}{a_2}+\frac{b_3}{a_3}+\frac{b_4}{a_4}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{a_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

$$=\frac{1}{1-\frac{2}{3}}=3$$

문제 **10-2** 답 $\frac{1}{3}$

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 $a\,(a>0)$, 공비를 $r\,(r>0)$라 하면

$\{a_n\}$: a, ar, ar^2, $\cdots$

$\{a_{2n}\}$: ar, ar^3, ar^5, $\cdots$ ➡ 첫째항 ar, 공비 r^2

$\{a_{3n-1}\}$: ar, ar^4, ar^7, $\cdots$ ➡ 첫째항 ar, 공비 r^3

$\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}=13$에서

$\frac{ar}{1-r^2}=13 \quad \therefore ar=13(1-r^2) \quad \cdots\cdots ㉠$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_{3n-1}=12$에서

$\frac{ar}{1-r^3}=12 \quad \therefore ar=12(1-r^3) \quad \cdots\cdots ㉡$

㉠, ㉡에서

$13(1-r^2)=12(1-r^3)$

$13(1-r)(1+r)=12(1-r)(1+r+r^2)$

$13(1+r)=12(1+r+r^2)$ ($\because -1<r<1$)

$12r^2-r-1=0$, $(4r+1)(3r-1)=0$

$\therefore r=\frac{1}{3}$ ($\because r>0$)

유제 **11** 답 (1) $\frac{104}{333}$ (2) $\frac{23}{90}$

(1) $0.\dot{3}1\dot{2}=0.312312312\cdots$

$$=0.312+0.000312+0.000000312+\cdots$$

$$=\frac{312}{1000}+\frac{312}{1000000}+\frac{312}{1000000000}+\cdots$$

$$=\frac{\frac{312}{1000}}{1-\frac{1}{1000}}=\frac{312}{999}=\frac{104}{333}$$

(2) $0.2\dot{5}=0.2555\cdots$

$$=0.2+0.05+0.005+0.0005+\cdots$$

$$=\frac{2}{10}+\frac{5}{100}+\frac{5}{1000}+\frac{5}{10000}+\cdots$$

$$=\frac{2}{10}+\frac{\frac{5}{100}}{1-\frac{1}{10}}=\frac{2}{10}+\frac{5}{90}=\frac{23}{90}$$

문제 **11-1** 답 $\frac{8}{9}$

첫째항을 $a\,(a>0)$, 공비를 $r\,(r>0)$라 하면

제2항이 $0.\dot{2}$이므로 $ar=\frac{2}{9} \quad \cdots\cdots ㉠$

제4항이 $0.0\dot{5}$이므로 $ar^3=\frac{5}{90} \quad \cdots\cdots ㉡$

㉠을 ㉡에 대입하면

$\frac{2}{9}r^2=\frac{5}{90}$, $r^2=\frac{1}{4}$

$\therefore r=\frac{1}{2}$ ($\because r>0$)

이를 ㉠에 대입하면

$\frac{1}{2}a=\frac{2}{9} \quad \therefore a=\frac{4}{9}$

따라서 구하는 등비급수의 합은

$$\frac{\frac{4}{9}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{8}{9}$$

개념편

유제 12 답 **2**

$\overline{A_1A_2}$를 $3:1$로 외분하는 점이 A_3이므로

$\overline{A_2A_3}=\frac{1}{2}\overline{A_1A_2}=\frac{1}{2}$

같은 방법으로 하면

$\overline{A_3A_4}=\frac{1}{2}\overline{A_2A_3}=\left(\frac{1}{2}\right)^2$

$\overline{A_4A_5}=\frac{1}{2}\overline{A_3A_4}=\left(\frac{1}{2}\right)^3$

$\vdots$

따라서 수열 $\{\overline{A_nA_{n+1}}\}$은 첫째항이 1, 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}\overline{A_nA_{n+1}}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$$

문제 12-1 답 **27 m**

공이 정지할 때까지 움직인 거리는

$$3+2\times3\times\frac{4}{5}+2\times3\times\left(\frac{4}{5}\right)^2+2\times3\times\left(\frac{4}{5}\right)^3+\cdots$$

$$=3+\frac{\frac{24}{5}}{1-\frac{4}{5}}$$

$$=27\,(\mathrm{m})$$

유제 13 답 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

점 P_n의 x좌표를 x_n이라 하면

$x_1=\overline{OP_1}\cos30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$x_2=x_1-\overline{P_1P_2}\cos30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}$

$x_3=x_2+\overline{P_2P_3}\cos30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\vdots$

$\therefore a=\lim_{n\to\infty}x_n$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\cdots$$

$$=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

점 P_n의 y좌표를 y_n이라 하면

$y_1=\overline{OP_1}\sin30^\circ=\frac{1}{2}$

$y_2=y_1+\overline{P_1P_2}\sin30^\circ=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2$

$y_3=y_2+\overline{P_2P_3}\sin30^\circ=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3$

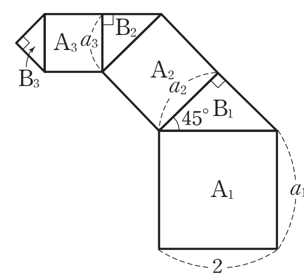
$\vdots$

$\therefore b=\lim_{n\to\infty}y_n=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots$

$$=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1$$

$\therefore ab=\frac{\sqrt{3}}{3}\times1=\frac{\sqrt{3}}{3}$

유제 14 답 **10**



오른쪽 그림에서 정사각형 A_n의 한 변의 길이를 a_n이라 하면 직각이등변삼각형 B_n의 빗변이 아닌 한 변의 길이는 a_{n+1}이므로

$a_2=a_1\cos45^\circ=2\times\frac{\sqrt{2}}{2}$

$a_3=a_2\cos45^\circ=2\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$

$a_4=a_3\cos45^\circ=2\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3$

$\vdots$

$a_n=2\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}$

이때 정사각형 A_n의 넓이를 S_n이라 하면

$S_n=\left\{2\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}\right\}^2=4\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{4}{1-\frac{1}{2}}=8$$

한편 직각이등변삼각형 B_n의 넓이를 T_n이라 하면

$T_n=\frac{1}{2}\times{a_{n+1}}^2=\frac{1}{2}\times\left\{2\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n\right\}^2=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}T_n=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$$

따라서 구하는 사각형과 삼각형의 넓이의 총합은

$$\sum_{n=1}^{\infty}S_n+\sum_{n=1}^{\infty}T_n=8+2=10$$

기본 연습문제 p.50~51

1 ④	**2** 1	**3** 발산	**4** $\frac{1}{2}$	**5** $\frac{37}{99}$
6 $\frac{1}{2}$	**7** 48	**8** 2	**9** 300 kg	**10** $\frac{\sqrt{3}}{3}$

1 ㄱ. $\lim_{n\to\infty}\frac{3n^3}{n^3+2}=3\neq 0$이므로 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n^3}{n^3+2}$은 발산한다.

ㄴ. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}-\frac{n+2}{n+3}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{k+1}-\frac{k+2}{k+3}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{2}-\cancel{\frac{3}{4}}\right)+\left(\frac{2}{3}-\cancel{\frac{4}{5}}\right)+\left(\cancel{\frac{3}{4}}-\cancel{\frac{5}{6}}\right)+\cdots+\left(\cancel{\frac{n-1}{n}}-\frac{n+1}{n+2}\right)+\left(\cancel{\frac{n}{n+1}}-\frac{n+2}{n+3}\right)\right\}$

$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{n+1}{n+2}-\frac{n+2}{n+3}\right)$

$=\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-1-1$

$=-\frac{5}{6}$

ㄷ. $\sum_{n=2}^{\infty}\log\frac{n^2}{n^2-1}$

$=\sum_{n=2}^{\infty}\log\frac{n\times n}{(n-1)(n+1)}$

$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n}\log\frac{k\times k}{(k-1)(k+1)}$

$=\lim_{n\to\infty}\left\{\log\frac{2\times 2}{1\times 3}+\log\frac{3\times 3}{2\times 4}+\log\frac{4\times 4}{3\times 5}+\cdots+\log\frac{n\times n}{(n-1)(n+1)}\right\}$

$=\lim_{n\to\infty}\log\left\{\frac{2\times\cancel{2}}{1\times\cancel{3}}\times\frac{\cancel{3}\times\cancel{3}}{\cancel{2}\times\cancel{4}}\times\frac{\cancel{4}\times\cancel{4}}{\cancel{3}\times\cancel{5}}\times\cdots\times\frac{\cancel{n}\times n}{\cancel{(n-1)}(n+1)}\right\}$

$=\lim_{n\to\infty}\log\frac{2n}{n+1}$

$=\log 2$

따라서 수렴하는 급수인 것은 ㄴ, ㄷ이다.

2 첫째항이 2, 공차가 2인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n은

$S_n=\frac{n\{2\times 2+(n-1)\times 2\}}{2}=n(n+1)$

$\therefore \frac{1}{S_n}=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{S_n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{S_k}$

$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1-\cancel{\frac{1}{2}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{4}}\right)+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{n}}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$

$=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$

$=1$

3 자연수 k에 대하여

(i) $n=2k$일 때

$S_{2k}=\left(\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{2}}\right)+\left(\cancel{\frac{2}{3}}-\cancel{\frac{2}{3}}\right)+\left(\cancel{\frac{3}{4}}-\cancel{\frac{3}{4}}\right)+\cdots+\left(\cancel{\frac{k}{k+1}}-\cancel{\frac{k}{k+1}}\right)$

$=0$

$\therefore \lim_{k\to\infty}S_{2k}=0$

(ii) $n=2k-1$일 때

$S_{2k-1}=\cancel{\frac{1}{2}}+\left(-\cancel{\frac{1}{2}}+\cancel{\frac{2}{3}}\right)+\left(-\cancel{\frac{2}{3}}+\cancel{\frac{3}{4}}\right)+\cdots+\left(-\cancel{\frac{k-1}{k}}+\frac{k}{k+1}\right)$

$=\frac{k}{k+1}$

$\therefore \lim_{k\to\infty}S_{2k-1}=\lim_{k\to\infty}\frac{k}{k+1}=1$

(i), (ii)에 의해 $\lim_{k\to\infty}S_{2k}\neq\lim_{k\to\infty}S_{2k-1}$이므로 주어진 급수는 발산한다.

4 $\frac{a_n}{n}-\alpha=b_n$이라 하면 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$이 82로 수렴하므로

$\lim_{n\to\infty}b_n=0$

또 $a_n=n(b_n+\alpha)$이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{3n}{2a_n-5}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n}{2n(b_n+\alpha)-5}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{2(b_n+\alpha)-\frac{5}{n}}$

$=\frac{3}{2(0+\alpha)-0}=\frac{3}{2\alpha}$

따라서 $\frac{3}{2\alpha}=3$이므로 $\alpha=\frac{1}{2}$

5 4^n의 일의 자리의 숫자는 차례로 4, 6, 4, 6, ⋯

9^n의 일의 자리의 숫자는 차례로 9, 1, 9, 1, ⋯

이때 4^n의 일의 자리의 숫자는 4, 6이 반복되고 9^n의 일의 자리의 숫자는 9, 1이 반복되므로 4^n+9^n의 일의 자리의 숫자는 3, 7이 반복된다.

즉, $\{a_n\}$: 3, 7, 3, 7, ⋯이므로

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{10^n}=\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+\frac{a_3}{10^3}+\frac{a_4}{10^4}+\cdots$

$=\frac{3}{10}+\frac{7}{10^2}+\frac{3}{10^3}+\frac{7}{10^4}+\cdots$

$=\left(\frac{3}{10}+\frac{3}{10^3}+\frac{3}{10^5}+\cdots\right)+\left(\frac{7}{10^2}+\frac{7}{10^4}+\frac{7}{10^6}+\cdots\right)$

$=\frac{\frac{3}{10}}{1-\frac{1}{100}}+\frac{\frac{7}{100}}{1-\frac{1}{100}}=\frac{37}{99}$

개념편

6 주어진 등비급수는 첫째항이 x, 공비가 $x(1-2x)$이고, 그 합이 $\frac{1}{2}$이므로

$$\frac{x}{1-x(1-2x)}=\frac{1}{2}$$

$1-x+2x^2=2x$, $2x^2-3x+1=0$

$(2x-1)(x-1)=0$ $\quad\therefore x=\frac{1}{2}$ 또는 $x=1$ ······ ㉠

한편 주어진 등비급수가 수렴하려면 $x=0$ 또는 $-1<x(1-2x)<1$이어야 하므로

(i) $-1<x(1-2x)$를 풀면

$2x^2-x-1<0$, $(2x+1)(x-1)<0$

$\therefore -\frac{1}{2}<x<1$

(ii) $x(1-2x)<1$을 풀면

$2x^2-x+1>0$, $2\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{7}{8}>0$

따라서 모든 실수 x에 대하여 성립한다.

따라서 주어진 등비급수가 수렴하기 위한 x의 값의 범위는

$-\frac{1}{2}<x<1$ ······ ㉡

따라서 ㉠, ㉡을 동시에 만족하는 x의 값은

$x=\frac{1}{2}$

7 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_2=-3$에서 $ar=-3$ ······ ㉠

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n=4$에서

$\frac{a}{1-r}=4$ $\quad\therefore a=4(1-r)$ ······ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$4r(1-r)=-3$, $4r^2-4r-3=0$

$(2r+1)(2r-3)=0$ $\quad\therefore r=-\frac{1}{2}$ 또는 $r=\frac{3}{2}$

이때 등비급수가 수렴하려면 $-1<r<1$이어야 하므로

$r=-\frac{1}{2}$

이를 ㉠에 대입하면

$-\frac{1}{2}a=-3$ $\quad\therefore a=6$

따라서 수열 $\{a_n^2\}$은 첫째항이 a^2, 공비가 r^2인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2=\frac{a^2}{1-r^2}=\frac{6^2}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^2}=48$$

8 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면

$$r=\frac{a_2}{a_1}=\frac{0.\dot{0}\dot{a}}{0.\dot{a}}=\frac{\frac{a}{99}}{\frac{a}{9}}=\frac{1}{11}$$

따라서 첫째항이 $\frac{a}{9}$, 공비가 $\frac{1}{11}$인 등비급수의 합이

$0.2\dot{4}=\frac{24-2}{90}=\frac{22}{90}$이므로

$$\frac{\frac{a}{9}}{1-\frac{1}{11}}=\frac{22}{90},\ \frac{11}{90}a=\frac{22}{90} \qquad \therefore a=2$$

9 n번째 수거하여 재생산된 비닐의 양을 $a_n$kg이라 하면

$a_1=200\times0.8\times0.75=200\times\frac{3}{5}$

$a_2=a_1\times0.8\times0.75=200\times\left(\frac{3}{5}\right)^2$

$a_3=a_2\times0.8\times0.75=200\times\left(\frac{3}{5}\right)^3$

$\vdots$

따라서 재생산되는 비닐의 총량은

$$a_1+a_2+a_3+\cdots=\frac{200\times\frac{3}{5}}{1-\frac{3}{5}}=300\,(\text{kg})$$

10 정삼각형 $A_nB_nC_n$과 $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$은 닮은 도형이고 대응하는 변의 길이의 비가 $2:1$이므로 넓이의 비는 $4:1$이다.

$\therefore S_{n+1}=\frac{1}{4}S_n$

이때 정삼각형 $A_1B_1C_1$의 한 변의 길이는 $2\times\frac{1}{2}=1$이므로

$S_1=\frac{\sqrt{3}}{4}\times1^2=\frac{\sqrt{3}}{4}$

따라서 수열 $\{S_n\}$은 첫째항이 $\frac{\sqrt{3}}{4}$, 공비가 $\frac{1}{4}$인 등비수열이므로

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} S_k=\sum_{n=1}^{\infty} S_n=\frac{\frac{\sqrt{3}}{4}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

다른 풀이

정삼각형의 넓이 S_1, S_2, S_3, $\cdots$을 구하면

$S_1=\frac{\sqrt{3}}{4}\times1^2=\frac{\sqrt{3}}{4}$, $S_2=\frac{1}{4}S_1=\frac{\sqrt{3}}{4}\times\frac{1}{4}$,

$S_3=\frac{1}{4}S_2=\frac{\sqrt{3}}{4}\times\left(\frac{1}{4}\right)^2$, $\cdots$

따라서 수열 $\{S_n\}$은 첫째항이 $\frac{\sqrt{3}}{4}$, 공비가 $\frac{1}{4}$인 등비수열이므로

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} S_k=\sum_{n=1}^{\infty} S_n=\frac{\frac{\sqrt{3}}{4}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

실전 연습문제 p.52

1 3　　**2** -1　　**3** ㄱ, ㄴ　　**4** 7

1 $S_n=a_n+\dfrac{6n+5}{2n+1}$에서

$S_n-a_n=\dfrac{6n+5}{2n+1}\ (n\ge 2)$

$a_n=S_n-S_{n-1}\ (n\ge 2)$이므로

$S_n-a_n=S_{n-1}$

$\therefore S_{n-1}=\dfrac{6n+5}{2n+1}\ (n\ge 2)$ …… ㉠

㉠에 n 대신 $n+1$을 대입하면

$S_n=\dfrac{6(n+1)+5}{2(n+1)+1}$

$=\dfrac{6n+11}{2n+3}$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}S_n$

$=\lim_{n\to\infty}\dfrac{6n+11}{2n+3}$

$=3$

2 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$이 1로 수렴하므로

$\lim_{n\to\infty}a_n=0$

$\therefore \lim_{n\to\infty}a_{n+1}=0$ …… ㉠

또 $\lim_{n\to\infty}na_n=0$이므로

$\lim_{n\to\infty}(n+1)a_{n+1}=0$ …… ㉡

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}n(a_{n+1}-a_n)$의 제$n$항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$S_n=1(a_2-a_1)+2(a_3-a_2)+3(a_4-a_3)$
$+\cdots+(n-1)(a_n-a_{n-1})+n(a_{n+1}-a_n)$

$=a_2+2a_3+3a_4+\cdots+(n-1)a_n+na_{n+1}$
$-a_1-2a_2-3a_3-\cdots-(n-1)a_{n-1}-na_n$

$=-(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n)+na_{n+1}$

$=-\sum_{k=1}^{n}a_k+(n+1)a_{n+1}-a_{n+1}$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}n(a_{n+1}-a_n)$

$=\lim_{n\to\infty}S_n$

$=\lim_{n\to\infty}\left\{-\sum_{k=1}^{n}a_k+(n+1)a_{n+1}-a_{n+1}\right\}$

$=-\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_k+\lim_{n\to\infty}(n+1)a_{n+1}-\lim_{n\to\infty}a_{n+1}$

$=-1+0-0$

$=-1$

3 ㄱ. 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면 등비수열 $\{a_n^3\}$의 공비는 r^3이다.

이때 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^3$이 수렴하므로

$-1<r^3<1$　　$\therefore -1<r<1$

따라서 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$도 수렴한다.

ㄴ. $\lim_{n\to\infty}a_n=0$이면 수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 0이거나

$-1<$(공비)<1이므로 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$은 수렴한다.

ㄷ. [반례] $a_n=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$, $b_n=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$이라 하면

$\alpha=\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{2}}=2$

$\beta=\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{3}}=\dfrac{3}{2}$

$\therefore \alpha\beta=2\times\dfrac{3}{2}=3$

이때 $a_nb_n=\left(\dfrac{1}{6}\right)^{n-1}$이므로

$\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n=\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{6}}=\dfrac{6}{5}$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n\ne\alpha\beta$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

4 이차함수 $y=2x^2+3x-6$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표는 이차방정식 $2x^2+3x-6=0$의 근이므로 근과 계수의 관계에 의해

$\alpha+\beta=-\dfrac{3}{2}$, $\alpha\beta=-3$

한편 주어진 그래프에서 $\alpha<-1$, $\beta>1$이므로

$-1<\dfrac{1}{\alpha}<0$, $0<\dfrac{1}{\beta}<1$

따라서 $\left|\dfrac{1}{\alpha}\right|<1$, $\left|\dfrac{1}{\beta}\right|<1$이므로 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\alpha^n}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\beta^n}$은 각각 수렴한다.

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{\alpha^n}+\dfrac{1}{\beta^n}\right)$

$=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\alpha^n}+\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\beta^n}=\dfrac{\dfrac{1}{\alpha}}{1-\dfrac{1}{\alpha}}+\dfrac{\dfrac{1}{\beta}}{1-\dfrac{1}{\beta}}$

$=\dfrac{1}{\alpha-1}+\dfrac{1}{\beta-1}=\dfrac{(\alpha+\beta)-2}{\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1}$

$=\dfrac{-\dfrac{3}{2}-2}{-3-\left(-\dfrac{3}{2}\right)+1}=7$

개념편

01 지수함수와 로그함수의 극한

1 개념 CHECK p.55

1. 답 (1) ∞ (2) $\mathbf{0}$ (3) $\mathbf{0}$ (4) ∞ (5) $\mathbf{9}$ (6) $\mathbf{4}$

2. 답 (1) ∞ (2) $-\infty$ (3) $-\infty$ (4) ∞ (5) $-\mathbf{1}$ (6) $-\mathbf{2}$

1 유제 & 문제 p.56~57

유제 01 답 (1) $\mathbf{0}$ (2) $\mathbf{5}$ (3) ∞ (4) $\mathbf{4}$ (5) $-\mathbf{2}$ (6) $-\mathbf{1}$

(1) 분모, 분자를 4^x으로 각각 나누면

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3^x}{4^x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^x}{1-\left(\frac{1}{4}\right)^x}=\frac{0}{1-0}=0$$

(2) 분모, 분자를 5^x으로 각각 나누면

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3^x+5^{x+1}}{5^x-3^{x+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\frac{3}{5}\right)^x+5}{1-3\times\left(\frac{3}{5}\right)^x}$$

$$=\frac{0+5}{1-3\times0}=5$$

(3) 주어진 식을 5^x으로 묶으면

$$\lim_{x\to\infty}(5^x-4^{x+1})=\lim_{x\to\infty}5^x\left\{1-4\times\left(\frac{4}{5}\right)^x\right\}=\infty$$

(4) 주어진 식을 4^x으로 묶으면

$$\lim_{x\to\infty}(2^{2x+1}-3^x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\left[4^x\left\{2-\left(\frac{3}{4}\right)^x\right\}\right]^{\frac{1}{x}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}4\left\{2-\left(\frac{3}{4}\right)^x\right\}^{\frac{1}{x}}$$

$$=4\times1=4$$

(5) $-x=t$로 놓으면 $x=-t$이고, $x\to-\infty$일 때 $t\to\infty$이므로

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{4^x+2}{3^x-1}=\lim_{t\to\infty}\frac{4^{-t}+2}{3^{-t}-1}=\lim_{t\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^t+2}{\left(\frac{1}{3}\right)^t-1}$$

$$=\frac{0+2}{0-1}=-2$$

(6) $-x=t$로 놓으면 $x=-t$이고, $x\to-\infty$일 때 $t\to\infty$이므로

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2^x+2^{-x}}{2^x-2^{-x}}=\lim_{t\to\infty}\frac{2^{-t}+2^t}{2^{-t}-2^t}=\lim_{t\to\infty}\frac{2^{-2t}+1}{2^{-2t}-1}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^t+1}{\left(\frac{1}{4}\right)^t-1}=\frac{0+1}{0-1}=-1$$

문제 01-1 답 $\mathbf{\frac{5}{9}}$

주어진 식의 좌변의 분모, 분자를 9^x으로 각각 나누면

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a\times3^{2x+1}+2^{x-1}}{9^{x-1}-2^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{3a+\frac{1}{2}\times\left(\frac{2}{9}\right)^x}{\frac{1}{9}-\left(\frac{2}{9}\right)^x}=\frac{3a}{\frac{1}{9}}=27a$$

따라서 $27a=15$이므로 $a=\frac{5}{9}$

유제 02 답 (1) $\mathbf{2}$ (2) $\mathbf{1}$ (3) $\mathbf{1}$ (4) $-\mathbf{1}$

(1) $\lim_{x\to\infty}\left\{\log_3(9x+2)+\log_3\frac{1}{x-1}\right\}$

$$=\lim_{x\to\infty}\log_3\frac{9x+2}{x-1}$$

$$=\log_3\lim_{x\to\infty}\frac{9x+2}{x-1}$$

$$=\log_3 9=2$$

(2) $\lim_{x\to\infty}\{\log(10x^2+1)-\log x^2\}$

$$=\lim_{x\to\infty}\log\frac{10x^2+1}{x^2}$$

$$=\log\lim_{x\to\infty}\frac{10x^2+1}{x^2}$$

$$=\log 10=1$$

(3) $\lim_{x\to1+}\{\log_2(x^2-1)-\log_2(x-1)\}$

$$=\lim_{x\to1+}\log_2\frac{x^2-1}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1+}\log_2\frac{(x+1)(x-1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1+}\log_2(x+1)$$

$$=\log_2\lim_{x\to1+}(x+1)$$

$$=\log_2 2=1$$

(4) $\lim_{x\to2}(\log_3|x^2-4|-\log_3|x^3-8|)$

$$=\lim_{x\to2}\log_3\left|\frac{x^2-4}{x^3-8}\right|$$

$$=\lim_{x\to2}\log_3\left|\frac{(x+2)(x-2)}{(x-2)(x^2+2x+4)}\right|$$

$$=\lim_{x\to2}\log_3\left|\frac{x+2}{x^2+2x+4}\right|$$

$$=\log_3\lim_{x\to2}\left|\frac{x+2}{x^2+2x+4}\right|$$

$$=\log_3\frac{1}{3}=-1$$

문제 02-1 답 $\mathbf{100}$

$$\lim_{x\to\infty}\{\log(ax+1)-\log(x-1)\}=\lim_{x\to\infty}\log\frac{ax+1}{x-1}$$

$$=\log\lim_{x\to\infty}\frac{ax+1}{x-1}$$

$$=\log a$$

따라서 $\log a=2$이므로 $a=100$

2 개념 CHECK p.59

1. 답 (1) e^2 (2) e^4

(1) $\frac{1}{x}=\frac{1}{2x}\times 2$로 바꾸면

$$\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\{(1+2x)^{\frac{1}{2x}}\}^2=e^2$$

(2) $$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{4x}=\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right\}^4=e^4$$

2. 답 (1) $\frac{1}{2}$ (2) 3 (3) $\frac{1}{\ln 3}$ (4) $\ln 5$

(1) $$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}\times\frac{1}{2}=1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

(2) $$\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{3x}\times 3=1\times 3=3$$

2 유제 & 문제 p.60~64

유제 03 답 (1) $\sqrt{e}$ (2) $\frac{1}{e^2}$ (3) e^4 (4) e^2 (5) $\frac{1}{e\sqrt{e}}$ (6) $\frac{1}{e}$

(1) $$\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{4x}}=\lim_{x\to 0}\{(1+2x)^{\frac{1}{2x}}\}^{\frac{1}{2}}=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$$

(2) $$\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{x}{3}\right)^{-\frac{6}{x}}=\lim_{x\to 0}\left\{\left(1+\frac{x}{3}\right)^{\frac{3}{x}}\right\}^{-2}=e^{-2}=\frac{1}{e^2}$$

(3) $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x}{3x+2}\right)^{-6x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+2}{3x}\right)^{6x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{3x}\right)^{6x}=\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1+\frac{2}{3x}\right)^{\frac{3x}{2}}\right\}^4=e^4$$

(4) $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x-2}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x}\right)^{-x}=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^{-x}=\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1-\frac{2}{x}\right)^{-\frac{x}{2}}\right\}^2=e^2$$

(5) $-x=t$로 놓으면 $x=-t$이고, $x\to-\infty$일 때 $t\to\infty$이므로

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{1}{2x}\right)^{3x}=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{2t}\right)^{-3t}=\lim_{t\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{2t}\right)^{2t}\right\}^{-\frac{3}{2}}=e^{-\frac{3}{2}}=\frac{1}{e\sqrt{e}}$$

(6) $x-1=t$로 놓으면 $x=1+t$이고, $x\to 1$일 때 $t\to 0$이므로

$$\lim_{x\to 1}x^{\frac{1}{1-x}}=\lim_{t\to 0}(1+t)^{-\frac{1}{t}}=\lim_{t\to 0}\{(1+t)^{\frac{1}{t}}\}^{-1}=e^{-1}=\frac{1}{e}$$

유제 04 답 (1) $\frac{1}{2}$ (2) 1 (3) 1 (4) 1

(1) $$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{\ln(1+2x)}=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{\ln(1+x)}{x}\times\frac{2x}{\ln(1+2x)}\times\frac{1}{2}\right\}=1\times 1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

(2) $$\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-e^{2x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1-e^{2x}+1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{3x}\times 3-\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{2x}\times 2=1\times 3-1\times 2=1$$

(3) $x+1=t$로 놓으면 $x=-1+t$이고, $x\to-1$일 때 $t\to 0$이므로

$$\lim_{x\to -1}\frac{\ln(x+2)}{x+1}=\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t}=1$$

(4) $x-1=t$로 놓으면 $x=t+1$이고, $x\to 1$일 때 $t\to 0$이므로

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-e^{x-1}}{x-1}=\lim_{t\to 0}\frac{(t+1)^2-e^t}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{t^2+2t+1-e^t}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{t^2+2t-(e^t-1)}{t}$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{t^2+2t}{t}-\lim_{t\to 0}\frac{e^t-1}{t}=\lim_{t\to 0}(t+2)-\lim_{t\to 0}\frac{e^t-1}{t}=2-1=1$$

문제 04-1 답 $\frac{1}{2}$

$$\lim_{x\to\infty}x\{\ln(2x+1)-\ln 2x\}=\lim_{x\to\infty}\ln\left(\frac{2x+1}{2x}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{2x}\right)^x$$
$$=\ln\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{2x}\right\}^{\frac{1}{2}}=\ln e^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$$

개념편

유제 05 답 (1) $\ln 6$ (2) $\dfrac{\ln 5}{\ln 3}$

(1) $\lim_{x\to 0}\dfrac{2^x-3^{-x}}{x}=\lim_{x\to 0}\dfrac{2^x-1-3^{-x}+1}{x}$

$=\lim_{x\to 0}\dfrac{2^x-1}{x}-\lim_{x\to 0}\dfrac{3^{-x}-1}{x}$

$=\ln 2-\ln\dfrac{1}{3}=\ln 2+\ln 3=\ln 6$

(2) $\lim_{x\to 0}\dfrac{(5^x-1)\log_3(1+2x)}{2x^2}$

$=\lim_{x\to 0}\left\{\dfrac{5^x-1}{x}\times\dfrac{\log_3(1+2x)}{2x}\right\}=\ln 5\times\dfrac{1}{\ln 3}=\dfrac{\ln 5}{\ln 3}$

문제 05-1 답 (1) $\dfrac{1}{\ln 2}$ (2) $\ln a+2$

(1) $x-3=t$로 놓으면 $x=3+t$이고, $x\to 3$일 때 $t\to 0$ 이므로

$\lim_{x\to 3}\dfrac{\log_2(x-2)}{x-3}=\lim_{t\to 0}\dfrac{\log_2(1+t)}{t}=\dfrac{1}{\ln 2}$

(2) $x+1=t$로 놓으면 $x=t-1$이고, $x\to -1$일 때 $t\to 0$이므로

$\lim_{x\to -1}\dfrac{a^{x+1}-x^2}{x+1}=\lim_{t\to 0}\dfrac{a^t-(t-1)^2}{t}$

$=\lim_{t\to 0}\dfrac{a^t-(t^2-2t+1)}{t}$

$=\lim_{t\to 0}\dfrac{a^t-1}{t}-\lim_{t\to 0}\dfrac{t^2-2t}{t}$

$=\lim_{t\to 0}\dfrac{a^t-1}{t}-\lim_{t\to 0}(t-2)$

$=\ln a+2$

유제 06 답 1

$\lim_{x\to 0}(x^2+bx)=0$이고 극한값이 존재하므로

$\lim_{x\to 0}\ln(a+5x)=0\qquad\therefore a=1$

이를 주어진 식의 좌변에 대입하면

$\lim_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+5x)}{x^2+bx}=\lim_{x\to 0}\left\{\dfrac{\ln(1+5x)}{5x}\times\dfrac{5}{x+b}\right\}$

$=1\times\dfrac{5}{b}=\dfrac{5}{b}$

따라서 $\dfrac{5}{b}=5$이므로 $b=1$

$\therefore ab=1\times 1=1$

문제 06-1 답 4

$\lim_{x\to 0}\ln(ax+1)=0$이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로

$\lim_{x\to 0}(e^{bx+c}-1)=0$, $e^c-1=0\qquad\therefore c=0$

이를 주어진 식의 좌변에 대입하면

$\lim_{x\to 0}\dfrac{\ln(ax+1)}{e^{bx}-1}=\lim_{x\to 0}\left\{\dfrac{\ln(1+ax)}{ax}\times\dfrac{bx}{e^{bx}-1}\times\dfrac{a}{b}\right\}$

$=1\times 1\times\dfrac{a}{b}=\dfrac{a}{b}$

따라서 $\dfrac{a}{b}=4$이므로 $a=4b$

$\therefore\ \dfrac{a}{b+c}=\dfrac{4b}{b+0}=4$

문제 06-2 답 2

$\lim_{x\to -1}(x^2-1)=0$이고 극한값이 존재하므로

$\lim_{x\to -1}\{a\ln(x+2)+b\}=0\qquad\therefore b=0$

이를 주어진 식의 좌변에 대입하면

$\lim_{x\to -1}\dfrac{a\ln(x+2)}{x^2-1}=-1$

이때 $x+1=t$로 놓으면 $x=t-1$이고, $x\to -1$일 때 $t\to 0$이므로

$\lim_{x\to -1}\dfrac{a\ln(x+2)}{x^2-1}=\lim_{t\to 0}\dfrac{a\ln(1+t)}{(t-1)^2-1}$

$=\lim_{t\to 0}\dfrac{a\ln(1+t)}{t(t-2)}$

$=\lim_{t\to 0}\left\{\dfrac{\ln(1+t)}{t}\times\dfrac{a}{t-2}\right\}$

$=1\times\left(-\dfrac{a}{2}\right)=-\dfrac{a}{2}$

따라서 $-\dfrac{a}{2}=-1$이므로 $a=2$

$\therefore a+b=2+0=2$

유제 07 답 50

$A(1, 0)$, $P(x, \ln x)$이고 점 Q의 좌표가 $(x, 0)$이므로

$\overline{AQ}=|x-1|$, $\overline{PQ}=|\ln x|$

$\therefore S(x)=\dfrac{1}{2}\times\overline{AQ}\times\overline{PQ}$

$=\dfrac{1}{2}\times|x-1|\times|\ln x|$

따라서 $x\to 1+$일 때 $x-1>0$, $\ln x>0$이므로

$\lim_{x\to 1+}\dfrac{100S(x)}{(x-1)^2}=\lim_{x\to 1+}\dfrac{50(x-1)\ln x}{(x-1)^2}$

$=50\lim_{x\to 1+}\dfrac{\ln x}{x-1}$

이때 $x-1=t$로 놓으면 $x=1+t$이고, $x\to 1+$일 때 $t\to 0+$이므로

$50\lim_{x\to 1+}\dfrac{\ln x}{x-1}=50\lim_{t\to 0+}\dfrac{\ln(1+t)}{t}=50\times 1=50$

문제 07-1 답 $\sqrt{e}$

직선 OP의 기울기가 $f(t)$이므로

$f(t)=\dfrac{\log_a(t+1)}{t}$

따라서 $\lim_{t\to 0}\dfrac{\log_a(t+1)}{t}=2$이므로

$\dfrac{1}{\ln a}=2$, $\ln a=\dfrac{1}{2}$

$\therefore a=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$

유제 08 답 (1) $y'=5e^x$

(2) $y'=(x^3+3x^2+4)e^x-9x^2$

(3) $y'=2\times3^{2x+1}\ln3$

(4) $y'=6^x\ln6+e^{x+2}$

(1) $y'=(e^x\times e^{\ln5})'=(5e^x)'$

$=5(e^x)'=5e^x$

(2) $y'=(e^x-3)'(x^3+4)+(e^x-3)(x^3+4)'$

$=e^x(x^3+4)+(e^x-3)3x^2$

$=(x^3+3x^2+4)e^x-9x^2$

(3) $y'=(3\times9^x)'=3(9^x)'$

$=3\times9^x\ln9$

$=3\times3^{2x}\ln3^2$

$=2\times3^{2x+1}\ln3$

(4) $y'=(6^x+e^x\times e^2)'$

$=(6^x)'+e^2(e^x)'$

$=6^x\ln6+e^2e^x$

$=6^x\ln6+e^{x+2}$

문제 08-1 답 $2e+\dfrac{\ln3}{3}$

$f(x)=2e^{x+2}+3^x=2e^2\times e^x+3^x$이므로

$f'(x)=2e^2(e^x)'+(3^x)'$

$=2e^2\times e^x+3^x\ln3$

$=2e^{x+2}+3^x\ln3$

$\therefore f'(-1)=2e+\dfrac{\ln3}{3}$

문제 08-2 답 $a=-1,\ b=1$

$f(x)=(x+a)e^{x+b}=e^b(x+a)e^x$이므로

$f'(x)=e^b\{(x+a)'e^x+(x+a)(e^x)'\}$

$=e^b\{e^x+(x+a)e^x\}$

$=e^{b+x}(x+a+1)$

$f'(0)=0$에서

$e^b(a+1)=0 \qquad \therefore a=-1\ (\because e^b>0)$

$f'(-1)=-1$에서

$e^{b-1}\times a=-1,\ -e^{b-1}=-1$

$e^{b-1}=1,\ b-1=0 \qquad \therefore b=1$

유제 09 답 (1) $y'=3\ln x+\dfrac{2}{x}+3$

(2) $y'=e^x\left(\ln2x+\dfrac{1}{x}\right)$

(3) $y'=\log_2x+\dfrac{1}{\ln2}+1$

(4) $y'=e^{x+1}+\dfrac{1}{x\ln2}$

(1) $y'=(3x+2)'\ln x+(3x+2)(\ln x)'$

$=3\ln x+(3x+2)\times\dfrac{1}{x}$

$=3\ln x+\dfrac{2}{x}+3$

(2) $y'=\{e^x(\ln2+\ln x)\}'$

$=(e^x)'(\ln2+\ln x)+e^x(\ln2+\ln x)'$

$=e^x(\ln2+\ln x)+e^x\times\dfrac{1}{x}$

$=e^x\left(\ln2x+\dfrac{1}{x}\right)$

(3) $y'=\{x(\log_2x+1)\}'$

$=(x)'(\log_2x+1)+x(\log_2x+1)'$

$=1\times(\log_2x+1)+x\times\dfrac{1}{x\ln2}$

$=\log_2x+\dfrac{1}{\ln2}+1$

(4) $y'=(e\times e^x+\log_23+\log_2x)'$

$=e(e^x)'+(\log_23)'+(\log_2x)'$

$=e\times e^x+\dfrac{1}{x\ln2}$

$=e^{x+1}+\dfrac{1}{x\ln2}$

문제 09-1 답 $4e^2$

$f(x)=x^3\ln x$라 하면

$f'(x)=(x^3)'\ln x+x^3(\ln x)'$

$=3x^2\ln x+x^3\times\dfrac{1}{x}$

$=x^2(3\ln x+1)$

따라서 점 $(e,\ e^3)$에서의 접선의 기울기는

$f'(e)=e^2(3\ln e+1)=4e^2$

유제 10 답 $2e^3\left(1+\dfrac{1}{3\ln3}\right)$

$\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(3+h)-f(3-h)}{h}$

$\displaystyle=\lim_{h\to0}\frac{f(3+h)-f(3)+f(3)-f(3-h)}{h}$

$\displaystyle=\lim_{h\to0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}+\lim_{h\to0}\frac{f(3-h)-f(3)}{-h}$

$=f'(3)+f'(3)$

$=2f'(3)$

함수 $f(x)=e^x\log_3x$를 미분하면

$f'(x)=(e^x)'\log_3x+e^x(\log_3x)'$

$=e^x\log_3x+\dfrac{e^x}{x\ln3}$

$=e^x\left(\log_3x+\dfrac{1}{x\ln3}\right)$

$\therefore 2f'(3)=2e^3\left(1+\dfrac{1}{3\ln3}\right)$

문제 **10**-1 답 $\frac{1}{\ln 2}-3$

$f(x)=\log_2 4x-3x+1$에서 $f(1)=0$이므로

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$$

이때 $f(x)=\log_2 4x-3x+1=3+\log_2 x-3x$이므로

$$f'(x)=\frac{1}{x\ln 2}-3$$

$$\therefore f'(1)=\frac{1}{\ln 2}-3$$

문제 **10**-2 답 3

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)+2}{x-1}=b$에서 $\lim_{x\to1}(x-1)=0$이고 극한값이 존재하므로

$\lim_{x\to1}\{f(x)+2\}=0 \qquad \therefore f(1)=-2$

$f(1)=-2$에서 $1-a=-2 \qquad \therefore a=3$

$$\therefore \lim_{x\to1}\frac{f(x)+2}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=b$$

함수 $f(x)=x\ln x+x^2-ax$를 미분하면

$$f'(x)=\ln x+x\times\frac{1}{x}+2x-a=\ln x+2x+1-a$$

$f'(1)=b$에서 $3-a=b \qquad \therefore b=0\ (\because a=3)$

$\therefore a-b=3$

유제 **11** 답 $6\ln 3-3$

$f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하면 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to1+}3^x=\lim_{x\to1-}(ax+b)=f(1)$

$\therefore a+b=3$ …… ㉠

또 $f'(1)$이 존재하므로 $f'(x)=\begin{cases}3^x\ln 3 & (x>1)\\ a & (x<1)\end{cases}$에서

$\lim_{x\to1+}3^x\ln 3=\lim_{x\to1-}a \qquad \therefore a=3\ln 3$

이를 ㉠에 대입하여 풀면 $b=3-3\ln 3$

$\therefore a-b=3\ln 3-(3-3\ln 3)=6\ln 3-3$

문제 **11**-1 답 $-e$

$f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하면 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to1+}\ln ax=\lim_{x\to1-}e^{x+b}=f(1)$

$\therefore \ln a=e^{1+b}$ …… ㉠

또 $f'(1)$이 존재하므로 $f'(x)=\begin{cases}\frac{1}{x} & (x>1)\\ e^{x+b} & (x<1)\end{cases}$에서

$\lim_{x\to1+}\frac{1}{x}=\lim_{x\to1-}e^{x+b} \qquad \therefore 1=e^{1+b}$

$1+b=0 \qquad \therefore b=-1$

이를 ㉠에 대입하면 $\ln a=1 \qquad \therefore a=e$

$\therefore ab=e\times(-1)=-e$

기본 연습문제 p.70~71

1 ㄴ, ㄷ	**2** $\sqrt{e}$	**3** $\frac{3}{4}$	**4** 2	**5** 1
6 ③	**7** ③	**8** e^{e-1}	**9** $15e^2+3e^{e^2+1}$	
10 3				

1 ㄱ. 분모, 분자를 3^x으로 각각 나누면

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1+2^x}{1-3^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^x+\left(\frac{2}{3}\right)^x}{\left(\frac{1}{3}\right)^x-1}=\frac{0+0}{0-1}=0$$

ㄴ. 주어진 식을 8^x으로 묶으면

$$\lim_{x\to\infty}(8^x+3^x)^{\frac{1}{3x}}=\lim_{x\to\infty}\left[8^x\left\{1+\left(\frac{3}{8}\right)^x\right\}\right]^{\frac{1}{3x}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}2\left\{1+\left(\frac{3}{8}\right)^x\right\}^{\frac{1}{3x}}$$

$$=2\times1=2$$

ㄷ. $\lim_{x\to\infty}\log_3\frac{6x}{2x+5}=\log_3\lim_{x\to\infty}\frac{6x}{2x+5}$

$$=\log_3 3=1$$

ㄹ. $\lim_{x\to3}(\log_2|x^3-27|-\log_2|x^2-9|)$

$$=\lim_{x\to3}\log_2\left|\frac{x^3-27}{x^2-9}\right|$$

$$=\lim_{x\to3}\log_2\left|\frac{(x-3)(x^2+3x+9)}{(x+3)(x-3)}\right|$$

$$=\log_2\lim_{x\to3}\left|\frac{x^2+3x+9}{x+3}\right|$$

$$=\log_2\frac{9}{2}=2\log_2 3-1$$

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

2 $\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\left(1+\frac{1}{n+2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2n}\right)\right\}^n$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\times\frac{\cancel{n+1}}{n}\times\frac{\cancel{n+2}}{\cancel{n+1}}\times\frac{\cancel{n+3}}{\cancel{n+2}}\times\cdots\times\frac{2n+1}{\cancel{2n}}\right)^n$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{2n}\right)^n$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$$

3 $\lim_{x\to0}\frac{\ln(ax+1)}{x^3+2x}=\lim_{x\to0}\left\{\frac{\ln(1+ax)}{ax}\times\frac{a}{x^2+2}\right\}$

$$=1\times\frac{a}{2}=\frac{a}{2}$$

따라서 $\frac{a}{2}=2$이므로 $a=4$

$$\therefore \lim_{x\to0}\frac{\ln(3x+1)}{ax}=\lim_{x\to0}\frac{\ln(3x+1)}{4x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+3x)}{3x}\times\frac{3}{4}$$
$$=1\times\frac{3}{4}=\frac{3}{4}$$

4 $y=\log_2(x+1)$의 역함수를 구하면

$x+1=2^y$, $x=2^y-1$

$\therefore g(x)=2^x-1$

$$\therefore \lim_{x\to0}\frac{f(x)\{g(2x)-g(0)\}}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\log_2(x+1)\times(2^{2x}-1-0)}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{\log_2(1+x)}{x}\times\frac{4^x-1}{x}\right\}$$
$$=\frac{1}{\ln 2}\times\ln 4$$
$$=\frac{1}{\ln 2}\times 2\ln 2=2$$

5 $\lim_{x\to0}(e^x-1)\ln(1+x)=0$이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로

$\lim_{x\to0}(ax^2+b)=0 \qquad \therefore b=0$

이를 주어진 식에 대입하면

$$\lim_{x\to0}\frac{(e^x-1)\ln(1+x)}{ax^2}=\frac{1}{a}\lim_{x\to0}\left\{\frac{e^x-1}{x}\times\frac{\ln(1+x)}{x}\right\}$$
$$=\frac{1}{a}\times1\times1=\frac{1}{a}$$

따라서 $\frac{1}{a}=2$이므로 $a=\frac{1}{2}$

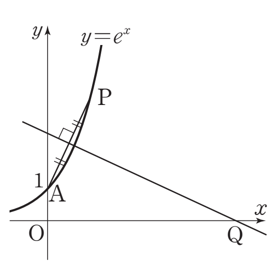
$\therefore 2a+b=2\times\frac{1}{2}+0=1$

6 점 P의 좌표를 $(t,\ e^t)$이라 하면 $\overline{\text{AP}}$의 중점의 좌표는

$\left(\frac{t}{2},\ \frac{e^t+1}{2}\right)$

이때 $\overline{\text{AP}}$의 기울기는

$\frac{e^t-1}{t}$이므로



점 $\left(\frac{t}{2},\ \frac{e^t+1}{2}\right)$을 지나고 $\overline{\text{AP}}$에 수직인 직선의 방정식은

$$y-\frac{e^t+1}{2}=-\frac{t}{e^t-1}\left(x-\frac{t}{2}\right)$$

이 직선과 x축의 교점 Q의 x좌표를 구하면

$$-\frac{e^t+1}{2}=-\frac{t}{e^t-1}\left(x-\frac{t}{2}\right)$$
$$\frac{e^{2t}-1}{2t}=x-\frac{t}{2}$$
$$\therefore x=\frac{e^{2t}-1}{2t}+\frac{t}{2}$$

이때 점 P가 점 A에 한없이 가까워지므로 $t\to0$이고, 점 Q는 x축 위의 점이므로 점 Q의 x좌표의 극한값을 구하면

$$\lim_{t\to0}\left(\frac{e^{2t}-1}{2t}+\frac{t}{2}\right)=1+0=1$$

따라서 점 Q가 한없이 가까워지는 점의 좌표는 (1, 0)이다.

7 ① $(e^{x+3})'=e^3(e^x)'$
$=e^3\times e^x=e^{x+3}$

② $(x^2e^x)'=(x^2)'e^x+x^2(e^x)'$
$=2xe^x+x^2e^x=(x^2+2x)e^x$

③ $(\ln 5x)'=(\ln 5+\ln x)'$
$=\frac{1}{x}$

④ $(\log_2 x)'=\frac{1}{x\ln 2}$

⑤ $(x\log x)=(x)'(\log x)+x(\log x)'$
$=\log x+x\times\frac{1}{x\ln 10}$
$=\log x+\frac{1}{\ln 10}$

따라서 옳지 않은 것은 ③이다.

8 $f(x)=e^x\ln x$에서

$f'(x)=(e^x)'\ln x+e^x(\ln x)'$
$=e^x\ln x+\frac{e^x}{x}$

$\therefore f'(e)-f(e)=e^e+\frac{e^e}{e}-e^e$
$=\frac{e^e}{e}$
$=e^{e-1}$

9
$$\lim_{h\to0}\frac{f(e^2+2h)-f(e^2-h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(e^2+2h)-f(e^2)+f(e^2)-f(e^2-h)}{h}$$
$$=2\lim_{h\to0}\frac{f(e^2+2h)-f(e^2)}{2h}+\lim_{h\to0}\frac{f(e^2-h)-f(e^2)}{-h}$$
$$=2f'(e^2)+f'(e^2)$$
$$=3f'(e^2)$$

함수 $f(x)=x^2\ln x+e^{x+1}=x^2\ln x+e\times e^x$을 미분하면

$f'(x)=2x\ln x+x^2\times\frac{1}{x}+e\times e^x$
$=2x\ln x+x+e^{x+1}$

$\therefore 3f'(e^2)=3(4e^2+e^2+e^{e^2+1})$
$=15e^2+3e^{e^2+1}$

10 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하면 $x=1$에서 연속이므로

$\lim\limits_{x\to1+}(a\ln x+b)=\lim\limits_{x\to1-}(2^x-1)=f(1)$

$\therefore b=1$

또 $f'(1)$이 존재하므로

$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{a}{x} & (x>1)\\ 2^x\ln 2 & (x<1)\end{cases}$에서 $a=2\ln 2=\ln 4$

$\therefore e^a-b=e^{\ln 4}-1=4-1=3$

실전 연습문제

p.72

1 10 **2** ㄱ, ㄴ **3** 6 **4** 10

1 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x+e^{2x}+e^{3x}+\cdots+e^{nx}-n}{x}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1+e^{2x}-1+e^{3x}-1+\cdots+e^{nx}-1}{x}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{x}+2\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{2x}-1}{2x}+3\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{3x}-1}{3x}+\cdots+n\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{nx}-1}{nx}$

$=1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$

따라서 $\dfrac{n(n+1)}{2}=55$이므로

$n(n+1)=110 \qquad \therefore n=10$

2 ㄱ. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=1$에서 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{f(x)}=1$이므로

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{g(x)}=\lim\limits_{x\to0}\left\{\dfrac{e^x-1}{x}\times\dfrac{x}{f(x)}\times\dfrac{f(x)}{g(x)}\right\}$

$=1\times1\times2=2$

ㄴ. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{2^x-1}=\lim\limits_{x\to0}\left\{\dfrac{x}{2^x-1}\times\dfrac{g(x)}{x}\times\dfrac{f(x)}{g(x)}\right\}$

$=\dfrac{1}{\ln 2}\times\ln 3\times 2=2\log_2 3$

ㄷ. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)g(x)}{x^2}=1$에서 $\lim\limits_{x\to0}x^2=0$이고 극한값이 존재하므로

$\lim\limits_{x\to0}f(x)g(x)=0$

$\therefore \lim\limits_{x\to0}f(x)=0$ 또는 $\lim\limits_{x\to0}g(x)=0$

이때 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=2$에서 0이 아닌 극한값이 존재하므로

$\lim\limits_{x\to0}f(x)=0,\ \lim\limits_{x\to0}g(x)=0$

$\therefore \lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\{1+f(x)\}}{g(x)}=\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{\ln\{1+f(x)\}}{f(x)}\times\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]$

$=1\times2=2$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

3 곡선 $y=\dfrac{1}{4}e^{2x}$을 y축의 방향으로 m만큼 평행이동하면

$y=\dfrac{1}{4}e^{2x}+m$

이 곡선이 원점을 지나므로

$0=\dfrac{1}{4}+m \qquad \therefore m=-\dfrac{1}{4}$

$\therefore f(x)=\dfrac{e^{2x}-1}{4}$

또 곡선 $y=-\ln 3x$를 x축의 방향으로 n만큼 평행이동하면

$y=-\ln 3(x-n)$

이 곡선이 원점을 지나므로

$0=-\ln(-3n),\ -3n=1 \qquad \therefore n=-\dfrac{1}{3}$

$\therefore g(x)=-\ln(3x+1)$

직선 $y=k$와 곡선 $y=g(x)$의 교점 P의 좌표를 구하면

$-\ln(3x+1)=k$에서 $3x+1=e^{-k}$

$\therefore x=\dfrac{e^{-k}-1}{3} \qquad \therefore \mathrm{P}\left(\dfrac{e^{-k}-1}{3},\ k\right)$

직선 $y=k$와 곡선 $y=f(x)$의 교점 R의 좌표를 구하면

$\dfrac{e^{2x}-1}{4}=k$에서 $e^{2x}=4k+1$

$\therefore x=\dfrac{\ln(4k+1)}{2} \qquad \therefore \mathrm{R}\left(\dfrac{\ln(4k+1)}{2},\ k\right)$

이때 $\mathrm{Q}(0,\ k)$이므로

$\overline{\mathrm{PQ}}=\dfrac{1-e^{-k}}{3},\ \overline{\mathrm{QR}}=\dfrac{\ln(4k+1)}{2}$

$\therefore \lim\limits_{k\to0+}\dfrac{\overline{\mathrm{QR}}}{\overline{\mathrm{PQ}}}=\lim\limits_{k\to0+}\dfrac{\dfrac{\ln(4k+1)}{2}}{\dfrac{1-e^{-k}}{3}}$

$=\lim\limits_{k\to0+}\left\{\dfrac{3}{2}\times\dfrac{\ln(1+4k)}{4k}\times\dfrac{-k}{e^{-k}-1}\times4\right\}$

$=\dfrac{3}{2}\times1\times1\times4=6$

4 $x-1=t$로 놓으면 $x=1+t$이고, $x\to1$일 때 $t\to0$이므로

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-x^2f(1)}{\ln x}$

$=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{f(1+t)-(1+t)^2f(1)}{\ln(1+t)}$

$=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{f(1+t)-f(1)+f(1)-(1+t)^2f(1)}{\ln(1+t)}$

$=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{f(1+t)-f(1)}{\ln(1+t)}-f(1)\times\lim\limits_{t\to0}\dfrac{t^2+2t}{\ln(1+t)}$

$=\lim\limits_{t\to0}\left\{\dfrac{f(1+t)-f(1)}{t}\times\dfrac{t}{\ln(1+t)}\right\}-f(1)\times\lim\limits_{t\to0}\dfrac{t+2}{\dfrac{\ln(1+t)}{t}}$

$=f'(1)-2f(1)$

$=20-2\times5=10$

02 삼각함수의 미분

1 개념 CHECK p.75

1. 답 (1) $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ (2) $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ (3) $-2-\sqrt{3}$

(1) $\sin 15^\circ=\sin(45^\circ-30^\circ)$
$=\sin 45^\circ\cos 30^\circ-\cos 45^\circ\sin 30^\circ$
$=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

(2) $\cos 15^\circ=\cos(45^\circ-30^\circ)$
$=\cos 45^\circ\cos 30^\circ+\sin 45^\circ\sin 30^\circ$
$=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

(3) $\tan 105^\circ=\tan(60^\circ+45^\circ)$
$=\dfrac{\tan 60^\circ+\tan 45^\circ}{1-\tan 60^\circ\tan 45^\circ}$
$=\dfrac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}\times 1}=-2-\sqrt{3}$

2. 답 (1) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (2) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (3) $\sqrt{3}$

(1) $\sin 100^\circ\cos 55^\circ-\cos 100^\circ\sin 55^\circ$
$=\sin(100^\circ-55^\circ)$
$=\sin 45^\circ=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

(2) $\cos 40^\circ\cos 70^\circ+\sin 40^\circ\sin 70^\circ$
$=\cos(40^\circ-70^\circ)$
$=\cos(-30^\circ)=\cos 30^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(3) $\dfrac{\tan 80^\circ-\tan 20^\circ}{1+\tan 80^\circ\tan 20^\circ}=\tan(80^\circ-20^\circ)$
$=\tan 60^\circ=\sqrt{3}$

1 유제 & 문제 p.76~81

유제 01 답 $2\sec\theta$

$\dfrac{\cot\theta}{1+\csc\theta}+\dfrac{1+\csc\theta}{\cot\theta}=\dfrac{\cot^2\theta+(1+\csc\theta)^2}{(1+\csc\theta)\cot\theta}$
$=\dfrac{\cot^2\theta+1+2\csc\theta+\csc^2\theta}{(1+\csc\theta)\cot\theta}$
$=\dfrac{2\csc^2\theta+2\csc\theta}{(1+\csc\theta)\cot\theta}$
$=\dfrac{2\csc\theta(\csc\theta+1)}{(1+\csc\theta)\cot\theta}$
$=\dfrac{2\csc\theta}{\cot\theta}$
$=2\times\dfrac{1}{\sin\theta}\times\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$
$=\dfrac{2}{\cos\theta}=2\sec\theta$

문제 01-1 답 1

$(1+\csc\theta)(1+\sec\theta)(1-\csc\theta)(1-\sec\theta)$
$=(1-\csc^2\theta)(1-\sec^2\theta)$
$=(-\cot^2\theta)\times(-\tan^2\theta)$
$=1$

문제 01-2 답 $-\dfrac{8}{3}$

$\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{2}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{4}$

$1+2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{4}$ $\quad\therefore \sin\theta\cos\theta=-\dfrac{3}{8}$

$\therefore \tan\theta+\cot\theta=\tan\theta+\dfrac{1}{\tan\theta}$
$=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}+\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$
$=\dfrac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$
$=\dfrac{1}{-\frac{3}{8}}=-\dfrac{8}{3}$

유제 02 답 (1) $-\dfrac{5\sqrt{3}}{9}$ (2) $-\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ (3) $-\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$

$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$, $\dfrac{\pi}{2}<\beta<\pi$에서 $\cos\alpha>0$, $\sin\beta>0$이므로

$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

$\sin\beta=\sqrt{1-\cos^2\beta}=\sqrt{1-\left(-\dfrac{1}{3}\right)^2}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

$\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{\frac{\sqrt{6}}{3}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\tan\beta=\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}=\dfrac{\frac{2\sqrt{2}}{3}}{-\frac{1}{3}}=-2\sqrt{2}$

(1) $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$
$=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\times\left(-\dfrac{1}{3}\right)-\dfrac{\sqrt{6}}{3}\times\dfrac{2\sqrt{2}}{3}=-\dfrac{5\sqrt{3}}{9}$

(2) $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$
$=\dfrac{\sqrt{6}}{3}\times\left(-\dfrac{1}{3}\right)-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\times\dfrac{2\sqrt{2}}{3}=-\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

(3) $\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$
$=\dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}-(-2\sqrt{2})}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}\times(-2\sqrt{2})}=-\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$

개념편

문제 02-1 답 $-\frac{5}{8}$

$\sin\alpha-\sin\beta=\frac{1}{\sqrt{2}}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\alpha+\sin^2\beta-2\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}$ …… ㉠

$\cos\alpha+\cos\beta=\frac{1}{2}$의 양변을 제곱하면

$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+2\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{4}$ …… ㉡

㉠+㉡을 하면

$(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)+(\sin^2\beta+\cos^2\beta)$

$+2(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)=\frac{3}{4}$

$2+2\cos(\alpha+\beta)=\frac{3}{4}$

$\therefore \cos(\alpha+\beta)=-\frac{5}{8}$

유제 03 답 (1) $\frac{4}{5}$ (2) $\frac{3}{5}$ (3) $\frac{4}{3}$

$\sec^2\theta=1+\tan^2\theta=1+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{4}$이므로

$\cos^2\theta=\frac{1}{\sec^2\theta}=\frac{4}{5}$

이때 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$에서 $\cos\theta>0$이므로

$\cos\theta=\sqrt{\frac{4}{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$

또 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$에서 $\sin\theta>0$이므로

$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}$

$=\sqrt{1-\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2}$

$=\frac{\sqrt{5}}{5}$

(1) $\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$

$=2\times\frac{\sqrt{5}}{5}\times\frac{2\sqrt{5}}{5}$

$=\frac{4}{5}$

(2) $\cos 2\theta=1-2\sin^2\theta$

$=1-2\times\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2$

$=\frac{3}{5}$

(3) $\tan 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$

$=\frac{2\times\frac{1}{2}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}$

$=\frac{4}{3}$

문제 03-1 답 $-\frac{2\sqrt{14}}{9}$

$\sin\theta-\cos\theta=\frac{2}{3}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta+\cos^2\theta-2\sin\theta\cos\theta=\frac{4}{9}$

$1-2\sin\theta\cos\theta=\frac{4}{9}$

$\therefore 2\sin\theta\cos\theta=\frac{5}{9}$

$\therefore \sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta=\frac{5}{9}$

이때 $\frac{\pi}{3}<\theta<\frac{\pi}{2}$에서 $\frac{2}{3}\pi<2\theta<\pi$이므로

$\cos 2\theta<0$

$\therefore \cos 2\theta=-\sqrt{1-\sin^2 2\theta}$

$=-\sqrt{1-\left(\frac{5}{9}\right)^2}=-\frac{2\sqrt{14}}{9}$

유제 04 답 (1) $\frac{\sqrt{30}}{6}$ (2) $\frac{\sqrt{6}}{6}$ (3) $\sqrt{5}$

$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$에서 $\cos\theta<0$이므로

$\cos\theta=-\sqrt{1-\sin^2\theta}$

$=-\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2}=-\frac{2}{3}$

(1) $\sin^2\frac{\theta}{2}=\frac{1-\cos\theta}{2}$

$=\frac{1-\left(-\frac{2}{3}\right)}{2}=\frac{5}{6}$

이때 $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$에서 $\frac{\pi}{4}<\frac{\theta}{2}<\frac{\pi}{2}$이므로

$\sin\frac{\theta}{2}>0$

$\therefore \sin\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{5}{6}}=\frac{\sqrt{30}}{6}$

(2) $\cos^2\frac{\theta}{2}=\frac{1+\cos\theta}{2}$

$=\frac{1+\left(-\frac{2}{3}\right)}{2}=\frac{1}{6}$

이때 $\frac{\pi}{4}<\frac{\theta}{2}<\frac{\pi}{2}$에서 $\cos\frac{\theta}{2}>0$이므로

$\cos\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{1}{6}}=\frac{\sqrt{6}}{6}$

(3) $\tan^2\frac{\theta}{2}=\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$

$=\frac{1-\left(-\frac{2}{3}\right)}{1+\left(-\frac{2}{3}\right)}=5$

이때 $\frac{\pi}{4}<\frac{\theta}{2}<\frac{\pi}{2}$에서 $\tan\frac{\theta}{2}>0$이므로 $\tan\frac{\theta}{2}=\sqrt{5}$

개념편

문제 04-1 답 $-\dfrac{4\sqrt{2}}{7}$

$\sin^2\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1}{3}$에서 $\dfrac{1-\cos\theta}{2}=\dfrac{1}{3}$

$\therefore \cos\theta=\dfrac{1}{3}$

이때 $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$에서 $\sin\theta>0$이므로

$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^2}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

$\therefore \tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{\dfrac{2\sqrt{2}}{3}}{\dfrac{1}{3}}=2\sqrt{2}$

$\therefore \tan 2\theta=\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$

$=\dfrac{2\times 2\sqrt{2}}{1-(2\sqrt{2})^2}=-\dfrac{4\sqrt{2}}{7}$

유제 05 답 60°

두 직선 $\sqrt{3}x+2y=0$, $3\sqrt{3}x-y+1=0$, 즉 $y=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}x$, $y=3\sqrt{3}x+1$이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α, β라 하면

$\tan\alpha=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\tan\beta=3\sqrt{3}$

따라서 두 직선이 이루는 예각의 크기를 θ라 하면

$\tan\theta=|\tan(\alpha-\beta)|=\left|\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\right|$

$=\left|\dfrac{-\dfrac{\sqrt{3}}{2}-3\sqrt{3}}{1+\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\times 3\sqrt{3}}\right|=\sqrt{3}$

$\therefore \theta=60^\circ$

문제 05-1 답 3

두 직선 $2x-y+1=0$, $ax+y-4=0$, 즉 $y=2x+1$, $y=-ax+4$가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α, β라 하면

$\tan\alpha=2$, $\tan\beta=-a$

이때 두 직선이 이루는 예각의 크기가 $\dfrac{\pi}{4}$이므로

$\tan\dfrac{\pi}{4}=|\tan(\alpha-\beta)|$

$=\left|\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\right|=1$

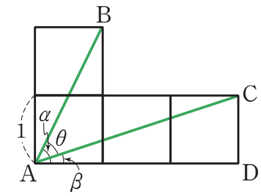
$\dfrac{2-(-a)}{1+2\times(-a)}=\pm 1$

$2+a=1-2a$ 또는 $2+a=-1+2a$

$\therefore a=-\dfrac{1}{3}$ 또는 $a=3$

그런데 $a>0$이므로 $a=3$

유제 06 답 45°



오른쪽 그림과 같이 꼭짓점 D를 잡고 $\angle BAD=\alpha$, $\angle CAD=\beta$라 하면 정사각형의 한 변의 길이가 1이므로

$\tan\alpha=2$, $\tan\beta=\dfrac{1}{3}$

이때 $\theta=\alpha-\beta$이므로

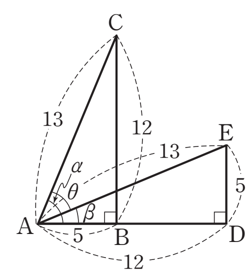
$\tan\theta=\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

$=\dfrac{2-\dfrac{1}{3}}{1+2\times\dfrac{1}{3}}=1$

$\therefore \theta=45^\circ$

문제 06-1 답 50

$\overline{AC}=\overline{AE}=\sqrt{5^2+12^2}=13$



이므로 $\angle CAB=\alpha$, $\angle EAD=\beta$라 하면

$\sin\alpha=\dfrac{12}{13}$, $\cos\alpha=\dfrac{5}{13}$

$\sin\beta=\dfrac{5}{13}$, $\cos\beta=\dfrac{12}{13}$

이때 $\theta=\alpha-\beta$이므로

$\sin\theta=\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

$=\dfrac{12}{13}\times\dfrac{12}{13}-\dfrac{5}{13}\times\dfrac{5}{13}=\dfrac{119}{169}$

따라서 $p=169$, $q=119$이므로

$p-q=169-119=50$

2 유제 & 문제

p.84~88

유제 07 답 (1) 1 (2) $\dfrac{1}{2}$ (3) $2\sqrt{2}$ (4) 0

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{\cos x}\times\frac{1}{\sin x}\right)$

$\displaystyle=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{1-\cos^2 x}$

$\displaystyle=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{(1+\cos x)(1-\cos x)}$

$\displaystyle=\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos x}$

$=\dfrac{1}{1+1}=\dfrac{1}{2}$

(3) $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\tan^2 x-1}{\sin x-\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\tan^2 x-1}{\cos x\left(\frac{\sin x}{\cos x}-1\right)}$

$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{(\tan x+1)(\tan x-1)}{\cos x(\tan x-1)}$

$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x+1}{\cos x}$

$=\frac{1+1}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=2\sqrt{2}$

(4) $\lim_{x\to\pi}\frac{1-\cos 2x}{\sin 2x}=\lim_{x\to\pi}\frac{1-(1-2\sin^2 x)}{2\sin x\cos x}$

$=\lim_{x\to\pi}\frac{2\sin^2 x}{2\sin x\cos x}$

$=\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{\cos x}$

$=\lim_{x\to\pi}\tan x=0$

문제 07-1 답 **0**

$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec x-\tan x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\cos x}-\frac{\sin x}{\cos x}\right)$

$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\cos x}$

$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{(1-\sin x)(1+\sin x)}{\cos x(1+\sin x)}$

$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 x}{\cos x(1+\sin x)}$

$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+\sin x}$

$=\frac{0}{1+1}=0$

유제 08 답 (1) 8 (2) **2** (3) $\mathbf{\frac{2}{3}}$ (4) $\mathbf{\frac{1}{2}}$

(1) $\lim_{x\to0}\frac{5x+\sin 3x}{\sin x}$

$=\lim_{x\to0}\left(\frac{5x}{\sin x}+\frac{\sin 3x}{\sin x}\right)$

$=5\lim_{x\to0}\frac{x}{\sin x}+\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin 3x}{3x}\times\frac{x}{\sin x}\times3\right)$

$=5\times1+1\times1\times3$

$=8$

(2) $x\to0$일 때, $(3x^2+2x)\to0$이므로

$\lim_{x\to0}\frac{\tan(3x^2+2x)}{2x^2+x}$

$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{\tan(3x^2+2x)}{3x^2+2x}\times\frac{3x^2+2x}{2x^2+x}\right\}$

$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{\tan(3x^2+2x)}{3x^2+2x}\times\frac{3x+2}{2x+1}\right\}$

$=1\times2$

$=2$

(3) $x\to0$일 때, $\sin 2x\to0$이므로

$\lim_{x\to0}\frac{\sin(\sin 2x)}{\tan 3x}$

$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{\sin(\sin 2x)}{\sin 2x}\times\frac{3x}{\tan 3x}\times\frac{\sin 2x}{2x}\times\frac{2}{3}\right\}$

$=1\times1\times1\times\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$

(4) $x\to0$일 때, $(1-\cos x)\to0$이므로

$\lim_{x\to0}\frac{\sin(1-\cos x)}{x^2}$

$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{\sin(1-\cos x)}{1-\cos x}\times\frac{1-\cos x}{x^2}\right\}$

$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{\sin(1-\cos x)}{1-\cos x}\times\frac{\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)}\right\}$

$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{\sin(1-\cos x)}{1-\cos x}\times\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\times\frac{1}{1+\cos x}\right\}$

$=1\times1^2\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

유제 09 답 (1) $\mathbf{-\frac{1}{\pi}}$ (2) $\mathbf{-\frac{\pi}{2}}$ (3) **1** (4) **1**

(1) $x-3=t$로 놓으면 $x=3+t$이고, $x\to3$일 때 $t\to0$이므로

$\lim_{x\to3}\frac{x-3}{\sin\pi x}=\lim_{t\to0}\frac{t}{\sin\pi(3+t)}$

$=\lim_{t\to0}\frac{t}{\sin(3\pi+\pi t)}$

$=\lim_{t\to0}\frac{t}{-\sin\pi t}$

$=-\lim_{t\to0}\frac{\pi t}{\sin\pi t}\times\frac{1}{\pi}$

$=-1\times\frac{1}{\pi}$

$=-\frac{1}{\pi}$

(2) $x-1=t$로 놓으면 $x=1+t$이고, $x\to1$일 때 $t\to0$이므로

$\lim_{x\to1}\frac{\cos\frac{\pi}{2}x}{x-1}=\lim_{t\to0}\frac{\cos\frac{\pi}{2}(1+t)}{t}$

$=\lim_{t\to0}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}t\right)}{t}$

$=\lim_{t\to0}\frac{-\sin\frac{\pi}{2}t}{t}$

$=-\lim_{t\to0}\frac{\sin\frac{\pi}{2}t}{\frac{\pi}{2}t}\times\frac{\pi}{2}$

$=-1\times\frac{\pi}{2}$

$=-\frac{\pi}{2}$

(3) $x-\pi=t$로 놓으면 $x=\pi+t$이고, $x\to\pi$일 때 $t\to 0$이므로

$$\lim_{x\to\pi}(x-\pi)\cot x=\lim_{t\to 0}t\cot(\pi+t)$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\tan(\pi+t)}$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\tan t}=1$$

(4) $\frac{1}{x}=t$로 놓으면 $x=\frac{1}{t}$이고, $x\to\infty$일 때 $t\to 0$이므로

$$\lim_{x\to\infty}x\sin\frac{1}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1$$

문제 09-1 답 $-\frac{\pi}{2}$

$x-\frac{1}{2}=t$로 놓으면 $x=\frac{1}{2}+t$이고, $x\to\frac{1}{2}$일 때 $t\to 0$이므로

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{\tan(\cos\pi x)}{2x-1}$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{\tan\left\{\cos\pi\left(\frac{1}{2}+t\right)\right\}}{2\left(\frac{1}{2}+t\right)-1}$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{\tan\left\{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\pi t\right)\right\}}{2t}=\lim_{t\to 0}\frac{\tan(-\sin\pi t)}{2t}$$
$$=\lim_{t\to 0}\left\{\frac{\tan(-\sin\pi t)}{-\sin\pi t}\times\frac{\sin\pi t}{\pi t}\times\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right\}$$
$$=1\times1\times\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\pi}{2}$$

유제 10 답 $\frac{1}{2}$

$\lim_{x\to 0}(1-\cos x)=0$이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로

$\lim_{x\to 0}(ax\sin x+b)=0$

$\therefore b=0$

이를 주어진 식의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{ax\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{ax\sin x(1+\cos x)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{ax\sin x(1+\cos x)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{ax(1+\cos x)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{a}\times\frac{\sin x}{x}\times\frac{1}{1+\cos x}\right)$$
$$=\frac{1}{a}\times1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2a}$$

따라서 $\frac{1}{2a}=1$이므로 $a=\frac{1}{2}$

$\therefore a+b=\frac{1}{2}+0=\frac{1}{2}$

문제 10-1 답 (1) $a=-1$, $b=3$ (2) $a=\frac{1}{3}$, $b=1$

(1) $\lim_{x\to 0}\tan 3x=0$이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로

$\lim_{x\to 0}(e^x+a)=0$

$1+a=0 \quad \therefore a=-1$

이를 주어진 식의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{e^x-1}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan 3x}{3x}\times\frac{x}{e^x-1}\times 3\right)$$
$$=1\times1\times3=3$$

$\therefore b=3$

(2) $\lim_{x\to 0}\sin ax=0$이고 극한값이 존재하므로

$\lim_{x\to 0}\ln(x+b)=0$

$\ln b=0 \quad \therefore b=1$

이를 주어진 식의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{\sin ax}=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{\ln(1+x)}{x}\times\frac{ax}{\sin ax}\times\frac{1}{a}\right\}$$
$$=1\times1\times\frac{1}{a}=\frac{1}{a}$$

따라서 $\frac{1}{a}=3$이므로 $a=\frac{1}{3}$

문제 10-2 답 $\frac{\pi}{2}$

$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\cos x=0$이고 극한값이 존재하므로

$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(ax-b)=0$

$\frac{\pi}{2}a-b=0 \quad \therefore b=\frac{\pi}{2}a$ …… ㉠

이를 주어진 식에 대입하면

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{ax-\frac{\pi}{2}a}{\cos x}=1$$

이때 $x-\frac{\pi}{2}=t$로 놓으면 $x=\frac{\pi}{2}+t$이고, $x\to\frac{\pi}{2}$일 때 $t\to 0$이므로

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{ax-\frac{\pi}{2}a}{\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{a\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{\cos x}$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{at}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+t\right)}$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{at}{-\sin t}$$
$$=-a\lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin t}=-a$$

따라서 $-a=1$이므로 $a=-1$

이를 ㉠에 대입하면 $b=-\frac{\pi}{2}$

$\therefore ab=(-1)\times\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$

유제 **11** 답 **1**

$\triangle$BCH에서 $\overline{\mathrm{BH}}=3\sin\theta$

$\angle$ABH$=\angle$BCH$=\theta$이므로 $\triangle$ABH에서

$\overline{\mathrm{AH}}=\overline{\mathrm{BH}}\tan\theta=3\sin\theta\tan\theta$

$$\therefore \lim_{\theta\to0+}\frac{\overline{\mathrm{AH}}}{3\theta^2}=\lim_{\theta\to0+}\frac{3\sin\theta\tan\theta}{3\theta^2}$$
$$=\lim_{\theta\to0+}\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\times\frac{\tan\theta}{\theta}\right)$$
$$=1\times1=1$$

문제 **11**-1 답 $\mathbf{\frac{1}{4}}$

$\triangle$OHB에서 $\overline{\mathrm{OH}}=\cos\theta$, $\overline{\mathrm{BH}}=\sin\theta$

$\overline{\mathrm{AH}}=\overline{\mathrm{OA}}-\overline{\mathrm{OH}}=1-\cos\theta$이므로

$$S(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AH}}\times\overline{\mathrm{BH}}$$
$$=\frac{1}{2}(1-\cos\theta)\sin\theta$$
$$\therefore \lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta^3}=\lim_{\theta\to0+}\frac{(1-\cos\theta)\sin\theta}{2\theta^3}$$
$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin^2\theta\sin\theta}{2\theta^3(1+\cos\theta)}$$
$$=\lim_{\theta\to0+}\left\{\frac{1}{2}\times\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^3\times\frac{1}{1+\cos\theta}\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\times1^3\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

3 개념 CHECK

p.89

1. 답 (1) $\boldsymbol{y'=\cos x-\sqrt{3}\sin x}$
(2) $\boldsymbol{y'=\sin x+x\cos x}$

(1) $y'=(\sin x)'+\sqrt{3}(\cos x)'$
$=\cos x-\sqrt{3}\sin x$

(2) $y'=(x)'\sin x+x(\sin x)'$
$=\sin x+x\cos x$

3 유제 & 문제

p.90

유제 **12** 답 (1) $\boldsymbol{y'=3^x\ln3-2\sin x}$
(2) $\boldsymbol{y'=4x\cos x-(2x^2-1)\sin x}$
(3) $\boldsymbol{y'=2\sin x\cos x}$
(4) $\boldsymbol{y'=2(\cos^2x-\sin^2x)}$

(1) $y'=(3^x)'+2(\cos x)'$
$=3^x\ln3-2\sin x$

(2) $y'=(2x^2-1)'\cos x+(2x^2-1)(\cos x)'$
$=4x\cos x-(2x^2-1)\sin x$

(3) $y'=(\sin x\sin x)'$
$=(\sin x)'\sin x+\sin x(\sin x)'$
$=\cos x\sin x+\sin x\cos x$
$=2\sin x\cos x$

(4) $y'=(2\sin x\cos x)'$
$=2(\sin x)'\cos x+2\sin x(\cos x)'$
$=2\cos x\cos x-2\sin x\sin x$
$=2(\cos^2x-\sin^2x)$

문제 **12**-1 답 **0**

$$f'(x)=(x^3\sin x)'+(3x^2\cos x)'$$
$$=(3x^2\sin x+x^3\cos x)+(6x\cos x-3x^2\sin x)$$
$$=(x^3+6x)\cos x$$
$$\therefore f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$$

문제 **12**-2 답 $\boldsymbol{-2\ln\pi}$

$$\lim_{h\to0}\frac{f(\pi+h)-f(\pi-h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(\pi+h)-f(\pi)+f(\pi)-f(\pi-h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(\pi+h)-f(\pi)}{h}+\lim_{h\to0}\frac{f(\pi-h)-f(\pi)}{-h}$$
$$=f'(\pi)+f'(\pi)$$
$$=2f'(\pi)$$

함수 $f(x)=\ln x\sin x$를 미분하면

$$f'(x)=(\ln x)'\sin x+\ln x(\sin x)'$$
$$=\frac{1}{x}\sin x+\ln x\cos x$$
$$\therefore 2f'(\pi)=2\left\{\frac{1}{\pi}\times0+\ln\pi\times(-1)\right\}$$
$$=-2\ln\pi$$

기본 연습문제

p.91~93

1 -5	**2** ④	**3** $\frac{7-4\sqrt{2}}{9}$		**4** $\frac{8}{15}$
5 12	**6** $1-\sqrt{2}$	**7** 4	**8** $-\frac{1}{2}$	**9** $\frac{3}{2}$
10 4	**11** $\frac{3}{2}\pi$	**12** 8	**13** 8	

1 $(\tan\theta+\cot\theta)^2-(\sin\theta+\csc\theta)^2-(\cos\theta+\sec\theta)^2$

$=\tan^2\theta+2+\cot^2\theta-(\sin^2\theta+2+\csc^2\theta)$
$\qquad -(\cos^2\theta+2+\sec^2\theta)$

$=(\tan^2\theta-\sec^2\theta)+(\cot^2\theta-\csc^2\theta)$
$\qquad -(\sin^2\theta+\cos^2\theta)-2$

$=-1-1-1-2=-5$

2 $\sin\left(\frac{\pi}{3}+\theta\right)=\sin\frac{\pi}{3}\cos\theta+\cos\frac{\pi}{3}\sin\theta$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta+\frac{1}{2}\sin\theta$ …… ㉠

$\sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)=\sin\frac{\pi}{3}\cos\theta-\cos\frac{\pi}{3}\sin\theta$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta-\frac{1}{2}\sin\theta$ …… ㉡

㉠, ㉡을 주어진 식에 대입하면

$\sin^2\theta+\sin^2\left(\frac{\pi}{3}+\theta\right)+\sin^2\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)$

$=\sin^2\theta+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta+\frac{1}{2}\sin\theta\right)^2$
$\qquad +\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta-\frac{1}{2}\sin\theta\right)^2$

$=\sin^2\theta+\frac{3}{2}\cos^2\theta+\frac{1}{2}\sin^2\theta$

$=\frac{3}{2}\sin^2\theta+\frac{3}{2}\cos^2\theta$

$=\frac{3}{2}$

3 $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$에서 $\cos\alpha<0$이므로

$\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$

$\therefore\ \sin 2\alpha+\cos 2\alpha$

$=2\sin\alpha\cos\alpha+(2\cos^2\alpha-1)$

$=2\times\frac{1}{3}\times\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)+\left\{2\times\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2-1\right\}$

$=\frac{7-4\sqrt{2}}{9}$

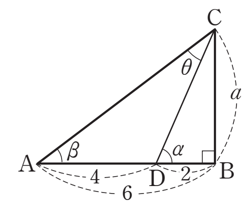
4 직선 $y=\frac{1}{4}x$가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 θ라 하면

$\tan\theta=\frac{1}{4}$

$\therefore\ m=\tan 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$

$=\frac{2\times\frac{1}{4}}{1-\left(\frac{1}{4}\right)^2}=\frac{8}{15}$

5 점 D는 $\overline{\mathrm{AB}}$를 $2:1$로 내분하는 점이므로



$\overline{\mathrm{AD}}=4$, $\overline{\mathrm{BD}}=2$

$\angle\mathrm{CDB}=\alpha$, $\angle\mathrm{CAB}=\beta$라 하면 $\triangle\mathrm{DBC}$, $\triangle\mathrm{ABC}$에서

$\tan\alpha=\frac{a}{2}$, $\tan\beta=\frac{a}{6}$

$\triangle\mathrm{ADC}$에서 $\theta=\alpha-\beta$이므로

$\tan\theta=\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

$=\frac{\frac{a}{2}-\frac{a}{6}}{1+\frac{a}{2}\times\frac{a}{6}}=\frac{4a}{a^2+12}$

$\frac{4a}{a^2+12}=\frac{1}{3}$이므로 $12a=a^2+12$

$\therefore\ a^2-12a+12=0$

따라서 근과 계수의 관계에 의해 주어진 조건을 만족하는 모든 실수 a의 값의 합은 12이다.

6 $\lim_{x\to 0}\sin x\cot x=\lim_{x\to 0}\left(\sin x\times\frac{\cos x}{\sin x}\right)$

$=\lim_{x\to 0}\cos x=1$

$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1-\tan x}{\sin x-\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1-\frac{\sin x}{\cos x}}{\sin x-\cos x}$

$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x-\sin x}{\cos x(\sin x-\cos x)}$

$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(-\frac{1}{\cos x}\right)$

$=-\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=-\sqrt{2}$

$\therefore\ \lim_{x\to 0}\sin x\cot x+\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1-\tan x}{\sin x-\cos x}=1-\sqrt{2}$

7 $f(n)=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\sin x+\sin 2x+\cdots+\sin nx}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{2}{\frac{\sin x}{x}+\frac{\sin 2x}{x}+\cdots+\frac{\sin nx}{x}}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{2}{\frac{\sin x}{x}+\frac{\sin 2x}{2x}\times 2+\cdots+\frac{\sin nx}{nx}\times n}$

$=\frac{2}{1+2+3+\cdots+n}$

$=\frac{2}{\frac{n(n+1)}{2}}$

$=\frac{4}{n(n+1)}$

$\therefore \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{4}{k(k+1)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}4\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}4\left\{\left(1-\cancel{\frac{1}{2}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{n}}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}4\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=4$$

8 $x-\pi=t$로 놓으면 $x=\pi+t$이고, $x\to\pi$일 때 $t\to 0$이므로

$$\lim_{x\to\pi}\frac{1+\cos x}{(x-\pi)\sin x}=\lim_{t\to 0}\frac{1+\cos(\pi+t)}{t\sin(\pi+t)}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{-t\sin t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos^2 t}{-t\sin t(1+\cos t)}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\sin^2 t}{-t\sin t(1+\cos t)}$$

$$=-\lim_{t\to 0}\left(\frac{\sin t}{t}\times\frac{1}{1+\cos t}\right)$$

$$=-\left(1\times\frac{1}{2}\right)$$

$$=-\frac{1}{2}$$

9 $\displaystyle\lim_{x\to 0}x\tan x=0$이고 극한값이 존재하므로

$\displaystyle\lim_{x\to 0}(a-3\cos x)=0$

$a-3=0 \qquad \therefore a=3$

이를 주어진 식의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to 0}\frac{3-3\cos x}{x\tan x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{3(1-\cos x)}{x\tan x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{3(1-\cos^2 x)}{x\tan x(1+\cos x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{3\sin^2 x}{x\tan x(1+\cos x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left\{3\times\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\times\frac{x}{\tan x}\times\frac{1}{1+\cos x}\right\}$$

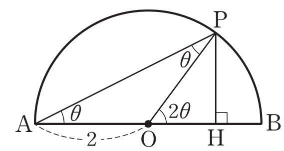
$$=3\times 1^2\times 1\times\frac{1}{2}$$

$$=\frac{3}{2}$$

$\therefore b=\dfrac{3}{2}$

$\therefore a-b=3-\dfrac{3}{2}=\dfrac{3}{2}$

10 $\overline{OA}=\overline{OP}=2$이므로



$\angle OPA=\angle OAP=\theta$

$\triangle OPA$에서

$\angle POH=2\theta$

$\triangle POH$에서

$\overline{OH}=\overline{OP}\cos 2\theta=2\cos 2\theta$

$\therefore \overline{BH}=\overline{OB}-\overline{OH}=2-2\cos 2\theta=2(1-\cos 2\theta)$

$$\therefore \lim_{\theta\to 0+}\frac{\overline{BH}}{\theta^2}=\lim_{\theta\to 0+}\frac{2(1-\cos 2\theta)}{\theta^2}$$

$$=\lim_{\theta\to 0+}\frac{2(1-\cos^2 2\theta)}{\theta^2(1+\cos 2\theta)}$$

$$=\lim_{\theta\to 0+}\frac{2\sin^2 2\theta}{\theta^2(1+\cos 2\theta)}$$

$$=\lim_{\theta\to 0+}\left\{\left(\frac{\sin 2\theta}{2\theta}\right)^2\times\frac{8}{1+\cos 2\theta}\right\}$$

$$=1^2\times\frac{8}{2}=4$$

11 $f'(x)=2\sin x$이므로 $f'(a)=-2$에서

$2\sin a=-2,\ \sin a=-1$

$\therefore a=\dfrac{3}{2}\pi\ (\because 0\le a\le 2\pi)$

12 $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(\pi-2h)-f(\pi)}{h}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(\pi-2h)-f(\pi)}{-2h}\times(-2)$$

$=-2f'(\pi)$

함수 $f(x)=4\sin x+\cos x$를 미분하면

$f'(x)=4\cos x-\sin x$

$\therefore -2f'(\pi)=-2\times(-4)=8$

13 $f(x)$가 $x=0$에서 미분가능하면 $x=0$에서 연속이므로

$\displaystyle\lim_{x\to 0+}(ae^x+2x+5)=\lim_{x\to 0-}(\cos x+bx)=f(0)$

$a+5=1 \qquad \therefore a=-4$

또 $f'(0)$이 존재하므로

$f'(x)=\begin{cases}ae^x+2 & (x>0)\\ -\sin x+b & (x<0)\end{cases}$에서

$a+2=b \qquad \therefore b=-2$

$\therefore ab=(-4)\times(-2)=8$

실전 연습문제 p.94

1 $\dfrac{1}{2}$ **2** ㄱ, ㄴ, ㄷ **3** 6 **4** 0

1 이차방정식 $x^2+7x+8=0$의 두 근이 $\tan\alpha$, $\tan\beta$이므로 근과 계수의 관계에 의해

$\tan\alpha+\tan\beta=-7$, $\tan\alpha\tan\beta=8$

$$\therefore \tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{-7}{1-8}=1$$

$$\therefore \cos^2(\alpha+\beta)=\frac{1}{\sec^2(\alpha+\beta)}=\frac{1}{1+\tan^2(\alpha+\beta)}=\frac{1}{1+1^2}=\frac{1}{2}$$

2 ㄱ. $a_1=\lim_{x\to0}\frac{f_1(x)}{\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin\frac{1}{2}x}{\sin x}=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin\frac{1}{2}x}{\frac{1}{2}x}\times\frac{x}{\sin x}\times\frac{1}{2}\right)=1\times1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

ㄴ. $x\to0$일 때 $f_1(x)=\sin\frac{1}{2}x\to0$이므로

$\left\{f_2(x)=\sin\frac{1}{2}\left(\sin\frac{1}{2}x\right)\right\}\to0$

$\left\{f_3(x)=\sin\frac{1}{2}\left(\sin\frac{1}{2}\left(\sin\frac{1}{2}x\right)\right)\right\}\to0$

$\vdots$

$f_n(x)\to0$

$$\therefore a_n=\lim_{x\to0}\frac{f(f_{n-1}(x))}{\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin\frac{1}{2}(f_{n-1}(x))}{\sin x}=\lim_{x\to0}\left\{\frac{\sin\frac{1}{2}(f_{n-1}(x))}{\frac{1}{2}f_{n-1}(x)}\times\frac{\frac{1}{2}f_{n-1}(x)}{\sin x}\right\}=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{f_{n-1}(x)}{\sin x}=\frac{1}{2}a_{n-1}$$

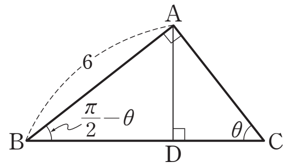
$$\therefore \frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{1}{2}$$

ㄷ. ㄱ, ㄴ에서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $\frac{1}{2}$, 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

3 $\overline{BC}$, $\overline{AC}$는 각각 원의 지름이므로



$\angle BAC=\frac{\pi}{2}$, $\angle ADC=\frac{\pi}{2}$

이때 $\angle ACB=\theta$이므로

$\angle ABC=\frac{\pi}{2}-\theta$

따라서 $\triangle ABD$에서

$\overline{AD}=\overline{AB}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=6\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$

$\overline{BD}=\overline{AB}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=6\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$

$\triangle ABC$에서 $\overline{AD}^2=\overline{BD}\times\overline{CD}$이므로

$36\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\overline{CD}\times6\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$

$$\therefore \overline{CD}=\frac{6\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}$$

이때 $\frac{\pi}{2}-\theta=t$로 놓으면 $\theta=\frac{\pi}{2}-t$이고, $\theta\to\frac{\pi}{2}-$일 때 $t\to0+$이므로

$$\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-}\frac{\overline{CD}}{\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)^2}=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-}\frac{\frac{6\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}}{\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)^2}=\lim_{t\to0+}\left(\frac{1}{t^2}\times\frac{6\sin^2t}{\cos t}\right)=\lim_{t\to0+}\left\{\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2\times\frac{6}{\cos t}\right\}=1^2\times6=6$$

4 $f(x)=\sin x+\cos x$에서

$f_1(x)=f'(x)=\cos x-\sin x$

$f_2(x)=f_1'(x)=-\sin x-\cos x$

$f_3(x)=f_2'(x)=-\cos x+\sin x$

$f_4(x)=f_3'(x)=\sin x+\cos x$

$\therefore f_1(x)+f_2(x)+f_3(x)+f_4(x)=0$

이때 음이 아닌 정수 k에 대하여

$f_5(x)=f_9(x)=\cdots=f_{4k+1}(x)=f_1(x)$

$f_6(x)=f_{10}(x)=\cdots=f_{4k+2}(x)=f_2(x)$

$f_7(x)=f_{11}(x)=\cdots=f_{4k+3}(x)=f_3(x)$

$f_8(x)=f_{12}(x)=\cdots=f_{4k+4}(x)=f_4(x)$

따라서 $2020=4\times505$이므로

$f_1(x)+f_2(x)+f_3(x)+\cdots+f_{2020}(x)$

$=505\times0=0$

01 여러 가지 미분법

1 개념 CHECK p.97

1. 답 (1) $y'=-\dfrac{1}{(x-3)^2}$ (2) $y'=\dfrac{1}{(2x+1)^2}$

(1) $y'=-\dfrac{(x-3)'}{(x-3)^2}=-\dfrac{1}{(x-3)^2}$

(2) $y'=\dfrac{(x)'(2x+1)-x(2x+1)'}{(2x+1)^2}$

$=\dfrac{2x+1-x\times 2}{(2x+1)^2}=\dfrac{1}{(2x+1)^2}$

2. 답 (1) $y'=-2x^{-3}$ (2) $y'=-\dfrac{2}{x^3}-\dfrac{1}{x^2}$

(1) $y'=-2x^{-2-1}=-2x^{-3}$

(2) $y'=(x^{-2}+x^{-1}+5)'=-2x^{-2-1}-x^{-1-1}$

$=-2x^{-3}-x^{-2}=-\dfrac{2}{x^3}-\dfrac{1}{x^2}$

3. 답 (1) $y'=\sec x\tan x-\csc x\cot x$

(2) $y'=\tan x+x\sec^2 x$

(1) $y'=(\sec x)'+(\csc x)'=\sec x\tan x-\csc x\cot x$

(2) $y'=(x)'\tan x+x(\tan x)'=\tan x+x\sec^2 x$

1 유제 & 문제 p.98~99

유제 01 답 (1) $y'=-\dfrac{4}{x^5}-\dfrac{15}{x^6}-\dfrac{6}{x^7}$

(2) $y'=-\dfrac{e^x}{(e^x-1)^2}$

(3) $y'=\dfrac{1}{\log_2 x}-\dfrac{1}{(\log_2 x)^2\ln 2}$

(4) $y'=-\dfrac{2\sin x}{(1-\cos x)^2}$

(1) $y'=\dfrac{(x^2+3x+1)'x^6-(x^2+3x+1)(x^6)'}{(x^6)^2}$

$=\dfrac{(2x+3)\times x^6-(x^2+3x+1)\times 6x^5}{x^{12}}$

$=\dfrac{-4x^7-15x^6-6x^5}{x^{12}}$

$=-\dfrac{4}{x^5}-\dfrac{15}{x^6}-\dfrac{6}{x^7}$

다른 풀이

$y=\dfrac{1}{x^4}+\dfrac{3}{x^5}+\dfrac{1}{x^6}=x^{-4}+3x^{-5}+x^{-6}$이므로

$y'=-4x^{-5}-15x^{-6}-6x^{-7}$

$=-\dfrac{4}{x^5}-\dfrac{15}{x^6}-\dfrac{6}{x^7}$

(2) $y'=-\dfrac{(e^x-1)'}{(e^x-1)^2}=-\dfrac{e^x}{(e^x-1)^2}$

(3) $y'=\dfrac{(x)'\log_2 x-x(\log_2 x)'}{(\log_2 x)^2}$

$=\dfrac{\log_2 x-x\times\dfrac{1}{x\ln 2}}{(\log_2 x)^2}$

$=\dfrac{1}{\log_2 x}-\dfrac{1}{(\log_2 x)^2\ln 2}$

(4) $y'=\dfrac{(1+\cos x)'(1-\cos x)-(1+\cos x)(1-\cos x)'}{(1-\cos x)^2}$

$=\dfrac{-\sin x(1-\cos x)-(1+\cos x)\sin x}{(1-\cos x)^2}$

$=-\dfrac{2\sin x}{(1-\cos x)^2}$

문제 01-1 답 -2

$f'(x)=\dfrac{(2x+k)'(x^2+x-1)-(2x+k)(x^2+x-1)'}{(x^2+x-1)^2}$

$=\dfrac{2(x^2+x-1)-(2x+k)(2x+1)}{(x^2+x-1)^2}$

$=-\dfrac{2x^2+2kx+k+2}{(x^2+x-1)^2}$

이때 $f'(1)=2$이므로

$-\dfrac{2+2k+k+2}{(1+1-1)^2}=2$

$-3k-4=2\qquad\therefore k=-2$

유제 02 답 (1) $y'=\sec x(3x^2+x^3\tan x-2\tan x)$

(2) $y'=e^x(\cot x-\csc^2 x)$

(3) $y'=5\sin x(1+\sec^2 x)$

(4) $y'=-\dfrac{\csc x\cot x}{(1+\csc x)^2}$

(1) $y'=(x^3-2)'\sec x+(x^3-2)(\sec x)'$

$=3x^2\sec x+(x^3-2)\sec x\tan x$

$=\sec x(3x^2+x^3\tan x-2\tan x)$

(2) $y'=(e^x)'\cot x+e^x(\cot x)'$

$=e^x\cot x-e^x\csc^2 x$

$=e^x(\cot x-\csc^2 x)$

(3) $y'=5\{(\sin x)'\tan x+\sin x(\tan x)'\}$

$=5\left(\cos x\times\dfrac{\sin x}{\cos x}+\sin x\sec^2 x\right)$

$=5(\sin x+\sin x\sec^2 x)$

$=5\sin x(1+\sec^2 x)$

(4) $y'=\dfrac{(\csc x)'(1+\csc x)-\csc x(1+\csc x)'}{(1+\csc x)^2}$

$=\dfrac{-\csc x\cot x(1+\csc x)-\csc x(-\csc x\cot x)}{(1+\csc x)^2}$

$=-\dfrac{\csc x\cot x}{(1+\csc x)^2}$

문제 02-1 답 $2-\sqrt{2}$

$$f'(x)=\frac{(\tan x)'(1+\sec x)-\tan x(1+\sec x)'}{(1+\sec x)^2}$$
$$=\frac{\sec^2 x(1+\sec x)-\tan x\times\sec x\tan x}{(1+\sec x)^2}$$
$$=\frac{\sec^2 x(1+\sec x)-\sec x(\sec^2 x-1)}{(1+\sec x)^2}$$
$$=\frac{\sec x(\sec x+1)}{(1+\sec x)^2}$$
$$=\frac{\sec x}{1+\sec x}$$
$$=\frac{1}{\cos x+1}$$
$$\therefore f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}+1}=\frac{2}{\sqrt{2}+2}=2-\sqrt{2}$$

2 개념 CHECK

p.101

1. 답 (1) $\boldsymbol{y'=12(3x+1)^3}$ (2) $\boldsymbol{y'=2e^{2x-1}}$

(1) $y'=4(3x+1)^3(3x+1)'$
$=12(3x+1)^3$

(2) $y'=e^{2x-1}(2x-1)'$
$=2e^{2x-1}$

2. 답 (1) $\boldsymbol{y'=\dfrac{2x+3}{x^2+3x+1}}$ (2) $\boldsymbol{y'=\dfrac{5}{(5x-1)\ln 2}}$

(1) $y'=\dfrac{(x^2+3x+1)'}{x^2+3x+1}$
$=\dfrac{2x+3}{x^2+3x+1}$

(2) $y'=\dfrac{(5x-1)'}{(5x-1)\ln 2}$
$=\dfrac{5}{(5x-1)\ln 2}$

2 유제 & 문제

p.102~106

유제 03 답 (1) $\boldsymbol{y'=5\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^4\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)}$
(2) $\boldsymbol{y'=-\sec^2 x\csc^2(\tan x)}$
(3) $\boldsymbol{y'=e^{2x}(2\sin x+\cos x)}$
(4) $\boldsymbol{y'=(2x-1)3^{x^2-x+1}\ln 3}$

(1) $y'=5\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^4\left(x+\dfrac{1}{x}\right)'$
$=5\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)$

(2) $y'=-\csc^2(\tan x)(\tan x)'$
$=-\sec^2 x\csc^2(\tan x)$

(3) $y'=(e^{2x})'\sin x+e^{2x}(\sin x)'$
$=e^{2x}(2x)'\sin x+e^{2x}\cos x$
$=e^{2x}(2\sin x+\cos x)$

(4) $y'=3^{x^2-x+1}\ln 3(x^2-x+1)'$
$=(2x-1)3^{x^2-x+1}\ln 3$

문제 03-1 답 $-\dfrac{3}{25}$

$h'(x)=f'(g(x))g'(x)$이므로
$h'(1)=f'(g(1))g'(1)$
이때 $g(1)=1+4-2=3$이고
$$f'(x)=\frac{1\times(x^2+1)-(x-1)\times 2x}{(x^2+1)^2}$$
$$=\frac{-x^2+2x+1}{(x^2+1)^2}$$
$\therefore f'(g(1))=f'(3)=-\dfrac{1}{50}$
또 $g'(x)=2x+4$이므로
$g'(1)=6$
$\therefore h'(1)=-\dfrac{1}{50}\times 6=-\dfrac{3}{25}$

유제 04 답 12

$\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{f(x)+2}{x-1}=3$에서 $\displaystyle\lim_{x\to1}(x-1)=0$이고 극한값이 존재하므로
$\displaystyle\lim_{x\to1}\{f(x)+2\}=0$
$\therefore f(1)=-2$
$$\therefore \lim_{x\to1}\frac{f(x)+2}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$
$$=f'(1)=3$$
또 $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{g(x)-1}{x-1}=4$에서 $\displaystyle\lim_{x\to1}(x-1)=0$이고 극한값이 존재하므로
$\displaystyle\lim_{x\to1}\{g(x)-1\}=0$
$\therefore g(1)=1$
$$\therefore \lim_{x\to1}\frac{g(x)-1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}$$
$$=g'(1)=4$$
이때 $h(x)=f(g(x))$라 하면
$h(1)=f(g(1))=f(1)=-2$
또 $h'(x)=f'(g(x))g'(x)$이므로
$h'(1)=f'(g(1))g'(1)$
$=f'(1)\times 4$
$=3\times 4=12$
$$\therefore \lim_{x\to1}\frac{f(g(x))+2}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{h(x)-h(1)}{x-1}$$
$$=h'(1)=12$$

개념편

문제 04-1 답 27

$F(x)=(f\circ f\circ f)(x)$를 미분하면

$F'(x)=f'(f(f(x)))\times f'(f(x))\times f'(x)$

이때 $f(1)=1$, $f'(1)=3$이므로 함수 $F(x)$의 $x=1$에서의 미분계수는

$$\begin{aligned}F'(1)&=f'(f(f(1)))\times f'(f(1))\times f'(1)\\&=f'(f(1))\times f'(1)\times 3\\&=f'(1)\times 3\times 3\\&=3\times 3\times 3=27\end{aligned}$$

유제 05 답 (1) $y'=\dfrac{9}{3x+1}$

(2) $y'=\dfrac{1}{x\ln|x|\ln 5}$

(3) $y'=-\dfrac{2\tan 2x}{\ln 3}$

(4) $y'=\dfrac{3(1-2\ln|x|)}{x^3}$

(1) $y=3\ln|3x+1|$이므로

$$y'=3\times\frac{(3x+1)'}{3x+1}=\frac{9}{3x+1}$$

(2) $y'=\dfrac{(\ln|x|)'}{\ln|x|\ln 5}=\dfrac{1}{x\ln|x|\ln 5}$

(3) $$\begin{aligned}y'&=\frac{(\cos 2x)'}{\cos 2x\ln 3}\\&=\frac{-\sin 2x\,(2x)'}{\cos 2x\ln 3}\\&=\frac{-2\sin 2x}{\cos 2x\ln 3}\\&=-\frac{2\tan 2x}{\ln 3}\end{aligned}$$

(4) $y=\dfrac{3\ln|x|}{x^2}$이므로

$$\begin{aligned}y'&=\frac{(3\ln|x|)'x^2-3\ln|x|(x^2)'}{(x^2)^2}\\&=\frac{\frac{3}{x}\times x^2-3\ln|x|\times 2x}{x^4}\\&=\frac{3x-6x\ln|x|}{x^4}\\&=\frac{3x(1-2\ln|x|)}{x^4}\\&=\frac{3(1-2\ln|x|)}{x^3}\end{aligned}$$

문제 05-1 답 6

$f(x)=\ln|ax-3|$에서

$$f'(x)=\frac{(ax-3)'}{ax-3}=\frac{a}{ax-3}$$

이때 $f'(1)=2$이므로

$\dfrac{a}{a-3}=2$, $2a-6=a$

$\therefore a=6$

유제 06 답 (1) $y'=x^{\sin x}\left(\ln x\cos x+\dfrac{\sin x}{x}\right)$

(2) $y'=(\ln x)^x\left\{\ln(\ln x)+\dfrac{1}{\ln x}\right\}$

(3) $y'=\dfrac{(x-1)(5x-1)}{(x+1)^4}$

(4) $y'=\dfrac{4}{|x+1|(x+1)\sqrt{(x-1)(x+3)}}$

(1) 주어진 식의 양변에 자연로그를 취하면

$\ln y=\sin x\ln x$

양변을 x에 대하여 미분하면

$$\begin{aligned}\frac{y'}{y}&=(\sin x)'\ln x+\sin x(\ln x)'\\&=\cos x\times\ln x+\sin x\times\frac{1}{x}\\&=\ln x\cos x+\frac{\sin x}{x}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore y'&=y\left(\ln x\cos x+\frac{\sin x}{x}\right)\\&=x^{\sin x}\left(\ln x\cos x+\frac{\sin x}{x}\right)\end{aligned}$$

(2) 주어진 식의 양변에 자연로그를 취하면

$\ln y=x\ln(\ln x)$

양변을 x에 대하여 미분하면

$$\begin{aligned}\frac{y'}{y}&=(x)'\ln(\ln x)+x\{\ln(\ln x)\}'\\&=\ln(\ln x)+x\times\frac{(\ln x)'}{\ln x}\\&=\ln(\ln x)+x\times\frac{\frac{1}{x}}{\ln x}\\&=\ln(\ln x)+\frac{1}{\ln x}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore y'&=y\left\{\ln(\ln x)+\frac{1}{\ln x}\right\}\\&=(\ln x)^x\left\{\ln(\ln x)+\frac{1}{\ln x}\right\}\end{aligned}$$

(3) 주어진 식의 양변의 절댓값에 자연로그를 취하면

$\ln|y|=\ln|x|+2\ln|x-1|-3\ln|x+1|$

양변을 x에 대하여 미분하면

$$\begin{aligned}\frac{y'}{y}&=\frac{1}{x}+\frac{2}{x-1}-\frac{3}{x+1}\\&=\frac{5x-1}{x(x-1)(x+1)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore y'&=y\left\{\frac{5x-1}{x(x-1)(x+1)}\right\}\\&=\frac{x(x-1)^2}{(x+1)^3}\times\frac{5x-1}{x(x-1)(x+1)}\\&=\frac{(x-1)(5x-1)}{(x+1)^4}\end{aligned}$$

(4) 주어진 식의 양변의 절댓값에 자연로그를 취하면

$\ln|y|=\frac{1}{2}(\ln|x-1|+\ln|x+3|-2\ln|x+1|)$

양변을 x에 대하여 미분하면

$\frac{y'}{y}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+3}-\frac{2}{x+1}\right)$

$=\frac{4}{(x-1)(x+1)(x+3)}$

$\therefore y'=y\left\{\frac{4}{(x-1)(x+1)(x+3)}\right\}$

$=\sqrt{\frac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}}\times\frac{4}{(x-1)(x+1)(x+3)}$

$=\frac{4}{|x+1|(x+1)\sqrt{(x-1)(x+3)}}$

문제 06-1 답 **2**

주어진 식의 양변에 자연로그를 취하면

$\ln f(x)=(\ln x)^2$

양변을 x에 대하여 미분하면

$\frac{f'(x)}{f(x)}=2\ln x\times\frac{1}{x}=\frac{2\ln x}{x}$

$\therefore f'(x)=f(x)\times\frac{2\ln x}{x}$

$=x^{\ln x}\times\frac{2\ln x}{x}$

$\therefore f'(e)=e\times\frac{2}{e}=2$

유제 07 답 (1) $\boldsymbol{y'=-\frac{5}{8x^3\sqrt{2x}}}$

(2) $\boldsymbol{y'=\frac{4x^2-x+2}{\sqrt{x^2+1}}}$

(3) $\boldsymbol{y'=x^{2\pi-1}(2\pi\cos x-x\sin x)}$

(4) $\boldsymbol{y'=\frac{\cos x}{2\sqrt{1+\sin x}}}$

(1) $y'=\{(2x)^{-\frac{5}{2}}\}'=-\frac{5}{2}(2x)^{-\frac{7}{2}}(2x)'$

$=-\frac{5}{2}\times\frac{1}{8x^3\sqrt{2x}}\times2$

$=-\frac{5}{8x^3\sqrt{2x}}$

(2) $y'=(2x-1)'\sqrt{x^2+1}+(2x-1)(\sqrt{x^2+1})'$

$=2\sqrt{x^2+1}+(2x-1)\times\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}$

$=2\sqrt{x^2+1}+\frac{x(2x-1)}{\sqrt{x^2+1}}$

$=\frac{4x^2-x+2}{\sqrt{x^2+1}}$

(3) $y'=(x^{2\pi})'\cos x+x^{2\pi}(\cos x)'$

$=2\pi x^{2\pi-1}\cos x-x^{2\pi}\sin x$

$=x^{2\pi-1}(2\pi\cos x-x\sin x)$

(4) $y'=\frac{(1+\sin x)'}{2\sqrt{1+\sin x}}$

$=\frac{\cos x}{2\sqrt{1+\sin x}}$

문제 07-1 답 $\sqrt{2}$

$f(x)=\ln(x-\sqrt{x^2-1})$에서

$f'(x)=\frac{(x-\sqrt{x^2-1})'}{x-\sqrt{x^2-1}}$

$=\frac{1-\frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}}{x-\sqrt{x^2-1}}$

$=\frac{\frac{\sqrt{x^2-1}-x}{\sqrt{x^2-1}}}{x-\sqrt{x^2-1}}$

$=\frac{\sqrt{x^2-1}-x}{\sqrt{x^2-1}(x-\sqrt{x^2-1})}$

$=-\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

이때 $f'(a)+1=0$이므로

$-\frac{1}{\sqrt{a^2-1}}+1=0,\ \sqrt{a^2-1}=1$

$a^2=2\qquad\therefore a=\sqrt{2}\ (\because a>0)$

3 개념 CHECK

p.107

1. 답 (1) $\boldsymbol{\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{t}}$ (2) $\boldsymbol{\frac{dy}{dx}=-\frac{3t^2}{2t+1}}$

(1) x, y를 각각 t에 대하여 미분하면

$\frac{dx}{dt}=6t^2,\ \frac{dy}{dt}=-6t$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{-6t}{6t^2}=-\frac{1}{t}$

(2) x, y를 각각 t에 대하여 미분하면

$\frac{dx}{dt}=2t+1,\ \frac{dy}{dt}=-3t^2$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=-\frac{3t^2}{2t+1}$

유제 08 답 (1) $\boldsymbol{\frac{dy}{dx}=\frac{t^2+1}{2t}}$

(2) $\boldsymbol{\frac{dy}{dx}=24\sqrt{t}(3t-1)^3}$

(3) $\boldsymbol{\frac{dy}{dx}=-\frac{2}{3}\cot t}$

(4) $\boldsymbol{\frac{dy}{dx}=2\sin t}$

(1) x, y를 각각 t에 대하여 미분하면

$$\frac{dx}{dt}=\frac{2t(1-t^2)-(1+t^2)\times(-2t)}{(1-t^2)^2}$$
$$=\frac{4t}{(1-t^2)^2}$$
$$\frac{dy}{dt}=\frac{2(1-t^2)-2t\times(-2t)}{(1-t^2)^2}$$
$$=\frac{2(t^2+1)}{(1-t^2)^2}$$
$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{2(t^2+1)}{(1-t^2)^2}}{\frac{4t}{(1-t^2)^2}}=\frac{t^2+1}{2t}$$

(2) x, y를 각각 t에 대하여 미분하면

$$\frac{dx}{dt}=\frac{1}{2\sqrt{t}}$$
$$\frac{dy}{dt}=4(3t-1)^3\times3=12(3t-1)^3$$
$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{12(3t-1)^3}{\frac{1}{2\sqrt{t}}}=24\sqrt{t}(3t-1)^3$$

(3) x, y를 각각 t에 대하여 미분하면

$$\frac{dx}{dt}=-3\sin t$$
$$\frac{dy}{dt}=2\cos t$$
$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{2\cos t}{-3\sin t}=-\frac{2}{3}\cot t$$

(4) x, y를 각각 t에 대하여 미분하면

$$\frac{dx}{dt}=2\sec^2 t$$
$$\frac{dy}{dt}=4\sec t\tan t$$
$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{4\sec t\tan t}{2\sec^2 t}$$
$$=\frac{2\tan t}{\sec t}=2\sin t$$

문제 08-1 답 $\boldsymbol{\frac{1}{4}}$

x, y를 각각 t에 대하여 미분하면

$$\frac{dx}{dt}=\frac{t-(t-1)}{t^2}=\frac{1}{t^2}$$
$$\frac{dy}{dt}=\frac{(t+1)-t}{(t+1)^2}=\frac{1}{(t+1)^2}$$
$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{1}{(t+1)^2}}{\frac{1}{t^2}}=\frac{t^2}{(t+1)^2}$$

따라서 $t=1$일 때, $\frac{dy}{dx}$의 값은

$$\frac{1^2}{(1+1)^2}=\frac{1}{4}$$

유제 09 답 (1) $\boldsymbol{\frac{dy}{dx}=\frac{3x^2+1}{6y^2}}$ **(단, $\boldsymbol{y\neq0}$)**

(2) $\boldsymbol{\frac{dy}{dx}=\frac{-x+1}{2y(y^2+1)}}$ **(단, $\boldsymbol{y\neq0}$)**

(3) $\boldsymbol{\frac{dy}{dx}=\frac{x^3+3x^2}{y^3}}$ **(단, $\boldsymbol{y\neq0}$)**

(4) $\boldsymbol{\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}}$

(1) 주어진 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$3x^2+1-6y^2\frac{dy}{dx}=0$$
$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{3x^2+1}{6y^2}\ (\text{단, } y\neq0)$$

(2) 주어진 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$2(x-1)+2(y^2+1)\times2y\frac{dy}{dx}=0$$
$$2(x-1)+4y(y^2+1)\frac{dy}{dx}=0$$
$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{-x+1}{2y(y^2+1)}\ (\text{단, } y\neq0)$$

(3) 주어진 식의 양변을 제곱하면

$$y^4=x^4+4x^3$$

양변을 x에 대하여 미분하면

$$4y^3\frac{dy}{dx}=4x^3+12x^2$$
$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{x^3+3x^2}{y^3}\ (\text{단, } y\neq0)$$

(4) 주어진 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\times\frac{dy}{dx}=0$$
$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}$$

문제 09-1 답 $-\frac{5}{7}$

$2x^3+3y^3-xy^2=4$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$6x^2+9y^2\frac{dy}{dx}-y^2-2xy\frac{dy}{dx}=0$

$(2xy-9y^2)\frac{dy}{dx}=6x^2-y^2$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{6x^2-y^2}{2xy-9y^2}$ (단, $2xy\neq 9y^2$)

따라서 점 $(1, 1)$에서의 접선의 기울기는

$\frac{6\times 1^2-1^2}{2\times 1\times 1-9\times 1^2}=-\frac{5}{7}$

유제 10 답 (1) $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{3y^2+6y+4}$

(2) $\frac{dy}{dx}=\frac{(y+1)^3}{2y}$

(3) $\frac{dy}{dx}=\frac{2}{3\sqrt[3]{(2x-1)^2}}$ $\left(\text{단, } x\neq\frac{1}{2}\right)$

(4) $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2e^{2y}+5}$

(1) 주어진 식의 양변을 y에 대하여 미분하면

$\frac{dx}{dy}=3y^2+6y+4$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{3y^2+6y+4}$

(2) 주어진 식의 양변을 y에 대하여 미분하면

$\frac{dx}{dy}=2\times\frac{y}{y+1}\times\left(\frac{y}{y+1}\right)'$

$=2\times\frac{y}{y+1}\times\frac{(y+1)-y}{(y+1)^2}$

$=\frac{2y}{(y+1)^3}$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{(y+1)^3}{2y}$

(3) 주어진 식의 양변을 세제곱하면

$y^3=2x-1$

$\therefore x=\frac{y^3+1}{2}$

양변을 y에 대하여 미분하면

$\frac{dx}{dy}=\frac{3y^2}{2}$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{2}{3y^2}=\frac{2}{3\sqrt[3]{(2x-1)^2}}$ $\left(\text{단, } x\neq\frac{1}{2}\right)$

(4) 주어진 식의 양변을 y에 대하여 미분하면

$\frac{dx}{dy}=2e^{2y}+5$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{2e^{2y}+5}$

문제 10-1 답 1

$x=\ln(\sec y)$의 양변을 y에 대하여 미분하면

$\frac{dx}{dy}=\frac{(\sec y)'}{\sec y}=\frac{\sec y\tan y}{\sec y}=\tan y$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{\tan y}$

따라서 $y=\frac{\pi}{4}$에서의 $\frac{dy}{dx}$의 값은

$\frac{1}{\tan\frac{\pi}{4}}=1$

유제 11 답 3

$g(-2)=a$라 하면 $f(a)=-2$이므로

$\frac{a-2}{a+1}=-2$

$a-2=-2(a+1)$ $\quad\therefore a=0$

$\therefore g(-2)=0$

이때 $f'(x)=\frac{(x+1)-(x-2)}{(x+1)^2}=\frac{3}{(x+1)^2}$이므로

$f'(0)=3$

$\therefore \frac{1}{g'(-2)}=f'(g(-2))=f'(0)=3$

문제 11-1 답 1

$g(0)=a$라 하면 $f(a)=0$이므로

$\ln(\ln a)=0$

$\ln a=1$ $\quad\therefore a=e$

$\therefore g(0)=e$

이때 $f'(x)=\frac{(\ln x)'}{\ln x}=\frac{1}{x\ln x}$이므로

$f'(e)=\frac{1}{e\ln e}=\frac{1}{e}$

$\therefore g'(0)=\frac{1}{f'(g(0))}=\frac{1}{f'(e)}=e$

$\therefore \frac{g'(0)}{g(0)}=\frac{e}{e}=1$

문제 11-2 답 1

$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-2}{x-1}=1$에서 $\lim_{x\to 1}(x-1)=0$이고 극한값이 존재하므로

$\lim_{x\to 1}\{f(x)-2\}=0$

따라서 $f(1)=2$이므로 $g(2)=1$

$\therefore \lim_{x\to 1}\frac{f(x)-2}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$

$=f'(1)=1$

$\therefore g'(2)=\frac{1}{f'(g(2))}=\frac{1}{f'(1)}=1$

개념편

5 개념 CHECK

p.113

1. 답 (1) $\boldsymbol{y''=12x^2+12x}$ (2) $\boldsymbol{y''=\dfrac{2}{x^3}}$

(3) $\boldsymbol{y''=-\dfrac{1}{4x\sqrt{x}}}$ (4) $\boldsymbol{y''=4e^{2x+1}}$

(5) $\boldsymbol{y''=-\cos x}$ (6) $\boldsymbol{y''=-\dfrac{1}{x^2\ln 2}}$

(1) $y'=4x^3+6x^2-3$

$\therefore y''=12x^2+12x$

(2) $y'=-x^{-2}$

$\therefore y''=2x^{-3}=\dfrac{2}{x^3}$

(3) $y'=\dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$

$\therefore y''=-\dfrac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}=-\dfrac{1}{4x\sqrt{x}}$

(4) $y'=2e^{2x+1}$

$\therefore y''=4e^{2x+1}$

(5) $y'=-\sin x$

$\therefore y''=-\cos x$

(6) $y'=\dfrac{1}{x\ln 2}$

$\therefore y''=-\dfrac{1}{x^2\ln 2}$

5 유제 & 문제

p.114

유제 12 답 (1) $\boldsymbol{y''=xe^x(x^2+6x+6)}$

(2) $\boldsymbol{y''=-4\sin x\cos x}$

(3) $\boldsymbol{y''=-\dfrac{\ln x-2}{x(\ln x)^3}}$

(4) $\boldsymbol{y''=\dfrac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}}$

(1) $y'=(x^3)'e^x+x^3(e^x)'$

$=3x^2e^x+x^3e^x$

$=e^x(x^3+3x^2)$

$\therefore y''=(e^x)'(x^3+3x^2)+e^x(x^3+3x^2)'$

$=e^x(x^3+3x^2)+e^x(3x^2+6x)$

$=xe^x(x^2+6x+6)$

(2) $y'=(\sin x)'\cos x+\sin x(\cos x)'$

$=\cos x\times\cos x+\sin x\times(-\sin x)$

$=\cos^2 x-\sin^2 x$

$=1-2\sin^2 x$

$\therefore y''=-4\sin x(\sin x)'$

$=-4\sin x\cos x$

(3) $y'=\dfrac{(x)'\ln x-x(\ln x)'}{(\ln x)^2}$

$=\dfrac{\ln x-x\times\dfrac{1}{x}}{(\ln x)^2}$

$=\dfrac{\ln x-1}{(\ln x)^2}$

$\therefore y''=\dfrac{(\ln x-1)'(\ln x)^2-(\ln x-1)\{(\ln x)^2\}'}{\{(\ln x)^2\}^2}$

$=\dfrac{\dfrac{1}{x}\times(\ln x)^2-(\ln x-1)\times 2\ln x\times\dfrac{1}{x}}{(\ln x)^4}$

$=\dfrac{-\ln x(\ln x-2)}{x(\ln x)^4}$

$=-\dfrac{\ln x-2}{x(\ln x)^3}$

(4) $y'=\dfrac{(x^2+1)'}{2\sqrt{x^2+1}}=\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

$\therefore y''=\dfrac{(x)'\sqrt{x^2+1}-x(\sqrt{x^2+1})'}{(\sqrt{x^2+1})^2}$

$=\dfrac{\sqrt{x^2+1}-x\times\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}$

$=\dfrac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$

문제 12-1 답 $\boldsymbol{-\dfrac{4}{3}}$

$f'(x)=\dfrac{(\sin x)'}{\sin x}=\dfrac{\cos x}{\sin x}=\cot x$이므로

$f''(x)=-\csc^2 x$

$\therefore f''\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=-\csc^2\dfrac{\pi}{3}=-\dfrac{1}{\sin^2\dfrac{\pi}{3}}=-\dfrac{4}{3}$

문제 12-2 답 $\boldsymbol{a=-1,\ b=-1}$

$f'(x)=(x+a)'e^{bx}+(x+a)(e^{bx})'$

$=e^{bx}+(x+a)\times be^{bx}$

$=e^{bx}(1+bx+ab)$

$\therefore f''(x)=(e^{bx})'(1+bx+ab)+e^{bx}(1+bx+ab)'$

$=be^{bx}(1+bx+ab)+e^{bx}\times b$

$=be^{bx}(2+bx+ab)$

$f'(0)=2$에서

$1+ab=2 \quad \therefore ab=1$ …… ㉠

$f''(0)=-3$에서

$b(2+ab)=-3$

위의 식에 ㉠을 대입하면

$3b=-3 \quad \therefore b=-1$

이를 ㉠에 대입하면

$-a=1 \quad \therefore a=-1$

기본 연습문제 p.115~117

1 ①	2 $\frac{8}{3}$	3 ③	4 $-2\pi^2$	5 -6
6 $\frac{3}{2}$	7 4	8 ②	9 ④	10 ⑤
11 4	12 3			

1 $f'(x)=\frac{(ax+b)'(x^2+1)-(ax+b)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}$

$=\frac{a(x^2+1)-(ax+b)\times 2x}{(x^2+1)^2}$

$=\frac{-ax^2-2bx+a}{(x^2+1)^2}$

$f'(1)=2$에서

$\frac{-a-2b+a}{(1+1)^2}=2,\ -\frac{b}{2}=2$

$\therefore\ b=-4$ ...... ㉠

또 $f'(2)=1$에서

$\frac{-4a-4b+a}{(4+1)^2}=1,\ \frac{-3a-4b}{25}=1$

$\therefore\ 3a+4b=-25$ ...... ㉡

㉠을 ㉡에 대입하여 풀면 $a=-3$

따라서 $f(x)=\frac{-3x-4}{x^2+1}$이므로

$f(1)=-\frac{7}{2}$

2 $\lim_{h\to0}\frac{f\left(\frac{\pi}{3}+h\right)-f\left(\frac{\pi}{3}-h\right)}{2h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f\left(\frac{\pi}{3}+h\right)-f\left(\frac{\pi}{3}\right)+f\left(\frac{\pi}{3}\right)-f\left(\frac{\pi}{3}-h\right)}{2h}$

$=\frac{1}{2}\lim_{h\to0}\frac{f\left(\frac{\pi}{3}+h\right)-f\left(\frac{\pi}{3}\right)}{h}$

$+\frac{1}{2}\lim_{h\to0}\frac{f\left(\frac{\pi}{3}-h\right)-f\left(\frac{\pi}{3}\right)}{-h}$

$=\frac{1}{2}f'\left(\frac{\pi}{3}\right)+\frac{1}{2}f'\left(\frac{\pi}{3}\right)$

$=f'\left(\frac{\pi}{3}\right)$

이때 $f'(x)=\sec^2x-\csc^2x$이므로

$f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sec^2\frac{\pi}{3}-\csc^2\frac{\pi}{3}=4-\frac{4}{3}=\frac{8}{3}$

3 $f'(x)=\{(x^2+1)^2\}'e^{x^2}+(x^2+1)^2(e^{x^2})'$

$=2(x^2+1)\times 2xe^{x^2}+(x^2+1)^2\times e^{x^2}\times 2x$

$=2x(x^2+1)(x^2+3)e^{x^2}$

$\therefore\ f'(1)=2\times2\times4\times e=16e$

4 $\lim_{x\to0}\frac{f(\sin 2\pi x)-f(\tan \pi x)}{x}$

$=\lim_{x\to0}\frac{f(\sin 2\pi x)-f(0)+f(0)-f(\tan \pi x)}{x}$

$=\lim_{x\to0}\frac{f(\sin 2\pi x)-f(0)}{x}-\lim_{x\to0}\frac{f(\tan \pi x)-f(0)}{x}$

$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{f(\sin 2\pi x)-f(0)}{\sin 2\pi x-0}\times\frac{\sin 2\pi x}{2\pi x}\times 2\pi\right\}$

$-\lim_{x\to0}\left\{\frac{f(\tan \pi x)-f(0)}{\tan \pi x-0}\times\frac{\tan \pi x}{\pi x}\times \pi\right\}$

$=f'(0)\times1\times2\pi-f'(0)\times1\times\pi$

$=\pi f'(0)$

이때 $f(x)=\sin(2\pi x+\pi)+\cos(\pi x^2+\pi)$에서

$f'(x)=\cos(2\pi x+\pi)\times 2\pi-\sin(\pi x^2+\pi)\times 2\pi x$

$=2\pi\{\cos(2\pi x+\pi)-x\sin(\pi x^2+\pi)\}$

$\therefore\ \pi f'(0)=\pi\times 2\pi\cos\pi=-2\pi^2$

5 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(3,\ -2)$에서의 접선의 방정식이

$y=3x-11$이므로

$f(3)=-2,\ f'(3)=3$ ...... ㉠

또 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(1,\ 3)$에서의 접선의 방정식이

$y=-2x+5$이므로

$g(1)=3,\ g'(1)=-2$ ...... ㉡

㉠, ㉡에서 $f(g(1))=f(3)=-2$

$\therefore\ \lim_{x\to1}\frac{f(g(x))+2}{x-1}$

$=\lim_{x\to1}\frac{f(g(x))-f(g(1))}{x-1}$

$=\lim_{x\to1}\left\{\frac{f(g(x))-f(g(1))}{g(x)-g(1)}\times\frac{g(x)-g(1)}{x-1}\right\}$

$=\lim_{x\to1}\frac{f(g(x))-f(g(1))}{g(x)-g(1)}\times\lim_{x\to1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}$

$=f'(g(1))\times g'(1)$

$=f'(3)\times(-2)$

$=3\times(-2)=-6$

6 $f'(x)=\frac{(x^2+2x)'}{x^2+2x}=\frac{2(x+1)}{x^2+2x}$

$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{f'(n)}{n+1}$

$=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{2(n+1)}{n^2+2n}\times\frac{1}{n+1}\right\}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n(n+2)}$

$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{k(k+2)}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\left(\frac{1}{2}-\cancel{\frac{1}{4}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{5}}\right)\right.$

$\left.+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{n-1}}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{n}}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}$

$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{3}{2}$

개념편

7 $h'(x)=g'(f(x))f'(x)$이고 $f(1)=1$이므로

$h'(1)=g'(f(1))f'(1)=g'(1)f'(1)$

$\therefore g'(1)f'(1)=12$ …… ㉠

이때 $f(x)=(2x-1)\sqrt{2x-1}=(2x-1)^{\frac{3}{2}}$이므로

$$f'(x)=\frac{3}{2}(2x-1)^{\frac{1}{2}}\times(2x-1)'$$
$$=\frac{3}{2}(2x-1)^{\frac{1}{2}}\times 2$$
$$=3\sqrt{2x-1}$$

$\therefore f'(1)=3$

이를 ㉠에 대입하면

$3g'(1)=12$ $\therefore g'(1)=4$

8 x, y를 각각 t에 대하여 미분하면

$\dfrac{dx}{dt}=t^2+t-2$, $\dfrac{dy}{dt}=t^3-2t+1$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{t^3-2t+1}{t^2+t-2}$$

$$\therefore \lim_{t\to1}\frac{dy}{dx}=\lim_{t\to1}\frac{t^3-2t+1}{t^2+t-2}$$
$$=\lim_{t\to1}\frac{(t-1)(t^2+t-1)}{(t-1)(t+2)}$$
$$=\lim_{t\to1}\frac{t^2+t-1}{t+2}$$
$$=\frac{1}{3}$$

9 주어진 식의 양변에 xy를 곱하면

$3y^2+2x^2=x^2y^2$

양변을 x에 대하여 미분하면

$6y\dfrac{dy}{dx}+4x=2xy^2+x^2\times2y\dfrac{dy}{dx}$

$(6y-2x^2y)\dfrac{dy}{dx}=2xy^2-4x$

$\therefore \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x(y^2-2)}{y(3-x^2)}$ (단, $y(3-x^2)\neq0$)

따라서 $a=2$, $b=3$이므로

$a+b=5$

10 $y=f^{-1}(x)$에서 $x=f(y)$이므로

$x=\tan y$ …… ㉠

양변을 y에 대하여 미분하면

$\dfrac{dx}{dy}=\sec^2 y$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{\sec^2 y}$$
$$=\frac{1}{1+\tan^2 y}=\frac{1}{1+x^2}\ (\because ㉠)$$

11 $\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{x-2}{f(x)-3}=4$에서 $\displaystyle\lim_{x\to2}(x-2)=0$이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로

$\displaystyle\lim_{x\to2}\{f(x)-3\}=0$

따라서 $f(2)=3$이므로 $g(3)=2$

$$\therefore \lim_{x\to2}\frac{x-2}{f(x)-3}=\lim_{x\to2}\frac{x-2}{f(x)-f(2)}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{1}{\frac{f(x)-f(2)}{x-2}}$$
$$=\frac{1}{f'(2)}$$
$$=4$$

$$\therefore g'(3)=\frac{1}{f'(g(3))}=\frac{1}{f'(2)}=4$$

12 $f(x)=x^2\ln x$에서

$$f'(x)=2x\ln x+x^2\times\frac{1}{x}$$
$$=2x\ln x+x$$
$$\therefore f''(x)=2\ln x+2x\times\frac{1}{x}+1$$
$$=2\ln x+3$$

방정식 $f(x)+f'(x)-4f''(x)=x-12$에 $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$를 대입하면

$x^2\ln x+2x\ln x+x-4(2\ln x+3)=x-12$

$(x^2+2x-8)\ln x=0$

$(x+4)(x-2)\ln x=0$

$\therefore x=-4$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$

그런데 $x>0$이므로

$x=1$ 또는 $x=2$

따라서 방정식을 만족하는 모든 x의 값의 합은

$1+2=3$

실전 연습문제

p.118

1 $\dfrac{9}{e}$ **2** 1 **3** $\dfrac{\pi}{2}$ **4** -8

1 $g(x)=e^x$이라 하면 $g'(x)=e^x$이므로

$$\lim_{x\to a}\frac{e^x-e^a}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}$$
$$=g'(a)$$
$$=e^a$$

$\therefore f(a)=\lim_{x\to a}\frac{x^3-a^3}{e^x-e^a}$

$=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)(x^2+ax+a^2)}{e^x-e^a}$

$=\lim_{x\to a}\frac{x^2+ax+a^2}{\frac{e^x-e^a}{x-a}}$

$=\frac{3a^2}{e^a}$

$f(a)=\frac{3a^2}{e^a}$의 양변을 a에 대하여 미분하면

$f'(a)=\frac{6ae^a-3a^2e^a}{e^{2a}}=\frac{6a-3a^2}{e^a}$

$\therefore \lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1-2h)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)+f(1)-f(1-2h)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}+2\lim_{h\to 0}\frac{f(1-2h)-f(1)}{-2h}$

$=f'(1)+2f'(1)$

$=3f'(1)$

$=3\times\frac{3}{e}$

$=\frac{9}{e}$

2 $f(x)=x^x\ (x>0)$이라 하면 $f(2)=2^2=4$이므로

$\lim_{x\to 2}\frac{x^x-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$

$=f'(2)$

$=\alpha$ …… ㉠

이때 함수 $f(x)$의 양변에 자연로그를 취하면

$\ln f(x)=x\ln x$

양변을 x에 대하여 미분하면

$\frac{f'(x)}{f(x)}=1\times\ln x+x\times\frac{1}{x}=\ln x+1$

$\therefore f'(x)=f(x)(\ln x+1)$

$=x^x(\ln x+1)$

$\therefore f'(2)=2^2(\ln 2+1)$

$=4(\ln 2+1)$

따라서 ㉠에서 $4(\ln 2+1)=\alpha$이므로

$\frac{\alpha}{4}=\ln 2+1$

그런데 $e=2.7182\cdots$이므로

$1<2<e$

양변에 자연로그를 취하면

$0<\ln 2<1$

$\therefore 1<\ln 2+1<2$

$\therefore \left[\frac{\alpha}{4}\right]=[\ln 2+1]=1$

3 x, y를 각각 θ에 대하여 미분하면

$\frac{dx}{d\theta}=1-\cos\theta$

$\frac{dy}{d\theta}=-\sin\theta$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\frac{-\sin\theta}{1-\cos\theta}$

이때 접선의 기울기가 -1이므로

$\frac{-\sin\theta}{1-\cos\theta}=-1$

$-\sin\theta=-1+\cos\theta$

$\sin\theta+\cos\theta=1$ …… ㉠

㉠의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=1$

$1+2\sin\theta\cos\theta=1$

$\sin\theta\cos\theta=0$

$\therefore \sin\theta=0$ 또는 $\cos\theta=0$

$\therefore \theta=\frac{\pi}{2}$ 또는 $\theta=\pi$ 또는 $\theta=\frac{3}{2}\pi$ ($\because 0<\theta<2\pi$)

이때 ㉠을 만족하는 θ의 값은

$\theta=\frac{\pi}{2}$

따라서 점 P의 x좌표와 y좌표는

$a=\frac{\pi}{2}-\sin\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}-1$

$b=1+\cos\frac{\pi}{2}=1$

$\therefore a+b=\left(\frac{\pi}{2}-1\right)+1=\frac{\pi}{2}$

4 $h'(x)=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$이므로

$h'(1)=\frac{f'(1)g(1)-f(1)g'(1)}{\{g(1)\}^2}$

$f(x)=2x^3+x+4$에서

$f'(x)=6x^2+1$이므로

$f(1)=7$, $f'(1)=7$

한편 $g(1)=a$라 하면 $f(a)=1$이므로

$2a^3+a+4=1$

$2a^3+a+3=0$

$(a+1)(2a^2-2a+3)=0$

$\therefore a=-1$ ($\because 2a^2-2a+3>0$)

따라서 $g(1)=-1$이므로

$g'(1)=\frac{1}{f'(g(1))}=\frac{1}{f'(-1)}=\frac{1}{7}$

$\therefore h'(1)=\frac{7\times(-1)-7\times\frac{1}{7}}{(-1)^2}=-8$

01 접선의 방정식과 함수의 그래프

1 개념 CHECK

p.120

1. 답 (1) **1** (2) $-\sqrt{2}$

(1) $f(x)=e^x$이라 하면 $f'(x)=e^x$

따라서 점 $(0,\ 1)$에서의 접선의 기울기는

$f'(0)=1$

(2) $f(x)=\cos x-\sin x$라 하면

$f'(x)=-\sin x-\cos x$

따라서 점 $\left(\frac{\pi}{4},\ 0\right)$에서의 접선의 기울기는

$f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}=-\sqrt{2}$

1 유제 & 문제

p.121~124

유제 01 답 (1) $\boldsymbol{y=3x}$ (2) $\boldsymbol{y=\frac{\pi}{2}x-\frac{\pi}{2}+1}$

(1) $f(x)=\sqrt{6x-1}$이라 하면

$f'(x)=\frac{6}{2\sqrt{6x-1}}=\frac{3}{\sqrt{6x-1}}$

점 $\left(\frac{1}{3},\ 1\right)$에서의 접선의 기울기는

$f'\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{3}{\sqrt{2-1}}=3$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$y-1=3\left(x-\frac{1}{3}\right)$ $\therefore\ y=3x$

(2) $f(x)=\tan\frac{\pi}{4}x$라 하면

$f'(x)=\sec^2\frac{\pi}{4}x\times\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}\sec^2\frac{\pi}{4}x$

점 $(1,\ 1)$에서의 접선의 기울기는

$f'(1)=\frac{\pi}{4}\sec^2\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}\times 2=\frac{\pi}{2}$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$y-1=\frac{\pi}{2}(x-1)$ $\therefore\ y=\frac{\pi}{2}x-\frac{\pi}{2}+1$

문제 01-1 답 $\boldsymbol{y=-\frac{1}{3}x+\frac{7}{3}e}$

$f(x)=x+x\ln x$라 하면

$f'(x)=1+\ln x+x\times\frac{1}{x}=\ln x+2$

점 $(e,\ 2e)$에서의 접선의 기울기는

$f'(e)=1+2=3$

이때 점 $(e,\ 2e)$에서의 접선에 수직인 직선의 기울기는

$-\frac{1}{f'(e)}=-\frac{1}{3}$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$y-2e=-\frac{1}{3}(x-e)$ $\therefore\ y=-\frac{1}{3}x+\frac{7}{3}e$

문제 01-2 답 $\boldsymbol{\frac{1}{4e^2}}$

$f(x)=e^x$이라 하면 $f'(x)=e^x$

점 $(1,\ e)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=e$이므로 점 $(1,\ e)$에서의 접선의 방정식은

$y-e=e(x-1)$ $\therefore\ y=ex$

이때 직선 $y=ex$가 곡선 $y=\sqrt{x-k}$에 접하므로 방정식 $ex=\sqrt{x-k}$는 중근을 갖는다.

따라서 이차방정식 $e^2x^2-x+k=0$의 판별식을 D라 하면

$D=1-4e^2k=0$ $\therefore\ k=\frac{1}{4e^2}$

유제 02 답 (1) $\boldsymbol{y=\frac{1}{2}x-1+\ln 6}$

(2) $\boldsymbol{y=-x+\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}}$

(3) $\boldsymbol{y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{4\sqrt{3}}{3}}$

(1) $f(x)=\ln 3x$라 하면 $f'(x)=\frac{3}{3x}=\frac{1}{x}$

접점의 좌표를 $(t,\ \ln 3t)$라 하면 직선 $x-2y+3=0$, 즉 $y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$에 평행한 접선의 기울기는 $\frac{1}{2}$이므로

$f'(t)=\frac{1}{2}$에서

$\frac{1}{t}=\frac{1}{2}$ $\therefore\ t=2$

따라서 접점의 좌표는 $(2,\ \ln 6)$이므로 구하는 접선의 방정식은

$y-\ln 6=\frac{1}{2}(x-2)$ $\therefore\ y=\frac{1}{2}x-1+\ln 6$

(2) $f(x)=\sin 2x$라 하면

$f'(x)=\cos 2x\times 2=2\cos 2x$

접점의 좌표를 $(t,\ \sin 2t)$라 하면 접선의 기울기가 -1이므로 $f'(t)=-1$에서

$2\cos 2t=-1$ $\therefore\ \cos 2t=-\frac{1}{2}$

$0\le t\le\frac{\pi}{2}$에서 $0\le 2t\le\pi$이므로

$2t=\frac{2}{3}\pi$ $\therefore\ t=\frac{\pi}{3}$

따라서 접점의 좌표는 $\left(\frac{\pi}{3},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$이므로 구하는 접선의 방정식은

$y-\frac{\sqrt{3}}{2}=-\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$ $\therefore\ y=-x+\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}$

(3) $f(x)=2\sqrt{x+1}$이라 하면

$f'(x)=\dfrac{2}{2\sqrt{x+1}}=\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$

접점의 좌표를 $(t,\ 2\sqrt{t+1})$이라 하면 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 30°인 접선의 기울기는

$\tan 30°=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$이므로 $f'(t)=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$에서

$\dfrac{1}{\sqrt{t+1}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$\therefore\ t=2$

따라서 접점의 좌표는 $(2,\ 2\sqrt{3})$이므로 구하는 접선의 방정식은

$y-2\sqrt{3}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}(x-2)$

$\therefore\ y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x+\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$

문제 02-1 답 **$3-\ln 2$**

$f(x)=e^x+2e^{-x}$이라 하면 $f'(x)=e^x-2e^{-x}$

접점의 좌표를 $(t,\ e^t+2e^{-t})$이라 하면 접선의 기울기가 1이므로 $f'(t)=1$에서

$e^t-2e^{-t}=1$

$e^t=A\,(A>0)$로 놓으면

$A-2A^{-1}=1,\ A^2-A-2=0$

$(A+1)(A-2)=0$

$\therefore\ A=2\ (\because\ A>0)$

즉, $e^t=2$이므로 $t=\ln 2$

따라서 접점의 좌표가 $(\ln 2,\ 3)$이고 직선 $y=x+a$가 이 접점을 지나므로

$3=\ln 2+a$

$\therefore\ a=3-\ln 2$

문제 02-2 답 **$\dfrac{9}{2}$**

$f(x)=a-2\cos^2 x,\ g(x)=2\sin x$라 하면

$f'(x)=4\cos x\sin x,\ g'(x)=2\cos x$

두 곡선이 $x=t$인 점에서 접한다고 하면 두 곡선이 $x=t$인 점에서 만나므로

$f(t)=g(t)$

$a-2\cos^2 t=2\sin t$

$\therefore\ a=2\cos^2 t+2\sin t$ …… ㉠

또 $x=t$인 점에서의 접선의 기울기가 같으므로

$f'(t)=g'(t)$

$4\cos t\sin t=2\cos t$

$\cos t(2\sin t-1)=0$

$\therefore\ \cos t=0$ 또는 $\sin t=\dfrac{1}{2}$

(i) $\cos t=0$에서 $t=\dfrac{\pi}{2}\ \left(\because\ 0\le t\le\dfrac{\pi}{2}\right)$

$t=\dfrac{\pi}{2}$를 ㉠에 대입하면

$a=2\cos^2\dfrac{\pi}{2}+2\sin\dfrac{\pi}{2}=2$

(ii) $\sin t=\dfrac{1}{2}$에서 $t=\dfrac{\pi}{6}\ \left(\because\ 0\le t\le\dfrac{\pi}{2}\right)$

$t=\dfrac{\pi}{6}$를 ㉠에 대입하면

$a=2\cos^2\dfrac{\pi}{6}+2\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{5}{2}$

(i), (ii)에 의해 모든 상수 a의 값의 합은

$2+\dfrac{5}{2}=\dfrac{9}{2}$

유제 03 답 **$y=\dfrac{1}{4}x+6$**

$f(x)=\sqrt{x}+5$라 하면 $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

접점의 좌표를 $(t,\ \sqrt{t}+5)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=\dfrac{1}{2\sqrt{t}}$이므로 접선의 방정식은

$y-(\sqrt{t}+5)=\dfrac{1}{2\sqrt{t}}(x-t)$

$\therefore\ y=\dfrac{1}{2\sqrt{t}}x+\dfrac{\sqrt{t}}{2}+5$ …… ㉠

이 직선이 점 $(-4,\ 5)$를 지나므로

$5=-\dfrac{2}{\sqrt{t}}+\dfrac{\sqrt{t}}{2}+5$

$\dfrac{2}{\sqrt{t}}=\dfrac{\sqrt{t}}{2}\qquad\therefore\ t=4$

이를 ㉠에 대입하여 접선의 방정식을 구하면

$y=\dfrac{1}{4}x+6$

문제 03-1 답 **e**

$f(x)=xe^x$이라 하면

$f'(x)=e^x+xe^x=e^x(1+x)$

접점의 좌표를 $(t,\ te^t)$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=e^t(1+t)$이므로 접선의 방정식은

$y-te^t=e^t(1+t)(x-t)$

$\therefore\ y=e^t(1+t)x-t^2e^t$

이 직선이 점 $(1,\ 0)$을 지나므로

$0=e^t(1+t)-t^2e^t,\ (t^2-t-1)e^t=0$

$\therefore\ t^2-t-1=0\ (\because\ e^t>0)$

이때 이차방정식 $t^2-t-1=0$의 두 근을 $\alpha,\ \beta$라 하면 근과 계수의 관계에 의해

$\alpha+\beta=1,\ \alpha\beta=-1$

따라서 $x=\alpha$, $x=\beta$에서의 접선의 기울기를 각각 m_1, m_2라 하면

$m_1=f'(\alpha)=e^{\alpha}(1+\alpha)$

$m_2=f'(\beta)=e^{\beta}(1+\beta)$

$\therefore m_1m_2=e^{\alpha}(1+\alpha)e^{\beta}(1+\beta)$

$=e^{\alpha+\beta}(1+\alpha+\beta+\alpha\beta)$

$=e^{1}(1+1-1)=e$

유제 04 답 -4

$f(x)=(x-a)e^{-x}$이라 하면

$f'(x)=e^{-x}-(x-a)e^{-x}=(1+a-x)e^{-x}$

접점의 좌표를 $(t, (t-a)e^{-t})$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=(1+a-t)e^{-t}$이므로 접선의 방정식은

$y-(t-a)e^{-t}=(1+a-t)e^{-t}(x-t)$

이 직선이 점 $(0, 0)$을 지나므로

$-(t-a)e^{-t}=(1+a-t)e^{-t}(-t)$

$e^{-t}>0$이므로 양변을 e^{-t}으로 나누면

$-(t-a)=(1+a-t)(-t)$

$\therefore t^2-at-a=0$ ...... ㉠

곡선 $y=(x-a)e^{-x}$에 오직 하나의 접선을 그을 수 있으려면 방정식 ㉠이 중근을 가져야 하므로 ㉠의 판별식을 D라 하면

$D=(-a)^2-4\times(-a)=0$

$a^2+4a=0$, $a(a+4)=0$

$\therefore a=-4$ ($\because a\neq 0$)

문제 04-1 답 1

$f(x)=\dfrac{x+1}{x}=1+\dfrac{1}{x}$이라 하면

$f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$

접점의 좌표를 $\left(t, 1+\dfrac{1}{t}\right)$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=-\dfrac{1}{t^2}$이므로 접선의 방정식은

$y-\left(1+\dfrac{1}{t}\right)=-\dfrac{1}{t^2}(x-t)$

이 직선이 점 $(2, 1)$을 지나므로

$1-\left(1+\dfrac{1}{t}\right)=-\dfrac{1}{t^2}(2-t)$

$-\dfrac{1}{t}=-\dfrac{2}{t^2}+\dfrac{1}{t}$

$t\neq 0$이므로 양변에 t^2을 곱하여 정리하면

$2t=2$ $\quad\therefore t=1$

따라서 점 $(1, 2)$에서 접하므로 점 $(2, 1)$에서 그을 수 있는 접선의 개수는 1이다.

2 개념 CHECK

p.125

1. 답 **극댓값: 0, 극솟값: -1**

$f(x)=2x^3-3x^2$에서

$f'(x)=6x^2-6x=6x(x-1)$

$f'(x)=0$인 x의 값은

$x=0$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	0 극대	↘	-1 극소	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극대이고 극댓값은 0, $x=1$에서 극소이고 극솟값은 -1이다.

2 유제 & 문제

p.126~128

유제 05 답 (1) **구간 $(-1, 0]$에서 감소,**
구간 $[0, \infty)$에서 증가
(2) **구간 $(0, 2\sqrt{2}]$에서 증가,**
구간 $[2\sqrt{2}, 4)$에서 감소
(3) **구간 $(-\infty, 0]$에서 감소,**
구간 $[0, \infty)$에서 증가
(4) **구간 $\left(0, \dfrac{7}{6}\pi\right]$, $\left[\dfrac{11}{6}\pi, 2\pi\right)$에서 증가,**
구간 $\left[\dfrac{7}{6}\pi, \dfrac{11}{6}\pi\right]$에서 감소

(1) $f(x)=x+\dfrac{1}{x+1}$에서

$f'(x)=1-\dfrac{1}{(x+1)^2}=\dfrac{x(x+2)}{(x+1)^2}$

$f'(x)=0$인 x의 값은

$x=0$ ($\because x>-1$)

$x>-1$에서 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	1	↗

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(-1, 0]$에서 감소하고, 구간 $[0, \infty)$에서 증가한다.

(2) $f(x)=x+\sqrt{16-x^2}$에서

$$f'(x)=1+\frac{-2x}{2\sqrt{16-x^2}}$$
$$=\frac{\sqrt{16-x^2}-x}{\sqrt{16-x^2}}$$

$f'(x)=0$인 x의 값은

$\sqrt{16-x^2}=x$

$16-x^2=x^2$

$x^2=8 \qquad \therefore x=2\sqrt{2}\ (\because x>0)$

$0<x<4$에서 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$2\sqrt{2}$	$\cdots$	4
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$		↗	$4\sqrt{2}$	↘	

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(0,\ 2\sqrt{2}]$에서 증가하고, 구간 $[2\sqrt{2},\ 4)$에서 감소한다.

(3) $f(x)=e^x-x$에서

$f'(x)=e^x-1$

$f'(x)=0$인 x의 값은

$e^x=1 \qquad \therefore x=0$

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	−	0	+
$f(x)$	↘	1	↗

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty,\ 0]$에서 감소하고, 구간 $[0,\ \infty)$에서 증가한다.

(4) $f(x)=\frac{1}{2}x-\cos x$에서

$f'(x)=\frac{1}{2}+\sin x$

$f'(x)=0$인 x의 값은

$\sin x=-\frac{1}{2}$

$\therefore x=\frac{7}{6}\pi$ 또는 $x=\frac{11}{6}\pi\ (\because 0<x<2\pi)$

$0<x<2\pi$에서 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\frac{7}{6}\pi$	$\cdots$	$\frac{11}{6}\pi$	$\cdots$	2π
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$		↗	$\frac{7}{12}\pi+\frac{\sqrt{3}}{2}$	↘	$\frac{11}{12}\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}$	↗	

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $\left(0,\ \frac{7}{6}\pi\right]$, $\left[\frac{11}{6}\pi,\ 2\pi\right)$에서 증가하고, 구간 $\left[\frac{7}{6}\pi,\ \frac{11}{6}\pi\right]$에서 감소한다.

문제 05-1 답 (1) $-1\le a\le 0$ (2) $0<a\le\frac{1}{3}$

$f(x)=(ax^2-1)e^x$에서

$f'(x)=2ax\times e^x+(ax^2-1)e^x$

$=(ax^2+2ax-1)e^x$

(1) 함수 $f(x)$가 구간 $(-\infty,\ \infty)$에서 감소하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\le 0$이어야 하므로

$(ax^2+2ax-1)e^x\le 0$

이때 $e^x>0$이므로

$ax^2+2ax-1\le 0$ ······ ㉠

(i) $a=0$일 때

$-1\le 0$이므로 성립한다.

(ii) $a\ne 0$일 때

이차부등식 ㉠이 모든 실수 x에 대하여 성립해야 하므로

$a<0$

또 이차방정식 $ax^2+2ax-1=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=a^2+a\le 0$

$a(a+1)\le 0$

$\therefore -1\le a\le 0$

그런데 $a<0$이므로

$-1\le a<0$

(i), (ii)에 의해

$-1\le a\le 0$

(2) 함수 $f(x)$가 구간 $[-1,\ 1]$에서 감소하려면 $-1\le x\le 1$에서 $f'(x)\le 0$이어야 하므로

$(ax^2+2ax-1)e^x\le 0$

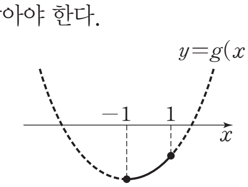
이때 $e^x>0$이므로

$ax^2+2ax-1\le 0$

$g(x)=ax^2+2ax-1\ (a>0)$이라 하면

$g(x)=a(x+1)^2-a-1$

$g(x)\le 0$이어야 하므로 함수 $y=g(x)$의 그래프는 다음 그림과 같아야 한다.



따라서 $g(1)\le 0$에서

$a+2a-1\le 0$

$\therefore a\le\frac{1}{3}$

그런데 $a>0$이므로

$0<a\le\frac{1}{3}$

유제 06 답 (1) 극댓값: 1, 극솟값: -1

(2) 극댓값: 없다., 극솟값: e

(3) 극댓값: $4e^{-2}$, 극솟값: 0

(4) 극댓값: $\frac{3\sqrt{3}}{2}$, 극솟값: $-\frac{3\sqrt{3}}{2}$

(1) $f(x)=\frac{2x}{x^2+1}$에서

$f'(x)=\frac{2(x^2+1)-2x\times 2x}{(x^2+1)^2}$

$=\frac{-2(x+1)(x-1)}{(x^2+1)^2}$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=-1$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	-1 극소	↗	1 극대	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극대이고 극댓값은 1, $x=-1$에서 극소이고 극솟값은 -1이다.

(2) $f(x)=\frac{e^x}{x}$에서

$f'(x)=\frac{e^x\times x-e^x}{x^2}=\frac{e^x(x-1)}{x^2}$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=1$ ($\because e^x>0$)

$x>0$에서 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	e 극소	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극소이고 극솟값은 e, 극댓값은 없다.

(3) $f(x)=x(\ln x)^2$에서 $x>0$이고

$f'(x)=(\ln x)^2+x\times 2\ln x\times\frac{1}{x}$

$=\ln x(\ln x+2)$

$f'(x)=0$인 x의 값은

$\ln x=0$ 또는 $\ln x=-2$

$\therefore x=1$ 또는 $x=e^{-2}$

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	e^{-2}	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$		↗	$4e^{-2}$ 극대	↘	0 극소	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=e^{-2}$에서 극대이고 극댓값은 $4e^{-2}$, $x=1$에서 극소이고 극솟값은 0이다.

다른 풀이 이계도함수를 이용

$f'(x)=\ln x(\ln x+2)$에서

$f''(x)=\frac{1}{x}(\ln x+2)+\ln x\times\frac{1}{x}=\frac{2}{x}(\ln x+1)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=1$ 또는 $x=e^{-2}$

$\therefore f''(1)=2(\ln 1+1)=2>0$,

$f''(e^{-2})=\frac{2}{e^{-2}}(\ln e^{-2}+1)=-2e^2<0$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=e^{-2}$에서 극대이고 극댓값은

$f(e^{-2})=e^{-2}(\ln e^{-2})^2=4e^{-2}$

또 $x=1$에서 극소이고 극솟값은 $f(1)=1\times(\ln 1)^2=0$

(4) $f(x)=2\cos x+\sin 2x$에서

$f'(x)=-2\sin x+2\cos 2x$

$=-2\sin x+2(1-2\sin^2 x)$

$=-2(2\sin^2 x+\sin x-1)$

$=-2(2\sin x-1)(\sin x+1)$

$f'(x)=0$인 x의 값은

$\sin x=\frac{1}{2}$ 또는 $\sin x=-1$

$\therefore x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{5}{6}\pi$ ($\because 0<x<\pi$)

$0<x<\pi$에서 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{5}{6}\pi$	$\cdots$	π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$ 극대	↘	$-\frac{3\sqrt{3}}{2}$ 극소	↗	

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\frac{\pi}{6}$에서 극대이고 극댓값은 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$, $x=\frac{5}{6}\pi$에서 극소이고 극솟값은 $-\frac{3\sqrt{3}}{2}$이다.

다른 풀이 이계도함수를 이용

$f'(x)=-2\sin x+2\cos 2x$에서

$f''(x)=-2\cos x-4\sin 2x$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{5}{6}\pi$

$\therefore f''\left(\frac{\pi}{6}\right)=-2\cos\frac{\pi}{6}-4\sin\frac{\pi}{3}=-3\sqrt{3}<0$,

$f''\left(\frac{5}{6}\pi\right)=-2\cos\frac{5}{6}\pi-4\sin\frac{5}{3}\pi=3\sqrt{3}>0$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\frac{\pi}{6}$에서 극대이고 극댓값은

$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=2\cos\frac{\pi}{6}+\sin\frac{\pi}{3}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$

또 $x=\frac{5}{6}\pi$에서 극소이고 극솟값은

$f\left(\frac{5}{6}\pi\right)=2\cos\frac{5}{6}\pi+\sin\frac{5}{3}\pi=-\frac{3\sqrt{3}}{2}$

문제 06-1 답 **1**

$f(x)=a\cos x-b\cos 2x$에서

$f'(x)=-a\sin x+2b\sin 2x$

$x=\frac{\pi}{3}$에서 극댓값 $\frac{3}{2}$을 가지므로

$f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=0,\ f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3}{2}$

$f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=0$에서

$-\frac{\sqrt{3}}{2}a+\sqrt{3}b=0 \qquad \therefore\ a-2b=0 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3}{2}$에서

$\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b=\frac{3}{2} \qquad \therefore\ a+b=3 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2,\ b=1$

$\therefore\ a-b=1$

문제 06-2 답 $-\frac{9}{8}-2\ln 2$

$f(x)=ax^2-bx+\ln x$에서 $x>0$이고

$f'(x)=2ax-b+\frac{1}{x}$

$x=1$에서 극솟값 -3을 가지므로 $f'(1)=0,\ f(1)=-3$

$f'(1)=0$에서 $2a-b+1=0 \quad \therefore\ 2a-b=-1 \quad \cdots\cdots$ ㉠

$f(1)=-3$에서 $a-b=-3 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2,\ b=5$

$\therefore\ f(x)=2x^2-5x+\ln x$

$\therefore\ f'(x)=4x-5+\frac{1}{x}=\frac{4x^2-5x+1}{x}$

$f'(x)=0$인 x의 값은

$4x^2-5x+1=0,\ (4x-1)(x-1)=0$

$\therefore\ x=\frac{1}{4}$ 또는 $x=1$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\frac{1}{4}$에서 극대이고 극댓값은

$f\left(\frac{1}{4}\right)=-\frac{9}{8}-2\ln 2$

문제 06-3 답 **10**

$f(x)=(x^2-6x+k)e^x$에서

$f'(x)=(2x-6)e^x+(x^2-6x+k)e^x$

$\quad =(x^2-4x+k-6)e^x$

이때 $e^x>0$이므로 함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으려면

$x^2-4x+k-6\ge 0$

따라서 이차방정식 $x^2-4x+k-6=0$이 중근 또는 허근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=4-k+6\le 0 \qquad \therefore\ k\ge 10$

따라서 구하는 상수 k의 최솟값은 10이다.

3 유제 & 문제

p.130~131

유제 07 답 (1) **$x<2$에서 위로 볼록, $x>2$에서 아래로 볼록, 변곡점의 좌표: $(2,\ 2)$**

(2) **$x<-\frac{\sqrt{3}}{3},\ x>\frac{\sqrt{3}}{3}$에서 아래로 볼록, $-\frac{\sqrt{3}}{3}<x<\frac{\sqrt{3}}{3}$에서 위로 볼록**

변곡점의 좌표: $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\ \frac{3}{4}\right),\ \left(\frac{\sqrt{3}}{3},\ \frac{3}{4}\right)$

(3) **$0<x<\frac{1}{2}$에서 위로 볼록, $x>\frac{1}{2}$에서 아래로 볼록,**

변곡점의 좌표: $\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}-\ln 2\right)$

(4) **위로 볼록, 변곡점은 없다.**

(1) $f(x)=x^3-6x^2+9x$라 하면

$f'(x)=3x^2-12x+9$

$f''(x)=6x-12=6(x-2)$

$f''(x)=0$인 x의 값은 $x=2$

따라서 곡선 $y=f(x)$는 $x<2$에서 $f''(x)<0$이므로 위로 볼록하고, $x>2$에서 $f''(x)>0$이므로 아래로 볼록하다.

이때 변곡점의 좌표는 $(2,\ 2)$이다.

(2) $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$이라 하면

$f'(x)=\frac{-2x}{(x^2+1)^2}$

$f''(x)=\frac{-2(x^2+1)^2-(-2x)\times 2(x^2+1)\times 2x}{(x^2+1)^4}$

$\quad =\frac{6x^2-2}{(x^2+1)^3}$

$f''(x)=0$인 x의 값은

$6x^2-2=0,\ x^2=\frac{1}{3}$

$\therefore\ x=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ 또는 $x=\frac{\sqrt{3}}{3}$

따라서 곡선 $y=f(x)$는 $x<-\frac{\sqrt{3}}{3},\ x>\frac{\sqrt{3}}{3}$에서 $f''(x)>0$이므로 아래로 볼록하고, $-\frac{\sqrt{3}}{3}<x<\frac{\sqrt{3}}{3}$에서 $f''(x)<0$이므로 위로 볼록하다.

이때 변곡점의 좌표는 $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\ \frac{3}{4}\right),\ \left(\frac{\sqrt{3}}{3},\ \frac{3}{4}\right)$이다.

(3) $f(x)=2x^2+\ln x$라 하면 $x>0$이고

$f'(x)=4x+\frac{1}{x}$

$f''(x)=4-\frac{1}{x^2}$

$f''(x)=0$인 x의 값은

$4-\frac{1}{x^2}=0 \qquad \therefore\ x=\frac{1}{2}\ (\because\ x>0)$

따라서 곡선 $y=f(x)$는 $0<x<\frac{1}{2}$에서 $f''(x)<0$이므로 위로 볼록하고, $x>\frac{1}{2}$에서 $f''(x)>0$이므로 아래로 볼록하다.

이때 변곡점의 좌표는 $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}-\ln 2\right)$이다.

(4) $f(x)=\sin x+\cos x$라 하면

$f'(x)=\cos x-\sin x$

$f''(x)=-\sin x-\cos x$

$0<x<\frac{\pi}{2}$에서 $\sin x>0$, $\cos x>0$이므로

$f''(x)=-(\sin x+\cos x)<0$

따라서 곡선 $y=f(x)$는 $0<x<\frac{\pi}{2}$에서 $f''(x)<0$이므로 위로 볼록하다.

이때 변곡점은 없다.

문제 07-1 답 $-3\le a\le 0$

$f(x)=3x^4+4ax^3-6ax^2+1$이라 하면

$f'(x)=12x^3+12ax^2-12ax$

$f''(x)=36x^2+24ax-12a$

$\quad=12(3x^2+2ax-a)$

이때 곡선 $y=f(x)$가 구간 $(-\infty, \infty)$에서 아래로 볼록하므로 모든 실수 x에 대하여

$f''(x)=12(3x^2+2ax-a)\ge 0$

따라서 $3x^2+2ax-a\ge 0$이어야 하므로 이차방정식 $3x^2+2ax-a=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=a^2+3a\le 0$

$a(a+3)\le 0 \qquad \therefore -3\le a\le 0$

문제 07-2 답 $y=-\frac{1}{e^2}x+\frac{4}{e^2}$

$f(x)=xe^{-x}$이라 하면

$f'(x)=e^{-x}-xe^{-x}=(1-x)e^{-x}$

$f''(x)=-e^{-x}-(1-x)e^{-x}=(x-2)e^{-x}$

$f''(x)=0$인 x의 값은

$x=2$ ($\because e^{-x}>0$)

이때 $x=2$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 변곡점의 좌표는 $\left(2, \frac{2}{e^2}\right)$

따라서 변곡점에서의 접선의 기울기는 $f'(2)=-\frac{1}{e^2}$이므로 구하는 접선의 방정식은

$y-\frac{2}{e^2}=-\frac{1}{e^2}(x-2)$

$\therefore y=-\frac{1}{e^2}x+\frac{4}{e^2}$

유제 08 답 -80

$f(x)=x^2+ax+b\ln x$에서 $x>0$이고

$f'(x)=2x+a+\frac{b}{x}$

$f''(x)=2-\frac{b}{x^2}$

$x=1$에서 극대이므로 $f'(1)=0$에서

$2+a+b=0$ $\cdots\cdots$ ㉠

변곡점의 x좌표가 2이므로 $f''(2)=0$에서

$2-\frac{b}{4}=0 \qquad \therefore b=8$

이를 ㉠에 대입하여 풀면 $a=-10$

$\therefore ab=-80$

문제 08-1 답 $2e$

$f(x)=(\ln ax)^2$이라 하면 $x>0$이고

$f'(x)=2\ln ax\times\frac{a}{ax}$

$\quad=\frac{2\ln ax}{x}$

$f''(x)=\frac{\frac{2}{x}\times x-2\ln ax}{x^2}$

$\quad=\frac{2(1-\ln ax)}{x^2}$

$f''(x)=0$인 x의 값은

$1-\ln ax=0$, $\ln ax=1$

$ax=e \qquad \therefore x=\frac{e}{a}$

이때 $x=\frac{e}{a}$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 변곡점의 좌표는 $\left(\frac{e}{a}, 1\right)$

이 점이 직선 $y=2x$ 위에 있으므로

$1=2\times\frac{e}{a} \qquad \therefore a=2e$

문제 08-2 답 2

$f(x)=3x^4-4x^3+ax^2$이라 하면

$f'(x)=12x^3-12x^2+2ax$

$f''(x)=36x^2-24x+2a$

곡선 $y=f(x)$가 변곡점을 갖지 않으려면 $f''(x)$의 부호가 바뀌지 않아야 하므로

$f''(x)=36x^2-24x+2a\ge 0$

따라서 이차방정식 $36x^2-24x+2a=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=12^2-36\times 2a\le 0$

$144-72a\le 0 \qquad \therefore a\ge 2$

따라서 구하는 상수 a의 최솟값은 2이다.

4 개념 CHECK p.133

1. 답 풀이 참조

$f(x)=x^4-4x^3+10$이라 하면

$f'(x)=4x^3-12x^2=4x^2(x-3)$

$f''(x)=12x^2-24x=12x(x-2)$

$f'(x)=0$인 x의 값은

$x=0$ 또는 $x=3$

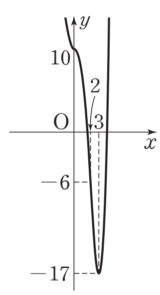
$f''(x)=0$인 x의 값은

$x=0$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소, 오목과 볼록을 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	↘	10 변곡점	↘	-6 변곡점	↘	-17 극소	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



4 유제 & 문제 p.134~138

유제 09 답 풀이 참조

(1) $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x^2}=1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^2}$라 하면

(i) 정의역은 $x\neq0$인 실수 전체의 집합이다.

(ii) $x\neq0$이므로 그래프와 y축과의 교점은 없다.

$f(x)=0$에서 $x^2-3x+2=0$

$(x-1)(x-2)=0$

$\therefore$ $x=1$ 또는 $x=2$

따라서 그래프는 점 $(1, 0)$, $(2, 0)$을 지난다.

(iii) $f'(x)=\dfrac{3}{x^2}-\dfrac{4}{x^3}=\dfrac{3x-4}{x^3}$

$f''(x)=\dfrac{3x^3-(3x-4)\times3x^2}{x^6}$

$=\dfrac{-6(x-2)}{x^4}$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=\dfrac{4}{3}$

$f''(x)=0$인 x의 값은 $x=2$

$x\neq0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소, 오목과 볼록을 표로 나타내면 다음과 같다.

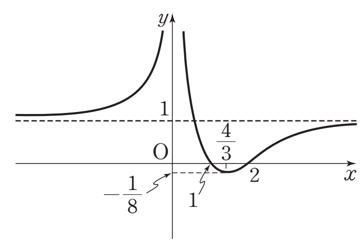
x	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{4}{3}$	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$		$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$	$+$		$+$	$+$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗		↘	$-\frac{1}{8}$ 극소	↗	0 변곡점	↗

(iv) $\displaystyle\lim_{x\to0+}\frac{x^2-3x+2}{x^2}=\infty$, $\displaystyle\lim_{x\to0-}\frac{x^2-3x+2}{x^2}=\infty$,

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-3x+2}{x^2}=1$, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-3x+2}{x^2}=1$

이므로 그래프의 점근선은 직선 $x=0$, $y=1$이다.

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



(2) $f(x)=\dfrac{x^2-x+1}{x-1}=x+\dfrac{1}{x-1}$이라 하면

(i) 정의역은 $x\neq1$인 실수 전체의 집합이다.

(ii) $f(0)=-1$이므로 그래프는 점 $(0, -1)$을 지난다.

(iii) $f'(x)=1-\dfrac{1}{(x-1)^2}$

$=\dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2}$

$=\dfrac{x(x-2)}{(x-1)^2}$

$f''(x)$

$=\dfrac{(2x-2)(x-1)^2-(x^2-2x)\times2(x-1)}{(x-1)^4}$

$=\dfrac{2}{(x-1)^3}$

$f'(x)=0$인 x의 값은

$x=0$ 또는 $x=2$

$x\neq1$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소, 오목과 볼록을 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$		$+$	$+$	$+$
$f(x)$	↗	-1 극대	↘		↘	3 극소	↗

(iv) $\lim_{x\to1+}\left(x+\frac{1}{x-1}\right)=\infty$,

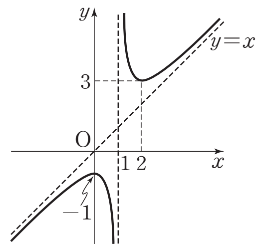
$\lim_{x\to1-}\left(x+\frac{1}{x-1}\right)=-\infty$,

$\lim_{x\to\infty}\left(x+\frac{1}{x-1}-x\right)=0$,

$\lim_{x\to-\infty}\left(x+\frac{1}{x-1}-x\right)=0$

이므로 그래프의 점근선은 직선 $x=1$, $y=x$이다.

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



(3) $f(x)=\sqrt[3]{x^2}=x^{\frac{2}{3}}$이라 하면

(i) 정의역은 실수 전체의 집합이다.

(ii) $f(-x)=\sqrt[3]{x^2}=f(x)$이므로 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.

(iii) $f(0)=0$이므로 그래프는 원점을 지난다.

(iv) $f'(x)=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

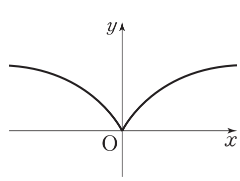
$f''(x)=-\frac{2}{9}x^{-\frac{4}{3}}=-\frac{2}{9x\sqrt[3]{x}}$

함수 $f(x)$의 증가와 감소, 오목과 볼록을 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$		$+$
$f''(x)$	$-$		$-$
$f(x)$	↘	0	↗

(v) $\lim_{x\to\infty}\sqrt[3]{x^2}=\infty$, $\lim_{x\to-\infty}\sqrt[3]{x^2}=\infty$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



(4) $f(x)=2x-\sqrt{x}$라 하면

(i) 정의역은 $x\geq0$인 실수 전체의 집합이다.

(ii) $f(x)=0$에서

$2x-\sqrt{x}=0$, $2x=\sqrt{x}$

양변을 제곱하면 $4x^2=x$

$x(4x-1)=0$ $\quad\therefore x=0$ 또는 $x=\frac{1}{4}$

따라서 그래프는 점 $(0, 0)$, $\left(\frac{1}{4}, 0\right)$을 지난다.

(iii) $f'(x)=2-\frac{1}{2\sqrt{x}}$, $f''(x)=\frac{1}{4x\sqrt{x}}$

$f'(x)=0$인 x의 값은

$2-\frac{1}{2\sqrt{x}}=0$, $4\sqrt{x}=1$

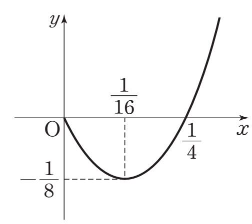
$\therefore x=\frac{1}{16}$

$x\geq0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소, 오목과 볼록을 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{16}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f''(x)$		$+$	$+$	$+$
$f(x)$	0	↘	$-\frac{1}{8}$ 극소	↗

(iv) $\lim_{x\to\infty}(2x-\sqrt{x})=\lim_{x\to\infty}x\left(2-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)=\infty$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



유제 10 답 풀이 참조

(1) $f(x)=xe^{-x}$이라 하면

(i) 정의역은 실수 전체의 집합이다.

(ii) $f(0)=0$이므로 그래프는 원점을 지난다.

(iii) $f'(x)=e^{-x}-xe^{-x}=(1-x)e^{-x}$

$f''(x)=-e^{-x}-(1-x)e^{-x}=(x-2)e^{-x}$

$f'(x)=0$인 x의 값은

$x=1$ ($\because e^{-x}>0$)

$f''(x)=0$인 x의 값은

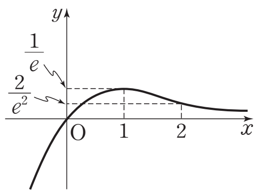
$x=2$ ($\because e^{-x}>0$)

함수 $f(x)$의 증가와 감소, 오목과 볼록을 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$\frac{1}{e}$ 극대	↘	$\frac{2}{e^2}$ 변곡점	↘

(iv) $\lim_{x\to\infty}xe^{-x}=0$, $\lim_{x\to-\infty}xe^{-x}=-\infty$이므로 점근선은 x축이다.

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



(2) $f(x)=\ln(x^2+1)$이라 하면

(i) $x^2+1>0$이므로 정의역은 실수 전체의 집합이다.

(ii) $f(-x)=\ln(x^2+1)=f(x)$이므로 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.

(iii) $f(0)=0$이므로 그래프는 원점을 지난다.

(iv) $f'(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$

$$f''(x)=\frac{2(x^2+1)-2x\times 2x}{(x^2+1)^2}$$
$$=\frac{-2(x+1)(x-1)}{(x^2+1)^2}$$

$f'(x)=0$인 x의 값은

$x=0$

$f''(x)=0$인 x의 값은

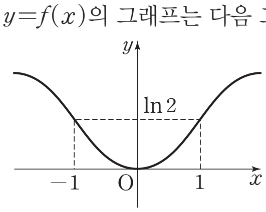
$x=-1$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소, 오목과 볼록을 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	$\ln 2$ 변곡점	↘	0 극소	↗	$\ln 2$ 변곡점	↗

(v) $\lim\limits_{x\to\infty}\ln(x^2+1)=\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\ln(x^2+1)=\infty$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



(3) $f(x)=x-2\sin x$라 하면

$f'(x)=1-2\cos x$, $f''(x)=2\sin x$

$f'(x)=0$인 x의 값은

$1-2\cos x=0$, $\cos x=\dfrac{1}{2}$

$\therefore\ x=-\dfrac{\pi}{3}$ 또는 $x=\dfrac{\pi}{3}$ $\left(\because\ -\dfrac{\pi}{2}\le x\le\dfrac{\pi}{2}\right)$

$f''(x)=0$인 x의 값은

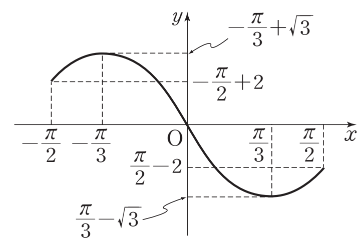
$\sin x=0$

$\therefore\ x=0$ $\left(\because\ -\dfrac{\pi}{2}\le x\le\dfrac{\pi}{2}\right)$

$-\dfrac{\pi}{2}\le x\le\dfrac{\pi}{2}$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소, 오목과 볼록을 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$-\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$-\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	
$f''(x)$		$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	
$f(x)$	$-\frac{\pi}{2}+2$	↗	$-\frac{\pi}{3}+\sqrt{3}$ 극대	↘	0 변곡점	↘	$\frac{\pi}{3}-\sqrt{3}$ 극소	↗	$\frac{\pi}{2}-2$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



(4) $f(x)=\cos^2 x$라 하면

$f'(x)=2\cos x\times(-\sin x)$
$\quad\ =-2\sin x\cos x$
$\quad\ =-\sin 2x$

$f''(x)=-2\cos 2x$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $\sin 2x=0$

$0\le x\le\pi$에서 $0\le 2x\le 2\pi$이므로

$2x=0$ 또는 $2x=\pi$ 또는 $2x=2\pi$

$\therefore\ x=0$ 또는 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 또는 $x=\pi$

$f''(x)=0$인 x의 값은 $\cos 2x=0$

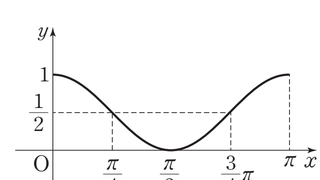
$2x=\dfrac{\pi}{2}$ 또는 $2x=\dfrac{3}{2}\pi$

$\therefore\ x=\dfrac{\pi}{4}$ 또는 $x=\dfrac{3}{4}\pi$

$0\le x\le\pi$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소, 오목과 볼록을 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{3}{4}\pi$	$\cdots$	π
$f'(x)$		$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	
$f''(x)$		$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	1	↘	$\frac{1}{2}$ 변곡점	↘	0 극소	↗	$\frac{1}{2}$ 변곡점	↗	1

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



유제 **11** 답 (1) **최댓값: $\frac{7}{3}$, 최솟값: 1**

(2) **최댓값: 2, 최솟값: -2**

(1) $f(x)=x+\frac{1}{x+1}$에서

$f'(x)=1-\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$

$f'(x)=0$인 x의 값은

$x=0$ ($\because$ $0\le x\le 2$)

구간 $[0, 2]$에서 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	2
$f'(x)$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	$\frac{7}{3}$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$일 때 최댓값은 $\frac{7}{3}$, $x=0$일 때 최솟값은 1이다.

(2) $f(x)=x\sqrt{4-x^2}$에서

$f'(x)=\sqrt{4-x^2}+x\times\frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}}$

$=\frac{4-2x^2}{\sqrt{4-x^2}}$

$f'(x)=0$인 x의 값은

$4-2x^2=0$, $x^2=2$

$\therefore$ $x=-\sqrt{2}$ 또는 $x=\sqrt{2}$

구간 $[-2, 2]$에서 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-2	$\cdots$	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$	2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-2 극소	$\nearrow$	2 극대	$\searrow$	0

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\sqrt{2}$일 때 최댓값은 2, $x=-\sqrt{2}$일 때 최솟값은 -2이다.

유제 **12** 답 (1) **최댓값: $\frac{1}{2e}$, 최솟값: 0**

(2) **최댓값: $\frac{5}{6}\pi+\frac{\sqrt{3}}{2}$, 최솟값: $\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}$**

(1) $f(x)=\frac{\ln x}{x^2}$에서

$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\times x^2-\ln x\times 2x}{x^4}=\frac{1-2\ln x}{x^3}$

$f'(x)=0$인 x의 값은

$1-2\ln x=0$, $\ln x=\frac{1}{2}$

$\therefore$ $x=\sqrt{e}$

구간 $[1, e]$에서 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	1	$\cdots$	$\sqrt{e}$	$\cdots$	e
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2e}$ 극대	$\searrow$	$\frac{1}{e^2}$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\sqrt{e}$일 때 최댓값은 $\frac{1}{2e}$, $x=1$일 때 최솟값은 0이다.

(2) $f(x)=x-\sin 2x$에서

$f'(x)=1-2\cos 2x$

$f'(x)=0$인 x의 값은

$1-2\cos 2x=0$, $\cos 2x=\frac{1}{2}$

$0\le x\le \pi$에서 $0\le 2x\le 2\pi$이므로

$2x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $2x=\frac{5}{3}\pi$ $\quad\therefore$ $x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{5}{6}\pi$

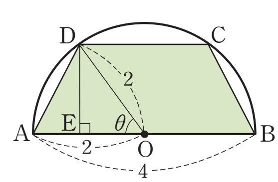
구간 $[0, \pi]$에서 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{5}{6}\pi$	$\cdots$	π
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 극소	$\nearrow$	$\frac{5}{6}\pi+\frac{\sqrt{3}}{2}$ 극대	$\searrow$	π

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\frac{5}{6}\pi$일 때 최댓값은 $\frac{5}{6}\pi+\frac{\sqrt{3}}{2}$, $x=\frac{\pi}{6}$일 때 최솟값은 $\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}$이다.

유제 **13** 답 **$3\sqrt{3}$**

다음 그림과 같이 $\overline{AB}$의 중점을 O, $\angle AOD=\theta$ $\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$라 하고, 점 D에서 $\overline{AO}$에 내린 수선의 발을 E라 하자.



$\overline{DE}=2\sin\theta$, $\overline{OE}=2\cos\theta$

$\therefore$ $\overline{CD}=2\overline{OE}=4\cos\theta$

사다리꼴 ABCD의 넓이를 $S(\theta)$라 하면

$S(\theta)=\frac{1}{2}(\overline{AB}+\overline{DC})\times\overline{DE}$

$=\frac{1}{2}(4+4\cos\theta)\times 2\sin\theta$

$=4(1+\cos\theta)\sin\theta$

$\therefore S'(\theta)=4\{-\sin^2\theta+(1+\cos\theta)\cos\theta\}$

$=4(2\cos^2\theta+\cos\theta-1)$

$=4(\cos\theta+1)(2\cos\theta-1)$

$S'(\theta)=0$인 θ의 값은

$\cos\theta=\frac{1}{2}\left(\because 0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ $\quad\therefore \theta=\frac{\pi}{3}$

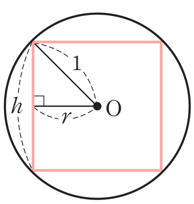
$0<\theta<\frac{\pi}{2}$에서 함수 $S(\theta)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

θ	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$S'(\theta)$		+	0	−	
$S(\theta)$		↗	$3\sqrt{3}$ 극대	↘	

따라서 넓이 $S(\theta)$는 $\theta=\frac{\pi}{3}$일 때 최댓값은 $3\sqrt{3}$이다.

문제 13-1 답 $\frac{\sqrt{6}}{3}$

원기둥의 밑면의 반지름의 길이를 $r\,(0<r<1)$, 높이를 h라 하면 오른쪽 그림과 같이 구의 중심을 지나면서 원기둥의 밑면에 수직인 평면으로 자른 단면에서



$h=2\sqrt{1-r^2}$

원기둥의 부피를 $V(r)$라 하면

$V(r)=\pi r^2h=2\pi r^2\sqrt{1-r^2}$

$\therefore V'(r)=4\pi r\sqrt{1-r^2}+2\pi r^2\times\frac{-2r}{2\sqrt{1-r^2}}$

$=\frac{4\pi r(1-r^2)-2\pi r^3}{\sqrt{1-r^2}}$

$=\frac{2\pi r(2-3r^2)}{\sqrt{1-r^2}}$

$V'(r)=0$인 r의 값은

$2-3r^2=0,\ r^2=\frac{2}{3}$

$\therefore r=\frac{\sqrt{6}}{3}\ (\because 0<r<1)$

$0<r<1$에서 함수 $V(r)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

r	0	$\cdots$	$\frac{\sqrt{6}}{3}$	$\cdots$	1
$V'(r)$		+	0	−	
$V(r)$		↗	극대	↘	

따라서 함수 $V(r)$는 $r=\frac{\sqrt{6}}{3}$에서 최대이므로 원기둥의 부피를 최대로 하는 밑면의 반지름의 길이는 $\frac{\sqrt{6}}{3}$이다.

기본 연습문제

p.139~141

1 $\frac{8}{3}$ **2** $2\sqrt{2}$

3 $a<-3-2\sqrt{2}$ 또는 $-3+2\sqrt{2}<a<0$ 또는 $a>0$

4 ② **5** $-\frac{1}{e^2}$ **6** 2 **7** $\sqrt{2}\pi$ **8** ㄱ, ㄷ

9 ③ **10** 21 **11** $\frac{2}{3}$ **12** $\frac{\pi}{3}$

1 $f(x)=\sqrt{ax+b}$라 하면

$f'(x)=\frac{a}{2\sqrt{ax+b}}$

$x=2$에서의 접선의 방정식 $x-3y+4=0$의 기울기가 $\frac{1}{3}$이므로 $f'(2)=\frac{1}{3}$에서

$\frac{a}{2\sqrt{2a+b}}=\frac{1}{3},\ 3a=2\sqrt{2a+b}$

양변을 제곱하면 $9a^2=4(2a+b)$

$\therefore 9a^2-8a-4b=0$ $\cdots\cdots$ ㉠

한편 접점의 좌표는 $(2,\ \sqrt{2a+b})$이고 이 점은 접선 $x-3y+4=0$ 위의 점이므로

$2-3\sqrt{2a+b}+4=0,\ \sqrt{2a+b}=2$

양변을 제곱하면 $2a+b=4$

$\therefore b=4-2a$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $9a^2-8a-4(4-2a)=0$

$a^2=\frac{16}{9}$ $\quad\therefore a=\frac{4}{3}\ (\because a>0)$

이를 ㉡에 대입하면 $b=\frac{4}{3}$

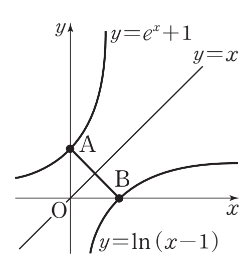
$\therefore a+b=\frac{4}{3}+\frac{4}{3}=\frac{8}{3}$

2 $y=e^x+1$에서 $e^x=y-1$

양변에 자연로그를 취하면

$x=\ln(y-1)$

즉, 두 함수 $y=e^x+1$, $y=\ln(x-1)$은 역함수 관계이므로 두 함수의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.



따라서 선분 AB의 길이가 최소이려면 두 점 A, B는 직선 $y=x$와 기울기가 같은 접선의 접점이어야 하므로 두 점 A, B에서의 접선의 기울기는 1이어야 한다.

$f(x)=e^x+1$이라 하면 $f'(x)=e^x$

$\mathrm{A}(a,\ e^a+1)$이라 하면 점 A에서의 접선의 기울기는

$f'(a)=e^a$이므로 $e^a=1$ $\quad\therefore a=0$

$\therefore \mathrm{A}(0,\ 2)$

또 $g(x)=\ln(x-1)$이라 하면 $g'(x)=\frac{1}{x-1}$

$B(b, \ln(b-1))$이라 하면 점 B에서의 접선의 기울기는

$g'(b)=\frac{1}{b-1}$이므로

$\frac{1}{b-1}=1 \qquad \therefore b=2$

$\therefore B(2, 0)$

따라서 $A(0, 2)$, $B(2, 0)$일 때, $\overline{AB}$의 길이는 최소이므로 구하는 최솟값은

$\sqrt{(2-0)^2+(0-2)^2}=2\sqrt{2}$

3 $f(x)=x^2e^x$이라 하면

$f'(x)=2xe^x+x^2e^x=(x^2+2x)e^x$

접점의 좌표를 (t, t^2e^t)이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=(t^2+2t)e^t$이므로 접선의 방정식은

$y-t^2e^t=(t^2+2t)e^t(x-t)$

이 직선이 점 $(a, 0)$을 지나므로

$-t^2e^t=(t^2+2t)e^t(a-t)$

$e^t>0$이므로 양변을 e^t으로 나누면

$-t^2=(t^2+2t)(a-t)$

$t\{t^2+(1-a)t-2a\}=0 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$\therefore t=0$ 또는 $t^2+(1-a)t-2a=0$

점 $(a, 0)$에서 곡선 $y=x^2e^x$에 서로 다른 세 개의 접선을 그을 수 있으려면 방정식 ㉠이 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.

즉, 이차방정식 $t^2+(1-a)t-2a=0$이 0이 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(1-a)^2-4\times(-2a)>0$

$a^2+6a+1>0$

$\therefore a<-3-2\sqrt{2}$ 또는 $a>-3+2\sqrt{2}$

이때 이차방정식 $t^2+(1-a)t-2a=0$의 해가 0이 아니어야 하므로

$0+(1-a)\times 0-2a\neq 0 \qquad \therefore a\neq 0$

따라서 구하는 a의 값의 범위는

$a<-3-2\sqrt{2}$ 또는 $-3+2\sqrt{2}<a<0$ 또는 $a>0$

4 $f(x)=e^x-ax$에서 $f'(x)=e^x-a$

$x\geq 0$에서 $f'(x)\geq 0$이어야 하므로

$e^x-a\geq 0 \quad \therefore e^x\geq a$

그런데 $x\geq 0$인 모든 실수 x에서 $e^x\geq 1$이므로

$a\leq 1$

따라서 실수 a의 최댓값은 1이다.

5 $f(x)=x+x\ln x$에서 $x>0$이고

$f'(x)=1+\ln x+x\times\frac{1}{x}=2+\ln x$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $\ln x=-2 \qquad \therefore x=\frac{1}{e^2}$

$x>0$에서 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{e^2}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	$-\frac{1}{e^2}$ 극소	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\frac{1}{e^2}$에서 극소이고 극솟값은 $-\frac{1}{e^2}$이다.

6 $f(x)=x-a\ln x-\frac{1}{x}$에서 $x>0$이고

$f'(x)=1-\frac{a}{x}+\frac{1}{x^2}=\frac{x^2-ax+1}{x^2}$

$f'(x)=0$에서 $x^2-ax+1=0$

함수 $f(x)$가 $x>0$에서 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 이차방정식 $x^2-ax+1=0$이 서로 다른 두 양의 실근을 가져야 한다.

(i) 이차방정식 $x^2-ax+1=0$의 판별식을 D라 하면

$D=a^2-4>0$, $(a+2)(a-2)>0$

$\therefore a<-2$ 또는 $a>2$

(ii) 두 근의 합이 양수이어야 하므로 근과 계수의 관계에 의해 $a>0$

(i), (ii)에 의해 $a>2 \qquad \therefore k=2$

7 $f(x)=x+2\cos x$에서

$f'(x)=1-2\sin x$, $f''(x)=-2\cos x$

$f''(x)=0$인 x의 값은 $\cos x=0$

$\therefore x=\frac{\pi}{2}$ 또는 $x=\frac{3}{2}\pi\ (\because 0\leq x\leq 2\pi)$

이때 $x=\frac{\pi}{2}$, $x=\frac{3}{2}\pi$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 두 변곡점의 좌표는

$\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{3}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi\right)$

따라서 구하는 두 변곡점 사이의 거리는

$\sqrt{\left(\frac{3}{2}\pi-\frac{\pi}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\pi-\frac{\pi}{2}\right)^2}=\sqrt{\pi^2+\pi^2}=\sqrt{2}\pi$

8 ㄱ. $f'(a)=0$이고 $x=a$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 $x=a$에서 극소이다.

ㄴ. $f'(b)=0$이지만 $x=b$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌지 않으므로 $x=b$에서 극값을 갖지 않는다.

ㄷ. $f''(0)=0$, $f''(b)=0$이고 $x=0$, $x=b$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 $x=0$, $x=b$인 점이 변곡점이다. 따라서 그래프의 변곡점은 2개이다.

ㄹ. 구간 $(0,\ b)$에서 $f''(x)<0$이므로 그래프는 위로 볼록하다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

9 $f(x)=xe^x$에서

$f'(x)=e^x+xe^x=(x+1)e^x$

$f''(x)=e^x+(x+1)e^x=(x+2)e^x$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=-1$ $(\because e^x>0)$

$f''(x)=0$인 x의 값은 $x=-2$ $(\because e^x>0)$

함수 $f(x)$의 증가와 감소, 오목과 볼록을 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	↘	변곡점	↘	극소	↗

ㄱ. $x=-1$에서 극솟값을 갖는다.

ㄴ. $x=-t$로 놓으면 $x\to-\infty$일 때 $t\to\infty$이므로

$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}xe^x=\lim_{t\to\infty}(-te^{-t})=0$

ㄷ. $x<-2$에서 $f''(x)<0$이므로 그래프는 위로 볼록하다.

ㄹ. ㄴ에서 $\lim_{x\to-\infty}xe^x=0$이므로 그래프의 점근선은 x축이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄹ이다.

10 $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2+x+2}$에서

$$f'(x)=\frac{(x^2+x+2)-(x-1)(2x+1)}{(x^2+x+2)^2}=\frac{-(x+1)(x-3)}{(x^2+x+2)^2}$$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=-1$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	-1 극소	↗	$\frac{1}{7}$ 극대	↘

한편 $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}f(x)=0$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 점근선은 x축이다.

따라서 함수 $f(x)$는 $x=3$일 때 최댓값이 $\frac{1}{7}$이므로

$a=3$, $M=\frac{1}{7}$ $\quad\therefore \frac{a}{M}=21$

11 $f(x)=\dfrac{x(x+k)}{e^x}=\dfrac{x^2+kx}{e^x}$에서

$$f'(x)=\frac{(2x+k)e^x-(x^2+kx)e^x}{e^{2x}}=\frac{-x^2-(k-2)x+k}{e^x}$$

함수 $f(x)$가 $x=4$에서 극댓값을 가지므로

$f'(4)=0$

$\dfrac{-16-(k-2)\times4+k}{e^4}=0 \qquad \therefore k=-\dfrac{8}{3}$

이를 $f(x)$, $f'(x)$에 각각 대입하면

$$f(x)=\frac{x^2-\frac{8}{3}x}{e^x}=\frac{3x^2-8x}{3e^x}$$

$$f'(x)=\frac{-x^2+\frac{14}{3}x-\frac{8}{3}}{e^x}=\frac{-(3x-2)(x-4)}{3e^x}$$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=\frac{2}{3}$ 또는 $x=4$

구간 $[0,\ 4]$에서 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	4
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0
$f(x)$	0	↘	극소	↗	$\frac{16}{3e^4}$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\frac{2}{3}$일 때 최솟값을 가지므로

$a=\frac{2}{3}$

12 $\overline{OA}=a\left(0<a<\frac{\pi}{2}\right)$라 하면

$\overline{AB}=\pi-2a$, $\overline{AD}=4\sin a$

직사각형 ABCD의 둘레의 길이를 $f(a)$라 하면

$f(a)=2(\pi-2a+4\sin a)$

$f'(a)=2(-2+4\cos a)=4(2\cos a-1)$

$f'(a)=0$인 a의 값은

$\cos a=\frac{1}{2} \qquad \therefore a=\frac{\pi}{3}\ \left(\because 0<a<\frac{\pi}{2}\right)$

$0<a<\frac{\pi}{2}$에서 함수 $f(a)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(a)$		$+$	0	$-$	
$f(a)$		↗	극대	↘	

따라서 함수 $f(a)$는 $a=\frac{\pi}{3}$일 때 최대이므로 선분 AB의 길이는

$\pi-2\times\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}$

개념편

실전 연습문제 p.142

1 $y=\frac{3}{4}x-\frac{1}{2}$ 2 ㄱ, ㄷ 3 ⑤ 4 $\frac{3\sqrt{3}}{8}$

1 곡선 위의 점 $(2,\ 1)$이 되는 t의 값을 구하면

$3-2t-3t^2=2$에서 $(t+1)(3t-1)=0$

$\therefore\ t=-1$ 또는 $t=\frac{1}{3}$ …… ㉠

$2-t-2t^2=1$에서 $(t+1)(2t-1)=0$

$\therefore\ t=-1$ 또는 $t=\frac{1}{2}$ …… ㉡

㉠, ㉡에 의해 $t=-1$

한편 x, y를 각각 t에 대하여 미분하면

$\frac{dx}{dt}=-2-6t,\ \frac{dy}{dt}=-1-4t$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{-1-4t}{-2-6t}=\frac{4t+1}{6t+2}$$

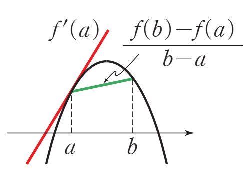
이때 $t=-1$에서의 접선의 기울기는 $\frac{3}{4}$이므로 구하는 접선의 방정식은

$y-1=\frac{3}{4}(x-2)$ $\therefore\ y=\frac{3}{4}x-\frac{1}{2}$

2 $f(b)<f'(a)(b-a)+f(a)$에서

$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}<f'(a)$

이때 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$는 함수 $y=f(x)$에서 x의 값이 a에서 b까지 변할 때의 평균변화율이고, $f'(a)$는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a,\ f(a))$에서의 접선의 기울기이므로 주어진 부등식을 만족하는 곡선 $y=f(x)$는 다음 그림과 같이 위로 볼록해야 한다. 즉, $0<x<1$에서 $f''(x)<0$이어야 한다.



ㄱ. $f'(x)=\cos x,\ f''(x)=-\sin x$이므로

$0<x<1$에서 $f''(x)<0$

ㄴ. $f'(x)=\ln x+x\times\frac{1}{x}=\ln x+1,\ f''(x)=\frac{1}{x}$이므로

$0<x<1$에서 $f''(x)>0$

ㄷ. $f'(x)=e^{-x}-xe^{-x}=(1-x)e^{-x}$,

$f''(x)=-e^{-x}-(1-x)e^{-x}=(x-2)e^{-x}$이므로

$0<x<1$에서 $f''(x)<0$

따라서 조건을 만족하는 것은 ㄱ, ㄷ이다.

3 $f(x)=\sin^n x$라 하면 $f'(x)=n\sin^{n-1}x\cos x$

$$\begin{aligned}f''(x)&=n(n-1)\sin^{n-2}x\cos^2 x-n\sin^{n-1}x\times\sin x\\&=n(n-1)\sin^{n-2}x\cos^2 x-n\sin^n x\\&=n\sin^{n-2}x\{(n-1)\cos^2 x-\sin^2 x\}\\&=n\sin^{n-2}x(n\cos^2 x-\cos^2 x-\sin^2 x)\\&=n\sin^{n-2}x(n\cos^2 x-1)\end{aligned}$$

n은 2 이상의 자연수이고 $0<x<\frac{\pi}{2}$일 때 $\sin x>0$이므로 $f''(x)=0$인 x의 값은

$n\cos^2 x-1=0$ $\therefore\ \cos^2 x=\frac{1}{n}$ …… ㉠

변곡점의 좌표가 $(a_n,\ b_n)$이므로

$f''(a_n)=0,\ f(a_n)=b_n$

$\therefore\ \cos^2 a_n=\frac{1}{n}$ ($\because$ ㉠)

$$\therefore\ b_n=f(a_n)=\sin^n a_n=(\sqrt{1-\cos^2 a_n})^n=\left(\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)^n$$

$$\begin{aligned}\therefore\ \lim_{n\to\infty}b_n&=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)^n\\&=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}^n\\&=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}\right\}^{-\frac{1}{2}}\\&=e^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e}}\end{aligned}$$

4 $\overline{BP}$를 그으면 삼각형 ABP에서 $\overline{AP}\perp\overline{BP}$이고 $\overline{AB}\perp\overline{PQ}$이므로

$\overline{PQ}^2=\overline{AQ}\times\overline{BQ}$

이때 $\overline{AQ}=x$로 놓으면 $0<x<2$이고

$\overline{PQ}^2=x(2-x)$ $\therefore\ \overline{PQ}=\sqrt{x(2-x)}$

삼각형 AQP의 넓이를 $S(x)$라 하면

$S(x)=\frac{1}{2}x\sqrt{2x-x^2}=\frac{1}{2}\sqrt{2x^3-x^4}$

$\therefore\ S'(x)=\frac{6x^2-4x^3}{4\sqrt{2x^3-x^4}}=\frac{x^2(3-2x)}{2\sqrt{2x^3-x^4}}$

$S'(x)=0$인 x의 값은 $x^2(3-2x)=0$

$\therefore\ x=\frac{3}{2}$ ($\because\ 0<x<2$)

$0<x<2$에서 함수 $S(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\frac{3}{2}$	$\cdots$	2
$S'(x)$		$+$	0	$-$	
$S(x)$		↗	$\frac{3\sqrt{3}}{8}$ 극대	↘	

따라서 넓이 $S(x)$는 $x=\frac{3}{2}$일 때 최댓값은 $\frac{3\sqrt{3}}{8}$이다.

02 방정식과 부등식, 속도와 가속도

1 개념 CHECK p.143

1. 답 (1)

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	**4**	↘	**0**	↗

(2) **2**

1 유제 & 문제 p.144~146

유제 01 답 (1) **0** (2) **1**

(1) $f(x)=2x-\ln x$라 하면 $x>0$이고

$f'(x)=2-\dfrac{1}{x}$

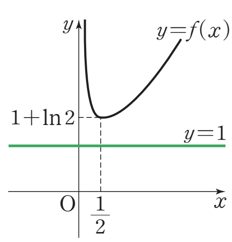
$f'(x)=0$인 x의 값은 $\dfrac{1}{x}=2$ $\quad\therefore x=\dfrac{1}{2}$

$x>0$에서 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	$1+\ln 2$ 극소	↗

$\displaystyle\lim_{x\to 0+}(2x-\ln x)=\infty$이므로 그래프의 점근선은 y축이다.

함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=1$을 그리면 오른쪽 그림과 같다.



따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=1$이 만나지 않으므로 방정식 $2x-\ln x=1$의 실근의 개수는 0이다.

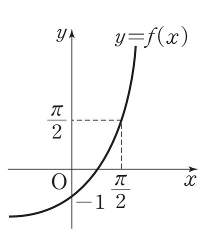
(2) $f(x)=x-\cos x$라 하면

$f'(x)=1+\sin x\geq 0$ ($\because -1\leq \sin x\leq 1$)

따라서 함수 $f(x)$는 실수 전체의 구간에서 증가한다.

이때 $f(0)=-1$, $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{\pi}{2}$이므로

함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축이 한 점에서 만나므로 방정식 $x-\cos x=0$의 실근의 개수는 1이다.

문제 01-1 답 $\boldsymbol{k>\frac{1}{e}}$**일 때 0,** $\boldsymbol{k\leq 0}$ **또는** $\boldsymbol{k=\frac{1}{e}}$**일 때 1,** $\boldsymbol{0<k<\frac{1}{e}}$**일 때 2**

$\ln x=kx$에서 $x>0$이므로 $k=\dfrac{\ln x}{x}$

$f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$라 하면

$f'(x)=\dfrac{\frac{1}{x}\times x-\ln x}{x^2}=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$

$f'(x)=0$인 x의 값은

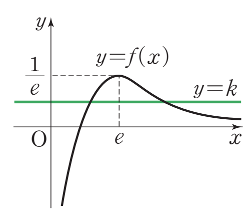
$\ln x=1$ $\quad\therefore x=e$

$x>0$에서 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		↗	$\frac{1}{e}$ 극대	↘

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}=0$, $\displaystyle\lim_{x\to 0+}\frac{\ln x}{x}=-\infty$이므로 그래프의 점근선은 x축, y축이다.

함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$를 그리면 오른쪽 그림과 같다.



따라서 방정식 $\ln x=kx$의 실근의 개수는 $k>\dfrac{1}{e}$일 때 0, $k\leq 0$ 또는 $k=\dfrac{1}{e}$일 때 1, $0<k<\dfrac{1}{e}$일 때 2이다.

유제 02 답 $\boldsymbol{0<a<\frac{4}{e^2}}$

$ae^x=x^2$에서 $e^x>0$이므로 $\dfrac{x^2}{e^x}=a$

$f(x)=\dfrac{x^2}{e^x}=x^2e^{-x}$이라 하면

$f'(x)=2xe^{-x}-x^2e^{-x}$

$\quad\;\;=-xe^{-x}(x-2)$

$f'(x)=0$인 x의 값은

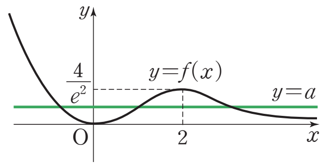
$x=0$ 또는 $x=2$ ($\because e^{-x}>0$)

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	0 극소	↗	$\frac{4}{e^2}$ 극대	↘

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^x}=0$이므로 그래프의 점근선은 x축이다.

함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같으므로 교점이 3개가 되도록 직선 $y=a$를 그리면



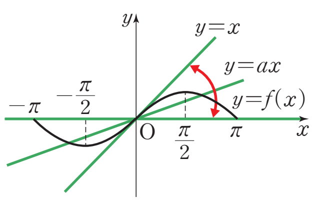
따라서 주어진 방정식이 서로 다른 세 실근을 갖도록 하는 실수 a의 값의 범위는 $0<a<\frac{4}{e^2}$

문제 02-1 답 $\mathbf{0\le a<1}$

$f(x)=\sin x$라 하면 $f'(x)=\cos x$ $\quad\therefore f'(0)=1$

따라서 곡선 $y=\sin x$ 위의 점 $(0,\ 0)$에서의 접선의 방정식은 $y=x$

$-\pi\le x\le\pi$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같으므로 교점이 3개가 되도록 직선 $y=ax$를 그리면



따라서 주어진 방정식이 서로 다른 세 실근을 갖도록 하는 실수 a의 값의 범위는 $0\le a<1$

유제 03 답 풀이 참조

$e^{-x}\ge 1-x$에서 $e^{-x}+x-1\ge 0$

$f(x)=e^{-x}+x-1$이라 하면

$f'(x)=-e^{-x}+1$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $e^{-x}=1$ $\quad\therefore x=0$

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	0 극소	$\nearrow$

함수 $f(x)$는 $x=0$일 때 최솟값 0을 가지므로

$e^{-x}+x-1\ge 0$

따라서 모든 실수 x에 대하여 부등식 $e^{-x}\ge 1-x$가 성립한다.

문제 03-1 답 풀이 참조

$\cos x>1-\frac{x^2}{2}$에서 $\cos x+\frac{x^2}{2}-1>0$

$f(x)=\cos x+\frac{x^2}{2}-1$이라 하면

$f'(x)=x-\sin x$

$f''(x)=1-\cos x$

이때 $0<x<\pi$에서 $-1<\cos x<1$이므로

$f''(x)=1-\cos x>0$

즉, $0<x<\pi$에서 함수 $f'(x)$는 증가하고, $f'(0)=0$이므로 이 구간에서 $f'(x)>0$

따라서 $0<x<\pi$에서 함수 $f(x)$는 증가하고, $f(0)=0$이므로 이 구간에서 $f(x)>0$ $\quad\therefore \cos x+\frac{x^2}{2}-1>0$

따라서 $0<x<\pi$일 때, 부등식 $\cos x>1-\frac{x^2}{2}$이 성립한다.

문제 03-2 답 $\mathbf{0<a<\frac{e}{2}}$

$\sqrt{x}>a\ln x$에서 $\sqrt{x}-a\ln x>0$

$f(x)=\sqrt{x}-a\ln x$라 하면

$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{a}{x}=\frac{\sqrt{x}-2a}{2x}$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $\sqrt{x}=2a$ $\quad\therefore x=4a^2$

$x>0$에서 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$4a^2$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	$2a(1-\ln 2a)$ 극소	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=4a^2$일 때 최솟값 $2a(1-\ln 2a)$를 가지므로 $x>0$일 때, $f(x)>0$이 성립하려면

$2a(1-\ln 2a)>0,\ 1-\ln 2a>0\ (\because a>0)$

$\ln 2a<1,\ 2a<e$ $\quad\therefore 0<a<\frac{e}{2}$

2 유제 & 문제

p.148~149

유제 04 답 속도: 0, 가속도: $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

시각 t에서의 점 P의 속도를 v, 가속도를 a라 하면

$v=\frac{dx}{dt}=-\sin t+\frac{1}{2},\ a=\frac{dv}{dt}=-\cos t$

따라서 $t=\frac{\pi}{6}$에서 점 P의 속도는 $-\sin\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}=0$

또 $t=\frac{\pi}{6}$에서 점 P의 가속도는 $-\cos\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

문제 04-1 답 **6**

시각 t에서의 점 P의 속도를 v라 하면

$v=\frac{dx}{dt}=a-2\cos t$

$t=\frac{\pi}{3}$에서 점 P의 속도가 5이므로

$a-2\cos\frac{\pi}{3}=5$

$a-1=5$ $\quad\therefore a=6$

문제 04-2 답 $\frac{1}{2}$

시각 t에서의 점 P의 속도를 v, 가속도를 a라 하면

$v=\frac{dx}{dt}=2pt+\frac{q}{t}$, $a=\frac{dv}{dt}=2p-\frac{q}{t^2}$

$t=1$에서 점 P의 속도가 $\frac{5}{2}$, 가속도가 $\frac{3}{2}$이므로

$2p+q=\frac{5}{2}$, $2p-q=\frac{3}{2}$

두 식을 연립하여 풀면 $p=1$, $q=\frac{1}{2}$

$\therefore p-q=\frac{1}{2}$

유제 05 답 **속력: 1, 가속도의 크기: 1**

$\frac{dx}{dt}=1-\cos t$, $\frac{dy}{dt}=\sin t$이므로 시각 t에서의 점 P의 속력은

$\sqrt{(1-\cos t)^2+(\sin t)^2}=\sqrt{2-2\cos t}$

따라서 $t=\frac{\pi}{3}$에서 점 P의 속력은

$\sqrt{2-2\cos\frac{\pi}{3}}=1$

또 $\frac{d^2x}{dt^2}=\sin t$, $\frac{d^2y}{dt^2}=\cos t$이므로 시각 t에서의 점 P의 가속도의 크기는

$\sqrt{\sin^2 t+\cos^2 t}=1$

따라서 $t=\frac{\pi}{3}$에서 점 P의 가속도의 크기는 1이다.

문제 05-1 답 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

$\frac{dx}{dt}=-1-\sin t$, $\frac{dy}{dt}=-2\cos t$이므로 시각 t에서의 점 P의 속력은

$\sqrt{(-1-\sin t)^2+(-2\cos t)^2}$

$=\sqrt{1+2\sin t+\sin^2 t+4\cos^2 t}$

$=\sqrt{-3\sin^2 t+2\sin t+5}$ ◀ $\cos^2 t=1-\sin^2 t$

$=\sqrt{-3\left(\sin t-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{16}{3}}$

$0\le t\le 2\pi$에서 $-1\le \sin t\le 1$이므로 점 P는 $\sin t=\frac{1}{3}$일 때 속력이 최대이다.

한편 $\frac{d^2x}{dt^2}=-\cos t$, $\frac{d^2y}{dt^2}=2\sin t$이므로 시각 t에서의 점 P의 가속도의 크기는

$\sqrt{(-\cos t)^2+(2\sin t)^2}=\sqrt{\cos^2 t+4\sin^2 t}$

$=\sqrt{1+3\sin^2 t}$ ◀ $\cos^2 t=1-\sin^2 t$

따라서 점 P의 속력이 최대일 때 $\sin t=\frac{1}{3}$이므로 구하는 점 P의 가속도의 크기는

$\sqrt{1+3\times\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

기본 연습문제 p.150~151

1 ① 2 $1+\ln 3$ 3 1 4 $k>\frac{1}{e^2}$
5 $e\left(\frac{e}{2}-1\right)$ 6 $\frac{\pi}{3}$ 7 20 8 ⑤
9 (4, 0)

1 $2\sin x=x+k$에서 $2\sin x-x=k$

$f(x)=2\sin x-x$라 하면

$f'(x)=2\cos x-1$

$f'(x)=0$인 x의 값은

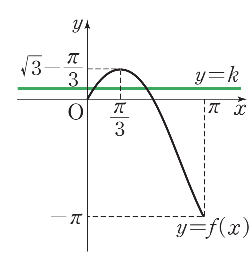
$\cos x=\frac{1}{2}$

$\therefore x=\frac{\pi}{3}$ ($\because 0\le x\le \pi$)

$0\le x\le \pi$에서 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	π
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	0	↗	$\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$ 극대	↘	$-\pi$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 직선 $y=k$와 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 실수 k의 값의 범위는



$0\le k<\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$

$\therefore a=\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$

2 $3x-k=\ln x$에서 $3x-\ln x=k$

$f(x)=3x-\ln x$라 하면 $x>0$이고

$f'(x)=3-\frac{1}{x}$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=\frac{1}{3}$

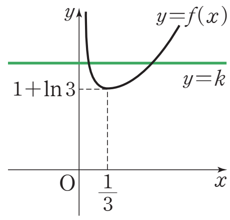
$x>0$에서 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$		−	0	+
$f(x)$		↘	$1+\ln 3$ 극소	↗

한편 $\lim_{x\to 0+}(3x-\ln x)=\infty$이므로 그래프의 점근선은 y축이다.

함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 직선 $y=k$와 만나도록 하는 실수 k의 값의 범위는 $k\ge 1+\ln 3$

따라서 구하는 k의 최솟값은 $1+\ln 3$이다.



3 $x^2+\cos x>k$에서 $x^2+\cos x-k>0$

$f(x)=x^2+\cos x-k$라 하면

$f'(x)=2x-\sin x$, $f''(x)=2-\cos x$

이때 $x>0$에서 $-1\le\cos x\le 1$이므로

$f''(x)=2-\cos x>0$

즉, $x>0$에서 함수 $f'(x)$는 증가하고, $f'(0)=0$이므로

$x>0$에서 $f'(x)>0$

따라서 $x>0$에서 함수 $f(x)$는 증가하므로 $f(x)>0$이 성립하려면 $f(0)\ge 0$이어야 한다.

$1-k\ge 0\qquad\therefore k\le 1$

즉, 구하는 k의 최댓값은 1이다.

4 $x>0$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프가 함수 $y=g(x)$의 그래프보다 위쪽에 있으려면

$f(x)>g(x)\qquad\therefore f(x)-g(x)>0$

$F(x)=f(x)-g(x)$라 하면

$F(x)=x+k-(-x\ln x)=x(1+\ln x)+k$이므로

$F'(x)=1+\ln x+x\times\dfrac{1}{x}=2+\ln x$

$F'(x)=0$인 x의 값은 $\ln x=-2\qquad\therefore x=\dfrac{1}{e^2}$

$x>0$에서 함수 $F(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{e^2}$	$\cdots$
$F'(x)$		$-$	0	$+$
$F(x)$		$\searrow$	$k-\frac{1}{e^2}$ 극소	$\nearrow$

따라서 $x>0$일 때, 함수 $F(x)$는 $x=\dfrac{1}{e^2}$에서 최솟값

$k-\dfrac{1}{e^2}$을 가지므로 $F(x)>0$이 성립하려면

$k-\dfrac{1}{e^2}>0\qquad\therefore k>\dfrac{1}{e^2}$

5 $1\le x\le 2$이므로 $\alpha x\le e^x\le\beta x$의 각 변을 x로 나누면

$\alpha\le\dfrac{e^x}{x}\le\beta$ ...... ㉠

이때 $f(x)=\dfrac{e^x}{x}$이라 하면 $f'(x)=\dfrac{xe^x-e^x}{x^2}=\dfrac{(x-1)e^x}{x^2}$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=1$ ($\because e^x>0$)

$1\le x\le 2$에서 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	1	$\cdots$	2
$f'(x)$	0	$+$	
$f(x)$	e	$\nearrow$	$\frac{e^2}{2}$

따라서 함수 $f(x)$는 $1\le x\le 2$에서 증가하므로

$e\le f(x)\le\dfrac{e^2}{2}\qquad\therefore e\le\dfrac{e^x}{x}\le\dfrac{e^2}{2}$ ...... ㉡

㉠, ㉡에 의해 $\alpha\le e$, $\beta\ge\dfrac{e^2}{2}$

따라서 $\beta-\alpha$의 최솟값은 β가 최소이고 α가 최대일 때이므로

$\dfrac{e^2}{2}-e=e\left(\dfrac{e}{2}-1\right)$

6 시각 t에서의 두 점 P, Q의 속도는 각각

$\dfrac{dx_{\mathrm{P}}}{dt}=-\sin t$, $\dfrac{dx_{\mathrm{Q}}}{dt}=-2\sin t\cos t$

$0<t<\dfrac{\pi}{2}$에서 두 점 P, Q의 속도가 같으므로

$-\sin t=-2\sin t\cos t$

$\cos t=\dfrac{1}{2}\qquad\therefore t=\dfrac{\pi}{3}$

7 $\dfrac{dx}{dt}=10\sqrt{2}$, $\dfrac{dy}{dt}=-10t+10\sqrt{2}$이므로 시각 t에서의 야구공의 속력은

$\sqrt{(10\sqrt{2})^2+(-10t+10\sqrt{2})^2}=10\sqrt{t^2-2\sqrt{2}t+4}$

한편 야구공이 지면에 떨어질 때는 $y=0$이므로

$-5t^2+10\sqrt{2}t=0$, $-5t(t-2\sqrt{2})=0$

$\therefore t=2\sqrt{2}$ ($\because t>0$)

따라서 $t=2\sqrt{2}$에서 야구공의 속력은

$10\sqrt{(2\sqrt{2})^2-2\sqrt{2}\times2\sqrt{2}+4}=20$

8 $\dfrac{dx}{dt}=e^t\cos t-e^t\sin t=e^t(\cos t-\sin t)$,

$\dfrac{dy}{dt}=e^t\sin t+e^t\cos t=e^t(\sin t+\cos t)$

이므로 시각 t에서의 점 P의 속력은

$\sqrt{\{e^t(\cos t-\sin t)\}^2+\{e^t(\sin t+\cos t)\}^2}=\sqrt{2}e^t$

점 P의 속력이 $\sqrt{2}e$이므로

$\sqrt{2}e^t=\sqrt{2}e\qquad\therefore t=1$

$\dfrac{d^2x}{dt^2}=e^t(\cos t-\sin t)+e^t(-\sin t-\cos t)=-2e^t\sin t$

$\dfrac{d^2y}{dt^2}=e^t(\sin t+\cos t)+e^t(\cos t-\sin t)=2e^t\cos t$

따라서 시각 t에서의 점 P의 가속도의 크기는

$\sqrt{(-2e^t\sin t)^2+(2e^t\cos t)^2}=2e^t$

이므로 $t=1$에서 점 P의 가속도의 크기는 $2e$이다.

9 $\dfrac{dx}{dt}=2(1-\cos t)$, $\dfrac{dy}{dt}=2\sin t$이므로 시각 t에서의 점 P의 속력은

$\sqrt{\{2(1-\cos t)\}^2+(2\sin t)^2}$
$=2\sqrt{1-2\cos t+\cos^2 t+\sin^2 t}$
$=2\sqrt{2-2\cos t}$

$0\le t\le 2\pi$에서 $-1\le \cos t\le 1$이므로 점 P는 $\cos t=-1$일 때 속력이 최대이다.

$\therefore t=\pi$

따라서 $t=\pi$에서 점 P의 속도는

$(2(1-\cos\pi),\ 2\sin\pi)$

$\therefore (4,\ 0)$

실전 연습문제 p.152

1 3	**2** 1	**3** $(\sqrt{3},\ -7)$	**4** 12

1 $\dfrac{g'(x)}{f'(x)}+\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=2$의 양변에 $f'(x)g'(x)$를 곱하여 정리하면

$\{f'(x)\}^2-2f'(x)g'(x)+\{g'(x)\}^2=0$

$\{f'(x)-g'(x)\}^2=0$

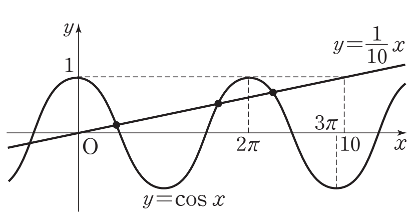
$\therefore f'(x)-g'(x)=0$

$f(x)-g(x)=\sin x-\dfrac{1}{20}x^2$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)-g'(x)=\cos x-\dfrac{1}{10}x$

따라서 주어진 방정식은 $\cos x-\dfrac{1}{10}x=0$이고, 이 방정식의 양수인 근의 개수는 $x>0$에서 곡선 $y=\cos x$와 직선 $y=\dfrac{1}{10}x$의 교점의 개수이다.

이때 곡선 $y=\cos x$와 직선 $y=\dfrac{1}{10}x$는 다음 그림과 같다.



따라서 $x>0$에서 두 그래프는 세 점에서 만나므로 주어진 방정식의 양수인 근의 개수는 3이다.

2 $\cos x-k\le k\sin x$에서 $\cos x\le k(1+\sin x)$

$0\le x\le \dfrac{\pi}{3}$이므로 $\dfrac{\cos x}{1+\sin x}\le k$

$f(x)=\dfrac{\cos x}{1+\sin x}$라 하면

$$f'(x)=\frac{-\sin x(1+\sin x)-\cos x\times\cos x}{(1+\sin x)^2}$$
$$=\frac{-1-\sin x}{(1+\sin x)^2}=-\frac{1}{1+\sin x}$$

이때 $0\le x\le\dfrac{\pi}{3}$에서 $0\le \sin x\le \dfrac{\sqrt{3}}{2}$이므로

$1\le 1+\sin x\le 1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore\ -1\le -\dfrac{1}{1+\sin x}\le -4+2\sqrt{3}$

$\therefore f'(x)=-\dfrac{1}{1+\sin x}<0$

즉, 함수 $f(x)$는 $0\le x\le\dfrac{\pi}{3}$에서 감소하므로 $x=0$에서 최대이고, 최댓값은 $\dfrac{1}{1+0}=1$

따라서 $0\le x\le \dfrac{\pi}{3}$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\le k$가 성립하려면 $k\ge 1$

즉, 구하는 k의 최솟값은 1이다.

3 $\dfrac{dx}{dt}=\sqrt{3}$, $\dfrac{dy}{dt}=9-8t$이므로 시각 t에서의 점 P의 속도는

$(\sqrt{3},\ 9-8t)$

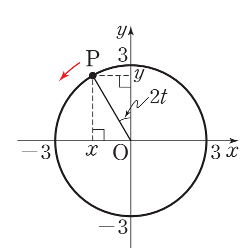
한편 점 P가 직선 l과 만나려면 직선 OP의 기울기가 직선 l의 기울기와 같아야 하므로

$\dfrac{9t-4t^2}{\sqrt{3}t}=\tan\dfrac{\pi}{6}$, $9t-4t^2=t$

$4t(t-2)=0 \qquad \therefore t=2\ (\because t>0)$

따라서 점 P가 $t=2$에서 처음으로 직선 l과 만나므로 그 때의 속도는 $(\sqrt{3},\ -7)$이다.

4 점 P가 점 $(0,\ 3)$을 출발하여 t초 후에 $2t$라디안만큼 회전하므로 점 P의 t초 후의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면



$x=-3\sin 2t$, $y=3\cos 2t$

이때 $\dfrac{dx}{dt}=-6\cos 2t$,

$\dfrac{dy}{dt}=-6\sin 2t$이므로

$\dfrac{d^2x}{dt^2}=12\sin 2t$, $\dfrac{d^2y}{dt^2}=-12\cos 2t$

따라서 시각 t에서의 점 P의 가속도의 크기는

$\sqrt{(12\sin 2t)^2+(-12\cos 2t)^2}=12$

Ⅲ-1. 여러 가지 적분법

01 여러 가지 함수의 부정적분

1 개념 CHECK p.154

1. 답 (1) $\mathbf{2\ln|x|+C}$ (2) $\mathbf{-\frac{1}{x}+C}$

(3) $\mathbf{\frac{3}{4}x\sqrt[3]{x}+C}$ (4) $\mathbf{\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}+C}$

(1) $\int \frac{2}{x}\,dx=2\int \frac{1}{x}\,dx=2\ln|x|+C$

(2) $\int \frac{1}{x^2}\,dx=\int x^{-2}dx=\frac{1}{-2+1}x^{-2+1}+C=-\frac{1}{x}+C$

(3) $\int \sqrt[3]{x}\,dx=\int x^{\frac{1}{3}}dx=\frac{1}{\frac{1}{3}+1}x^{\frac{1}{3}+1}+C$

$=\frac{3}{4}x\sqrt[3]{x}+C$

(4) $\int x\sqrt{x}\,dx=\int x^{\frac{3}{2}}dx=\frac{1}{\frac{3}{2}+1}x^{\frac{3}{2}+1}+C$

$=\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}+C$

1 유제 & 문제 p.155

유제 01 답 (1) $\mathbf{\frac{2}{3}x\sqrt{x}+4\sqrt{x}+C}$

(2) $\mathbf{\frac{3}{4}x\sqrt[3]{x}+12\sqrt[3]{x}+C}$

(3) $\mathbf{\frac{1}{2}x^2+3x-\ln|x|-\frac{2}{x}+C}$

(4) $\mathbf{x-4\sqrt{x}+\ln|x|+C}$

(1) $\int \frac{x+2}{\sqrt{x}}\,dx=\int x^{\frac{1}{2}}dx+2\int x^{-\frac{1}{2}}dx$

$=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+4x^{\frac{1}{2}}+C=\frac{2}{3}x\sqrt{x}+4\sqrt{x}+C$

(2) $\int \frac{x+4}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx=\int x^{\frac{1}{3}}dx+4\int x^{-\frac{2}{3}}dx$

$=\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}+12x^{\frac{1}{3}}+C$

$=\frac{3}{4}x\sqrt[3]{x}+12\sqrt[3]{x}+C$

(3) $\int \frac{x^3+3x^2-x+2}{x^2}\,dx$

$=\int x\,dx+3\int dx-\int \frac{1}{x}\,dx+2\int x^{-2}dx$

$=\frac{1}{2}x^2+3x-\ln|x|-2x^{-1}+C$

$=\frac{1}{2}x^2+3x-\ln|x|-\frac{2}{x}+C$

(4) $\int \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{x}\,dx=\int \frac{x-2\sqrt{x}+1}{x}\,dx$

$=\int dx-2\int x^{-\frac{1}{2}}dx+\int \frac{1}{x}\,dx$

$=x-4x^{\frac{1}{2}}+\ln|x|+C$

$=x-4\sqrt{x}+\ln|x|+C$

문제 01-1 답 **1**

$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int \frac{x-4}{\sqrt{x}+2}\,dx$

$=\int \frac{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}{\sqrt{x}+2}\,dx$

$=\int (\sqrt{x}-2)\,dx=\int x^{\frac{1}{2}}dx-2\int dx$

$=\frac{2}{3}x\sqrt{x}-2x+C$

$f(1)=-\frac{1}{3}$에서

$\frac{2}{3}-2+C=-\frac{1}{3}$ $\quad\therefore C=1$

따라서 $f(x)=\frac{2}{3}x\sqrt{x}-2x+1$이므로

$f(9)=\frac{2}{3}\times9\times3-2\times9+1=1$

2 개념 CHECK p.156

1. 답 (1) $\mathbf{2e^x+C}$ (2) $\mathbf{\frac{3^{x+2}}{\ln 3}+C}$

(3) $\mathbf{-\cos x+\sin x+C}$ (4) $\mathbf{\tan x+3\cot x+C}$

(1) $\int 2e^x\,dx=2\int e^x\,dx=2e^x+C$

(2) $\int 3^{x+2}dx=\int 9\times3^x\,dx=9\int 3^x\,dx$

$=9\times\frac{3^x}{\ln 3}+C=\frac{3^{x+2}}{\ln 3}+C$

(3) $\int (1+\cot x)\sin x\,dx$

$=\int\left(\sin x+\frac{\cos x}{\sin x}\times\sin x\right)dx$

$=\int (\sin x+\cos x)\,dx$

$=\int \sin x\,dx+\int \cos x\,dx$

$=-\cos x+\sin x+C$

(4) $\int (\sec^2 x-3\csc^2 x)\,dx$

$=\int \sec^2 x\,dx-3\int \csc^2 x\,dx$

$=\tan x+3\cot x+C$

유제 02 답 (1) $\frac{e^{x+1}}{2}-\frac{2^{x+1}}{\ln 2}+C$

(2) $\frac{9^x}{\ln 9}-\frac{2\times 3^x}{\ln 3}+x+C$

(3) $\frac{1}{2}x^2+e^x+C$

(4) $\frac{9^x}{\ln 9}-\frac{3^x}{\ln 3}+C$

(1) $\int \frac{e^{x+1}-2^{x+2}}{2}dx=\int\left(\frac{e}{2}e^x-2\times 2^x\right)dx$

$=\frac{e}{2}e^x-\frac{2\times 2^x}{\ln 2}+C$

$=\frac{e^{x+1}}{2}-\frac{2^{x+1}}{\ln 2}+C$

(2) $\int (3^x-1)^2 dx=\int (3^{2x}-2\times 3^x+1)\,dx$

$=\int (9^x-2\times 3^x+1)\,dx$

$=\frac{9^x}{\ln 9}-\frac{2\times 3^x}{\ln 3}+x+C$

(3) $\int \frac{x^2-e^{2x}}{x-e^x}dx=\int \frac{(x+e^x)(x-e^x)}{x-e^x}dx$

$=\int (x+e^x)\,dx$

$=\frac{1}{2}x^2+e^x+C$

(4) $\int \frac{27^x-3^x}{3^x+1}dx=\int \frac{3^{3x}-3^x}{3^x+1}dx$

$=\int \frac{3^x(3^{2x}-1)}{3^x+1}dx$

$=\int \frac{3^x(3^x+1)(3^x-1)}{3^x+1}dx$

$=\int 3^x(3^x-1)\,dx$

$=\int (9^x-3^x)\,dx$

$=\frac{9^x}{\ln 9}-\frac{3^x}{\ln 3}+C$

문제 02-1 답 e^e-1

곡선 $y=f(x)$ 위의 임의의 점 (x, y)에서의 접선의 기울기가 $e^x-\frac{1}{x}$이므로

$f'(x)=e^x-\frac{1}{x}$

$\therefore f(x)=\int f'(x)\,dx=\int\left(e^x-\frac{1}{x}\right)dx$

$=e^x-\ln|x|+C$

곡선 $y=f(x)$가 점 $(1, e)$를 지나므로 $f(1)=e$에서

$e-0+C=e \qquad \therefore C=0$

따라서 $f(x)=e^x-\ln|x|$이므로

$f(e)=e^e-1$

유제 03 답 (1) $x-\cos x+C$

(2) $-3\cot x+x+C$

(3) $\tan x-\ln|x|+C$

(4) $\frac{1}{2}\tan x+C$

(5) $-\cos x-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\sin x+C$

(6) $x-\cos x+C$

(1) $\int \frac{\cos^2 x}{1-\sin x}dx=\int \frac{1-\sin^2 x}{1-\sin x}dx$

$=\int \frac{(1+\sin x)(1-\sin x)}{1-\sin x}dx$

$=\int (1+\sin x)\,dx$

$=x-\cos x+C$

(2) $\int \frac{3+\sin^2 x}{\sin^2 x}dx=\int\left(\frac{3}{\sin^2 x}+1\right)dx$

$=\int (3\csc^2 x+1)\,dx$

$=-3\cot x+x+C$

(3) $\int \frac{x-\cos^2 x}{x\cos^2 x}dx=\int\left(\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{1}{x}\right)dx$

$=\int\left(\sec^2 x-\frac{1}{x}\right)dx$

$=\tan x-\ln|x|+C$

(4) $\cos 2x=2\cos^2 x-1$이므로

$\int \frac{1}{1+\cos 2x}dx=\int \frac{1}{2\cos^2 x}dx$

$=\frac{1}{2}\int \sec^2 x\,dx$

$=\frac{1}{2}\tan x+C$

(5) $\cos^2\frac{x}{2}=\frac{1+\cos x}{2}$이므로

$\int\left(\sin x-\cos^2\frac{x}{2}\right)dx$

$=\int\left(\sin x-\frac{1+\cos x}{2}\right)dx$

$=\int\left(\sin x-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos x\right)dx$

$=-\cos x-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\sin x+C$

(6) $\int\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2 dx$

$=\int\left(\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\right)dx$

$=\int (1+\sin x)\,dx$ ◀ $\sin 2x=2\sin x\cos x$

$=x-\cos x+C$

개념편

문제 03-1 답 -1

$$f(x)=\int\frac{1}{1+\sin x}dx$$
$$=\int\frac{1-\sin x}{(1+\sin x)(1-\sin x)}dx$$
$$=\int\frac{1-\sin x}{1-\sin^2 x}dx$$
$$=\int\frac{1-\sin x}{\cos^2 x}dx$$
$$=\int\left(\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{1}{\cos x}\times\frac{\sin x}{\cos x}\right)dx$$
$$=\int(\sec^2 x-\sec x\tan x)\,dx$$
$$=\tan x-\sec x+C$$

$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$에서 $1-\sqrt{2}+C=1$ $\quad\therefore C=\sqrt{2}$

따라서 $f(x)=\tan x-\sec x+\sqrt{2}$이므로

$f\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-1-\sqrt{2}+\sqrt{2}=-1$

3 개념 CHECK p.160

1. 답 (1) $\frac{1}{10}(2x-5)^5+C$ (2) $-\frac{1}{3}e^{1-3x}+C$

(1) $2x-5=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=2$이고 $dx=\frac{1}{2}dt$이므로

$$\int(2x-5)^4dx=\int t^4\times\frac{1}{2}dt=\frac{1}{2}\int t^4dt$$
$$=\frac{1}{10}t^5+C=\frac{1}{10}(2x-5)^5+C$$

(2) $1-3x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=-3$이고 $dx=-\frac{1}{3}dt$이므로

$$\int e^{1-3x}dx=\int e^t\times\left(-\frac{1}{3}\right)dt=-\frac{1}{3}\int e^tdt$$
$$=-\frac{1}{3}e^t+C=-\frac{1}{3}e^{1-3x}+C$$

2. 답 (1) $\frac{1}{5}(2x^2+7)^5+C$ (2) $\frac{1}{6}(x^3+2x)^6+C$

(1) $2x^2+7=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=(2x^2+7)'=4x$이므로

$$\int 4x(2x^2+7)^4dx=\int(2x^2+7)^4(2x^2+7)'dx$$
$$=\int t^4dt=\frac{1}{5}t^5+C$$
$$=\frac{1}{5}(2x^2+7)^5+C$$

(2) $x^3+2x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=(x^3+2x)'=3x^2+2$이므로

$$\int(3x^2+2)(x^3+2x)^5dx$$
$$=\int(x^3+2x)^5(x^3+2x)'dx$$
$$=\int t^5dt=\frac{1}{6}t^6+C$$
$$=\frac{1}{6}(x^3+2x)^6+C$$

3 유제 & 문제 p.161~164

유제 04 답 (1) $\sqrt{2x+3}+C$ (2) $\frac{1}{4}\ln|4x-5|+C$

(3) $-\frac{1}{3}\cos(3x-1)+C$

(4) $-x(1-x)^6+C$

(1) $2x+3=t$로 놓고 양변을 x에 대하여 미분하면

$\frac{dt}{dx}=2$ $\quad\therefore dx=\frac{1}{2}dt$

$$\therefore\int\frac{1}{\sqrt{2x+3}}dx=\int\frac{1}{\sqrt{t}}\times\frac{1}{2}dt=\frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}dt$$
$$=\sqrt{t}+C=\sqrt{2x+3}+C$$

(2) $4x-5=t$로 놓고 양변을 x에 대하여 미분하면

$\frac{dt}{dx}=4$ $\quad\therefore dx=\frac{1}{4}dt$

$$\therefore\int\frac{1}{4x-5}dx=\int\frac{1}{t}\times\frac{1}{4}dt=\frac{1}{4}\ln|t|+C$$
$$=\frac{1}{4}\ln|4x-5|+C$$

(3) $3x-1=t$로 놓고 양변을 x에 대하여 미분하면

$\frac{dt}{dx}=3$ $\quad\therefore dx=\frac{1}{3}dt$

$$\therefore\int\sin(3x-1)\,dx=\int\sin t\times\frac{1}{3}dt$$
$$=-\frac{1}{3}\cos t+C$$
$$=-\frac{1}{3}\cos(3x-1)+C$$

(4) $1-x=t$로 놓으면 $x=1-t$

$1-x=t$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\frac{dt}{dx}=-1$ $\quad\therefore dx=-dt$

$$\therefore\int(7x-1)(1-x)^5dx$$
$$=\int\{7(1-t)-1\}t^5\times(-1)\,dt$$
$$=\int(7t^6-6t^5)\,dt=t^7-t^6+C$$
$$=(1-x)^7-(1-x)^6+C$$
$$=-x(1-x)^6+C$$

문제 04-1 답 $\frac{1}{2e^2}+1$

$f(x)=\int \frac{e^{4x}}{e^{2x}+1}dx-\int \frac{1}{e^{2x}+1}dx$

$=\int \frac{e^{4x}-1}{e^{2x}+1}dx$

$=\int \frac{(e^{2x}+1)(e^{2x}-1)}{e^{2x}+1}dx$

$=\int (e^{2x}-1)dx$

$=\int e^{2x}dx-\int dx$

$\int e^{2x}dx$에서 $2x=t$로 놓고 양변을 x에 대하여 미분하면

$\frac{dt}{dx}=2 \quad \therefore dx=\frac{1}{2}dt$

$\therefore f(x)=\int e^{2x}dx-\int dx$

$=\int e^t \times \frac{1}{2}dt-x$

$=\frac{1}{2}e^t-x+C$

$=\frac{1}{2}e^{2x}-x+C$

$f(0)=\frac{1}{2}$에서

$\frac{1}{2}+C=\frac{1}{2} \quad \therefore C=0$

따라서 $f(x)=\frac{1}{2}e^{2x}-x$이므로

$f(-1)=\frac{1}{2e^2}+1$

유제 05 답 (1) $\frac{1}{6}(x^4-4x)\sqrt{x^4-4x}+C$

(2) $\frac{1}{8}(e^{2x}+1)^4+C$ (3) $\frac{5^{x^2+3}}{2\ln 5}+C$

(4) $\frac{1}{4}\{\ln(x^2+2)\}^2+C$ (5) $\frac{1}{2}\tan^2 x+C$

(6) $\frac{1}{3}\cos^3 x-\cos x+C$

(1) $x^4-4x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=(x^4-4x)'=4x^3-4$이므로

$\int (x^3-1)\sqrt{x^4-4x}\,dx$

$=\frac{1}{4}\int (x^4-4x)^{\frac{1}{2}}(4x^3-4)dx$

$=\frac{1}{4}\int (x^4-4x)^{\frac{1}{2}}(x^4-4x)'dx$

$=\frac{1}{4}\int t^{\frac{1}{2}}dt=\frac{1}{6}t\sqrt{t}+C$

$=\frac{1}{6}(x^4-4x)\sqrt{x^4-4x}+C$

(2) $e^{2x}+1=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=(e^{2x}+1)'=2e^{2x}$이므로

$\int e^{2x}(e^{2x}+1)^3dx=\frac{1}{2}\int (e^{2x}+1)^3\times 2e^{2x}dx$

$=\frac{1}{2}\int (e^{2x}+1)^3(e^{2x}+1)'dx$

$=\frac{1}{2}\int t^3dt=\frac{1}{8}t^4+C$

$=\frac{1}{8}(e^{2x}+1)^4+C$

(3) $x^2+3=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=(x^2+3)'=2x$이므로

$\int x\times 5^{x^2+3}dx=\frac{1}{2}\int 5^{x^2+3}\times 2x\,dx$

$=\frac{1}{2}\int 5^{x^2+3}(x^2+3)'dx$

$=\frac{1}{2}\int 5^t dt=\frac{5^t}{2\ln 5}+C$

$=\frac{5^{x^2+3}}{2\ln 5}+C$

(4) $\ln(x^2+2)=t$로 놓으면

$\frac{dt}{dx}=\{\ln(x^2+2)\}'=\frac{2x}{x^2+2}$이므로

$\int \frac{x}{x^2+2}\ln(x^2+2)dx$

$=\frac{1}{2}\int \ln(x^2+2)\times\frac{2x}{x^2+2}dx$

$=\frac{1}{2}\int \ln(x^2+2)\{\ln(x^2+2)\}'dx$

$=\frac{1}{2}\int t\,dt=\frac{1}{4}t^2+C=\frac{1}{4}\{\ln(x^2+2)\}^2+C$

(5) $\tan x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=(\tan x)'=\sec^2 x$이므로

$\int \tan x\sec^2 x\,dx=\int \tan x(\tan x)'dx$

$=\int t\,dt=\frac{1}{2}t^2+C$

$=\frac{1}{2}\tan^2 x+C$

(6) $\int \sin^3 x\,dx=\int \sin x\sin^2 x\,dx$

$=\int \sin x(1-\cos^2 x)dx$

$\cos x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=(\cos x)'=-\sin x$이므로

$\int \sin^3 x\,dx=\int \sin x(1-\cos^2 x)dx$

$=-\int (1-\cos^2 x)(-\sin x)dx$

$=-\int (1-\cos^2 x)(\cos x)'dx$

$=\int (t^2-1)dt=\frac{1}{3}t^3-t+C$

$=\frac{1}{3}\cos^3 x-\cos x+C$

개념편

문제 **05-1** 답 $\boldsymbol{f(x)=\sqrt{x^2+1}}$

$x^2+1=t$로 놓으면 $\dfrac{dt}{dx}=(x^2+1)'=2x$이므로

$$f(x)=\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$$
$$=\frac{1}{2}\int (x^2+1)^{-\frac{1}{2}}\times 2x\,dx$$
$$=\frac{1}{2}\int (x^2+1)^{-\frac{1}{2}}(x^2+1)'\,dx$$
$$=\frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}\,dt=\sqrt{t}+C$$
$$=\sqrt{x^2+1}+C$$

$f(0)=1$에서 $1+C=1$ $\quad\therefore C=0$

$\therefore f(x)=\sqrt{x^2+1}$

문제 **05-2** 답 **7**

$1+\sin x=t$로 놓으면 $\dfrac{dt}{dx}=(1+\sin x)'=\cos x$이므로

$$f(x)=\int (1+\sin x)^4\cos x\,dx$$
$$=\int (1+\sin x)^4(1+\sin x)'\,dx$$
$$=\int t^4\,dt=\frac{1}{5}t^5+C$$
$$=\frac{1}{5}(1+\sin x)^5+C$$

$f\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{3}{5}$에서 $C=\dfrac{3}{5}$

따라서 $f(x)=\dfrac{1}{5}(1+\sin x)^5+\dfrac{3}{5}$이므로

$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{32}{5}+\dfrac{3}{5}=7$

문제 **05-3** 답 $\boldsymbol{f(x)=-\cos(\ln x)+2}$

곡선 $y=f(x)$ 위의 임의의 점 (x, y)에서의 접선의 기울기가 $\dfrac{\sin(\ln x)}{x}$이므로

$f'(x)=\dfrac{\sin(\ln x)}{x}$

$\therefore f(x)=\displaystyle\int f'(x)\,dx=\int \frac{\sin(\ln x)}{x}\,dx$

$\ln x=t$로 놓으면 $\dfrac{dt}{dx}=(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$이므로

$$f(x)=\int \frac{\sin(\ln x)}{x}\,dx$$
$$=\int \{\sin(\ln x)\}\times\frac{1}{x}\,dx$$
$$=\int \{\sin(\ln x)\}(\ln x)'\,dx$$
$$=\int \sin t\,dt=-\cos t+C$$
$$=-\cos(\ln x)+C$$

곡선 $y=f(x)$가 점 $(1, 1)$을 지나므로 $f(1)=1$에서

$-\cos 0+C=1,\ -1+C=1 \quad\therefore C=2$

$\therefore f(x)=-\cos(\ln x)+2$

유제 **06** 답 (1) $\boldsymbol{\ln|x^3+3x+1|+C}$

(2) $\boldsymbol{\ln|2^x-x^2|+C}$

(3) $\boldsymbol{-\dfrac{1}{2}\ln|1+2\cos x|+C}$

(4) $\boldsymbol{\ln|\sin x|+C}$

(1) $(x^3+3x+1)'=3x^2+3$이므로

$$\int \frac{3x^2+3}{x^3+3x+1}\,dx=\int \frac{(x^3+3x+1)'}{x^3+3x+1}\,dx$$
$$=\ln|x^3+3x+1|+C$$

(2) $(2^x-x^2)'=2^x\ln 2-2x$이므로

$$\int \frac{2^x\ln 2-2x}{2^x-x^2}\,dx=\int \frac{(2^x-x^2)'}{2^x-x^2}\,dx$$
$$=\ln|2^x-x^2|+C$$

(3) $(1+2\cos x)'=-2\sin x$이므로

$$\int \frac{\sin x}{1+2\cos x}\,dx=-\frac{1}{2}\int \frac{-2\sin x}{1+2\cos x}\,dx$$
$$=-\frac{1}{2}\int \frac{(1+2\cos x)'}{1+2\cos x}\,dx$$
$$=-\frac{1}{2}\ln|1+2\cos x|+C$$

(4) $\cot x=\dfrac{\cos x}{\sin x}$이고 $(\sin x)'=\cos x$이므로

$$\int \cot x\,dx=\int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx$$
$$=\int \frac{(\sin x)'}{\sin x}\,dx$$
$$=\ln|\sin x|+C$$

문제 **06-1** 답 $\boldsymbol{\dfrac{1}{8}\ln(12e-3)}$

$(4e^{2x}-1)'=8e^{2x}$이므로

$$f(x)=\int \frac{e^{2x}}{4e^{2x}-1}\,dx$$
$$=\frac{1}{8}\int \frac{8e^{2x}}{4e^{2x}-1}\,dx$$
$$=\frac{1}{8}\int \frac{(4e^{2x}-1)'}{4e^{2x}-1}\,dx$$
$$=\frac{1}{8}\ln|4e^{2x}-1|+C$$

$f(0)=\dfrac{1}{4}\ln 3$에서

$\dfrac{1}{8}\ln 3+C=\dfrac{1}{4}\ln 3 \quad\therefore C=\dfrac{1}{8}\ln 3$

따라서 $f(x)=\dfrac{1}{8}\ln|4e^{2x}-1|+\dfrac{1}{8}\ln 3$이므로

$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{8}\ln(4e-1)+\dfrac{1}{8}\ln 3=\dfrac{1}{8}\ln(12e-3)$

4 유제 & 문제 p.166

유제 07 답 (1) $\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+3x+2\ln|x-1|+C$

(2) $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-3}{x-1}\right|+C$

(3) $\ln\left|\frac{(x+1)^2}{x-3}\right|+C$

(1) (분자의 차수)>(분모의 차수)이므로 분자를 분모로 나누면

$x^3+2x-1=(x-1)(x^2+x+3)+2$

$$\therefore \int\frac{x^3+2x-1}{x-1}dx$$
$$=\int\frac{(x-1)(x^2+x+3)+2}{x-1}dx$$
$$=\int\left(x^2+x+3+\frac{2}{x-1}\right)dx$$
$$=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+3x+2\ln|x-1|+C$$

(2) (분자의 차수)<(분모의 차수)이므로 식을 변형하면

$$\frac{1}{x^2-4x+3}=\frac{1}{(x-3)(x-1)}$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-1}\right)$$
$$\therefore \int\frac{1}{x^2-4x+3}dx$$
$$=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-1}\right)dx$$
$$=\frac{1}{2}(\ln|x-3|-\ln|x-1|)+C$$
$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-3}{x-1}\right|+C$$

(3) (분자의 차수)<(분모의 차수)이고

$x^2-2x-3=(x+1)(x-3)$이므로

$\frac{x-7}{x^2-2x-3}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-3}$ (A, B는 상수)라 하면

$\frac{x-7}{x^2-2x-3}=\frac{(A+B)x-3A+B}{x^2-2x-3}$

위의 식은 x에 대한 항등식이므로

$A+B=1$, $-3A+B=-7$

두 식을 연립하여 풀면

$A=2$, $B=-1$

따라서 $\frac{x-7}{x^2-2x-3}=\frac{2}{x+1}-\frac{1}{x-3}$이므로

$$\int\frac{x-7}{x^2-2x-3}dx=\int\left(\frac{2}{x+1}-\frac{1}{x-3}\right)dx$$
$$=2\ln|x+1|-\ln|x-3|+C$$
$$=\ln\left|\frac{(x+1)^2}{x-3}\right|+C$$

5 유제 & 문제 p.169~170

유제 08 답 (1) $(x^2-x)\ln x-\frac{1}{2}x^2+x+C$

(2) $-xe^{3x}+\frac{2}{3}e^{3x}+C$

(3) $x\sin x+\cos x+C$

(4) $\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x\sin x-\frac{1}{2}\cos x+C$

(1) $f(x)=\ln x$, $g'(x)=2x-1$이라 하면

$f'(x)=\frac{1}{x}$, $g(x)=x^2-x$

$$\therefore \int(2x-1)\ln x\,dx$$
$$=(x^2-x)\ln x-\int\frac{1}{x}\times(x^2-x)\,dx$$
$$=(x^2-x)\ln x-\int(x-1)\,dx$$
$$=(x^2-x)\ln x-\frac{1}{2}x^2+x+C$$

(2) $f(x)=1-3x$, $g'(x)=e^{3x}$이라 하면

$f'(x)=-3$, $g(x)=\frac{1}{3}e^{3x}$

$$\therefore \int(1-3x)e^{3x}dx$$
$$=\frac{1}{3}e^{3x}(1-3x)-\int(-3)\times\frac{1}{3}e^{3x}dx$$
$$=\frac{1}{3}e^{3x}(1-3x)+\int e^{3x}dx$$
$$=\frac{1}{3}e^{3x}-xe^{3x}+\frac{1}{3}e^{3x}+C$$
$$=-xe^{3x}+\frac{2}{3}e^{3x}+C$$

(3) $f(x)=x$, $g'(x)=\cos x$라 하면

$f'(x)=1$, $g(x)=\sin x$

$$\therefore \int x\cos x\,dx$$
$$=x\sin x-\int 1\times\sin x\,dx$$
$$=x\sin x+\cos x+C$$

(4) $f(x)=x$, $g'(x)=\sin^2\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{2}$라 하면

$f'(x)=1$, $g(x)=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\sin x$

$$\therefore \int x\sin^2\frac{x}{2}\,dx$$
$$=x\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\sin x\right)-\int 1\times\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\sin x\right)dx$$
$$=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x\sin x-\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}\cos x+C$$
$$=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x\sin x-\frac{1}{2}\cos x+C$$

개념편

다른 풀이

주어진 식을 정리하면

$$\int x\sin^2\frac{x}{2}\,dx=\int x\times\frac{1-\cos x}{2}\,dx$$
$$=\frac{1}{2}\int x\,dx-\frac{1}{2}\int x\cos x\,dx$$
$$=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}\int x\cos x\,dx \quad \cdots\cdots \text{㉠}$$

$\int x\cos x\,dx$에서 $f(x)=x$, $g'(x)=\cos x$라 하면

$f'(x)=1$, $g(x)=\sin x$

$$\therefore \int x\cos x\,dx=x\sin x-\int 1\times\sin x\,dx$$
$$=x\sin x+\cos x+C_1 \quad \cdots\cdots \text{㉡}$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$\int x\sin^2\frac{x}{2}\,dx=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}(x\sin x+\cos x+C_1)$$
$$=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x\sin x-\frac{1}{2}\cos x+C$$

문제 08-1 답 **-1**

(i) $x>0$일 때

$$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int 2xe^x\,dx$$

$u(x)=2x$, $v'(x)=e^x$이라 하면

$u'(x)=2$, $v(x)=e^x$

$$\therefore f(x)=\int 2xe^x\,dx$$
$$=2xe^x-\int 2e^x\,dx$$
$$=2xe^x-2e^x+C_1$$

(ii) $x<0$일 때

$$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int \cos x\,dx$$
$$=\sin x+C_2$$

(i), (ii)에 의해

$$f(x)=\begin{cases} 2xe^x-2e^x+C_1 & (x>0) \\ \sin x+C_2 & (x<0) \end{cases}$$

$f(1)=1$에서

$2e-2e+C_1=1$

$\therefore C_1=1$

또 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to 0+}(2xe^x-2e^x+1)=\lim_{x\to 0-}(\sin x+C_2)=f(0)$$

$\therefore C_2=-2+1=-1$

따라서 $f(x)=\begin{cases} 2xe^x-2e^x+1 & (x\ge 0) \\ \sin x-1 & (x<0) \end{cases}$이므로

$f(-\pi)=-1$

유제 09 답 (1) $\boldsymbol{x(\ln x)^2-2x\ln x+2x+C}$

(2) $\boldsymbol{\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x-\cos x)+C}$

(1) $f(x)=(\ln x)^2$, $g'(x)=1$이라 하면

$f'(x)=\frac{2}{x}\ln x$, $g(x)=x$

$$\therefore \int(\ln x)^2\,dx$$
$$=x(\ln x)^2-\int\left(\frac{2}{x}\ln x\right)\times x\,dx$$
$$=x(\ln x)^2-2\int \ln x\,dx \quad \cdots\cdots \text{㉠}$$

$\int \ln x\,dx$에서 $u(x)=\ln x$, $v'(x)=1$이라 하면

$u'(x)=\frac{1}{x}$, $v(x)=x$

$$\therefore \int \ln x\,dx$$
$$=x\ln x-\int\frac{1}{x}\times x\,dx$$
$$=x\ln x-\int dx$$
$$=x\ln x-x+C_1 \quad \cdots\cdots \text{㉡}$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$\int(\ln x)^2\,dx=x(\ln x)^2-2(x\ln x-x+C_1)$$
$$=x(\ln x)^2-2x\ln x+2x+C$$

(2) $f(x)=\cos x$, $g'(x)=e^{-x}$이라 하면

$f'(x)=-\sin x$, $g(x)=-e^{-x}$

$$\therefore \int e^{-x}\cos x\,dx$$
$$=-e^{-x}\cos x-\int(-\sin x)(-e^{-x})\,dx$$
$$=-e^{-x}\cos x-\int e^{-x}\sin x\,dx \quad \cdots\cdots \text{㉠}$$

$\int e^{-x}\sin x\,dx$에서 $u(x)=\sin x$, $v'(x)=e^{-x}$이라 하면

$u'(x)=\cos x$, $v(x)=-e^{-x}$

$$\therefore \int e^{-x}\sin x\,dx$$
$$=-e^{-x}\sin x-\int(\cos x)(-e^{-x})\,dx$$
$$=-e^{-x}\sin x+\int e^{-x}\cos x\,dx \quad \cdots\cdots \text{㉡}$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$\int e^{-x}\cos x\,dx$$
$$=-e^{-x}\cos x-\left(-e^{-x}\sin x+\int e^{-x}\cos x\,dx\right)$$
$$2\int e^{-x}\cos x\,dx=-e^{-x}\cos x+e^{-x}\sin x$$
$$\therefore \int e^{-x}\cos x\,dx=\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x-\cos x)+C$$

기본 연습문제 p.172~174

1 ② 2 ④ 3 3 4 $3-\pi$ 5 ③
6 $\frac{7}{5}$ 7 ⑤ 8 $-\frac{1}{2}\sin^2 x+\sin x+C$
9 ② 10 $f(x)=e^x$ 11 $-\ln 3$
12 $-\frac{1}{4}e^2+\frac{1}{4}e$

1 $f'(x)=\int f''(x)\,dx=\int \frac{1}{x^2}\,dx=\int x^{-2}dx=-\frac{1}{x}+C_1$
곡선 $y=f(x)$ 위의 $x=1$인 점에서의 접선의 방정식이 $y=-x+1$이므로 $f'(1)=-1$에서
$-1+C_1=-1 \quad \therefore C_1=0$
따라서 $f'(x)=-\frac{1}{x}$이므로
$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int\left(-\frac{1}{x}\right)dx=-\ln|x|+C_2$
또 접점은 $(1, 0)$이므로 $f(1)=0$에서 $C_2=0$
따라서 $f(x)=-\ln|x|$이므로
$f(e)=-\ln e=-1$

2 $\int(2^x-1)(4^x+2^x+1)\,dx=\int(8^x-1)\,dx$
$=\frac{8^x}{\ln 8}-x+C$
$=\frac{2^{3x}}{3\ln 2}-x+C$

3 $\frac{d}{dx}\{f(x)+g(x)\}=\sin x$에서
$f(x)+g(x)=\int\sin x\,dx=-\cos x+C_1$ …… ㉠
$\frac{d}{dx}\{f(x)-g(x)\}=1-\cos x$에서
$f(x)-g(x)=\int(1-\cos x)\,dx$
$=x-\sin x+C_2$ …… ㉡
이때 $f(0)=1$, $g(0)=-1$이므로 ㉠, ㉡에서
$f(0)+g(0)=-1+C_1=0 \quad \therefore C_1=1$
$f(0)-g(0)=C_2=2$
$\therefore \begin{cases} f(x)+g(x)=-\cos x+1 & \cdots\cdots ㉢ \\ f(x)-g(x)=x-\sin x+2 & \cdots\cdots ㉣ \end{cases}$
㉢+㉣을 하면
$2f(x)=x-\sin x-\cos x+3$
㉢−㉣을 하면
$2g(x)=-x+\sin x-\cos x-1$
$\therefore g(x)=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\sin x-\frac{1}{2}\cos x-\frac{1}{2}$
$\therefore 2f(\pi)+g(2\pi)=\pi+1+3+\left(-\pi-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)=3$

4 $\sin 2x=2\sin x\cos x$, $\sin^2\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{2}$이므로
$f'(x)=8\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}-2\sin^2\frac{x}{2}$
$=4\sin x-2\times\frac{1-\cos x}{2}$
$=4\sin x+\cos x-1$
$\therefore f(x)=\int(4\sin x+\cos x-1)\,dx$
$=-4\cos x+\sin x-x+C$
$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\pi}{2}$에서
$1-\frac{\pi}{2}+C=-\frac{\pi}{2} \quad \therefore C=-1$
따라서 $f(x)=-4\cos x+\sin x-x-1$이므로
$f(\pi)=4-\pi-1=3-\pi$

5 $f(x)=\int f'(x)\,dx=\int x\sqrt{2x-3}\,dx$
$2x-3=t$로 놓으면 $x=\frac{t+3}{2}$
$2x-3=t$의 양변을 x에 대하여 미분하면
$\frac{dt}{dx}=2 \quad \therefore dx=\frac{1}{2}dt$
$\therefore f(x)=\int x\sqrt{2x-3}\,dx=\int\frac{t+3}{2}\times\sqrt{t}\times\frac{1}{2}dt$
$=\frac{1}{4}\int(t^{\frac{3}{2}}+3t^{\frac{1}{2}})\,dt=\frac{1}{10}t^2\sqrt{t}+\frac{1}{2}t\sqrt{t}+C$
$=\frac{1}{10}(2x-3)^2\sqrt{2x-3}+\frac{1}{2}(2x-3)\sqrt{2x-3}+C$
$f\left(\frac{3}{2}\right)=1$에서 $C=1$
$\therefore f(x)=\frac{1}{10}(2x-3)^2\sqrt{2x-3}+\frac{1}{2}(2x-3)\sqrt{2x-3}+1$
$\therefore f(2)=\frac{1}{10}+\frac{1}{2}+1=\frac{8}{5}$

6 $x^2-x-1=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=(x^2-x-1)'=2x-1$이므로
$f(x)=\int(4x-2)(x^2-x-1)^4\,dx$
$=2\int(x^2-x-1)^4(2x-1)\,dx$
$=2\int(x^2-x-1)^4(x^2-x-1)'\,dx$
$=2\int t^4\,dt=\frac{2}{5}t^5+C$
$=\frac{2}{5}(x^2-x-1)^5+C$
$f(0)=\frac{3}{5}$에서 $-\frac{2}{5}+C=\frac{3}{5} \quad \therefore C=1$
따라서 $f(x)=\frac{2}{5}(x^2-x-1)^5+1$이므로
$f(-1)=\frac{2}{5}(1+1-1)^5+1=\frac{7}{5}$

7 $\ln x=t$로 놓으면 $\dfrac{dt}{dx}=(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$이므로

$$f(x)=\int \frac{1}{x(\ln x)^2}\,dx=\int \frac{1}{(\ln x)^2}\times\frac{1}{x}\,dx$$
$$=\int (\ln x)^{-2}(\ln x)'\,dx$$
$$=\int t^{-2}\,dt=-\frac{1}{t}+C$$
$$=-\frac{1}{\ln x}+C$$

$f(e)=1$에서 $-1+C=1\qquad \therefore C=2$

따라서 $f(x)=-\dfrac{1}{\ln x}+2$이므로

$$f\left(\frac{1}{e}\right)=1+2=3$$

8 $$\int \frac{\cos^3 x}{1+\sin x}\,dx=\int \frac{\cos x\cos^2 x}{1+\sin x}\,dx$$
$$=\int \frac{\cos x\,(1-\sin^2 x)}{1+\sin x}\,dx$$
$$=\int \frac{\cos x\,(1+\sin x)(1-\sin x)}{1+\sin x}\,dx$$
$$=\int \cos x\,(1-\sin x)\,dx$$

$\sin x=t$로 놓으면 $\dfrac{dt}{dx}=(\sin x)'=\cos x$이므로

$$\int \cos x\,(1-\sin x)\,dx=\int (1-\sin x)(\sin x)'\,dx$$
$$=\int (1-t)\,dt=-\frac{1}{2}t^2+t+C$$
$$=-\frac{1}{2}\sin^2 x+\sin x+C$$

9 $(e^{x^2}+1)'=2xe^{x^2}$이므로

$$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int \frac{xe^{x^2}}{e^{x^2}+1}\,dx$$
$$=\frac{1}{2}\int \frac{2xe^{x^2}}{e^{x^2}+1}\,dx$$
$$=\frac{1}{2}\int \frac{(e^{x^2}+1)'}{e^{x^2}+1}\,dx$$
$$=\frac{1}{2}\ln(e^{x^2}+1)+C\ (\because e^{x^2}+1>0)$$

$f(\sqrt{\ln 2})=\ln\dfrac{\sqrt{6}}{2}$에서 $\dfrac{1}{2}\ln 3+C=\ln\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

$\therefore C=\ln\dfrac{\sqrt{6}}{2}-\ln\sqrt{3}=\ln\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

따라서 $f(x)=\dfrac{1}{2}\ln(e^{x^2}+1)+\ln\dfrac{\sqrt{2}}{2}$이므로

$$f(0)=\frac{1}{2}\ln 2+\ln\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$=\ln\sqrt{2}+\ln\frac{\sqrt{2}}{2}=\ln 1=0$$

10 $f'(x)=f(x)$에서 $\dfrac{f'(x)}{f(x)}=1$이므로

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx=\int dx$$

$\therefore \ln f(x)=x+C\ (\because f(x)>0)$ ...... ㉠

이때 $f(0)=1$이므로 ㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면

$\ln f(0)=0+C\qquad \therefore C=0$

따라서 $\ln f(x)=x$이므로 $f(x)=e^x$

11 $$\frac{1}{4x^2-1}=\frac{1}{(2x-1)(2x+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2x-1}-\frac{1}{2x+1}\right)$$

$$\therefore f(x)=\int \frac{1}{4x^2-1}\,dx$$
$$=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{2x-1}-\frac{1}{2x+1}\right)dx$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\ln|2x-1|-\frac{1}{2}\ln|2x+1|\right)+C$$
$$=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{2x-1}{2x+1}\right|+C$$

$f(0)=0$에서 $C=0$

$$\therefore f(x)=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{2x-1}{2x+1}\right|$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{40}f(k)=\frac{1}{4}\left(\ln\frac{1}{3}+\ln\frac{3}{5}+\ln\frac{5}{7}+\cdots+\ln\frac{79}{81}\right)$$
$$=\frac{1}{4}\ln\left(\frac{1}{\cancel{3}}\times\frac{\cancel{3}}{\cancel{5}}\times\frac{\cancel{5}}{\cancel{7}}\times\cdots\times\frac{\cancel{79}}{81}\right)$$
$$=\frac{1}{4}\ln\frac{1}{81}=\frac{1}{4}\ln 3^{-4}=-\ln 3$$

12 곡선 $y=f(x)$ 위의 임의의 점 $(x,\ y)$에서의 접선의 기울기가 $(x-1)e^{2x}$이므로

$f'(x)=(x-1)e^{2x}$ ...... ㉠

$\therefore f(x)=\int (x-1)e^{2x}\,dx$

$u(x)=x-1,\ v'(x)=e^{2x}$이라 하면

$u'(x)=1,\ v(x)=\dfrac{1}{2}e^{2x}$

$$\therefore f(x)=\int (x-1)e^{2x}\,dx$$
$$=\frac{1}{2}e^{2x}(x-1)-\int 1\times\frac{1}{2}e^{2x}\,dx$$
$$=\frac{1}{2}xe^{2x}-\frac{1}{2}e^{2x}-\frac{1}{4}e^{2x}+C$$
$$=\frac{1}{2}xe^{2x}-\frac{3}{4}e^{2x}+C$$

$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{1}{4}e$에서

$\dfrac{1}{4}e-\dfrac{3}{4}e+C=-\dfrac{1}{4}e\qquad \therefore C=\dfrac{1}{4}e$

$$\therefore f(x)=\frac{1}{2}xe^{2x}-\frac{3}{4}e^{2x}+\frac{1}{4}e$$

㉠에서 $f'(x)=0$인 x의 값은 $x=1$ ($\because e^{2x}>0$)
함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 최소이므로 최솟값은
$f(1)=\frac{1}{2}e^2-\frac{3}{4}e^2+\frac{1}{4}e=-\frac{1}{4}e^2+\frac{1}{4}e$

실전 연습문제 p.175

1 $f(x)=2e^x-2$ **2** -2π **3** ③ **4** x^ne^x

1 $f(x)=\int(2ae^{x+2}-e^x)\,dx$
$=2ae^{x+2}-e^x+C$ …… ㉠
$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=2$에서 $\lim_{x\to0}x=0$이고, 극한값이 존재하므로
$\lim_{x\to0}f(x)=0$ $\therefore f(0)=0$
이때 미분계수의 정의에 의해
$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)=2$
따라서 $f'(x)=2ae^{x+2}-e^x$에서
$2ae^2-1=2$ $\therefore a=\frac{3}{2e^2}$
이를 ㉠에 대입하면
$f(x)=2\times\frac{3}{2e^2}\times e^{x+2}-e^x+C=2e^x+C$
$f(0)=0$이므로
$2+C=0$ $\therefore C=-2$
$\therefore f(x)=2e^x-2$

2 $\lim_{h\to0}\frac{f(x+3h)-f(x-h)}{h}$
$=\lim_{h\to0}\frac{f(x+3h)-f(x)}{3h}\times3+\lim_{h\to0}\frac{f(x-h)-f(x)}{-h}$
$=3f'(x)+f'(x)=4f'(x)$
따라서 $4f'(x)=4\tan^2x$이므로
$f'(x)=\tan^2x$
$\therefore f(x)=\int\tan^2x\,dx=\int(\sec^2x-1)\,dx$
$=\tan x-x+C$
$\therefore f\left(\frac{9}{4}\pi\right)-f\left(\frac{\pi}{4}\right)=1-\frac{9}{4}\pi+C-\left(1-\frac{\pi}{4}+C\right)$
$=-2\pi$

3 $\cos x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=(\cos x)'=-\sin x$이므로
$f(x)=-\int\left(\frac{\cos x}{3}+\frac{\cos^2x}{4}+\frac{\cos^3x}{5}+\cdots+\frac{\cos^{2016}x}{2018}\right)\sin x\,dx$
$=\int\left(\frac{\cos x}{3}+\frac{\cos^2x}{4}+\frac{\cos^3x}{5}+\cdots+\frac{\cos^{2016}x}{2018}\right)(-\sin x)\,dx$
$=\int\left(\frac{\cos x}{3}+\frac{\cos^2x}{4}+\frac{\cos^3x}{5}+\cdots+\frac{\cos^{2016}x}{2018}\right)(\cos x)'\,dx$
$=\int\left(\frac{t}{3}+\frac{t^2}{4}+\frac{t^3}{5}+\cdots+\frac{t^{2016}}{2018}\right)dt$
$=\frac{t^2}{2\times3}+\frac{t^3}{3\times4}+\frac{t^4}{4\times5}+\cdots+\frac{t^{2017}}{2017\times2018}+C$
$=\frac{\cos^2x}{2\times3}+\frac{\cos^3x}{3\times4}+\frac{\cos^4x}{4\times5}+\cdots+\frac{\cos^{2017}x}{2017\times2018}+C$
$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$에서 $C=0$
$\therefore f(x)=\frac{\cos^2x}{2\times3}+\frac{\cos^3x}{3\times4}+\frac{\cos^4x}{4\times5}+\cdots+\frac{\cos^{2017}x}{2017\times2018}$
$\therefore f(0)=\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\frac{1}{4\times5}+\cdots+\frac{1}{2017\times2018}$
$=\left(\frac{1}{2}-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{4}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{4}}-\cancel{\frac{1}{5}}\right)+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{2017}}-\frac{1}{2018}\right)$
$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2018}$
$=\frac{1008}{2018}=\frac{504}{1009}$
따라서 $a=504$, $b=1009$이므로
$b-a=505$

4 $f(x)=x^n$, $g'(x)=e^x$이라 하면
$f'(x)=nx^{n-1}$, $g(x)=e^x$
부분적분법에 의해
$I_n=\int x^ne^x\,dx=x^ne^x-\int nx^{n-1}e^x\,dx$
$=x^ne^x-n\int x^{n-1}e^x\,dx$
이때 $I_{n-1}=\int x^{n-1}e^x\,dx$이므로
$I_n=x^ne^x-nI_{n-1}$
$\therefore I_n+nI_{n-1}=x^ne^x$

02 여러 가지 함수의 정적분

1 개념 CHECK p.176

1. 답 (1) $\frac{16}{3}$ (2) $\frac{1}{2}$ (3) $e-1$ (4) 1

(1) $\int_0^4 \sqrt{x}\,dx=\int_0^4 x^{\frac{1}{2}}dx=\left[\frac{2}{3}x\sqrt{x}\right]_0^4=\frac{16}{3}$

(2) $\int_1^2 \frac{1}{x^2}dx=\int_1^2 x^{-2}dx=\left[-\frac{1}{x}\right]_1^2=-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}$

(3) $\int_0^1 e^x dx=\left[e^x\right]_0^1=e-1$

(4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx=\left[-\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=0+1=1$

1 유제 & 문제 p.177~180

유제 01 답 (1) e^3-e^2+1 (2) $2\sqrt{3}-\frac{4\sqrt{2}}{3}+\frac{10}{3}$

(3) $\frac{26}{3\ln 3}-3$ (4) $2-\frac{\sqrt{2}}{2}$

(5) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ (6) $\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}$

(1) $\int_1^e \frac{3x^3-2x^2+1}{x}dx=\int_1^e\left(3x^2-2x+\frac{1}{x}\right)dx$

$=\left[x^3-x^2+\ln x\right]_1^e$

$=(e^3-e^2+1)-(1-1+0)$

$=e^3-e^2+1$

(2) $\int_1^3\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt{x+1}\right)dx=\left[2\sqrt{x}+\frac{2}{3}(x+1)\sqrt{x+1}\right]_1^3$

$=\left(2\sqrt{3}+\frac{16}{3}\right)-\left(2+\frac{4\sqrt{2}}{3}\right)$

$=2\sqrt{3}-\frac{4\sqrt{2}}{3}+\frac{10}{3}$

(3) $\int_{-1}^2 \frac{9^x-1}{3^x+1}dx=\int_{-1}^2 \frac{(3^x+1)(3^x-1)}{3^x+1}dx$

$=\int_{-1}^2(3^x-1)\,dx=\left[\frac{3^x}{\ln 3}-x\right]_{-1}^2$

$=\left(\frac{9}{\ln 3}-2\right)-\left(\frac{1}{3\ln 3}+1\right)$

$=\frac{26}{3\ln 3}-3$

(4) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin x+2\cos x)\,dx=\left[-\cos x+2\sin x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$

$=(0+2)-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\sqrt{2}\right)$

$=2-\frac{\sqrt{2}}{2}$

(5) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sec^4 x}{1+\tan^2 x}dx=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sec^4 x}{\sec^2 x}dx$

$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sec^2 x\,dx$

$=\left[\tan x\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}$

$=\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

(6) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\frac{x}{2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos x}{2}dx$

$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos x)\,dx$

$=\frac{1}{2}\left[x+\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\pi}{2}+1\right)-0\right\}$

$=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}$

문제 01-1 답 (1) $\frac{56}{3}$ (2) 4 (3) 2 (4) $\frac{21}{2}$

(1) $\int_2^5(\sqrt{x-1}+1)^2dx-\int_2^5(\sqrt{x-1}-1)^2dx$

$=\int_2^5\{(\sqrt{x-1}+1)^2-(\sqrt{x-1}-1)^2\}\,dx$

$=\int_2^5\{(x-1+2\sqrt{x-1}+1)$

$-(x-1-2\sqrt{x-1}+1)\}\,dx$

$=\int_2^5 4\sqrt{x-1}\,dx$

$=4\int_2^5\sqrt{x-1}\,dx$

$=4\left[\frac{2}{3}(x-1)\sqrt{x-1}\right]_2^5$

$=4\left(\frac{16}{3}-\frac{2}{3}\right)=\frac{56}{3}$

(2) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\sin x+1)^2dx+\int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}}(\sin x-1)^2dx$

$=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\sin x+1)^2dx-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\sin x-1)^2dx$

$=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\{(\sin x+1)^2-(\sin x-1)^2\}\,dx$

$=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\{(\sin^2 x+2\sin x+1)$

$-(\sin^2 x-2\sin x+1)\}\,dx$

$=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}4\sin x\,dx$

$=4\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin x\,dx$

$=4\left[-\cos x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$

$=4(1+0)=4$

(3) $\displaystyle\int_2^4 \frac{1}{\sqrt{x+3}}dx+\int_4^6 \frac{1}{\sqrt{x+3}}dx+\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x+3}}dx$

$\displaystyle=\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x+3}}dx+\int_2^4 \frac{1}{\sqrt{x+3}}dx+\int_4^6 \frac{1}{\sqrt{x+3}}dx$

$\displaystyle=\int_1^6 \frac{1}{\sqrt{x+3}}dx$

$\displaystyle=\Big[2\sqrt{x+3}\Big]_1^6$

$=6-4=2$

(4) $\displaystyle\int_{\ln 2}^{\ln 4} e^{2x}dx+\int_{\ln 4}^{\ln 6} e^{2y}dy-\int_{\ln 5}^{\ln 6} e^{2z}dz$

$\displaystyle=\int_{\ln 2}^{\ln 4} e^{2x}dx+\int_{\ln 4}^{\ln 6} e^{2x}dx+\int_{\ln 6}^{\ln 5} e^{2x}dx$

$\displaystyle=\int_{\ln 2}^{\ln 5} e^{2x}dx$

$\displaystyle=\Big[\frac{1}{2}e^{2x}\Big]_{\ln 2}^{\ln 5}$

$\displaystyle=\frac{1}{2}e^{2\ln 5}-\frac{1}{2}e^{2\ln 2}$

$\displaystyle=\frac{25}{2}-2=\frac{21}{2}$

문제 01-2 답 $\mathbf{\frac{4}{3}}$

$\displaystyle\frac{1}{x^2+3x+2}=\frac{1}{(x+1)(x+2)}=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}$이므로

$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2+3x+2}dx$

$\displaystyle=\int_0^1\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right)dx$

$\displaystyle=\Big[\ln(x+1)-\ln(x+2)\Big]_0^1$

$=(\ln 2-\ln 3)-(0-\ln 2)$

$=\ln 2-\ln 3+\ln 2$

$=2\ln 2-\ln 3$

$\displaystyle=\ln 4-\ln 3=\ln\frac{4}{3}$

$\displaystyle\therefore k=\frac{4}{3}$

문제 01-3 답 **2**

$\displaystyle\int_0^k \frac{e^{2x}-1}{e^x+1}dx=\int_0^k \frac{(e^x+1)(e^x-1)}{e^x+1}dx$

$\displaystyle=\int_0^k (e^x-1)dx$

$\displaystyle=\Big[e^x-x\Big]_0^k$

$=(e^k-k)-(1-0)$

$=e^k-k-1$

따라서 $e^k-k-1=e^2-3$이므로

$k=2$

유제 02 답 (1) $\mathbf{2\ln\frac{4}{3}}$ (2) $\mathbf{3-\sqrt{3}}$

(1) $x-1=0$에서 $x=1$

따라서 $\displaystyle\frac{|x-1|}{x+1}=\begin{cases}\dfrac{x-1}{x+1} & (x\ge 1)\\ -\dfrac{x-1}{x+1} & (x\le 1)\end{cases}$이므로

$\displaystyle\int_0^2 \frac{|x-1|}{x+1}dx$

$\displaystyle=\int_0^1\left(-\frac{x-1}{x+1}\right)dx+\int_1^2 \frac{x-1}{x+1}dx$

$\displaystyle=\int_0^1\left(-1+\frac{2}{x+1}\right)dx+\int_1^2\left(1-\frac{2}{x+1}\right)dx$

$\displaystyle=\Big[-x+2\ln(x+1)\Big]_0^1+\Big[x-2\ln(x+1)\Big]_1^2$

$=(-1+2\ln 2)+\{(2-2\ln 3)-(1-2\ln 2)\}$

$\displaystyle=4\ln 2-2\ln 3=2\ln\frac{4}{3}$

(2) $\cos x-\sqrt{3}\sin x=0$에서 $\cos x=\sqrt{3}\sin x$

$\displaystyle\tan x=\frac{\sqrt{3}}{3}\qquad \therefore x=\frac{\pi}{6}\ \left(\because 0\le x\le\frac{\pi}{2}\right)$

따라서

$|\cos x-\sqrt{3}\sin x|$

$\displaystyle=\begin{cases}\cos x-\sqrt{3}\sin x & \left(0\le x\le\dfrac{\pi}{6}\right)\\ -\cos x+\sqrt{3}\sin x & \left(\dfrac{\pi}{6}\le x\le\dfrac{\pi}{2}\right)\end{cases}$

이므로

$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos x-\sqrt{3}\sin x|\,dx$

$\displaystyle=\int_0^{\frac{\pi}{6}}(\cos x-\sqrt{3}\sin x)dx$

$\displaystyle\qquad+\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}(-\cos x+\sqrt{3}\sin x)dx$

$\displaystyle=\Big[\sin x+\sqrt{3}\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{6}}+\Big[-\sin x-\sqrt{3}\cos x\Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}$

$\displaystyle=\left\{\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\right)-\sqrt{3}\right\}+\left\{(-1)-\left(-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\right)\right\}$

$=3-\sqrt{3}$

문제 02-1 답 $\mathbf{\frac{38}{3}+\frac{\pi}{2}}$

$\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^3 f(x)dx$

$\displaystyle=\int_{-\frac{\pi}{2}}^0(\sin x+1)dx+\int_0^3(2x+\sqrt{x+1})dx$

$\displaystyle=\Big[-\cos x+x\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^0+\Big[x^2+\frac{2}{3}(x+1)\sqrt{x+1}\Big]_0^3$

$\displaystyle=\left\{(-1)-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right\}+\left\{\left(9+\frac{16}{3}\right)-\frac{2}{3}\right\}$

$\displaystyle=\frac{38}{3}+\frac{\pi}{2}$

개념편

유제 03 답 (1) $2e-\frac{2}{e}$ (2) 1

(1) $\int_{-1}^{3}(e^x+e^{-x})\,dx+\int_{3}^{1}(e^x+e^{-x})\,dx$

$=\int_{-1}^{1}(e^x+e^{-x})\,dx$

이때 $f(x)=e^x+e^{-x}$이라 하면

$f(-x)=e^{-x}+e^x=f(x)$이므로

$\int_{-1}^{1}(e^x+e^{-x})\,dx=2\int_{0}^{1}(e^x+e^{-x})\,dx$

$=2\Big[e^x-e^{-x}\Big]_0^1$

$=2e-\frac{2}{e}$

(2) $\int_{0}^{\frac{\pi}{6}}(\cos x+x\tan^2 x+x^2\sin x)\,dx$

$-\int_{0}^{-\frac{\pi}{6}}(\cos x+x\tan^2 x+x^2\sin x)\,dx$

$=\int_{0}^{\frac{\pi}{6}}(\cos x+x\tan^2 x+x^2\sin x)\,dx$

$+\int_{-\frac{\pi}{6}}^{0}(\cos x+x\tan^2 x+x^2\sin x)\,dx$

$=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}(\cos x+x\tan^2 x+x^2\sin x)\,dx$

이때 $f(x)=\cos x$, $g(x)=x\tan^2 x+x^2\sin x$라 하면

$f(-x)=\cos(-x)=\cos x=f(x)$

$g(-x)=-x\tan^2(-x)+(-x)^2\sin(-x)$

$=-x\tan^2 x-x^2\sin x$

$=-(x\tan^2 x+x^2\sin x)=-g(x)$

$\therefore \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}(\cos x+x\tan^2 x+x^2\sin x)\,dx$

$=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\cos x\,dx+\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}(x\tan^2 x+x^2\sin x)\,dx$

$=2\int_{0}^{\frac{\pi}{6}}\cos x\,dx+0$

$=2\Big[\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{6}}=1$

문제 03-1 답 2

$f(x)=2^x+2^{-x}$, $g(x)=3^x-3^{-x}$이라 하면

$f(-x)=2^{-x}+2^x=f(x)$

$g(-x)=3^{-x}-3^x=-(3^x-3^{-x})=-g(x)$

$\therefore \int_{-1}^{1}(2^x+3^x+2^{-x}-3^{-x})\,dx$

$=\int_{-1}^{1}(2^x+2^{-x})\,dx+\int_{-1}^{1}(3^x-3^{-x})\,dx$

$=2\int_{0}^{1}(2^x+2^{-x})\,dx+0$

$=2\Big[\frac{2^x}{\ln 2}-\frac{2^{-x}}{\ln 2}\Big]_0^1=\frac{3}{\ln 2}$

$\therefore a=2$

유제 04 답 (1) $\frac{4}{15}$ (2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (3) 6 (4) $\ln 11$ (5) $\ln 2$ (6) $\frac{1}{12}$

(1) $1-x=t$로 놓으면 $x=1-t$이고 $\frac{dt}{dx}=-1$

$x=0$일 때 $t=1$, $x=1$일 때 $t=0$이므로

$\int_{0}^{1}x\sqrt{1-x}\,dx=-\int_{1}^{0}(1-t)\sqrt{t}\,dt$

$=\int_{0}^{1}(\sqrt{t}-t\sqrt{t})\,dt$

$=\Big[\frac{2}{3}t\sqrt{t}-\frac{2}{5}t^2\sqrt{t}\Big]_0^1$

$=\frac{4}{15}$

(2) $2x+\frac{\pi}{4}=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=2$이고,

$x=0$일 때 $t=\frac{\pi}{4}$, $x=\frac{\pi}{4}$일 때 $t=\frac{3}{4}\pi$이므로

$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)dx=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}\frac{1}{2}\sin t\,dt$

$=\Big[-\frac{1}{2}\cos t\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}$

(3) $x^2+2x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=2x+2$이고,

$x=0$일 때 $t=0$, $x=2$일 때 $t=8$이므로

$\int_{0}^{2}(x+1)\sqrt[3]{x^2+2x}\,dx=\int_{0}^{8}\frac{1}{2}\sqrt[3]{t}\,dt$

$=\Big[\frac{3}{8}t\sqrt[3]{t}\Big]_0^8$

$=6$

(4) $x^2+x-1=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=2x+1$이고,

$x=1$일 때 $t=1$, $x=3$일 때 $t=11$이므로

$\int_{1}^{3}\frac{2x+1}{x^2+x-1}\,dx=\int_{1}^{11}\frac{1}{t}\,dt$

$=\Big[\ln t\Big]_1^{11}$

$=\ln 11$

다른 풀이 $\int\frac{f'(x)}{f(x)}\,dx=\ln|f(x)|+C$ 이용

$(x^2+x-1)'=2x+1$이므로

$\int_{1}^{3}\frac{2x+1}{x^2+x-1}\,dx=\Big[\ln|x^2+x-1|\Big]_1^3=\ln 11$

(5) $\ln x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}$이고,

$x=e$일 때 $t=1$, $x=e^2$일 때 $t=2$이므로

$\int_{e}^{e^2}\frac{1}{x\ln x}\,dx=\int_{1}^{2}\frac{1}{t}\,dt=\Big[\ln t\Big]_1^2=\ln 2$

다른 풀이 $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx=\ln|f(x)|+C$ 이용

$(\ln x)'=\frac{1}{x}$이므로

$$\int_e^{e^2}\frac{1}{x\ln x}dx=\Big[\ln|\ln x|\Big]_e^{e^2}=\ln 2$$

(6) $\cos 2x=2\cos^2 x-1$이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos 2x\sin x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}(2\cos^2 x-1)\sin x\,dx$$

$\cos x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=-\sin x$이고,

$x=0$일 때 $t=1$, $x=\frac{\pi}{3}$일 때 $t=\frac{1}{2}$이므로

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{3}}(2\cos^2 x-1)\sin x\,dx&=-\int_1^{\frac{1}{2}}(2t^2-1)\,dt\\&=\int_{\frac{1}{2}}^1(2t^2-1)\,dt\\&=\Big[\frac{2}{3}t^3-t\Big]_{\frac{1}{2}}^1=\frac{1}{12}\end{aligned}$$

문제 04-1 답 $\frac{15}{4}$

곡선 $y=\ln x$ 위의 임의의 점 $(x,\ y)$에서의 접선의 기울기가 $m(x)$이므로

$$m(x)=(\ln x)'=\frac{1}{x}$$

$$\therefore \int_e^{e^2}(\ln x)^3 m(x)\,dx=\int_e^{e^2}\frac{(\ln x)^3}{x}dx$$

$\ln x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}$이고,

$x=e$일 때 $t=1$, $x=e^2$일 때 $t=2$이므로

$$\int_e^{e^2}\frac{(\ln x)^3}{x}dx=\int_1^2 t^3\,dt=\Big[\frac{1}{4}t^4\Big]_1^2=\frac{15}{4}$$

유제 05 답 (1) $\frac{\pi}{3}$ (2) $\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}$

(1) $x=\sin\theta\left(-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right)$로 놓으면

$1=\cos\theta\frac{d\theta}{dx}$ $\quad\therefore dx=\cos\theta\,d\theta$

$x=0$일 때 $\theta=0$, $x=\frac{\sqrt{3}}{2}$일 때 $\theta=\frac{\pi}{3}$이므로

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx&=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}d\theta\\&=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos\theta}{\sqrt{\cos^2\theta}}d\theta\\&=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos\theta}{\cos\theta}d\theta\\&=\int_0^{\frac{\pi}{3}}d\theta\\&=\Big[\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\pi}{3}\end{aligned}$$

(2) $x=\tan\theta\left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$로 놓으면

$1=\sec^2\theta\frac{d\theta}{dx}$ $\quad\therefore dx=\sec^2\theta\,d\theta$

$x=0$일 때 $\theta=0$, $x=1$일 때 $\theta=\frac{\pi}{4}$이므로

$$\begin{aligned}\int_0^1\frac{1}{(x^2+1)^2}dx&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sec^2\theta}{(\tan^2\theta+1)^2}d\theta\\&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sec^2\theta}{\sec^4\theta}d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\sec^2\theta}d\theta\\&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2\theta\,d\theta\\&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1+\cos 2\theta}{2}d\theta\\&=\Big[\frac{1}{2}\theta+\frac{1}{4}\sin 2\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}\\&=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}\end{aligned}$$

유제 06 답 (1) $e-2$ (2) $-\frac{3}{2}\pi$ (3) $\frac{1}{4}e^2-\frac{1}{4}$ (4) $\frac{1}{2e^{\pi}}+\frac{1}{2}$

(1) $f(x)=x$, $g'(x)=e^{1-x}$이라 하면

$f'(x)=1$, $g(x)=-e^{1-x}$

$$\begin{aligned}\therefore \int_0^1 xe^{1-x}dx&=\Big[-xe^{1-x}\Big]_0^1-\int_0^1 1\times(-e^{1-x})\,dx\\&=-1-\Big[e^{1-x}\Big]_0^1=e-2\end{aligned}$$

(2) $\sin 2x=2\sin x\cos x$이므로

$$\int_0^{\pi}6x\sin x\cos x\,dx=\int_0^{\pi}3x\sin 2x\,dx$$

$f(x)=3x$, $g'(x)=\sin 2x$라 하면

$f'(x)=3$, $g(x)=-\frac{1}{2}\cos 2x$

$$\begin{aligned}\therefore \int_0^{\pi}3x\sin 2x\,dx&=\Big[-\frac{3}{2}x\cos 2x\Big]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}3\times\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)dx\\&=-\frac{3}{2}\pi+\Big[\frac{3}{4}\sin 2x\Big]_0^{\pi}=-\frac{3}{2}\pi\end{aligned}$$

(3) $f(x)=(\ln x)^2$, $g'(x)=x$라 하면

$f'(x)=\frac{2}{x}\ln x$, $g(x)=\frac{1}{2}x^2$

$$\begin{aligned}\therefore \int_1^e x(\ln x)^2dx&=\Big[\frac{1}{2}x^2(\ln x)^2\Big]_1^e-\int_1^e\frac{2}{x}\ln x\times\frac{1}{2}x^2\,dx\\&=\frac{1}{2}e^2-\int_1^e x\ln x\,dx \quad\cdots\cdots ㉠\end{aligned}$$

개념편

$\int_1^e x\ln x\,dx$에서 $u(x)=\ln x$, $v'(x)=x$라 하면

$u'(x)=\frac{1}{x}$, $v(x)=\frac{1}{2}x^2$

$\therefore \int_1^e x\ln x\,dx=\left[\frac{1}{2}x^2\ln x\right]_1^e-\int_1^e \frac{1}{x}\times\frac{1}{2}x^2\,dx$

$=\frac{1}{2}e^2-\left[\frac{1}{4}x^2\right]_1^e$

$=\frac{1}{2}e^2-\left(\frac{1}{4}e^2-\frac{1}{4}\right)$

$=\frac{1}{4}e^2+\frac{1}{4}$ ...... ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$\int_1^e x(\ln x)^2\,dx=\frac{1}{2}e^2-\left(\frac{1}{4}e^2+\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}e^2-\frac{1}{4}$

(4) $f(x)=\sin x$, $g'(x)=e^{-x}$이라 하면

$f'(x)=\cos x$, $g(x)=-e^{-x}$

$\therefore \int_0^\pi e^{-x}\sin x\,dx$

$=\left[-e^{-x}\sin x\right]_0^\pi-\int_0^\pi \cos x\times(-e^{-x})\,dx$

$=\int_0^\pi e^{-x}\cos x\,dx$ ...... ㉠

$\int_0^\pi e^{-x}\cos x\,dx$에서 $u(x)=\cos x$, $v'(x)=e^{-x}$이라 하면

$u'(x)=-\sin x$, $v(x)=-e^{-x}$

$\therefore \int_0^\pi e^{-x}\cos x\,dx$

$=\left[-e^{-x}\cos x\right]_0^\pi-\int_0^\pi(-\sin x)\times(-e^{-x})\,dx$

$=\frac{1}{e^\pi}+1-\int_0^\pi e^{-x}\sin x\,dx$ ...... ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$\int_0^\pi e^{-x}\sin x\,dx=\frac{1}{e^\pi}+1-\int_0^\pi e^{-x}\sin x\,dx$

$2\int_0^\pi e^{-x}\sin x\,dx=\frac{1}{e^\pi}+1$

$\therefore \int_0^\pi e^{-x}\sin x\,dx=\frac{1}{2e^\pi}+\frac{1}{2}$

문제 06-1 답 -1

$f(x)=x^2$, $g'(x)=e^x$이라 하면

$f'(x)=2x$, $g(x)=e^x$

$\therefore \int_0^1 x^2e^x\,dx=\left[x^2e^x\right]_0^1-\int_0^1 2x\times e^x\,dx$

$=e-\int_0^1 2xe^x\,dx$ ...... ㉠

$\int_0^1 2xe^x\,dx$에서 $u(x)=2x$, $v'(x)=e^x$이라 하면

$u'(x)=2$, $v(x)=e^x$

$\therefore \int_0^1 2xe^x\,dx=\left[2xe^x\right]_0^1-\int_0^1 2\times e^x\,dx$

$=2e-\left[2e^x\right]_0^1=2$ ...... ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$\int_0^1 x^2e^x\,dx=e-2$

따라서 $a=1$, $b=-2$이므로

$a+b=1+(-2)=-1$

유제 07 답 $f(x)=e^x+2-2e$

$\int_0^1 f(t)\,dt=k$(k는 상수) ...... ㉠

라 하면

$f(x)=e^x+2k$ ...... ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$k=\int_0^1(e^t+2k)\,dt$

$=\left[e^t+2kt\right]_0^1=e+2k-1$

따라서 $k=e+2k-1$이므로

$k=1-e$

이를 ㉡에 대입하면

$f(x)=e^x+2-2e$

문제 07-1 답 $\frac{5}{4}$

$\int_0^{\frac{\pi}{3}} f(t)\sin t\,dt=k$($k$는 상수) ...... ㉠

라 하면

$f(x)=\cos x+k$ ...... ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$k=\int_0^{\frac{\pi}{3}}(\cos t+k)\sin t\,dt$

$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}(\sin t\cos t+k\sin t)\,dt$

$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{1}{2}\sin 2t+k\sin t\right)dt$

$=\left[-\frac{1}{4}\cos 2t-k\cos t\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$

$=\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{2}k\right)-\left(-\frac{1}{4}-k\right)=\frac{3}{8}+\frac{1}{2}k$

따라서 $k=\frac{3}{8}+\frac{1}{2}k$이므로

$\frac{1}{2}k=\frac{3}{8}$ $\quad\therefore k=\frac{3}{4}$

이를 ㉡에 대입하면

$f(x)=\cos x+\frac{3}{4}$

$\therefore f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}+\frac{3}{4}=\frac{5}{4}$

유제 08　답 $f(x)=2e^{2x}-3e^{x}$

주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{d}{dx}\int_{0}^{x} f(t)\,dt=\frac{d}{dx}(e^{2x}-ae^{x}+2)$$

$\therefore f(x)=2e^{2x}-ae^{x}$　…… ㉠

주어진 등식의 양변에 $x=0$을 대입하면

$$\int_{0}^{0} f(t)\,dt=1-a+2=3-a$$

$\int_{0}^{0} f(t)\,dt=0$이므로 $0=3-a$　$\therefore a=3$

이를 ㉠에 대입하면 $f(x)=2e^{2x}-3e^{x}$

문제 08-1　답 -1

$$f(x)=x\int_{0}^{x}\cos t\,dt-\int_{0}^{x} t\cos t\,dt$$

양변을 x에 대하여 미분하면

$$f'(x)=\int_{0}^{x}\cos t\,dt+x\cos x-x\cos x=\int_{0}^{x}\cos t\,dt$$

$$\therefore f'\left(\frac{3}{2}\pi\right)=\int_{0}^{\frac{3}{2}\pi}\cos t\,dt=\Big[\sin t\Big]_{0}^{\frac{3}{2}\pi}=-1$$

문제 08-2　답 2

$f(x)=\int_{0}^{x}(a+b\cos t)\sin t\,dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=(a+b\cos x)\sin x$

이때 함수 $f(x)$가 $x=\frac{\pi}{2}$에서 극댓값 1을 가지므로

$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=0,\ f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$

$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$에서 $a=0$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$에서

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(a+b\cos t)\sin t\,dt=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} b\cos t\sin t\,dt$$
$$=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}b\sin 2t\,dt$$
$$=\left[-\frac{1}{4}b\cos 2t\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}b=1$$

$\therefore b=2$

$\therefore a+b=0+2=2$

기본 연습문제　p.188~189

1 ②	2 2	3 $\frac{2}{\pi}$	4 0	5 $-\frac{2}{5}$
6 ②	7 $\frac{\sqrt{2}}{4}\pi$	8 -2	9 -2	10 ⑤

1 $\int_{a}^{b}\frac{1}{x}\,dx=\Big[\ln x\Big]_{a}^{b}=\ln b-\ln a=\ln\frac{b}{a}$

① $\int_{a+1}^{b+1}\frac{1}{x}\,dx=\Big[\ln x\Big]_{a+1}^{b+1}=\ln(b+1)-\ln(a+1)$

$=\ln\frac{b+1}{a+1}$

② $\int_{2a}^{2b}\frac{1}{x}\,dx=\Big[\ln x\Big]_{2a}^{2b}=\ln 2b-\ln 2a$

$=\ln\frac{2b}{2a}=\ln\frac{b}{a}$

③ $\int_{a^2}^{b^2}\frac{1}{x}\,dx=\Big[\ln x\Big]_{a^2}^{b^2}=\ln b^2-\ln a^2$

$=2\ln b-2\ln a=2\ln\frac{b}{a}$

④ $\int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{b}}\frac{1}{x}\,dx=\Big[\ln x\Big]_{\sqrt{a}}^{\sqrt{b}}=\ln\sqrt{b}-\ln\sqrt{a}$

$=\frac{1}{2}\ln b-\frac{1}{2}\ln a=\frac{1}{2}\ln\frac{b}{a}$

⑤ $\int_{\frac{1}{a}}^{\frac{1}{b}}\frac{1}{x}\,dx=\Big[\ln x\Big]_{\frac{1}{a}}^{\frac{1}{b}}=\ln\frac{1}{b}-\ln\frac{1}{a}$

$=-\ln b+\ln a=\ln\frac{a}{b}$

따라서 $\int_{a}^{b}\frac{1}{x}\,dx$와 값이 같은 것은 ②이다.

2 $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(\sin x+\cos x)^2dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}(\sin x-\cos x)^2dx$

$=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(\sin x+\cos x)^2dx-\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(\sin x-\cos x)^2dx$

$=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\{(\sin x+\cos x)^2-(\sin x-\cos x)^2\}\,dx$

$=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}4\sin x\cos x\,dx$

$=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}2\sin 2x\,dx$

$=\Big[-\cos 2x\Big]_{0}^{\frac{\pi}{2}}$

$=1-(-1)=2$

3 $0\le x\le 2\pi$이므로 $\sin x=0$에서

$x=0$ 또는 $x=\pi$ 또는 $x=2\pi$

따라서 $f(x)=\begin{cases}\sin x+k & (0\le x\le\pi)\\ -\sin x+k & (\pi\le x\le 2\pi)\end{cases}$이므로

$\int_{0}^{2\pi}(|\sin x|+k)\,dx=8$에서

$\int_{0}^{\pi}(\sin x+k)\,dx+\int_{\pi}^{2\pi}(-\sin x+k)\,dx=8$

$\Big[-\cos x+kx\Big]_{0}^{\pi}+\Big[\cos x+kx\Big]_{\pi}^{2\pi}=8$

$\{(1+k\pi)-(-1)\}+\{(1+2k\pi)-(-1+k\pi)\}=8$

$4+2k\pi=8$　$\therefore k=\frac{2}{\pi}$

개념편

4 $f(x)=x(e^x+e^{-x})$이라 하면

$f(-x)=-x(e^{-x}+e^x)=-f(x)$이므로

$\int_{-3}^{3} x(e^x+e^{-x})\,dx=0$

5 $\cos x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=-\sin x$이고,

$x=0$일 때 $t=1$, $x=\pi$일 때 $t=-1$이므로

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi}(1-\cos^3 x)\cos x\sin x\,dx&=-\int_1^{-1}(1-t^3)t\,dt\\&=\int_{-1}^{1}(t-t^4)\,dt\\&=\left[\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{5}t^5\right]_{-1}^{1}=-\frac{2}{5}\end{aligned}$$

6 $x^2=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=2x$이고,

$x=0$일 때 $t=0$, $x=a$일 때 $t=a^2$이므로

$\int_0^a 2xe^{x^2}\,dx=\int_0^{a^2} e^t\,dt=\left[e^t\right]_0^{a^2}=e^{a^2}-1$

따라서 $e^{a^2}-1=1$이므로

$e^{a^2}=2$, $a^2=\ln 2$ $\quad\therefore a=\sqrt{\ln 2}$ ($\because a>0$)

7 $f(x)=\frac{1}{2x^2+1}$이라 하면

$f(-x)=\frac{1}{2x^2+1}=f(x)$

$\therefore \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{1}{2x^2+1}\,dx=2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{1}{2x^2+1}\,dx$

$x=\frac{1}{\sqrt{2}}\tan\theta\left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$로 놓으면

$1=\frac{1}{\sqrt{2}}\sec^2\theta\frac{d\theta}{dx}$ $\quad\therefore dx=\frac{1}{\sqrt{2}}\sec^2\theta\,d\theta$

$x=0$일 때 $\theta=0$, $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$일 때 $\theta=\frac{\pi}{4}$이므로

$$\begin{aligned}2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{1}{2x^2+1}\,dx&=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}\sec^2\theta}{\tan^2\theta+1}\,d\theta\\&=\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sec^2\theta}{\sec^2\theta}\,d\theta\\&=\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\\&=\sqrt{2}\Big[\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{4}\pi\end{aligned}$$

8 $f(x)=(\ln x)^2$, $g'(x)=1$이라 하면

$f'(x)=\frac{2}{x}\ln x$, $g(x)=x$

$$\begin{aligned}\therefore \int_1^e(\ln x)^2dx&=\Big[x(\ln x)^2\Big]_1^e-\int_1^e\frac{2}{x}\ln x\times x\,dx\\&=e-2\int_1^e\ln x\,dx \qquad \cdots\cdots ㉠\end{aligned}$$

$\int_1^e\ln x\,dx$에서 $u(x)=\ln x$, $v'(x)=1$이라 하면

$u'(x)=\frac{1}{x}$, $v(x)=x$

$$\begin{aligned}\therefore \int_1^e\ln x\,dx&=\Big[x\ln x\Big]_1^e-\int_1^e\frac{1}{x}\times x\,dx\\&=e-\Big[x\Big]_1^e=1 \qquad \cdots\cdots ㉡\end{aligned}$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$\int_1^e(\ln x)^2dx=e-2$

따라서 $p=1$, $q=-2$이므로

$pq=-2$

9 $\int_0^1 e^{-t}f(t)\,dt=k$($k$는 상수) $\quad\cdots\cdots ㉠$

라 하면

$f(x)=x+k$ $\quad\cdots\cdots ㉡$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$\begin{aligned}k&=\int_0^1 e^{-t}(t+k)\,dt\\&=\Big[-e^{-t}(t+k)\Big]_0^1+\int_0^1 e^{-t}\,dt\\&=-\frac{1}{e}(1+k)+k+\Big[-e^{-t}\Big]_0^1\\&=-\frac{2}{e}-\frac{k}{e}+k+1\end{aligned}$$

따라서 $k=-\frac{2}{e}-\frac{k}{e}+k+1$이므로

$\frac{k}{e}=-\frac{2}{e}+1$ $\quad\therefore k=e-2$

이를 ㉡에 대입하면

$f(x)=x+e-2$

$\therefore f(-e)=-e+e-2=-2$

10 $\int_1^x(t-x)f(t)\,dt=x^2\ln x-ax+b$ $\quad\cdots\cdots ㉠$

의 좌변을 정리하면

$\int_1^x tf(t)\,dt-x\int_1^x f(t)\,dt=x^2\ln x-ax+b$

양변을 x에 대하여 미분하면

$xf(x)-\int_1^x f(t)\,dt-xf(x)=2x\ln x+x-a$

$\therefore \int_1^x f(t)\,dt=-2x\ln x-x+a$ $\quad\cdots\cdots ㉡$

㉠에 $x=1$을 대입하면

$0=-a+b$ $\quad\cdots\cdots ㉢$

㉡에 $x=1$을 대입하면

$0=-1+a$ $\quad\cdots\cdots ㉣$

㉢, ㉣을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=1$

$\therefore a+b=2$

실전 연습문제 p.190

1 $19+2\ln 2-\frac{3}{e}$ **2** $\frac{\pi}{4}$ **3** ③ **4** $\frac{1}{e}$

1 함수 $f(x)$는 연속함수이므로 $x=-1$, $x=1$에서도 연속이다.

$g(x)=ae^{x+1}$, $h(x)=b$, $u(x)=\frac{2}{x+1}+2$라 하면

$g(-1)=h(-1)$에서 $a=b$

$h(1)=u(1)$에서 $b=3$

$\therefore a=3$

따라서 $f(x)=\begin{cases} 3e^{x+1} & (x\le -1) \\ 3 & (-1\le x\le 1) \\ \frac{2}{x+1}+2 & (x\ge 1)\end{cases}$이므로

$$\int_{-2}^{3} f(x)\,dx$$
$$=\int_{-2}^{-1} 3e^{x+1}dx+3\int_{-1}^{1} dx+\int_{1}^{3}\left(\frac{2}{x+1}+2\right)dx$$
$$=\left[3e^{x+1}\right]_{-2}^{-1}+3\left[x\right]_{-1}^{1}+\left[2\ln(x+1)+2x\right]_{1}^{3}$$
$$=\left(3-\frac{3}{e}\right)+3(1+1)+\{(2\ln 4+6)-(2\ln 2+2)\}$$
$$=13+2\ln 2-\frac{3}{e}$$
$$\therefore c=13+2\ln 2-\frac{3}{e}$$
$$\therefore a+b+c=3+3+13+2\ln 2-\frac{3}{e}$$
$$=19+2\ln 2-\frac{3}{e}$$

2 $f(x)=\cos x$이므로

$f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x$

$$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{1+\{f(x)\}^2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx$$

$\cos x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=-\sin x$이고,

$x=0$일 때 $t=1$, $x=\frac{\pi}{2}$일 때 $t=0$이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx=-\int_1^0\frac{1}{1+t^2}dt$$
$$=\int_0^1\frac{1}{1+t^2}dt$$

$t=\tan\theta\left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$로 놓으면

$1=\sec^2\theta\,\frac{d\theta}{dt}$

$\therefore dt=\sec^2\theta\, d\theta$

$t=0$일 때 $\theta=0$, $t=1$일 때 $\theta=\frac{\pi}{4}$이므로

$$\int_0^1\frac{1}{1+t^2}dt=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sec^2\theta}{1+\tan^2\theta}d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sec^2\theta}{\sec^2\theta}d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta=\left[\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}$$

3 $0<x\le e$에서 $1\ge \ln x$, $x>e$에서 $1<\ln x$이므로

$1◎\ln x=\begin{cases} 1 & (0<x\le e) \\ \ln x & (x>e)\end{cases}$

$$\therefore \int_1^4 (1◎\ln x)\,dx=\int_1^e dx+\int_e^4 \ln x\,dx$$
$$=\left[x\right]_1^e+\int_e^4\ln x\,dx$$
$$=e-1+\int_e^4\ln x\,dx \quad \cdots\cdots ㉠$$

$\int_e^4 \ln x\,dx$에서 $f(x)=\ln x$, $g'(x)=1$이라 하면

$f'(x)=\frac{1}{x}$, $g(x)=x$

$$\therefore \int_e^4\ln x\,dx=\left[x\ln x\right]_e^4-\int_e^4\frac{1}{x}\times x\,dx$$
$$=4\ln 4-e-\left[x\right]_e^4$$
$$=8\ln 2-4$$

이를 ㉠에 대입하면

$$\int_1^4(1◎\ln x)\,dx=e-1+8\ln 2-4$$
$$=e+8\ln 2-5$$

4 $f(x)=\int_0^x\frac{1-t}{e^t}dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=\frac{1-x}{e^x}$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ ($\because e^x>0$)

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	극대	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 최대이므로 최댓값은

$$f(1)=\int_0^1\frac{1-t}{e^t}dt=\int_0^1(1-t)e^{-t}dt$$

$u(t)=1-t$, $v'(t)=e^{-t}$이라 하면

$u'(t)=-1$, $v(t)=-e^{-t}$

$$\therefore f(1)=\int_0^1(1-t)e^{-t}dt$$
$$=\left[-(1-t)e^{-t}\right]_0^1-\int_0^1(-1)\times(-e^{-t})\,dt$$
$$=1-\left[-e^{-t}\right]_0^1=\frac{1}{e}$$

개념편

Ⅲ-2. 정적분의 활용

01 정적분의 활용

1 개념 CHECK

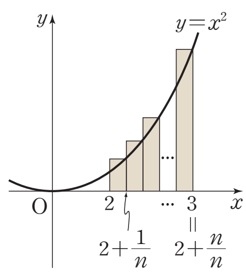
p.194

1. 답 (1) x^2, $\frac{1}{3}x^3$, $\frac{7}{3}$ (2) 2, 2, 2, 4

1 유제 & 문제

p.195~197

유제 01 답 $\frac{19}{3}$



오른쪽 그림과 같이 구간 $[2, 3]$을 n등분 하면 각 구간의 오른쪽 끝점의 x좌표는 차례로

$2+\frac{1}{n}$, $2+\frac{2}{n}$, $2+\frac{3}{n}$, $\cdots$, $2+\frac{n}{n}(=3)$

◀ 구간 $[2, 3]$을 n등분 하면 각 구간의 간격은 $\frac{3-2}{n}=\frac{1}{n}$

이에 대응하는 y의 값은 각각

$\left(2+\frac{1}{n}\right)^2$, $\left(2+\frac{2}{n}\right)^2$, $\left(2+\frac{3}{n}\right)^2$, $\cdots$, $\left(2+\frac{n}{n}\right)^2$

이때 색칠한 직사각형의 가로의 길이는 $\frac{1}{n}$이므로 그 넓이의 합을 S_n이라 하면

$$S_n=\frac{1}{n}\times\left(2+\frac{1}{n}\right)^2+\frac{1}{n}\times\left(2+\frac{2}{n}\right)^2+\frac{1}{n}\times\left(2+\frac{3}{n}\right)^2+\cdots+\frac{1}{n}\times\left(2+\frac{n}{n}\right)^2$$

$$=\frac{1}{n}\left\{\left(4+\frac{4}{n}+\frac{1^2}{n^2}\right)+\left(4+\frac{8}{n}+\frac{2^2}{n^2}\right)+\left(4+\frac{12}{n}+\frac{3^2}{n^2}\right)+\cdots+\left(4+\frac{4n}{n}+\frac{n^2}{n^2}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{n}\left\{4n+\frac{4}{n}(1+2+3+\cdots+n)+\frac{1}{n^2}(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)\right\}$$

$$=\frac{1}{n}\left\{4n+\frac{4}{n}\times\frac{n(n+1)}{2}+\frac{1}{n^2}\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right\}$$

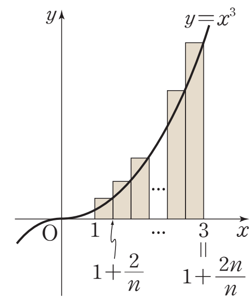
$$=4+2\left(1+\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)$$

따라서 구하는 넓이를 S라 하면

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left\{4+2\left(1+\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)\right\}$$

$$=4+2+\frac{1}{3}=\frac{19}{3}$$

문제 01-1 답 ⑤



오른쪽 그림과 같이 구간 $[1, 3]$을 n등분 하면 각 구간의 오른쪽 끝점의 x좌표는 차례로

$1+\frac{2}{n}$, $1+\frac{4}{n}$, $1+\frac{6}{n}$, $\cdots$, $1+\frac{2n}{n}(=3)$

이에 대응하는 y의 값은 각각

$\left(1+\frac{2}{n}\right)^3$, $\left(1+\frac{4}{n}\right)^3$, $\left(1+\frac{6}{n}\right)^3$, $\cdots$, $\left(1+\frac{2n}{n}\right)^3$

이때 색칠한 직사각형의 가로의 길이는 $\frac{2}{n}$이므로 그 넓이의 합을 S_n이라 하면

$$S_n=\frac{2}{n}\times\left(1+\frac{2}{n}\right)^3+\frac{2}{n}\times\left(1+\frac{4}{n}\right)^3+\frac{2}{n}\times\left(1+\frac{6}{n}\right)^3+\cdots+\frac{2}{n}\times\left(1+\frac{2n}{n}\right)^3$$

$$=\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{2k}{n}\right)^3$$

따라서 구하는 넓이를 S라 하면

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{2k}{n}\right)^3$$

유제 02 답 (1) $\frac{15}{4}$ (2) $1-\frac{2\sqrt{2}}{3}$ (3) $4\ln 2$ (4) $3\ln 2-1$

(1) 주어진 식을 변형하면

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(n+k)^3}{n^4}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)^3\times\frac{1}{n}$$

$f(x)=x$, $a=1$, $b=2$로 놓고, 정적분으로 나타내어 값을 계산하면

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)^3\times\frac{1}{n}=\int_1^2 x^3\,dx=\left[\frac{1}{4}x^4\right]_1^2=\frac{15}{4}$$

(2) 주어진 식을 변형하면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{n}-\sqrt{2k})$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{n}-\sqrt{2k}}{\sqrt{n}}\times\frac{1}{n}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(1-\sqrt{\frac{2k}{n}}\right)\times\frac{2}{n}$$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(-1+\sqrt{\frac{2k}{n}}\right)\times\frac{2}{n}$$

$f(x)=-1+\sqrt{x}$, $a=0$, $b=2$로 놓고, 정적분으로 나타내어 값을 계산하면

$$-\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(-1+\sqrt{\frac{2k}{n}}\right)\times\frac{2}{n}$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^2(-1+\sqrt{x})\,dx$$

$$=-\frac{1}{2}\left[-x+\frac{2}{3}x\sqrt{x}\right]_0^2=1-\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

(3) 주어진 식을 변형하면

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4}{n+1}+\frac{4}{n+2}+\cdots+\frac{4}{n+n}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}4\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}4\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}+\cdots+\frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right)\times\frac{1}{n}$$
$$=4\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}\times\frac{1}{n}$$

$f(x)=\frac{1}{x}$, $a=1$, $b=2$로 놓고, 정적분으로 나타내어 값을 계산하면

$$4\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}\times\frac{1}{n}=4\int_1^2\frac{1}{x}dx$$
$$=4\Big[\ln x\Big]_1^2$$
$$=4\ln 2$$

(4) 주어진 식을 변형하면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{\ln\left(2+\frac{2}{n}\right)+\ln\left(2+\frac{4}{n}\right)+\cdots+\ln\left(2+\frac{2n}{n}\right)\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\ln\left(2+\frac{2k}{n}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{n}\ln\left(2+\frac{2k}{n}\right)$$

$f(x)=\ln x$, $a=2$, $b=4$로 놓고, 정적분으로 나타내면

$$\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{n}\ln\left(2+\frac{2k}{n}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\int_2^4\ln x\,dx$$

이때 $u(x)=\ln x$, $v'(x)=1$이라 하면

$u'(x)=\frac{1}{x}$, $v(x)=x$

$$\therefore\ \frac{1}{2}\int_2^4\ln x\,dx=\frac{1}{2}\left(\Big[x\ln x\Big]_2^4-\int_2^4dx\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(6\ln 2-\Big[x\Big]_2^4\right)$$
$$=3\ln 2-1$$

문제 02-1 답 **4**

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(1+\frac{2k}{n}\right)\times\frac{c}{n}$$
$$=\frac{c}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(1+\frac{2-0}{n}k\right)\times\frac{2-0}{n}$$
$$=\frac{c}{2}\int_0^2f(1+x)\,dx$$
$$=\int_a^bf(1+x)\,dx$$

따라서 $a=0$, $b=2$, $c=2$이므로

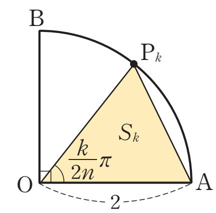
$a+b+c=4$

문제 02-2 답 $\mathbf{\frac{2}{3}A}$

주어진 그림에서 곡선 $y=f(x)$와 두 직선 $x=2$, $x=5$로 둘러싸인 도형의 넓이 A는

$$A=\int_2^5f(x)\,dx$$
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(2+\frac{3k}{n}\right)\times\frac{2}{n}$$
$$=\frac{2}{3}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(2+\frac{5-2}{n}k\right)\times\frac{5-2}{n}$$
$$=\frac{2}{3}\int_2^5f(x)\,dx$$
$$=\frac{2}{3}A$$

문제 02-3 답 $\mathbf{\frac{4}{\pi}}$



사분원의 호의 길이를 n등분 하면 사분원의 중심각의 크기인 $\frac{\pi}{2}$도 n등분 되므로

$$\angle \mathrm{AOP}_k=\frac{\pi}{2}\times\frac{k}{n}=\frac{k}{2n}\pi$$

따라서 $\triangle \mathrm{OAP}_k$의 넓이 S_k는

$$S_k=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OA}}\times\overline{\mathrm{OP}_k}\times\sin\frac{k}{2n}\pi=2\sin\frac{k}{2n}\pi$$
$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}S_k=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}2\sin\frac{\pi}{2n}k$$
$$=\frac{4}{\pi}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\pi}{2n}\sin\frac{\pi}{2n}k$$

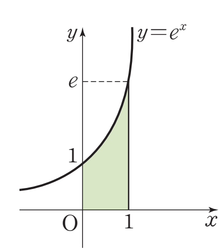
$f(x)=\sin x$, $a=0$, $b=\frac{\pi}{2}$로 놓고, 정적분으로 나타내어 값을 계산하면

$$\frac{4}{\pi}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\pi}{2n}\sin\frac{\pi}{2n}k=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx$$
$$=\frac{4}{\pi}\Big[-\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{4}{\pi}$$

2 개념 CHECK
p.198

1. 답 (1) $\mathbf{e-1}$ (2) $\mathbf{e-\frac{1}{e}}$ (3) $\mathbf{\frac{1}{6}}$

(1) 구간 $[0, 1]$에서 $e^x>0$이므로 구하는 넓이를 S라 하면



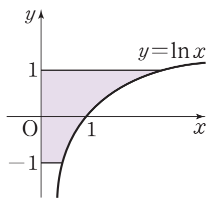
$$S=\int_0^1|e^x|\,dx$$
$$=\int_0^1e^x\,dx=\Big[e^x\Big]_0^1$$
$$=e-1$$

(2) $y=\ln x$를 x에 대하여 풀면

$x=e^{y}$

이때 구간 $[-1,\ 1]$에서 $e^{y}>0$

이므로 구하는 넓이를 S라 하면



$$S=\int_{-1}^{1}|e^{y}|\,dy$$

$$=\int_{-1}^{1}e^{y}\,dy=\Big[e^{y}\Big]_{-1}^{1}$$

$$=e-\frac{1}{e}$$

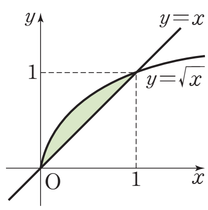
(3) 곡선 $y=\sqrt{x}$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표를 구하면

$\sqrt{x}=x,\ x^{2}-x=0,\ x(x-1)=0$

$\therefore\ x=0$ 또는 $x=1$

이때 구간 $[0,\ 1]$에서 $\sqrt{x}\geq x$

이므로 구하는 넓이를 S라 하면



$$S=\int_{0}^{1}(\sqrt{x}-x)\,dx$$

$$=\left[\frac{2}{3}x\sqrt{x}-\frac{1}{2}x^{2}\right]_{0}^{1}$$

$$=\frac{2}{3}-\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$$

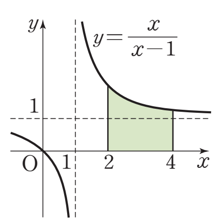
2 유제 & 문제

p.199~203

유제 03 답 (1) $\mathbf{2+\ln 3}$ (2) $\mathbf{-e+4}$ (3) $\mathbf{2\sqrt{3}+\frac{\pi}{3}}$

(1) 구간 $[2,\ 4]$에서 $\dfrac{x}{x-1}>0$이

므로 구하는 넓이를 S라 하면



$$S=\int_{2}^{4}\left|\frac{x}{x-1}\right|dx$$

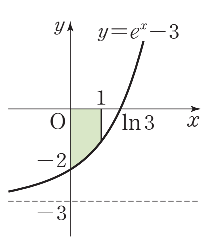
$$=\int_{2}^{4}\left(1+\frac{1}{x-1}\right)dx$$

$$=\Big[x+\ln(x-1)\Big]_{2}^{4}$$

$$=2+\ln 3$$

(2) 구간 $[0,\ 1]$에서 $e^{x}-3<0$이

므로 구하는 넓이를 S라 하면



$$S=\int_{0}^{1}|e^{x}-3|\,dx$$

$$=\int_{0}^{1}(-e^{x}+3)\,dx$$

$$=\Big[-e^{x}+3x\Big]_{0}^{1}$$

$$=-e+4$$

(3) 곡선 $y=2\sin x-1$과 x축의 교점의 x좌표를 구하면

$2\sin x-1=0,\ \sin x=\dfrac{1}{2}$

$\therefore\ x=\dfrac{5}{6}\pi\ \left(\because\ \dfrac{\pi}{2}\leq x\leq\dfrac{3}{2}\pi\right)$

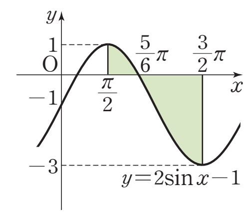
이때 구간 $\left[\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{5}{6}\pi\right]$에서

$2\sin x-1\geq 0$이고, 구간

$\left[\dfrac{5}{6}\pi,\ \dfrac{3}{2}\pi\right]$에서

$2\sin x-1\leq 0$이므로 구하

는 넓이를 S라 하면



$$S=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi}|2\sin x-1|\,dx$$

$$=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5}{6}\pi}(2\sin x-1)\,dx+\int_{\frac{5}{6}\pi}^{\frac{3}{2}\pi}(-2\sin x+1)\,dx$$

$$=\Big[-2\cos x-x\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5}{6}\pi}+\Big[2\cos x+x\Big]_{\frac{5}{6}\pi}^{\frac{3}{2}\pi}$$

$$=\left(\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}\right)+\left(\sqrt{3}+\frac{2}{3}\pi\right)$$

$$=2\sqrt{3}+\frac{\pi}{3}$$

문제 03-1 답 $e^{\sqrt{2}}$

구간 $[1,\ e^{2}]$에서 $\dfrac{\ln x}{x}\geq 0$이므로 두 부분 $A,\ B$의 넓이를 각각 $S_{A},\ S_{B}$라 하면

$$S_{A}=\int_{1}^{k}\frac{\ln x}{x}\,dx,\ S_{B}=\int_{k}^{e^{2}}\frac{\ln x}{x}\,dx$$

$\ln x=t$로 놓으면 $\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{1}{x}$이고, $x=1$일 때 $t=0$, $x=k$일 때 $t=\ln k$, $x=e^{2}$일 때 $t=2$이므로

$$S_{A}=\int_{1}^{k}\frac{\ln x}{x}\,dx=\int_{0}^{\ln k}t\,dt$$

$$=\left[\frac{1}{2}t^{2}\right]_{0}^{\ln k}$$

$$=\frac{1}{2}(\ln k)^{2}$$

$$S_{B}=\int_{k}^{e^{2}}\frac{\ln x}{x}\,dx=\int_{\ln k}^{2}t\,dt$$

$$=\left[\frac{1}{2}t^{2}\right]_{\ln k}^{2}$$

$$=2-\frac{1}{2}(\ln k)^{2}$$

이때 두 부분 $A,\ B$의 넓이가 같으므로

$S_{A}=S_{B}$

$\dfrac{1}{2}(\ln k)^{2}=2-\dfrac{1}{2}(\ln k)^{2},\ (\ln k)^{2}=2$

그런데 $1<k<e^{2}$에서 $0<\ln k<2$이므로

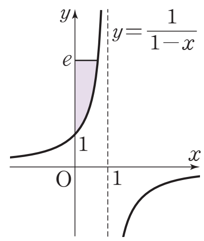
$\ln k=\sqrt{2}\qquad\therefore\ k=e^{\sqrt{2}}$

유제 04 답 (1) $e-2$ (2) $5-\frac{1}{e^2}$

(1) $y=\frac{1}{1-x}$을 x에 대하여 풀면

$1-x=\frac{1}{y}$ $\quad\therefore x=1-\frac{1}{y}$

이때 구간 $[1, e]$에서 $1-\frac{1}{y}\ge 0$이므로 구하는 넓이를 S라 하면

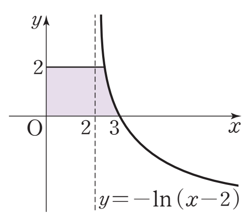


$$S=\int_1^e\left|1-\frac{1}{y}\right|dy$$
$$=\int_1^e\left(1-\frac{1}{y}\right)dy$$
$$=\Big[y-\ln y\Big]_1^e=e-2$$

(2) $y=-\ln(x-2)$를 x에 대하여 풀면

$\ln(x-2)=-y$, $x-2=e^{-y}$ $\quad\therefore x=e^{-y}+2$

이때 구간 $[0, 2]$에서 $e^{-y}+2>0$이므로 구하는 넓이를 S라 하면



$$S=\int_0^2|e^{-y}+2|\,dy$$
$$=\int_0^2(e^{-y}+2)\,dy$$
$$=\Big[-e^{-y}+2y\Big]_0^2=5-\frac{1}{e^2}$$

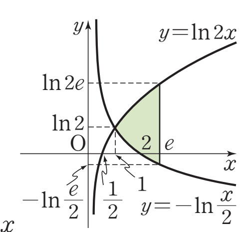
유제 05 답 (1) 2 (2) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ (3) $\frac{1}{3}$ (4) $\frac{1}{2}e^2-e+\frac{3}{2}$

(1) 두 곡선 $y=\ln 2x$, $y=-\ln\frac{x}{2}$의 교점의 x좌표를 구하면

$\ln 2x=-\ln\frac{x}{2}$, $\ln 2x=\ln\frac{2}{x}$

$2x=\frac{2}{x}$, $x^2=1$ $\quad\therefore x=1\ (\because x>0)$

이때 구간 $[1, e]$에서 $\ln 2x\ge-\ln\frac{x}{2}$이므로 구하는 넓이를 S라 하면



$$S=\int_1^e\left\{\ln 2x-\left(-\ln\frac{x}{2}\right)\right\}dx$$
$$=\int_1^e\ln x^2\,dx=2\int_1^e\ln x\,dx$$

$f(x)=\ln x$, $g'(x)=1$이라 하면

$f'(x)=\frac{1}{x}$, $g(x)=x$

$$\therefore S=2\int_1^e\ln x\,dx=2\left(\Big[x\ln x\Big]_1^e-\int_1^e dx\right)$$
$$=2\left(e-\Big[x\Big]_1^e\right)=2$$

(2) 두 곡선 $y=\cos x$, $y=\cos 2x$의 교점의 x좌표를 구하면

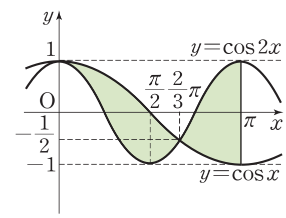
$\cos x=\cos 2x$, $\cos x=2\cos^2 x-1$

$(2\cos x+1)(\cos x-1)=0$

$\therefore \cos x=-\frac{1}{2}$ 또는 $\cos x=1$

$\therefore x=\frac{2}{3}\pi$ 또는 $x=0\ (\because 0\le x\le\pi)$

이때 구간 $\left[0, \frac{2}{3}\pi\right]$에서 $\cos x\ge\cos 2x$이고, 구간 $\left[\frac{2}{3}\pi, \pi\right]$에서 $\cos 2x\ge\cos x$이므로 구하는 넓이를 S라 하면



$$S=\int_0^{\frac{2}{3}\pi}(\cos x-\cos 2x)\,dx$$
$$+\int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi}(\cos 2x-\cos x)\,dx$$
$$=\left[\sin x-\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{2}{3}\pi}+\left[\frac{1}{2}\sin 2x-\sin x\right]_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi}$$
$$=\frac{3\sqrt{3}}{4}+\frac{3\sqrt{3}}{4}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

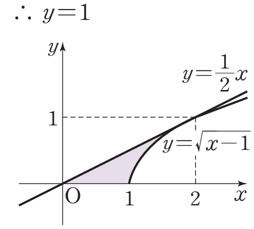
(3) $y=\sqrt{x-1}$, $y=\frac{1}{2}x$를 각각 x에 대하여 풀면

$x=y^2+1$, $x=2y$

곡선 $x=y^2+1$과 직선 $x=2y$의 교점의 y좌표를 구하면

$y^2+1=2y$, $(y-1)^2=0$ $\quad\therefore y=1$

이때 구간 $[0, 1]$에서 $y^2+1\ge 2y$이므로 구하는 넓이를 S라 하면

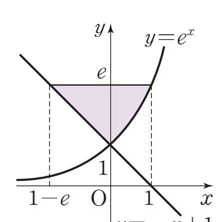


$$S=\int_0^1\{(y^2+1)-2y\}\,dy$$
$$=\int_0^1(y^2-2y+1)\,dy$$
$$=\left[\frac{1}{3}y^3-y^2+y\right]_0^1=\frac{1}{3}$$

(4) $y=e^x$, $y=-x+1$을 각각 x에 대하여 풀면

$x=\ln y$, $x=-y+1$

이때 구간 $[1, e]$에서 $\ln y\ge-y+1$이므로 구하는 넓이를 S라 하면



$$S=\int_1^e\{\ln y-(-y+1)\}\,dy$$
$$=\int_1^e\ln y\,dy+\int_1^e(y-1)\,dy$$

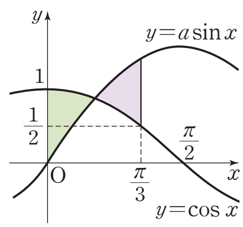
$\int_1^e\ln y\,dy$에서 $f(y)=\ln y$, $g'(y)=1$이라 하면

$f'(y)=\frac{1}{y}$, $g(y)=y$

$$\therefore S=\int_1^e \ln y\, dy+\int_1^e (y-1)\, dy$$
$$=\Big[y\ln y\Big]_1^e-\int_1^e dy+\Big[\frac{1}{2}y^2-y\Big]_1^e$$
$$=e-\Big[y\Big]_1^e+\left(\frac{1}{2}e^2-e+\frac{1}{2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}e^2-e+\frac{3}{2}$$

문제 05-1 답 $\sqrt{3}$

$a>1$이므로 두 곡선 $y=a\sin x$, $y=\cos x$와 두 직선 $x=0$, $x=\frac{\pi}{3}$로 둘러싸인 도형은 오른쪽 그림의 색칠한 부분과 같다.



이때 두 곡선과 두 직선으로 둘러싸인 두 도형의 넓이가 서로 같으므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}}(a\sin x-\cos x)\, dx=0$$
$$\Big[-a\cos x-\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}=0$$
$$\left(-\frac{1}{2}a-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-(-a)=0$$
$$\frac{1}{2}a-\frac{\sqrt{3}}{2}=0 \qquad \therefore a=\sqrt{3}$$

유제 06 답 $\frac{e}{2}-1$

$f(x)=\ln(x-1)$이라 하면 $f'(x)=\frac{1}{x-1}$

점 $(e+1, 1)$에서 그은 접선의 기울기는

$f'(e+1)=\frac{1}{e}$

따라서 점 $(e+1, 1)$에서 그은 접선의 방정식은

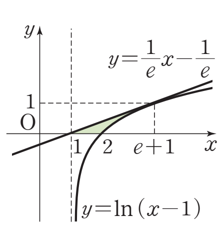
$y-1=\frac{1}{e}(x-e-1)$

$\therefore y=\frac{1}{e}x-\frac{1}{e}$

$y=\ln(x-1)$, $y=\frac{1}{e}x-\frac{1}{e}$을 각각 x에 대하여 풀면

$x=e^y+1$, $x=ey+1$

이때 구간 $[0, 1]$에서 $e^y+1\geq ey+1$이므로 구하는 넓이를 S라 하면



$$S=\int_0^1\{(e^y+1)-(ey+1)\}\, dy$$
$$=\int_0^1(e^y-ey)\, dy$$
$$=\Big[e^y-\frac{e}{2}y^2\Big]_0^1=\frac{e}{2}-1$$

다른 풀이

구간 $[2, e+1]$에서 $\ln(x-1)\geq 0$이므로 구하는 넓이를 S라 하면

$$S=\frac{1}{2}\times e\times 1-\int_2^{e+1}\ln(x-1)\, dx$$
$$=\frac{e}{2}-\int_2^{e+1}\ln(x-1)\, dx$$

$\int_2^{e+1}\ln(x-1)\, dx$에서 $u(x)=\ln(x-1)$, $v'(x)=1$이라 하면

$u'(x)=\frac{1}{x-1}$, $v(x)=x$

$$\therefore S=\frac{e}{2}-\int_2^{e+1}\ln(x-1)\, dx$$
$$=\frac{e}{2}-\Big[x\ln(x-1)\Big]_2^{e+1}+\int_2^{e+1}\frac{x}{x-1}\, dx$$
$$=\frac{e}{2}-(e+1)+\Big[x+\ln(x-1)\Big]_2^{e+1}$$
$$=-\frac{e}{2}-1+e=\frac{e}{2}-1$$

문제 06-1 답 $\frac{e}{2}-\frac{3}{2e}$

$f(x)=e^{-x}$이라 하면 $f'(x)=-e^{-x}$

점 $(-1, e)$에서 그은 접선의 기울기는 $f'(-1)=-e$

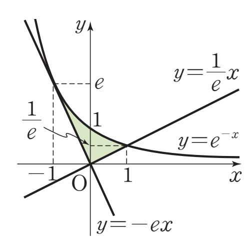
따라서 점 $(-1, e)$에서 그은 접선의 방정식은

$y-e=-e(x+1) \qquad \therefore y=-ex$

또 이 접선과 수직인 직선의 기울기는 $\frac{1}{e}$이고, 이 직선이 점 $\left(1, \frac{1}{e}\right)$을 지나므로

$y-\frac{1}{e}=\frac{1}{e}(x-1) \qquad \therefore y=\frac{1}{e}x$

직선 $y=\frac{1}{e}x$가 지나는 점 $\left(1, \frac{1}{e}\right)$은 곡선 $y=e^{-x}$ 위의 점이므로 곡선 $y=e^{-x}$과 직선 $y=\frac{1}{e}x$의 교점의 x좌표는



$x=1$

이때 구간 $[-1, 0]$에서 $e^{-x}\geq -ex$이고, 구간 $[0, 1]$에서 $e^{-x}\geq\frac{1}{e}x$이므로 구하는 넓이를 S라 하면

$$S=\int_{-1}^0\{e^{-x}-(-ex)\}\, dx+\int_0^1\left(e^{-x}-\frac{1}{e}x\right)dx$$
$$=\int_{-1}^0(e^{-x}+ex)\, dx+\int_0^1\left(e^{-x}-\frac{1}{e}x\right)dx$$
$$=\Big[-e^{-x}+\frac{e}{2}x^2\Big]_{-1}^0+\Big[-e^{-x}-\frac{1}{2e}x^2\Big]_0^1$$
$$=\left(-1+\frac{e}{2}\right)+\left(-\frac{3}{2e}+1\right)=\frac{e}{2}-\frac{3}{2e}$$

다른 풀이

구간 $[-1,\ 1]$에서 $e^{-x}>0$이므로 구하는 넓이를 S라 하면

$$S=\int_{-1}^{1}e^{-x}dx-\frac{1}{2}\left(1\times e+1\times\frac{1}{e}\right)$$
$$=\Big[-e^{-x}\Big]_{-1}^{1}-\frac{1}{2}\left(e+\frac{1}{e}\right)$$
$$=-\frac{1}{e}+e-\frac{e}{2}-\frac{1}{2e}=\frac{e}{2}-\frac{3}{2e}$$

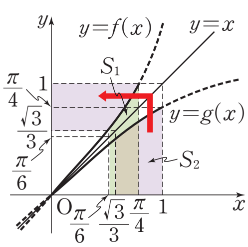
유제 07 답 $\left(\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{18}\right)\pi$

두 함수 $f(x)$, $g(x)$는 서로 역함수이므로

$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}$, $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$에서

$g\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{\pi}{6}$, $g(1)=\frac{\pi}{4}$

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프를 그리면 오른쪽 그림과 같다. 이때

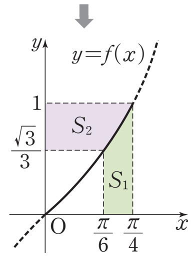


$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}f(x)\,dx=S_1$,

$\int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{1}g(x)\,dx=S_2$

라 하고, S_2에 해당하는 부분을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동하면 오른쪽 그림과 같다.

따라서 구하는 값은 오른쪽 그림의 색칠한 부분의 넓이와 같으므로



$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}f(x)\,dx+\int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{1}g(x)\,dx$$
$$=S_1+S_2$$
$$=\frac{\pi}{4}\times1-\frac{\pi}{6}\times\frac{\sqrt{3}}{3}$$
$$=\left(\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{18}\right)\pi$$

문제 07-1 답 $\frac{8}{\pi}-2$

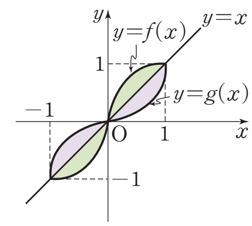
두 함수 $f(x)$, $g(x)$는 서로 역함수이므로 두 함수의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

따라서 두 곡선의 교점은 곡선 $y=\sin\frac{\pi}{2}x$와 직선 $y=x$의 교점과 같다.

곡선 $y=\sin\frac{\pi}{2}x$가 세 점 $(-1,\ -1)$, $(0,\ 0)$, $(1,\ 1)$을 지나므로 곡선 $y=\sin\frac{\pi}{2}x$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표는

$x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

따라서 구하는 넓이를 S라 하면 S는 구간 $[-1,\ 1]$에서 곡선 $y=\sin\frac{\pi}{2}x$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 부분의 넓이의 2배와 같다.



이때 구간 $[-1,\ 0]$에서

$x\geq\sin\frac{\pi}{2}x$이고, 구간 $[0,\ 1]$에서 $\sin\frac{\pi}{2}x\geq x$이므로

$$S=2\left\{\int_{-1}^{0}\left(x-\sin\frac{\pi}{2}x\right)dx+\int_{0}^{1}\left(\sin\frac{\pi}{2}x-x\right)dx\right\}$$
$$=2\left\{\left[\frac{1}{2}x^2+\frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi}{2}x\right]_{-1}^{0}+\left[-\frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi}{2}x-\frac{1}{2}x^2\right]_{0}^{1}\right\}$$
$$=2\left\{\left(\frac{2}{\pi}-\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\right)\right\}$$
$$=\frac{8}{\pi}-2$$

3 개념 CHECK p.204

1. 답 2

구하는 입체도형의 부피를 V라 하면

$$V=\int_{0}^{1}S(x)\,dx=\int_{0}^{1}(2x+1)\,dx=\Big[x^2+x\Big]_{0}^{1}=2$$

3 유제 & 문제 p.205~207

유제 08 답 $\frac{1}{2}(e^8+31)\,\text{cm}^3$

물의 깊이가 x cm인 수면의 넓이 $S(x)$는

$S(x)=e^{2x}+x+2\,(\text{cm}^2)$

물의 깊이가 4 cm일 때, 물의 부피를 V라 하면

$$V=\int_{0}^{4}S(x)\,dx=\int_{0}^{4}(e^{2x}+x+2)\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{2}e^{2x}+\frac{1}{2}x^2+2x\right]_{0}^{4}=\frac{1}{2}(e^8+31)(\text{cm}^3)$$

문제 08-1 답 10

수심이 t일 때의 수면의 넓이를 $S(t)$라 하면 수심이 x일 때의 물의 부피 V는 $V=18\sqrt{x}+7x$이므로

$$\int_{0}^{x}S(t)\,dt=18\sqrt{x}+7x$$

양변을 x에 대하여 미분하면

$$S(x)=\frac{9}{\sqrt{x}}+7$$

따라서 수심이 9일 때, 즉 $x=9$일 때 수면의 넓이는

$S(9)=3+7=10$

문제 08-2 답 **10초**

그릇의 밑면으로부터의 높이가 $h$cm인 곳에서의 단면은 한 변의 길이가 $\sqrt{h+1}$cm인 정사각형이므로 그 넓이를 $S(h)$라 하면

$S(h)=(\sqrt{h+1})^2=h+1\,(\mathrm{cm}^2)$

이때 높이가 10cm인 그릇의 전체의 부피를 V라 하면

$$V=\int_0^{10}(h+1)\,dh=\left[\frac{1}{2}h^2+h\right]_0^{10}=60\,(\mathrm{cm}^3)$$

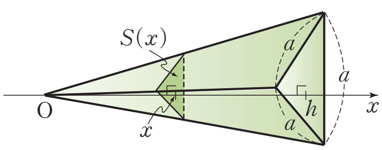
따라서 이 그릇에 매초 6cm³의 비율로 물을 채울 때, 물이 가득 차는 시각을 t초라 하면

$6\times t=60 \qquad \therefore t=10$

따라서 10초 후에 물이 가득 찬다.

유제 09 답 $\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{12}a^2h}$

다음 그림과 같이 정삼각뿔의 꼭짓점을 원점, 꼭짓점에서 밑면에 내린 수선을 x축으로 정하자.



이때 구간 $[0,\ h]$ 사이의 임의의 점 x에서 x축에 수직인 평면으로 정삼각뿔을 자르면 정삼각뿔의 밑면과 x에서의 단면은 서로 닮음이므로 닮음비는

$h:x$

x에서의 단면의 넓이를 $S(x)$라 하면 두 닮은 도형의 넓이의 비는 닮음비의 제곱의 비와 같으므로

$$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2:S(x)=h^2:x^2$$

$$\therefore S(x)=\frac{\sqrt{3}a^2}{4h^2}x^2$$

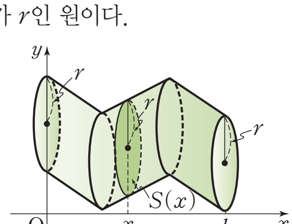
따라서 정삼각뿔의 부피를 V라 하면

$$V=\int_0^h S(x)\,dx=\int_0^h \frac{\sqrt{3}a^2}{4h^2}x^2\,dx$$

$$=\left[\frac{\sqrt{3}a^2}{12h^2}x^3\right]_0^h=\frac{\sqrt{3}}{12}a^2h$$

문제 09-1 답 $\boldsymbol{\pi r^2h}$

주어진 입체도형을 다음 그림과 같이 좌표평면 위에 나타내고, x축에 수직인 평면으로 자르면 그 단면은 항상 반지름의 길이가 r인 원이다.



x축 위의 임의의 점 $x(0\le x\le h)$에서 x축에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이를 $S(x)$라 하면

$S(x)=\pi r^2$

따라서 구하는 입체도형의 부피를 V라 하면

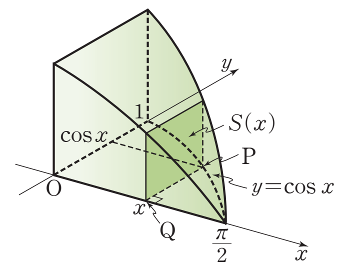
$$V=\int_0^h S(x)\,dx=\int_0^h \pi r^2\,dx=\left[\pi r^2x\right]_0^h=\pi r^2h$$

유제 10 답 $\boldsymbol{\frac{\pi}{4}}$

점 P의 좌표를 $(x,\ \cos x)$라 하면 점 Q의 좌표는 $(x,\ 0)$이므로 $\overline{\mathrm{PQ}}=\cos x$

$\overline{\mathrm{PQ}}$를 한 변으로 하는 정사각형의 넓이를 $S(x)$라 하면

$S(x)=\cos^2 x$



따라서 구하는 입체도형의 부피를 V라 하면

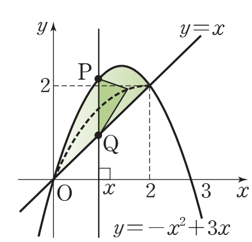
$$V=\int_0^{\frac{\pi}{2}}S(x)\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\,dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2x}{2}\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}$$

문제 10-1 답 $\boldsymbol{\frac{4\sqrt{3}}{15}}$

점 P의 좌표를 $(x,\ -x^2+3x)$라 하면 점 Q의 좌표는 $(x,\ x)$이므로



$\overline{\mathrm{PQ}}=(-x^2+3x)-x$

$\quad=-x^2+2x$

$\overline{\mathrm{PQ}}$를 한 변으로 하는 정삼각형의 넓이를 $S(x)$라 하면

$$S(x)=\frac{\sqrt{3}}{4}(-x^2+2x)^2=\frac{\sqrt{3}}{4}(x^4-4x^3+4x^2)$$

한편 곡선 $y=-x^2+3x$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표는

$-x^2+3x=x,\ x^2-2x=0$

$x(x-2)=0 \qquad \therefore x=0$ 또는 $x=2$

따라서 구하는 입체도형의 부피를 V라 하면

$$V=\int_0^2 S(x)\,dx=\int_0^2 \frac{\sqrt{3}}{4}(x^4-4x^3+4x^2)\,dx$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\left[\frac{1}{5}x^5-x^4+\frac{4}{3}x^3\right]_0^2=\frac{4\sqrt{3}}{15}$$

4 개념 CHECK p.209

1. 답 **10**

x, y를 각각 t에 대하여 미분하면

$\frac{dx}{dt}=3$, $\frac{dy}{dt}=4$

따라서 시각 $t=0$에서 $t=2$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^2\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt=\int_0^2\sqrt{3^2+4^2}dt$$
$$=\int_0^2 5\,dt=\Big[5t\Big]_0^2=10$$

2. 답 $\mathbf{\frac{13}{12}}$

$f(x)=\frac{1}{12}x^3+\frac{1}{x}$이라 하면 $f'(x)=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{x^2}$

따라서 곡선 $y=\frac{1}{12}x^3+\frac{1}{x}$의 $x=1$에서 $x=2$까지의 길이는

$$\int_1^2\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}dx$$
$$=\int_1^2\sqrt{1+\left(\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{x^2}\right)^2}dx=\int_1^2\sqrt{\frac{1}{16}x^4+\frac{1}{2}+\frac{1}{x^4}}dx$$
$$=\int_1^2\sqrt{\left(\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2}dx=\int_1^2\left(\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{x^2}\right)dx$$
$$=\left[\frac{1}{12}x^3-\frac{1}{x}\right]_1^2=\frac{13}{12}$$

4 유제 & 문제 p.210~212

유제 11 답 (1) $\mathbf{\frac{7}{2\ln 2}}$ (2) $\mathbf{\frac{3}{\ln 2}-2}$ (3) $\mathbf{\frac{5}{2\ln 2}-1}$

(1) 시각 $t=0$에서 점 P의 위치가 3이므로 시각 $t=3$에서 점 P의 위치는

$$3+\int_0^3(2^{t-1}-1)\,dt=3+\left[\frac{2^{t-1}}{\ln 2}-t\right]_0^3$$
$$=3+\left(\frac{7}{2\ln 2}-3\right)=\frac{7}{2\ln 2}$$

(2) 시각 $t=1$에서 $t=3$까지 점 P의 위치의 변화량은

$$\int_1^3(2^{t-1}-1)\,dt=\left[\frac{2^{t-1}}{\ln 2}-t\right]_1^3=\frac{3}{\ln 2}-2$$

(3) $0\le t\le 1$에서 $v(t)\le 0$, $1\le t\le 3$에서 $v(t)\ge 0$이므로 시각 $t=0$에서 $t=3$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^3|2^{t-1}-1|\,dt$$
$$=\int_0^1(-2^{t-1}+1)\,dt+\int_1^3(2^{t-1}-1)\,dt$$
$$=\left[-\frac{2^{t-1}}{\ln 2}+t\right]_0^1+\left[\frac{2^{t-1}}{\ln 2}-t\right]_1^3$$
$$=\left(-\frac{1}{2\ln 2}+1\right)+\left(\frac{3}{\ln 2}-2\right)=\frac{5}{2\ln 2}-1$$

문제 11-1 답 $\mathbf{-\frac{1}{e}}$

점 P가 운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이므로

$v(t)=0$에서

$(t-1)e^{-t}=0$ $\quad\therefore t=1$ ($\because e^{-t}>0$)

이때 $t=0$에서 점 P의 위치가 0이므로 $t=1$에서 점 P의 위치는

$$\int_0^1(t-1)e^{-t}dt$$

$f(t)=t-1$, $g'(t)=e^{-t}$이라 하면

$f'(t)=1$, $g(t)=-e^{-t}$

$$\therefore \int_0^1(t-1)e^{-t}dt=\Big[-(t-1)e^{-t}\Big]_0^1-\int_0^1(-e^{-t})\,dt$$
$$=-1-\Big[e^{-t}\Big]_0^1=-\frac{1}{e}$$

유제 12 답 **19**

x, y를 각각 t에 대하여 미분하면

$\frac{dx}{dt}=6t$, $\frac{dy}{dt}=3t^2$

따라서 시각 $t=0$에서 $t=\sqrt{5}$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^{\sqrt{5}}\sqrt{(6t)^2+(3t^2)^2}dt=\int_0^{\sqrt{5}}3t\sqrt{t^2+4}\,dt$$

$t^2+4=u$로 놓으면 $\frac{du}{dt}=2t$이고, $t=0$일 때 $u=4$, $t=\sqrt{5}$일 때 $u=9$이므로

$$\int_0^{\sqrt{5}}3t\sqrt{t^2+4}\,dt=\int_4^9\frac{3}{2}\sqrt{u}\,du$$
$$=\Big[u\sqrt{u}\Big]_4^9=19$$

문제 12-1 $\sqrt{2}$

x, y를 각각 t에 대하여 미분하면

$$\frac{dx}{dt}=-e^{-t}\cos t-e^{-t}\sin t$$
$$=-e^{-t}(\cos t+\sin t)$$
$$\frac{dy}{dt}=-e^{-t}\sin t+e^{-t}\cos t$$
$$=e^{-t}(\cos t-\sin t)$$

이때 시각 $t=0$에서 $t=a$까지 점 P가 움직인 거리 $s(a)$는

$$s(a)$$
$$=\int_0^a\sqrt{\{-e^{-t}(\cos t+\sin t)\}^2+\{e^{-t}(\cos t-\sin t)\}^2}dt$$
$$=\int_0^a e^{-t}\sqrt{2(\sin^2 t+\cos^2 t)}\,dt$$
$$=\sqrt{2}\int_0^a e^{-t}dt=\sqrt{2}\Big[-e^{-t}\Big]_0^a$$
$$=\sqrt{2}\left(1-\frac{1}{e^a}\right)$$
$$\therefore \lim_{a\to\infty}s(a)=\lim_{a\to\infty}\sqrt{2}\left(1-\frac{1}{e^a}\right)=\sqrt{2}$$

유제 13 답 (1) $\frac{\pi^2}{32}$ (2) $\frac{15}{4}+\ln 2$

(1) x, y를 각각 t에 대하여 미분하면

$$\frac{dx}{dt}=\cos t-t\sin t-\cos t=-t\sin t$$

$$\frac{dy}{dt}=-\sin t+\sin t+t\cos t=t\cos t$$

따라서 $0\le t\le\frac{\pi}{4}$에서의 곡선의 길이는

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{(-t\sin t)^2+(t\cos t)^2}\,dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{t^2(\sin^2 t+\cos^2 t)}\,dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}t\,dt\ \left(\because\ 0\le t\le\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=\left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi^2}{32}$$

(2) $y=\frac{1}{4}x^2-\ln\sqrt{x}=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}\ln x$

y를 x에 대하여 미분하면

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2x}$$

따라서 $1\le x\le 4$에서의 곡선의 길이는

$$\int_1^4\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{2x}\right)^2}\,dx$$

$$=\int_1^4\sqrt{\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}+\frac{1}{4x^2}}\,dx=\int_1^4\sqrt{\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2x}\right)^2}\,dx$$

$$=\int_1^4\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2x}\right)dx\ (\because\ 1\le x\le 4)$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}\ln x\right]_1^4=\frac{15}{4}+\ln 2$$

기본 연습문제

p.213~215

1 ③ **2** $\frac{31}{5}$ **3** 1 **4** 7 **5** $4\ln 2-2$

6 ④ **7** $\frac{8}{\pi^2}$ **8** $-\frac{6}{5}+2\ln 2$ **9** $2e^2$

10 ② **11** $\frac{32}{5}$ **12** $\frac{1}{2}e^2+\frac{1}{2}$

13 $-\frac{1}{2}+\ln 3$

1 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(a+\frac{4-a}{n}k\right)\frac{1}{n}$

$$=\frac{1}{4-a}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(a+\frac{4-a}{n}k\right)\times\frac{4-a}{n}$$

$$=\frac{1}{4-a}\int_a^4 f(x)\,dx$$

따라서 $\frac{1}{4-a}=b$, $a=1$이므로

$a=1$, $b=\frac{1}{3}$ $\quad\therefore\ ab=\frac{1}{3}$

2 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^5}\{(2n-1)^4+(2n-2)^4+\cdots+(2n-n)^4\}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{\left(\frac{2n-1}{n}\right)^4+\left(\frac{2n-2}{n}\right)^4+\cdots+\left(\frac{2n-n}{n}\right)^4\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(2-\frac{k}{n}\right)^4$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{-\left(-2+\frac{k}{n}\right)\right\}^4\times\frac{1}{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(-2+\frac{k}{n}\right)^4\times\frac{1}{n}$$

$$=\int_{-2}^{-1}x^4\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{5}x^5\right]_{-2}^{-1}=\frac{31}{5}$$

3 $\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n^2}\left\{f\left(\frac{1}{n}\right)+2f\left(\frac{2}{n}\right)+\cdots+nf\left(\frac{n}{n}\right)\right\}$

$$=\pi\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\times\frac{1}{n}$$

$$=\pi\int_0^1 xf(x)\,dx$$

$$=\pi\int_0^1 x\sin\pi x\,dx$$

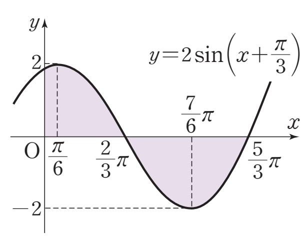
$\int_0^1 x\sin\pi x\,dx$에서 $u(x)=x$, $v'(x)=\sin\pi x$라 하면

$u'(x)=1$, $v(x)=-\frac{1}{\pi}\cos\pi x$

$$\therefore\ \pi\int_0^1 x\sin\pi x\,dx=\Big[-x\cos\pi x\Big]_0^1+\int_0^1\cos\pi x\,dx$$

$$=1+\left[\frac{1}{\pi}\sin\pi x\right]_0^1=1$$

4 구간 $\left[0,\ \frac{2}{3}\pi\right]$에서 $2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\ge 0$이고, 구간 $\left[\frac{2}{3}\pi,\ \frac{5}{3}\pi\right]$에서 $2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\le 0$이므로 구하는 넓이를 S라 하면



$$S=\int_0^{\frac{2}{3}\pi}2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)dx$$

$$+\int_{\frac{2}{3}\pi}^{\frac{5}{3}\pi}\left\{-2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\right\}dx$$

$$=\left[-2\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\right]_0^{\frac{2}{3}\pi}+\left[2\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\right]_{\frac{2}{3}\pi}^{\frac{5}{3}\pi}$$

$$=7$$

5 $y=\begin{cases} e^x & (y\geq 0) \\ -e^x & (y\leq 0) \end{cases}$이므로 곡선과 y축의 교점의 y좌표를 구하면

$y\geq 0$일 때, $y=e^0=1$

$y\leq 0$일 때, $y=-e^0=-1$

또 y를 x에 대하여 풀면

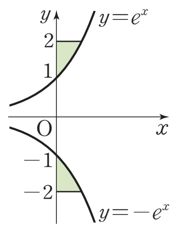
$y\geq 0$일 때, $x=\ln y$

$y\leq 0$일 때, $x=\ln(-y)$

이때 구간 $[-2, -1]$에서

$\ln(-y)\geq 0$이고, 구간 $[1, 2]$에서

$\ln y\geq 0$이므로 구하는 넓이를 S라 하면



$$S=\int_{-2}^{-1}\ln(-y)\,dy+\int_{1}^{2}\ln y\,dy$$

$\int_{-2}^{-1}\ln(-y)\,dy$에서 $-y=t$로 놓으면 $\dfrac{dt}{dy}=-1$이고,

$y=-2$일 때 $t=2$, $y=-1$일 때 $t=1$이므로

$$\int_{-2}^{-1}\ln(-y)\,dy=-\int_{2}^{1}\ln t\,dt=\int_{1}^{2}\ln t\,dt$$

$$\therefore S=2\int_{1}^{2}\ln y\,dy$$

$f(y)=\ln y$, $g'(y)=1$이라 하면 $f'(y)=\dfrac{1}{y}$, $g(y)=y$

$$\therefore S=2\int_{1}^{2}\ln y\,dy=2\left(\Big[y\ln y\Big]_1^2-\int_1^2 dy\right)$$

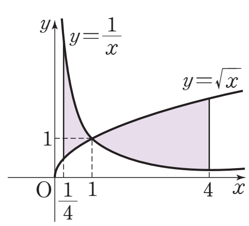
$$=2\left(2\ln 2-\Big[y\Big]_1^2\right)=4\ln 2-2$$

6 두 곡선 $y=\dfrac{1}{x}$, $y=\sqrt{x}$의 교점의 x좌표를 구하면

$\dfrac{1}{x}=\sqrt{x}$, $x^3-1=0$

$(x-1)(x^2+x+1)=0$

$\therefore x=1$ ($\because x^2+x+1>0$)



이때 구간 $\left[\dfrac{1}{4}, 1\right]$에서 $\dfrac{1}{x}\geq\sqrt{x}$이고, 구간 $[1, 4]$에서

$\sqrt{x}\geq\dfrac{1}{x}$이므로 구하는 넓이를 S라 하면

$$S=\int_{\frac{1}{4}}^{1}\left(\frac{1}{x}-\sqrt{x}\right)dx+\int_{1}^{4}\left(\sqrt{x}-\frac{1}{x}\right)dx$$

$$=\left[\ln x-\frac{2}{3}x\sqrt{x}\right]_{\frac{1}{4}}^{1}+\left[\frac{2}{3}x\sqrt{x}-\ln x\right]_{1}^{4}=\frac{49}{12}$$

7 주어진 그림에서 두 부분 A, B의 넓이가 서로 같으므로

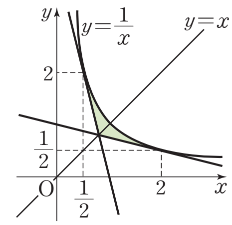
$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin 2x-ax)\,dx=0$, $\left[-\dfrac{1}{2}\cos 2x-\dfrac{1}{2}ax^2\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=0$

$\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{8}a\pi^2\right)-\left(-\dfrac{1}{2}\right)=0$, $\dfrac{1}{8}a\pi^2=1$

$\therefore a=\dfrac{8}{\pi^2}$

8 곡선 $y=\dfrac{1}{x}$은 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

이때 이 곡선 위의 두 점 $\left(\dfrac{1}{2}, 2\right)$, $\left(2, \dfrac{1}{2}\right)$도 직선 $y=x$에 대하여 서로 대칭이므로 두 점 $\left(\dfrac{1}{2}, 2\right)$, $\left(2, \dfrac{1}{2}\right)$에서 각각 그은 두 접선도 직선 $y=x$에 대하여 서로 대칭이다.



따라서 구하는 넓이는 곡선 $y=\dfrac{1}{x}$과 점 $\left(2, \dfrac{1}{2}\right)$에서 그은 접선 및 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배이다.

$f(x)=\dfrac{1}{x}$이라 하면 $f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$

점 $\left(2, \dfrac{1}{2}\right)$에서 그은 접선의 기울기는 $f'(2)=-\dfrac{1}{4}$이므로 점 $\left(2, \dfrac{1}{2}\right)$에서 그은 접선의 방정식은

$y-\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{4}(x-2)$

$\therefore y=-\dfrac{1}{4}x+1$

곡선 $y=\dfrac{1}{x}$과 직선 $y=x$의 교점의 x좌표를 구하면

$\dfrac{1}{x}=x$, $x^2=1$ $\qquad\therefore x=1$ ($\because x>0$)

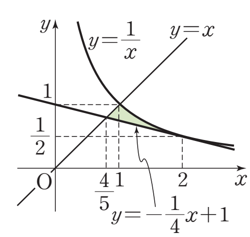
또 두 직선 $y=-\dfrac{1}{4}x+1$, $y=x$의 교점의 x좌표를 구하면

$-\dfrac{1}{4}x+1=x$ $\qquad\therefore x=\dfrac{4}{5}$

이때 구간 $\left[\dfrac{4}{5}, 1\right]$에서

$x\geq -\dfrac{1}{4}x+1$이고, 구간

$[1, 2]$에서 $\dfrac{1}{x}\geq -\dfrac{1}{4}x+1$이므로 오른쪽 그림의 색칠한 부분의 넓이를 S_1이라 하면



$$S_1=\int_{\frac{4}{5}}^{1}\left\{x-\left(-\frac{1}{4}x+1\right)\right\}dx+\int_{1}^{2}\left\{\frac{1}{x}-\left(-\frac{1}{4}x+1\right)\right\}dx$$

$$=\int_{\frac{4}{5}}^{1}\left(\frac{5}{4}x-1\right)dx+\int_{1}^{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{4}x-1\right)dx$$

$$=\left[\frac{5}{8}x^2-x\right]_{\frac{4}{5}}^{1}+\left[\ln x+\frac{1}{8}x^2-x\right]_{1}^{2}$$

$$=-\frac{3}{5}+\ln 2$$

따라서 구하는 도형의 넓이를 S라 하면

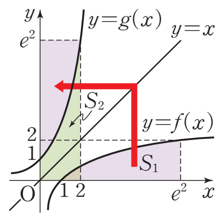
$S=2S_1=-\dfrac{6}{5}+2\ln 2$

9 두 함수 $f(x)$, $g(x)$는 서로 역함수이므로

$f(1)=0$, $f(e^2)=2$에서

$g(0)=1$, $g(2)=e^2$

따라서 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프를 그리면 오른쪽 그림과 같다.

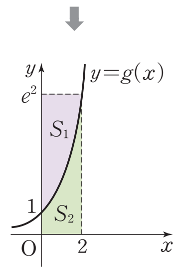


이때

$\int_1^{e^2} f(x)\,dx=S_1$,

$\int_0^2 g(x)\,dx=S_2$

라 하고, S_1에 해당하는 부분을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동하면 오른쪽 그림과 같다.



따라서 구하는 값은 오른쪽 그림의 색칠한 부분의 넓이와 같으므로

$\int_1^{e^2} f(x)\,dx+\int_0^2 g(x)\,dx$

$=S_1+S_2$

$=2\times e^2=2e^2$

10 $S(h)=he^{-\frac{1}{3}h}$에서

$S'(h)=e^{-\frac{1}{3}h}-\frac{1}{3}he^{-\frac{1}{3}h}=\left(1-\frac{1}{3}h\right)e^{-\frac{1}{3}h}$

$S'(h)=0$인 h의 값은

$1-\frac{1}{3}h=0$ ($\because$ $e^{-\frac{1}{3}h}>0$)

$\therefore$ $h=3$

$0\le h\le 6$에서 함수 $S(h)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

h	0	$\cdots$	3	$\cdots$	6
$S'(h)$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
$S(h)$		↗	극대	↘	

따라서 $S(h)$는 $h=3$일 때 최대이므로 이때의 물의 부피 V는

$V=\int_0^3 S(h)\,dh=\int_0^3 he^{-\frac{1}{3}h}\,dh$

$f(h)=h$, $g'(h)=e^{-\frac{1}{3}h}$이라 하면

$f'(h)=1$, $g(h)=-3e^{-\frac{1}{3}h}$

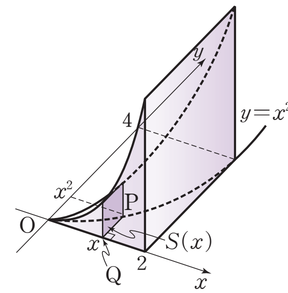
$\therefore$ $V=\int_0^3 he^{-\frac{1}{3}h}\,dh$

$=\left[-3he^{-\frac{1}{3}h}\right]_0^3+\int_0^3 3e^{-\frac{1}{3}h}\,dh$

$=-\frac{9}{e}+\left[-9e^{-\frac{1}{3}h}\right]_0^3$

$=9-\frac{18}{e}$

11 점 P의 좌표를 $(x,\ x^2)$이라 하면 점 Q의 좌표는 $(x,\ 0)$이므로



$\overline{PQ}=x^2$

$\overline{PQ}$를 한 변으로 하는 정사각형의 넓이를 $S(x)$라 하면

$S(x)=(x^2)^2=x^4$

따라서 구하는 입체도형의 부피를 V라 하면

$V=\int_0^2 S(x)\,dx=\int_0^2 x^4\,dx$

$=\left[\frac{1}{5}x^5\right]_0^2=\frac{32}{5}$

12 x, y를 각각 t에 대하여 미분하면

$\frac{dx}{dt}=t-\frac{1}{t}$, $\frac{dy}{dt}=2$

따라서 시각 $t=1$부터 $t=e$까지 점 P가 움직인 거리는

$\int_1^e \sqrt{\left(t-\frac{1}{t}\right)^2+2^2}\,dt=\int_1^e \sqrt{\left(t+\frac{1}{t}\right)^2}\,dt$

$=\int_1^e \left(t+\frac{1}{t}\right)dt$

$=\left[\frac{1}{2}t^2+\ln t\right]_1^e$

$=\frac{1}{2}e^2+\frac{1}{2}$

13 y를 x에 대하여 미분하면

$\frac{dy}{dx}=\frac{-2x}{1-x^2}$

따라서 $0\le x\le\frac{1}{2}$에서의 곡선의 길이는

$\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1+\left(\frac{-2x}{1-x^2}\right)^2}\,dx$

$=\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1+\frac{4x^2}{(1-x^2)^2}}\,dx$

$=\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{\left(\frac{x^2+1}{1-x^2}\right)^2}\,dx$

$=\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^2+1}{1-x^2}\,dx$

$=\int_0^{\frac{1}{2}} \left(-1+\frac{2}{1-x^2}\right)dx$

$=\int_0^{\frac{1}{2}} \left(-1+\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}\right)dx$

$=\left[-x+\ln(1+x)-\ln(1-x)\right]_0^{\frac{1}{2}}$

$=-\frac{1}{2}+\ln\frac{3}{2}-\ln\frac{1}{2}$

$=-\frac{1}{2}+\ln 3$

실전 연습문제 p.216

1 $\frac{\pi^2}{12}+\frac{1}{2}$　　2 1　　3 ①　　4 $\frac{2\sqrt{3}}{3}\text{cm}^3$

1 $\overline{OA_k}=\frac{\pi}{2}\times\frac{k}{n}=\frac{k}{2n}\pi$이고, $\overline{A_kB_k}=\cos\frac{k}{2n}\pi$이므로 직각삼각형 OA_kB_k에서

$$\overline{OB_k}^2=\overline{OA_k}^2+\overline{A_kB_k}^2$$
$$=\frac{k^2}{4n^2}\pi^2+\cos^2\frac{k}{2n}\pi$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\overline{OB_k}^2$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\left\{\frac{\pi^2}{4}\left(\frac{k}{n}\right)^2+\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\times\frac{k}{n}\right)\right\}\times\frac{1}{n}$$
$$=\int_0^1\left(\frac{\pi^2}{4}x^2+\cos^2\frac{\pi}{2}x\right)dx$$
$$=\int_0^1\left(\frac{\pi^2}{4}x^2+\frac{1+\cos\pi x}{2}\right)dx$$
$$=\left[\frac{\pi^2}{12}x^3+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2\pi}\sin\pi x\right]_0^1=\frac{\pi^2}{12}+\frac{1}{2}$$

2 자연수 n에 대하여 $n<n+1$이므로

$$\frac{1}{n}>\frac{1}{n+1}$$

또 $0\le x\le\frac{\pi}{2}$에서 $0\le\cos x\le1$이므로

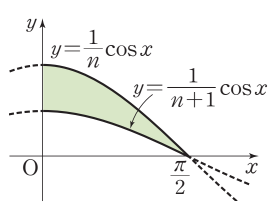
$$\frac{1}{n}\cos x\ge\frac{1}{n+1}\cos x$$

따라서 구간 $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$에서

두 곡선 $y=\frac{1}{n}\cos x$,

$y=\frac{1}{n+1}\cos x$와 y축으로

둘러싸인 도형의 넓이 S_n은



$$S_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{n}\cos x-\frac{1}{n+1}\cos x\right)dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\cos x\,dx$$
$$=\left[\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

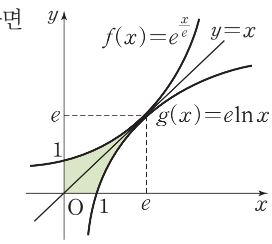
$$\therefore \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}S_k$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{1}-\cancel{\frac{1}{2}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{n}}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$$

3 함수 $f(x)=e^{ax}$과 그 역함수 $g(x)$가 $x=e$에서 서로 접하고, 두 곡선은 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 접점의 좌표는 $(e,\ e)$이다.

즉, $f(e)=e^{ae}=e$에서

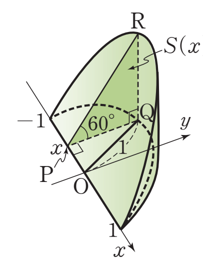
$ae=1$　　$\therefore a=\frac{1}{e}$

따라서 구하는 넓이를 S라 하면



$$S=2\int_0^e\left(e^{\frac{x}{e}}-x\right)dx$$
$$=2\left[e\times e^{\frac{x}{e}}-\frac{1}{2}x^2\right]_0^e$$
$$=2\left(\frac{1}{2}e^2-e\right)$$
$$=e^2-2e$$

4 원기둥을 자를 때 생기는 작은 입체도형을 오른쪽 그림과 같이 밑면의 중심을 원점 O, 밑면의 지름을 x축으로 하는 좌표평면 위에 놓고, x축 위의 점 $P(x,\ 0)$ $(-1\le x\le1)$을 지나면서 x축에 수직인 평면으로 자른 단면을 $\triangle PQR$라 하자.



$\angle OPQ=90°$, $\overline{OP}=|x|$ cm이므로 $\triangle POQ$에서

$$\overline{PQ}=\sqrt{\overline{OQ}^2-\overline{OP}^2}$$
$$=\sqrt{1-x^2}\,(\text{cm})$$

$\angle PQR=90°$, $\angle RPQ=60°$이므로 $\triangle PQR$에서

$$\overline{RQ}=\overline{PQ}\tan60°$$
$$=\sqrt{1-x^2}\times\sqrt{3}\,(\text{cm})$$

$\triangle PQR$의 넓이를 $S(x)$라 하면

$$S(x)=\frac{1}{2}\times\overline{PQ}\times\overline{RQ}$$
$$=\frac{1}{2}\times\sqrt{1-x^2}\times\sqrt{1-x^2}\times\sqrt{3}$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{2}(1-x^2)(\text{cm}^2)$$

따라서 구하는 입체도형의 부피를 V라 하면

$$V=\int_{-1}^1 S(x)\,dx$$
$$=\int_{-1}^1\frac{\sqrt{3}}{2}\underline{(1-x^2)}\,dx$$ ◀ $f(-x)=f(x)$를 만족하는 함수
$$=\sqrt{3}\int_0^1(1-x^2)\,dx$$
$$=\sqrt{3}\left[x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^1$$
$$=\frac{2\sqrt{3}}{3}(\text{cm}^3)$$

I-1. 수열의 극한

01 수열의 극한

기초 문제 Training
p.4

	(1)	(2)	(3)	(4)
1	수렴	발산	발산	수렴
2	-1	5	-2	-1
3	1	0	-4	2
4	수렴	수렴	발산	발산
5	0	$\frac{1}{7}$	0	5

6 (1) $-3<r\le3$ (2) $-\frac{1}{5}\le r<\frac{1}{5}$ (3) $0<r\le\frac{2}{3}$ (4) $-1\le r<3$

핵심 유형 Training
p.5~12

1 ㄴ, ㄷ	**2** ④	**3** -3	**4** $\frac{5}{2}$	**5** ⑤
6 ②	**7** ④	**8** ㄱ, ㄴ, ㄷ		**9** 6
10 5	**11** 3	**12** ①	**13** $\frac{1}{4}$	**14** ③
15 ①	**16** 2	**17** $\frac{3}{2}$	**18** 3	**19** 0
20 8	**21** -2	**22** ⑤	**23** 36	**24** 2
25 -3	**26** 2	**27** $\frac{1}{2}$	**28** 1	**29** $\frac{2}{3}$
30 ③	**31** ①	**32** ③	**33** 5	**34** ③
35 7	**36** $\frac{9}{2}$	**37** ⑤	**38** $\frac{1}{2}$	**39** ⑤
40 22	**41** $\frac{9}{4}$	**42** ④	**43** 2	**44** ④
45 ②	**46** 0	**47** ③	**48** $\frac{7}{6}$	**49** ⑤
50 -4	**51** ②	**52** $\frac{7}{3}$	**53** ②	**54** ③

1 ㄱ. n의 값이 한없이 커질 때, $\frac{n-1}{n}$의 값은 1에 한없이 가까워지므로 주어진 수열은 수렴한다.
ㄴ. n의 값이 한없이 커질 때, $5-3n$의 값은 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지므로 주어진 수열은 음의 무한대로 발산한다.
ㄷ. n의 값이 한없이 커질 때, $\frac{n}{\sqrt{n}+2}$의 값은 한없이 커지므로 주어진 수열은 양의 무한대로 발산한다.
ㄹ. n의 값이 한없이 커질 때, $1+\left(-\frac{3}{4}\right)^n$의 값은 1에 한없이 가까워지므로 주어진 수열은 수렴한다.
따라서 발산하는 수열은 ㄴ, ㄷ이다.

2 ① n의 값이 한없이 커질 때, $2n-10$의 값은 한없이 커지므로 주어진 수열은 양의 무한대로 발산한다.
② n의 값이 한없이 커질 때, $1-n^2$의 값은 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지므로 주어진 수열은 음의 무한대로 발산한다.
③ 발산(진동)한다.
④ n의 값이 한없이 커질 때, $1-\frac{(-1)^n}{n}$의 값은 1에 한없이 가까워지므로 주어진 수열은 수렴한다.
⑤ 발산(진동)한다.
따라서 수렴하는 수열은 ④이다.

3 $\alpha=0$, $\beta=-3$이므로 $\alpha+\beta=-3$

4 $$\lim_{n\to\infty}\frac{5a_nb_n}{3a_n+2b_n}=\frac{5\lim_{n\to\infty}a_n\times\lim_{n\to\infty}b_n}{3\lim_{n\to\infty}a_n+2\lim_{n\to\infty}b_n}=\frac{5\times2\times3}{3\times2+2\times3}=\frac{5}{2}$$

5 $$\lim_{n\to\infty}(a_n{}^2+a_nb_n+b_n{}^2)=\lim_{n\to\infty}\{(a_n-b_n)^2+3a_nb_n\}=\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)^2+3\lim_{n\to\infty}a_nb_n=2^2+3\times1=7$$

6 $$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\{(a_n-2)+2\}=\lim_{n\to\infty}(a_n-2)+\lim_{n\to\infty}2=1+2=3$$
$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_n-1}=\frac{\lim_{n\to\infty}a_n}{\lim_{n\to\infty}a_n-\lim_{n\to\infty}1}=\frac{3}{3-1}=\frac{3}{2}$$

7 $\lim_{n\to\infty}\frac{n(1+2+3+\cdots+n)}{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{n\times\frac{n(n+1)}{2}}{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}=3\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}$

$=3\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2+\frac{1}{n}}=3\times\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

8 ㄱ. $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{4n+1}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{4+\frac{1}{n}}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}=\frac{2}{1+1}=1$

ㄴ. $\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)(3n-1)}{(2n+1)(n-2)}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+5n-2}{2n^2-3n-2}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{5}{n}-\frac{2}{n^2}}{2-\frac{3}{n}-\frac{2}{n^2}}=\frac{3}{2}$

ㄷ. $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\cancel{2}}\times\frac{\cancel{2}}{\cancel{3}}\times\frac{\cancel{3}}{\cancel{4}}\times\cdots\times\frac{\cancel{n}}{n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

9 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의해

$a_n+b_n=2n,\ a_nb_n=\frac{n^2-3n}{2}$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}+\frac{b_n}{a_n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{{a_n}^2+{b_n}^2}{a_nb_n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{(a_n+b_n)^2-2a_nb_n}{a_nb_n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n)^2-2\times\frac{n^2-3n}{2}}{\frac{n^2-3n}{2}}$

$=2\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+3n}{n^2-3n}=2\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{3}{n}}{1-\frac{3}{n}}$

$=2\times3=6$

10 $a+1\neq0$이면 $\lim_{n\to\infty}\frac{(a+1)n^2+bn-1}{3n+2}=\infty$ (또는 $-\infty$)

이므로

$a+1=0\qquad\therefore a=-1$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{(a+1)n^2+bn-1}{3n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{bn-1}{3n+2}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{b-\frac{1}{n}}{3+\frac{2}{n}}=\frac{b}{3}$

따라서 $\frac{b}{3}=2$이므로 $b=6$

$\therefore a+b=-1+6=5$

11 $1+3+5+\cdots+(2n-1)=\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=n^2$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{1+3+5+\cdots+(2n-1)}{(an+1)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{a^2n^2+2an+1}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a^2+\frac{2a}{n}+\frac{1}{n^2}}$

$=\frac{1}{a^2}$

따라서 $\frac{1}{a^2}=\frac{1}{9}$이므로 $a=3$ ($\because a>0$)

12 $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{16n^2-an+1}}{an^2+2n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{16-\frac{a}{n}+\frac{1}{n^2}}}{an+2-\frac{1}{n}}=b$

이때 $a\neq0$이면 $b=0$이므로 $a=0$

$\therefore b=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{16+\frac{1}{n^2}}}{2-\frac{1}{n}}=\frac{4}{2}=2$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{an^2-4n+1}{\sqrt{bn^2+n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{-4n+1}{\sqrt{2n^2+n}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{-4+\frac{1}{n}}{\sqrt{2+\frac{1}{n}}}=\frac{-4}{\sqrt{2}}=-2\sqrt{2}$

13 $\lim_{n\to\infty}\frac{an^2+bn+1}{bn^2+an+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{a+\frac{b}{n}+\frac{1}{n^2}}{b+\frac{a}{n}+\frac{1}{n^2}}=\frac{a}{b}=4$

따라서 $a=4b$이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{bn+a}{an-b}=\lim_{n\to\infty}\frac{b+\frac{a}{n}}{a-\frac{b}{n}}=\frac{b}{a}=\frac{b}{4b}=\frac{1}{4}$

14 $\lim_{n\to\infty}\sqrt{n+1}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})=\lim_{n\to\infty}\frac{2\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{2\sqrt{1+\frac{1}{n}}}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1}=1$

15 $a_n=\frac{1}{\sqrt{n(n+2)}-(n+1)}=\frac{1}{\sqrt{n^2+2n}-(n+1)}$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\{\sqrt{n^2+2n}-(n+1)\}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+2n}+(n+1)}{-n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1+\frac{1}{n}}{-1}=-2$

유형편

16 첫째항이 0이고 공차가 2인 등차수열의 일반항을 a_n이라 하면 $a_n=2(n-1)=2n-2$

$\therefore S_n=\sum_{k=1}^{n}(2k-2)=2\times\frac{n(n+1)}{2}-2n=n^2-n$

$\therefore \lim_{n\to\infty}(\sqrt{S_{n+2}}-\sqrt{S_n})$

$=\lim_{n\to\infty}\{\sqrt{(n+2)^2-(n+2)}-\sqrt{n^2-n}\}$

$=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+3n+2}-\sqrt{n^2-n})$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{4n+2}{\sqrt{n^2+3n+2}+\sqrt{n^2-n}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{4+\frac{2}{n}}{\sqrt{1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}}=2$

17 $\sqrt{(3n)^2}<\sqrt{9n^2+3n+1}<\sqrt{(3n+1)^2}$이므로

$3n<\sqrt{9n^2+3n+1}<3n+1$

따라서 $a_n=3n$, $b_n=\sqrt{9n^2+3n+1}-3n$이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_nb_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n(\sqrt{9n^2+3n+1}-3n)}{n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{3(3n+1)}{\sqrt{9n^2+3n+1}+3n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{3\left(3+\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{9+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}+3}=\frac{3}{2}$

18 $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+an+1}-n)=\lim_{n\to\infty}\frac{an+1}{\sqrt{n^2+an+1}+n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{a+\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{a}{n}+\frac{1}{n^2}}+1}=\frac{a}{2}$

따라서 $\frac{a}{2}=\frac{3}{2}$이므로 $a=3$

19 $a\le 0$이면 $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+2n+3}-an-b)=\infty$이므로

$a>0$

$\therefore \lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+2n+3}-an-b)$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{(1-a^2)n^2+2(1-ab)n+3-b^2}{\sqrt{n^2+2n+3}+an+b}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{(1-a^2)n+2(1-ab)+\frac{3-b^2}{n}}{\sqrt{1+\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}}+a+\frac{b}{n}}$

이때 $1-a^2\ne 0$이면 극한값이 존재하지 않으므로

$1-a^2=0$ $\therefore a=1$ ($\because a>0$)

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{2(1-b)+\frac{3-b^2}{n}}{\sqrt{1+\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}}+1+\frac{b}{n}}=1-b$

따라서 $1-b=2$이므로 $b=-1$

$\therefore a+b=1+(-1)=0$

20 $\lim_{n\to\infty}\frac{an+1}{\sqrt{4n^2+bn}-2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(an+1)(\sqrt{4n^2+bn}+2n)}{bn}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{(an+1)\left(\sqrt{4+\frac{b}{n}}+2\right)}{b}$

이때 $a\ne 0$이면 극한값이 존재하지 않으므로 $a=0$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{4+\frac{b}{n}}+2}{b}=\frac{4}{b}$

따라서 $\frac{4}{b}=\frac{1}{2}$이므로 $b=8$

$\therefore a+b=0+8=8$

21 $a_n=a+(n-1)a=an$이므로

$\lim_{n\to\infty}\{\sqrt{(n+1)(n+3)}+an\}=b$

이때 $a\ge 0$이면 극한값이 존재하지 않으므로 $a<0$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\{\sqrt{(n+1)(n+3)}+an\}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{(1-a^2)n^2+4n+3}{\sqrt{n^2+4n+3}-an}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{(1-a^2)n+4+\frac{3}{n}}{\sqrt{1+\frac{4}{n}+\frac{3}{n^2}}-a}$

이때 $1-a^2\ne 0$이면 극한값이 존재하지 않으므로

$1-a^2=0$ $\therefore a=-1$ ($\because a<0$)

$\therefore b=\lim_{n\to\infty}\frac{4+\frac{3}{n}}{\sqrt{1+\frac{4}{n}+\frac{3}{n^2}}+1}=2$

$\therefore ab=(-1)\times 2=-2$

22 $\frac{3a_n-5}{a_n+1}=b_n$이라 하면

$(a_n+1)b_n=3a_n-5$ $\therefore a_n=\frac{-b_n-5}{b_n-3}$

이때 $\lim_{n\to\infty}b_n=1$이므로

$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{-b_n-5}{b_n-3}=\frac{-1-5}{1-3}=3$

$\therefore \lim_{n\to\infty}(a_n{}^2-a_n+1)=3^2-3+1=7$

23 $\frac{a_n}{2n+1}=c_n$, $\frac{b_n}{3n+2}=d_n$이라 하면

$a_n=(2n+1)c_n$, $b_n=(3n+2)d_n$

이때 $\lim_{n\to\infty}c_n=2$, $\lim_{n\to\infty}d_n=3$이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_nb_n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)c_n\times(3n+2)d_n}{n^2}$

$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{6n^2+7n+2}{n^2}\times c_n\times d_n\right)$

$=6\times 2\times 3=36$

24 $\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$ (α는 실수)라 하면 $\lim_{n\to\infty} a_{n+1}=\alpha$

$\lim_{n\to\infty} a_{n+1}=\lim_{n\to\infty} 4\left(1-\frac{1}{a_n}\right)$에서 $\alpha=4\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)$

$\alpha^2-4\alpha+4=0$, $(\alpha-2)^2=0$ $\quad\therefore \alpha=2$

25 $\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$이므로 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}=0$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{b_n}{a_n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left\{(2a_n+b_n)\times\frac{1}{a_n}\right\}=1\times0=0$

따라서 $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=-2$이므로

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4a_n^2}{b_n}+\frac{b_n^2}{2a_n}\right)&=\lim_{n\to\infty}\frac{8a_n^3+b_n^3}{2a_nb_n}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{(2a_n+b_n)(4a_n^2-2a_nb_n+b_n^2)}{2a_nb_n}\\&=\lim_{n\to\infty}(2a_n+b_n)\left(\frac{2a_n}{b_n}-1+\frac{b_n}{2a_n}\right)\\&=1\times(-1-1-1)=-3\end{aligned}$$

26 $2n^2-n<a_n<2n^2+3n+1$에서

$\frac{2n^2-n}{n^2}<\frac{a_n}{n^2}<\frac{2n^2+3n+1}{n^2}$

이때 $\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-n}{n^2}=2$, $\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+3n+1}{n^2}=2$이므로

수열의 극한의 대소 관계에 의해 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2}=2$

27 $\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}<\frac{a_n}{n+1}<\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$에서

$\frac{(n+1)(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})}{\sqrt{n}}<\frac{a_n}{\sqrt{n}}<\frac{(n+1)(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}{\sqrt{n}}$

이때

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})}{\sqrt{n}}&=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2+n}}\\&=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}{\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{\sqrt{n^2+n}+n}=\frac{1}{2}$

이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의해

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\sqrt{n}}=\frac{1}{2}$

28 $\frac{2n-1}{n}<a_n<\frac{2n+1}{n}$에서 $2n-1<na_n<2n+1$

n에 차례로 1, 2, 3, $\cdots$, n을 대입하여 각 변끼리 더하면

$$\begin{aligned}1<\ &a_1<3\\3<\ &2a_2<5\\5<\ &3a_3<7\\&\vdots\\+)\ 2n-1<\ &na_n<2n+1\end{aligned}$$

$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)<a_1+2a_2+3a_3+\cdots+na_n<\sum_{k=1}^{n}(2k+1)$

$2\times\frac{n(n+1)}{2}-n<a_1+2a_2+3a_3+\cdots+na_n<2\times\frac{n(n+1)}{2}+n$

$n^2<a_1+2a_2+3a_3+\cdots+na_n<n^2+2n$

$\therefore \frac{n^2}{n^2+1}<\frac{a_1+2a_2+3a_3+\cdots+na_n}{n^2+1}<\frac{n^2+2n}{n^2+1}$

이때 $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+1}=1$, $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n}{n^2+1}=1$이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의해

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+2a_2+3a_3+\cdots+na_n}{n^2+1}=1$

29 $\frac{n}{3}-1<\left[\frac{n}{3}\right]\le\frac{n}{3}$이므로

$\left(\frac{2n+1}{n^2+2n}\right)\left(\frac{n}{3}-1\right)<\frac{(2n+1)a_n}{n^2+2n}\le\frac{2n+1}{n^2+2n}\times\frac{n}{3}$

이때 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{n^2+2n}\right)\left(\frac{n}{3}-1\right)=\frac{2}{3}$, $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{n^2+2n}\times\frac{n}{3}\right)=\frac{2}{3}$

이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의해

$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)a_n}{n^2+2n}=\frac{2}{3}$

30 ㄱ. [반례] $a_n=n$, $b_n=-n^2$이면 $\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$, $\lim_{n\to\infty}b_n=-\infty$ 이지만

$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim_{n\to\infty}(n-n^2)=-\infty$

ㄴ. $\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\{a_n-(a_n-b_n)\}$

$=\lim_{n\to\infty}a_n-\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\alpha-0=\alpha$

ㄷ. $\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\left(a_n\times\frac{b_n}{a_n}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}a_n\times\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=\alpha\times1=\alpha$

ㄹ. [반례] $a_n=(-1)^n$, $b_n=(-1)^{n+1}$이면

$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=0$, $\lim_{n\to\infty}a_nb_n=-1$이지만 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$은 발산(진동)한다.

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

31 ㄱ. $-|a_n|\le a_n\le|a_n|$이고 $\lim_{n\to\infty}(-|a_n|)=0$,

$\lim_{n\to\infty}|a_n|=0$이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의해

$\lim_{n\to\infty}a_n=0$

ㄴ. [반례] $a_n=1-\frac{1}{n}$, $b_n=1+\frac{1}{n}$이면 $a_n<b_n$이지만

$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=1$

ㄷ. [반례] $a_n=(-1)^n$이면 $\lim_{n\to\infty}a_n^2=\lim_{n\to\infty}(-1)^{2n}=1$이지만 수열 $\{a_n\}$은 발산(진동)한다.

따라서 옳은 것은 ㄱ이다.

유형편

32 선분 AP_n의 길이의 최솟값은 점 $\mathrm{A}(-1,\ -1)$과 원의 중심 $(n,\ n)$ 사이의 거리에서 원의 반지름의 길이를 뺀 것과 같으므로

$$a_n=\sqrt{(n+1)^2+(n+1)^2}-\sqrt{2n^2-4n+4}$$
$$=\sqrt{2n^2+4n+2}-\sqrt{2n^2-4n+4}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{2n^2+4n+2}-\sqrt{2n^2-4n+4})$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{8n-2}{\sqrt{2n^2+4n+2}+\sqrt{2n^2-4n+4}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{8-\frac{2}{n}}{\sqrt{2+\frac{4}{n}+\frac{2}{n^2}}+\sqrt{2-\frac{4}{n}+\frac{4}{n^2}}}$$
$$=\frac{8}{2\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$$

33 가로로 놓인 막대의 개수는 $2\times n\times(n+1)$

세로로 놓인 막대의 개수는 $(n+1)\times(n+1)$

높이로 놓인 막대의 개수는 $2\times n\times(n+1)$

따라서 입체도형 A_n을 만드는 데 필요한 막대의 개수는

$a_n=2n(n+1)+(n+1)^2+2n(n+1)=5n^2+6n+1$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{5n^2+6n+1}{n^2}=5$$

34
$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^{3n+1}+2^{2n-1}}{(2^n+1)(4^n-2^n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\times 8^n+\frac{1}{2}\times 4^n}{8^n+1}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1+\left(\frac{1}{8}\right)^n}=2$$

35
$$\lim_{n\to\infty}\frac{(a+2)\times 2^{2n}+b\times 3^{n-1}}{2^{n-1}+3^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(a+2)\left(\frac{4}{3}\right)^n+\frac{b}{3}}{\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n+3}$$

이때 $a+2\neq0$이면 극한값이 존재하지 않으므로

$a+2=0\qquad\therefore a=-2$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{b}{3}}{\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n+3}=\frac{b}{9}$$

따라서 $\frac{b}{9}=1$이므로 $b=9$

$\therefore a+b=-2+9=7$

36 $a_n=2\times3^{n-1}$이므로 $a_{2n-1}=2\times3^{2n-2}$

또 $S_n=\frac{2(3^n-1)}{3-1}=3^n-1$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n\times S_n}{a_{2n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^n(3^n-1)}{2\times3^{2n-2}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{2\times\frac{1}{9}}=\frac{9}{2}$$

37 수열의 합과 일반항 사이의 관계에 의해 $n\geq2$일 때

$a_n=S_n-S_{n-1}$
$=2\times3^n-3-(2\times3^{n-1}-3)=4\times3^{n-1}$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_na_{n+1}}{9^n+3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{4\times3^{n-1}\times4\times3^n}{9^n+3^n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{16}{3}}{1+\left(\frac{1}{3}\right)^n}=\frac{16}{3}$$

38 $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$ (α는 실수)라 하면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5^{n+1}+3^n\times a_n}{3^{n-1}+5^n\times a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{5+\left(\frac{3}{5}\right)^n\times a_n}{\frac{1}{3}\left(\frac{3}{5}\right)^n+a_n}=\frac{5}{\alpha}$$

따라서 $\frac{5}{\alpha}=10$이므로 $\alpha=\frac{1}{2}\qquad\therefore \lim_{n\to\infty}a_n=\frac{1}{2}$

39 $\frac{4^{n+1}-3^{n-1}+1}{2^n+1}<(2^n+1)a_n<\frac{4^{n+1}+3^{n+1}+1}{2^n-1}$에서

$$\frac{4^{n+1}-3^{n-1}+1}{(2^n+1)^2}<a_n<\frac{4^{n+1}+3^{n+1}+1}{(2^n-1)(2^n+1)}$$

이때

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4^{n+1}-3^{n-1}+1}{(2^n+1)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{4-\frac{1}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^n+\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1+2\left(\frac{1}{2}\right)^n+\left(\frac{1}{4}\right)^n}=4,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4^{n+1}+3^{n+1}+1}{(2^n-1)(2^n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{4+3\left(\frac{3}{4}\right)^n+\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n}=4$$

이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의해

$\lim_{n\to\infty}a_n=4$

40 다항식 $3x^{n+1}-2x^n+3^{n-1}$을 일차식 $x-2,\ x-3$으로 나누었을 때의 나머지는 각각

$a_n=3\times2^{n+1}-2\times2^n+3^{n-1}$

$b_n=3\times3^{n+1}-2\times3^n+3^{n-1}$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3\times3^{n+1}-2\times3^n+3^{n-1}}{3\times2^{n+1}-2\times2^n+3^{n-1}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{9-2+\frac{1}{3}}{6\left(\frac{2}{3}\right)^n-2\left(\frac{2}{3}\right)^n+\frac{1}{3}}=22$$

41 n번의 시행 후에 A, B 두 개의 컵에 남아 있는 물의 양을 각각 $a_n\,\mathrm{L}$, $b_n\,\mathrm{L}$라 하면

$a_n+b_n=3\qquad\therefore b_n=3-a_n$

$$a_{n+1}=\frac{2}{3}a_n+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}a_n+b_n\right)=\frac{5}{6}a_n+\frac{1}{2}b_n$$
$$=\frac{5}{6}a_n+\frac{1}{2}(3-a_n)=\frac{1}{3}a_n+\frac{3}{2}$$

$$\therefore a_{n+1}-\frac{9}{4}=\frac{1}{3}\left(a_n-\frac{9}{4}\right)$$

따라서 수열 $\left\{a_n-\frac{9}{4}\right\}$는 첫째항이

$$a_1-\frac{9}{4}=\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}+1\right)-\frac{9}{4}=-\frac{11}{12}$$

이고 공비가 $\frac{1}{3}$인 등비수열이므로

$$a_n-\frac{9}{4}=-\frac{11}{12}\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$\therefore\ a_n=-\frac{11}{12}\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}+\frac{9}{4}$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left\{-\frac{11}{12}\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}+\frac{9}{4}\right\}=\frac{9}{4}$$

42 등비수열 $\left\{(x+1)\left(\frac{x-2}{3}\right)^{n-1}\right\}$이 수렴하려면

$x+1=0$ 또는 $-1<\frac{x-2}{3}\le1$

(i) $x+1=0$에서 $x=-1$

(ii) $-1<\frac{x-2}{3}\le1$에서

$-3<x-2\le3 \qquad \therefore\ -1<x\le5$

(i), (ii)에 의해 $-1\le x\le5$

따라서 구하는 정수 x는 $-1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$의 7개이다.

43 등비수열 $\{(x^2-2x-2)^{n-1}\}$이 수렴하려면

$-1<x^2-2x-2\le1$

(i) $-1<x^2-2x-2$에서 $x^2-2x-1>0$

$\therefore\ x<1-\sqrt{2}$ 또는 $x>1+\sqrt{2}$

(ii) $x^2-2x-2\le1$에서 $x^2-2x-3\le0$

$(x+1)(x-3)\le0 \qquad \therefore\ -1\le x\le3$

(i), (ii)에 의해 $-1\le x<1-\sqrt{2}$ 또는 $1+\sqrt{2}<x\le3$

따라서 정수 x는 $-1,\ 3$이므로 구하는 합은

$-1+3=2$

44 등비수열 $\{r^{n-1}\}$이 수렴하므로 $-1<r\le1$

ㄱ. 등비수열 $\{r^{2n-1}\}$의 공비는 r^2이므로

$0\le r^2\le1$

따라서 주어진 수열은 수렴한다.

ㄴ. 등비수열 $\left\{\left(\frac{1}{r}\right)^{n-1}\right\}$ $(r\ne0)$의 공비는 $\frac{1}{r}$이므로

$\frac{1}{r}<-1$ 또는 $\frac{1}{r}\ge1$

따라서 $\frac{1}{r}=1$일 때만 수렴한다.

ㄷ. 등비수열 $\left\{\left(\frac{2r-1}{3}\right)^{n}\right\}$의 공비는 $\frac{2r-1}{3}$이므로

$-1<\frac{2r-1}{3}\le\frac{1}{3}$

따라서 주어진 수열은 수렴한다.

따라서 수렴하는 수열은 ㄱ, ㄷ이다.

45 ㄱ. $r>1$이면 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{r^n}=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^{n+1}}{1+r^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{r}{\frac{1}{r^n}+1}=r$$

ㄴ. $-1<r<1$이면 $\lim_{n\to\infty}r^n=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^{n+1}}{1+r^n}=\frac{0}{1+0}=0$$

ㄷ. $r<-1$이면 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{r^n}=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^{n+1}}{1+r^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{r}{\frac{1}{r^n}+1}=r$$

따라서 옳은 것은 ㄴ이다.

46 (i) $|r|>1$일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{r^{2n}}=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+r^{2n}}{2-r^{2n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{r^{2n}}+1}{\frac{2}{r^{2n}}-1}=\frac{0+1}{0-1}=-1$$

(ii) $|r|=1$일 때, $\lim_{n\to\infty}r^{2n}=1$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+r^{2n}}{2-r^{2n}}=\frac{1+1}{2-1}=2$$

(iii) $|r|<1$일 때, $\lim_{n\to\infty}r^{2n}=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+r^{2n}}{2-r^{2n}}=\frac{1+0}{2-0}=\frac{1}{2}$$

따라서 $a=-1,\ b=2,\ c=\frac{1}{2}$이므로

$a+b-2c=-1+2-2\times\frac{1}{2}=0$

47 (i) $|r|>6$일 때, $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{6}{r}\right)^n=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{r}{6}\right)^{n+1}+1}{\left(\frac{r}{6}\right)^{n}+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{r}{6}+\left(\frac{6}{r}\right)^n}{1+\left(\frac{6}{r}\right)^n}=\frac{r}{6}$$

이때 $|r|>6$이므로 극한값은 1이 될 수 없다.

(ii) $r=6$일 때, $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{r}{6}\right)^n=1$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{r}{6}\right)^{n+1}+1}{\left(\frac{r}{6}\right)^{n}+1}=\frac{1+1}{1+1}=1$$

(iii) $|r|<6$일 때, $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{r}{6}\right)^n=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{r}{6}\right)^{n+1}+1}{\left(\frac{r}{6}\right)^{n}+1}=\frac{0+1}{0+1}=1$$

(i), (ii), (iii)에 의해 $-6<r\le6$이므로 정수 r는 $-5,\ -4,\ -3,\ \cdots,\ 6$의 12개이다.

유형편

48 $f(-2)=\lim_{n\to\infty}\frac{(-2)^n+2\times(-2)-1}{(-2)^{n+1}+1}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1-4\left(-\frac{1}{2}\right)^n-\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{-2+\left(-\frac{1}{2}\right)^n}=-\frac{1}{2}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n+2\times\frac{1}{2}-1}{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}+1}=0$$

$$f(1)=\lim_{n\to\infty}\frac{1^n+2-1}{1^{n+1}+1}=1$$

$$f\left(\frac{3}{2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^n+2\times\frac{3}{2}-1}{\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}+1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1+3\left(\frac{2}{3}\right)^n-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{\frac{3}{2}+\left(\frac{2}{3}\right)^n}=\frac{2}{3}$$

$$\therefore f(-2)+f\left(\frac{1}{2}\right)+f(1)+f\left(\frac{3}{2}\right)=-\frac{1}{2}+0+1+\frac{2}{3}$$

$$=\frac{7}{6}$$

49 (i) $x=1$, 2일 때

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{n+1}-3^{n+1}}{x^n+3^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{x\left(\frac{x}{3}\right)^n-3}{\left(\frac{x}{3}\right)^n+1}=-3$$

(ii) $x=3$일 때

$$f(3)=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}-3^{n+1}}{3^n+3^n}=0$$

(iii) $x=4, 5, \cdots, 10$일 때

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{n+1}-3^{n+1}}{x^n+3^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{x-3\left(\frac{3}{x}\right)^n}{1+\left(\frac{3}{x}\right)^n}=x$$

$$\therefore \sum_{x=1}^{10}f(x)=(-3)\times2+0+(4+5+6+\cdots+10)$$

$$=-6+\frac{7(4+10)}{2}=43$$

50 $f(2)=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n+1}+2a+1}{2^{2n}+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{2a+1}{2^{2n}}}{1+\frac{1}{2^{2n}}}=2$

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}+\frac{1}{2}a+1}{\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}+1}=\frac{1}{2}a+1$$

$f(2)+f\left(\frac{1}{2}\right)=1$에서

$2+\frac{1}{2}a+1=1 \qquad \therefore a=-4$

51 (i) $|x|>1$일 때

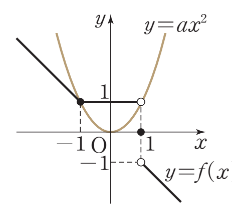
$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1-x^{2n+1}}{1+x^{2n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{x^{2n}}-x}{\frac{1}{x^{2n}}+1}=-x$$

(ii) $f(1)=\lim_{n\to\infty}\frac{1-1^{2n+1}}{1+1^{2n}}=0$

(iii) $|x|<1$일 때, $f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1-x^{2n+1}}{1+x^{2n}}=1$

(iv) $f(-1)=\lim_{n\to\infty}\frac{1-(-1)^{2n+1}}{1+(-1)^{2n}}=1$

(i)~(iv)에 의해 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 함수 $y=ax^2$의 그래프와 한 점에서 만나려면



$0<a\le1$

따라서 양수 a의 최댓값은 1이다.

52 $a_1=1$, $a_2=3$, $a_{n+1}{}^2=a_na_{n+2}$에서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 1이고 공비가 3인 등비수열이므로 $a_n=3^{n-1}$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}-2a_n}{2^{n-1}+3a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}-2\times3^{n-1}}{2^{n-1}+3\times3^{n-1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{9-2}{\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}+3}=\frac{7}{3}$$

53 $a_{n+1}-a_n=3^n$에 n 대신 1, 2, 3, $\cdots$, $n-1$을 차례로 대입하여 변끼리 더하면

$$\cancel{a_2}-a_1=3$$
$$\cancel{a_3}-\cancel{a_2}=3^2$$
$$\cancel{a_4}-\cancel{a_3}=3^3$$
$$\vdots$$
$$+\underline{)\ a_n-\cancel{a_{n-1}}=3^{n-1}}$$
$$a_n-a_1=3+3^2+3^3+\cdots+3^{n-1}=\frac{3(3^{n-1}-1)}{2}$$

따라서 $a_n=1+\frac{3(3^{n-1}-1)}{2}=\frac{3^n-1}{2}$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^n-1}{2\times3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\left(\frac{1}{3}\right)^n}{2}=\frac{1}{2}$$

54 $\frac{a_{n+1}}{a_n}\le\frac{100}{101}$의 양변에 n 대신 1, 2, 3, $\cdots$, $n-1$을 차례로 대입하여 변끼리 곱하면

$$\frac{\cancel{a_2}}{a_1}\times\frac{\cancel{a_3}}{\cancel{a_2}}\times\frac{\cancel{a_4}}{\cancel{a_3}}\times\cdots\times\frac{a_n}{\cancel{a_{n-1}}}\le\left(\frac{100}{101}\right)^{n-1}$$

$$\therefore 0<a_n\le a_1\left(\frac{100}{101}\right)^{n-1}$$

이때 $\lim_{n\to\infty}a_1\left(\frac{100}{101}\right)^{n-1}=0$이므로 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{2a_n+3n^2+1}{a_n+n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2a_n}{n^2}+3+\frac{1}{n^2}}{\frac{a_n}{n^2}+1}=3$$

Ⅰ-2. 급수

01 급수

기초 문제 Training

p.14

1 (1) $\frac{1}{2}$　(2) 0　(3) 1　(4) 7

2 (1) $S_n=n^2$　(2) 발산　(3) 발산

3 $\frac{n}{3n-1}$, $\frac{1}{3}$, 발산

4 (1) 4　(2) -9

5 (1) 수렴　(2) 발산　(3) 수렴　(4) 발산

6 (1) $-\frac{1}{2}<r<\frac{1}{2}$　(2) $-5<r<5$

(3) $-1<r<1$　(4) $0<r<2$

핵심 유형 Training

p.15～22

1 ③	**2** ⑤	**3** 7	**4** ㄱ, ㄴ, ㄷ	
5 ②	**6** ②	**7** 3	**8** ㄱ, ㄴ	**9** ①
10 $\sqrt{2}-1$	**11** ⑤	**12** 2	**13** ④	**14** ③
15 ④	**16** 50	**17** ①	**18** ④	**19** ①
20 ④	**21** 7	**22** ④	**23** ⑤	**24** $\frac{25}{4}$
25 ①	**26** $-\frac{1}{3}$	**27** 6	**28** ③	**29** ④
30 ㄱ, ㄹ	**31** ⑤	**32** ③	**33** 2	**34** ②
35 $\frac{4}{3}$	**36** 3	**37** ①	**38** ①	**39** 6
40 $\frac{11}{12}$	**41** $2+\sqrt{3}$	**42** 140 m	**43** 8π	
44 $\left(\frac{9}{13}, \frac{6}{13}\right)$		**45** 80	**46** $\frac{2}{3}$	**47** $32-8\pi$

1 $S_n=\frac{n^2+3}{1+2+3+\cdots+n}=\frac{n^2+3}{\frac{n(n+1)}{2}}$

$=\frac{2n^2+6}{n^2+n}$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} a_n=\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+6}{n^2+n}=2$

2 $\lim_{n\to\infty}(S_n-2)=\lim_{n\to\infty}S_n-\lim_{n\to\infty}2$

$=\sum_{n=1}^{\infty}a_n-2=5-2=3$

3 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-1)(3n+2)}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(3k-1)(3k+2)}$

$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3k-1}-\frac{1}{3k+2}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3n+2}\right)=\frac{1}{6}$

따라서 $a=6$, $b=1$이므로 $a+b=7$

4 ㄱ. $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\cdots$

$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$

$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$

$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$

ㄴ. $\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+\frac{1}{63}+\frac{1}{99}+\cdots$

$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$

$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}$

ㄷ. $\frac{1}{3}+\frac{1}{8}+\frac{1}{15}+\frac{1}{24}+\frac{1}{35}+\cdots$

$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}$

$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+2)}$

$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{3}{4}$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

5 $\frac{4}{1^2\times3^2}+\frac{6}{2^2\times4^2}+\frac{8}{3^2\times5^2}+\frac{10}{4^2\times6^2}+\cdots$

$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+2}{n^2(n+2)^2}$

$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2k+2}{k^2(k+2)^2}$

$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{k^2}-\frac{1}{(k+2)^2}\right\}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left\{1+\frac{1}{4}-\frac{1}{(n+1)^2}-\frac{1}{(n+2)^2}\right\}=\frac{5}{8}$

유형편

6 $a_n=4+2(n-1)=2n+2$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{a_{n+1}}-\sqrt{a_n}}{\sqrt{a_na_{n+1}}}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{a_{k+1}}-\sqrt{a_k}}{\sqrt{a_k}\sqrt{a_{k+1}}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{a_k}}-\frac{1}{\sqrt{a_{k+1}}}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{a_1}}-\frac{1}{\sqrt{a_{n+1}}}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{4}}-\frac{1}{\sqrt{2n+4}}\right)$$
$$=\frac{1}{2}$$

7 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의해

$\alpha_n+\beta_n=4n,\ \alpha_n\beta_n=n^3-n$

$$\therefore \frac{1}{\alpha_n}+\frac{1}{\beta_n}=\frac{\alpha_n+\beta_n}{\alpha_n\beta_n}=\frac{4n}{n^3-n}=\frac{4}{n^2-1}$$
$$=\frac{4}{(n-1)(n+1)}=2\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$\therefore \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{\alpha_n}+\frac{1}{\beta_n}\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n}2\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k+1}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}2\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$=3$$

8 주어진 급수의 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

ㄱ. $S_n=\left(2-\frac{3}{2}\right)+\left(\frac{3}{2}-\frac{4}{3}\right)+\left(\frac{4}{3}-\frac{5}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{n+1}{n}-\frac{n+2}{n+1}\right)$

$=2-\frac{n+2}{n+1}$

$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{n+2}{n+1}\right)=2-1=1$

따라서 주어진 급수는 1로 수렴한다.

ㄴ. $S_1=1,\ S_2=\frac{1}{2},\ S_3=1,\ S_4=\frac{2}{3},\ S_5=1,\ S_6=\frac{3}{4},\ \cdots$

이므로 $S_{2n-1}=1,\ S_{2n}=\frac{n}{n+1}$

$\therefore \lim_{n\to\infty}S_{2n-1}=1,\ \lim_{n\to\infty}S_{2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$

따라서 $\lim_{n\to\infty}S_{2n-1}=\lim_{n\to\infty}S_{2n}$이므로 주어진 급수는 1로 수렴한다.

ㄷ. $S_1=1,\ S_2=\frac{1}{2},\ S_3=1,\ S_4=\frac{1}{3},\ S_5=1,\ S_6=\frac{1}{4},\ \cdots$

이므로 $S_{2n-1}=1,\ S_{2n}=\frac{1}{n+1}$

$\therefore \lim_{n\to\infty}S_{2n-1}=1,\ \lim_{n\to\infty}S_{2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$

따라서 $\lim_{n\to\infty}S_{2n-1}\neq\lim_{n\to\infty}S_{2n}$이므로 주어진 급수는 발산한다.

따라서 수렴하는 급수는 ㄱ, ㄴ이다.

9 주어진 급수의 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

(ⅰ) A에서

$S_1=1,\ S_2=0,\ S_3=1,\ S_4=0,\ \cdots$이므로

$S_{2n-1}=1,\ S_{2n}=0$

$\therefore \lim_{n\to\infty}S_{2n-1}=1,\ \lim_{n\to\infty}S_{2n}=0$

따라서 $\lim_{n\to\infty}S_{2n-1}\neq\lim_{n\to\infty}S_{2n}$이므로 급수 A는 발산한다.

(ⅱ) B에서

$S_n=(\cancel{1}-\cancel{1})+(\cancel{1}-\cancel{1})+(\cancel{1}-\cancel{1})+\cdots=0$

$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=0$

따라서 급수 B의 합은 0이다.

(ⅲ) C에서

$S_n=(1-2)+(3-4)+(5-6)+\cdots+\{(2n-1)-2n\}$

$=-1+(-1)+(-1)+\cdots+(-1)=-n$

$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}(-n)=-\infty$

따라서 급수 C는 발산한다.

따라서 옳은 것은 ①이다.

10 주어진 급수의 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$S_{2n-1}=a_1=\sqrt{2}-1$

$S_{2n}=a_1-a_{n+1}=(\sqrt{2}-1)-(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})$

$\lim_{n\to\infty}S_{2n-1}=\sqrt{2}-1$

$\lim_{n\to\infty}S_{2n}=\lim_{n\to\infty}\{(\sqrt{2}-1)-(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})\}$

$=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{2}-1-\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}\right)=\sqrt{2}-1$

따라서 $\lim_{n\to\infty}S_{2n-1}=\lim_{n\to\infty}S_{2n}$이므로 주어진 급수는 수렴하고, 그 합은 $\sqrt{2}-1$이다.

11 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{3^n}$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{3^n}=0$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}-a_n}{3^{n-1}+a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3-\frac{a_n}{3^n}}{\frac{1}{3}+\frac{a_n}{3^n}}=9$$

12 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n^2}-\frac{2n^2-1}{n^2+1}\right)$이 수렴하므로

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{n^2}-\frac{2n^2-1}{n^2+1}\right)=0$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-1}{n^2+1}=2$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+n+3a_n}{2n^2-n+a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n}+\frac{3a_n}{n^2}}{2-\frac{1}{n}+\frac{a_n}{n^2}}$$
$$=\frac{2+3\times2}{2+2}=2$$

13 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n}-\frac{n+2n+3n+\cdots+n^2}{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}\right)$이 수렴하므로

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{n}-\frac{n+2n+3n+\cdots+n^2}{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}\right)=0$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+2n+3n+\cdots+n^2}{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n\times\frac{n(n+1)}{2}}{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

$$=3\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}=\frac{3}{2}$$

14 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$

$\therefore \lim_{n\to\infty}a_{n+1}=0$

$\lim_{n\to\infty}(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n=20$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+10a_{n+1}}{2a_n+5}=\frac{20+0}{0+5}=4$$

15 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{an^2+2}{n^2+n}$가 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}\frac{an^2+2}{n^2+n}=0$

이때 $a\neq0$이면 성립하지 않으므로 $a=0$

$$\therefore b=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{an^2+2}{n^2+n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2+n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{k(k+1)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}2\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=2$$

$\therefore a+b=0+2=2$

16 $\lim_{n\to\infty}(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n)=\lim_{n\to\infty}S_n=p$이므로

$\lim_{n\to\infty}a_n=0$

또 $\lim_{n\to\infty}S_n=p$이면 $\lim_{n\to\infty}S_{n+1}=p$이므로

$\lim_{n\to\infty}(S_n+S_{n+1}-2a_n)=\lim_{n\to\infty}\left\{5-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}$에서

$p+p-0=5-0 \qquad \therefore p=\frac{5}{2}$

$\therefore 20p=20\times\frac{5}{2}=50$

17 ㄱ. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n(n+2)}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$

$$=\frac{3}{2}$$

따라서 주어진 급수는 $\frac{3}{2}$으로 수렴한다.

ㄴ. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$

$$=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-1)$$

$$=\infty$$

따라서 주어진 급수는 발산한다.

ㄷ. $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2+2}}=\frac{1}{2}\neq0$이므로 주어진 급수는 발산한다.

따라서 수렴하는 급수는 ㄱ이다.

18 ① $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{5}{6}+\frac{7}{8}+\frac{9}{10}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2n}$

따라서 $\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{2n}=1\neq0$이므로 주어진 급수는 발산한다.

② $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\cdots$

$>1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\cdots$

$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots$

$=\infty$

따라서 주어진 급수는 발산이다.

③ $2-\frac{3}{2}+\frac{4}{3}-\frac{5}{4}+\frac{6}{5}-\frac{7}{6}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n+1}{n}$

따라서 $\lim_{n\to\infty}(-1)^{n+1}\frac{n+1}{n}\neq0$이므로 주어진 급수는 발산한다.

④ $\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\frac{1}{4\times5}+\frac{1}{5\times6}+\cdots$

$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}$

$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{1}{2}$

따라서 주어진 급수는 수렴한다.

⑤ $\frac{1}{\sqrt{3}+1}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{4}}+\cdots$

$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}-\sqrt{2}-1)=\infty$

따라서 주어진 급수는 발산한다.

따라서 수렴하는 급수는 ④이다.

19 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n-(a_n-2b_n)}{2}$

$$=\frac{1}{2}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}a_n-\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-2b_n)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}(2-8)=-3$$

유형편

20 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n=\alpha,\ \sum_{n=1}^{\infty} b_n=\beta$ (α, β는 실수)라 하면

$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n-b_n)=1$에서

$\alpha-\beta=1$ …… ㉠

$\sum_{n=1}^{\infty} (2a_n-3b_n)=-2$에서

$2\alpha-3\beta=-2$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\alpha=5$, $\beta=4$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} (a_n+b_n)=\alpha+\beta=9$

21 $\lim_{n\to\infty} (n-1)^2 a_n=0$이므로

$\lim_{n\to\infty} n^2 a_{n+1}=0$

급수 $\sum_{n=1}^{\infty} n^2(a_n-a_{n+1})$의 제$n$항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$$\begin{aligned}S_n&=(a_1-a_2)+4(a_2-a_3)+9(a_3-a_4)\\&\quad+\cdots+(n-1)^2(a_{n-1}-a_n)+n^2(a_n-a_{n+1})\\&=a_1+3a_2+5a_3+\cdots+(2n-1)a_n-n^2a_{n+1}\\&=\sum_{k=1}^{n}(2k-1)a_k-n^2a_{n+1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \sum_{n=1}^{\infty} n^2(a_n-a_{n+1})&=\lim_{n\to\infty} S_n\\&=\lim_{n\to\infty}\left\{\sum_{k=1}^{n}(2k-1)a_k-n^2a_{n+1}\right\}\\&=\sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)a_n-\lim_{n\to\infty} n^2a_{n+1}\\&=2\sum_{n=1}^{\infty} na_n-\sum_{n=1}^{\infty} a_n-\lim_{n\to\infty} n^2a_{n+1}\\&=2\times6-5-0=7\end{aligned}$$

22 ㄱ. $\sum_{n=1}^{\infty} b_n=\alpha,\ \sum_{n=1}^{\infty} (a_n-b_n)=\beta$ (α, β는 실수)라 하면

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n=\sum_{n=1}^{\infty} \{(a_n-b_n)+b_n\}=\beta+\alpha$

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$도 수렴한다.

ㄴ. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 수렴하면

$\lim_{n\to\infty} a_n=0$, $\lim_{n\to\infty} b_n=0$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{n\to\infty} a_nb_n&=\lim_{n\to\infty} a_n\times\lim_{n\to\infty} b_n\\&=0\times0=0\end{aligned}$$

ㄷ. [반례] $\{a_n\}$: 1, 0, 1, 0, 1, 0, ⋯

$\{b_n\}$: 0, 1, 0, 1, 0, 1, ⋯

이라 하면 $a_nb_n=0$이므로 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_nb_n$은 수렴하지만

$\lim_{n\to\infty} a_n\neq0$이고 $\lim_{n\to\infty} b_n\neq0$이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

23 ㄱ. $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n+b_n)=\alpha,\ \sum_{n=1}^{\infty} (a_n-b_n)=\beta$ (α, β는 실수)라 하면

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(a_n+b_n)+(a_n-b_n)}{2}=\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(a_n+b_n)-(a_n-b_n)}{2}=\frac{\alpha-\beta}{2}$$

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$도 모두 수렴한다.

ㄴ. $\sum_{n=1}^{\infty} a_nb_n$이 수렴하므로

$\lim_{n\to\infty} a_nb_n=0$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{n\to\infty} b_n&=\lim_{n\to\infty}\frac{a_nb_n}{a_n}\\&=\frac{\lim_{n\to\infty} a_nb_n}{\lim_{n\to\infty} a_n}=\frac{0}{1}=0\end{aligned}$$

ㄷ. $$\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{\infty} a_n-\sum_{n=1}^{\infty} b_n\\&=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)\\&=(a_1-b_1)+(a_2-b_2)+(a_3-b_3)+\cdots<0\end{aligned}$$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} a_n<\sum_{n=1}^{\infty} b_n$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

24 $$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}(3^n-1)\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}&=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{3\times\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}-\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}\right\}\\&=\frac{3}{1-\frac{3}{5}}-\frac{1}{1-\frac{1}{5}}\\&=\frac{15}{2}-\frac{5}{4}\\&=\frac{25}{4}\end{aligned}$$

25 $f(x)=x^n(x^n-1)$이라 하면

$$a_n=f\left(-\frac{1}{2}\right)=\left(-\frac{1}{2}\right)^n\left\{\left(-\frac{1}{2}\right)^n-1\right\}$$

$$\begin{aligned}\therefore \sum_{n=1}^{\infty} a_n&=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n\left\{\left(-\frac{1}{2}\right)^n-1\right\}\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{1}{4}\right)^n-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}\\&=\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}-\frac{-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}\\&=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\\&=\frac{2}{3}\end{aligned}$$

26 수열 $\{a_n\}$을 차례로 나열하면 0, 1, 0, 1, 0, 1, $\cdots$이므로

$$\frac{a_1}{2}-\frac{a_2}{2^2}+\frac{a_3}{2^3}-\frac{a_4}{2^4}+\frac{a_5}{2^5}-\frac{a_6}{2^6}+\cdots$$
$$=0-\frac{1}{2^2}+0-\frac{1}{2^4}+0-\frac{1}{2^6}+\cdots$$
$$=-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\cdots\right)$$
$$=-\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}=-\frac{1}{3}$$

27 $\log_8(S_n+1)=\frac{n}{3}$에서

$S_n=8^{\frac{n}{3}}-1=2^n-1$

(i) $n=1$일 때, $a_1=S_1=1$

(ii) $n\geq 2$일 때

$a_n=S_n-S_{n-1}=(2^n-1)-(2^{n-1}-1)$
$=2^{n-1}$ $\cdots\cdots$ ㉠

이때 $a_1=1$은 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$a_n=2^{n-1}$ $\quad\therefore\ a_na_{n+1}=2^{n-1}\times 2^n=2^{2n-1}$

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{9}{a_na_{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9}{2^{2n-1}}=18\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n$$
$$=18\times\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}=18\times\frac{1}{3}=6$$

28 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\log_2 x-3}{2}\right)^{n-1}$이 수렴하려면

$-1<\frac{\log_2 x-3}{2}<1$, $1<\log_2 x<5$

$\therefore\ 2<x<32$

따라서 구하는 정수 x는 3, 4, 5, $\cdots$, 31의 29개이다.

29 (i) 수열 $\{x(x-1)^{n-1}\}$이 수렴하려면

$x=0$ 또는 $-1<x-1\leq 1$

$\therefore\ 0\leq x\leq 2$

(ii) 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(x^2+x-1)^{n-1}$이 수렴하려면

$-1<x^2+x-1<1$

$x^2+x-1>-1$을 풀면

$x<-1$ 또는 $x>0$ $\cdots\cdots$ ㉠

$x^2+x-1<1$을 풀면

$-2<x<1$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $-2<x<-1$ 또는 $0<x<1$

(i), (ii)에 의해 구하는 x의 값의 범위는

$0<x<1$

30 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}r^n$이 수렴하므로

$-1<r<1$ $\cdots\cdots$ ㉠

ㄱ. $\sum_{n=1}^{\infty}r^{n+2}$은 공비가 r인 등비급수이므로 ㉠에서

$-1<r<1$

따라서 주어진 급수는 수렴한다.

ㄴ. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2r-3}{4}\right)^n$은 공비가 $\frac{2r-3}{4}$인 등비급수이므로 ㉠에서

$-\frac{5}{4}<\frac{2r-3}{4}<-\frac{1}{4}$

따라서 주어진 급수는 항상 수렴한다고 할 수 없다.

ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{2}+1\right)^n$은 공비가 $\frac{r}{2}+1$인 등비급수이므로 ㉠에서

$\frac{1}{2}<\frac{r}{2}+1<\frac{3}{2}$

따라서 주어진 급수는 항상 수렴한다고 할 수 없다.

ㄹ. $\sum_{n=1}^{\infty}r^{2n-1}$은 공비가 r^2인 등비급수이므로 ㉠에서

$0\leq r^2<1$

따라서 주어진 급수는 수렴한다.

따라서 항상 수렴하는 급수는 ㄱ, ㄹ이다.

31 두 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a^n$, $\sum_{n=1}^{\infty}b^n$이 모두 수렴하므로

$-1<a<1$ $\cdots\cdots$ ㉠

$-1<b<1$ $\cdots\cdots$ ㉡

ㄱ. $\sum_{n=1}^{\infty}(ab)^n$은 공비가 ab인 등비급수이므로 ㉠, ㉡에서

$-1<ab<1$

따라서 주어진 급수는 수렴한다.

ㄴ. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a+b}{2}\right)^n$은 공비가 $\frac{a+b}{2}$인 등비급수이므로 ㉠, ㉡에서

$-1<\frac{a+b}{2}<1$

따라서 주어진 급수는 수렴한다.

ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty}(a^2-b^2)^n$은 공비가 a^2-b^2인 등비급수이므로 ㉠, ㉡에서

$-1<a^2-b^2<1$

따라서 주어진 급수는 수렴한다.

따라서 항상 수렴하는 급수는 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

32 ㄱ. [반례] $a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n$, $b_n=\left(\frac{1}{4}\right)^n$이면 두 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$은 모두 수렴하지만 $\frac{a_n}{b_n}=2^n$이므로 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{b_n}$은 발산한다.

유형편

ㄴ. [반례] $a_n=(-1)^n$, $b_n=(-1)^{n+1}$이면 두 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$은 모두 발산하지만 $a_n+b_n=0$이므로 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$은 수렴한다.

ㄷ. 두 등비수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 공비를 각각 a, b라 하면 두 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^3$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^3$이 모두 수렴하므로

$-1<a^3<1$, $-1<b^3<1$

$\therefore -1<a<1$, $-1<b<1$

따라서 $-1<ab<1$이므로 $\sum_{n=1}^{\infty} a_nb_n$은 수렴한다.

따라서 옳은 것은 ㄷ이다.

33 $1-\frac{x}{3}+\frac{x^2}{9}-\frac{x^3}{27}+\cdots=\frac{1}{1+\frac{x}{3}}=\frac{3}{3+x}$

따라서 $\frac{3}{3+x}=\frac{3}{5}$이므로 $x=2$

34 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2x)^n+(-x)^n}{4^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{x}{4}\right)^n$

$=\frac{\frac{x}{2}}{1-\frac{x}{2}}+\frac{-\frac{x}{4}}{1+\frac{x}{4}}$

$=\frac{x}{2-x}-\frac{x}{4+x}=-\frac{2x^2+2x}{x^2+2x-8}$

따라서 $-\frac{2x^2+2x}{x^2+2x-8}=\frac{2}{9}$이므로

$10x^2+11x-8=0$, $(5x+8)(2x-1)=0$

$\therefore x=\frac{1}{2}$ $(\because x>0)$

35 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n=2$에서 $\frac{a}{1-r}=2$

$\therefore a=2(1-r)$ …… ㉠

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^3=\frac{8}{7}$에서 $\frac{a^3}{1-r^3}=\frac{8}{7}$

$\therefore 7a^3=8(1-r^3)$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$7\times8(1-r)^3=8(1-r^3)$

$2r^2-5r+2=0$, $(2r-1)(r-2)=0$

$\therefore r=\frac{1}{2}$ $(\because -1<r<1)$

이를 ㉠에 대입하면 $a=1$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2=\frac{a^2}{1-r^2}=\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=\frac{4}{3}$

36 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

(가)에서 $\frac{a}{1-r}=2(a+ar)$

$2(1+r)(1-r)=1$ $\quad\therefore r^2=\frac{1}{2}$ …… ㉠

(나)에서 $\frac{a^2}{1-r^2}=2(a+ar^2)$

$2(1+r^2)(1-r^2)=a$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하여 풀면 $a=\frac{3}{2}$

이때 수열 $\{a_{2n-1}\}$은 첫째항이 a, 공비가 r^2인 등비수열이므로

$\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}=\frac{a}{1-r^2}=\frac{\frac{3}{2}}{1-\frac{1}{2}}=3$

37 $0.\dot{3}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$, $0.\dot{0}3\dot{7}=\frac{37}{999}=\frac{1}{27}$이므로 공비를 r라 하면

$\frac{1}{3}r^2=\frac{1}{27}$ $\quad\therefore r=\frac{1}{3}$ $(\because r>0)$

따라서 구하는 등비급수의 합은

$\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}=0.5$

38 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항과 공비를 모두 r라 하면

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n=0.\dot{6}=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$에서

$\frac{r}{1-r}=\frac{2}{3}$, $3r=2(1-r)$ $\quad\therefore r=\frac{2}{5}$

$\therefore a_2=r^2=\frac{4}{25}=0.16$

39 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 $0.\dot{a}=\frac{a}{9}$, 공비가

$0.\dot{3}\dot{a}=\frac{30+a}{99}$이므로

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n=\frac{\frac{a}{9}}{1-\frac{30+a}{99}}=\frac{11a}{69-a}$

따라서 $\frac{11a}{69-a}=\frac{22}{21}$이므로

$231a=22(69-a)$ $\quad\therefore a=6$

40 $\frac{14}{33}=\frac{42}{99}=0.\dot{4}\dot{2}$이므로

$\frac{a_1}{5}+\frac{a_2}{5^2}+\frac{a_3}{5^3}+\frac{a_4}{5^4}+\cdots$

$=\frac{4}{5}+\frac{2}{5^2}+\frac{4}{5^3}+\frac{2}{5^4}+\cdots$

$=4\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{5^3}+\cdots\right)+2\left(\frac{1}{5^2}+\frac{1}{5^4}+\cdots\right)$

$=4\times\frac{\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{25}}+2\times\frac{\frac{1}{25}}{1-\frac{1}{25}}=\frac{5}{6}+\frac{1}{12}=\frac{11}{12}$

41 $\angle XOY=30^{\circ}$이므로

$\overline{PP_1}=\overline{OP}\sin 30^{\circ}=1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

$\angle OPP_1=60^{\circ}$이므로

$\overline{P_1P_2}=\overline{PP_1}\sin 60^{\circ}=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\angle P_2P_1P_3=60^{\circ}$이므로

$\overline{P_2P_3}=\overline{P_1P_2}\sin 60^{\circ}=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$

$\vdots$

$\therefore\ \overline{PP_1}+\overline{P_1P_2}+\overline{P_2P_3}+\cdots=\frac{1}{2}\left\{1+\frac{\sqrt{3}}{2}+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\cdots\right\}$

$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{2}\times\frac{2}{2-\sqrt{3}}$

$=2+\sqrt{3}$

42 공이 정지할 때까지 움직인 거리는

$20+2\times20\times\frac{3}{4}+2\times20\times\left(\frac{3}{4}\right)^2+2\times20\times\left(\frac{3}{4}\right)^3+\cdots$

$=20+\frac{30}{1-\frac{3}{4}}=140\,(\text{m})$

43 $\overline{A_1A_2}=4$이므로 $l_1=2\pi$

선분 A_nA_{n+1}을 $1:3$으로 내분하는 점이 A_{n+2}이므로

$\overline{A_{n+1}A_{n+2}}=\frac{3}{4}\overline{A_nA_{n+1}}$

이때 반원의 호의 길이는 반지름의 길이에 비례하므로

$l_{n+1}=\frac{3}{4}l_n$

따라서 수열 $\{l_n\}$은 첫째항이 $l_1=2\pi$, 공비가 $\frac{3}{4}$인 등비수열이므로

$\sum_{n=1}^{\infty}l_n=\frac{2\pi}{1-\frac{3}{4}}=8\pi$

44 점 P가 한없이 가까워지는 점의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면

$x=\overline{OP_1}-\overline{P_2P_3}+\overline{P_4P_5}-\overline{P_6P_7}+\cdots$

$=1-\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^4-\left(\frac{2}{3}\right)^6+\cdots$

$=\frac{1}{1-\left(-\frac{4}{9}\right)}=\frac{9}{13}$

$y=\overline{P_1P_2}-\overline{P_3P_4}+\overline{P_5P_6}-\overline{P_7P_8}+\cdots$

$=\frac{2}{3}-\left(\frac{2}{3}\right)^3+\left(\frac{2}{3}\right)^5-\left(\frac{2}{3}\right)^7+\cdots$

$=\frac{\frac{2}{3}}{1-\left(-\frac{4}{9}\right)}=\frac{6}{13}$

따라서 점 P가 한없이 가까워지는 점의 좌표는 $\left(\frac{9}{13},\ \frac{6}{13}\right)$이다.

45 $a=\overline{OP_1}\cos 45^{\circ}+\overline{P_1P_2}\cos 45^{\circ}+\overline{P_2P_3}\cos 45^{\circ}+\cdots$

$=6\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\times6\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2\times6\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\cdots$

$=\frac{3\sqrt{2}}{1-\frac{1}{2}}=6\sqrt{2}$

$b=\overline{OP_1}\sin 45^{\circ}-\overline{P_1P_2}\sin 45^{\circ}+\overline{P_2P_3}\sin 45^{\circ}-\cdots$

$=6\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\times6\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2\times6\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\cdots$

$=\frac{3\sqrt{2}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=2\sqrt{2}$

$\therefore\ a^2+b^2=(6\sqrt{2})^2+(2\sqrt{2})^2=80$

46 삼각형 $A_nB_nD_n$과 삼각형 $A_{n+1}B_{n+1}D_{n+1}$은 닮은 도형이고 대응하는 변의 길이의 비가 $2:1$이므로 넓이의 비는 $4:1$이다.

$\therefore\ S_{n+1}=\frac{1}{4}S_n$

따라서 수열 $\{S_n\}$은 첫째항이 $S_1=\frac{1}{2}\times1\times1=\frac{1}{2}$, 공비가 $\frac{1}{4}$인 등비수열이므로

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}S_k=\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{2}{3}$

47 첫 번째로 만들어진 도형의 넓이는 한 변의 길이가 4인 정사각형의 넓이에서 반지름의 길이가 2인 원의 넓이를 뺀 것과 같으므로

$4^2-\pi\times2^2=16-4\pi$

두 번째로 만들어진 도형 1개의 넓이는 한 변의 길이가 $\sqrt{2}$인 정사각형에서 반지름의 길이가 $\frac{\sqrt{2}}{2}$인 원의 넓이를 뺀 것과 같으므로

$4\times\left\{(\sqrt{2})^2-\pi\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right\}=8-2\pi$

세 번째로 만들어진 도형 1개의 넓이는 한 변의 길이가 $\frac{1}{2}$인 정사각형의 넓이에서 반지름의 길이가 $\frac{1}{4}$인 원의 넓이를 뺀 것과 같으므로

$4\times4\times\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^2-\pi\times\left(\frac{1}{4}\right)^2\right\}=4-\pi$

$\vdots$

따라서 구하는 모든 도형의 넓이의 합은

$(16-4\pi)+(8-2\pi)+(4-\pi)+\cdots$

$=\frac{16-4\pi}{1-\frac{1}{2}}=32-8\pi$

유형편

Ⅱ-1. 여러 가지 함수의 미분

01 지수함수와 로그함수의 미분

기초 문제 Training

p.24

1 (1) ∞ (2) $\mathbf{0}$ (3) $\mathbf{2}$ (4) $\mathbf{25}$

2 (1) ∞ (2) $-\infty$ (3) $-\infty$ (4) $-\mathbf{1}$

3 (1) $\boldsymbol{e^2}$ (2) $\boldsymbol{e^3}$ (3) $\boldsymbol{e^5}$ (4) $\boldsymbol{e^4}$

4 (1) $\dfrac{2}{5}$ (2) $\dfrac{3}{2}$ (3) $\dfrac{1}{\ln 4}$ (4) $\ln 3$

5 (1) $y'=2e^{2x}$ (2) $y'=(x+3)e^x$
(3) $y'=3^x\ln 3$ (4) $y'=2^x\ln 2+5^x\ln 5$

6 (1) $y'=\dfrac{1}{x}$ (2) $y'=\dfrac{4}{x}$
(3) $y'=\ln x+1$ (4) $y'=\dfrac{1}{x\ln 3}$

핵심 유형 Training

p.25~30

1 2	**2** 5	**3** ㄱ, ㄴ, ㄷ		**4** $\dfrac{15}{2}$
5 -1	**6** ④	**7** 200	**8** ③	**9** $e^{10}+\dfrac{1}{e^3}$
10 ②	**11** ③	**12** e^2	**13** 3	**14** ④
15 $\sqrt{e}$	**16** ③	**17** 4	**18** 2	**19** ④
20 ④	**21** 2	**22** 9	**23** 3	**24** 20
25 -36	**26** $\dfrac{3}{2}$	**27** $\dfrac{4}{\ln 2}$	**28** $\ln 2$	**29** 3
30 ②	**31** 12	**32** ②	**33** 4	**34** ③
35 ①	**36** 0	**37** $-10e^2$		**38** 4
39 $3\ln 2$	**40** 2	**41** $5\ln 5+1$		**42** ③
43 -2	**44** ②			

1 주어진 식을 4^x으로 묶으면

$$\lim_{x\to\infty}(4^x-2^x)^{\frac{1}{2x}}=\lim_{x\to\infty}\left[4^x\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^x\right\}\right]^{\frac{1}{2x}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}2\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^x\right\}^{\frac{1}{2x}}$$
$$=2\times 1=2$$

2 주어진 식의 좌변의 분모, 분자를 3^x으로 각각 나누면

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a\times 3^{x+1}+12}{3^x+4}=\lim_{x\to\infty}\frac{3a+\frac{12}{3^x}}{1+\frac{4}{3^x}}=3a$$

따라서 $3a=15$이므로 $a=5$

3 ㄱ. 주어진 식의 분모, 분자를 5^x으로 각각 나누면

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2^{x+1}}{5^x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2\times\left(\frac{2}{5}\right)^x}{1-\left(\frac{1}{5}\right)^x}=\frac{2\times 0}{1-0}=0$$

ㄴ. $-x=t$로 놓으면 $x=-t$이고, $x\to-\infty$일 때 $t\to\infty$이므로

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3^x+1}{4^x+2}=\lim_{t\to\infty}\frac{3^{-t}+1}{4^{-t}+2}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^t+1}{\left(\frac{1}{4}\right)^t+2}$$
$$=\frac{0+1}{0+2}=\frac{1}{2}$$

ㄷ. $-x=t$로 놓으면 $x=-t$이고, $x\to-\infty$일 때 $t\to\infty$이므로

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2^x}{2^x-2^{-x}}=\lim_{t\to\infty}\frac{2^{-t}}{2^{-t}-2^t}=\lim_{t\to\infty}\frac{2^{-2t}}{2^{-2t}-1}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^t}{\left(\frac{1}{4}\right)^t-1}=\frac{0}{0-1}=0$$

ㄹ. $\dfrac{1}{x}=t$로 놓으면 $x=\dfrac{1}{t}$이고, $x\to-\infty$일 때 $t\to 0-$이므로

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{1-7^{\frac{1}{x}}}=\lim_{t\to 0-}\frac{1}{1-7^t}=\infty$$

따라서 극한값이 존재하는 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

4 (i) $n<5$일 때, 주어진 식의 분모, 분자를 5^x으로 각각 나누면

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2^{x+1}+5^{x+1}}{n^x+5^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2\times\left(\frac{2}{5}\right)^x+5}{\left(\frac{n}{5}\right)^x+1}$$
$$=\frac{2\times 0+5}{0+1}=5$$

$\therefore f(n)=5$

(ii) $n=5$일 때

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2^{x+1}+5^{x+1}}{n^x+5^x}=\lim_{x\to\infty}\left\{\left(\frac{2}{5}\right)^x+\frac{5}{2}\right\}$$
$$=0+\frac{5}{2}=\frac{5}{2}$$

$\therefore f(n)=\dfrac{5}{2}$

(iii) $n>5$일 때, 주어진 식의 분모, 분자를 n^x으로 각각 나누면

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2^{x+1}+5^{x+1}}{n^x+5^x}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2\times\left(\frac{2}{n}\right)^x+5\times\left(\frac{5}{n}\right)^x}{1+\left(\frac{5}{n}\right)^x}$$
$$=\frac{2\times0+5\times0}{1+0}=0$$
$$\therefore f(n)=0$$

(i), (ii), (iii)에 의해 $S=\left\{0,\ \frac{5}{2},\ 5\right\}$

따라서 집합 S의 모든 원소의 합은

$0+\frac{5}{2}+5=\frac{15}{2}$

5 $\lim_{x\to\infty}\{\log_2(3+x+2x^2)-2\log_2(2x+1)\}$

$=\lim_{x\to\infty}\{\log_2(3+x+2x^2)-\log_2(2x+1)^2\}$

$=\lim_{x\to\infty}\log_2\frac{3+x+2x^2}{(2x+1)^2}$

$=\lim_{x\to\infty}\log_2\frac{3+x+2x^2}{4x^2+4x+1}$

$=\log_2\lim_{x\to\infty}\frac{3+x+2x^2}{4x^2+4x+1}$

$=\log_2\frac{1}{2}=-1$

6 $\lim_{x\to-2}(\log_4|x^2-4|-\log_4|x+2|)$

$=\lim_{x\to-2}\log_4\left|\frac{x^2-4}{x+2}\right|$

$=\lim_{x\to-2}\log_4\left|\frac{(x-2)(x+2)}{x+2}\right|$

$=\lim_{x\to-2}\log_4|x-2|$

$=\log_4\lim_{x\to-2}|x-2|$

$=\log_4 4=1$

7 $\lim_{x\to\infty}\{\log(ax-1)-\log(2x+1)\}$

$=\lim_{x\to\infty}\log\frac{ax-1}{2x+1}$

$=\log\lim_{x\to\infty}\frac{ax-1}{2x+1}$

$=\log\frac{a}{2}$

따라서 $\log\frac{a}{2}=2$이므로 $\frac{a}{2}=100$

$\therefore a=200$

8 $5^x+9^x=9^x\left\{\left(\frac{5}{9}\right)^x+1\right\}$이므로

$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\log_3(5^x+9^x)=\lim_{x\to\infty}\log_3\left[9^x\left\{\left(\frac{5}{9}\right)^x+1\right\}\right]^{\frac{1}{x}}$

$=\lim_{x\to\infty}\log_3 9\left\{\left(\frac{5}{9}\right)^x+1\right\}^{\frac{1}{x}}$

$=\log_3\lim_{x\to\infty}9\left\{\left(\frac{5}{9}\right)^x+1\right\}^{\frac{1}{x}}$

$=\log_3(9\times1)$

$=\log_3 9=2$

9 $\lim_{x\to0}(1+5x)^{\frac{2}{x}}+\lim_{x\to0}(1-3x)^{\frac{1}{x}}$

$=\lim_{x\to0}\{(1+5x)^{\frac{1}{5x}}\}^{10}+\lim_{x\to0}\{(1-3x)^{-\frac{1}{3x}}\}^{-3}$

$=e^{10}+e^{-3}=e^{10}+\frac{1}{e^3}$

10 $\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{4x}\right)\left(1-\frac{1}{2x}\right)\right\}^x$

$=\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{4x}\right)^x\times\left(1-\frac{1}{2x}\right)^x\right\}$

$=\lim_{x\to\infty}\left[\left\{\left(1+\frac{1}{4x}\right)^{4x}\right\}^{\frac{1}{4}}\times\left\{\left(1-\frac{1}{2x}\right)^{-2x}\right\}^{-\frac{1}{2}}\right]$

$=e^{\frac{1}{4}}\times e^{-\frac{1}{2}}=e^{-\frac{1}{4}}$

$\therefore a=-\frac{1}{4}$

11 $\lim_{x\to0}\left(1+\frac{x}{a}\right)^{\frac{3}{x}}=\lim_{x\to0}\left\{\left(1+\frac{x}{a}\right)^{\frac{a}{x}}\right\}^{\frac{3}{a}}=e^{\frac{3}{a}}$

따라서 $e^{\frac{3}{a}}=e^{\frac{3}{4}}$이므로 $a=4$

12 $x-1=t$로 놓으면 $x=1+t$이고, $x\to1$일 때 $t\to0$이므로

$\lim_{x\to1}x^{\frac{2}{x-1}}=\lim_{t\to0}(1+t)^{\frac{2}{t}}=\lim_{t\to0}\{(1+t)^{\frac{1}{t}}\}^2=e^2$

13 $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-a}{x+a}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1-\frac{a}{x}}{1+\frac{a}{x}}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1-\frac{a}{x}\right)^x}{\left(1+\frac{a}{x}\right)^x}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left\{\left(1-\frac{a}{x}\right)^{-\frac{x}{a}}\right\}^{-a}}{\left\{\left(1+\frac{a}{x}\right)^{\frac{x}{a}}\right\}^{a}}$

$=\frac{e^{-a}}{e^a}=\frac{1}{e^{2a}}$

$\therefore a=3$

14 ㄱ. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^x$

$=\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1-\frac{2}{x}\right)^{-\frac{x}{2}}\right\}^{-2}$

$=e^{-2}=\frac{1}{e^2}$

ㄴ. $-x=t$로 놓으면 $x=-t$이고, $x \to -\infty$일 때 $t \to \infty$이므로

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-x}=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}=e$$

ㄷ. $x-2=t$로 놓으면 $x=2+t$이고, $x \to 2$일 때 $t \to 0$이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x\to2}(x-1)^{\frac{2}{2-x}}&=\lim_{t\to0}(1+t)^{\frac{2}{-t}}\\&=\lim_{t\to0}\{(1+t)^{\frac{1}{t}}\}^{-2}\\&=e^{-2}=\frac{1}{e^2}\end{aligned}$$

ㄹ. $-x=t$로 놓으면 $x=-t$이고, $x \to -\infty$일 때 $t \to \infty$이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{x-1}\right)^{x}&=\lim_{t\to\infty}\left(\frac{-t}{-t-1}\right)^{-t}\\&=\lim_{t\to\infty}\left(\frac{t}{1+t}\right)^{-t}\\&=\lim_{t\to\infty}\left(\frac{1+t}{t}\right)^{t}\\&=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}=e\end{aligned}$$

따라서 극한값이 e인 것은 ㄴ, ㄹ이다.

15 $\frac{1}{2}\left(1+\frac{2}{2n-1}\right)\left(1+\frac{2}{2n+1}\right)\left(1+\frac{2}{2n+3}\right)\cdots\left(1+\frac{2}{4n-3}\right)$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{\cancel{2n+1}}{2n-1}\times\frac{\cancel{2n+3}}{\cancel{2n+1}}\times\frac{\cancel{2n+5}}{\cancel{2n+3}}\times\cdots\times\frac{4n-1}{\cancel{4n-3}}$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{4n-1}{2n-1}=\frac{4n-1}{4n-2}$$

$$\begin{aligned}\therefore\ &\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{2}\left(1+\frac{2}{2n-1}\right)\left(1+\frac{2}{2n+1}\right)\cdots\left(1+\frac{2}{4n-3}\right)\right\}^{2n}\\&=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4n-1}{4n-2}\right)^{2n}\\&=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{4n-2}\right)^{2n}\\&=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{4n-2}\right)^{\frac{4n-2}{2}+1}\\&=\lim_{n\to\infty}\left[\left\{\left(1+\frac{1}{4n-2}\right)^{(4n-2)}\right\}^{\frac{1}{2}}\times\left(1+\frac{1}{4n-2}\right)\right]\\&=e^{\frac{1}{2}}\times1=\sqrt{e}\end{aligned}$$

16 $$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+3x)}{e^{2x}-1}&=\lim_{x\to0}\left\{\frac{\ln(1+3x)}{3x}\times\frac{2x}{e^{2x}-1}\times\frac{3}{2}\right\}\\&=1\times1\times\frac{3}{2}=\frac{3}{2}\end{aligned}$$

17 $$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{e^{6x}-1}{x^2+3x}&=\lim_{x\to0}\left(\frac{e^{6x}-1}{6x}\times\frac{6}{x+3}\right)\\&=1\times\frac{6}{3}=2\end{aligned}$$

$\therefore a=2$

$\lim_{x\to\infty}x^2\ln\left(1+\frac{2}{x^2}\right)$에서 $\frac{1}{x^2}=t$로 놓으면 $x=t^{-\frac{1}{2}}$이고, $x \to \infty$일 때 $t \to 0+$이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}x^2\ln\left(1+\frac{2}{x^2}\right)&=\lim_{t\to0+}\frac{\ln(1+2t)}{t}\\&=\lim_{t\to0+}\frac{\ln(1+2t)}{2t}\times2\\&=1\times2=2\end{aligned}$$

$\therefore b=2$

$\therefore ab=4$

18 $y=e^{\frac{x}{2}}-1$이라 하면 $e^{\frac{x}{2}}=y+1$

$\frac{x}{2}=\ln(y+1)$

$\therefore x=2\ln(y+1)$

따라서 $g(x)=2\ln(x+1)$이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{g(x)}{x}&=\lim_{x\to0}\frac{2\ln(x+1)}{x}\\&=2\times1=2\end{aligned}$$

19 $\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+10x)}{nx}=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+10x)}{10x}\times\frac{10}{n}=\frac{10}{n}$

이때 $\frac{10}{n}$이 자연수가 되려면 n은 10의 약수이어야 하므로

$n=1,\ 2,\ 5,\ 10$

따라서 모든 n의 값의 합은

$1+2+5+10=18$

20 ① $x-2=t$로 놓으면 $x=2+t$이고, $x \to 2$일 때 $t \to 0$이므로

$$\lim_{x\to2}\frac{\log_2(x-1)}{x-2}=\lim_{t\to0}\frac{\log_2(1+t)}{t}=\frac{1}{\ln2}$$

② $$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{5^x-3^x}{x}&=\lim_{x\to0}\frac{5^x-1-3^x+1}{x}\\&=\lim_{x\to0}\frac{5^x-1}{x}-\lim_{x\to0}\frac{3^x-1}{x}\\&=\ln5-\ln3=\ln\frac{5}{3}\end{aligned}$$

③ $$\begin{aligned}&\lim_{x\to0}\frac{\log_3(1+x)}{\log_9(1-x)}\\&=\lim_{x\to0}\left\{\frac{\log_3(1+x)}{x}\times\frac{-x}{\log_9(1-x)}\times(-1)\right\}\\&=\frac{1}{\ln3}\times\ln9\times(-1)\\&=-\frac{\ln9}{\ln3}=-\frac{2\ln3}{\ln3}=-2\end{aligned}$$

④ $$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{e^x-2^{-x}}{x}&=\lim_{x\to0}\frac{e^x-1-2^{-x}+1}{x}\\&=\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}+\lim_{x\to0}\frac{2^{-x}-1}{-x}\\&=1+\ln2\end{aligned}$$

⑤ $\lim_{x\to 0}\frac{(9^x-1)\log_3(1+x)}{x^2}$

$=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{9^x-1}{x}\times\frac{\log_3(1+x)}{x}\right\}$

$=\ln 9\times\frac{1}{\ln 3}=\frac{\ln 9}{\ln 3}=\frac{2\ln 3}{\ln 3}=2$

21 $\lim_{x\to 0}\frac{(a+8)^x-a^x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(a+8)^x-1-a^x+1}{x}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{(a+8)^x-1}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}$

$=\ln(a+8)-\ln a$

$=\ln\frac{a+8}{a}$

따라서 $\ln\frac{a+8}{a}=\ln 5$이므로

$\frac{a+8}{a}=5$, $a+8=5a$ $\quad\therefore a=2$

22 $f(x)=\lim_{h\to 0}\frac{x^{3h}-1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{x^{3h}-1}{3h}\times 3=3\ln x$

$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{f(1+3x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{3\ln(1+3x)}{x}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{3\ln(1+3x)}{3x}\times 3$

$=3\times 1\times 3=9$

23 $\lim_{x\to 0}\ln(x+1)=0$이고 극한값이 존재하므로

$\lim_{x\to 0}(a^x+b)=0$

$1+b=0$ $\quad\therefore b=-1$

이를 주어진 식의 좌변에 대입하면

$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{\ln(x+1)}=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{a^x-1}{x}\times\frac{x}{\ln(1+x)}\right\}$

$=\ln a\times 1=\ln a$

따라서 $\ln a=\ln 2$이므로 $a=2$

$\therefore a-b=2-(-1)=3$

24 $\lim_{x\to 0}(e^x-1)=0$이고 극한값이 존재하므로

$\lim_{x\to 0}(\sqrt{ax+b}-2)=0$

$\sqrt{b}-2=0$ $\quad\therefore b=4$

이를 주어진 식의 좌변에 대입하면

$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{ax+4}-2}{e^x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{ax+4}-2)(\sqrt{ax+4}+2)}{(e^x-1)(\sqrt{ax+4}+2)}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{ax}{(e^x-1)(\sqrt{ax+4}+2)}$

$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{e^x-1}\times\frac{a}{\sqrt{ax+4}+2}\right)$

$=1\times\frac{a}{2+2}=\frac{a}{4}$

따라서 $\frac{a}{4}=4$이므로 $a=16$

$\therefore a+b=16+4=20$

25 $\lim_{x\to 1}(e^{x-1}-1)=0$이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로

$\lim_{x\to 1}(ax+b)=0$

$a+b=0$ $\quad\therefore b=-a$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

㉠을 주어진 식의 좌변에 대입하면

$\lim_{x\to 1}\frac{e^{x-1}-1}{ax-a}=\lim_{x\to 1}\frac{e^{x-1}-1}{a(x-1)}$

이때 $x-1=t$로 놓으면 $x=1+t$이고, $x\to 1$일 때

$t\to 0$이므로

$\lim_{x\to 1}\frac{e^{x-1}-1}{a(x-1)}=\lim_{t\to 0}\frac{e^t-1}{at}=\lim_{t\to 0}\frac{e^t-1}{t}\times\frac{1}{a}$

$=1\times\frac{1}{a}=\frac{1}{a}$

따라서 $\frac{1}{a}=\frac{1}{6}$이므로 $a=6$

이를 ㉠에 대입하면 $b=-6$

$\therefore ab=-36$

26 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이므로 $\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)$

$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{\ln(a+x)}{2x}=b$

$\lim_{x\to 0}2x=0$이고 극한값이 존재하므로

$\lim_{x\to 0}\ln(a+x)=0$

$\ln a=0$ $\quad\therefore a=1$

이를 주어진 식의 좌변에 대입하면

$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

$\therefore b=\frac{1}{2}$

$\therefore a+b=\frac{3}{2}$

27 $\mathrm{A}(t, \log_2(1+4t))$ $(t>0)$라 하면

$\tan\theta=\frac{\log_2(1+4t)}{t}$

이때 점 A가 원점에 한없이 가까워지면 $t\to 0+$이므로

$\lim_{t\to 0+}\tan\theta=\lim_{t\to 0+}\frac{\log_2(1+4t)}{t}$

$=\lim_{t\to 0+}\frac{\log_2(1+4t)}{4t}\times 4=\frac{4}{\ln 2}$

28 $\mathrm{A}(t, 4^t)$, $\mathrm{B}(t, 2^t)$이므로

$\overline{\mathrm{AB}}=4^t-2^t$

$\therefore \lim_{t\to 0+}\frac{\overline{\mathrm{AB}}}{t}=\lim_{t\to 0+}\frac{4^t-2^t}{t}$

$=\lim_{t\to 0+}\frac{4^t-1-2^t+1}{t}$

$=\lim_{t\to 0+}\frac{4^t-1}{t}-\lim_{t\to 0+}\frac{2^t-1}{t}$

$=\ln 4-\ln 2$

$=\ln\frac{4}{2}=\ln 2$

29 A$(t,\ \ln(t-2))$, B$(0,\ \ln(t-2))$, C$(3,\ 0)$이므로

$\overline{AB}=t$, $\overline{OC}=3$, $\overline{BO}=\ln(t-2)$

$\therefore\ S(t)=\frac{1}{2}\times(t+3)\times\ln(t-2)$

$=\frac{t+3}{2}\ln(t-2)$

$\therefore\ \lim_{t\to3+}\frac{S(t)}{t-3}=\lim_{t\to3+}\left\{\frac{t+3}{2}\times\frac{\ln(t-2)}{t-3}\right\}$

이때 $t-3=s$로 놓으면 $t=3+s$이고, $t\to3+$일 때

$s\to0+$이므로

$\lim_{t\to3+}\left\{\frac{t+3}{2}\times\frac{\ln(t-2)}{t-3}\right\}=\lim_{s\to0+}\left\{\frac{s+6}{2}\times\frac{\ln(1+s)}{s}\right\}$

$=\frac{6}{2}\times1=3$

30 $f'(x)=(x-1)'(e^x-1)+(x-1)(e^x-1)'$

$=e^x-1+(x-1)e^x=xe^x-1$

$\therefore\ f'(1)=e-1$

31 $f'(x)=4^x\ln4+3^x\ln3$

점 $(0,\ f(0))$에서의 접선의 기울기는

$f'(0)=\ln4+\ln3=\ln12$ $\quad\therefore\ a=12$

32 $f(x)=(x^2+ax)e^{x+1}=e(x^2+ax)e^x$이므로

$f'(x)=e\{(x^2+ax)'e^x+(x^2+ax)(e^x)'\}$

$=e\{(2x+a)e^x+(x^2+ax)e^x\}$

$=\{x^2+(a+2)x+a\}e^{x+1}$

$\therefore\ f'(2)=(8+3a)e^3$

따라서 $(8+3a)e^3=5e^3$이므로

$8+3a=5,\ 3a=-3$ $\quad\therefore\ a=-1$

33 $f'(x)=2+a^x\ln a$ $\quad\therefore\ f'(0)=2+\ln a$

따라서 $2+\ln a=2+\ln2$이므로 $a=2$

$\therefore\ f(x)=2x+2^x$

$\therefore\ f(1)=2+2=4$

34 $f(x)=x(\ln2+\ln x)$이므로

$f'(x)=(x)'(\ln2+\ln x)+x(\ln2+\ln x)'$

$=(\ln2+\ln x)+x\times\frac{1}{x}=\ln2x+1$

$\therefore\ f'(1)=\ln2+1$

35 $f'(x)=\frac{1}{x\ln2}+\frac{1}{x\ln4}$

$\therefore\ f'(4)=\frac{1}{4\ln2}+\frac{1}{4\ln4}$

$=\frac{1}{4\ln2}+\frac{1}{8\ln2}=\frac{3}{8\ln2}$

$\therefore\ k=3$

36 $f'(x)=(x^2+2ax)'(\ln x-1)+(x^2+2ax)(\ln x-1)'$

$=(2x+2a)(\ln x-1)+(x^2+2ax)\times\frac{1}{x}$

$\therefore\ f'(e)=e+2a$

따라서 $e+2a=e$이므로 $a=0$

37 $f'(x)=a-b\ln x-b$

$f(1)=4$에서 $a=4$

$f'(1)=-3$에서 $a-b=-3$ $\quad\therefore\ b=7$

따라서 $f(x)=4x-7x\ln x$이므로

$f(e^2)=4e^2-14e^2=-10e^2$

38 $\lim_{h\to0}\frac{f(e+h)-f(e-h)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(e+h)-f(e)+f(e)-f(e-h)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(e+h)-f(e)}{h}+\lim_{h\to0}\frac{f(e-h)-f(e)}{-h}$

$=f'(e)+f'(e)$

$=2f'(e)$

함수 $f(x)=x\ln x$를 미분하면

$f'(x)=\ln x+x\times\frac{1}{x}=\ln x+1$

$\therefore\ 2f'(e)=2\times(\ln e+1)=2\times2=4$

39 $\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1-2h)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)+f(1)-f(1-2h)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}+2\lim_{h\to0}\frac{f(1-2h)-f(1)}{-2h}$

$=f'(1)+2f'(1)$

$=3f'(1)$

함수 $f(x)=2^{x-1}=2^{-1}\times2^x$을 미분하면

$f'(x)=2^{-1}\times2^x\ln2=2^{x-1}\ln2$

$\therefore\ 3f'(1)=3\ln2$

40 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=2$에서 $\lim_{x\to1}(x-1)=0$이고 극한값이 존재하므로

$\lim_{x\to1}f(x)=0$ $\quad\therefore\ f(1)=0$

$f(1)=0$에서 $a=0$

$\therefore\ \lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=2$

$f'(x)=\frac{b}{x}$이므로 $f'(1)=2$에서 $b=2$

따라서 $f(x)=2\ln x$이므로

$f(e)=2\ln e=2$

41 $h(x)=f(x)g(x)$라 하면

$f(1)=5-4=1$, $g(1)=\ln 1+1=1$이므로

$h(1)=f(1)g(1)=1$

$$\therefore \lim_{x\to1}\frac{f(x)g(x)-1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{h(x)-h(1)}{x-1}=h'(1)$$

이때 $h'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$이고

$f'(x)=5^x\ln 5$, $g'(x)=\dfrac{1}{x}$이므로

$$\begin{aligned}h'(1)&=f'(1)g(1)+f(1)g'(1)\\&=5\ln 5\times1+1\times1\\&=5\ln 5+1\end{aligned}$$

42 $f(x)$가 $x=0$에서 미분가능하면 $x=0$에서 연속이므로

$\displaystyle\lim_{x\to0+}(e^x+1)=\lim_{x\to0-}(ax+b)=f(0)$

$\therefore b=2$

또 $f'(0)$이 존재하므로 $f'(x)=\begin{cases}e^x & (x>0)\\ a & (x<0)\end{cases}$에서

$\displaystyle\lim_{x\to0+}e^x=\lim_{x\to0-}a$ $\quad\therefore a=1$

$\therefore a-b=-1$

43 $f(x)$가 모든 실수 x에서 미분가능하면 $x=1$에서도 미분가능하므로 $x=1$에서 연속이다.

$\displaystyle\lim_{x\to1+}(\ln x+2)=\lim_{x\to1-}(x^2+ax+b)=f(1)$

$2=1+a+b$

$\therefore a+b=1$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

또 $f'(1)$이 존재하므로 $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x} & (x>1)\\ 2x+a & (x<1)\end{cases}$에서

$\displaystyle\lim_{x\to1+}\frac{1}{x}=\lim_{x\to1-}(2x+a)$

$1=2+a$ $\quad\therefore a=-1$

이를 ㉠에 대입하여 풀면 $b=2$

$\therefore ab=-2$

44 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하면 $x=1$에서 연속이므로

$\displaystyle\lim_{x\to1+}ae^{-x}=\lim_{x\to1-}(bx-2)=f(1)$

$\therefore \dfrac{a}{e}=b-2$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

또 $f'(1)$이 존재하므로 $f'(x)=\begin{cases}-ae^{-x} & (x>1)\\ b & (x<1)\end{cases}$에서

$\displaystyle\lim_{x\to1+}(-ae^{-x})=\lim_{x\to1-}b$

$\therefore b=-\dfrac{a}{e}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-e$, $b=1$

$\therefore ab=-e$

02 삼각함수의 미분

기초 문제 Training p.31

1 (1) $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ (2) $\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ (3) $2+\sqrt{3}$

2 (1) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (2) $\dfrac{1}{2}$ (3) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

3 (1) 2 (2) $\dfrac{1}{2}$ (3) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (4) 1

4 (1) 2 (2) $\dfrac{1}{2}$ (3) -1

5 (1) $\dfrac{3}{2}$ (2) 5 (3) $\dfrac{1}{4}$ (4) 3

6 (1) $y'=\cos x-\sin x$
(2) $y'=\cos^2 x-\sin^2 x$
(3) $y'=\cos x-x\sin x$
(4) $y'=2\sin x+2x\cos x$

핵심 유형 Training p.32~38

1 ③	**2** $2\sec\theta\csc\theta$	**3** $-\frac{25}{8}$	**4** 50	
5 $-\frac{1+2\sqrt{30}}{12}$		**6** $-\frac{3}{8}$	**7** $-\frac{1}{2}$	**8** $-\frac{1}{2}$
9 $-\frac{31}{25}$	**10** $-\frac{3}{4}$	**11** -16	**12** $\frac{7\sqrt{15}}{15}$	**13** $\frac{2\sqrt{10}}{5}$
14 $\frac{\sqrt{6}}{4}$	**15** 4	**16** $\frac{1}{8}$	**17** ②	**18** -1
19 -2	**20** $\frac{3}{4}$	**21** $\frac{5\sqrt{34}}{34}$	**22** 11.5 m	
23 ①	**24** ⑤	**25** ③	**26** ⑤	**27** $\frac{1}{2}$
28 ④	**29** 4	**30** ㄱ, ㄷ	**31** -1	**32** 2
33 1	**34** -1	**35** ③	**36** ④	**37** 1
38 $\frac{1}{4}$	**39** ②	**40** $\frac{1}{3}$	**41** $\pi-2$	**42** 2
43 $\frac{1}{2}$	**44** 8	**45** ③	**46** ③	**47** ①
48 ③	**49** $-\frac{\pi}{2}$	**50** 2	**51** $\frac{5}{16}$	

1 $\dfrac{1}{1+\sin\theta}+\dfrac{1}{1-\sin\theta}=\dfrac{1-\sin\theta+1+\sin\theta}{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)}$

$=\dfrac{2}{1-\sin^2\theta}$

$=\dfrac{2}{\cos^2\theta}=2\sec^2\theta$

2 $\dfrac{\sec\theta}{\csc\theta-\cot\theta}+\dfrac{\sec\theta}{\csc\theta+\cot\theta}$

$=\dfrac{\sec\theta(\csc\theta+\cot\theta)+\sec\theta(\csc\theta-\cot\theta)}{(\csc\theta-\cot\theta)(\csc\theta+\cot\theta)}$

$=\dfrac{\sec\theta\csc\theta+\sec\theta\cot\theta+\sec\theta\csc\theta-\sec\theta\cot\theta}{\csc^2\theta-\cot^2\theta}$

$=\dfrac{2\sec\theta\csc\theta}{(1+\cot^2\theta)-\cot^2\theta}$

$=2\sec\theta\csc\theta$

3 $\sin\theta+\cos\theta=-\dfrac{3}{5}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{9}{25}$

$1+2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{9}{25}$ $\quad\therefore \sin\theta\cos\theta=-\dfrac{8}{25}$

$\therefore \tan\theta+\cot\theta=\tan\theta+\dfrac{1}{\tan\theta}=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}+\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$

$=\dfrac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$

$=\dfrac{1}{-\frac{8}{25}}=-\dfrac{25}{8}$

4 $\dfrac{2\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta-2\cos\theta}=3$에서

$2\sin\theta+\cos\theta=3\sin\theta-6\cos\theta$

$7\cos\theta=\sin\theta$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

이때 $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$에서 $\cos\theta\neq0$이므로 ㉠의 양변을 $\cos\theta$로 나누면

$7=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ $\quad\therefore \tan\theta=7$

$1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$이므로

$\sec^2\theta=1+7^2=50$

5 $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$, $\dfrac{\pi}{2}<\beta<\pi$에서

$\cos\alpha>0$, $\sin\beta>0$

$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^2}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

$\sin\beta=\sqrt{1-\cos^2\beta}=\sqrt{1-\left(-\dfrac{1}{4}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$

$\therefore \sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

$=\dfrac{1}{3}\times\left(-\dfrac{1}{4}\right)-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\times\dfrac{\sqrt{15}}{4}$

$=-\dfrac{1+2\sqrt{30}}{12}$

6 $\sin\alpha-\sin\beta=\dfrac{1}{2}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\alpha+\sin^2\beta-2\sin\alpha\sin\beta=\dfrac{1}{4}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$\cos\alpha+\cos\beta=1$의 양변을 제곱하면

$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+2\cos\alpha\cos\beta=1$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠+㉡을 하면

$(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)+(\sin^2\beta+\cos^2\beta)$

$+2(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)=\dfrac{5}{4}$

$2+2\cos(\alpha+\beta)=\dfrac{5}{4}$

$\therefore \cos(\alpha+\beta)=-\dfrac{3}{8}$

7 이차방정식 $x^2+3x-5=0$의 두 근이 $\tan\alpha$, $\tan\beta$이므로 근과 계수의 관계에 의해

$\tan\alpha+\tan\beta=-3$, $\tan\alpha\tan\beta=-5$

$\therefore \tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\dfrac{-3}{1+5}=-\dfrac{1}{2}$

8 $\sin\alpha+\cos\beta+\sin\gamma=0$에서

$\sin\gamma=-\sin\alpha-\cos\beta$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

㉠의 양변을 제곱하면

$\sin^2\gamma=\sin^2\alpha+\cos^2\beta+2\sin\alpha\cos\beta$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

$\cos\alpha+\sin\beta+\cos\gamma=0$에서

$\cos\gamma=-\cos\alpha-\sin\beta$ $\quad\cdots\cdots$ ㉢

㉢의 양변을 제곱하면

$\cos^2\gamma=\cos^2\alpha+\sin^2\beta+2\cos\alpha\sin\beta$ $\quad\cdots\cdots$ ㉣

㉡+㉣을 하면

$1=2+2(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)$

$2\sin(\alpha+\beta)=-1$

$\therefore \sin(\alpha+\beta)=-\dfrac{1}{2}$

9 $\dfrac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$에서 $\sin\theta<0$이므로

$\sin\theta=-\sqrt{1-\cos^2\theta}=-\sqrt{1-\left(\dfrac{4}{5}\right)^2}=-\dfrac{3}{5}$

$\therefore \sin2\theta-\cos2\theta=2\sin\theta\cos\theta-(2\cos^2\theta-1)$

$=2\times\left(-\dfrac{3}{5}\right)\times\dfrac{4}{5}-\left\{2\times\left(\dfrac{4}{5}\right)^2-1\right\}$

$=-\dfrac{24}{25}-\dfrac{7}{25}=-\dfrac{31}{25}$

10 $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{2}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{4}$

$1+2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{4}$ $\quad\therefore 2\sin\theta\cos\theta=-\dfrac{3}{4}$

$\therefore \sin2\theta=2\sin\theta\cos\theta=-\dfrac{3}{4}$

11 $f(x)=\cos 2\theta-4\sin\theta+1$

$=(1-2\sin^2\theta)-4\sin\theta+1$

$=-2\sin^2\theta-4\sin\theta+2$

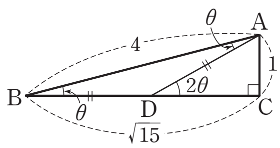
$=-2(\sin\theta+1)^2+4$

이때 $-1\le\sin\theta\le 1$이므로 주어진 함수는 $\sin\theta=-1$일 때 최댓값 4, $\sin\theta=1$일 때 최솟값 -4를 갖는다.

따라서 $M=4$, $m=-4$이므로

$Mm=-16$

12 오른쪽 그림에서



$\angle ABC=\theta$라 하면

$\sin\theta=\dfrac{1}{4}$이므로

$\overline{AC}=1$

삼각형 ABC에서

$\overline{BC}=\sqrt{\overline{AB}^2-\overline{AC}^2}=\sqrt{16-1}=\sqrt{15}$

$\therefore \tan\theta=\dfrac{\overline{AC}}{\overline{BC}}=\dfrac{1}{\sqrt{15}}$

이때 $\angle ADC=2\theta$이고, $\tan 2\theta=\dfrac{1}{\overline{CD}}$이므로

$\tan 2\theta=\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$에서

$\dfrac{1}{\overline{CD}}=\dfrac{\frac{2}{\sqrt{15}}}{1-\frac{1}{15}}=\dfrac{\sqrt{15}}{7}$ $\qquad\therefore \overline{CD}=\dfrac{7\sqrt{15}}{15}$

13 $\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$에서 $\cos\theta<0$이므로

$\cos\theta=-\sqrt{1-\sin^2\theta}=-\sqrt{1-\left(\dfrac{3}{5}\right)^2}=-\dfrac{4}{5}$

$\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$에서 $\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{\theta}{2}<\dfrac{\pi}{2}$이므로

$\sin\dfrac{\theta}{2}>0$, $\cos\dfrac{\theta}{2}>0$

$\sin^2\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1-\cos\theta}{2}=\dfrac{1-\left(-\frac{4}{5}\right)}{2}=\dfrac{9}{10}$

$\therefore \sin\dfrac{\theta}{2}=\sqrt{\dfrac{9}{10}}=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$

$\cos^2\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1+\cos\theta}{2}=\dfrac{1+\left(-\frac{4}{5}\right)}{2}=\dfrac{1}{10}$

$\therefore \cos\dfrac{\theta}{2}=\sqrt{\dfrac{1}{10}}=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$

$\therefore \sin\dfrac{\theta}{2}+\cos\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{2\sqrt{10}}{5}$

14 $\sec^2\theta=1+\tan^2\theta=1+(\sqrt{15})^2=16$이므로

$\cos^2\theta=\dfrac{1}{16}$ $\qquad\therefore \cos\theta=\dfrac{1}{4}\left(\because\ 0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$

$\therefore \sin^2\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1-\cos\theta}{2}=\dfrac{1-\frac{1}{4}}{2}=\dfrac{3}{8}$

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$에서 $0<\dfrac{\theta}{2}<\dfrac{\pi}{4}$이므로 $\sin\dfrac{\theta}{2}>0$

$\therefore \sin\dfrac{\theta}{2}=\sqrt{\dfrac{3}{8}}=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$

15 $\cos^2 x+\sin^2 2x=\dfrac{3}{2}$에서

$\dfrac{1+\cos 2x}{2}+1-\cos^2 2x=\dfrac{3}{2}$

$2\cos^2 2x-\cos 2x=0$, $\cos 2x(2\cos 2x-1)=0$

$\therefore \cos 2x=0$ 또는 $\cos 2x=\dfrac{1}{2}$

$0\le x\le\pi$에서 $0\le 2x\le 2\pi$이므로

(i) $\cos 2x=0$에서 $2x=\dfrac{\pi}{2}$ 또는 $2x=\dfrac{3}{2}\pi$

$\therefore x=\dfrac{\pi}{4}$ 또는 $x=\dfrac{3}{4}\pi$

(ii) $\cos 2x=\dfrac{1}{2}$에서 $2x=\dfrac{\pi}{3}$ 또는 $2x=\dfrac{5}{3}\pi$

$\therefore x=\dfrac{\pi}{6}$ 또는 $x=\dfrac{5}{6}\pi$

(i), (ii)에 의해 서로 다른 실근의 개수는 4이다.

16 가로의 길이, 세로의 길이, 높이가 각각 $\sin\dfrac{\theta}{2}$, $\cos\dfrac{\theta}{2}$, $\tan\dfrac{\theta}{2}$이므로

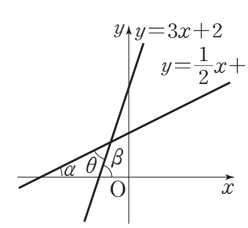
$\overline{AG}=\sqrt{\sin^2\dfrac{\theta}{2}+\cos^2\dfrac{\theta}{2}+\tan^2\dfrac{\theta}{2}}=\sqrt{1+\dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}$

따라서 $\sqrt{1+\dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}=\dfrac{4}{3}$이므로 양변을 제곱하여 정리하면

$\dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}=\dfrac{7}{9}$, $9-9\cos\theta=7+7\cos\theta$

$16\cos\theta=2$ $\qquad\therefore \cos\theta=\dfrac{1}{8}$

17 오른쪽 그림과 같이 두 직선 $y=\dfrac{1}{2}x+1$, $y=3x+2$가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α, β라 하면



$\tan\alpha=\dfrac{1}{2}$, $\tan\beta=3$

이때 $\theta=\beta-\alpha$이므로

$\tan\theta=\tan(\beta-\alpha)=\dfrac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha}$

$=\dfrac{3-\frac{1}{2}}{1+3\times\frac{1}{2}}=1$

유형편

18 두 직선 $mx-y+1=0$, $2x+y-3=0$, 즉 $y=mx+1$, $y=-2x+3$이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α, β라 하면 $\tan\alpha=m$, $\tan\beta=-2$

이때 두 직선이 이루는 예각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$이므로

$$\tan\frac{\pi}{4}=|\tan(\alpha-\beta)|=\left|\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\right|=1$$

$$\frac{m+2}{1-2m}=\pm1$$

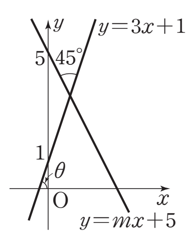
$m+2=1-2m$ 또는 $m+2=-1+2m$

$\therefore\ m=-\frac{1}{3}$ 또는 $m=3$

따라서 모든 m의 값의 곱은

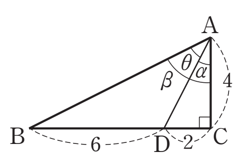
$$\left(-\frac{1}{3}\right)\times3=-1$$

19 직선 $y=3x+1$이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 θ라 하면 직선 $y=mx+5$가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기는 $\theta+45°$이므로



$$m=\tan(\theta+45°)=\frac{\tan\theta+\tan45°}{1-\tan\theta\tan45°}=\frac{3+1}{1-3\times1}=-2$$

20 오른쪽 그림에서 $\angle CAD=\alpha$, $\angle CAB=\beta$라 하면



$\tan\alpha=\frac{\overline{CD}}{\overline{AC}}=\frac{1}{2}$,

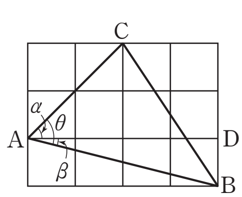
$\tan\beta=\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}=2$

이때 $\theta=\beta-\alpha$이므로

$\tan\theta=\tan(\beta-\alpha)$

$$=\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha}=\frac{2-\frac{1}{2}}{1+2\times\frac{1}{2}}=\frac{3}{4}$$

21 $\overline{AC}=2\sqrt{2}$, $\overline{AB}=\sqrt{17}$이므로 $\angle CAD=\alpha$, $\angle BAD=\beta$라 하면



$\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}$,

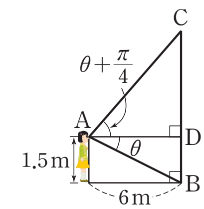
$\sin\beta=\frac{1}{\sqrt{17}}$, $\cos\beta=\frac{4}{\sqrt{17}}$

이때 $\theta=\alpha+\beta$이므로

$\sin\theta=\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{4}{\sqrt{17}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{1}{\sqrt{17}}=\frac{5\sqrt{34}}{34}$$

22 사람의 눈이 있는 지점을 A, 건물의 밑부분과 꼭대기를 각각 B, C라 하고 점 A에서 건물에 내린 수선의 발을 D라 하자.



$\tan\theta=\frac{\overline{BD}}{\overline{AD}}=\frac{1.5}{6}=\frac{1}{4}$이므로

$$\tan\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan\theta+\tan\frac{\pi}{4}}{1-\tan\theta\tan\frac{\pi}{4}}=\frac{\frac{1}{4}+1}{1-\frac{1}{4}\times1}=\frac{5}{3}$$

이때 $\tan\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\overline{CD}}{\overline{AD}}=\frac{\overline{CD}}{6}$이므로

$\frac{\overline{CD}}{6}=\frac{5}{3}\qquad\therefore\ \overline{CD}=10$

따라서 건물의 높이는

$\overline{BD}+\overline{CD}=1.5+10=11.5\,(\text{m})$

23 $2\sqrt{3}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)-2\cos\theta$

$$=2\sqrt{3}\left(\sin\theta\cos\frac{\pi}{3}+\cos\theta\sin\frac{\pi}{3}\right)-2\cos\theta$$

$$=2\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}\sin\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\right)-2\cos\theta$$

$$=\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta$$

$$=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta+\frac{1}{2}\cos\theta\right)$$

$$=2\left(\sin\theta\cos\frac{\pi}{6}+\cos\theta\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

$$=2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)$$

따라서 $2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)=r\sin(\theta+\alpha)$이므로

$r=2$, $\alpha=\frac{\pi}{6}$

$\therefore\ r\sin\alpha=2\sin\frac{\pi}{6}=1$

24 $\sqrt{3}\sin\theta-\cos\theta=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta-\frac{1}{2}\cos\theta\right)$

$$=2\left(\sin\theta\cos\frac{\pi}{6}-\cos\theta\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

$$=2\sin\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$$

$\therefore\ \sin\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{4}$

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$에서 $-\frac{\pi}{6}<\theta-\frac{\pi}{6}<\frac{\pi}{3}$이므로

$\cos\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)>0$

$$\therefore\ \cos\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{1-\sin^2\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{15}}{4}$$

25 $y=4\sin x+3\cos x-1$

$=5\left(\sin x\times\frac{4}{5}+\cos x\times\frac{3}{5}\right)-1$

$=5(\sin x\cos\alpha+\cos x\sin\alpha)-1$

$=5\sin(x+\alpha)-1\ \left(단,\ \sin\alpha=\frac{3}{5},\ \cos\alpha=\frac{4}{5}\right)$

이때 $-1\le\sin(x+\alpha)\le1$이므로

$-6\le5\sin(x+\alpha)-1\le4$

따라서 $M=4$, $m=-6$이므로

$M+m=-2$

26 $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{\tan x-1}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{\frac{\sin x}{\cos x}-1}$

$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{\frac{\sin x-\cos x}{\cos x}}$

$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x(\sin x-\cos x)}{\sin x-\cos x}$

$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$

27 $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sec x-\tan x}{\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{1}{\cos x}-\frac{\sin x}{\cos x}}{\cos x}$

$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{1-\sin x}{\cos x}}{\cos x}$

$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\cos^2 x}$

$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{1-\sin^2 x}$

$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{(1-\sin x)(1+\sin x)}$

$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\sin x}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$

28 $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\cot^2 x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)^2}$

$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}}$

$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{(1-\sin x)\sin^2 x}{\cos^2 x}$

$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{(1-\sin x)\sin^2 x}{1-\sin^2 x}$

$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{(1-\sin x)\sin^2 x}{(1-\sin x)(1+\sin x)}$

$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 x}{1+\sin x}=\frac{1^2}{1+1}=\frac{1}{2}$

29 $\lim_{x\to0}\frac{\cos2x-1}{\cos x-1}=\lim_{x\to0}\frac{(2\cos^2 x-1)-1}{\cos x-1}$

$=\lim_{x\to0}\frac{2(\cos^2 x-1)}{\cos x-1}$

$=\lim_{x\to0}\frac{2(\cos x-1)(\cos x+1)}{\cos x-1}$

$=\lim_{x\to0}2(\cos x+1)$

$=2\times(1+1)=4$

30 ㄱ. $\lim_{x\to0}\frac{\sin2x+\sin3x}{4x}$

$=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin2x}{4x}+\frac{\sin3x}{4x}\right)$

$=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin2x}{2x}\times\frac{1}{2}+\frac{\sin3x}{3x}\times\frac{3}{4}\right)$

$=\frac{1}{2}+\frac{3}{4}=\frac{5}{4}$

ㄴ. $\lim_{x\to0}\frac{\tan2x}{\sin x}=\lim_{x\to0}\left(\frac{\tan2x}{2x}\times\frac{x}{\sin x}\times2\right)$

$=1\times1\times2=2$

ㄷ. $\lim_{x\to0}\frac{\sin(\tan x)}{\tan2x}$

$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{\sin(\tan x)}{\tan x}\times\frac{2x}{\tan2x}\times\frac{\tan x}{x}\times\frac{1}{2}\right\}$

$=1\times1\times1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

31 $\lim_{x\to0}\frac{\tan(x^2+3x)}{x^3+2x^2-3x}$

$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{\tan(x^2+3x)}{x^2+3x}\times\frac{x^2+3x}{x^3+2x^2-3x}\right\}$

$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{\tan(x^2+3x)}{x^2+3x}\times\frac{x+3}{x^2+2x-3}\right\}$

$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{\tan(x^2+3x)}{x^2+3x}\times\frac{x+3}{(x+3)(x-1)}\right\}$

$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{\tan(x^2+3x)}{x^2+3x}\times\frac{1}{x-1}\right\}$

$=1\times(-1)=-1$

32 $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos2x}{x^2}$

$=\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos2x)(1+\cos2x)}{x^2(1+\cos2x)}$

$=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos^2 2x}{x^2(1+\cos2x)}$

$=\lim_{x\to0}\frac{\sin^2 2x}{x^2(1+\cos2x)}$

$=\lim_{x\to0}\left\{\left(\frac{\sin2x}{2x}\right)^2\times\frac{4}{1+\cos2x}\right\}$

$=1^2\times2=2$

33 $\lim_{x\to0}\frac{\sin f(x)}{f(\tan x)}$

$=\lim_{x\to0}\frac{\sin(x^2-x)}{\tan^2 x-\tan x}$

$=\lim_{x\to0}\frac{\sin(x^2-x)}{\tan x(\tan x-1)}$

$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{\sin(x^2-x)}{x^2-x}\times\frac{x}{\tan x}\times\frac{x-1}{\tan x-1}\right\}$

$=1\times1\times1=1$

34 $\pi-x=t$로 놓으면 $x=\pi-t$이고, $x\to\pi$일 때 $t\to0$이므로

$\lim_{x\to\pi}\frac{\tan x}{\pi-x}=\lim_{t\to0}\frac{\tan(\pi-t)}{t}$

$=\lim_{t\to0}\frac{-\tan t}{t}=-1$

35 $x-\frac{\pi}{2}=t$로 놓으면 $x=\frac{\pi}{2}+t$이고, $x\to\frac{\pi}{2}$일 때 $t\to0$이므로

$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 x}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\cot x}=\lim_{t\to0}\frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}+t\right)}{t\cot\left(\frac{\pi}{2}+t\right)}$

$=\lim_{t\to0}\frac{\sin^2 t}{-t\tan t}$

$=-\lim_{t\to0}\left\{\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2\times\frac{t}{\tan t}\right\}$

$=-1^2\times1=-1$

36 $\frac{1}{x}=t$로 놓으면 $x=\frac{1}{t}$이고, $x\to\infty$일 때 $t\to0+$이므로

$\lim_{x\to\infty}\sin\left(\tan\frac{1}{x}\right)\csc\frac{1}{x}$

$=\lim_{t\to0+}\sin(\tan t)\csc t$

$=\lim_{t\to0+}\left\{\sin(\tan t)\times\frac{1}{\sin t}\right\}$

$=\lim_{t\to0+}\left\{\frac{\sin(\tan t)}{\tan t}\times\frac{\tan t}{t}\times\frac{t}{\sin t}\right\}$

$=1\times1\times1=1$

37 $\frac{1}{x-1}=t$로 놓으면 $x=\frac{1}{t}+1$이고, $x\to\infty$일 때 $t\to0+$이므로

$\lim_{x\to\infty}(x^2-1)\sin^2\frac{1}{x-1}$

$=\lim_{t\to0+}\left(\frac{1}{t^2}+\frac{2}{t}\right)\sin^2 t$

$=\lim_{t\to0+}\left\{(1+2t)\times\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2\right\}$

$=1\times1^2=1$

38 $\lim_{x\to0}bx\tan x=0$이고 극한값이 존재하므로

$\lim_{x\to0}(1-a\cos x)=0$

$1-a=0\qquad\therefore a=1$

이를 주어진 식의 좌변에 대입하면

$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{bx\tan x}$

$=\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{bx\tan x(1+\cos x)}$

$=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos^2 x}{bx\tan x(1+\cos x)}$

$=\lim_{x\to0}\frac{\sin^2 x}{bx\tan x(1+\cos x)}$

$=\lim_{x\to0}\left\{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\times\frac{x}{\tan x}\times\frac{1}{b(1+\cos x)}\right\}$

$=1^2\times1\times\frac{1}{2b}=\frac{1}{2b}$

따라서 $\frac{1}{2b}=2$이므로 $b=\frac{1}{4}$

$\therefore ab=\frac{1}{4}$

39 $\lim_{x\to0}\tan x\sin x=0$이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로

$\lim_{x\to0}(\sqrt{ax^2+b}-1)=0$

$\sqrt{b}-1=0\qquad\therefore b=1$

이를 주어진 식의 좌변에 대입하면

$\lim_{x\to0}\frac{\tan x\sin x}{\sqrt{ax^2+1}-1}=\lim_{x\to0}\frac{\tan x\sin x(\sqrt{ax^2+1}+1)}{(\sqrt{ax^2+1}-1)(\sqrt{ax^2+1}+1)}$

$=\lim_{x\to0}\frac{\tan x\sin x(\sqrt{ax^2+1}+1)}{ax^2}$

$=\lim_{x\to0}\left(\frac{\tan x}{x}\times\frac{\sin x}{x}\times\frac{\sqrt{ax^2+1}+1}{a}\right)$

$=1\times1\times\frac{2}{a}=\frac{2}{a}$

따라서 $\frac{2}{a}=4$이므로 $a=\frac{1}{2}$

$\therefore b-a=\frac{1}{2}$

40 $\lim_{x\to a}3\sin(x-a)=0$이고 극한값이 존재하므로

$\lim_{x\to a}(2^x-1)=0$

$2^a-1=0\qquad\therefore a=0$

이를 주어진 식의 좌변에 대입하면

$\lim_{x\to0}\frac{2^x-1}{3\sin x}=\frac{1}{3}\lim_{x\to0}\left(\frac{2^x-1}{x}\times\frac{x}{\sin x}\right)$

$=\frac{1}{3}\times\ln 2\times1=\frac{\ln 2}{3}$

따라서 $\frac{\ln 2}{3}=b\ln 2$이므로 $b=\frac{1}{3}$

$\therefore a+b=\frac{1}{3}$

41 $f(x)=ax+b\,(a\neq 0,\ a,\ b$는 상수$)$라 하면

$$\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}}\frac{ax+b}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}=1$$

$\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}}\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=0$이고 극한값이 존재하므로

$$\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}}(ax+b)=0$$

$$-\frac{\pi}{2}a+b=0 \qquad \therefore\ b=\frac{\pi}{2}a \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$$\therefore \lim_{x\to-\frac{\pi}{2}}\frac{ax+\frac{\pi}{2}a}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}=\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}}\frac{a\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}$$

이때 $x+\frac{\pi}{2}=t$로 놓으면

$x=t-\frac{\pi}{2}$이고, $x\to-\frac{\pi}{2}$일 때 $t\to 0$이므로

$$\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}}\frac{a\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}=\lim_{t\to 0}\frac{at}{\sin t}=a$$

$\therefore\ a=2$

이를 ㉠에 대입하면 $b=\pi$

따라서 $f(x)=2x+\pi$이므로 $f(-1)=\pi-2$

42 $\triangle$ABC에서 $\overline{AB}=2\tan\theta$

$\angle BAH=\angle ACB=\theta$이므로 $\triangle$ABH에서

$\overline{BH}=\overline{AB}\sin\theta=2\sin\theta\tan\theta$

$$\therefore \lim_{\theta\to 0+}\frac{\overline{BH}}{\theta^2}=\lim_{\theta\to 0+}\frac{2\sin\theta\tan\theta}{\theta^2}$$

$$=\lim_{\theta\to 0+}\left(2\times\frac{\sin\theta}{\theta}\times\frac{\tan\theta}{\theta}\right)$$

$$=2\times 1\times 1=2$$

43 $\triangle$POH에서 $\overline{OH}=4\cos\theta$, $\overline{PH}=4\sin\theta$이므로

$\overline{AH}=\overline{OA}-\overline{OH}=4-4\cos\theta=4(1-\cos\theta)$

$$\therefore \lim_{\theta\to 0+}\frac{\overline{AH}}{\theta\times\overline{PH}}=\lim_{\theta\to 0+}\frac{4(1-\cos\theta)}{\theta\times 4\sin\theta}$$

$$=\lim_{\theta\to 0+}\frac{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}{\theta\sin\theta\,(1+\cos\theta)}$$

$$=\lim_{\theta\to 0+}\frac{\sin^2\theta}{\theta\sin\theta\,(1+\cos\theta)}$$

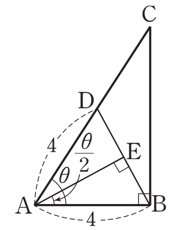
$$=\lim_{\theta\to 0+}\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\times\frac{1}{1+\cos\theta}\right)$$

$$=1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

44 $\triangle$ABC에서 $\overline{BC}=4\tan\theta$, $\overline{AC}=\frac{4}{\cos\theta}$이므로

$$\overline{CD}=\overline{AC}-\overline{AD}=\frac{4}{\cos\theta}-4$$

오른쪽 그림과 같이 점 A에서 $\overline{BD}$에 내린 수선의 발을 E라 하면



$\angle BAE=\frac{\theta}{2}$, $\overline{BE}=4\sin\frac{\theta}{2}$이므로

$\overline{BD}=2\times 4\sin\frac{\theta}{2}=8\sin\frac{\theta}{2}$

$\therefore\ f(\theta)=\overline{CD}+\overline{BC}+\overline{BD}$

$$=\frac{4}{\cos\theta}-4+4\tan\theta+8\sin\frac{\theta}{2}$$

$$\therefore \lim_{\theta\to 0+}\frac{f(\theta)}{\theta}$$

$$=\lim_{\theta\to 0+}\frac{\frac{4}{\cos\theta}-4+4\tan\theta+8\sin\frac{\theta}{2}}{\theta}$$

$$=\lim_{\theta\to 0+}\left\{\frac{4(1-\cos\theta)}{\theta\cos\theta}+\frac{4\tan\theta}{\theta}+\frac{8\sin\frac{\theta}{2}}{\theta}\right\}$$

$$=\lim_{\theta\to 0+}\left\{\frac{4(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}{\theta\cos\theta(1+\cos\theta)}+4\times\frac{\tan\theta}{\theta}+4\times\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}}\right\}$$

$$=\lim_{\theta\to 0+}\left\{\frac{4\sin^2\theta}{\theta^2\cos\theta(1+\cos\theta)}\times\theta+4\times\frac{\tan\theta}{\theta}+4\times\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}}\right\}$$

$$=\lim_{\theta\to 0+}\left\{\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^2\times\frac{4\theta}{\cos\theta\,(1+\cos\theta)}+4\times\frac{\tan\theta}{\theta}+4\times\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}}\right\}$$

$$=1^2\times 0+4\times 1+4\times 1=8$$

45 $f'(x)=(e^x)'(\sin x+\cos x)+e^x(\sin x+\cos x)'$

$$=e^x(\sin x+\cos x)+e^x(\cos x-\sin x)$$

$$=2e^x\cos x$$

$\therefore\ f'(0)=2\times 1\times 1=2$

46 $f'(x)=(e^x)'\cos x+e^x(\cos x)'$

$$=e^x\cos x-e^x\sin x=e^x(\cos x-\sin x)$$

$f'(a)=0$에서 $e^a(\cos a-\sin a)=0$

$\therefore\ \cos a=\sin a\ (\because\ e^a>0) \qquad \therefore\ \tan a=1$

$\therefore\ a=\frac{\pi}{4}\ \left(\because\ 0<a<\frac{\pi}{2}\right)$

47 $\lim_{h\to 0}\frac{f(\pi+2h)-f(\pi-h)}{h}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(\pi+2h)-f(\pi)+f(\pi)-f(\pi-h)}{h}$$

$$=2\lim_{h\to 0}\frac{f(\pi+2h)-f(\pi)}{2h}+\lim_{h\to 0}\frac{f(\pi-h)-f(\pi)}{-h}$$

$$=2f'(\pi)+f'(\pi)=3f'(\pi)$$

함수 $f(x)=x\sin x$를 미분하면

$f'(x)=\sin x+x\cos x$

$\therefore\ 3f'(\pi)=3(\sin\pi+\pi\cos\pi)=-3\pi$

48 $h(x)=f(x)g(x)$에서
$h'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$
이때 $f(x)=2\cos x+\sin x-x$에서
$f'(x)=-2\sin x+\cos x-1$이므로
$f(0)=2,\ f'(0)=0$

$$\begin{aligned}\therefore h'(0)&=f'(0)g(0)+f(0)g'(0)\\&=0\times g(0)+2\times g'(0)\\&=2g'(0)\end{aligned}$$

따라서 $2g'(0)=20$이므로
$g'(0)=10$

49
$$\begin{aligned}f(x)&=\lim_{h\to0}\frac{x\sin(x+h)-x\sin x}{h}\\&=x\lim_{h\to0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}\\&=x(\sin x)'\\&=x\cos x\end{aligned}$$
$\therefore f'(x)=\cos x-x\sin x$
$\therefore f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\cos\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}=-\frac{\pi}{2}$

50 $f(x)$가 모든 실수 x에서 미분가능하면 $x=0$에서도 미분가능하므로 $x=0$에서 연속이다.
$\lim_{x\to0+}(e^x\cos x+a)=\lim_{x\to0-}(bx+2)=f(0)$
$1+a=2 \qquad \therefore a=1$
또 $f'(0)$이 존재하므로
$f'(x)=\begin{cases}e^x(\cos x-\sin x) & (x>0)\\ b & (x<0)\end{cases}$에서
$\lim_{x\to0+}\{e^x(\cos x-\sin x)\}=\lim_{x\to0-}b$
$\therefore b=1$
$\therefore a+b=2$

51 $\sin^2 x=\sin x\sin x$이므로 $(\sin^2 x)'=2\cos x\sin x$
$\sin^3 x=\sin x\sin x\sin x$이므로 $(\sin^3 x)'=3\cos x\sin^2 x$
$\vdots$
$(\sin^n x)'=n\cos x\sin^{n-1}x$
$\therefore f_n'(x)=\cos x+2\cos x\sin x+3\cos x\sin^2 x+\cdots+n\cos x\sin^{n-1}x$
$$\begin{aligned}\therefore f'_{10}\left(\frac{\pi}{4}\right)-f'_9\left(\frac{\pi}{4}\right)&=10\times\cos\frac{\pi}{4}\times\sin^9\frac{\pi}{4}\\&=10\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{10}\\&=\frac{5}{16}\end{aligned}$$

01 여러 가지 미분법

기초 문제 Training

p.40

1 (1) $y'=-\frac{1}{(x-1)^2}$ (2) $y'=\frac{2}{(x+2)^2}$
(3) $y'=-\frac{4}{x^5}$ (4) $y'=\sec x(\sec x+\tan x)$

2 (1) $y'=8(2x+1)^3$ (2) $y'=5\cos(5x+3)$

3 (1) $y'=\frac{2x-1}{x^2-x-1}$ (2) $y'=\frac{4}{(4x-1)\ln 3}$

4 (1) $y'=\pi x^{\pi-1}$ (2) $y'=\frac{1}{2\sqrt{x-1}}$

5 (1) $\frac{dy}{dx}=-t$ (2) $\frac{dy}{dx}=\frac{t^2-1}{2t^3}$

6 (1) $\frac{dy}{dx}=\frac{x^2}{y^2}$ (단, $y\neq0$)
(2) $\frac{dy}{dx}=\frac{2x-y}{x+3}$ (단, $x\neq-3$)

7 (1) $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{3y^2+1}$
(2) $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{3\sqrt[3]{(x-2)^2}}$ (단, $x\neq2$)

8 (1) $y''=12x^2+10$ (2) $y''=-2\sin x-x\cos x$

핵심 유형 Training

p.41~46

1 ①	**2** 8	**3** 0	**4** -2	**5** ㄱ, ㄷ
6 $2\sqrt{3}-\frac{4}{3}$	**7** 1	**8** 4π	**9** 1	**10** ②
11 $-\frac{7}{25}$	**12** ③	**13** ⑤	**14** -8	**15** ③
16 ④	**17** $-\frac{1}{2}$	**18** $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$		**19** $-\frac{9}{\ln 2}$
20 ②	**21** ③	**22** $-\frac{1}{\pi^2}$		**23** ③
24 $\frac{5\sqrt{2}}{2}$	**25** π	**26** 1	**27** ①	**28** 1
29 $\frac{dy}{dx}=-\frac{2x+y}{x+2y}$ (단, $x+2y\neq0$)				**30** $-\frac{2}{\pi}$
31 ②	**32** -20	**33** ②	**34** ②	**35** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$
36 $\frac{1}{7}$	**37** $\frac{1}{e+1}$	**38** $\frac{1}{5}$	**39** ⑤	**40** $2+\ln 2$
41 3	**42** 5	**43** 2		

1 $f'(x)=\dfrac{(1+\sin x)'\cos x-(1+\sin x)(\cos x)'}{(\cos x)^2}$

$=\dfrac{\cos x\times\cos x-(1+\sin x)(-\sin x)}{\cos^2 x}$

$=\dfrac{\cos^2 x+\sin x+\sin^2 x}{\cos^2 x}$

$=\dfrac{1+\sin x}{1-\sin^2 x}$

$=\dfrac{1+\sin x}{(1+\sin x)(1-\sin x)}$

$=\dfrac{1}{1-\sin x}$

$\therefore f'\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{2}}=2$

2 $f'(x)=\dfrac{(ax+b)'(x^2+x+1)-(ax+b)(x^2+x+1)'}{(x^2+x+1)^2}$

$=\dfrac{a(x^2+x+1)-(ax+b)(2x+1)}{(x^2+x+1)^2}$

$=\dfrac{-ax^2-2bx+a-b}{(x^2+x+1)^2}$

$f'(-1)=3$에서 $\dfrac{-a+2b+a-b}{(1-1+1)^2}=3$

$\therefore b=3$ …… ㉠

$f'(0)=2$에서

$a-b=2$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $a=5$

$\therefore a+b=8$

3 $\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=f'(1)$

이때 $f(x)=\dfrac{x^2+1}{e^x}$에서

$f'(x)=\dfrac{(x^2+1)'e^x-(x^2+1)(e^x)'}{(e^x)^2}$

$=\dfrac{2xe^x-(x^2+1)e^x}{e^{2x}}$

$=\dfrac{-(x^2-2x+1)e^x}{e^{2x}}$

$=-\dfrac{(x-1)^2}{e^x}$

$\therefore f'(1)=0$

4 $g'(x)=-\dfrac{\{xf(x)+1\}'}{\{xf(x)+1\}^2}$

$=-\dfrac{f(x)+xf'(x)}{\{xf(x)+1\}^2}$

$\therefore g'(0)=-\dfrac{f(0)}{(0+1)^2}$

$=-f(0)=-2$

5 ㄱ. $f'(x)=\sec^2 x$에서 $f'(0)=1$이므로 $x=0$에서의 미분계수가 존재한다.

ㄴ. $g'(x)=\csc x-x\csc x\cot x$는 $x=0$에서 정의되지 않으므로 $g'(0)$이 존재하지 않는다.

ㄷ. $h'(x)=\sec x+x\sec x\tan x$에서 $h'(0)=1$이므로 $x=0$에서의 미분계수가 존재한다.

따라서 $x=0$에서의 미분계수가 존재하는 것은 ㄱ, ㄷ이다.

6 $f'(x)=\sec x\tan x-\csc^2 x$

따라서 점 $\left(\dfrac{\pi}{3}, f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\right)$에서의 접선의 기울기는

$f'\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\sec\dfrac{\pi}{3}\tan\dfrac{\pi}{3}-\csc^2\dfrac{\pi}{3}$

$=2\times\sqrt{3}-\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^2$

$=2\sqrt{3}-\dfrac{4}{3}$

7 $\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(-h)}{2h}$

$\displaystyle=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)+f(0)-f(-h)}{2h}$

$\displaystyle=\frac{1}{2}\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h}+\frac{1}{2}\lim_{h\to0}\frac{f(-h)-f(0)}{-h}$

$=\dfrac{1}{2}f'(0)+\dfrac{1}{2}f'(0)$

$=f'(0)$

이때 $f'(x)=\dfrac{\cos x\,(1+\tan x)-\sin x\sec^2 x}{(1+\tan x)^2}$이므로

$f'(0)=\dfrac{1\times1-0\times1^2}{(1+0)^2}=1$

8 $f'(x)=\sec x\tan x\csc x+\sec x\,(-\csc x\cot x)$

$=\sec^2 x-\csc^2 x$

$f'(a)=0$에서

$\sec^2 a=\csc^2 a$, $\dfrac{1}{\cos^2 a}=\dfrac{1}{\sin^2 a}$

따라서 $\cos^2 a=\sin^2 a$에서

$\cos a=\sin a$ 또는 $\cos a=-\sin a$

(i) $\cos a=\sin a$에서

$a=\dfrac{\pi}{4}$ 또는 $a=\dfrac{5}{4}\pi$ ($\because 0<a<2\pi$)

(ii) $\cos a=-\sin a$에서

$a=\dfrac{3}{4}\pi$ 또는 $a=\dfrac{7}{4}\pi$ ($\because 0<a<2\pi$)

(i), (ii)에 의해 구하는 모든 a의 값의 합은

$\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{3}{4}\pi+\dfrac{5}{4}\pi+\dfrac{7}{4}\pi=4\pi$

9 $f'(x)=3\left(\frac{2x+a}{x+1}\right)^2\left(\frac{2x+a}{x+1}\right)'$

$=3\left(\frac{2x+a}{x+1}\right)^2\times\frac{2(x+1)-(2x+a)}{(x+1)^2}$

$=\frac{3(2x+a)^2(2-a)}{(x+1)^4}$

이때 $f'(0)=3$이므로

$3a^2(2-a)=3$, $a^3-2a^2+1=0$

$(a-1)(a^2-a-1)=0$

$\therefore a=1$ ($\because a$는 정수)

10 $f'(x)=3^{\cos x}\ln 3(\cos x)'$

$=-3^{\cos x}\ln 3\times\sin x$

$\therefore f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-3^{\cos\frac{\pi}{2}}\ln 3\times\sin\frac{\pi}{2}=-\ln 3$

11 $h(x)=(f\circ g)(x)=f(g(x))$이므로

$h'(x)=f'(g(x))g'(x)$

$\therefore h'(0)=f'(g(0))g'(0)$

$f'(x)=\frac{x^2+1-(x+1)\times 2x}{(x^2+1)^2}$

$=\frac{-x^2-2x+1}{(x^2+1)^2}$

이고 $g(0)=3$이므로

$f'(g(0))=f'(3)=-\frac{7}{50}$

또 $g'(x)=2x+2$이므로

$g'(0)=2$

$\therefore h'(0)=-\frac{7}{50}\times 2=-\frac{7}{25}$

12 $f(x)=e^x+e^{2x}+e^{3x}+\cdots+e^{10x}$이라 하면

$f(0)=10$이므로

$\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{2x}+e^{3x}+\cdots+e^{10x}-10}{x}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$

$=f'(0)$

이때 $f'(x)=e^x+2e^{2x}+3e^{3x}+\cdots+10e^{10x}$이므로

$f'(0)=1+2+3+\cdots+10=\frac{10\times 11}{2}=55$

13 $y'=3\{xf(x)\}^2\times\{xf(x)\}'$

$=3\{xf(x)\}^2\{f(x)+xf'(x)\}$

따라서 $x=3$에서의 미분계수는

$3\{3f(3)\}^2\times\{f(3)+3f'(3)\}$

$=3\times 3^2\times(1+9)$

$=270$

14 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{x}=-2$에서 $\lim_{x\to 0}x=0$이고 극한값이 존재하므로

$\lim_{x\to 0}\{f(x)-1\}=0 \qquad \therefore f(0)=1$

$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)=-2$

또 $\lim_{x\to 1}\frac{g(x)-3}{x-1}=4$에서 $\lim_{x\to 1}(x-1)=0$이고 극한값이 존재하므로

$\lim_{x\to 1}\{g(x)-3\}=0 \qquad \therefore g(1)=3$

$\therefore \lim_{x\to 1}\frac{g(x)-3}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=g'(1)=4$

이때 $y=(g\circ f)(x)=g(f(x))$에서

$y'=g'(f(x))f'(x)$이므로 $x=0$에서의 미분계수는

$g'(f(0))f'(0)=g'(1)f'(0)=4\times(-2)=-8$

15 $h(x)=f(g(x))$라 하면

$h(1)=f(g(1))=f(1)=-2$

$\therefore \lim_{x\to 1}\frac{f(g(x))+2}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{h(x)-h(1)}{x-1}=h'(1)$

이때 $h'(x)=f'(g(x))g'(x)$이므로

$h'(1)=f'(g(1))g'(1)$

$=f'(1)g'(1)=4\times 3=12$

16 $f'(x)=\frac{(2^x-1)'}{(2^x-1)\ln 3}=\frac{2^x\ln 2}{(2^x-1)\ln 3}$

$\therefore f'(1)=\frac{2\ln 2}{\ln 3}$

17 $f'(x)=\frac{(x^4+ax^2-2)'}{x^4+ax^2-2}=\frac{4x^3+2ax}{x^4+ax^2-2}$

이때 $f'(-1)=2$이므로

$\frac{-4-2a}{a-1}=2$, $-2a-4=2a-2$

$4a=-2 \qquad \therefore a=-\frac{1}{2}$

18 $f(x)=\ln\sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}=\frac{1}{2}\ln\frac{1+\cos x}{1-\cos x}$

$=\frac{1}{2}\{\ln(1+\cos x)-\ln(1-\cos x)\}$

$\therefore f'(x)=\frac{1}{2}\left\{\frac{(1+\cos x)'}{1+\cos x}-\frac{(1-\cos x)'}{1-\cos x}\right\}$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{-\sin x}{1+\cos x}-\frac{\sin x}{1-\cos x}\right)$

$=\frac{-\sin x(1-\cos x)-\sin x(1+\cos x)}{2(1-\cos^2 x)}$

$=\frac{-2\sin x}{2\sin^2 x}=-\frac{1}{\sin x}$

$\therefore f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{2\sqrt{3}}{3}$

19 $\lim_{h\to0}\frac{f(2h)-f(-h)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(2h)-f(0)+f(0)-f(-h)}{h}$

$=2\lim_{h\to0}\frac{f(2h)-f(0)}{2h}+\lim_{h\to0}\frac{f(-h)-f(0)}{-h}$

$=2f'(0)+f'(0)=3f'(0)$

이때 $f(x)=\log_2|e^{3x}-2|$에서

$f'(x)=\frac{(e^{3x}-2)'}{(e^{3x}-2)\ln2}=\frac{3e^{3x}}{(e^{3x}-2)\ln2}$

$\therefore\ 3f'(0)=3\times\left(-\frac{3}{\ln2}\right)=-\frac{9}{\ln2}$

20 주어진 식의 양변에 자연로그를 취하면

$\ln f(x)=x\ln x$

양변을 x에 대하여 미분하면

$\frac{f'(x)}{f(x)}=\ln x+1$

$\therefore\ f'(x)=f(x)\times(\ln x+1)$

$=x^x(\ln x+1)$

$\therefore\ f'(1)=1$

21 주어진 식의 양변의 절댓값에 자연로그를 취하면

$\ln|f(x)|=4\ln|x|+3\ln|x-1|-2\ln|x-2|$
$-\ln|x-3|$

양변을 x에 대하여 미분하면

$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{4}{x}+\frac{3}{x-1}-\frac{2}{x-2}-\frac{1}{x-3}$

$\therefore\ \lim_{x\to4}\frac{f'(x)}{f(x)}=\lim_{x\to4}\left(\frac{4}{x}+\frac{3}{x-1}-\frac{2}{x-2}-\frac{1}{x-3}\right)$

$=1+1-1-1=0$

22 $f(\pi)=\frac{1}{\pi}$이므로

$\lim_{x\to\pi}\frac{f(x)-\frac{1}{\pi}}{x-\pi}=\lim_{x\to\pi}\frac{f(x)-f(\pi)}{x-\pi}=f'(\pi)$

$f(x)=x^{\cos x}$의 양변에 자연로그를 취하면

$\ln f(x)=\ln x^{\cos x}=\cos x\ln x$

양변을 x에 대하여 미분하면

$\frac{f'(x)}{f(x)}=-\sin x\ln x+\frac{\cos x}{x}$

$\therefore\ f'(x)=f(x)\times\left(-\sin x\ln x+\frac{\cos x}{x}\right)$

$=x^{\cos x}\left(-\sin x\ln x+\frac{\cos x}{x}\right)$

$\therefore\ f'(\pi)=\pi^{\cos\pi}\left(-\sin\pi\ln\pi+\frac{1}{\pi}\cos\pi\right)$

$=-\frac{1}{\pi^2}$

23 $f(x)=\sqrt{x^4+2x^2+2}=(x^4+2x^2+2)^{\frac{1}{2}}$이므로

$f'(x)=\frac{1}{2}(x^4+2x^2+2)^{-\frac{1}{2}}(x^4+2x^2+2)'$

$=\frac{2x^3+2x}{\sqrt{x^4+2x^2+2}}$

따라서 $f'(-1)=\frac{-4}{\sqrt5}=a$, $f'(1)=\frac{4}{\sqrt5}=b$이므로

$ab=\frac{-4}{\sqrt5}\times\frac{4}{\sqrt5}=-\frac{16}{5}$

24 $f'(x)=5(x+\sqrt{x^2-2})^4(x+\sqrt{x^2-2})'$

$=5(x+\sqrt{x^2-2})^4\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2-2}}\right)$

$=5(x+\sqrt{x^2-2})^4\times\frac{x+\sqrt{x^2-2}}{\sqrt{x^2-2}}$

$=\frac{5(x+\sqrt{x^2-2})^5}{\sqrt{x^2-2}}$

따라서 $g(x)=\frac{5}{\sqrt{x^2-2}}$이므로

$g(2)=\frac{5}{\sqrt{4-2}}=\frac{5\sqrt2}{2}$

25 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-\cos x}}=(1-\cos x)^{-\frac{1}{2}}$이므로

$f'(x)=-\frac{1}{2}(1-\cos x)^{-\frac{3}{2}}(1-\cos x)'$

$=-\frac{\sin x}{2\sqrt{(1-\cos x)^3}}$

이때 $f'(a)=0$이므로

$-\frac{\sin a}{2\sqrt{(1-\cos a)^3}}=0$, $\sin a=0$

$\therefore\ a=\pi$ ($\because\ 0<a<2\pi$)

26 $\frac{dx}{dt}=e^t\cos t-e^t\sin t=e^t(\cos t-\sin t)$

$\frac{dy}{dt}=e^t\sin t+e^t\cos t=e^t(\sin t+\cos t)$

$\therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$

$=\frac{e^t(\sin t+\cos t)}{e^t(\cos t-\sin t)}$

$=\frac{\sin t+\cos t}{\cos t-\sin t}$

따라서 $t=0$일 때, $\frac{dy}{dx}$의 값은

$\frac{0+1}{1-0}=1$

유형편

27 $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{-1\times(1+t)-(1-t)\times 1}{(1+t)^2}=-\dfrac{2}{(1+t)^2}$

$\dfrac{dy}{dt}=-\dfrac{1}{(2+t)^2}$

$\therefore\ \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}=\dfrac{-\dfrac{1}{(2+t)^2}}{-\dfrac{2}{(1+t)^2}}=\dfrac{(1+t)^2}{2(2+t)^2}$

$\therefore\ \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{dy}{dx}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{(1+t)^2}{2(2+t)^2}=\dfrac{1}{8}$

28 $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1}{2\sqrt{t}},\ \dfrac{dy}{dt}=2t+a$

$\therefore\ \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}=\dfrac{2t+a}{\dfrac{1}{2\sqrt{t}}}=2\sqrt{t}(2t+a)$

$t=1$에 대응하는 점에서의 접선의 기울기가 6이므로

$2(2+a)=6$

$\therefore\ a=1$

29 주어진 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$2x+y+x\dfrac{dy}{dx}+2y\dfrac{dy}{dx}=0$

$(x+2y)\dfrac{dy}{dx}=-(2x+y)$

$\therefore\ \dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{2x+y}{x+2y}$ (단, $x+2y\neq 0$)

30 주어진 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$1-\sin x-y-x\dfrac{dy}{dx}=0$

$\therefore\ \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1-\sin x-y}{x}$ (단, $x\neq 0$)

위의 식에 $x=\dfrac{\pi}{2},\ y=1$을 대입하면

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1-\sin\dfrac{\pi}{2}-1}{\dfrac{\pi}{2}}=-\dfrac{2}{\pi}$

31 주어진 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+\dfrac{1}{2\sqrt{y}}\dfrac{dy}{dx}=0$

$\therefore\ \dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$ (단, $x\neq 0$)

한편 $x=4$를 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=6$에 대입하면

$2+\sqrt{y}=6,\ \sqrt{y}=4 \qquad \therefore\ y=16$

따라서 점 $(4,\ 16)$에서의 접선의 기울기는

$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{\sqrt{16}}{\sqrt{4}}=-2$

32 점 $(1,\ 1)$이 곡선 $5x^2+3y^2+axy+b=0$ 위의 점이므로

$5+3+a+b=0$

$\therefore\ a+b=-8$ …… ㉠

$5x^2+3y^2+axy+b=0$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$10x+6y\dfrac{dy}{dx}+ay+ax\dfrac{dy}{dx}=0$

$(ax+6y)\dfrac{dy}{dx}=-10x-ay$

$\therefore\ \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{-10x-ay}{ax+6y}$

점 $(1,\ 1)$에서의 접선의 기울기가 $-\dfrac{3}{2}$이므로

$\dfrac{-10-a}{a+6}=-\dfrac{3}{2},\ 20+2a=3a+18$

$\therefore\ a=2$

이를 ㉠에 대입하면 $b=-10$

$\therefore\ ab=-20$

33 주어진 식의 양변을 y에 대하여 미분하면

$\dfrac{dx}{dy}=\sqrt{y+1}+\dfrac{y}{2\sqrt{y+1}}=\dfrac{3y+2}{2\sqrt{y+1}}$

$\therefore\ \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\dfrac{dx}{dy}}=\dfrac{2\sqrt{y+1}}{3y+2}$

34 주어진 식의 양변을 y에 대하여 미분하면

$\dfrac{dx}{dy}=-\dfrac{3y^2+1}{(y^3+y)^2}$

$\therefore\ \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\dfrac{dx}{dy}}=-\dfrac{(y^3+y)^2}{3y^2+1}$

따라서 $y=1$에서의 $\dfrac{dy}{dx}$의 값은

$-\dfrac{4}{4}=-1$

35 주어진 식의 양변을 y에 대하여 미분하면

$\dfrac{dx}{dy}=\cos y$

$\therefore\ \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\dfrac{dx}{dy}}=\dfrac{1}{\cos y}$

$x=\sin y$에서 $x=\dfrac{1}{2}$일 때

$\dfrac{1}{2}=\sin y \qquad \therefore\ y=\dfrac{\pi}{6}\ \left(\because\ 0<y<\dfrac{\pi}{2}\right)$

따라서 $x=\dfrac{1}{2}$인 점에서의 접선의 기울기는

$\dfrac{1}{\cos\dfrac{\pi}{6}}=\dfrac{1}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

36 $g(1)=a$라 하면 $f(a)=1$이므로
$a^3+4a+6=1$, $a^3+4a+5=0$
$(a+1)(a^2-a+5)=0$
$\therefore a=-1$
$\therefore g(1)=-1$
이때 $f'(x)=3x^2+4$이므로
$f'(-1)=7$
$\therefore g'(1)=\dfrac{1}{f'(g(1))}=\dfrac{1}{f'(-1)}=\dfrac{1}{7}$

37 $(g\circ f)(x)=x$이므로 $g(x)=f^{-1}(x)$
$g(e)=a$라 하면 $f(a)=e$이므로
$e^a+\ln a=e$
$\therefore a=1$
$\therefore g(e)=1$
이때 $f'(x)=e^x+\dfrac{1}{x}$이므로
$f'(1)=e+1$
$\therefore g'(e)=\dfrac{1}{f'(g(e))}=\dfrac{1}{f'(1)}=\dfrac{1}{e+1}$

38 $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{f(x)-4}{x-1}=5$에서 $\displaystyle\lim_{x\to1}(x-1)=0$이고 극한값이 존재하므로
$\displaystyle\lim_{x\to1}\{f(x)-4\}=0$ $\therefore f(1)=4$
$\therefore g(4)=1$
또 $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{f(x)-4}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$이므로
$f'(1)=5$
$\therefore g'(4)=\dfrac{1}{f'(g(4))}=\dfrac{1}{f'(1)}=\dfrac{1}{5}$

39 $\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{g(1+h)-g(1-h)}{h}$
$\displaystyle=\lim_{h\to0}\frac{g(1+h)-g(1)+g(1)-g(1-h)}{h}$
$\displaystyle=\lim_{h\to0}\frac{g(1+h)-g(1)}{h}+\lim_{h\to0}\frac{g(1-h)-g(1)}{-h}$
$=g'(1)+g'(1)=2g'(1)$
$g(1)=a$라 하면 $f(a)=1$이므로
$e^{a-2}=1$, $a-2=0$
$\therefore a=2$
$\therefore g(1)=2$
이때 $f'(x)=e^{x-2}$이므로
$f'(2)=1$
$\therefore 2g'(1)=2\times\dfrac{1}{f'(g(1))}=2\times\dfrac{1}{f'(2)}=2$

40 $f'(x)=e^{ax+b}+x\times a\times e^{ax+b}=(1+ax)e^{ax+b}$
$f''(x)=a\times e^{ax+b}+(1+ax)\times a\times e^{ax+b}$
$=a(2+ax)e^{ax+b}$
이때 $f'(0)=2e$이므로
$f'(0)=e^b=2e$
$\therefore b=\ln 2e=1+\ln 2$ …… ㉠
$f''(0)=4e$이므로 $f''(0)=2ae^b=4e$
위의 식에 ㉠을 대입하면
$2a\times2e=4e$, $4ae=4e$
$\therefore a=1$
$\therefore a+b=2+\ln 2$

41 $f'(x)=2x\ln x+x^2\times\dfrac{1}{x}=2x\ln x+x$이므로
$f'(1)=1$
$\displaystyle\therefore \lim_{x\to1}\frac{f'(x)-1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f'(x)-f'(1)}{x-1}=f''(1)$
이때 $f''(x)=2\ln x+2x\times\dfrac{1}{x}+1=2\ln x+3$이므로
$f''(1)=3$

42 $y'=2e^{2x}\sin x+e^{2x}\cos x=e^{2x}(2\sin x+\cos x)$
$y''=2e^{2x}(2\sin x+\cos x)+e^{2x}(2\cos x-\sin x)$
$=e^{2x}(3\sin x+4\cos x)$
$y''-4y'+ky=0$에서
$e^{2x}(3\sin x+4\cos x)-4e^{2x}(2\sin x+\cos x)$
$+ke^{2x}\sin x=0$
$(k-5)e^{2x}\sin x=0$
위의 등식이 x의 값에 관계없이 항상 성립하므로
$k-5=0$ $\therefore k=5$

43 조건 (나)에 의해 $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{f'(f(x))-4}{x-1}=6$에서 $\displaystyle\lim_{x\to1}(x-1)=0$이고 극한값이 존재하므로
$\displaystyle\lim_{x\to1}\{f'(f(x))-4\}=0$
$\therefore f'(f(1))=4$
$\displaystyle\therefore \lim_{x\to1}\frac{f'(f(x))-4}{x-1}$
$\displaystyle=\lim_{x\to1}\left\{\frac{f'(f(x))-f'(f(1))}{f(x)-f(1)}\times\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\right\}$
$=f''(f(1))f'(1)$
$=f''(2)\times3$
$=3f''(2)$
따라서 $3f''(2)=6$이므로
$f''(2)=2$

유형편

Ⅱ-3. 도함수의 활용

01 접선의 방정식과 함수의 그래프

기초 문제 Training

p.48

1 (1) $\mathbf{\frac{3}{2}}$　　(2) $\boldsymbol{e^3}$

(3) $\mathbf{\frac{1}{\ln 10}}$　　(4) **2**

2 (1) $\boldsymbol{y=-2x+4}$

(2) $\boldsymbol{y=\frac{2}{3}x+\frac{5}{3}}$

(3) $\boldsymbol{y=x}$

(4) $\boldsymbol{y=\frac{1}{e}x}$

3 (1) $\boldsymbol{\left(\frac{\pi}{4},\ 0\right)}$

(2) $\boldsymbol{y=-2x+\frac{\pi}{2}}$

4 (1) **극댓값: 없다., 극솟값:** $\boldsymbol{-\frac{1}{e}}$

(2) **극댓값:** $\boldsymbol{\frac{2}{3}\pi+\sqrt{3}}$**, 극솟값: 없다.**

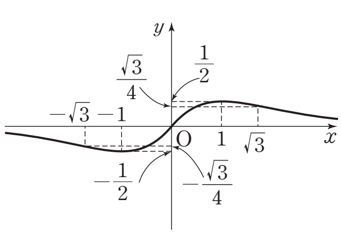
5 (1) $\boldsymbol{x<\frac{2}{3}}$**에서 위로 볼록,** $\boldsymbol{x>\frac{2}{3}}$**에서 아래로 볼록**

(2) **위로 볼록**

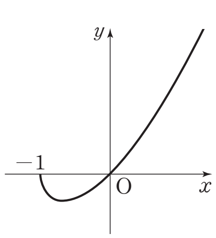
6 (1) $\boldsymbol{(0,\ -1),\ (1,\ 0)}$

(2) $\boldsymbol{\left(\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)}$

7 (1)



(2)



핵심 유형 Training

p.49~58

1 ⑤	**2** ⑤	**3** ⑤	**4** ⑤	**5** ④
6 $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	**7** ③	**8** ②	**9** $-\ln 2$	**10** 2
11 1	**12** $-\frac{1}{2}$	**13** ①	**14** $\frac{1}{2}$	**15** $-\frac{4}{3}$
16 $a>-1$		**17** 2	**18** ④	**19** ①
20 π	**21** $\ln 2$	**22** 3	**23** 9	**24** ⑤
25 $a\ge\frac{\sqrt{2}}{2}$	**26** ①	**27** $\frac{2}{3}$	**28** ④	**29** -2
30 1	**31** ㄷ	**32** $-e^{\pi}$	**33** 2	**34** 10
35 $-\frac{12}{e^3}$	**36** ④	**37** $\sqrt{3}$	**38** $0<a<4$	
39 0	**40** 3	**41** ③	**42** ③	**43** 1
44 $\frac{\pi}{2}$	**45** $\frac{1}{2}$	**46** 3	**47** ①	**48** ①
49 $\frac{2}{3}\pi$	**50** 7	**51** ③	**52** 3	**53** 5
54 ③	**55** ④	**56** ⑤	**57** ③	**58** ㄱ, ㄴ
59 $\frac{1}{30}$	**60** $4\sqrt{2}$	**61** e	**62** e	**63** 2π
64 1	**65** $3\sqrt{3}-\pi$		**66** 4	**67** $\frac{1}{e}$
68 1	**69** 96만 원			

1 $f(x)=\frac{2x-1}{x+2}$이라 하면

$f'(x)=\frac{2(x+2)-(2x-1)}{(x+2)^2}=\frac{5}{(x+2)^2}$

점 $(-1,\ -3)$에서의 접선의 기울기는

$f'(-1)=\frac{5}{(-1+2)^2}=5$

이므로 점 $(-1,\ -3)$에서의 접선의 방정식은

$y+3=5(x+1)$

$\therefore\ y=5x+2$

따라서 $a=5,\ b=2$이므로 $a+b=7$

2 $f(x)=\sqrt{4-2x}+2$라 하면

$f'(x)=\frac{-2}{2\sqrt{4-2x}}=-\frac{1}{\sqrt{4-2x}}$

점 $(0,\ 4)$에서의 접선의 기울기는

$f'(0)=-\frac{1}{\sqrt{4}}=-\frac{1}{2}$

이때 점 $(0,\ 4)$에서의 접선에 수직인 직선의 기울기는

$-\frac{1}{f'(0)}=2$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$y-4=2x$

$\therefore\ y=2x+4$

3 $f(x)=xe^x+1$이라 하면

$f'(x)=e^x+xe^x=(1+x)e^x$

점 $(0,\ 1)$에서의 접선의 기울기는 $f'(0)=1$이므로 점 $(0,\ 1)$에서의 접선의 방정식은

$y-1=x \qquad \therefore\ y=x+1$

이때 직선 $y=x+1$의 x절편은 -1, y절편은 1이므로 구하는 삼각형의 넓이는

$\frac{1}{2}\times1\times1=\frac{1}{2}$

4 $f(x)=\ln(x+3e)$라 하면

$f'(x)=\frac{1}{x+3e}$

x좌표가 $-2e$인 점에서의 접선의 기울기는 $f'(-2e)=\frac{1}{e}$

이때 $f(-2e)=1$이므로 점 $(-2e,\ 1)$에서의 접선의 방정식은

$y-1=\frac{1}{e}(x+2e) \qquad \therefore\ y=\frac{1}{e}x+3$

이 직선이 점 $(a,\ 4)$를 지나므로

$4=\frac{a}{e}+3 \qquad \therefore\ a=e$

5 $f(x)=ax+\cos x$라 하면

$f'(x)=a-\sin x$

곡선 $y=f(x)$가 점 $(\pi,\ b)$를 지나므로 $f(\pi)=b$에서

$a\pi-1=b$ ⋯⋯ ㉠

또 점 $(\pi,\ b)$에서의 접선의 기울기가 -1이므로

$f'(\pi)=-1$에서 $a=-1$

이를 ㉠에 대입하면 $b=-\pi-1$

$\therefore\ a-b=\pi$

6 $x=3\sec t$, $y=2\tan t$를 각각 t에 대하여 미분하면

$\frac{dx}{dt}=3\sec t\tan t,\ \frac{dy}{dt}=2\sec^2 t$

$\therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{2\sec^2 t}{3\sec t\tan t}=\frac{2}{3\sin t}$

이때 $3\sec t=6$, $2\tan t=2\sqrt{3}$에서 $\sec t=2$, $\tan t=\sqrt{3}$

$\therefore\ t=\frac{\pi}{3}\ \left(\because\ 0<t<\frac{\pi}{2}\right)$

$t=\frac{\pi}{3}$일 때 $\frac{dy}{dx}=\frac{2}{3\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{4\sqrt{3}}{9}$

따라서 점 $(6,\ 2\sqrt{3})$에서의 접선의 방정식은

$y-2\sqrt{3}=\frac{4\sqrt{3}}{9}(x-6) \qquad \therefore\ y=\frac{4\sqrt{3}}{9}x-\frac{2\sqrt{3}}{3}$

따라서 구하는 y절편은 $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$이다.

7 $x+\sin y-xy=0$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$1+\cos y\frac{dy}{dx}-y-x\frac{dy}{dx}=0$

$(\cos y-x)\frac{dy}{dx}=y-1$

$\therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{y-1}{\cos y-x}$ (단, $\cos y\neq x$)

점 $(0,\ \pi)$에서의 접선의 기울기는

$\frac{dy}{dx}=\frac{\pi-1}{\cos\pi-0}=-\pi+1$

따라서 점 $(0,\ \pi)$에서의 접선의 방정식은

$y-\pi=(-\pi+1)x$

$\therefore\ y=(-\pi+1)x+\pi$

이 직선이 점 $(1,\ a)$를 지나므로

$a=-\pi+1+\pi$

$\therefore\ a=1$

8 $f(x)=e^{2x}$이라 하면

$f'(x)=2e^{2x}$

접점의 좌표를 $(t,\ e^{2t})$이라 하면 직선 $2x-y+3=0$, 즉 $y=2x+3$에 평행한 직선의 기울기는 2이므로

$f'(t)=2$에서

$2e^{2t}=2 \qquad \therefore\ t=0$

따라서 접점의 좌표는 $(0,\ 1)$이므로 접선의 방정식은

$y-1=2x$

$\therefore\ y=2x+1$

따라서 구하는 x절편은 $-\frac{1}{2}$이다.

9 $f(x)=\ln(x+1)+1$이라 하면

$f'(x)=\frac{1}{x+1}$

접점의 좌표를 $(t,\ \ln(t+1)+1)$이라 하면 직선 $y=-\frac{1}{2}x+1$에 수직인 직선의 기울기는 2이므로

$f'(t)=2$에서

$\frac{1}{t+1}=2 \qquad \therefore\ t=-\frac{1}{2}$

따라서 접점의 좌표는 $\left(-\frac{1}{2},\ -\ln 2+1\right)$이므로 접선의 방정식은

$y-(-\ln 2+1)=2\left\{x-\left(-\frac{1}{2}\right)\right\}$

$\therefore\ y=2x+2-\ln 2$

이 직선이 점 $(-1,\ a)$를 지나므로

$a=-2+2-\ln 2$

$\therefore\ a=-\ln 2$

10 $f(x)=3x+\sin x$라 하면

$f'(x)=3+\cos x$

접점의 좌표를 $(t,\ 3t+\sin t)$라 하면 접선의 기울기가 3이므로 $f'(t)=3$에서

$3+\cos t=3$, $\cos t=0$

$\therefore\ t=\dfrac{\pi}{2}$ 또는 $t=\dfrac{3}{2}\pi$ ($\because\ 0\le t\le 2\pi$)

따라서 접점의 좌표는 $\left(\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3}{2}\pi+1\right)$ 또는 $\left(\dfrac{3}{2}\pi,\ \dfrac{9}{2}\pi-1\right)$이므로 구하는 접선의 방정식은

$y-\left(\dfrac{3}{2}\pi+1\right)=3\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)$

또는 $y-\left(\dfrac{9}{2}\pi-1\right)=3\left(x-\dfrac{3}{2}\pi\right)$

$\therefore\ y=3x+1$ 또는 $y=3x-1$

따라서 $a=1$, $b=-1$이므로

$a-b=1-(-1)=2$

11 $f(x)=e^x$, $g(x)=\sqrt{2x+a}$라 하면

$f'(x)=e^x$, $g'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2x+a}}$

두 곡선이 $x=t$인 점에서 접한다고 하면 두 곡선이 $x=t$인 점에서 만나므로 $f(t)=g(t)$에서

$e^t=\sqrt{2t+a}$ …… ㉠

또 $x=t$인 점에서의 접선의 기울기가 같으므로

$f'(t)=g'(t)$에서

$e^t=\dfrac{1}{\sqrt{2t+a}}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$\sqrt{2t+a}=\dfrac{1}{\sqrt{2t+a}}$, $(\sqrt{2t+a})^2=1$

이때 $\sqrt{2t+a}\ge 0$이므로 $\sqrt{2t+a}=1$ …… ㉢

㉢을 ㉠에 대입하면 $e^t=1$ $\quad\therefore\ t=0$

이를 ㉢에 대입하여 풀면 $a=1$

12 $f(x)=\sqrt{x^2+1}$이라 하면

$f'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

접점의 좌표를 $(t,\ \sqrt{t^2+1})$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=\dfrac{t}{\sqrt{t^2+1}}$이므로 접선의 방정식은

$y-\sqrt{t^2+1}=\dfrac{t}{\sqrt{t^2+1}}(x-t)$

$\therefore\ y=\dfrac{t}{\sqrt{t^2+1}}x-\dfrac{t^2}{\sqrt{t^2+1}}+\sqrt{t^2+1}$ …… ㉠

이 직선이 점 $(1,\ 0)$을 지나므로

$\dfrac{t}{\sqrt{t^2+1}}-\dfrac{t^2}{\sqrt{t^2+1}}+\sqrt{t^2+1}=0$

$\sqrt{t^2+1}\ne 0$이므로 양변에 $\sqrt{t^2+1}$을 곱하면

$t-t^2+t^2+1=0$

$\therefore\ t=-1$

이를 ㉠에 대입하여 접선의 방정식을 구하면

$y=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}x-\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\sqrt{2}$

$\therefore\ y=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}x+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

따라서 $a=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $b=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$이므로

$ab=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=-\dfrac{1}{2}$

13 $f(x)=e^{x+1}$이라 하면

$f'(x)=e^{x+1}$

접점의 좌표를 $(t,\ e^{t+1})$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=e^{t+1}$이므로 접선의 방정식은

$y-e^{t+1}=e^{t+1}(x-t)$

$\therefore\ y=e^{t+1}x+(1-t)e^{t+1}$ …… ㉠

이 직선이 원점을 지나므로

$0=(1-t)e^{t+1}$

$\therefore\ t=1$ ($\because\ e^{t+1}>0$)

이를 ㉠에 대입하여 접선의 방정식을 구하면

$y=e^2x$

이 직선이 점 $(-1,\ a)$를 지나므로

$a=-e^2$

14 $f(x)=x\ln x$라 하면

$f'(x)=\ln x+1$

접점의 좌표를 $(t,\ t\ln t)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=\ln t+1$이므로 접선의 방정식은

$y-t\ln t=(\ln t+1)(x-t)$

$\therefore\ y=(\ln t+1)x-t$ …… ㉠

이 직선이 점 $(0,\ -1)$을 지나므로

$-1=-t$

$\therefore\ t=1$

이를 ㉠에 대입하여 접선의 방정식을 구하면

$y=x-1$

이때 직선 $y=x-1$의 x절편은 1, y절편은 -1이므로 구하는 삼각형의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times 1\times 1=\dfrac{1}{2}$

15 $4x^2+y^2=4$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$8x+2y\dfrac{dy}{dx}=0$

$\therefore \dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{4x}{y}$ (단, $y\neq0$)

접점의 좌표를 (x_1, y_1)이라 하면 점 (x_1, y_1)에서의 접선의 기울기는 $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{4x_1}{y_1}$이므로 접선의 방정식은

$y-y_1=-\dfrac{4x_1}{y_1}(x-x_1)$

이 직선이 점 $(2, 0)$을 지나므로

$-y_1=-\dfrac{4x_1}{y_1}(2-x_1)$

$\therefore 4{x_1}^2+{y_1}^2-8x_1=0$ …… ㉠

이때 점 (x_1, y_1)은 곡선 $4x^2+y^2=4$ 위의 점이므로

$4{x_1}^2+{y_1}^2=4$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$4-8x_1=0 \qquad \therefore x_1=\dfrac{1}{2}$

이를 ㉠에 대입하면

$1+{y_1}^2-4=0 \qquad \therefore y_1=\pm\sqrt{3}$

따라서 점 $\left(\dfrac{1}{2}, \sqrt{3}\right)$에서의 접선의 기울기는 $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$,

점 $\left(\dfrac{1}{2}, -\sqrt{3}\right)$에서의 접선의 기울기는 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$이므로

두 접선의 기울기의 곱은

$-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\times\dfrac{2\sqrt{3}}{3}=-\dfrac{4}{3}$

16 $f(x)=\dfrac{x-1}{x}=1-\dfrac{1}{x}$이라 하면

$f'(x)=\dfrac{1}{x^2}$

접점의 좌표를 $\left(t, 1-\dfrac{1}{t}\right)$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=\dfrac{1}{t^2}$이므로 접선의 방정식은

$y-\left(1-\dfrac{1}{t}\right)=\dfrac{1}{t^2}(x-t)$

이 직선이 점 $(a, 2)$를 지나므로

$2-\left(1-\dfrac{1}{t}\right)=\dfrac{1}{t^2}(a-t)$

$t\neq0$이므로 양변에 t^2을 곱하여 정리하면

$t^2+2t-a=0$ …… ㉠

점 $(a, 2)$에서 곡선 $y=\dfrac{x-1}{x}$에 서로 다른 두 개의 접선을 그을 수 있으려면 이차방정식 ㉠이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 ㉠의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=1+a>0$

$\therefore a>-1$

17 $f(x)=xe^{x-1}$이라 하면

$f'(x)=e^{x-1}+xe^{x-1}=(x+1)e^{x-1}$

접점의 좌표를 (t, te^{t-1})이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=(t+1)e^{t-1}$이므로 접선의 방정식은

$y-te^{t-1}=(t+1)e^{t-1}(x-t)$

이 직선이 점 $(3, 0)$을 지나므로

$-te^{t-1}=(t+1)e^{t-1}(3-t)$

$e^{t-1}>0$이므로 양변을 e^{t-1}으로 나누면

$-t=(t+1)(3-t)$, $t^2-3t-3=0$

$\therefore t=\dfrac{3\pm\sqrt{21}}{2}$

따라서 접점의 개수가 2이므로 점 $(3, 0)$에서 그을 수 있는 접선의 개수는 2이다.

18 $f(x)=(2x+a)e^{-x}$이라 하면

$f'(x)=2e^{-x}-(2x+a)e^{-x}$
$\quad=(2-2x-a)e^{-x}$

접점의 좌표를 $(t, (2t+a)e^{-t})$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=(2-2t-a)e^{-t}$이므로 접선의 방정식은

$y-(2t+a)e^{-t}=(2-2t-a)e^{-t}(x-t)$

이 직선이 원점을 지나므로

$-(2t+a)e^{-t}=(2-2t-a)e^{-t}(-t)$

$e^{-t}>0$이므로 양변을 e^{-t}으로 나누면

$-(2t+a)=(2-2t-a)(-t)$

$\therefore 2t^2+at+a=0$ …… ㉠

원점에서 곡선 $y=(2x+a)e^{-x}$에 오직 하나의 접선을 그을 수 있으려면 이차방정식 ㉠이 중근을 가져야 하므로 ㉠의 판별식을 D라 하면

$D=a^2-8a=0$, $a(a-8)=0$

$\therefore a=8$ ($\because a\neq0$)

19 $f(x)=\ln x-x$에서 $x>0$이고

$f'(x)=\dfrac{1}{x}-1$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=1$

$x>0$에서 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		$\nearrow$	-1	$\searrow$

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(0, 1]$에서 증가하고, 구간 $[1, \infty)$에서 감소한다.

20 $f(x)=\cos x+x\sin x$에서

$f'(x)=-\sin x+\sin x+x\cos x=x\cos x$

$f'(x)=0$인 x의 값은

$x\cos x=0$

$\therefore\ x=\frac{\pi}{2}$ 또는 $x=\frac{3}{2}\pi$ ($\because\ 0<x<2\pi$)

$0<x<2\pi$에서 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{3}{2}\pi$	$\cdots$	2π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$	$\searrow$	$-\frac{3}{2}\pi$	$\nearrow$	

따라서 함수 $f(x)$가 감소하는 x의 값의 범위가

$\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{3}{2}\pi$이므로 $a=\frac{\pi}{2}$, $b=\frac{3}{2}\pi$

$\therefore\ b-a=\pi$

21 $f(x)=e^x-2x$에서

$f'(x)=e^x-2$

$f'(x)=0$인 x의 값은

$e^x=2\quad\therefore\ x=\ln 2$

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$\ln 2$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$2-2\ln 2$	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty,\ \ln 2]$에서 감소하고 구간 $[\ln 2,\ \infty)$에서 증가하므로

$a=\ln 2$

22 $f(x)=x+\sqrt{12-x^2}$에서 $0<x\le 2\sqrt{3}$이고

$f'(x)=1+\frac{-2x}{2\sqrt{12-x^2}}=\frac{\sqrt{12-x^2}-x}{\sqrt{12-x^2}}$

$f'(x)=0$인 x의 값은

$\sqrt{12-x^2}=x$, $12-x^2=x^2$

$x^2=6\quad\therefore\ x=\sqrt{6}$ ($\because\ 0<x\le 2\sqrt{3}$)

$0<x\le 2\sqrt{3}$에서 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\sqrt{6}$	$\cdots$	$2\sqrt{3}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	$2\sqrt{6}$	$\searrow$	$2\sqrt{3}$

따라서 함수 $f(x)$가 증가하는 구간은 $(0,\ \sqrt{6}]$이므로 이 구간에 속하는 모든 정수 x의 값의 합은

$1+2=3$

23 $f(x)=(x^2+ax+5)e^{-x}$에서

$f'(x)=(2x+a)e^{-x}-(x^2+ax+5)e^{-x}$

$\quad=\{-x^2+(2-a)x+a-5\}e^{-x}$

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 감소하려면 $f'(x)\le 0$이어야 하므로

$\{-x^2+(2-a)x+a-5\}e^{-x}\le 0$

이때 $e^{-x}>0$이므로

$-x^2+(2-a)x+a-5\le 0$

이차방정식 $-x^2+(2-a)x+a-5=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(2-a)^2+4(a-5)\le 0$

$a^2-16\le 0$

$(a+4)(a-4)\le 0$

$\therefore\ -4\le a\le 4$

따라서 정수 a는 -4, -3, -2, $\cdots$, 3, 4의 9개이다.

24 $f(x)=ax+\cos 2x$에서

$f'(x)=a-2\sin 2x$

함수 $f(x)$가 구간 $(-\infty,\ \infty)$에서 증가하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\ge 0$이어야 한다.

이때 $-1\le\sin 2x\le 1$이므로

$-2\le -2\sin 2x\le 2$

$\therefore\ a-2\le a-2\sin 2x\le a+2$

즉, $a-2\le f'(x)\le a+2$에서 $a-2\ge 0$이어야 하므로

$a\ge 2$

따라서 a의 최솟값은 2이다.

25 $f(x)=(ax+1)e^{x^2}$에서

$f'(x)=ae^{x^2}+(ax+1)e^{x^2}\times 2x$

$\quad=(2ax^2+2x+a)e^{x^2}$

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 증가하려면 $f'(x)\ge 0$이어야 하므로

$(2ax^2+2x+a)e^{x^2}\ge 0$

이때 $e^{x^2}>0$이므로

$2ax^2+2x+a\ge 0$

모든 실수 x에서 위의 부등식을 만족하려면 $a>0$이어야 하고 이차방정식 $2ax^2+2x+a=0$의 판별식을 D라 하면

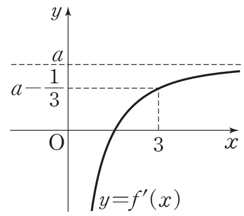
$\frac{D}{4}=1-2a^2\le 0$, $a^2\ge\frac{1}{2}$

$\therefore\ a\le -\frac{\sqrt{2}}{2}$ 또는 $a\ge\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore\ a\ge\frac{\sqrt{2}}{2}$ ($\because\ a>0$)

26 $f(x)=ax-\ln x$에서 $f'(x)=a-\dfrac{1}{x}$

함수 $f(x)$가 구간 $[3, \infty)$에서 증가하려면 $x\geq 3$에서 $f'(x)\geq 0$이어야 하므로 오른쪽 그림에서 $f'(3)\geq 0$



$a-\dfrac{1}{3}\geq 0$ $\quad\therefore a\geq\dfrac{1}{3}$

따라서 a의 값이 될 수 없는 것은 ①이다.

27 $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+3}$에서

$f'(x)=\dfrac{x^2+3-(x+1)\times 2x}{(x^2+3)^2}=\dfrac{-(x+3)(x-1)}{(x^2+3)^2}$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=-3$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	$-\dfrac{1}{6}$ 극소	$\nearrow$	$\dfrac{1}{2}$ 극대	$\searrow$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극대이고 극댓값은 $\dfrac{1}{2}$, $x=-3$에서 극소이고 극솟값은 $-\dfrac{1}{6}$이므로 구하는 차는

$\dfrac{1}{2}-\left(-\dfrac{1}{6}\right)=\dfrac{2}{3}$

28 $f(x)=x+\sqrt{9-4x}$에서 $x\leq\dfrac{9}{4}$이고

$f'(x)=1-\dfrac{4}{2\sqrt{9-4x}}=\dfrac{\sqrt{9-4x}-2}{\sqrt{9-4x}}$

$f'(x)=0$인 x의 값은

$\sqrt{9-4x}=2$, $9-4x=4$ $\quad\therefore x=\dfrac{5}{4}$

$x\leq\dfrac{9}{4}$에서 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$\dfrac{5}{4}$	$\cdots$	$\dfrac{9}{4}$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\nearrow$	$\dfrac{13}{4}$ 극대	$\searrow$	$\dfrac{9}{4}$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\dfrac{5}{4}$에서 극대이고 극댓값은 $\dfrac{13}{4}$이므로 $a=\dfrac{5}{4}$, $b=\dfrac{13}{4}$

$\therefore a+b=\dfrac{5}{4}+\dfrac{13}{4}=\dfrac{9}{2}$

29 $f(x)=x^2e^x$에서

$f'(x)=2xe^x+x^2e^x=(x^2+2x)e^x$

$f'(x)=0$인 x의 값은

$x^2+2x=0$, $x(x+2)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=0$

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\dfrac{4}{e^2}$ 극대	$\searrow$	0 극소	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 극대이고, $x=0$에서 극소이므로

$\alpha=-2$, $\beta=0$

$\therefore \alpha-\beta=-2$

다른 풀이

$f'(x)=(x^2+2x)e^x$에서

$f''(x)=(2x+2)e^x+(x^2+2x)e^x$

$\qquad=(x^2+4x+2)e^x$

$f'(x)=0$인 x의 값은

$x=-2$ 또는 $x=0$

$\therefore f''(-2)=-\dfrac{2}{e^2}<0$, $f''(0)=2>0$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 극대이고, $x=0$에서 극소이다.

30 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$에서 $x>0$이고

$f'(x)=\dfrac{\dfrac{1}{x}\times x-\ln x\times 1}{x^2}$

$\qquad=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$

$f'(x)=0$인 x의 값은

$\ln x=1$ $\quad\therefore x=e$

$x>0$에서 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		$\nearrow$	$\dfrac{1}{e}$ 극대	$\searrow$

따라서 $f(x)$는 $x=e$에서 극대이고 극댓값은 $\dfrac{1}{e}$이므로

$a=e$, $b=\dfrac{1}{e}$

$\therefore ab=1$

31 ㄱ. $x>0$이므로 정의역은 $\{x|x>0\}$이다.

ㄴ. $f(x)=x\ln x-2$에서

$f'(x)=\ln x+x\times\frac{1}{x}=\ln x+1$

$f'(x)=0$인 x의 값은

$\ln x=-1 \qquad \therefore x=\frac{1}{e}$

$x>0$에서 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{e}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	$-\frac{1}{e}-2$ 극소	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\frac{1}{e}$에서 극소이고 극솟값은

$-\frac{1}{e}-2$이다.

ㄷ. 구간 $\left[\frac{1}{e}, \infty\right)$에서 증가한다.

따라서 옳은 것은 ㄷ이다.

다른 풀이

ㄴ. $f'(x)=\ln x+1$에서

$f''(x)=\frac{1}{x}$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=\frac{1}{e}$

$\therefore f''\left(\frac{1}{e}\right)=e>0$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\frac{1}{e}$에서 극소이고 극솟값은

$f\left(\frac{1}{e}\right)=-\frac{1}{e}-2$

32 $f(x)=e^x(\cos x-\sin x)$에서

$f'(x)=e^x(\cos x-\sin x)+e^x(-\sin x-\cos x)$

$\quad=-2e^x\sin x$

$f'(x)=0$인 x의 값은

$\sin x=0 \qquad \therefore x=\pi \ (\because 0<x<2\pi)$

$0<x<2\pi$에서 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	π	$\cdots$	2π
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$-e^{\pi}$ 극소	$\nearrow$	

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\pi$에서 극소이고 극솟값은 $-e^{\pi}$이다.

다른 풀이

$f'(x)=-2e^x\sin x$에서

$f''(x)=-2e^x(\sin x+\cos x)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=\pi$

$\therefore f''(\pi)=2e^{\pi}>0$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\pi$에서 극소이고 극솟값은

$f(\pi)=-e^{\pi}$

33 $f(x)=(1+\sin x)\cos x$에서

$f'(x)=\cos^2 x+(1+\sin x)\times(-\sin x)$

$\quad=1-\sin^2 x-\sin x-\sin^2 x$

$\quad=-2\sin^2 x-\sin x+1$

$\quad=-(2\sin x-1)(\sin x+1)$

$f'(x)=0$인 x의 값은

$\sin x=\frac{1}{2}$ 또는 $\sin x=-1$

$\therefore x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{5}{6}\pi$ 또는 $x=\frac{3}{2}\pi \ (\because 0<x<2\pi)$

$0<x<2\pi$에서 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{5}{6}\pi$	$\cdots$	$\frac{3}{2}\pi$	$\cdots$	2π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$ 극대	$\searrow$	$-\frac{3\sqrt{3}}{4}$ 극소	$\nearrow$	0	$\nearrow$	

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\frac{\pi}{6}$에서 극댓값 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$을 갖고,

$x=\frac{5}{6}\pi$에서 극솟값 $-\frac{3\sqrt{3}}{4}$을 가지므로 2개의 극값을 갖는다.

다른 풀이

$f'(x)=-2\sin^2 x-\sin x+1$에서

$f''(x)=-4\sin x\cos x-\cos x$

$\quad=-\cos x(4\sin x+1)$

$f'(x)=0$인 x의 값은

$x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{5}{6}\pi$ 또는 $x=\frac{3}{2}\pi$

$\therefore f''\left(\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{3\sqrt{3}}{2}<0,$

$f''\left(\frac{5}{6}\pi\right)=\frac{3\sqrt{3}}{2}>0,$

$f''\left(\frac{3}{2}\pi\right)=0$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\frac{\pi}{6}$에서 극댓값을 갖고, $x=\frac{5}{6}\pi$에서 극솟값을 가지므로 2개의 극값을 갖는다.

34 $f(x)=ax+\frac{b}{x+1}$에서

$f'(x)=a-\frac{b}{(x+1)^2}$

$x=1$에서 극솟값 6을 가지므로

$f'(1)=0$, $f(1)=6$

$f'(1)=0$에서

$a-\frac{b}{4}=0 \qquad \therefore b=4a$ …… ㉠

$f(1)=6$에서

$a+\frac{b}{2}=6$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=8$

$\therefore a+b=10$

35 $f(x)=(ax^2+b)e^x$에서

$f'(x)=2axe^x+(ax^2+b)e^x=(ax^2+2ax+b)e^x$

$x=1$에서 극댓값 $4e$를 가지므로

$f'(1)=0$, $f(1)=4e$

$f'(1)=0$에서

$(3a+b)e=0 \qquad \therefore 3a+b=0$ …… ㉠

$f(1)=4e$에서

$(a+b)e=4e \qquad \therefore a+b=4$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-2$, $b=6$

$\therefore f(x)=(-2x^2+6)e^x$, $f'(x)=(-2x^2-4x+6)e^x$

$f'(x)=0$인 x의 값은

$-2x^2-4x+6=0$, $(x+3)(x-1)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=1$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-3$에서 극소이므로 극솟값은

$f(-3)=-\frac{12}{e^3}$

36 $f(x)=x-a\ln x$에서

$f'(x)=1-\frac{a}{x}=\frac{x-a}{x}$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=a$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극소이고 극솟값은 0이므로

$f(a)=0$에서

$a-a\ln a=0$, $\ln a=1$

$\therefore a=e$

37 $f(x)=a\sin x-b\cos x$에서

$f'(x)=a\cos x+b\sin x$

$x=\frac{2}{3}\pi$에서 극댓값 2를 가지므로

$f'\left(\frac{2}{3}\pi\right)=0$, $f\left(\frac{2}{3}\pi\right)=2$

$f'\left(\frac{2}{3}\pi\right)=0$에서

$-\frac{1}{2}a+\frac{\sqrt{3}}{2}b=0 \qquad \therefore a=\sqrt{3}b$ …… ㉠

$f\left(\frac{2}{3}\pi\right)=2$에서

$\frac{\sqrt{3}}{2}a+\frac{1}{2}b=2 \qquad \therefore \sqrt{3}a+b=4$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=\sqrt{3}$, $b=1$

$\therefore ab=\sqrt{3}$

38 $f(x)=4\ln x+\frac{a}{x}-x$에서 $x>0$이고

$f'(x)=\frac{4}{x}-\frac{a}{x^2}-1=\frac{-x^2+4x-a}{x^2}$

함수 $f(x)$가 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 $x>0$에서 이차방정식 $-x^2+4x-a=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

(i) 이차방정식 $-x^2+4x-a=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=4-a>0 \qquad \therefore a<4$

(ii) (두 근의 곱)$=a>0$

(i), (ii)에 의해 $0<a<4$

39 $f(x)=(x^2+ax+3)e^x$에서

$f'(x)=(2x+a)e^x+(x^2+ax+3)e^x$

$\quad=\{x^2+(a+2)x+a+3\}e^x$

이때 $e^x>0$이므로 함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으려면

$x^2+(a+2)x+a+3\ge0$

따라서 이차방정식 $x^2+(a+2)x+a+3=0$이 중근 또는 허근을 가져야 하므로 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(a+2)^2-4(a+3)\le0$

$a^2-8\le0 \qquad \therefore -2\sqrt{2}\le a\le2\sqrt{2}$

따라서 정수 a는 -2, -1, 0, 1, 2이므로 그 합은

$-2+(-1)+0+1+2=0$

40 $f(x)=ax+3\cos x$에서

$f'(x)=a-3\sin x$

함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\le0$ 또는 $f'(x)\ge0$이어야 한다.

따라서 $a-3\sin x\le0$ 또는 $a-3\sin x\ge0$

$\therefore \sin x\ge\frac{a}{3}$ 또는 $\sin x\le\frac{a}{3}$

그런데 $-1\le\sin x\le1$이므로

$\frac{a}{3}\le-1$ 또는 $\frac{a}{3}\ge1 \qquad \therefore a\le-3$ 또는 $a\ge3$

따라서 자연수 a의 최솟값은 3이다.

유형편

41 $f(x)=a\cos x+bx+2$에서

$f'(x)=-a\sin x+b=-a\left(\sin x-\frac{b}{a}\right)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $\sin x=\frac{b}{a}$

함수 $f(x)$가 극값을 가지려면 $f'(x)=0$을 만족하는 x의 값의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌어야 한다.

이때 $-1\le\sin x\le1$이므로 $-1\le\frac{b}{a}\le1$

그런데 $\frac{b}{a}=-1$ 또는 $\frac{b}{a}=1$일 때에는 $f'(x)=0$이 되는 x의 값의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌지 않으므로 함수 $f(x)$가 극값을 갖는 x의 값의 범위는

$-1<\frac{b}{a}<1$

따라서 $0<\frac{b^2}{a^2}<1$, 즉 $a^2>b^2$이므로 항상 옳은 것은 ③이다.

42 $f(x)=x^4-2x^3+3x+5$라 하면

$f'(x)=4x^3-6x^2+3$

$f''(x)=12x^2-12x=12x(x-1)$

$f''(x)=0$인 x의 값은

$x=0$ 또는 $x=1$

따라서 곡선 $y=f(x)$는 $0<x<1$일 때 $f''(x)<0$이므로 위로 볼록하다.

43 $f(x)=\ln(x^2+1)$에서

$f'(x)=\frac{2x}{x^2+1}$

$f''(x)=\frac{2(x^2+1)-2x\times2x}{(x^2+1)^2}=\frac{-2(x+1)(x-1)}{(x^2+1)^2}$

$f''(x)=0$인 x의 값은 $x=-1$ 또는 $x=1$

따라서 곡선 $y=f(x)$는 $-1<x<1$일 때 $f''(x)>0$이므로 아래로 볼록하다.

따라서 이 구간에 속하는 정수 x는 0의 1개이다.

44 $f(x)=x-2\cos x$라 하면

$f'(x)=1+2\sin x$

$f''(x)=2\cos x$

$f''(x)=0$인 x의 값은 $2\cos x=0$

$\cos x=0 \qquad \therefore\ x=\frac{\pi}{2}\ (\because\ 0<x<\pi)$

따라서 곡선 $y=f(x)$는 $0<x<\frac{\pi}{2}$일 때 $f''(x)>0$이므로 아래로 볼록하다.

따라서 $\alpha=0$, $\beta=\frac{\pi}{2}$이므로 $\beta-\alpha=\frac{\pi}{2}$

45 $f(x)=(ax^2+1)e^{-x}$이라 하면

$f'(x)=2axe^{-x}-(ax^2+1)e^{-x}=(-ax^2+2ax-1)e^{-x}$

$f''(x)=(-2ax+2a)e^{-x}-(-ax^2+2ax-1)e^{-x}$

$\qquad=(ax^2-4ax+2a+1)e^{-x}$

이때 구간 $(-\infty,\ \infty)$에서 아래로 볼록하려면 모든 실수 x에 대하여 $f''(x)\ge0$이어야 하므로

$(ax^2-4ax+2a+1)e^{-x}\ge0$

$\therefore\ ax^2-4ax+2a+1\ge0\ (\because\ e^{-x}>0)$ …… ㉠

(i) $a=0$일 때, $1\ge0$이므로 부등식 ㉠이 성립한다.

(ii) $a\ne0$일 때

㉠이 항상 성립해야하므로 $a>0$이어야 하고 이차방정식 $ax^2-4ax+2a+1=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-2a)^2-a(2a+1)\le0$

$2a^2-a\le0$, $a(2a-1)\le0$

$\therefore\ 0<a\le\frac{1}{2}\ (\because\ a>0)$

(i), (ii)에 의해 $0\le a\le\frac{1}{2}$이므로 상수 a의 최댓값은 $\frac{1}{2}$이다.

46 $f(x)=\frac{2x}{x^2+1}$라 하면

$f'(x)=\frac{2(x^2+1)-2x\times2x}{(x^2+1)^2}=\frac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2}$

$f''(x)=\frac{-4x(x^2+1)^2+(2x^2-2)\times2(x^2+1)\times2x}{(x^2+1)^4}$

$\qquad=\frac{-4x(x^2+1)+8x(x^2-1)}{(x^2+1)^3}$

$\qquad=\frac{4x^3-12x}{(x^2+1)^3}=\frac{4x(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})}{(x^2+1)^3}$

$f''(x)=0$인 x의 값은

$x=-\sqrt{3}$ 또는 $x=0$ 또는 $x=\sqrt{3}$

$-\sqrt{3}<x<0$, $x>\sqrt{3}$일 때, $f''(x)>0$

$x<-\sqrt{3}$, $0<x<\sqrt{3}$일 때, $f''(x)<0$

따라서 $x=-\sqrt{3}$, $x=0$, $x=\sqrt{3}$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 변곡점의 개수는 3이다.

47 $f(x)=(x^2-2x)e^x$이라 하면

$f'(x)=(2x-2)e^x+(x^2-2x)e^x=(x^2-2)e^x$

$f''(x)=2xe^x+(x^2-2)e^x=(x^2+2x-2)e^x$

$f''(x)=0$인 x의 값은 $x^2+2x-2=0$

$\therefore\ x=-1-\sqrt{3}$ 또는 $x=-1+\sqrt{3}$

$x<-1-\sqrt{3}$, $x>-1+\sqrt{3}$일 때, $f''(x)>0$

$-1-\sqrt{3}<x<-1+\sqrt{3}$일 때, $f''(x)<0$

따라서 $x=-1-\sqrt{3}$, $x=-1+\sqrt{3}$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 모든 변곡점의 x좌표의 합은

$(-1-\sqrt{3})+(-1+\sqrt{3})=-2$

48 $f(x)=\frac{1}{2}x^2+\ln|x|$라 하면

$f'(x)=x+\frac{1}{x}$

$f''(x)=1-\frac{1}{x^2}=\frac{x^2-1}{x^2}=\frac{(x+1)(x-1)}{x^2}$

$f''(x)=0$인 x의 값은 $x=-1$ 또는 $x=1$

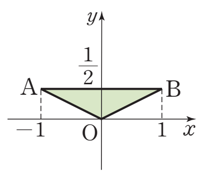
$x<-1$, $x>1$일 때, $f''(x)>0$

$-1<x<1$일 때, $f''(x)<0$

따라서 $x=-1$, $x=1$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 변곡점의 좌표는 $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$, $\left(1, \frac{1}{2}\right)$이다.

따라서 △OAB의 넓이는

$\frac{1}{2}\times2\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$



49 $f(x)=(1-\cos x)^2$이라 하면

$f'(x)=2(1-\cos x)\sin x$

$$\begin{aligned}f''(x)&=2\sin^2 x+2(1-\cos x)\cos x\\&=2\sin^2 x-2\cos^2 x+2\cos x\\&=2(1-\cos^2 x)-2\cos^2 x+2\cos x\\&=-4\cos^2 x+2\cos x+2\\&=-2(2\cos x+1)(\cos x-1)\end{aligned}$$

$f''(x)=0$인 x의 값은

$\cos x=-\frac{1}{2}$ 또는 $\cos x=1$

$\therefore$ $x=\frac{2}{3}\pi$ 또는 $x=\frac{4}{3}\pi$ ($\because$ $0<x<2\pi$)

$x<\frac{2}{3}\pi$, $x>\frac{4}{3}\pi$일 때, $f''(x)>0$

$\frac{2}{3}\pi<x<\frac{4}{3}\pi$일 때, $f''(x)<0$

따라서 $x=\frac{2}{3}\pi$, $x=\frac{4}{3}\pi$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 변곡점의 좌표는 $\left(\frac{2}{3}\pi, \frac{9}{4}\right)$, $\left(\frac{4}{3}\pi, \frac{9}{4}\right)$이다.

따라서 두 변곡점 사이의 거리는

$\frac{4}{3}\pi-\frac{2}{3}\pi=\frac{2}{3}\pi$

50 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$에서

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

$f''(x)=6x+2a$

$x=1$인 점에서의 접선의 기울기가 2이므로 $f'(1)=2$에서

$3+2a+b=2$

$\therefore$ $2a+b=-1$ …… ㉠

변곡점의 좌표가 $(2, 8)$이므로

$f(2)=8$, $f''(2)=0$

$f(2)=8$에서 $8+4a+2b+c=8$

$\therefore$ $4a+2b+c=0$ …… ㉡

$f''(2)=0$에서 $12+2a=0$

$\therefore$ $a=-6$

이를 ㉠에 대입하여 풀면

$b=11$

$a=-6$, $b=11$을 ㉡에 대입하여 풀면

$c=2$

$\therefore$ $a+b+c=-6+11+2=7$

51 $f(x)=ax^2+bx+\ln x$에서

$f'(x)=2ax+b+\frac{1}{x}$, $f''(x)=2a-\frac{1}{x^2}$

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극소이므로

$f'(1)=0$에서 $2a+b+1=0$

$\therefore$ $2a+b=-1$ …… ㉠

변곡점의 x좌표가 $\frac{1}{2}$이므로

$f''\left(\frac{1}{2}\right)=0$에서 $2a-4=0$

$\therefore$ $a=2$

이를 ㉠에 대입하여 풀면

$b=-5$

$\therefore$ $a+b=2+(-5)=-3$

52 $f(x)=ax^2+4\sin x+5$라 하면

$f'(x)=2ax+4\cos x$

$f''(x)=2a-4\sin x$

곡선 $y=f(x)$가 변곡점을 가지려면 방정식 $f''(x)=0$이 실근을 갖고, 그 근의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌어야 한다.

$f''(x)=0$에서 $2a-4\sin x=0$

$\therefore$ $\sin x=\frac{a}{2}$

이때 $-1\le\sin x\le1$이므로

$-1\le\frac{a}{2}\le1$ $\quad\therefore$ $-2\le a\le2$

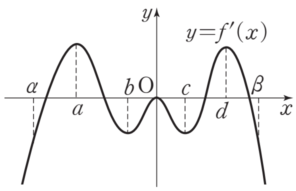
$a=-2$이면 $f''(x)=-4-4\sin x\le0$

$a=2$이면 $f''(x)=4-4\sin x\ge0$

따라서 $a=-2$, $a=2$이면 $f''(x)=0$을 만족하는 x의 값의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌지 않으므로 변곡점이 될 수 없다.

따라서 a의 값의 범위는 $-2<a<2$이므로 정수 a는 -1, 0, 1의 3개이다.

53 아래 그림과 같이 a, b, c, d를 정하고 $f''(x)$의 부호를 표로 나타내면 다음과 같다.



x	α	$\cdots$	a	$\cdots$	b	$\cdots$	0	$\cdots$	c	$\cdots$	d	$\cdots$	β
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

$x=a$, $x=b$, $x=0$, $x=c$, $x=d$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 변곡점의 개수는 5이다.

54 $f''(x)$의 부호를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	a	$\cdots$	b	$\cdots$	c	$\cdots$	d	$\cdots$	e	$\cdots$
$f''(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$

함수 $y=f(x)$의 그래프의 모양이 위로 볼록하려면 $f''(x)<0$이어야 하므로 구하는 구간은 $(b,\ d)$이다.

55 A, B, C, D, E, F에서의 x좌표를 각각 a, b, c, d, e, f라 하고 $f'(x)$, $f''(x)$의 부호를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	a	b	c	d	e	f
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$

따라서 $f'(x)f''(x)>0$인 점은 C, F이다.

56 주어진 $y=f'(x)$의 그래프에서 $f'(x)=0$인 x의 값은

$x=0$ (중근) 또는 $x=a$

$f'(x)=kx^2(x-a)\ (k>0)$라 하면

$f''(x)=kx(3x-2a)$

$f''(x)=0$인 x의 값은

$x=0$ 또는 $x=\frac{2}{3}a$ …… ㉠

ㄱ. $f'(0)=0$이지만 $x=0$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌지 않으므로 극값을 갖지 않는다.

ㄴ. $f'(a)=0$이고 $x=a$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 $x=a$에서 극소이다.

ㄷ. ㉠에 의해 $f''(0)=f''\left(\frac{2}{3}a\right)=0$이고 각 점의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 그래프의 변곡점은 2개이다.

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

57 $f(x)=(x-1)e^{2x}$에서

$f'(x)=e^{2x}+2(x-1)e^{2x}$

$\quad=(2x-1)e^{2x}$

$f''(x)=2e^{2x}+2(2x-1)e^{2x}$

$\quad=4xe^{2x}$

$f'(x)=0$인 x의 값은

$x=\frac{1}{2}$ ($\because e^{2x}>0$)

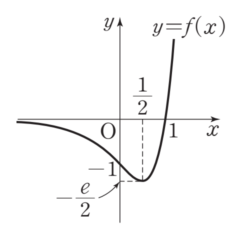
$f''(x)=0$인 x의 값은

$x=0$ ($\because e^{2x}>0$)

함수 $f(x)$의 증가와 감소, 오목과 볼록을 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	↘	-1 변곡점	↘	$-\frac{e}{2}$ 극소	↗

또 $\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$, $\lim_{x\to-\infty}f(x)=0$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



① 극솟값은 $f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{e}{2}$이다.

② 치역은 $\left\{y\,\middle|\,y\geq-\frac{e}{2}\right\}$이다.

③ $y=f(x)$의 그래프의 변곡점은 점 $(0,\ -1)$의 1개이다.

④ $y=f(x)$의 그래프의 점근선의 방정식은 $y=0$이다.

⑤ 구간 $(-\infty,\ 0)$에서 $f''(x)<0$이므로 $y=f(x)$의 그래프는 이 구간에서 위로 볼록하다.

따라서 옳지 않은 것은 ③이다.

58 $f(x)=\frac{3x}{x^2+1}$에서

$$f'(x)=\frac{3(x^2+1)-3x\times2x}{(x^2+1)^2}$$
$$=\frac{-3x^2+3}{(x^2+1)^2}$$
$$=\frac{-3(x+1)(x-1)}{(x^2+1)^2}$$
$$f''(x)=\frac{-6x(x^2+1)^2-(-3x^2+3)\times2(x^2+1)\times2x}{(x^2+1)^4}$$
$$=\frac{6x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$$
$$=\frac{6x(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})}{(x^2+1)^3}$$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=-1$ 또는 $x=1$

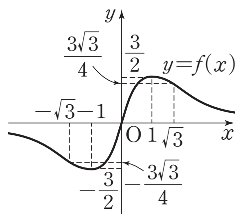
$f''(x)=0$인 x의 값은 $x=-\sqrt{3}$ 또는 $x=0$ 또는 $x=\sqrt{3}$

함수 $f(x)$의 증가와 감소, 오목과 볼록을 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\sqrt{3}$	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$-\frac{3\sqrt{3}}{4}$ 변곡점	↘	$-\frac{3}{2}$ 극소	↗	0 변곡점	↗	$\frac{3}{2}$ 극대	↘	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$ 변곡점	↘

또 $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$,

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



ㄱ. 모든 실수 x에 대하여

$$f(-x)=\frac{-3x}{(-x)^2+1}$$
$$=-\frac{3x}{x^2+1}=-f(x)$$

이므로 $y=f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

ㄴ. $x=1$에서 극대이다.

ㄷ. $y=f(x)$의 그래프의 변곡점은 점 $\left(-\sqrt{3}, -\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$, 점 $(0, 0)$, 점 $\left(\sqrt{3}, \frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$의 3개이다.

ㄹ. 구간 $(0, \sqrt{3})$에서 $f''(x)<0$이므로 $y=f(x)$의 그래프는 이 구간에서 위로 볼록하다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

59 $f(x)=\frac{x+1}{x^2+3x+6}$에서

$$f'(x)=\frac{x^2+3x+6-(x+1)(2x+3)}{(x^2+3x+6)^2}$$
$$=-\frac{(x+3)(x-1)}{(x^2+3x+6)^2}$$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=1$ ($\because 0\le x\le 3$)

구간 $[0, 3]$에서 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0
$f(x)$	$\frac{1}{6}$	↗	$\frac{1}{5}$ 극대	↘	$\frac{1}{6}$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$일 때 최댓값은 $\frac{1}{5}$, $x=0$, $x=3$일 때 최솟값은 $\frac{1}{6}$이므로 구하는 차는 $\frac{1}{30}$이다.

60 $f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{4-x}$에서 $0\le x\le 4$이고

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{2\sqrt{4-x}}=\frac{\sqrt{4-x}-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\sqrt{4-x}}$$

$f'(x)=0$인 x의 값은

$\sqrt{4-x}-\sqrt{x}=0$, $\sqrt{4-x}=\sqrt{x}$

$4-x=x \qquad \therefore x=2$

$0\le x\le 4$에서 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$	4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	2	↗	$2\sqrt{2}$ 극대	↘	2

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$일 때 최댓값은 $2\sqrt{2}$, $x=0$, $x=4$일 때 최솟값은 2이므로 구하는 곱은

$2\sqrt{2}\times 2=4\sqrt{2}$

61 $f(x)=\frac{e^x}{x}$에서

$$f'(x)=\frac{e^x\times x-e^x}{x^2}=\frac{e^x(x-1)}{x^2}$$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=1$

$x>0$에서 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	e 극소	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$일 때 최솟값은 e이므로

$a=1$, $m=e$

$\therefore am=e$

62 $f(x)=x\ln x-2x$에서

$$f'(x)=\ln x+x\times\frac{1}{x}-2=\ln x-1$$

$f'(x)=0$인 x의 값은

$\ln x=1 \qquad \therefore x=e$

구간 $[1, e^2]$에서 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	1	$\cdots$	e	$\cdots$	e^2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	-2	↘	$-e$ 극소	↗	0

따라서 함수 $f(x)$는 $x=e^2$일 때 최댓값을 갖고, $x=e$일 때 최솟값을 가지므로 $\alpha=e^2$, $\beta=e$

$$\therefore \frac{\alpha}{\beta}=\frac{e^2}{e}=e$$

63 $f(x)=\sin x-x\cos x$에서

$f'(x)=\cos x-\cos x+x\sin x$

$\quad=x\sin x$

$f'(x)=0$인 x의 값은

$x=0$ 또는 $\sin x=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=\pi$ 또는 $x=2\pi$ ($\because 0\leq x\leq 2\pi$)

구간 $[0, 2\pi]$에서 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	π	$\cdots$	2π
$f'(x)$	0	+	0	−	0
$f(x)$	0	↗	π 극대	↘	-2π

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\pi$일 때 최댓값 π를 가지므로

$a=\pi$, $M=\pi$

$\therefore a+M=2\pi$

64 $f(x)=axe^x$에서

$f'(x)=ae^x+axe^x$

$\quad=a(1+x)e^x$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=-1$

구간 $[-3, 1]$에서 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-3	$\cdots$	-1	$\cdots$	1
$f'(x)$		−	0	+	
$f(x)$	$-\frac{3a}{e^3}$	↘	$-\frac{a}{e}$ 극소	↗	ae

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$일 때 최솟값은 $-\frac{a}{e}$, $x=1$일 때 최댓값은 ae이므로 최댓값과 최솟값의 곱은

$ae\times\left(-\frac{a}{e}\right)=-a^2$

따라서 $-a^2=-1$이므로

$a=1$ ($\because a>0$)

65 $f(x)=2a\sin x-ax$에서

$f'(x)=2a\cos x-a=a(2\cos x-1)$

$f'(x)=0$인 x의 값은

$\cos x=\frac{1}{2}$

$\therefore x=\frac{\pi}{3}$ ($\because 0\leq x\leq \pi$)

구간 $[0, \pi]$에서 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	π
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	0	↗	$a\left(\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}\right)$ 극대	↘	$-a\pi$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\pi$일 때 최솟값은 $-a\pi$이므로

$-a\pi=-3\pi$

$\therefore a=3$

따라서 함수 $f(x)$의 최댓값은

$3\left(\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}\right)=3\sqrt{3}-\pi$

66 $f(x)=\cos^3 x+3\sin^2 x+1$

$\quad=\cos^3 x+3(1-\cos^2 x)+1$

$\quad=\cos^3 x-3\cos^2 x+4$

$\cos x=t$로 놓으면 $-1\leq t\leq 1$이고

$g(t)=t^3-3t^2+4$

$g'(t)=3t^2-6t=3t(t-2)$

$g'(t)=0$인 t의 값은

$t=0$ ($\because -1\leq t\leq 1$)

$-1\leq t\leq 1$에서 함수 $g(t)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$g'(t)$		+	0	−	
$g(t)$	0	↗	4 극대	↘	2

따라서 함수 $g(t)$는 $t=0$일 때 최댓값은 4, $t=-1$일 때 최솟값은 0이므로 구하는 합은

$4+0=4$

67 점 A의 좌표를 $(t, \ln t)(0<t<1)$라 하면

$\overline{AC}=t$, $\overline{AB}=-\ln t$

직사각형 ABOC의 넓이를 $S(t)$라 하면

$S(t)=-t\ln t$

$\therefore S'(t)=-\ln t-t\times\frac{1}{t}=-\ln t-1$

$S'(t)=0$인 t의 값은

$\ln t=-1 \qquad \therefore t=\frac{1}{e}$

$0<t<1$에서 함수 $S(t)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	0	$\cdots$	$\frac{1}{e}$	$\cdots$	1
$S'(t)$		$+$	0	$-$	
$S(t)$		$\nearrow$	$\frac{1}{e}$ 극대	$\searrow$	

따라서 함수 $S(t)$는 $t=\frac{1}{e}$일 때 최댓값은 $\frac{1}{e}$이다.

68 $\mathrm{P}(a,\ e^a)$, $\mathrm{Q}(a,\ a)$이므로

$\overline{\mathrm{PQ}}=e^a-a$

이때 $l(a)=e^a-a$라 하면

$l'(a)=e^a-1$

$l'(a)=0$인 a의 값은

$e^a=1 \qquad \therefore a=0$

함수 $l(a)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	$\cdots$	0	$\cdots$
$l'(a)$	$-$	0	$+$
$l(a)$	$\searrow$	1 극소	$\nearrow$

따라서 $l(a)$는 $a=0$일 때 최솟값은 1이다.

69 직육면체의 밑면의 한 모서리의 길이를 a m, 높이를 b m라 하면 직육면체의 부피는 $64\,\mathrm{m}^3$이므로

$a^2b=64 \qquad \therefore b=\frac{64}{a^2}$

필요한 철판을 구입하는 데 드는 비용을 $f(a)$만 원이라 하면

$$f(a)=2a^2+4ab=2a^2+\frac{256}{a}\ (a>0)$$

$$\therefore f'(a)=4a-\frac{256}{a^2}=\frac{4(a^3-64)}{a^2}$$
$$=\frac{4(a-4)(a^2+4a+16)}{a^2}$$

$f'(a)=0$인 a의 값은 $a=4$ ($\because$ a는 실수)

$a>0$에서 함수 $f(a)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	0	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(a)$		$-$	0	$+$
$f(a)$		$\searrow$	96 극소	$\nearrow$

따라서 함수 $f(a)$는 $a=4$일 때 최솟값은 96이므로 필요한 철판을 구입하는 데 드는 최소 비용은 96만 원이다.

02 방정식과 부등식, 속도와 가속도

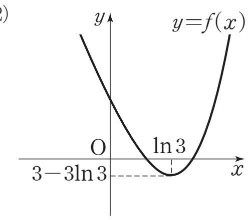
기초 문제 Training

p.59

1 (1)

x	$\cdots$	$\ln 3$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$3-3\ln 3$	$\nearrow$

(2)

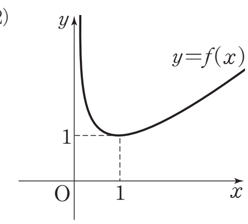


(3) **2**

2 (1)

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	1	$\nearrow$

(2)



(3) **0**

3 e^x-1, 0, 0, $-$, $+$, $\searrow$, 0, $\nearrow$, 0, 0

4 속도: 3, 가속도: -9

5 속도: $(2,\ 2t+3)$, 가속도: $(0,\ 2)$

핵심 유형 Training

p.60~62

1 2 **2** 3 **3** ㄱ, ㄴ, ㄷ **4** 3

5 $-\frac{1}{2}$ **6** 6 **7** $a<-6$ 또는 $a>6$ **8** $k\geq 1$

9 ② **10** $\frac{1}{2}$ **11** $a<2-\ln 4$ **12** ①

13 0 **14** 4 **15** $2\sqrt{6}e^2$ **16** ④ **17** $\sqrt{5}$

18 $\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\ -\frac{1}{4}\right)$ **19** $\sqrt{17}$ **20** $\frac{\pi^2}{2}$

1 $f(x)=e^x+e^{-x}-4$라 하면

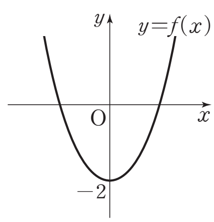
$f'(x)=e^x-e^{-x}$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=0$

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-2 극소	↗

또 $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\infty$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



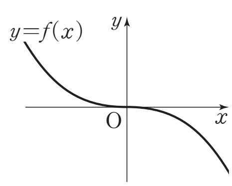
따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축이 서로 다른 두 점에서 만나므로 방정식 $e^x+e^{-x}-4=0$의 실근의 개수는 2이다.

2 $f(x)=\sin x-x$라 하면

$f'(x)=\cos x-1\le 0$ ($\because -1\le\cos x\le 1$)

따라서 함수 $f(x)$는 실수 전체의 구간에서 감소한다.

이때 $f(0)=0$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축이 한 점에서 만나므로 방정식 $\sin x-x=0$의 실근의 개수는 1이다.

$\therefore a=1$

$g(x)=\sqrt{x+1}-x$라 하면 $x\ge-1$이고

$g'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}-1=\dfrac{1-2\sqrt{x+1}}{2\sqrt{x+1}}$

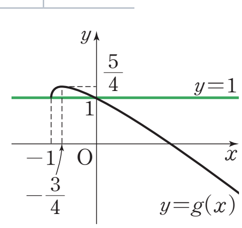
$g'(x)=0$인 x의 값은

$2\sqrt{x+1}=1$, $x+1=\dfrac{1}{4}$ $\quad\therefore x=-\dfrac{3}{4}$

$x\ge-1$에서 함수 $g(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	$\cdots$	$-\frac{3}{4}$	$\cdots$
$g'(x)$		$+$	0	$-$
$g(x)$	1	↗	$\frac{5}{4}$ 극대	↘

또 $\lim_{x\to\infty} g(x)=-\infty$이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=1$을 그리면 오른쪽 그림과 같다.



따라서 함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=1$이 서로 다른 두 점에서 만나므로 방정식 $\sqrt{x+1}-x=1$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

$\therefore b=2$

$\therefore a+b=3$

3 $f(x)=\ln x-x$라 하면 $x>0$이고

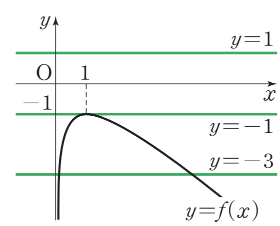
$f'(x)=\dfrac{1}{x}-1$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=1$

$x>0$에서 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		↗	-1 극대	↘

또 $\lim_{x\to0+} f(x)=-\infty$, $\lim_{x\to\infty} f(x)=-\infty$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 방정식 $\ln x-x=k$의 실근의 개수는 $k<-1$일 때 2, $k=-1$일 때 1, $k>-1$일 때 0이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

4 $ke^{x-2}=x^2$에서 $e^{x-2}>0$이므로 $\dfrac{x^2}{e^{x-2}}=k$

$f(x)=\dfrac{x^2}{e^{x-2}}$이라 하면

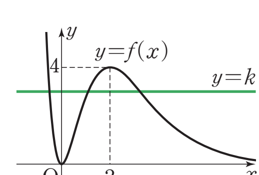
$f'(x)=\dfrac{2xe^{x-2}-x^2e^{x-2}}{(e^{x-2})^2}=\dfrac{2x-x^2}{e^{x-2}}=\dfrac{x(2-x)}{e^{x-2}}$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=0$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	0 극소	↗	4 극대	↘

또 $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\infty$, $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나도록 하는 실수 k의 값의 범위는 $0<k<4$

따라서 정수 k는 1, 2, 3의 3개이다.

5 $\ln x-\frac{1}{2}x^2-a=0$에서

$\ln x-\frac{1}{2}x^2=a$

$f(x)=\ln x-\frac{1}{2}x^2$이라 하면 $x>0$이고

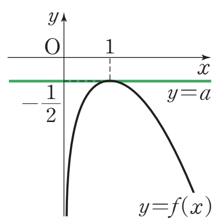
$f'(x)=\frac{1}{x}-x$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=1$ ($\because$ $x>0$)

$x>0$에서 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		$\nearrow$	$-\frac{1}{2}$ 극대	$\searrow$

또 $\lim_{x\to 0+} f(x)=-\infty$, $\lim_{x\to\infty} f(x)=-\infty$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=a$가 오직 한 점에서 만나도록 하는 실수 a의 값은 $-\frac{1}{2}$이다.

6 $x\cos x-\sin x+k=0$에서

$x\cos x-\sin x=-k$

$f(x)=x\cos x-\sin x$라 하면

$f'(x)=\cos x-x\sin x-\cos x=-x\sin x$

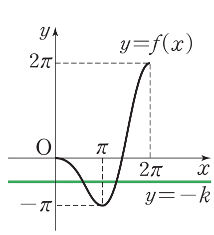
$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=0$ 또는 $\sin x=0$

$\therefore$ $x=0$ 또는 $x=\pi$ 또는 $x=2\pi$ ($\because$ $0\le x\le 2\pi$)

$0\le x\le 2\pi$에서 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	π	$\cdots$	2π
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	0
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\pi$ 극소	$\nearrow$	2π

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 직선 $y=-k$와 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 실수 k의 값의 범위는



$-\pi<-k<0$ $\quad\therefore$ $0<k<\pi$

따라서 정수 k는 1, 2, 3이므로 구하는 합은

$1+2+3=6$

7 $\left|\frac{ax}{x^2+1}\right|=3$에서 $\left|\frac{x}{x^2+1}\right|=\frac{3}{|a|}$

$f(x)=\frac{x}{x^2+1}$라 하면

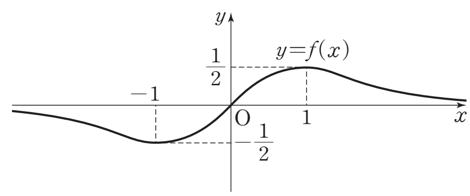
$f'(x)=\frac{(x^2+1)-x\times 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{-(x+1)(x-1)}{(x^2+1)^2}$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=-1$ 또는 $x=1$

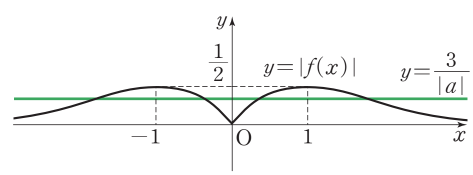
함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$ 극소	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$ 극대	$\searrow$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$, $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 함수 $y=|f(x)|$의 그래프와 직선 $y=\frac{3}{|a|}$이 서로 다른 네 점에서 만나도록 그리면 다음 그림과 같다.



따라서 $0<\frac{3}{|a|}<\frac{1}{2}$이어야 하므로 $|a|>6$

$\therefore$ $a<-6$ 또는 $a>6$

8 $f(x)=x\ln x-x+k$라 하면

$f'(x)=\ln x+x\times\frac{1}{x}-1=\ln x$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=1$

$x>0$에서 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	$-1+k$ 극소	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$일 때 최솟값 $-1+k$를 가지므로 $f(x)\ge 0$이 성립하려면

$-1+k\ge 0$ $\quad\therefore$ $k\ge 1$

9 $2e^x-2x>a$에서

$2e^x-2x-a>0$

$f(x)=2e^x-2x-a$라 하면

$f'(x)=2e^x-2$

이때 $x>0$에서 $e^x>1$이므로

$f'(x)>0$

따라서 $x>0$에서 함수 $f(x)$는 증가하므로 $f(x)>0$이 성립하려면 $f(0)\geq 0$이어야 한다.

$2-a\geq 0 \qquad \therefore a\leq 2$

따라서 상수 a의 최댓값은 2이다.

10 $f(x)=\dfrac{x-4}{x^2-8x+20}$라 하면

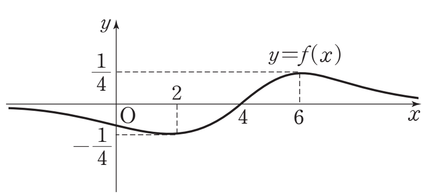
$$f'(x)=\frac{x^2-8x+20-(x-4)\times(2x-8)}{(x^2-8x+20)^2}$$
$$=\frac{-x^2+8x-12}{(x^2-8x+20)^2}$$
$$=\frac{-(x-2)(x-6)}{(x^2-8x+20)^2}$$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=2$ 또는 $x=6$

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	2	$\cdots$	6	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$ 극소	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$ 극대	$\searrow$

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$일 때 최솟값은 $-\dfrac{1}{4}$이고 $x=6$일 때 최댓값은 $\dfrac{1}{4}$이므로

$-\dfrac{1}{4}\leq f(x)\leq\dfrac{1}{4}$

즉, $-\dfrac{1}{4}\leq\dfrac{x-4}{x^2-8x+20}\leq\dfrac{1}{4}$에서

$m\leq-\dfrac{1}{4}$, $M\geq\dfrac{1}{4}$

따라서 $M-m$의 최솟값은

$\dfrac{1}{4}-\left(-\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{1}{2}$

11 $x>0$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프가 함수 $y=g(x)$의 그래프보다 위쪽에 있으려면

$f(x)>g(x) \qquad \therefore f(x)-g(x)>0$

$F(x)=f(x)-g(x)$라 하면

$F(x)=\sqrt{x}-(\ln x+a)=\sqrt{x}-\ln x-a$이므로

$F'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{\sqrt{x}-2}{2x}$

$F'(x)=0$인 x의 값은 $x=4$

$x>0$에서 함수 $F(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	4	$\cdots$
$F'(x)$		$-$	0	$+$
$F(x)$		$\searrow$	$2-\ln 4-a$ 극소	$\nearrow$

따라서 함수 $F(x)$는 $x=4$에서 최솟값 $2-\ln 4-a$를 가지므로 $F(x)>0$이 성립하려면

$2-\ln 4-a>0$

$\therefore a<2-\ln 4$

12 시각 t에서의 점 P의 속도를 v, 가속도를 a라 하면

$v=\dfrac{dx}{dt}=\cos t-2\sin 2t$

$a=\dfrac{dv}{dt}=-\sin t-4\cos 2t$

따라서 $t=\dfrac{\pi}{4}$에서 점 P의 속도는

$\alpha=\cos\dfrac{\pi}{4}-2\sin\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}-2$

또 $t=\dfrac{\pi}{4}$에서 점 P의 가속도는

$\beta=-\sin\dfrac{\pi}{4}-4\cos\dfrac{\pi}{2}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore \alpha+\beta=\dfrac{\sqrt{2}}{2}-2+\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=-2$

13 시각 t에서의 점 P의 속도를 v라 하면

$v=\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{k}{2}\cos\dfrac{t}{2}$

$t=2\pi$에서 점 P의 속도가 1이므로

$\dfrac{k}{2}\cos\dfrac{2\pi}{2}=1$

$-\dfrac{k}{2}=1 \qquad \therefore k=-2$

시각 t에서의 점 P의 가속도를 a라 하면

$a=\dfrac{dv}{dt}=-\dfrac{k}{4}\sin\dfrac{t}{2}=\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{t}{2}$

따라서 $t=2\pi$에서 점 P의 가속도는

$\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{2\pi}{2}=0$

14 시각 t에서의 점 P의 속도를 v, 가속도를 a라 하면

$$v=\frac{dx}{dt}=\frac{2t}{t^2+16}$$

$$a=\frac{dv}{dt}=\frac{2(t^2+16)-2t\times 2t}{(t^2+16)^2}=\frac{-2(t^2-16)}{(t^2+16)^2}$$

가속도가 0이면 $a=0$이므로

$$\frac{-2(t^2-16)}{(t^2+16)^2}=0,\ t^2-16=0$$

$(t+4)(t-4)=0 \qquad \therefore t=4$

15 $\frac{dx}{dt}=2\sqrt{3}e^t\cos t-2\sqrt{3}e^t\sin t$

$\quad =2\sqrt{3}e^t(\cos t-\sin t)$

$\frac{dy}{dt}=2\sqrt{3}e^t\sin t+2\sqrt{3}e^t\cos t$

$\quad =2\sqrt{3}e^t(\sin t+\cos t)$

시각 t에서의 점 P의 속력은

$\sqrt{\{2\sqrt{3}e^t(\cos t-\sin t)\}^2+\{2\sqrt{3}e^t(\sin t+\cos t)\}^2}$

$=2\sqrt{3}e^t\sqrt{2(\sin^2 t+\cos^2 t)}$

$=2\sqrt{6}e^t$

따라서 $t=2$에서 점 P의 속력은 $2\sqrt{6}e^2$이다.

16 $\frac{dx}{dt}=ae^t,\ \frac{dy}{dt}=e^t+te^t=(1+t)e^t$이므로 시각 t에서의 점 P의 속력은

$\sqrt{(ae^t)^2+\{(1+t)e^t\}^2}$

$t=1$에서 점 P의 속력은

$\sqrt{(ae)^2+(2e)^2}=e\sqrt{a^2+4}$

$e\sqrt{a^2+4}=4e$이므로

$\sqrt{a^2+4}=4,\ a^2+4=16$

$a^2=12$

$\therefore a=2\sqrt{3}\ (\because a>0)$

17 $\frac{dx}{dt}=2at+a\sin t,\ \frac{dy}{dt}=1+a\cos t$이므로

$\frac{d^2x}{dt^2}=2a+a\cos t,\ \frac{d^2y}{dt^2}=-a\sin t$

시각 t에서의 점 P의 가속도의 크기는

$\sqrt{(2a+a\cos t)^2+(-a\sin t)^2}$

$=\sqrt{4a^2+4a^2\cos t+a^2\cos^2 t+a^2\sin^2 t}$

$=\sqrt{5a^2+4a^2\cos t}$

$t=\frac{\pi}{2}$에서 가속도의 크기는

$\sqrt{5a^2+4a^2\cos\frac{\pi}{2}}=\sqrt{5a^2}$

따라서 $\sqrt{5a^2}=5$이므로

$5a^2=25,\ a^2=5$

$\therefore a=\sqrt{5}\ (\because a>0)$

18 $\frac{dx}{dt}=\sqrt{3},\ \frac{dy}{dt}=2t-1$이므로 시각 t에서의 점 P의 속력은

$$\sqrt{(\sqrt{3})^2+(2t-1)^2}=\sqrt{4t^2-4t+4}=\sqrt{4\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+3}$$

따라서 점 P는 $t=\frac{1}{2}$일 때 속력이 최소이므로 이때의 점 P의 좌표는

$\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\ -\frac{1}{4}\right)$

19 원점을 출발한 지 t초 후의 점 A, B의 좌표는 각각 A$(3t,\ 0)$, B$(0,\ 6t)$

이때 선분 AB를 2 : 1로 내분하는 점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면

$x=\frac{2\times 0+1\times 3t}{2+1}=t$

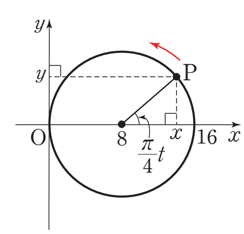
$y=\frac{2\times 6t+1\times 0}{2+1}=4t$

$\therefore$ P$(t,\ 4t)$

이때 $\frac{dx}{dt}=1,\ \frac{dy}{dt}=4$이므로 시각 t에서의 점 P의 속력은

$\sqrt{1^2+4^2}=\sqrt{17}$

20 점 P가 8초 동안 1회전하므로 매초 $\frac{\pi}{4}t$만큼 회전한다.



t초 후의 점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면

$x=8+8\cos\frac{\pi}{4}t,\ y=8\sin\frac{\pi}{4}t$

$\frac{dx}{dt}=-2\pi\sin\frac{\pi}{4}t,\ \frac{dy}{dt}=2\pi\cos\frac{\pi}{4}t$이므로

$\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{\pi^2}{2}\cos\frac{\pi}{4}t,\ \frac{d^2y}{dt^2}=-\frac{\pi^2}{2}\sin\frac{\pi}{4}t$

따라서 시각 t에서의 점 P의 가속도의 크기는

$\sqrt{\left(-\frac{\pi^2}{2}\cos\frac{\pi}{4}t\right)^2+\left(-\frac{\pi^2}{2}\sin\frac{\pi}{4}t\right)^2}$

이므로 $t=16$에서 점 P의 가속도의 크기는

$\sqrt{\left(-\frac{\pi^2}{2}\cos 4\pi\right)^2+\left(-\frac{\pi^2}{2}\sin 4\pi\right)^2}=\frac{\pi^2}{2}$

Ⅲ-1. 여러 가지 적분법

01 여러 가지 함수의 부정적분

기초 문제 Training

p.64

1 (1) $3\ln|x|+C$ (2) $-\dfrac{1}{3x^3}+C$

(3) $\dfrac{5}{8}x^5\sqrt[5]{x^3}+C$ (4) $\dfrac{2}{7}x^3\sqrt{x}+C$

2 (1) $e^{x+3}+C$ (2) $\dfrac{2^{3x}}{3\ln 2}+C$

(3) $-2\cos x-5\sin x+C$ (4) $\tan x+\sec x+C$

3 (1) $\dfrac{1}{12}(2x+1)^6+C$ (2) $\dfrac{1}{3}e^{3x-1}+C$

(3) $\dfrac{1}{5}\sin(5x+2)+C$ (4) $-\dfrac{1}{4(4x-3)}+C$

4 (1) $\dfrac{1}{5}(x^2+3)^5+C$ (2) $-\dfrac{1}{3}\cos^3 x+C$

(3) $\ln|x^2+5x-6|+C$ (4) $\ln(e^x+4)+C$

5 (1) $x+3\ln|x+2|+C$ (2) $\dfrac{1}{2}x^2-x-\ln|x+1|+C$

(3) $\ln\left|\dfrac{x}{x+3}\right|+C$ (4) $\dfrac{1}{4}\ln\left|\dfrac{x-2}{x+2}\right|+C$

6 (1) $-x\cos x+\sin x+C$ (2) xe^x+C

핵심 유형 Training

p.65~70

1 ③	**2** $2e^3+9$	**3** ①	**4** $f(x)=e^x-4x+4$	
5 ②	**6** 3	**7** $\dfrac{1}{2\ln 3}$		
8 $f(x)=2\tan x-x+\dfrac{\pi}{4}$			**9** 2	**10** ②
11 ②	**12** π	**13** ①	**14** $\pi+1$	**15** ③
16 $-\dfrac{9}{20}$	**17** ③	**18** $\dfrac{1}{3e^2}-\dfrac{1}{\ln 2}$		**19** ⑤
20 ②	**21** ②	**22** 2	**23** ①	
24 $f(x)=e^{x^2}-2x^3+4$			**25** $\dfrac{19}{2}$	**26** ③
27 ①	**28** ②	**29** ④	**30** $f(x)=e^{4x}$	
31 7	**32** ④	**33** $\ln 3$	**34** 2	**35** ①
36 ④	**37** $e+3$	**38** ②	**39** $\dfrac{1}{2}e^2$	**40** ③

1 $F(x)=\displaystyle\int\frac{x-9}{\sqrt{x}+3}\,dx=\int\frac{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)}{\sqrt{x}+3}\,dx$

$=\displaystyle\int(\sqrt{x}-3)\,dx=\frac{2}{3}x\sqrt{x}-3x+C$

$\therefore\ F(1)-F(9)=-\dfrac{7}{3}+C-(-9+C)=\dfrac{20}{3}$

2 $f'(x)=\dfrac{4}{x}+3\sqrt{x}$이므로

$f(x)=\displaystyle\int\left(\frac{4}{x}+3\sqrt{x}\right)dx=4\ln|x|+2x\sqrt{x}+C$

곡선 $y=f(x)$가 점 $(1,\ 3)$을 지나므로 $f(1)=3$에서

$2+C=3\qquad\therefore\ C=1$

따라서 $f(x)=4\ln|x|+2x\sqrt{x}+1$이므로

$f(e^2)=2e^3+9$

3 $f_n(x)=\displaystyle\int x^{\frac{1}{n+2}}\,dx=\frac{n+2}{n+3}x^{\frac{n+3}{n+2}}+C$

$f_n(0)=0$에서 $C=0$

$\therefore\ f_n(x)=\dfrac{n+2}{n+3}x^{\frac{n+3}{n+2}}$

$\therefore\ f_1(1)\times f_2(1)\times f_3(1)\times\cdots\times f_{12}(1)$

$=\dfrac{3}{\cancel{4}}\times\dfrac{\cancel{4}}{\cancel{5}}\times\dfrac{\cancel{5}}{\cancel{6}}\times\cdots\times\dfrac{\cancel{14}}{15}$

$=\dfrac{1}{5}$

4 $f(x)=\displaystyle\int(\sqrt{e^x}+2)(\sqrt{e^x}-2)\,dx$

$=\displaystyle\int(e^x-4)\,dx=e^x-4x+C$

$f(0)=5$에서 $1+C=5\qquad\therefore\ C=4$

$\therefore\ f(x)=e^x-4x+4$

5 $f(x)=\displaystyle\int\frac{8^x+1}{2^x+1}\,dx$

$=\displaystyle\int\frac{(2^x+1)(4^x-2^x+1)}{2^x+1}\,dx$

$=\displaystyle\int(4^x-2^x+1)\,dx$

$=\dfrac{4^x}{\ln 4}-\dfrac{2^x}{\ln 2}+x+C$

$f(0)=-1$에서

$\dfrac{1}{\ln 4}-\dfrac{1}{\ln 2}+C=-1\qquad\therefore\ C=\dfrac{1}{\ln 2}-1$

따라서 $f(x)=\dfrac{4^x}{\ln 4}-\dfrac{2^x}{\ln 2}+x+\dfrac{1}{\ln 4}-1$이므로

$f(1)=\dfrac{4}{\ln 4}-\dfrac{2}{\ln 2}+1+\dfrac{1}{\ln 4}-1=\dfrac{1}{\ln 4}$

6 $x\neq0$일 때, $f(x)=\int(2e^x-3e^{-x})\,dx=2e^x+3e^{-x}+C$

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이므로

$\lim_{x\to0}f(x)=f(0)$

$5+C=1 \qquad \therefore C=-4$

따라서 $f(x)=\begin{cases}2e^x+3e^{-x}-4 & (x\neq0)\\ 1 & (x=0)\end{cases}$이므로

$f(\ln3)=2e^{\ln3}+3e^{-\ln3}-4$

$=2\times3+3\times\frac{1}{3}-4=3$

7 $\{f(x)+2g(x)\}'=3^x$, $\{f(x)-2g(x)\}'=3^{-x}$에서

$f'(x)+2g'(x)=3^x$, $f'(x)-2g'(x)=3^{-x}$

$\therefore f'(x)=\frac{3^x+3^{-x}}{2}$, $g'(x)=\frac{3^x-3^{-x}}{4}$

$f(x)=\int\frac{3^x+3^{-x}}{2}\,dx=\frac{1}{2}\left(\frac{3^x}{\ln3}-\frac{3^{-x}}{\ln3}\right)+C_1$

$g(x)=\int\frac{3^x-3^{-x}}{4}\,dx=\frac{1}{4}\left(\frac{3^x}{\ln3}+\frac{3^{-x}}{\ln3}\right)+C_2$

$f(0)=0$에서 $C_1=0$, $g(0)=\frac{1}{2\ln3}$에서 $C_2=0$

따라서 $f(x)=\frac{3^x-3^{-x}}{2\ln3}$, $g(x)=\frac{3^x+3^{-x}}{4\ln3}$이므로

$f(1)-g(1)=\frac{4}{3\ln3}-\frac{5}{6\ln3}=\frac{1}{2\ln3}$

8 $f(x)=\int(\tan^2x+\sec^2x)\,dx$

$=\int\{(\sec^2x-1)+\sec^2x\}\,dx$

$=\int(2\sec^2x-1)\,dx$

$=2\tan x-x+C$

$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=2$에서 $2-\frac{\pi}{4}+C=2 \qquad \therefore C=\frac{\pi}{4}$

$\therefore f(x)=2\tan x-x+\frac{\pi}{4}$

9 $f(x)=\int\frac{2\cos^2x}{\sin x-1}\,dx$

$=\int\frac{2(1-\sin^2x)}{\sin x-1}\,dx$

$=\int\frac{2(1-\sin x)(1+\sin x)}{\sin x-1}\,dx$

$=-2\int(1+\sin x)\,dx$

$=-2x+2\cos x+C$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=3\pi$에서 $-\pi+C=3\pi \qquad \therefore C=4\pi$

따라서 $f(x)=-2x+2\cos x+4\pi$이므로

$f(2\pi)=-4\pi+2+4\pi=2$

10 $\int\frac{1}{1-\cos x}\,dx=\int\frac{1+\cos x}{(1-\cos x)(1+\cos x)}\,dx$

$=\int\frac{1+\cos x}{1-\cos^2x}\,dx$

$=\int\frac{1+\cos x}{\sin^2x}\,dx$

$=\int(\csc^2x+\csc x\cot x)\,dx$

$=-\cot x-\csc x+C$

따라서 $a=-1$, $b=-1$이므로 $a+b=-2$

11 $F(x)=\int\left(\cos x-\sin^2\frac{x}{2}\right)dx$

$=\int\left(\cos x-\frac{1-\cos x}{2}\right)dx$

$=\int\left(\frac{3}{2}\cos x-\frac{1}{2}\right)dx$

$=\frac{3}{2}\sin x-\frac{1}{2}x+C$

$\therefore F\left(\frac{\pi}{2}\right)-F(\pi)=\frac{3}{2}-\frac{\pi}{4}+C-\left(-\frac{\pi}{2}+C\right)$

$=\frac{3}{2}+\frac{\pi}{4}$

12 $f'(x)=\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2$

$=\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$

$=1+\sin x$

$\therefore f(x)=\int(1+\sin x)\,dx=x-\cos x+C$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$에서 $\frac{\pi}{2}+C=0 \qquad \therefore C=-\frac{\pi}{2}$

따라서 $f(x)=x-\cos x-\frac{\pi}{2}$이므로

$f\left(\frac{3}{2}\pi\right)=\frac{3}{2}\pi-0-\frac{\pi}{2}=\pi$

13 $x>0$일 때, $f(x)=\int(1-\cos x)\,dx=x-\sin x+C_1$

$x<0$일 때, $f(x)=\int(2x+\sin x)\,dx=x^2-\cos x+C_2$

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이므로

$\lim_{x\to0+}f(x)=\lim_{x\to0-}f(x)=f(0)$

$C_1=-1+C_2$ ⋯⋯ ㉠

한편 $f(-\pi)=\pi^2$에서

$\pi^2+1+C_2=\pi^2 \qquad \therefore C_2=-1$

이를 ㉠에 대입하면 $C_1=-2$

따라서 $x\geq0$일 때, $f(x)=x-\sin x-2$이므로

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}-1-2=\frac{\pi}{2}-3$

14 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=f(x)+xf'(x)-2x+\cos x-x\sin x-\cos x$

$xf'(x)=2x+x\sin x$

$\therefore\ f'(x)=2+\sin x$

$f(x)=\int(2+\sin x)\,dx=2x-\cos x+C$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$에서 $\pi+C=0$ $\quad\therefore\ C=-\pi$

따라서 $f(x)=2x-\cos x-\pi$이므로

$f(\pi)=2\pi+1-\pi=\pi+1$

15 $2x+\frac{1}{3}=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=2$이므로

$\int\left(2x+\frac{1}{3}\right)^7dx=\int t^7\times\frac{1}{2}\,dt=\frac{1}{16}t^8+C$

$=\frac{1}{16}\left(2x+\frac{1}{3}\right)^8+C$

따라서 $a=16$, $b=8$이므로 $a-b=8$

16 $x^2+1=t$로 놓으면 $x^2=t-1$이고, $\frac{dt}{dx}=2x$이므로

$\int 2x^3(x^2+1)^3dx=\int(t-1)t^3\,dt=\int(t^4-t^3)\,dt$

$=\frac{1}{5}t^5-\frac{1}{4}t^4+C$

$=\frac{1}{5}(x^2+1)^5-\frac{1}{4}(x^2+1)^4+C$

$f(1)=2$에서 $\frac{12}{5}+C=2$ $\quad\therefore\ C=-\frac{2}{5}$

따라서 $f(x)=\frac{1}{5}(x^2+1)^5-\frac{1}{4}(x^2+1)^4-\frac{2}{5}$이므로

$f(0)=\frac{1}{5}-\frac{1}{4}-\frac{2}{5}=-\frac{9}{20}$

17 $\sqrt{x+1}=t$로 놓으면 $x=t^2-1$이고,

$\frac{dt}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{x+1}}=\frac{1}{2t}$이므로

$f(x)=\int\frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx=\int\frac{t^2-1}{t}\times 2t\,dt$

$=2\int(t^2-1)\,dt$

$=\frac{2}{3}t^3-2t+C$

$=\frac{2}{3}(x+1)\sqrt{x+1}-2\sqrt{x+1}+C$

$f(0)=-1$에서

$\frac{2}{3}-2+C=-1$ $\quad\therefore\ C=\frac{1}{3}$

따라서 $f(x)=\frac{2}{3}(x+1)\sqrt{x+1}-2\sqrt{x+1}+\frac{1}{3}$이므로

$f(-1)=\frac{1}{3}$

18 $f(x)=\int(e^{3x-2}+2^{1-x})\,dx$

$=\int e^{3x-2}dx+\int 2^{1-x}dx$

(i) $\int e^{3x-2}dx$에서 $3x-2=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=3$이므로

$\int e^{3x-2}dx=\int e^t\times\frac{1}{3}\,dt$

$=\frac{1}{3}e^t+C_1=\frac{1}{3}e^{3x-2}+C_1$

(ii) $\int 2^{1-x}dx$에서 $1-x=s$로 놓으면 $\frac{ds}{dx}=-1$이므로

$\int 2^{1-x}dx=-\int 2^s ds$

$=-\frac{2^s}{\ln 2}+C_2=-\frac{2^{1-x}}{\ln 2}+C_2$

$\therefore\ f(x)=\int e^{3x-2}dx+\int 2^{1-x}dx$

$=\frac{1}{3}e^{3x-2}-\frac{2^{1-x}}{\ln 2}+C$

$f(1)=\frac{e}{3}$에서 $\frac{e}{3}-\frac{1}{\ln 2}+C=\frac{e}{3}$ $\quad\therefore\ C=\frac{1}{\ln 2}$

따라서 $f(x)=\frac{1}{3}e^{3x-2}-\frac{2^{1-x}}{\ln 2}+\frac{1}{\ln 2}$이므로

$f(0)=\frac{1}{3e^2}-\frac{1}{\ln 2}$

19 $F(x)=\int f(x)\,dx=\int(1-\sin x)^2dx$

$=\int(\sin^2 x-2\sin x+1)\,dx$

$=\int\left(\frac{1-\cos 2x}{2}-2\sin x+1\right)dx$

$=\int\left(-\frac{1}{2}\cos 2x-2\sin x+\frac{3}{2}\right)dx$

$=-\frac{1}{4}\sin 2x+2\cos x+\frac{3}{2}x+C$

$F(0)=4$에서 $2+C=4$ $\quad\therefore\ C=2$

따라서 $F(x)=-\frac{1}{4}\sin 2x+2\cos x+\frac{3}{2}x+2$이므로

$F(\pi)=-2+\frac{3}{2}\pi+2=\frac{3}{2}\pi$

20 $f(x)=\int(\sin 2x-\cos 2x)\,dx$

$=-\frac{1}{2}\cos 2x-\frac{1}{2}\sin 2x+C$

$f'(x)=0$인 x의 값은

$\sin 2x-\cos 2x=0$, $\tan 2x=1$

$\therefore\ 2x=\frac{\pi}{4}$ 또는 $2x=\frac{3}{4}\pi$

$\therefore\ x=\frac{\pi}{8}$ 또는 $x=\frac{3}{8}\pi$ ($\because\ 0<2x<2\pi$)

$0<x<\pi$에서 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{8}$	$\cdots$	$\frac{3}{8}\pi$	$\cdots$	π
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		↘	극소	↗	극대	↘	

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\frac{3}{8}\pi$에서 극대, $x=\frac{\pi}{8}$에서 극소이고 극댓값이 $\sqrt{2}$이므로 $f\left(\frac{3}{8}\pi\right)=\sqrt{2}$에서 $C=\sqrt{2}$

즉, $f(x)=-\frac{1}{2}\cos 2x-\frac{1}{2}\sin 2x+\sqrt{2}$이므로 극솟값은

$f\left(\frac{\pi}{8}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{4}-\frac{\sqrt{2}}{4}+\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

21 $x^3-4x+2=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=3x^2-4$이므로

$f(x)=\int(3x^2-4)(x^3-4x+2)^3dx$

$=\int t^3dt=\frac{1}{4}t^4+C$

$=\frac{1}{4}(x^3-4x+2)^4+C$

$f(1)=\frac{5}{4}$에서 $\frac{1}{4}+C=\frac{5}{4}$ $\quad\therefore C=1$

따라서 $f(x)=\frac{1}{4}(x^3-4x+2)^4+1$이므로

$f(0)=5$

22 $f'(x)=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$이므로 $1-x^2=t$로 놓으면

$\frac{dt}{dx}=-2x$

$\therefore f(x)=\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

$=-\int\frac{1}{2\sqrt{t}}dt$

$=-\sqrt{t}+C=-\sqrt{1-x^2}+C$

$f(0)=1$에서 $-1+C=1$ $\quad\therefore C=2$

따라서 $f(x)=-\sqrt{1-x^2}+2$이므로

$a=f(-1)=2$

23 $e^{3x}+2=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=3e^{3x}$이므로

$\int e^{3x}\sqrt{e^{3x}+2}\,dx=\int\frac{1}{3}\sqrt{t}\,dt$

$=\frac{2}{9}t\sqrt{t}+C$

$=\frac{2}{9}(e^{3x}+2)\sqrt{e^{3x}+2}+C$

$\therefore a=\frac{2}{9}$

24 $f(x)=\int 2x(e^{x^2}-3x)dx=\int(2xe^{x^2}-6x^2)dx$

$=\int 2xe^{x^2}dx-\int 6x^2dx$

$\int 2xe^{x^2}dx$에서 $x^2=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=2x$이므로

$f(x)=\int 2xe^{x^2}dx-\int 6x^2dx$

$=\int e^tdt-\int 6x^2dx=e^{x^2}-2x^3+C$

$f(0)=5$에서 $1+C=5$ $\quad\therefore C=4$

$\therefore f(x)=e^{x^2}-2x^3+4$

25 $F(x)=\int f(x)dx=\int\frac{2(\ln x)^3+1}{x}dx$

$\ln x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}$이므로

$F(x)=\int\frac{2(\ln x)^3+1}{x}dx=\int(2t^3+1)dt$

$=\frac{1}{2}t^4+t+C=\frac{1}{2}(\ln x)^4+\ln x+C$

$F(e)=1$에서 $\frac{1}{2}+1+C=1$ $\quad\therefore C=-\frac{1}{2}$

따라서 $F(x)=\frac{1}{2}(\ln x)^4+\ln x-\frac{1}{2}$이므로

$F(e^2)=8+2-\frac{1}{2}=\frac{19}{2}$

26 $\ln x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}$이므로

$f(x)=\int\frac{\cos(\ln x)}{x}dx=\int\cos t\,dt$

$=\sin t+C=\sin(\ln x)+C$

$f(e^{\pi})=1$에서 $C=1$

따라서 $f(x)=\sin(\ln x)+1$이므로

$f(e^{\frac{\pi}{6}})=\sin\frac{\pi}{6}+1=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$

27 $f(x)=\int\sin x\cos 2x\,dx=\int\sin x(2\cos^2x-1)dx$

$\cos x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=-\sin x$이므로

$f(x)=\int\sin x(2\cos^2x-1)dx$

$=-\int(2t^2-1)dt=-\frac{2}{3}t^3+t+C$

$=-\frac{2}{3}\cos^3x+\cos x+C$

$\therefore f(\pi)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{1}{3}+C-C=-\frac{1}{3}$

28 $(x^2+4x+5)'=2x+4$이므로

$$f(x)=\int\frac{x+2}{x^2+4x+5}dx=\frac{1}{2}\int\frac{(x^2+4x+5)'}{x^2+4x+5}dx$$
$$=\frac{1}{2}\ln(x^2+4x+5)+C\ (\because\ x^2+4x+5>0)$$

$f(-2)=0$에서 $C=0$

따라서 $f(x)=\frac{1}{2}\ln(x^2+4x+5)$이므로

$f(-1)=\frac{\ln 2}{2}$

29 $$f(x)=\int\frac{e^{2x}}{e^{2x}-\sin x}dx-\frac{1}{2}\int\frac{\cos x}{e^{2x}-\sin x}dx$$
$$=\frac{1}{2}\int\frac{2e^{2x}-\cos x}{e^{2x}-\sin x}dx$$

$(e^{2x}-\sin x)'=2e^{2x}-\cos x$이므로

$$f(x)=\frac{1}{2}\int\frac{2e^{2x}-\cos x}{e^{2x}-\sin x}dx$$
$$=\frac{1}{2}\int\frac{(e^{2x}-\sin x)'}{e^{2x}-\sin x}dx$$
$$=\frac{1}{2}\ln|e^{2x}-\sin x|+C$$

$f(0)=0$에서 $C=0$

따라서 $f(x)=\frac{1}{2}\ln|e^{2x}-\sin x|$이므로

$f(\pi)=\frac{1}{2}\ln e^{2\pi}=\pi$

30 $f'(x)=4f(x)$에서 $\frac{f'(x)}{f(x)}=4$이므로

$$\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\int 4\,dx$$

$\ln f(x)=4x+C\ (\because\ f(x)>0)$

$\therefore\ f(x)=e^{4x+C}$

이때 $f'(0)=4$이므로

$4=4f(0)\qquad\therefore\ f(0)=1$

따라서 $f(0)=e^C=1$이므로 $C=0$

$\therefore\ f(x)=e^{4x}$

31 $$f(x)=\int\frac{3-x}{x+2}dx$$
$$=\int\left(-1+\frac{5}{x+2}\right)dx$$
$$=-x+5\ln|x+2|+C$$

$f(-1)=5$에서 $1+C=5\qquad\therefore\ C=4$

따라서 $f(x)=-x+5\ln|x+2|+4$이므로

$f(-3)=3+4=7$

32 $$f(x)=\int\frac{2x^2+3x+1}{x-1}dx$$
$$=\int\left(2x+5+\frac{6}{x-1}\right)dx$$
$$=x^2+5x+6\ln|x-1|+C$$

$f(2)=20$에서 $14+C=20\qquad\therefore\ C=6$

따라서 $f(x)=x^2+5x+6\ln|x-1|+6$이므로

$f(-1)=2+6\ln 2$

33 $$f(x)=\int\frac{x+4}{2x^2-5x-3}dx$$
$$=\int\frac{x+4}{(x-3)(2x+1)}dx$$
$$=\int\left(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{2x+1}\right)dx$$
$$=\ln|x-3|-\frac{1}{2}\ln|2x+1|+C$$

$f(4)=-\ln 3$에서

$-\ln 3+C=-\ln 3\qquad\therefore\ C=0$

따라서 $f(x)=\ln|x-3|-\frac{1}{2}\ln|2x+1|$이므로

$f(0)=\ln 3$

34 $\frac{x^2+2}{(x+1)(x^2+x+1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1}$ (A, B, C는 상수)라 하면

$$\frac{x^2+2}{(x+1)(x^2+x+1)}$$
$$=\frac{(A+B)x^2+(A+B+C)x+A+C}{(x+1)(x^2+x+1)}$$

위의 식은 x에 대한 항등식이므로

$A+B=1$, $A+B+C=0$, $A+C=2$

$\therefore\ A=3$, $B=-2$, $C=-1$

$$\therefore\ \int\frac{x^2+2}{(x+1)(x^2+x+1)}dx$$
$$=\int\left(\frac{3}{x+1}-\frac{2x+1}{x^2+x+1}\right)dx$$
$$=3\ln|x+1|-\ln(x^2+x+1)+C$$

따라서 $a=3$, $b=-1$이므로 $a+b=2$

35 $f(x)=3x+2$, $g'(x)=e^x$이라 하면

$f'(x)=3$, $g(x)=e^x$이므로

$$\int(3x+2)e^x dx=(3x+2)e^x-\int 3e^x dx$$
$$=(3x+2)e^x-3e^x+C$$
$$=(3x-1)e^x+C$$

따라서 $a=3$, $b=-1$이므로 $a+b=2$

36 $u(x)=x+1$, $v'(x)=\cos 2x$라 하면

$u'(x)=1$, $v(x)=\frac{1}{2}\sin 2x$이므로

$$f(x)=\int(x+1)\cos 2x\,dx$$
$$=\frac{1}{2}(x+1)\sin 2x-\int\frac{1}{2}\sin 2x\,dx$$
$$=\frac{1}{2}(x+1)\sin 2x+\frac{1}{4}\cos 2x+C$$

$f(\pi)=\frac{1}{4}$에서 $\frac{1}{4}+C=\frac{1}{4}$ $\quad\therefore C=0$

따라서 $f(x)=\frac{1}{2}(x+1)\sin 2x+\frac{1}{4}\cos 2x$이므로

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{1}{4}$

37 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=f(x)+xf'(x)-2x\ln x-x$

$xf'(x)=2x\ln x+x$

따라서 $f'(x)=2\ln x+1$이므로

$$f(x)=\int(2\ln x+1)\,dx=2\int\ln x\,dx+\int dx$$

$\int\ln x\,dx$에서 $u(x)=\ln x$, $v'(x)=1$이라 하면

$u'(x)=\frac{1}{x}$, $v(x)=x$이므로

$$\int\ln x\,dx=x\ln x-\int dx=x\ln x-x+C_1$$

$$\therefore f(x)=2\int\ln x\,dx+\int dx$$
$$=2x\ln x-2x+x+C$$
$$=2x\ln x-x+C$$

$f(1)=2$에서 $-1+C=2$ $\quad\therefore C=3$

따라서 $f(x)=2x\ln x-x+3$이므로

$f(e)=2e-e+3=e+3$

38 $f(x)=x^2$, $g'(x)=\cos x$라 하면

$f'(x)=2x$, $g(x)=\sin x$이므로

$$\int x^2\cos x\,dx=x^2\sin x-\int 2x\sin x\,dx \quad \cdots\cdots ㉠$$

$\int 2x\sin x\,dx$에서 $u(x)=2x$, $v'(x)=\sin x$라 하면

$u'(x)=2$, $v(x)=-\cos x$이므로

$$\int 2x\sin x\,dx=-2x\cos x+\int 2\cos x\,dx$$
$$=-2x\cos x+2\sin x+C_1 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$\int x^2\cos x\,dx=x^2\sin x+2x\cos x-2\sin x+C$$
$$=(x^2-2)\sin x+2x\cos x+C$$

따라서 $p=1$, $q=-2$, $r=2$이므로

$p-q+r=5$

39 $g(x)=(\ln x)^2$, $h'(x)=2x$라 하면

$g'(x)=\frac{2}{x}\ln x$, $h(x)=x^2$이므로

$$\int 2x(\ln x)^2\,dx=x^2(\ln x)^2-\int 2x\ln x\,dx \quad \cdots\cdots ㉠$$

$\int 2x\ln x\,dx$에서 $u(x)=\ln x$, $v'(x)=2x$라 하면

$u'(x)=\frac{1}{x}$, $v(x)=x^2$이므로

$$\int 2x\ln x\,dx=x^2\ln x-\int x\,dx$$
$$=x^2\ln x-\frac{1}{2}x^2+C_1 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$\int 2x(\ln x)^2\,dx=x^2(\ln x)^2-x^2\ln x+\frac{1}{2}x^2+C$$

$f(1)=\frac{1}{2}$에서

$\frac{1}{2}+C=\frac{1}{2}$ $\quad\therefore C=0$

따라서 $f(x)=x^2(\ln x)^2-x^2\ln x+\frac{1}{2}x^2$이므로

$f(e)=e^2-e^2+\frac{1}{2}e^2=\frac{1}{2}e^2$

40 $h(x)=\int 5f(x)g'(x)\,dx=5\int e^{2x}\sin x\,dx$

$\int e^{2x}\sin x\,dx$에서 $u(x)=e^{2x}$, $v'(x)=\sin x$라 하면

$u'(x)=2e^{2x}$, $v(x)=-\cos x$이므로

$$\int e^{2x}\sin x\,dx=-e^{2x}\cos x+\int 2e^{2x}\cos x\,dx \quad \cdots\cdots ㉠$$

$\int 2e^{2x}\cos x\,dx$에서 $s(x)=2e^{2x}$, $t'(x)=\cos x$라 하면

$s'(x)=4e^{2x}$, $t(x)=\sin x$이므로

$$\int 2e^{2x}\cos x\,dx=2e^{2x}\sin x-\int 4e^{2x}\sin x\,dx \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$\int e^{2x}\sin x\,dx=-e^{2x}\cos x+2e^{2x}\sin x-4\int e^{2x}\sin x\,dx$$

$$5\int e^{2x}\sin x\,dx=-e^{2x}\cos x+2e^{2x}\sin x$$

$\therefore h(x)=-e^{2x}\cos x+2e^{2x}\sin x+C$

$h(0)=-1$에서

$-1+C=-1$ $\quad\therefore C=0$

따라서 $h(x)=-e^{2x}\cos x+2e^{2x}\sin x$이므로

$h\left(\frac{\pi}{2}\right)=2e^{\pi}$

02 여러 가지 함수의 정적분

기초 문제 Training
p.71

1 (1) $\frac{52}{3}$ (2) 1 (3) e^3-1
(4) $\frac{24}{\ln 3}$ (5) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (6) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

2 (1) $10\sqrt{5}-\frac{6}{5}$ (2) $\frac{4}{\ln 2}$ (3) $-\frac{1}{e}$ (4) 3

3 (1) $\frac{45}{4}$ (2) $1+\frac{\pi}{4}$

4 (1) 0 (2) 2

5 (1) $\frac{11}{5}$ (2) $\frac{4\sqrt{2}}{3}$ (3) $\frac{e^5-e^3}{2}$
(4) $\ln 2$ (5) $\frac{1}{3}$ (6) $\ln 10$

6 (1) -2 (2) $\frac{e^2+1}{4}$

핵심 유형 Training
p.72~78

1 ② **2** ③ **3** 5 **4** ② **5** ①
6 $e+6$ **7** ③ **8** $4\ln 2+e-5$ **9** $\frac{4}{3}$
10 $8\ln\frac{3}{2}+\frac{29}{3}$ **11** $2-2\pi$ **12** ① **13** ④
14 ㄴ **15** ④ **16** $3\ln\frac{3}{2}-1$ **17** ③
18 3 **19** ② **20** $\frac{1}{2}+\ln 2$ **21** ④
22 ② **23** $\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}$ **24** $\frac{\pi}{4}$ **25** 1
26 ① **27** ② **28** ④ **29** $\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\ln 3$
30 ④ **31** ② **32** ⑤ **33** $\frac{1}{2}e^4+\frac{1}{2}$
34 ① **35** $-\frac{5}{13}$ **36** $f(x)=2-\pi\cos x$
37 2 **38** $\frac{3}{2}$ **39** 2 **40** $\frac{7}{6}$ **41** ⑤
42 2 **43** ② **44** $\frac{\pi}{3}-\sqrt{3}$ **45** ③
46 ① **47** $-2e^{2\pi}$ **48** ④

1 $\displaystyle\int_1^4 \frac{2\sqrt{x}-4}{x^2}dx=\int_1^4 (2x^{-\frac{3}{2}}-4x^{-2})dx$
$\displaystyle=\left[-\frac{4}{\sqrt{x}}+\frac{4}{x}\right]_1^4=-1$

2 $\displaystyle\int_{-1}^0 \sqrt{2^{2x}+2^{x+2}+4}\,dx=\int_{-1}^0 \sqrt{(2^x+2)^2}\,dx$
$\displaystyle=\int_{-1}^0 (2^x+2)\,dx$
$\displaystyle=\left[\frac{2^x}{\ln 2}+2x\right]_{-1}^0$
$\displaystyle=\frac{1}{2\ln 2}+2$

3 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{3+4\cos^3 x}{\cos^2 x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}} (3\sec^2 x+4\cos x)\,dx$
$\displaystyle=\Big[3\tan x+4\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}$
$=3+2\sqrt{2}$
따라서 $a=3$, $b=2$이므로 $a+b=5$

4 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 2x}{1+\cos x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-(2\cos^2 x-1)}{1+\cos x}dx$
$\displaystyle=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2(1+\cos x)(1-\cos x)}{1+\cos x}dx$
$\displaystyle=\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2(1-\cos x)\,dx$
$\displaystyle=\Big[2x-2\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$
$=\pi-2$

5 $\displaystyle\int_0^a \frac{1}{x^2+3x+2}dx=\int_0^a \frac{1}{(x+1)(x+2)}dx$
$\displaystyle=\int_0^a \left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right)dx$
$\displaystyle=\Big[\ln(x+1)-\ln(x+2)\Big]_0^a$
$=\ln(a+1)-\ln(a+2)+\ln 2$
$\displaystyle=\ln\frac{2a+2}{a+2}$
따라서 $\ln\frac{2a+2}{a+2}=\ln\frac{3}{2}$이므로
$\frac{2a+2}{a+2}=\frac{3}{2}$, $4a+4=3a+6$ $\quad\therefore a=2$

6 $\displaystyle\int_{-8}^4 (e^{x-3}+2x)\,dx-\int_{-8}^3 (e^{t-3}+2t)\,dt$
$\displaystyle=\int_{-8}^4 (e^{x-3}+2x)\,dx+\int_3^{-8} (e^{x-3}+2x)\,dx$
$\displaystyle=\int_3^4 (e^{x-3}+2x)\,dx$
$\displaystyle=\Big[e^{x-3}+x^2\Big]_3^4=e+6$

7 $\int_0^2 \frac{2x^4+x}{x+3}dx+2\int_2^0 \frac{x^4}{x+3}dx$

$=\int_0^2 \frac{2x^4+x}{x+3}dx-\int_0^2 \frac{2x^4}{x+3}dx$

$=\int_0^2 \frac{x}{x+3}dx$

$=\int_0^2 \left(1-\frac{3}{x+3}\right)dx$

$=\Big[x-3\ln(x+3)\Big]_0^2$

$=2+3\ln\frac{3}{5}$

따라서 $a=2$, $b=3$이므로 $ab=6$

8 $e^x-2=0$에서 $x=\ln 2$

따라서 $|e^x-2|=\begin{cases} e^x-2 & (x\ge \ln 2) \\ -e^x+2 & (x\le \ln 2)\end{cases}$이므로

$\int_0^1 |e^x-2|\,dx=\int_0^{\ln 2}(-e^x+2)\,dx+\int_{\ln 2}^1 (e^x-2)\,dx$

$=\Big[-e^x+2x\Big]_0^{\ln 2}+\Big[e^x-2x\Big]_{\ln 2}^1$

$=2\ln 2-1+(e+2\ln 2-4)$

$=4\ln 2+e-5$

9 $(g\circ f)(x)=\sqrt{|x-3|}$이므로

$\sqrt{|x-3|}=0$에서 $x=3$

따라서 $\sqrt{|x-3|}=\begin{cases} \sqrt{x-3} & (x\ge 3) \\ \sqrt{-x+3} & (x\le 3)\end{cases}$이므로

$\int_2^4 (g\circ f)(x)\,dx$

$=\int_2^3 \sqrt{-x+3}\,dx+\int_3^4 \sqrt{x-3}\,dx$

$=\Big[-\frac{2}{3}(-x+3)\sqrt{-x+3}\Big]_2^3+\Big[\frac{2}{3}(x-3)\sqrt{x-3}\Big]_3^4$

$=\frac{2}{3}+\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$

10 (i) $\frac{x}{2}\le 2$, 즉 $x\le 4$일 때 $\frac{x}{2}*2=\sqrt{x}$

(ii) $\frac{x}{2}>2$, 즉 $x>4$일 때 $\frac{x}{2}*2=\frac{4}{x}+1$

$\therefore \int_1^9 \left(\frac{x}{2}*2\right)dx=\int_1^4 \sqrt{x}\,dx+\int_4^9 \left(\frac{4}{x}+1\right)dx$

$=\Big[\frac{2}{3}x\sqrt{x}\Big]_1^4+\Big[4\ln x+x\Big]_4^9$

$=\frac{14}{3}+\left(4\ln\frac{9}{4}+5\right)$

$=8\ln\frac{3}{2}+\frac{29}{3}$

11 함수 $f(x)$가 $x=\pi$에서 연속이므로

$\lim_{x\to\pi+} f(x)=\lim_{x\to\pi-} f(x)=f(\pi)$

$\sin\pi+k=-2$ $\quad\therefore k=-2$

$\therefore \int_0^{2\pi} f(x)\,dx=\int_0^{\pi}(\sin x-2)\,dx+\int_{\pi}^{2\pi} 2\cos x\,dx$

$=\Big[-\cos x-2x\Big]_0^{\pi}+\Big[2\sin x\Big]_{\pi}^{2\pi}$

$=2-2\pi$

12 $\int_{-\frac{\pi}{4}}^0 (2\sin x-3\cos x+\tan x)\,dx$

$-\int_{\frac{\pi}{4}}^0 (2\sin x-3\cos x+\tan x)\,dx$

$=\int_{-\frac{\pi}{4}}^0 (2\sin x-3\cos x+\tan x)\,dx$

$+\int_0^{\frac{\pi}{4}} (2\sin x-3\cos x+\tan x)\,dx$

$=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (2\sin x-3\cos x+\tan x)\,dx$

이때 $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sin x\,dx=0$, $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \tan x\,dx=0$이므로

$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (2\sin x-3\cos x+\tan x)\,dx$

$=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (-3\cos x)\,dx$

$=2\int_0^{\frac{\pi}{4}} (-3\cos x)\,dx$

$=2\Big[-3\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=-3\sqrt{2}$

13 $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\{f'(x)+3\}\,dx$

$=\int_{-\pi}^{\pi} (x^2+\cos x)(2x-\sin x+3)\,dx$

$=\int_{-\pi}^{\pi} (2x^3-x^2\sin x+3x^2+2x\cos x$

$-\sin x\cos x+3\cos x)\,dx$

이때 $\int_{-\pi}^{\pi} x^3\,dx=0$, $\int_{-\pi}^{\pi} x^2\sin x\,dx=0$,

$\int_{-\pi}^{\pi} x\cos x\,dx=0$, $\int_{-\pi}^{\pi} \sin x\cos x\,dx=0$이므로

$\int_{-\pi}^{\pi} (2x^3-x^2\sin x+3x^2+2x\cos x$

$-\sin x\cos x+3\cos x)\,dx$

$=\int_{-\pi}^{\pi} (3x^2+3\cos x)\,dx$

$=2\int_0^{\pi} (3x^2+3\cos x)\,dx$

$=2\Big[x^3+3\sin x\Big]_0^{\pi}=2\pi^3$

14 ㄱ. $f(-x)=-x(e^{-x}-e^{x})$

$=x(e^{x}-e^{-x})=f(x)$

$\therefore \int_{-a}^{a} f(x)\,dx=2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$

ㄴ. $g(x)=xf(x)$라 하면

$g(-x)=-xf(-x)$

$=-xf(x)=-g(x)$

$\therefore \int_{-a}^{a} xf(x)\,dx=0$

ㄷ. $f'(x)=(e^{x}-e^{-x})+x(e^{x}+e^{-x})$이므로

$xf'(x)=x(e^{x}-e^{-x})+x^2(e^{x}+e^{-x})$

$h(x)=xf'(x)$라 하면

$h(-x)=-x(e^{-x}-e^{x})+x^2(e^{-x}+e^{x})$

$=x(e^{x}-e^{-x})+x^2(e^{x}+e^{-x})$

$=h(x)$

$\therefore \int_{-a}^{a} xf'(x)\,dx=2\int_{0}^{a} xf'(x)\,dx$

따라서 정적분의 값이 항상 0인 것은 ㄴ이다.

15 $1-x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=-1$이고, $x=0$일 때 $t=1$, $x=1$일 때 $t=0$이므로

$$\int_{0}^{1} x\sqrt{1-x}\,dx=-\int_{1}^{0}(1-t)\sqrt{t}\,dt$$

$$=\int_{0}^{1}(\sqrt{t}-t\sqrt{t})\,dt$$

$$=\left[\frac{2}{3}t\sqrt{t}-\frac{2}{5}t^2\sqrt{t}\right]_{0}^{1}$$

$$=\frac{4}{15}$$

따라서 $p=15$, $q=4$이므로

$p+q=19$

16 $2+\ln x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}$이고, $x=1$일 때 $t=2$, $x=e$일 때 $t=3$이므로

$$\int_{1}^{e} \frac{3\ln x}{x(2+\ln x)^2}\,dx=\int_{2}^{3} \frac{3(t-2)}{t^2}\,dt$$

$$=\int_{2}^{3}\left(\frac{3}{t}-\frac{6}{t^2}\right)dt$$

$$=\left[3\ln t+\frac{6}{t}\right]_{2}^{3}$$

$$=3\ln\frac{3}{2}-1$$

17 $$\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin 2x}{3\cos x+\cos^2 x}\,dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \frac{2\sin x\cos x}{3\cos x+\cos^2 x}\,dx$$

$$=\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \frac{2\sin x}{3+\cos x}\,dx$$

$3+\cos x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=-\sin x$이고, $x=0$일 때 $t=4$, $x=\frac{\pi}{3}$일 때 $t=\frac{7}{2}$이므로

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \frac{2\sin x}{3+\cos x}\,dx=-\int_{4}^{\frac{7}{2}} \frac{2}{t}\,dt=\int_{\frac{7}{2}}^{4} \frac{2}{t}\,dt$$

$$=\Big[2\ln t\Big]_{\frac{7}{2}}^{4}=2\ln\frac{8}{7}$$

18 $$\int_{-3}^{0} \frac{e^x}{e^x+1}\,dx-\int_{3}^{0} \frac{e^x}{e^x+1}\,dx$$

$$=\int_{-3}^{0} \frac{e^x}{e^x+1}\,dx+\int_{0}^{3} \frac{e^x}{e^x+1}\,dx$$

$$=\int_{-3}^{3} \frac{e^x}{e^x+1}\,dx$$

$e^x+1=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=e^x$이고, $x=-3$일 때 $t=e^{-3}+1$, $x=3$일 때 $t=e^3+1$이므로

$$\int_{-3}^{3} \frac{e^x}{e^x+1}\,dx=\int_{e^{-3}+1}^{e^3+1} \frac{1}{t}\,dt=\Big[\ln t\Big]_{e^{-3}+1}^{e^3+1}$$

$$=\ln\frac{e^3+1}{e^{-3}+1}=\ln\frac{e^3(e^3+1)}{1+e^3}$$

$$=\ln e^3=3$$

19 $x^2+x+4=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=2x+1$이고, $x=0$일 때 $t=4$, $x=a$일 때 $t=a^2+a+4$이므로

$$\int_{0}^{a} \frac{2x+1}{x^2+x+4}\,dx=\int_{4}^{a^2+a+4} \frac{1}{t}\,dt$$

$$=\Big[\ln t\Big]_{4}^{a^2+a+4}$$

$$=\ln\frac{a^2+a+4}{4}$$

따라서 $\ln\frac{a^2+a+4}{4}=\ln 6$이므로

$a^2+a+4=24$, $(a-4)(a+5)=0$

$\therefore a=4$ ($\because a>0$)

$$\therefore \int_{0}^{4} \frac{1}{2x+1}\,dx=\left[\frac{1}{2}\ln(2x+1)\right]_{0}^{4}$$

$$=\frac{1}{2}\ln 9=\ln 3$$

20 $$f(1)+f(3)=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+\sin x}\,dx+\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x}{1+\sin x}\,dx$$

$$=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x+\cos^3 x}{1+\sin x}\,dx$$

$$=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x(1+\cos^2 x)}{1+\sin x}\,dx$$

$$=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x(2-\sin^2 x)}{1+\sin x}\,dx$$

$1+\sin x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=\cos x$이고, $x=0$일 때 $t=1$, $x=\frac{\pi}{2}$일 때 $t=2$이므로

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x(2-\sin^2 x)}{1+\sin x}dx&=\int_1^2 \frac{2-(t-1)^2}{t}dt\\&=\int_1^2\left(-t+2+\frac{1}{t}\right)dt\\&=\left[-\frac{1}{2}t^2+2t+\ln t\right]_1^2\\&=\frac{1}{2}+\ln 2\end{aligned}$$

21 $3+\ln x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}$이고, $x=1$일 때 $t=3$, $x=e^2$일 때 $t=5$이므로

$$\begin{aligned}\int_1^{e^2} f(x)\,dx&=\int_1^{e^2}\frac{3+\ln x}{x}dx=\int_3^5 t\,dt\\&=\left[\frac{1}{2}t^2\right]_3^5=8\end{aligned}$$

한편 $a+\sin x=s$로 놓으면 $\frac{ds}{dx}=\cos x$이고, $x=0$일 때 $s=a$, $x=\frac{\pi}{2}$일 때 $s=a+1$이므로

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x)\,dx&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(a+\sin x)\cos x\,dx\\&=\int_a^{a+1}s\,ds\\&=\left[\frac{1}{2}s^2\right]_a^{a+1}\\&=\frac{1}{2}(2a+1)\end{aligned}$$

따라서 $8=\frac{1}{2}(2a+1)$이므로 $a=\frac{15}{2}$

22 $\int_0^2 \frac{f(x)+f(4-x)}{2}dx$

$=\frac{1}{2}\left\{\int_0^2 f(x)\,dx+\int_0^2 f(4-x)\,dx\right\}$

$\int_0^2 f(4-x)\,dx$에서 $4-x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=-1$이고, $x=0$일 때 $t=4$, $x=2$일 때 $t=2$이므로

$$\int_0^2 f(4-x)\,dx=-\int_4^2 f(t)\,dt=\int_2^4 f(x)\,dx$$

$$\begin{aligned}\therefore \frac{1}{2}\left\{\int_0^2 f(x)\,dx+\int_0^2 f(4-x)\,dx\right\}&=\frac{1}{2}\left\{\int_0^2 f(x)\,dx+\int_2^4 f(x)\,dx\right\}\\&=\frac{1}{2}\int_0^4 f(x)\,dx\\&=\frac{1}{2}\times 6=3\end{aligned}$$

23 $x=2\sin\theta\left(-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right)$로 놓으면 $\frac{dx}{d\theta}=2\cos\theta$이고, $x=0$일 때 $\theta=0$, $x=1$일 때 $\theta=\frac{\pi}{6}$이므로

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}dx&=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{4\sin^2\theta}{\sqrt{4-4\sin^2\theta}}\times 2\cos\theta\,d\theta\\&=\int_0^{\frac{\pi}{6}}4\sin^2\theta\,d\theta\\&=\int_0^{\frac{\pi}{6}}2(1-\cos 2\theta)\,d\theta\\&=\left[2\theta-\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{6}}\\&=\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

24 $2x=\tan\theta\left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$로 놓으면 $2\frac{dx}{d\theta}=\sec^2\theta$이고, $x=0$일 때 $\theta=0$, $x=\frac{1}{2}$일 때 $\theta=\frac{\pi}{4}$이므로

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{2}{4x^2+1}dx&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sec^2\theta}{\tan^2\theta+1}d\theta\\&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta=\left[\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

25 $x=a\tan\theta\left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$로 놓으면 $\frac{dx}{d\theta}=a\sec^2\theta$이고, $x=0$일 때 $\theta=0$, $x=a$일 때 $\theta=\frac{\pi}{4}$이므로

$$\begin{aligned}\int_0^a \frac{1}{x^2+a^2}dx&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{a^2\tan^2\theta+a^2}\times a\sec^2\theta\,d\theta\\&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{a}\,d\theta=\left[\frac{1}{a}\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4a}\end{aligned}$$

따라서 $\frac{\pi}{4a}=\frac{\pi}{4}$이므로 $a=1$

26 $\int_3^6\sqrt{6x-x^2}\,dx=\int_3^6\sqrt{9-(x-3)^2}\,dx$

$x-3=3\sin\theta\left(-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right)$로 놓으면 $\frac{dx}{d\theta}=3\cos\theta$이고, $x=3$일 때 $\theta=0$, $x=6$일 때 $\theta=\frac{\pi}{2}$이므로

$$\begin{aligned}\int_3^6\sqrt{9-(x-3)^2}\,dx&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{9-9\sin^2\theta}\times 3\cos\theta\,d\theta\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}9\cos^2\theta\,d\theta\\&=9\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2\theta}{2}d\theta\\&=\frac{9}{2}\left[\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{9}{4}\pi\end{aligned}$$

27 $f(x)=2x+1$, $g'(x)=e^x$이라 하면

$f'(x)=2$, $g(x)=e^x$이므로

$$\int_0^1 (2x+1)e^x\,dx=\Big[(2x+1)e^x\Big]_0^1-\int_0^1 2e^x\,dx$$
$$=3e-1-\Big[2e^x\Big]_0^1=e+1$$

28 $f(x)=2x$, $g'(x)=\sin x$라 하면

$f'(x)=2$, $g(x)=-\cos x$이므로

$$\int_0^\pi 2x\sin x\,dx=\Big[-2x\cos x\Big]_0^\pi+\int_0^\pi 2\cos x\,dx$$
$$=2\pi+\Big[2\sin x\Big]_0^\pi=2\pi$$

29 $$\int_1^{e^2} f(x)\,dx-\int_3^{e^2} f(x)\,dx=\int_1^{e^2} f(x)\,dx+\int_{e^2}^3 f(x)\,dx$$
$$=\int_1^3 f(x)\,dx=\int_1^3 \frac{\ln x}{x^2}\,dx$$

$u(x)=\ln x$, $v'(x)=\frac{1}{x^2}$이라 하면

$u'(x)=\frac{1}{x}$, $v(x)=-\frac{1}{x}$이므로

$$\int_1^3 \frac{\ln x}{x^2}\,dx=\Big[-\frac{1}{x}\ln x\Big]_1^3+\int_1^3 \frac{1}{x^2}\,dx$$
$$=-\frac{1}{3}\ln 3-\Big[\frac{1}{x}\Big]_1^3=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\ln 3$$

30 $0\le x\le\frac{\pi}{2}$일 때 $\sin 2x\ge 0$, $\frac{\pi}{2}\le x\le\pi$일 때 $\sin 2x\le 0$이므로

$$\int_0^\pi x|\sin 2x|\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin 2x\,dx-\int_{\frac{\pi}{2}}^\pi x\sin 2x\,dx$$

$f(x)=x$, $g'(x)=\sin 2x$라 하면

$f'(x)=1$, $g(x)=-\frac{1}{2}\cos 2x$이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin 2x\,dx=\Big[-\frac{1}{2}x\cos 2x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\cos 2x\,dx$$
$$=\frac{\pi}{4}+\Big[\frac{1}{4}\sin 2x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^\pi x\sin 2x\,dx=\Big[-\frac{1}{2}x\cos 2x\Big]_{\frac{\pi}{2}}^\pi+\int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \frac{1}{2}\cos 2x\,dx$$
$$=-\frac{3}{4}\pi+\Big[\frac{1}{4}\sin 2x\Big]_{\frac{\pi}{2}}^\pi=-\frac{3}{4}\pi$$

$$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin 2x\,dx-\int_{\frac{\pi}{2}}^\pi x\sin 2x\,dx=\frac{\pi}{4}-\left(-\frac{3}{4}\pi\right)$$
$$=\pi$$

31 $f(x)=(\ln x)^2$, $g'(x)=4x$라 하면

$f'(x)=\frac{2}{x}\ln x$, $g(x)=2x^2$이므로

$$\int_1^e 4x(\ln x)^2\,dx=\Big[2x^2(\ln x)^2\Big]_1^e-\int_1^e 4x\ln x\,dx$$
$$=2e^2-\int_1^e 4x\ln x\,dx \quad \cdots\cdots ㉠$$

$\int_1^e 4x\ln x\,dx$에서 $u(x)=\ln x$, $v'(x)=4x$라 하면

$u'(x)=\frac{1}{x}$, $v(x)=2x^2$이므로

$$\int_1^e 4x\ln x\,dx=\Big[2x^2\ln x\Big]_1^e-\int_1^e 2x\,dx$$
$$=2e^2-\Big[x^2\Big]_1^e=e^2+1 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$\int_1^e 4x(\ln x)^2\,dx=2e^2-(e^2+1)=e^2-1$$

32 $f(x)=e^x$, $g'(x)=\cos x$라 하면

$f'(x)=e^x$, $g(x)=\sin x$이므로

$$\int_{-\pi}^\pi e^x\cos x\,dx=\Big[e^x\sin x\Big]_{-\pi}^\pi-\int_{-\pi}^\pi e^x\sin x\,dx$$
$$=-\int_{-\pi}^\pi e^x\sin x\,dx \quad \cdots\cdots ㉠$$

$u(x)=e^x$, $v'(x)=\sin x$라 하면

$u'(x)=e^x$, $v(x)=-\cos x$이므로

$$\int_{-\pi}^\pi e^x\sin x\,dx=\Big[-e^x\cos x\Big]_{-\pi}^\pi+\int_{-\pi}^\pi e^x\cos x\,dx$$
$$=e^\pi-e^{-\pi}+\int_{-\pi}^\pi e^x\cos x\,dx \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$\int_{-\pi}^\pi e^x\cos x\,dx=-e^\pi+e^{-\pi}-\int_{-\pi}^\pi e^x\cos x\,dx$$

$$2\int_{-\pi}^\pi e^x\cos x\,dx=-e^\pi+e^{-\pi}$$

$$\therefore \int_{-\pi}^\pi e^x\cos x\,dx=-\frac{1}{2}e^\pi+\frac{1}{2}e^{-\pi}$$

따라서 $a=-\frac{1}{2}$, $b=\frac{1}{2}$이므로

$6b-4a=3+2=5$

33 $\int_0^2 f(t)\,dt=k$ (k는 상수)라 하면

$f(x)=e^{2x}+k$

$$\therefore \int_0^2 f(t)\,dt=\int_0^2 (e^{2t}+k)\,dt$$
$$=\Big[\frac{1}{2}e^{2t}+kt\Big]_0^2$$
$$=\frac{1}{2}e^4+2k-\frac{1}{2}$$

따라서 $\frac{1}{2}e^4+2k-\frac{1}{2}=k$에서 $k=-\frac{1}{2}e^4+\frac{1}{2}$이므로

$f(x)=e^{2x}-\frac{1}{2}e^4+\frac{1}{2}$

$\therefore f(2)=\frac{1}{2}e^4+\frac{1}{2}$

34 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\cos t\,dt=k$($k$는 상수)라 하면

$f(x)=2\sin x+2k$

$$\begin{aligned}\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\cos t\,dt&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2\sin t+2k)\cos t\,dt\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin 2t+2k\cos t)\,dt\\&=\left[-\frac{1}{2}\cos 2t+2k\sin t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\\&=2k+1\end{aligned}$$

따라서 $2k+1=k$에서 $k=-1$이므로

$f(x)=2\sin x-2$ $\quad\therefore f(\pi)=-2$

35 $f(x)=e^x+\int_0^1(x-t)f(t)\,dt$

$\quad=e^x+x\int_0^1 f(t)\,dt-\int_0^1 tf(t)\,dt$

$\int_0^1 f(t)\,dt=a$, $\int_0^1 tf(t)\,dt=b$(a, b는 상수)라 하면

$f(x)=e^x+ax-b$이므로

$a=\int_0^1 f(t)\,dt=\int_0^1(e^t+at-b)\,dt$

$\quad=\left[e^t+\frac{1}{2}at^2-bt\right]_0^1$

$\quad=\frac{1}{2}a-b+e-1$

$\therefore a+2b=2e-2$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$b=\int_0^1 tf(t)\,dt=\int_0^1(te^t+at^2-bt)\,dt$

$\quad=\int_0^1 te^t\,dt+\int_0^1(at^2-bt)\,dt$

$\quad=\left[te^t\right]_0^1-\int_0^1 e^t\,dt+\left[\frac{1}{3}at^3-\frac{1}{2}bt^2\right]_0^1$

$\quad=e-\left[e^t\right]_0^1+\frac{1}{3}a-\frac{1}{2}b$

$\quad=\frac{1}{3}a-\frac{1}{2}b+1$

$\therefore 2a-9b=-6$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=\frac{18e-30}{13}$, $b=\frac{4e+2}{13}$

즉, $f(x)=e^x+\frac{18e-30}{13}x-\frac{4e+2}{13}$이므로

$f(1)=\frac{27}{13}e-\frac{32}{13}$

따라서 $p=\frac{27}{13}$, $q=-\frac{32}{13}$이므로 $p+q=-\frac{5}{13}$

36 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=2+a\cos x$

주어진 등식의 양변에 $x=\frac{\pi}{2}$를 대입하면

$0=\pi+a$ $\quad\therefore a=-\pi$

$\therefore f(x)=2-\pi\cos x$

37 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=2e^{2x+3}$

주어진 등식의 양변에 $x=a$를 대입하면

$0=e^{2a+3}-1$, $2a+3=0$ $\quad\therefore a=-\frac{3}{2}$

$\therefore f(a)=f\left(-\frac{3}{2}\right)=2$

38 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=f(x)+xf'(x)-\ln x-1$

$xf'(x)=\ln x+1$ $\quad\therefore f'(x)=\frac{\ln x}{x}+\frac{1}{x}$

$f(x)=\int\left(\frac{\ln x}{x}+\frac{1}{x}\right)dx$

$\quad=\frac{1}{2}(\ln x)^2+\ln x+C$ ($\because x>0$)

주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$0=f(1)$ $\quad\therefore C=0$

따라서 $f(x)=\frac{1}{2}(\ln x)^2+\ln x$이므로

$f(e)=\frac{3}{2}$

39 $\int_0^x(x-t)f(t)\,dt=xe^x-\sin x$에서

$x\int_0^x f(t)\,dt-\int_0^x tf(t)\,dt=xe^x-\sin x$

양변을 x에 대하여 미분하면

$\int_0^x f(t)\,dt+xf(x)-xf(x)=e^x+xe^x-\cos x$

$\therefore \int_0^x f(t)\,dt=(x+1)e^x-\cos x$

양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=e^x+(x+1)e^x+\sin x=(x+2)e^x+\sin x$

$\therefore f(0)=2$

40 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=\sqrt{x}-x$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=1$ ($\because x>0$)

$x>0$에서 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		+	0	−
$f(x)$		↗	극대	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극대이므로 극댓값은

$f(1)=\int_0^1(\sqrt{t}-t)\,dt=\left[\frac{2}{3}t\sqrt{t}-\frac{1}{2}t^2\right]_0^1=\frac{1}{6}$

따라서 $a=1$, $M=\frac{1}{6}$이므로 $a+M=\frac{7}{6}$

41 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=\sin x-\cos 2x$

$f'(x)=0$인 x의 값은

$\sin x-\cos 2x=0$, $\sin x-(1-2\sin^2 x)=0$

$(2\sin x-1)(\sin x+1)=0$

$\therefore \sin x=\frac{1}{2}$ ($\because 0<x<\pi$)

$\therefore x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{5}{6}\pi$

$0<x<\pi$에서 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{5}{6}\pi$	$\cdots$	π
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		↘	극소	↗	극대	↘	

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\frac{5}{6}\pi$에서 극대, $x=\frac{\pi}{6}$에서 극소이므로

$$M=f\left(\frac{5}{6}\pi\right)=\int_0^{\frac{5}{6}\pi}(\sin t-\cos 2t)\,dt=\left[-\cos t-\frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^{\frac{5}{6}\pi}=\frac{3\sqrt{3}}{4}+1$$

$$m=f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\int_0^{\frac{\pi}{6}}(\sin t-\cos 2t)\,dt=\left[-\cos t-\frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^{\frac{\pi}{6}}=-\frac{3\sqrt{3}}{4}+1$$

$\therefore M-m=\frac{3\sqrt{3}}{2}$

42 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=\frac{ax}{x^2+1}$

이때 함수 $f(x)$가 $x=b$에서 극솟값 $-\ln 2$를 가지므로

$f'(b)=0$, $f(b)=-\ln 2$

$f'(b)=0$에서 $\frac{ab}{b^2+1}=0$ $\quad\therefore b=0$ ($\because a\neq 0$)

따라서 $f(0)=-\ln 2$이므로

$$f(0)=\int_{-1}^{0}\frac{at}{t^2+1}\,dt=\left[\frac{a}{2}\ln(t^2+1)\right]_{-1}^{0}=-\frac{a}{2}\ln 2$$

즉, $-\frac{a}{2}\ln 2=-\ln 2$이므로 $a=2$

$\therefore a+b=2$

43 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=e-e^x$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	극대	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극대이면서 최대이므로 함수 $f(x)$의 최댓값은

$$f(1)=\int_0^1(e-e^t)\,dt=\left[et-e^t\right]_0^1=1$$

44 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=1-2\cos x$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $\cos x=\frac{1}{2}$

$\therefore x=\frac{\pi}{3}$ $\left(\because 0<x<\frac{\pi}{2}\right)$

$0<x<\frac{\pi}{2}$에서 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	극소	↗	

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\frac{\pi}{3}$에서 극소이면서 최소이므로 함수 $f(x)$의 최솟값은

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\int_0^{\frac{\pi}{3}}(1-2\cos t)\,dt=\left[t-2\sin t\right]_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\pi}{3}-\sqrt{3}$$

45 $f'(x)=2(x+1)+\frac{4}{x+1}-2x-\frac{4}{x}$

$$=\frac{2x^2+2x-4}{x(x+1)}=\frac{2(x+2)(x-1)}{x(x+1)}$$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=1$ ($\because x>0$)

$x>0$에서 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	극소	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극소이면서 최소이므로 함수 $f(x)$의 최솟값은

$$f(1)=\int_1^2\left(2t+\frac{4}{t}\right)dt$$
$$=\left[t^2+4\ln t\right]_1^2$$
$$=3+4\ln 2$$

따라서 $a=1$, $b=3+4\ln 2$이므로

$b-3a=3+4\ln 2-3=4\ln 2$

46 $f(t)=(t^2+2)\cos(t+\pi)$라 하고, 함수 $f(t)$의 한 부정적분을 $F(t)$라 하면

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x(t^2+2)\cos(t+\pi)\,dt$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{F(x)-F(0)}{x}$$
$$=F'(0)=f(0)$$
$$=-2$$

47 함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{\pi-h}^{\pi+h}f(t)\,dt$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{F(\pi+h)-F(\pi-h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{F(\pi+h)-F(\pi)}{h}+\frac{F(\pi-h)-F(\pi)}{-h}\right\}$$
$$=2F'(\pi)=2f(\pi)$$
$$=-2e^{2\pi}$$

48 함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{x^2-1}\int_1^x f(t)\,dt=\lim_{x\to 1}\frac{F(x)-F(1)}{x^2-1}$$
$$=\lim_{x\to 1}\left\{\frac{F(x)-F(1)}{x-1}\times\frac{1}{x+1}\right\}$$
$$=\frac{1}{2}F'(1)=\frac{1}{2}f(1)$$
$$=\frac{1}{2}\times 16=8$$

Ⅲ-2. 정적분의 활용

01 정적분의 활용

기초 문제 Training

p.80

1 $\frac{3}{n}$, $\frac{3}{n}$, $\frac{3}{n}$, $\frac{3}{n}$, 1, 2, 9

2 $\frac{2}{n}$, $\frac{2k}{n}$, 2, $\frac{8}{3}$

3 (1) $e-1$ (2) 1 (3) $\frac{1}{6}$

4 (1) 10 (2) $\frac{4\sqrt{2}}{3}+2$

5 (1) $-1-\frac{1}{e^2}$ (2) $e-\frac{1}{e}-2$ (3) $e+\frac{1}{e}-2$

핵심 유형 Training

p.81~88

1 ④ **2** 7 **3** 25 **4** $\frac{7}{3}$ **5** ②

6 $4\sqrt{2}-2$ **7** ① **8** $\frac{e^2-1}{2}$ **9** ④ **10** 2

11 ⑤ **12** ② **13** ③ **14** ⑤ **15** ③

16 30 **17** ⑤ **18** ④ **19** ② **20** ②

21 ① **22** $\frac{e}{2}-1$ **23** $2-\sqrt{3}$ **24** 0 **25** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

26 $\frac{2}{\ln 3}$ **27** ③ **28** $\frac{1}{(e-1)^2}$ **29** 1

30 $4\ln 2-2$ **31** ④ **32** $e+1$

33 $(2+\ln 5)\,\mathrm{cm}^3$ **34** 56 **35** $\left(\frac{3}{4}\pi^2+2\pi\right)\mathrm{m}^3$

36 $\frac{4}{3}$ **37** $\frac{\sqrt{3}}{8}\pi-\frac{\sqrt{3}}{4}$ **38** $\frac{16}{3}\,\mathrm{cm}^3$

39 ⑤ **40** e^2-2e+1 **41** $\frac{3}{\pi}$ **42** $e-\frac{1}{e}$

43 $\frac{8}{3}$ **44** ④ **45** $\frac{1}{4}e^2+\frac{1}{4}$ **46** ③

47 ③

1 구간 $[1, 3]$을 n등분 하면 각 구간의 오른쪽 끝점의 x좌표는 차례로

$$1+\frac{2}{n},\ 1+\frac{4}{n},\ \cdots,\ 1+\frac{2n}{n}(=3)$$

이때 직사각형의 가로의 길이는 $\frac{2}{n}$이므로 구하는 도형의 넓이는

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{2k}{n}\right)$$

유형편

2 $S=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2k}{n}\right)^3\times\frac{2}{n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{16}{n^4}\sum_{k=1}^{n}k^3$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{16}{n^4}\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

$=\lim_{n\to\infty}4\left(1+\frac{1}{n}\right)^2=4$

따라서 $f(n)=\frac{2}{n}$, $g(n)=\frac{16}{n^4}$, $a=4$이므로

$f(1)+g(2)+a=2+1+4=7$

3 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(1+\frac{2k}{n}\right)$

$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(1+\frac{2k}{n}\right)\times\frac{2}{n}$

$=\frac{1}{2}\int_1^3 f(x)\,dx$

$=\frac{1}{2}\int_1^3(3x^2+6x)\,dx$

$=\frac{1}{2}\left[x^3+3x^2\right]_1^3$

$=25$

다른 풀이

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(1+\frac{2k}{n}\right)$

$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}f\left(1+\frac{2k}{n}\right)\times\frac{2}{n}$

$=\frac{1}{2}\int_0^2 f(1+x)\,dx$

$=\frac{1}{2}\int_0^2\{3(1+x)^2+6(1+x)\}\,dx$

$=\frac{1}{2}\int_0^2(3x^2+12x+9)\,dx$

$=\frac{1}{2}\left[x^3+6x^2+9x\right]_0^2=25$

4 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2+\left(1+\frac{2}{n}\right)^2+\left(1+\frac{3}{n}\right)^2+\cdots+\left(1+\frac{n}{n}\right)^2\right\}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)^2$

$=\int_1^2 x^2\,dx$

$=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^2=\frac{7}{3}$

다른 풀이

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2+\left(1+\frac{2}{n}\right)^2+\left(1+\frac{3}{n}\right)^2+\cdots+\left(1+\frac{n}{n}\right)^2\right\}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)^2$

$=\int_0^1(1+x)^2\,dx$

$=\left[\frac{1}{3}(1+x)^3\right]_0^1=\frac{7}{3}$

5 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\pi}{n}\sin\frac{k\pi}{6n}=6\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\sin\frac{k\pi}{6n}\right)\times\frac{\pi}{6n}$

$=6\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sin x\,dx$

$=6\left[-\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{6}}$

$=6-3\sqrt{3}$

따라서 $a=6$, $b=-3$이므로

$a+b=3$

6 $\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}\left\{f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+f\left(\frac{3}{n}\right)+\cdots+f\left(\frac{n}{n}\right)\right\}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$

$=3\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\times\frac{1}{n}$

$=3\int_0^1 f(x)\,dx$

$=3\int_0^1\sqrt{1+x}\,dx$

$=3\left[\frac{2}{3}(1+x)\sqrt{1+x}\right]_0^1$

$=4\sqrt{2}-2$

7 $\lim_{n\to\infty}\frac{(1+2+\cdots+n)(1^3+2^3+\cdots+n^3)}{(n+1)^5+(n+2)^5+\cdots+(n+n)^5}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^2}\left(\frac{1}{n}+\frac{2}{n}+\cdots+\frac{n}{n}\right)\left\{\left(\frac{1}{n}\right)^3+\left(\frac{2}{n}\right)^3+\cdots+\left(\frac{n}{n}\right)^3\right\}}{\frac{1}{n}\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^5+\left(1+\frac{2}{n}\right)^5+\cdots+\left(1+\frac{n}{n}\right)^5\right\}}$

$=\frac{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}+\frac{2}{n}+\cdots+\frac{n}{n}\right)\times\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{\left(\frac{1}{n}\right)^3+\left(\frac{2}{n}\right)^3+\cdots+\left(\frac{n}{n}\right)^3\right\}}{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^5+\left(1+\frac{2}{n}\right)^5+\cdots+\left(1+\frac{n}{n}\right)^5\right\}}$

$=\frac{\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\right)\times\left\{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^3\right\}}{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)^5}$

$=\frac{\int_0^1 x\,dx\times\int_0^1 x^3\,dx}{\int_0^1(1+x)^5\,dx}$

$=\frac{\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1\times\left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^1}{\left[\frac{1}{6}(1+x)^6\right]_0^1}$

$=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}}{\frac{21}{2}}=\frac{1}{84}$

따라서 $p=84$, $q=1$이므로

$p+q=85$

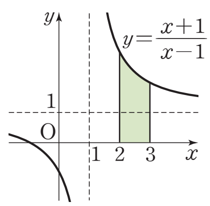
8 점 A_k의 좌표는 $\left(\dfrac{2k}{n},\ 0\right)$이므로 점 B_k의 좌표는

$\left(\dfrac{2k}{n},\ e^{\frac{2k}{n}}\right)$

따라서 $\overline{A_kB_k}=e^{\frac{2k}{n}}$이므로

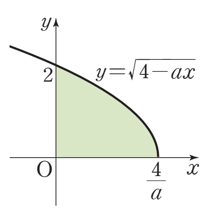
$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\overline{A_kB_k}&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}e^{\frac{2k}{n}}\\&=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}e^{\frac{2k}{n}}\times\frac{2}{n}\\&=\frac{1}{2}\int_0^2 e^x\,dx\\&=\frac{1}{2}\Big[e^x\Big]_0^2=\frac{e^2-1}{2}\end{aligned}$$

9 $y=\dfrac{x+1}{x-1}=1+\dfrac{2}{x-1}$이므로 구하는 넓이를 S라 하면



$$\begin{aligned}S&=\int_2^3\left(1+\frac{2}{x-1}\right)dx\\&=\Big[x+2\ln(x-1)\Big]_2^3\\&=1+2\ln 2\end{aligned}$$

10 곡선과 x축 및 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 S라 하면



$$S=\int_0^{\frac{4}{a}}\sqrt{4-ax}\,dx$$

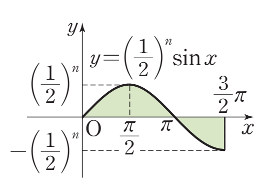
$4-ax=t$로 놓으면 $\dfrac{dt}{dx}=-a$이고, $x=0$일 때 $t=4$, $x=\dfrac{4}{a}$일 때 $t=0$이므로

$$\begin{aligned}S&=\int_0^{\frac{4}{a}}\sqrt{4-ax}\,dx=-\frac{1}{a}\int_4^0\sqrt{t}\,dt\\&=\frac{1}{a}\int_0^4\sqrt{t}\,dt=\frac{1}{a}\left[\frac{2}{3}t\sqrt{t}\right]_0^4=\frac{16}{3a}\end{aligned}$$

따라서 $\dfrac{16}{3a}=\dfrac{8}{3}$이므로 $a=2$

11 구간 $[0,\ \pi]$에서

$\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\sin x\ge 0$이고,



구간 $\left[\pi,\ \dfrac{3}{2}\pi\right]$에서

$\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\sin x\le 0$이므로

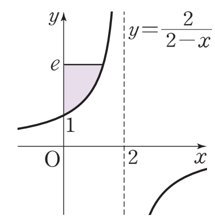
$$\begin{aligned}S_n&=\int_0^{\pi}\left(\frac{1}{2}\right)^n\sin x\,dx+\int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi}\left\{-\left(\frac{1}{2}\right)^n\sin x\right\}dx\\&=\left[-\left(\frac{1}{2}\right)^n\cos x\right]_0^{\pi}+\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n\cos x\right]_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi}=3\times\left(\frac{1}{2}\right)^n\end{aligned}$$

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}S_n=\sum_{n=1}^{\infty}3\times\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{\frac{3}{2}}{1-\frac{1}{2}}=3$$

12 $y=\dfrac{2}{2-x}$를 x에 대하여 풀면

$2-x=\dfrac{2}{y}\qquad\therefore\ x=2-\dfrac{2}{y}$

따라서 구하는 넓이를 S라 하면

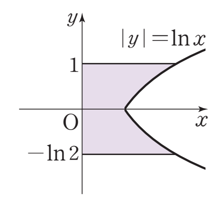


$$\begin{aligned}S&=\int_1^e\left(2-\frac{2}{y}\right)dy\\&=\Big[2y-2\ln y\Big]_1^e\\&=2e-4\end{aligned}$$

13 $y\ge 0$일 때, $y=\ln x$에서 $x=e^y$

$y<0$일 때, $-y=\ln x$에서 $x=e^{-y}$

따라서 구하는 넓이를 S라 하면

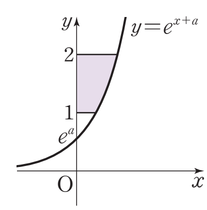


$$\begin{aligned}S&=\int_{-\ln 2}^0 e^{-y}\,dy+\int_0^1 e^y\,dy\\&=\Big[-e^{-y}\Big]_{-\ln 2}^0+\Big[e^y\Big]_0^1\\&=e\end{aligned}$$

14 $y=e^{x+a}$을 x에 대하여 풀면

$x+a=\ln y\qquad\therefore\ x=\ln y-a$

따라서 곡선과 y축 및 두 직선 $y=1$, $y=2$로 둘러싸인 도형의 넓이를 S라 하면



$$\begin{aligned}S&=\int_1^2(\ln y-a)\,dy\\&=\Big[y\ln y\Big]_1^2-\int_1^2 dy-\Big[ay\Big]_1^2\\&=2\ln 2-\Big[y\Big]_1^2-a\\&=2\ln 2-1-a\end{aligned}$$

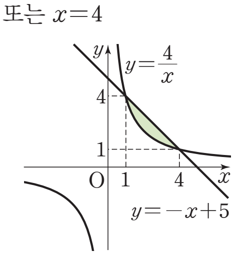
따라서 $2\ln 2-1-a=2\ln 2$이므로

$a=-1$

15 $\dfrac{4}{x}=-x+5$에서 $x^2-5x+4=0$

$(x-1)(x-4)=0\qquad\therefore\ x=1$ 또는 $x=4$

따라서 구하는 넓이를 S라 하면



$$\begin{aligned}S&=\int_1^4\left\{(-x+5)-\frac{4}{x}\right\}dx\\&=\left[-\frac{1}{2}x^2+5x-4\ln x\right]_1^4\\&=\frac{15}{2}-8\ln 2\end{aligned}$$

16 $\sqrt{3x}=x-6$에서 $(x-6)^2=3x$

$x^2-15x+36=0$, $(x-3)(x-12)=0$

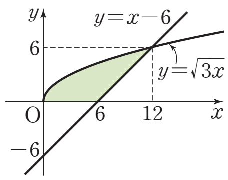
$\therefore\ x=12\ (\because\ x\ge 6)$

따라서 구하는 넓이를 S라 하면

$$S=\int_0^{12}\{\sqrt{3x}-(x-6)\}\,dx-\frac{1}{2}\times6\times6$$

$$=\left[\frac{2}{3}x\sqrt{3x}-\frac{1}{2}x^2+6x\right]_0^{12}-18$$

$$=48-18=30$$



17 $\sqrt{x}=\frac{1}{x}$에서 $x^3=1$ $\quad\therefore x=1$

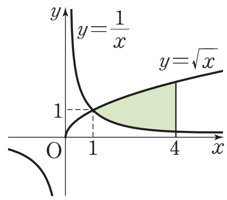
따라서 구하는 넓이를 S라 하면

$$S=\int_1^4\left(\sqrt{x}-\frac{1}{x}\right)dx$$

$$=\left[\frac{2}{3}x\sqrt{x}-\ln x\right]_1^4$$

$$=\frac{14}{3}-\ln 4=\frac{14}{3}+\ln\frac{1}{4}$$

따라서 $a=\frac{14}{3}$, $b=\frac{1}{4}$이므로 $ab=\frac{7}{6}$



18 $\frac{1}{x}=2x$에서 $x^2=\frac{1}{2}$

$\therefore x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ($\because x>0$)

$\frac{1}{x}=\frac{1}{2}x$에서 $x^2=2$

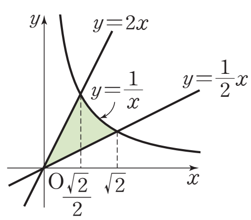
$\therefore x=\sqrt{2}$ ($\because x>0$)

따라서 구하는 넓이를 S라 하면

$$S=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(2x-\frac{1}{2}x\right)dx+\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2}x\right)dx$$

$$=\left[\frac{3}{4}x^2\right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}+\left[\ln x-\frac{1}{4}x^2\right]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\sqrt{2}}$$

$$=\frac{3}{8}+\left(\ln 2-\frac{3}{8}\right)=\ln 2$$



19 $\sqrt{2}\cos x=\sin 2x$에서

$\sqrt{2}\cos x=2\sin x\cos x$

$\therefore \cos x=0$ 또는 $\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore x=\frac{\pi}{4}$ 또는 $x=\frac{\pi}{2}$ $\left(\because 0\le x\le\frac{\pi}{2}\right)$

따라서 구하는 넓이를 S라 하면

$$S=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\sqrt{2}\cos x-\sin 2x)\,dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin 2x-\sqrt{2}\cos x)\,dx$$

$$=\left[\sqrt{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}+\left[-\frac{1}{2}\cos 2x-\sqrt{2}\sin x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}+\left(\frac{3}{2}-\sqrt{2}\right)=2-\sqrt{2}$$

20 $y=e^{x-1}-1$을 x에 대하여 풀면

$x-1=\ln(y+1)$ $\quad\therefore x=\ln(y+1)+1$

$y=\ln(x-1)$을 x에 대하여 풀면

$x-1=e^y$ $\quad\therefore x=e^y+1$

따라서 구하는 넓이를 S라 하면

$$S=\int_0^1[(e^y+1)-\{\ln(y+1)+1\}]\,dy$$

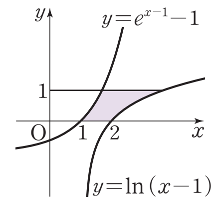
$$=\int_0^1\{e^y-\ln(y+1)\}\,dy$$

$$=\int_0^1 e^y\,dy-\int_0^1\ln(y+1)\,dy$$

$$=\int_0^1 e^y\,dy-\int_1^2\ln t\,dt$$ ◀ $y+1=t$

$$=\left[e^y\right]_0^1-\left[t\ln t\right]_1^2+\int_1^2 dt$$

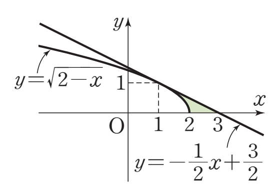
$$=e-1-2\ln 2+\left[t\right]_1^2=e-2\ln 2$$



21 $y'=-\frac{1}{2\sqrt{2-x}}$이므로 점 $(1,\ 1)$에서의 접선의 기울기는 $-\frac{1}{2}$이다.

이때 점 $(1,\ 1)$에서의 접선의 방정식은

$y-1=-\frac{1}{2}(x-1)$ $\quad\therefore y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$



따라서 구하는 넓이를 S라 하면

$$S=\frac{1}{2}\times2\times1-\int_1^2\sqrt{2-x}\,dx$$

$$=1-\left[-\frac{2}{3}(2-x)\sqrt{2-x}\right]_1^2=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$$

22 $y'=e^x$이므로 접점의 좌표를 $(t,\ e^t-1)$이라 하면

$e^t=e$ $\quad\therefore t=1$

즉, 접점의 좌표는 $(1,\ e-1)$이므로 접선의 방정식은

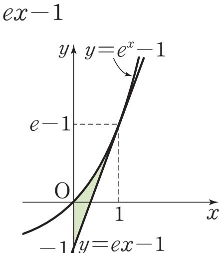
$y-(e-1)=e(x-1)$ $\quad\therefore y=ex-1$

따라서 구하는 넓이를 S라 하면

$$S=\int_0^1\{(e^x-1)-(ex-1)\}\,dx$$

$$=\int_0^1(e^x-ex)\,dx$$

$$=\left[e^x-\frac{e}{2}x^2\right]_0^1=\frac{e}{2}-1$$



23 $y'=\cos x$이므로 점 $(\alpha,\ \sin\alpha)$에서의 접선의 방정식은

$y-\sin\alpha=(\cos\alpha)(x-\alpha)$

$\therefore\ y=(\cos\alpha)(x-\alpha)+\sin\alpha$

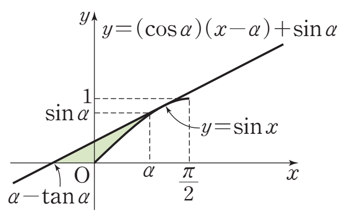
이때 접선이 x축과 만나는 점의 x좌표는

$(\cos\alpha)(x-\alpha)+\sin\alpha=0$

$(\cos\alpha)(x-\alpha)=-\sin\alpha$

$x-\alpha=-\tan\alpha$

$\therefore\ x=\alpha-\tan\alpha$



곡선과 접선 및 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 S라 하면

$S=\frac{1}{2}\times\tan\alpha\times\sin\alpha-\int_0^{\alpha}\sin x\,dx$

$=\frac{\sin^2\alpha}{2\cos\alpha}-\Big[-\cos x\Big]_0^{\alpha}$

$=\frac{\sin^2\alpha}{2\cos\alpha}+\cos\alpha-1$

따라서 $\frac{\sin^2\alpha}{2\cos\alpha}+\cos\alpha-1=1$이므로

$\sin^2\alpha+2\cos^2\alpha-4\cos\alpha=0$

$(1-\cos^2\alpha)+2\cos^2\alpha-4\cos\alpha=0$

$\cos^2\alpha-4\cos\alpha+1=0$

$\therefore\ \cos\alpha=2-\sqrt{3}$ ($\because\ 0<\cos\alpha\le1$)

24 두 도형 A, B의 넓이가 서로 같으므로

$\int_0^6 f(x)\,dx=0$

$\int_0^2 f(3x)\,dx$에서 $3x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=3$이고, $x=0$일 때 $t=0$, $x=2$일 때 $t=6$이므로

$\int_0^2 f(3x)\,dx=\int_0^6 f(t)\times\frac{1}{3}\,dt$

$=\frac{1}{3}\int_0^6 f(x)\,dx=0$

25 두 도형의 넓이가 서로 같으므로

$\int_0^{\frac{2}{3}\pi}\left(k\sin x-\cos\frac{x}{2}\right)dx=0$

$\Big[-k\cos x-2\sin\frac{x}{2}\Big]_0^{\frac{2}{3}\pi}=0$

$\frac{3}{2}k-\sqrt{3}=0$

$\therefore\ k=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

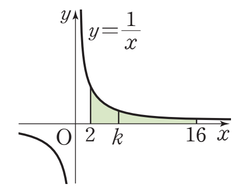
26 두 도형의 넓이가 서로 같으므로

$\int_0^{\ln 3}(e^x-k)\,dx=0$

$\Big[e^x-kx\Big]_0^{\ln 3}=0,\ 2-k\ln 3=0$

$\therefore\ k=\frac{2}{\ln 3}$

27 곡선 $y=\frac{1}{x}$과 x축 및 두 직선 $x=2,\ x=16$으로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_1이라 하면



$S_1=\int_2^{16}\frac{1}{x}\,dx$

$=\Big[\ln x\Big]_2^{16}=\ln 8$

또 곡선 $y=\frac{1}{x}$과 x축 및 두 직선 $x=2,\ x=k$로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_2라 하면

$S_2=\int_2^{k}\frac{1}{x}\,dx$

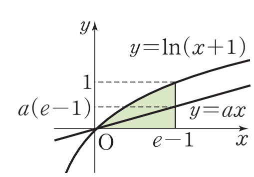
$=\Big[\ln x\Big]_2^{k}=\ln\frac{k}{2}$

이때 $S_2=\frac{1}{2}S_1$이므로

$\ln\frac{k}{2}=\frac{1}{2}\ln 8,\ \frac{k}{2}=2\sqrt{2}$

$\therefore\ k=4\sqrt{2}$

28 곡선 $y=\ln(x+1)$과 x축 및 직선 $x=e-1$로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_1이라 하면



$S_1=\int_0^{e-1}\ln(x+1)\,dx$

$=\int_1^{e}\ln t\,dt$ ◀ $x+1=t$

$=\Big[t\ln t\Big]_1^{e}-\int_1^{e}dt$

$=e-\Big[t\Big]_1^{e}=1$

또 직선 $y=ax$와 x축 및 직선 $x=e-1$로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_2라 하면

$S_2=\frac{1}{2}\times(e-1)\times a(e-1)$

$=\frac{(e-1)^2}{2}a$

이때 $S_2=\frac{1}{2}S_1$이므로

$\frac{(e-1)^2}{2}a=\frac{1}{2}$

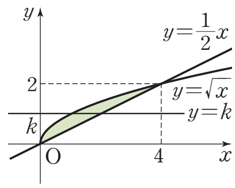
$\therefore\ a=\frac{1}{(e-1)^2}$

29 $\sqrt{x}=\frac{1}{2}x$에서

$x^2-4x=0,\ x(x-4)=0$

$\therefore\ x=0$ 또는 $x=4$

곡선 $y=\sqrt{x}$와 직선 $y=\frac{1}{2}x$로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_1이라 하면



$$S_1=\int_0^4\left(\sqrt{x}-\frac{1}{2}x\right)dx$$
$$=\left[\frac{2}{3}x\sqrt{x}-\frac{1}{4}x^2\right]_0^4$$
$$=\frac{4}{3}$$

또 $0<k<2$에서 곡선 $y=\sqrt{x}$와 두 직선 $y=\frac{1}{2}x$, $y=k$로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_2라 하면

$$S_2=\int_0^k(2y-y^2)\,dy$$
$$=\left[y^2-\frac{1}{3}y^3\right]_0^k$$
$$=k^2-\frac{1}{3}k^3$$

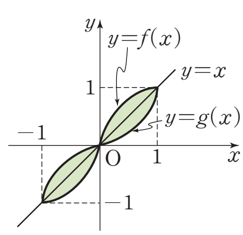
이때 $S_2=\frac{1}{2}S_1$이므로

$k^2-\frac{1}{3}k^3=\frac{2}{3},\ k^3-3k^2+2=0$

$(k-1)(k^2-2k-2)=0$

$\therefore\ k=1\ (\because\ 0<k<2)$

30 구하는 넓이를 S라 하면



$$S=4\int_0^1\left(\frac{2x}{x^2+1}-x\right)dx$$
$$=4\left[\ln(x^2+1)-\frac{1}{2}x^2\right]_0^1$$
$$=4\left(\ln 2-\frac{1}{2}\right)$$
$$=4\ln 2-2$$

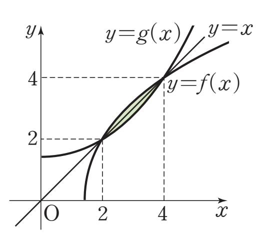
31 $\sqrt{6x-8}=x$에서

$x^2-6x+8=0$

$(x-2)(x-4)=0$

$\therefore\ x=2$ 또는 $x=4$

따라서 구하는 넓이를 S라 하면

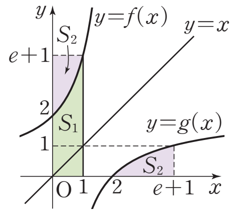


$$S=2\int_2^4(\sqrt{6x-8}-x)\,dx$$
$$=2\left[\frac{1}{9}(6x-8)\sqrt{6x-8}-\frac{1}{2}x^2\right]_2^4$$
$$=2\times\frac{2}{9}=\frac{4}{9}$$

32 $\int_0^1 f(x)\,dx=S_1$,

$\int_2^{e+1} g(x)\,dx=S_2$

라 하면



$$\int_0^1 f(x)\,dx+\int_2^{e+1} g(x)\,dx$$
$$=S_1+S_2$$
$$=1\times(e+1)$$
$$=e+1$$

33 물의 깊이가 2 cm일 때, 물의 부피를 V라 하면

$$V=\int_0^2\frac{(x+1)^2}{x^2+1}dx$$
$$=\int_0^2\left(1+\frac{2x}{x^2+1}\right)dx$$
$$=\left[x+\ln(x^2+1)\right]_0^2$$
$$=2+\ln 5\,(\mathrm{cm}^3)$$

34 구하는 입체도형의 부피를 V라 하면

$$V=\int_0^6 3\sqrt{2x+4}\,dx$$
$$=\left[(2x+4)\sqrt{2x+4}\right]_0^6$$
$$=56$$

35 단면의 넓이는 $\pi(1+\sin x)^2$이므로 저수조의 부피를 V라 하면

$$V=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\pi(1+\sin x)^2\,dx$$
$$=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+2\sin x+\sin^2 x)\,dx$$
$$=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1+2\sin x+\frac{1-\cos 2x}{2}\right)dx$$
$$=\pi\left[\frac{3}{2}x-2\cos x-\frac{1}{4}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=\frac{3}{4}\pi^2+2\pi\,(\mathrm{m}^3)$$

36 $\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{2x-x^2}$이므로 단면의 넓이는

$\overline{\mathrm{PQ}}^2=2x-x^2$

따라서 구하는 부피를 V라 하면

$$V=\int_0^2(2x-x^2)\,dx$$
$$=\left[x^2-\frac{1}{3}x^3\right]_0^2$$
$$=\frac{4}{3}$$

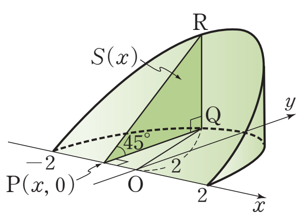
37 단면은 한 변의 길이가 $\sqrt{x\cos x}$인 정삼각형이므로 그 넓이는

$\frac{\sqrt{3}}{4}x\cos x$

따라서 구하는 부피를 V라 하면

$$V=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{3}}{4}x\cos x\,dx$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\left[x\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx\right)$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{\pi}{2}+\left[\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\right)$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{8}\pi-\frac{\sqrt{3}}{4}$$

38 다음 그림과 같이 주어진 입체도형을 원기둥의 밑면의 중심을 원점 O, 밑면의 지름을 x축으로 하는 좌표평면 위에 놓고, x축 위의 점 $\mathrm{P}(x,\ 0)(-2\le x\le 2)$을 지나면서 x축에 수직인 평면으로 자른 단면을 $\triangle$PQR라 하자.



$\angle\mathrm{OPQ}=90^\circ$, $\overline{\mathrm{OP}}=|x|$ cm이므로 $\triangle$POQ에서

$\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{\overline{\mathrm{OQ}}^2-\overline{\mathrm{OP}}^2}=\sqrt{4-x^2}$ (cm)

또 $\angle\mathrm{PQR}=90^\circ$, $\angle\mathrm{RPQ}=45^\circ$이므로 $\triangle$PQR에서

$\overline{\mathrm{RQ}}=\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{4-x^2}$ (cm)

$\triangle$PQR의 넓이를 $S(x)$라 하면

$$S(x)=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{PQ}}\times\overline{\mathrm{RQ}}$$
$$=\frac{1}{2}\times\sqrt{4-x^2}\times\sqrt{4-x^2}$$
$$=\frac{1}{2}(4-x^2)(\mathrm{cm}^2)$$

따라서 구하는 부피를 V라 하면

$$V=\int_{-2}^{2}S(x)\,dx$$
$$=\int_{-2}^{2}\frac{1}{2}\underline{(4-x^2)}\,dx$$

◀ $f(-x)=f(x)$를 만족하는 함수

$$=\int_0^2(4-x^2)\,dx$$
$$=\left[4x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^2$$
$$=\frac{16}{3}(\mathrm{cm}^3)$$

39 $t=3\pi$에서 점 P의 위치는

$$0+\int_0^{3\pi}(\sin t-\sin 2t)\,dt=\left[-\cos t+\frac{1}{2}\cos 2t\right]_0^{3\pi}$$
$$=2$$

40 시각 $t=0$에서 $t=2$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^2|e^t-e|\,dt$$
$$=\int_0^1(-e^t+e)\,dt+\int_1^2(e^t-e)\,dt$$
$$=\left[-e^t+et\right]_0^1+\left[e^t-et\right]_1^2$$
$$=e^2-2e+1$$

41 $v(t)=0$에서

$\cos\pi t=0\qquad\therefore\ t=\frac{1}{2},\ \frac{3}{2},\ \frac{5}{2},\ \cdots$

따라서 출발 후 두 번째로 운동 방향을 바꾸는 시각은 $t=\frac{3}{2}$이므로 그때까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^{\frac{3}{2}}|\cos\pi t|\,dt$$
$$=\int_0^{\frac{1}{2}}\cos\pi t\,dt+\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}(-\cos\pi t)\,dt$$
$$=\left[\frac{1}{\pi}\sin\pi t\right]_0^{\frac{1}{2}}+\left[-\frac{1}{\pi}\sin\pi t\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}$$
$$=\frac{1}{\pi}+\frac{2}{\pi}=\frac{3}{\pi}$$

42 $\frac{dx}{dt}=\frac{1}{t},\ \frac{dy}{dt}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{t^2}\right)$

따라서 시각 $t=\frac{1}{e}$에서 $t=e$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_{\frac{1}{e}}^{e}\sqrt{\frac{1}{t^2}+\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{t^2}\right)^2}\,dt$$
$$=\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{e}}^{e}\left(1+\frac{1}{t^2}\right)dt$$
$$=\frac{1}{2}\left[t-\frac{1}{t}\right]_{\frac{1}{e}}^{e}$$
$$=e-\frac{1}{e}$$

43 $\frac{dx}{dt}=e^t-e^{-t},\ \frac{dy}{dt}=2$

따라서 시각 $t=0$에서 $t=\ln 3$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^{\ln 3}\sqrt{(e^t-e^{-t})^2+2^2}\,dt$$
$$=\int_0^{\ln 3}(e^t+e^{-t})\,dt$$
$$=\left[e^t-e^{-t}\right]_0^{\ln 3}$$
$$=\frac{8}{3}$$

유형편

44 $\frac{dx}{dt}=t\cos t$, $\frac{dy}{dt}=-t\sin t$

시각 $t=0$에서 $t=a$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^a \sqrt{(t\cos t)^2+(-t\sin t)^2}\,dt=\int_0^a t\,dt$$
$$=\left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^a$$
$$=\frac{1}{2}a^2$$

따라서 $\frac{1}{2}a^2=2\pi^2$이므로

$a^2=4\pi^2$ $\quad\therefore a=2\pi$ ($\because a>0$)

45 $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2x}$

따라서 $x=1$에서 $x=e$까지의 곡선의 길이는

$$\int_1^e \sqrt{1+\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{2x}\right)^2}\,dx=\int_1^e \sqrt{\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2x}\right)^2}\,dx$$
$$=\int_1^e \left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2x}\right)dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}\ln x\right]_1^e$$
$$=\frac{1}{4}e^2+\frac{1}{4}$$

46 $\frac{dy}{dx}=-\sqrt{x}$

따라서 $x=0$에서 $x=a$까지의 곡선의 길이는

$$\int_0^a \sqrt{1+(-\sqrt{x})^2}\,dx=\int_0^a \sqrt{1+x}\,dx$$
$$=\left[\frac{2}{3}(1+x)\sqrt{1+x}\right]_0^a$$
$$=\frac{2}{3}(1+a)\sqrt{1+a}-\frac{2}{3}$$

따라서 $\frac{2}{3}(1+a)\sqrt{1+a}-\frac{2}{3}=\frac{14}{3}$이므로

$(1+a)\sqrt{1+a}=8$

위 식의 양변을 제곱하면

$(1+a)^3=64$

$a^3+3a^2+3a-63=0$

$(a-3)(a^2+6a+21)=0$

$\therefore a=3$ ($\because a^2+6a+21>0$)

47 $\frac{dx}{dt}=-\sin t-2\sin t\cos t$

$\quad=-\sin t-\sin 2t$

$\frac{dy}{dt}=\cos t+\cos^2 t-\sin^2 t$

$\quad=\cos t+1-2\sin^2 t$

$\quad=\cos t+\cos 2t$

따라서 $t=0$에서 $t=\pi$까지의 곡선의 길이는

$$\int_0^\pi \sqrt{(-\sin t-\sin 2t)^2+(\cos t+\cos 2t)^2}\,dt$$
$$=\int_0^\pi \sqrt{2+2\sin t\sin 2t+2\cos t\cos 2t}\,dt$$
$$=\int_0^\pi \sqrt{2+2\sin t\times 2\sin t\cos t+2\cos t\times(1-2\sin^2 t)}\,dt$$
$$=\int_0^\pi \sqrt{2+2\cos t}\,dt$$
$$=\int_0^\pi \sqrt{4\cos^2\frac{t}{2}}\,dt$$
$$=\int_0^\pi 2\cos\frac{t}{2}\,dt$$
$$=\left[4\sin\frac{t}{2}\right]_0^\pi$$
$$=4$$